Resumo das Tutorias

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. **(Livro do Davi)** Sejam $\{a_1, \dots, a_n\}$ e $\{b_1, \dots, b_n\}$ dois multiconjuntos distintos, cada um deles formado por inteiros positivos. Se a igualdade dos seguintes multiconjuntos é verdadeira

$$\{a_i + a_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n\} = \{b_i + b_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n\},$$

prove que n é uma potência de 2.

Esboço. Davi Braga, Arthur e Nikolas sabem fazer esse problema.

2. **(2021 EGMO, 5)** Um plano tem um ponto especial O chamado origem. Seja P um conjunto de 2021 pontos no plano tal que

- não existem três pontos em P que sejam colineares.
- não existem dois pontos que estejam numa reta que passe pela origem.

Um triângulo com vértices em P é chamado de *gordo* se O está estritamente interno ao triângulo. Encontre o maior número de triângulos gordos.

Esboço. Davi Braga, Arthur, Nikolas e Giglio sabem fazer esse problema.

3. **(Banco IMO 2012, A4)** Sejam f e g dois polinômios não identicamente nulos com coeficientes inteiros e $\deg f > \deg g$. Suponha que existem infinitos primos p para os quais o polinômio $pf + g$ possui raíz racional. Prove que f possui raíz racional.

Esboço. Rosalba, Eduardo e Thiago sabem fazer esse problema.

4. **(Banco IMO 2012, N4)** Um inteiro a é chamado *amigável* se a equação $(m^2 + n)(n^2 + m) = a(m - n)^3$ possui solução inteira positiva.

(a) Prove que existem pelo menos 500 inteiros amigáveis no conjunto $\{1, 2, \dots, 2012\}$.

(b) Determine se $a = 2$ é amigável.

Esboço. Rodrigo, Rosalba, Arthur e João Rafael sabem fazer esse problema.

5. **(1º Teste de Seleção do Brasil para a IMO 2021, Problema 4)** `Problema censurado.`

Esboço. Parece que o Rodrigo sabe fazer.

6. Seja S um conjunto não vazio de inteiros positivos. Dizemos que um inteiro positivo n é *bacana* se ele possui uma representação única como soma de uma quantidade ímpar de elementos distintos de S. Prove que existem infinitos inteiros que não são bacanas.

Esboço. Suamos, mas não terminamos. Perguntar avanços a Miguel, João Rafael, Rodrigo e João Marcelo.

7. **(Banco IMO 2018, G3)** Um círculo ω de raio 1 é dado. Uma coleção T de triângulos é chamada *boa* se:

(*i*) cada triângulo de T é inscrito em ω, e;

(*ii*) nenhum par de triângulos de T possui ponto interior comum.

Encontre todos os números reais positivos t tais que, para todo inteiro positivo n, existe uma coleção boa com n triângulos, cada um com perímetro maior que t.

Esboço. Arthur, Giglio e Rosalba sabem fazer.