Rachunek Prawdopodobieństwa 2022/2023 30.11.2022 (środa)

Imię i nazwisko ....

Zad. 1. Jedną kulę białą i trzy czarne rozmieszczamy losowo w N szufladach, gdzie $N \geq 2$ i każde rozmieszczenie kul w szufladach jest jednakowo prawdopodobne.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że
(a) w pierwszej urnie **nie ma** białej kuli?
(b) w pierwszej urnie **jest** kula biała, jeśli wiadomo, że w pierwszej urnie są dwie kule?

Ω - wszystkie rozmieszczenia kul w N szufladach

$|\Omega| = N \cdot \binom{N+3-1}{3} = N \cdot \binom{N+2}{3}$

a) A - w pierwszej urnie nie ma białej, $|A| = (N-1) \cdot \binom{N+2}{3}$

$P(A) = 1 - \frac{1}{N}$.

b) B - w pierwszej urnie 2 kule, $|B| = |B \cap A| + |B \cap A'| =$

$= (N-1)^2 + \binom{N-1+2-1}{2} = (N-1)^2 + \binom{N}{2}$

$P(A'|B) = \frac{|A' \cap B|}{|B|} = \frac{\binom{N}{2} N(N-1)}{2(N-1)^2 + N(N-1)} =$

$= \frac{N}{3N-2}$.

Zad. 2. Niech X będzie zmienną losową o gęstości $f(x) = \frac{1}{4}x^3 I_{(0,2)}(x)$. Znajdź wariancję X.

$\mathbb{E}X = \int_0^2 x \frac{1}{4} x^3 \, dx = \frac{1}{4} \cdot \int_0^2 x^4 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} 2^5 = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$

$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{4} x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} 2^6 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{8}{3} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{8}{75}$.

Zad. 3. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0;2]$.

(a) Znajdź rozkłady zmiennych losowych $Y = X^2$ oraz $Z = \max\{1, X\}$.

(b) Czy są to rozkłady absolutnie ciągłe?

a) $\mathbb{P}(Y \in [0,4]) = 1$, więc $F_Y(t) = 0$ dla $t < 0$ i $F_Y(t) = 1$ dla $t \geq 4$

Dla $t \in [0,4]$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{t}) \overset{X \geq 0}{=} F_X(\sqrt{t}) = \frac{1}{2}\sqrt{t}$$

Zatem

$$f_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot f_X(\sqrt{t}) = \frac{1}{4\sqrt{t}} I_{[0,4]}(t).$$

Dalej

$$\mathbb{P}(Z \in [1,2]) = 1.$$

Ale $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \frac{1}{2}$.

Dla $t > 1$

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(\max\{1, X\} \leq t) = \mathbb{P}(1 \leq t, X \leq t) =$$

$$= \mathbb{P}(X \leq t) = \frac{t}{2}.$$

Dla $t \geq 2$ $\mathbb{P}(Z \leq t) = 1$

Zatem $F_Z(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{t}{2}, & 1 \leq t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$.

b) Y ma rozkład abs. ciągły

Z nie.

Zad. 4. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie EXP(1). Rozważmy dwa kwadraty o bokach długości X (równoległych do osi układu współrzędnych), jeden o środku w punkcie $(0, 1)$, drugi o środku w punkcie $(1, 0)$. Niech P oznacza pole powierzchni części wspólnej tych kwadratów.

(a) wyznacz P w zależności od X (a więc jako funkcję zm. los. X),

(b) znajdź rozkład zmiennej losowej P.

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1-e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

a) $$P(X) = \begin{cases} 0, & X < 1 \\ (X-1)^2, & X \geq 1 \end{cases}.$$

b) $\mathbb{P}(P=0) = \mathbb{P}(X<1) = F_X(1)$

Dla $t<0$ $F_P(t) = 0$

Dla $t>0$ $F_P(t) = P\Big(\big((X-1)^2 \leq t \cap X \geq 1\big) \cup$

$\cup \; \big(0 \leq t \cap X < 1\big)\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rozłączne}}}{=} \mathbb{P}(X \geq 1, |X-1| \leq \sqrt{t}) +$

$+ \; P(X \leq 1) = \mathbb{P}(1 \leq X \leq 1+\sqrt{t}) + \mathbb{P}(X<1)$

$= F_X(1+\sqrt{t})$

Zatem $$F_P(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1-e^{-1-\sqrt{t}}, & t \geq 0 \end{cases}$$

(Nie ma gęstości).

Zad. 5. Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym równoramiennym. Rzucamy losowo:

- punkt D na przeciwprostokątną BC,
- punkt E na przyprostokątną AB.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że powstały w ten sposób trójkąt EBD jest rozwartokątny? Określ przestrzeń probabilistyczną.

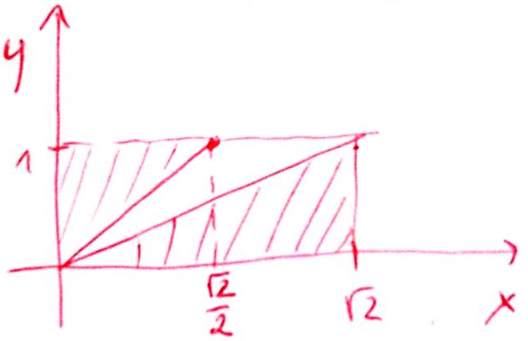
Niech $\Omega = [0, \sqrt{2}] \times [0, 1]$.

Para $(x, y) \in \Omega$ reprezentuje położenie punktów D i E następująco: $|DB| = x$, $|EB| = y$.

$\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\cdot) = \dfrac{\lambda_2(\cdot)}{\lambda_2(\Omega)}$.

$A = \{(x, y) \in \Omega : y \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \vee (x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y \geq x\sqrt{2})\}$

graficznie



Zatem $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$.

Rozkłady, które mogą się przydać:

Zmienna losowa X ma **rozkład jednostajny** na przedziale $[a, b]$, ozn. $X \sim U([a, b])$, jeśli ma gęstość postaci

$$f(x) = \frac{1}{b - a} I_{[a,b]}(x).$$

Zmienna losowa X ma **rozkład wykładniczy** z parametrem $\lambda > 0$, ozn. $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, jeśli ma gęstość postaci

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x).$$