Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro
2012 - 2018

	1	2	3	4	5	6
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						

Problema 1. Um número natural é chamado de *factorion* se ele é igual a soma dos fatoriais dos seu dígitos decimais. Encontre todos os números de 3 dígitos que são factorions.

Observação: O fatorial de um número inteiro não negativo e definido da seguinte forma: $0! = 1$ e para n inteiro positivo, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Por exemplo, $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.

Problema 2. Considere um triângulo equilátero ABC de lado 1. Um círculo C_1 é construído tangenciando os lados AB e AC. Um círculo C_2, de raio maior que o raio de C_1, é construído tangenciando os lados AB e AC e tangenciando externamente o círculo C_1. Sucessivamente, para n inteiro positivo, o círculo C_{n+1}, de raio maior que o raio de C_n, tangencia os lados AB e AC e tangencia externamente o círculo C_n. Determine os possíveis valores para o raio de C_1 de forma que caibam 4, mas não 5 círculos dessa sequência, inteiramente contidos no interior do triângulo ABC.

Problema 3. Seja n um inteiro positivo. Uma função $f : \{1, 2, \dots, 2n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é dita *boa* se $f(j + 2)$ e $f(j)$ têm a mesma paridade para todo $j = 1, 2, \dots, 2n - 2$. Prove que a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito.

Problema 4. Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito na circunferência Γ. Sejam D e E pontos em Γ tais que AD é perpendicular a BC e AE é diâmetro. Seja F o ponto de interseção de AE com BC. Prove que se $\angle DAC = 2\angle DAB$, então $DE = CF$.

Problema 5. Sejam n um inteiro positivo e $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$ uma permutação de $\{1, \dots, n\}$. O *número de cadência* de σ é o número de blocos decrescentes maximais. Por exemplo, se $n = 6$ e $\sigma = (4, 2, 1, 5, 6, 3)$, então o número de cadência de σ é 3, pois σ possui 3 blocos $(4, 2, 1)$, (5), $(6, 3)$ descrescentes e maximais. Note que os blocos $(4, 2)$ e $(2, 1)$ são decrescentes, mas não são maximais, já que estão contidos no bloco $(4, 2, 1)$.

Calcule a soma das cadências de todas as permutações de $\{1, \dots, n\}$.

Problema 6. Dois quadrados perfeitos são ditos amigáveis se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo, $1225 = 35^2$ e $225 = 15^2$ são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.

Problema 1. Sejam ABC um triângulo e k um número real positivo menor do que 1. Tome A_1, B_1 e C_1 pontos nos lados BC, AC e AB de modo que

$$\frac{A_1B}{BC} = \frac{B_1C}{AC} = \frac{C_1A}{AB} = k.$$

(a) Calcule em função de k a razão entre as áreas dos triângulos $A_1B_1C_1$ e ABC.

(b) Mais geralmente, para todo $n \geq 1$, constrói-se o triângulo $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, de modo que A_{n+1}, B_{n+1} e C_{n+1} sejam pontos nos lados B_nC_n, A_nC_n e A_nB_n satisfazendo

$$\frac{A_{n+1}B_n}{B_nC_n} = \frac{B_{n+1}C_n}{A_nC_n} = \frac{C_{n+1}A_n}{A_nB_n} = k.$$

Determine os valores de k de modo que a soma das áreas de todos os triângulos $A_nB_nC_n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ seja igual a $\dfrac{1}{3}$ da área do triângulo ABC.

Problema 2. Seja (a_n) uma sequência de números inteiros tal que $a_1 = 1$ e para $n \geq 1$ inteiro positivo, $a_{2n} = a_n + 1$ e $a_{2n+1} = 10a_n$. Quantas vezes o número 111 aparece nessa sequência?

Problema 3. Sejam n e k inteiros positivos. Uma função $f : \{1, 2, 3, 4, \ldots, kn-1, kn\} \to \{1, \cdots, 5\}$ é dita *boa* se $f(j+k) - f(j)$ é múltiplo de k para todo $j = 1, 2. \cdots, kn-k$.

(a) Prove que se $k = 2$, então a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito para todo n inteiro positivo.

(b) Prove que se $k = 3$, então a quantidade de funções boas é um cubo perfeito para todo n inteiro positivo.

Problema 4. Encontre todos os valores reais que a pode assumir de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y^3 + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z^3 = a \end{cases}$$

possua solução com x, y, z reais distintos dois a dois.

Problema 5. Sejam Θ_1 e Θ_2 circunferências com centros O_1 e O_2, respectivamente, tangentes exteriormente. Sejam A e B pontos sobre Θ_1 e Θ_2, respectivamente, tais que a reta AB é tangente comum externa a Θ_1 e Θ_2. Sejam C e D pontos no semiplano determinado por AB que não contém O_1 e O_2 tais que $ABCD$ é um quadrado. Se O é o centro deste quadrado, determine os possíveis valores do ângulo $\angle O_1OO_2$.

Problema 6. Dois quadrados perfeitos são ditos amigáveis se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo, $1225 = 35^2$ e $225 = 15^2$ são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.

Problema 1. Seja $ABCD$ um retângulo com lados $AB = 6$ e $BC = 8$. Por um ponto X do lado AB com $AX < XB$, traça-se uma reta paralela a BC. Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do retângulo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a medida do segmento AX.

Problema 2. Luiza quer pintar os vértices de um prisma triangular com 5 cores, de modo que se dois vértices estão ligados por uma aresta, então eles têm cores diferentes. De quantas maneiras Luiza pode pintar esse prisma?

Problema 3. Encontre todos os reais a para os quais o sistema de equações

$$x^2 - yz = ax^2$$

$$y^2 - xz = ax^2$$

$$z^2 - xy = ax^2$$

possui pelo menos uma solução real (x, y, z) com $x \neq 0$.

Problema 4. Sejam Γ uma circunferência de centro O e ℓ uma reta tangente a Γ em A. Tome B um ponto em Γ (diferente do ponto diametralmente oposto a A em Γ) e seja B' o simétrico de B em relação a ℓ. Sejam E, distinto de A, o ponto de interseção de Γ com a reta $B'A$ e D, distinto de E, a interseção das circunferências circunscritas aos triângulos $BB'E$ e AOE

(a) Calcule a medida do ângulo $\angle B'BE$.

(b) Prove que B, O e D são colineares.

Problema 5. Seja N um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos, cuja representação decimal é $(a_{2k}a_{2k-1}\dots a_4a_3a_2a_1)_{10}$. Definimos o *alternado* de N como sendo o número $M = (a_{2k-1}a_{2k}\dots a_3a_4a_1a_2)_{10}$. Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos N tais que $M = 2N - 1$, onde M é o alternado de N.

Problema 6. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

Problema 1. Seja $ABCD$ um paralelogramo. Por um ponto X do lado AB, com $AX < XB$, traça-se uma reta paralela a BC. Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do paralelogramo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a razão $\frac{AX}{AB}$.

Problema 2. Encontre todos os números reais x que satisfaçam

$$x = \frac{1}{2}\lfloor x \rfloor^2 + 3\lfloor x \rfloor + 2.$$

Problema 3. Pedro quer pintar os vértices de um tabuleiro $2 \times n$ de modo que cada quadradinho deste tabuleiro possua exatamente um vértice pintado.

(a) Determine o número máximo de vértices que Pedro pode pintar.

(b) Determine o número mínimo de vértices que Pedro pode pintar.

Problema 4. Seja N um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos, cuja representação decimal é $(a_{2k}a_{2k-1}\ldots a_4a_3a_2a_1)_{10}$. Definimos o *alternado* de N como sendo o número $M = (a_{2k-1}a_{2k}\ldots a_3a_4a_1a_2)_{10}$. Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos N tais que $M = 2N - 1$, onde M é o alternado de N.

Problema 5. Seja ABC um triângulo acutângulo e seja AD, com D em BC, a altura relativa ao vértice A. Sejam Γ_1 e Γ_2 as circunferências circunscritas aos triângulos ABD e ACD, respectivamente. A circunferência Γ_1 intersecta o lado AC nos pontos A e P, enquanto Γ_2 intersecta o lado AB nos pontos B e Q. Seja X o ponto de interseção da reta BP com Γ_2 de modo que P está entre B e X. Da mesma forma, seja Y o ponto de interseção da reta CQ com Γ_1 de modo que Q está entre C e Y. Sabendo que A, X e Y são colineares, calcule o menor valor possível para o ângulo $\angle BAC$.

Problema 6. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

Problema 1. A professora de Joãozinho escreveu no quadro um sistema de equações. Joãozinho, quando copiou do quadro o sistema, escreveu errado um, e somente um, coeficiente do sistema. Esse foi o sistema que Joãozinho escreveu em seu caderno:

$$x + y + 2z = 6$$

$$3x + 2y + z = 7$$

$$4x + 2y + 3z = 12$$

Sabendo que o sistema original tem todos os coeficientes inteiros e sua solução é $\left(\frac{5}{11}, \frac{21}{11}, \frac{20}{11}\right)$, encontre o sistema original.

Problema 2. Seja $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de x, isto é, o maior inteiro menor ou igual a x. Seja $\{x\}$ a parte fracionária de x, definida como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Um número real é dito replicante se $x = \{10x\}$. Encontre a soma de todos os números replicantes.

Problema 3. Encontre o número de sequências $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ satisfazendo $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$ e $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots a_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots, 9$.

Problema 4. Sejam x, y e z reais satisfazendo $x, y, z \geq -1$ e $x + y \geq 2$, $x + z \geq 2$, $y + z \geq 2$. Prove que $xy + yz + zy \geq 3$.

Problema 5. Seja Γ uma circunferência de centro O e seja P um ponto no interior de Γ. Seja O' o ponto tal que P é ponto médio de OO'. Suponha que a circunferência Γ' de centro O' que passa por P é secante a Γ e seja A um ponto na interseção de Γ com Γ'. Se B é o outro ponto de interseção da reta AP com Γ, calcule $\frac{PB}{PA}$.

Problema 6. Seja p ¿ 3 um número primo. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ números inteiros tais que a_1 não é múltiplo de p e $a_1^k + a_2^k + \cdots + a_{p-1}^k$ é múltiplo de p para todo $k = 1, \ldots, p-2$. Prove que a_i não é múltiplo de p para todo $i = 1, 2, \ldots, p-1$, e que $a_i - a_j$ não é múltiplo de p para todos $i, j = 1, 2, \ldots, p-1$ com $i \neq j$.

Problema 1. Escrevendo-se a representação decimal de 40! da esquerda para direita, qual o último digito não nulo que foi escrito? (Por exemplo 11! = 39916800, logo o último dígito não nulo de 11! é 8.)

Problema 2. Encontre o número de sequências $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ satisfazendo que $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todo $n = 1, 2, \ldots, 10$ e que $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots, 9$.

Problema 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \{10x\}$. Um número é dito tri-replicante se ele satisfaz

$$f(f(f(x))) = x.$$

Encontre a soma de todos os números tri-replicantes.

Observação: $\{x\}$ é a parte fracionária de x, isto é, $\{x\} = x = \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é o menor inteiro maior ou igual a x.

Problema 4. Seja Γ uma circunferência de centro O e seja P um ponto no interior de Γ. Seja O' o ponto tal que P é ponto médio de OO'. Suponha que a circunferência Γ' de centro O' que passa por P é secante a Γ e seja A um ponto na interseção de Γ com Γ'. Se B é o outro ponto de interseção da reta AP com Γ, calcule $\frac{PB}{PA}$.

Problema 5. Encontre todos os polinômios P com coeficientes reais tais que

$$xP(x) + yP(y) \geq 2P(xy)$$

para quaisquer x e y reais.

Problema 6. Sejam ABC um triângulo acutângulo e Γ sua circunferência circunscrita. Sejam D, E e F os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados BC, AC e AB, respectivamente. Sejam A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 os pontos de interseção de Γ com as retas DE, DF e EF de modo que A_1 e A_2 se encontram no arco menor BC, B_1 e B_2 se encontram no arco menor AC, e C_1 e C_2 se encontram no arco menor AB. Se $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$, prove que o triângulo ABC é equilátero.

Problema 1.

Problema 2.

Problema 3.

Problema 4.

Problema 5.

Problema 6.

Problema 1.

Problema 2.

Problema 3.

Problema 4.

Problema 5.

Problema 6.

Problema 1.

Problema 2.

Problema 3.

Problema 4.

Problema 5.

Problema 6.

Problema 1.

Problema 2.

Problema 3.

Problema 4.

Problema 5.

Problema 6.

Problema 1.

Problema 2.

Problema 3.

Problema 4.

Problema 5.

Problema 6.

Problema 1.

Problema 2.

Problema 3.

Problema 4.

Problema 5.

Problema 6. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(x) - f(y)$$

para todos x e y inteiros.

Problema 1.

Problema 2.

Problema 3.

Problema 4.

Problema 5. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos x e y reais.

Problema 6.

Problema 1.

Problema 2.

Problema 3.

Problema 4.

Problema 5.

Problema 6.