3) Casos iniciais:

- $n=0$, $a_0, a_1, a_2, \dots$

  $0, 1, \dots$

Similar a $n=1$, a_i do $n=0$ igual a a_{i-1} do $n=1$, $\forall i \geq 1$.

- $n=1$, $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \| & \| & \| & \| & \| \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \end{array}$$

$+2 \quad +3 \quad +4 \quad +5$

$+2 \quad +2$

Conjectura: $a_i - a_{i-1} + 2 = a_{i+2} - a_i$, $\forall i \in \mathbb{Z}, i \geq 1$

Note que como começamos com $a_0 = n$, $a_1 + a_0 = a_1 + n = k^2$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Mas $a_1 > a_0 \Rightarrow a_1 + a_0 > 2n \Rightarrow k^2 > 2n$

O primeiro k que satisfaz (1) é

$$k = \lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 1 \Rightarrow k^2 = (\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 1)^2$$

$$\Rightarrow a_1 = k^2 - a_0 = \lfloor \sqrt{2n} \rfloor^2 + 2\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 1 - n$$

Sabemos que $a_1 + a_2 = x^2$

$x^2 \geq (\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 2)^2$ e $a_2 > a_1$.

$$a_2 \geq (\lfloor 2n \rfloor + 2)^2 - a_1$$

$$\Rightarrow a_2 \geq 2\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 3 + n$$

Veja que $2\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 3 + n > \lfloor \sqrt{2n} \rfloor^2 + 2\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 1 - n$

$\Longleftrightarrow 2n + 4 > \lfloor \sqrt{2n} \rfloor^2$ pois

$\lfloor \sqrt{2n} \rfloor^2 \leq (\sqrt{2n})^2 = 2n < 2n+4$.

Logo, $a_2 = 2\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 3 + n$

Pela conjectura, temos que definindo a_0, a_1, a_2 definimos a sequência.

Além disso, as diferenças $a_1 - a_0$ e $a_2 - a_1$ que possuem paridades diferentes, todo par $\geq \{a_1 - a_0$ ou $a_2 - a_1$ o que for par$\}$ e $\forall$ ímpar $\geq \{a_1 - a_0, a_2 - a_1$ o que for ímpar$\}$ são escritos da forma $a_k - a_l$.

Suponha, por simplicidade, $a_1 - a_0$ par e $a_2 - a_1$ ímpar.

Então os números que faltam são os pares $< a_1 - a_0$ e os ímpares $< a_2 - a_1$.

Vamos notar as seguintes duas ideias chaves:

(1) $\cdot (a_{k+2}-a_{k+1})-(a_k-a_{k-1})=2$

(2) $\cdot$ As paridades de $(a_{k+1}-a_k)$ alternam.

Analogamente a como vimos acima,

$$a_3=(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+3)^2-a_2$$
$$=(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+3)^2-(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+2)^2+a_1$$

e

$$a_2=(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+2)^2-(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+1)^2+a_0.$$

Portanto

$$(a_3-a_2)-(a_1-a_0)=a_3-a_1-(a_2-a_0)$$
$$=(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+3)^2-2\cdot(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+2)^2+(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+1)^2$$
$$=\underline{\underline{2}}.$$

Como a definição do a_{k+1} só depende do a_k, para demonstrar qualquer resultado a respeito de $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k-1}$ definindo

$a_0' := a_{k-1}$,

de onde seguirá que

$a_1' = a_k$, $a_2' = a_{k+1}$, $a_3' = a_{k+2}$

Logo (1) está demonstrado.

Da mesma forma, podemos mostrar que as paridades a-
ternam para todo K apenas demonstrando que $a_1 - a_0$ e $a_2 - a_1$ têm paridades distintas. Note que

$$a_1 - a_0 = a_1 - n = (\lfloor\sqrt{2n}\rfloor + 1)^2 - \underbrace{2n}_{\text{par}} \quad \left(\text{mesma paridade que } \lfloor\sqrt{2n}\rfloor + 1\right)$$

$$a_2 - a_1 = (\lfloor\sqrt{2n}\rfloor + 2)^2 - \underbrace{2a_1}_{\text{par}} \quad \left(\text{mesma paridade que } \lfloor\sqrt{2n}\rfloor + 2\right)$$

Portanto as paridades são distintas, finalizando (2).

Note, então, que todas as diferenças $a_k - a_l$ $(k > l)$ apar[illegible] já em [illegible] $a_{k+1} - a_k$, pois

$$a_k - a_l = (a_k - a_{k-1}) + \dots \geq \max_{l \leq i \leq k} (a_i - a_{i-1})$$

Portanto resta ver quantos pares há $< a_1 - a_0$ e quantos ímpares $< a_2 - a_1$.

No primeiro conjunto, há

$$\frac{a_1 - a_0}{2} - 1 \text{ e, no segundo, } \frac{a_2 - a_1 + 1}{2} - 1.$$

Assim, há

$$\frac{a_2 - a_0}{2} - \frac{3}{2} \text{ números não contados.}$$

Como $a_2 = (\lfloor\sqrt{2n}\rfloor^2 + 2)^2 - (\lfloor\sqrt{2n}\rfloor + 1)^2 + n$

$= 2\lfloor\sqrt{2n}\rfloor + 3 - n$,

Segue que

$$\frac{a_2 - n}{2} - \frac{3}{2} = \lfloor\sqrt{2n}\rfloor.$$

■