

---

Método ProbabilísticoGuilherme Zeus Moura  
zeusdanmou@gmail.com

---

**Problema 1.** (EGMO 2019) Seja  $n \geq 2$  um inteiro, e sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n$  inteiros positivos. Mostre que existem inteiros positivos  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , que satisfazem as seguintes três condições:

1.  $a_i \leq b_i$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;
2. os restos de  $b_1, b_2, \dots, b_n$  na divisão por  $n$  são distintos dois a dois;
3.  $b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq n \cdot \left( \frac{n-1}{2} + \left\lceil \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right\rceil \right)$

( $\lceil x \rceil$  denota a parte inteira do número real  $x$ , isto é, o maior inteiro que é menor ou igual a  $x$ .)

**Problema 2.** (IMC 2017) There are  $n$  people in a city, and each of them has exactly 1000 friends (friendship is always symmetric). Prove that it is possible to select a group  $S$  of people such that at least  $n/2017$  persons in  $S$  have exactly two friends in  $S$ .