Banco de Problemas para a Tutoria

Guilherme Zeus Dantas e Moura
guilhermezeus.com

1. Três pinos, etiquetados com A, B e C, estão localizados na origem do plano cartesiano. Em um *movimento*, é possível mover um pino que está na posição (x, y) para uma das posições $(x+1, y)$, $(x-1, y)$, $(x, y+1)$ ou $(x, y-1)$. Qual é o menor número de movimentos necessários para que o triângulo ABC possua área 2021?

2. Determine todos os pares (m, n) de inteiros positivos para os quais $mn - 1$ divide $m^2 + n^2$.

3. Determine todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais que satisfazem

$$P(x\sqrt{2}) = P(x + \sqrt{1 - x^2})$$

para todo real x com $|x| \leq 1$.

4. Mostre que todo racional positivo pode ser escrito como soma de inversos de inteiros positivos distintos. Por exemplo, $7/3 = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/20$.

5. Let ABC be a triangle inscribed in a circle of radius R, and let P be a point in the interior of ABC. Prove that

$$\frac{PA}{BC^2} + \frac{PB}{CA^2} + \frac{PC}{AB^2} \geq \frac{1}{R}.$$

6. Sejam a, b, c, d quatro elementos distintos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$ tais que a soma de quaisquer três deles é divisível pelo quarto. Determine o maior valor possível de $a + b + c + d$.

7. Encontre todos os inteiros n tais que $\sqrt{n} + \sqrt{n + 2019}$ também é inteiro.