Problemas Sortidos IV

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1 (Banco IMO 1998, N2)

Determine todos os pares (a, b) de números reais tal que

$$a\lfloor bn\rfloor = b\lfloor an\rfloor$$

para todo inteiro positivo n.

Solução. As soluções são: $(0, x)$, $(x, 0)$, (x, x) e (m, m') para x real e m, m' inteiros. É fácil checar que elas funcionam.

Suponha que (a, b) não satisfaz nenhum dos casos acima. Suponha também, sem perda de generalidade, que $|a| > |b|$.

Temos que, para todos os inteiros n,

$$a\{bn\} = b\{an\}$$

Como $\frac{a}{b} = \frac{\lfloor an\rfloor}{\lfloor bn\rfloor} \in \mathbb{Q}$, podemos reescrever $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ com p, q inteiros primos entre si. Ficamos com, para todo n inteiro,

$$\frac{p}{q}\{bn\} = \left\{\frac{p}{q}bn\right\}.$$

Repetindo o argumento acima, temos, para todo m, k inteiros,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^k \{bmq^k\} = \{bmp^k\}.$$

Escolha k grande o suficiente tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^k > 10^{10}$. Temos, então, para todo m inteiro,

$$10^{10}\{bmq^k\} < 1.$$

Defina $\varepsilon = \{bq^k\} < 10^{-10}$. Se $\varepsilon \neq 0$, tomando $m_0 = \left\lfloor \frac{1}{2\epsilon}\right\rfloor$, temos $\{bm_0q^k\} \approx \frac{1}{2} \gg 10^{-10}$, um absurdo. Se $\varepsilon = 0$, temos $\{bq^k\} = \{bp^k\} = 0$, isto é, bq^k, bp^k inteiros. Como q, p são primos entre si, temos b inteiro. Jogando $n = 1$ na equação orignial, temos a também inteiro; um caso já analisado.

Problema 2 (MEMO 2019, 2)

Seja $n \geq 3$ um inteiro. Dizemos que um vértice A_i, $1 \leq i \leq n$, de um polígono convexo $A_1A_2\ldots A_n$ é *boêmio* se sua reflexão com respeito ao ponto médio de $A_{i-1}A_{i+1}$ (com $A_0 = A_n$ e $A_1 = A_{n+1}$) cai dentro[a] do polígono $A_1A_2\ldots A_n$. Determine o menor número possível de vértices boêmios que um n-ágono convexo pode ter (em função de n).

[a] a borda do polígono é considerada dentro do polígono

Esboço. Vamos conjecturar casos pequenos:

- $n = 3$: 0 pontos boêmios.
- $n = 4$: 1 ponto boêmio.

Conjectura 1
A resposta é $n - 3$.

O seguinte lema é a parte crucial da solução.

Lema 2
Se A_i é boêmio em $A_1A_2A_3A_4$, então A_i é boêmio em $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Esboço. Usar definição algébrica de feixe convexo.

Problema 3 (HMIC 2016, 2)
Seja ABC um triângulo aculângulo com circuncentro O, ortocentro H, e circuncírculo Ω. Seja M o ponto médio de AH e N o ponto médio de BH. Suponha que os pontos M, N, O, H são distintos e caem no círculo ω.

Prove que os círculos ω e Ω são internamente tangentes.

Solução. O raio do circuncírculo de HMN, ω, é metade do raio do circuncírculo de HAB, por homotetia de centro H e razão 2.

O raio do circuncírculo de HAB é igual ao raio do circuncírculo de ABC, Ω, por reflexão pela reta AB.

Como ω passa pelo centro de Ω, e tem metade de seu raio; ω e Ω são tangentes internas.

Problema 4 (EGMO 2012, 7)
Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncírculo Γ e ortocentro H. Seja K um ponto de Γ no lado oposto de BC relativo a A. Seja L a reflexão de K pela reta AB, e seja M a reflexão de K pela reta BC. Seja E o segundo ponto de intersecção de Γ com o circuncírculo de BLM.

Mostre que as retas KH, EM e BC são concorrentes.

Solução. Defina H' como reflexão de H por BC.

Note que a composição das reflexões por AB e por BC é uma rotação por B com ângulo $2\angle B$. Como essas reflexões levam $L \to K \to M$, o ângulo $\angle LBM = 2\angle B$. Como $\triangle LBM$ é isósceles, $90° - \angle B = \angle BLM = \angle BEM$.

Defina X como a segunda intersecção de EM com o Γ. O ângulo $\angle BEX = 90° - \angle B \implies \angle BAX = 90° - \angle B \implies X = H'$.

E, M, H' são colineares $\iff$ KH, EM, BC são concorrentes.