Equações Funcionais

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

§1 Ideias úteis

(a) Procurar algumas soluções para saber o que tentar provar.

(b) Injetividade, sobretetividade, paridade, ...

(c) Explorar expressões quase simétricas.

(d) Resolver para $\mathbb{Z}$, extender para $\mathbb{Q}$ e extender para $\mathbb{R}$.

§2 Problemas

Problema 1 Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$2f(x) + f(1-x) = 1 + x$$

para todo x real.

Problema 2 **(OMERJ 2006, N3, 4)** Encontre todas as funções $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tais que

$$2xf(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

para todo real não nulo x.

Problema 3 **(Equação de Cauchy)** Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tais que

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para quaisquer x e y racional.

Problema 4 **(IMO 2019, 1)** Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

para quaisquer a e b inteiros.

Problema 5 Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ tais que $f(0) = 1$ e

$$f(xy+1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2$$

para todos os x e y reais.

Problema 6 **(2018 IMO Canada Training)** Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

para todos os x e y inteiros.

Problema 7 **(OMERJ 2013, N4, 6)** Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(x) - f(y)$$

para todos x e y inteiros.

Problema 8 **(IMO 2010, 1)** Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

para quaisquer x e y reais.

Problema 9 **(IMO 2002, 5)** Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$(f(x) + f(y))(f(w) + f(z)) = f(xw - yz) + f(xz + yw)$$

para todos os x, y, w e z reais.

Problema 10 **(OMERJ 2012, N3, 5)** Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos x e y reais.

Problema 11 **(Ucrânia 2018)** Ache todas as funções $f : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$, tais que

$$f(f(x) + f(y)) = xyf(x + y)$$

para quaisquer x e y não negativos.

Problema 12 **(OBM 2010, 1)** Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(a + b) = f(ab)$$

para todos a, b irracionais.

Problema 13 **(OBM 1998, 5)** Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfazem

$$f(2f(x)) = x + 1998$$

para todo $x \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Problema 14 **(IMO 2004, 2)** Encontre todos os polinômios $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ que satisfaz a igualdade

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$$

para todas os a, b, c reais tais que $ab + bc + ca = 0$.

Problema 15 **(IMO 2009, 5)** Determine todas as funções $f : \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{Z}_+^*$ tais que existe um triângulo não degenerado* cujos lados medem

$$a, \quad f(b) \quad \text{e} \quad f(b + f(a) - 1)$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \dots\}$.

Problema 16 **(IMO 1999, 6)** Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

para todos x e y reais.

Problema 17 **(IMO 2017, 2)** Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy)$$

para todos x e y reais.

Problema 18 **(OBM 2013, 3)** Encontre todas as funções injetoras $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tais que

$$f(x + y) \cdot (f(x) + f(y)) = f(xy)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^*$ com $x + y \neq 0$.

Problema 19 **(OBM 2012, 6)** Encontre todas as funções sobrejetoras $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tais que

$$2x \cdot f(f(x)) = (f(f(x)) + x) \cdot f(x)$$

para todo x real positivo.

Problema 20 **(OBM 2006, 3)** Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$$

para todos x e y reais.

Problema 21 **(OMERJ 2017, N3, 6)** Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

---

*Um triângulo não degenerado é um triângulo cujos vértices não são colineares.