Problemas do Curso de Combinatória do IMPA
Anotações de Aula

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

Definições

- $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$;
- $\mathcal{P}(S)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de S.
- $\binom{S}{k}$ é o conjunto de todos os subconjuntos de S que possuem exatamente k elementos.
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}([n])$ é uma *cadeia* se $A \subset B$ ou $B \subset A$, para quaisquer $A, B \in \mathcal{S}$, $A \neq B$.
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}([n])$ é uma *anti-cadeia* se $A \not\subset B$, para quaisquer $A, B \in \mathcal{S}$, $A \neq B$.
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}([n])$ é *intersectante* se $A \cap B \neq \varnothing$, para quaisquer $A, B \in \mathcal{S}$.
- Seja $\operatorname{ex}(n, H)$ o número máximo de arestas que um grafo G com n vértices pode ter de modo que não existam cópias de H em G.

Problemas

Problema 1 (Sperner, 1910's). Se $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}([n])$ é uma anti-cadeia, então $|\mathcal{S}| \leq \binom{n}{n/2}$.

Solução (of Sperner, 1910's). The example is $\binom{[n]}{n/2}$.

Lema 1 (LYMB, 1960's). If $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}([n])$ is an anti-chain, then $\sum_{A \in \mathcal{S}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1$.

Demonstração (of LYMB, 1960's). Let's count the pairs (π, A) such that π is a permutation of $[n]$, $A \in \mathcal{S}$, and $\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(|A|)\} = A$.

For each $A \in \mathcal{S}$, the number of π such that $\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(|A|)\}$ is equal to $|A|!(n - |A|)!$.

For each π, the number of $A \in \mathcal{S}$ such that $\{\pi(1), \ldots, \pi(|A|)\}$ is at most 1, since $\mathcal{S}$ is an anti-chain.

Therefore,

$$\sum_{A \in \mathcal{S}} |A|!(n - |A|)! \leq n! \implies \sum_{A \in \mathcal{S}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

□

We know that $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{n/2}$. Thus, by LYMB, 1960's,

$$1 \geq \sum_{A \in \mathcal{S}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \geq \sum_{A \in \mathcal{S}} \frac{1}{\binom{n}{n/2}} = \frac{|\mathcal{S}|}{\binom{n}{n/2}}$$

Problema 2. Suponha que $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}([n])$ é intersectante. Prove que $|\mathcal{S}| \leq 2^{n-1}$.

Esboço. The example is $\{A \in \mathcal{P}([n]) : 1 \in A\}$. At most one of $(A, \overline{A})$ can be on $\mathcal{S}$. Therefore, $|\mathcal{S}| \leq 2^{n-1}$.

Problema 3 (Erdős-Ko-Rado, 1961). Sejam k e n inteiros positivos tais que $k < \frac{n+1}{2}$. Suponha que $\mathcal{S} \subset \binom{[n]}{k}$ é intersectante. Prove que $|\mathcal{S}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Esboço. O exemplo é $\{A \in \binom{[n]}{k} : 1 \in A\}$.

A ideia é contar os pares (π, A) tais que π é uma permutação cíclica, $A \in \mathcal{S}$, e $A = \{\pi(t+1), \pi(t+2), \ldots, \pi(t+k)\}$, for some t. Contando por π, a quantidade é no máximo $k(n-1)!$. Contando por A, a quantidade é exatamente $|S|\, k!(n-k)!$. Portanto, $|S| \leq \binom{k-1}{n-1}$.

Mais detalhes em Department of Computer Science and Technology at Nanjing University.

Problema 4. Sejam k e r inteiros positivos. Todo inteiro positivo é pintado com uma de r cores. Prove que existe uma progressão aritmética monocromática com k termos.

Solução. We will use induction on k. Note that $W(r, 1) = 1$.

We shall find r color-focused $(k-1)$-arithmetic progressions.

Lema 2. There exists $n = n(s, r)$ such that, for every coloring $c\colon [n] \to [r]$, there exists a monochromatic k-arithmetic progression or s color-focused $(k-1)$-arithmetic progressions.

Demonstração. Induction on s. If $s = 1$, then $n(1, r) = W(r, k-1) < \infty$.

Suppose $s > 1$. Let $N = 2n(s-1, r)$. Consider $W(r^N, k-1) < \infty$ blocks of size N. There is an arithmetic progression of equally-colored blocks of size $k-1$, let D be the distance of consecutive blocks in the arithmetic progression of blocks. Since the first half of the block has $n(s-1, r)$ elements, there exists a monochromatic k-arithmetic progression (which means we're done), or $s-1$ color-focused $(k-1)$-arithmetic progressions – their focus f surely lies inside the block of size N.

Let the $s-1$ color-focused $(k-1)$-arithmetic progressions in the first block be $PA_{k-1}(a_1, d_1)$, $\dots$, $PA_{k-1}(a_{s-1}, d_{s-1})$, with focus f_1. The proposed s color-focused $(k-1)$-arithmetic progressions are $PA_{k-1}(a_1, d_1 + d), \dots, PA_{k-1}(a_{s-1}, d_{s-1} + d), PA_{k-1}(f_1, d)$.

Therefore,

$$n(s, r) \leq 2 \cdot W(r^{2n(s-1,r)}, k-1) \cdot 2n(s-1, r).$$

$\square$

Therefore, for suitable large n, there must exist a large k-arithmetic progression.