Problemas Sortidos de Combinatória – Live

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 4 (Banco IMO 2012, C2). Seja $n \geq 1$ um inteiro. Qual é a quantidade máxima de pares disjuntos de elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que, para quaisquer dois pares distintos, suas somas são distintas e não ultrapassam n.

Seja $k(n)$ a resposta do problema, i.e. qual a quantidade máxima de pares com a propriedade desejada.

Vamos juntar $(n-1, 1)$, $(n-3, 2)$, $(n-5, 3)$, $(n-7, 4)$, $(n-9, 5)$, $\ldots$.

Essa lista tem $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ pares. Portanto,

$$k(n) \geq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor.$$

(Ideia não continuada) Para provar a desigualdade reversa, uma boa ideia pode ser usar indução de uma forma parecida com indução em grafos: começar com uma configuração que funciona para n, obter outra configuração menor (no sentido de "menor" que for mais apropriado) e aplicar a hipótese de indução.

Vamos usar contagem dupla. Suponha que existem k pares que satisfazem o enunciado. Sejam eles $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k)$.

Por um lado, a soma de todos os $2k$ números selecionados é

$$\sum = (a_1 + b_1) + \cdots + (a_k + b_k) \leq n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-k+1) = \frac{(2n-k+1)k}{2}.$$

Por outro lado, vale

$$\sum = a_1 + b_1 + \cdots + a_k + b_k \geq 1 + 2 + 3 + \cdots + 2k = \frac{(2k+1)2k}{2}.$$

Logo,

$$\begin{gathered} 2n - k + 1 \geq 4k + 2 \\ 2n - 1 \geq 5k \\ \frac{2n-1}{5} \geq k. \end{gathered}$$

Isso implica que

$$k(n) \leq \frac{2n-1}{5}.$$

Se $n = 5m+3$, $k = 2m+1$, a gente vai tentar usar os números $1, 2, \cdots 4m+2$ para obter as somas $5m+3, 5m+2, \cdots, 3m+3$. Para isso, vamos formar 2 grupos de pares:

- $(4m+2, m+1)$ com soma $5m+3$;
- $(4m, m+2)$ com soma $5m+2$;
- $(4m-2, m+3)$ com soma $5m+1$;
- $(4m-4, m+4)$ com soma $5m$;

$\vdots$

- $(2m+2, 2m+1)$, com soma $4m+3$;

  e

- $(4m+1, 1)$ com soma $4m+2$;
- $(4m-1, 2)$ com soma $4m+1$;
- $(4m-3, 3)$ com soma $4m$;
- $(4m-5, 4)$ com soma $4m-1$;

  $\vdots$

- $(2m+3, m)$ com soma $3m+3$.

Problema 2 (Irã 1997-98). Cada casa de um tabuleiro $n \times n$ está preenchida com um dos números $-1, 0, 1$. Toda linha e toda columa possui exatamente um 1 e um -1. Prove que as linhas e colunas podem ser reordenadas tal que, no tabuleiro resultante, cada número seja trocado por seu oposto.

Vamos trocar 1 por $+$, -1 por $-$ e 0 por uma casa vazia.

Vamos chamar de tabela principal de tamanho n a tabela onde a diagonal principal possui $+$ e as casas acima da diagonal principal possuem $-$. Aqui, representamos a tabela principal de tamanho 5:

$$\begin{bmatrix} + & - & & & \\ & + & - & & \\ & & + & - & \\ & & & + & - \\ - & & & & + \end{bmatrix}$$

Ao trocar as linhas $(1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n)$ por $(n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1)$ e trocar $(1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n)$ por $(1, n, n-2, \ldots, 4, 3, 2)$, mostramos que o problema é verídico para qualquer tabela principal de tamanho n. Vamos chamar a permutação de linhas e colunas acima de ψ.

Se conseguirmos uma permutação ϕ de linhas e colunas que leva um tabuleiro T na tabela principal, podemos fazer $\phi^{-1} \circ \psi \circ \phi$ para levar o tabuleiro T no tabuleiro com entradas opostas. (Isso é falso. Não dá pra levar qualquer tabuleiro em uma tabela principal, mas dá pra levar qualquer tabuleiro em uma "concatenação" de tabelas principais. De qualquer modo, vamos abordar o problema usando grafos.)

Vamos criar um grafo orientado $G(T)$, em função de T. Os vértices serão as colunas e $i \to j$ se o $+$ da coluna i está na mesma linha que o $-$ da coluna j. Por exemplo, se T é a tabela principal de tamanho n, $G(T)$ é o ciclo $1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n \to 1$.

Observe como esse grafo varia quando permutamos as linhas e colunas (fizemos isso durante a aula).

Os seguintes dois lemas (que provamos durante a aula) acabam o problema.

Lema 1. Se T é um tabuleiro e T' é a tabuleiro com entradas opostas, então existe um tabuleiro S tal que:

- Existe uma permutação de colunas que leva T em S, e;
- $G(S) = G(T')$.

Lema 2. Se A e B são dois tabuleiros com $G(A) = G(B)$, então existe uma permutação de linhas que leva A em B.