Problemas G1 e G2 do Banco da IMO

1. **(Banco IMO 2020, G1)** Let ABC be an isosceles triangle with $BC = CA$, and let D be a point inside side AB such that $AD < DB$. Let P and Q be two points inside sides BC and CA, respectively, such that $\angle DPB = \angle DQA = 90°$. Let the perpendicular bisector of PQ meet line segment CQ at E, and let the circumcircles of triangles ABC and CPQ meet again at point F, different from C. Suppose that P, E, F are collinear. Prove that $\angle ACB = 90°$.

2. **(IMO 2020, P1)** Considere o quadrilátero convexo $ABCD$. O ponto P está no interior do $ABCD$. Verificam-se as seguintes igualdades entre razões:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Prove que as três seguintes retas se intersectam num ponto: as bissetrizes internas dos ângulos $\angle ADP$ e $\angle PCB$ e a metriatriz do segmento AB.

3. **(Banco IMO 2019, G1)** Let ABC be a triangle. Circle Γ passes through A, meets segments AB and AC again at points D and E respectively, and intersects segment BC at F and G such that F lies between B and G. The tangent to circle BDF at F and the tangent to circle CEG at G meet at point T. Suppose that points A and T are distinct. Prove that line AT is parallel to BC.

4. **(Banco IMO 2019, G2)** Let ABC be an acute-angled triangle and let D, E, and F be the feet of altitudes from A, B, and C to sides BC, CA, and AB, respectively. Denote by ω_B and ω_C the incircles of triangles BDF and CDE, and let these circles be tangent to segments DF and DE at M and N, respectively. Let line MN meet circles ω_B and ω_C again at $P \neq M$ and $Q \neq N$, respectively. Prove that $MP = NQ$.

5. **(IMO 2018, 1)** Seja Γ o circuncírculo do triângulo acutângulo ABC. Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC, respectivamente, de modo que $AD = AE$. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G, respectivamente. Prove que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).

6. **(Banco IMO 2018, G2)** Seja ABC um triângulo com $AB = AC$, e seja M o ponto médio de BC. Seja P um ponto tal que $PB < PC$ e PA paralelo a BC. Sejam X e Y pontos nas retas PB e PC, respectivamente, tal que B cai no segmento PX, C cai no segmento PY, e $\angle PXM = \angle PYM$. Prove que o quadrilátero $APXY$ é cíclico.

7. **(Banco IMO 2017, G1)** Let $ABCDE$ be a convex pentagon such that $AB = BC = CD$, $\angle EAB = \angle BCD$, and $\angle EDC = \angle CBA$. Prove that the perpendicular line from E to BC and the line segments AC and BD are concurrent.

8. **(IMO 2017, 4)** Sejam R e S pontos distintos sobre a circunferência Ω tal que RS não é um diâmetro. Seja ℓ a reta tangente a Ω em R. O ponto T é tal que S é o ponto médio do segmento RT. O ponto J escolhe-se no menor arco RS de Ω de maneira que Γ, a circunferência circunscrita ao triângulo JST, intersecta ℓ em dois pontos distintos. Seja A o ponto comum de Γ e ℓ mais próximo de R. A reta AJ intersecta pela segunda vez Ω em K. Demonstre que a reta KT é tangente a Γ.

9. **(IMO 2016, 1)** O triângulo BCF é retângulo em B. Seja A o ponto da reta CF tal que $FA = FB$ e que F esteja entre A e C. Escolhe-se o ponto D de modo que $DA = DC$ e que AC seja bissetriz de $\angle DAB$. Escolhe-se o ponto E de modo que $EA = ED$ e que AD seja a bissetriz de $\angle EAC$. Seja M o ponto médio de CF. Seja X o ponto tal que $AMXE$ seja um paralelogramo. Prove que BD, FX e ME são concorrentes.

10. **(Banco IMO 2016, G2)** Let ABC be a triangle with circumcircle Γ and incenter I and let M be the midpoint of $\overline{BC}$. The points D, E, F are selected on sides $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ such that $\overline{ID} \perp \overline{BC}$, $\overline{IE} \perp \overline{AI}$, and $\overline{IF} \perp \overline{AI}$. Suppose that the circumcircle of $\triangle AEF$ intersects Γ at a point X other than A. Prove that lines XD and AM meet on Γ.

11. **(Banco IMO 2015, G1)** Let ABC be an acute triangle with orthocenter H. Let G be the point such that the quadrilateral $ABGH$ is a parallelogram. Let I be the point on the line GH such that AC bisects HI. Suppose that the line AC intersects the circumcircle of the triangle GCI at C and J. Prove that $IJ = AH$.

12. **(IMO 2015, 4)** O triângulo ABC tem circuncírculo Ω e circuncentro O. Uma circunferência Γ de centro A intersecta o segmento BC nos pontos D e E, de modo que B, D, E e C são todos diferentes e estão na reta BC, nesta oderm. Sejam F e G os pontos de interseção de Γ e Ω, tais que A, F, B, C e G estão em Ω nesta ordem. Seja K o segundo ponto de interseção do circuncírculo do triângulo BDF com o segmento AB. Seja L o segundo ponto de interseção do circuncírculo do triângulo CGE com o segmento CA.

    Suponha que as retas FK e GL são diferentes e que se intersectam no ponto X. Prove que X pertence a reta AO.

13. **(IMO 2014, 4)** Os pontos P e Q encontram-se sobre o lado BC de um triângulo acutângulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Os pontos M e N encontram-se sobre as retas AP e AQ, respectivamente, de modo que P é o ponto médio de AM e Q é o ponto médio de AN. Prove que as retas BM e CN se intersectam sobre a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

14. **(Banco IMO 2014, G2)** Let ABC be a triangle. The points K, L, and M lie on the segments BC, CA, and AB, respectively, such that the lines AK, BL, and CM intersect in a common point. Prove that it is possible to choose two of the triangles ALM, BMK, and CKL whose inradii sum up to at least the inradius of the triangle ABC.

15. **(IMO 2013, 4)** Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H e seja W um ponto do lado BC, estritamente entre B e C. Os pontos M e N são os pés das alturas traçadas desde B e C, respectivamente. Designa-se por ω_1 a circunferência circunscrita ao triângulo BWN; seja X o ponto de ω_1 tal que WX é um diâmetro de ω_1. Analogamente, designa-se por ω_2 a circunferência circunscrita ao triângulo CWM; seja Y o ponto de ω_2 tal que WY é um diâmetro de ω_2. Demonstrar que os pontos X, Y e H são colineares.

16. **(Banco IMO 2013, G2)** Let ω be the circumcircle of a triangle ABC. Denote by M and N the midpoints of the sides AB and AC, respectively, and denote by T the midpoint of the arc BC of ω not containing A. The circumcircles of the triangles AMT and ANT intersect the perpendicular bisectors of AC and AB at points X and Y, respectively; assume that X and Y lie inside the triangle ABC. The lines MN and XY intersect at K. Prove that $KA = KT$.

17. **(IMO 2012, 1)** Dado um triângulo ABC, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita[1] é tangente ao lado BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F, e as retas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de interseção das retas AF e BC, e seja T o ponto de interseção das retas AG e BC.

Prove que M é o ponto médio de ST.

18. **(Banco IMO 2012, G2)** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral whose diagonals AC and BD meet at E. The extensions of the sides AD and BC beyond A and B meet at F. Let G be the point such that $ECGD$ is a parallelogram, and let H be the image of E under reflection in AD. Prove that D, H, F, G are concyclic.

19. **(Banco IMO 2011, G1)** Let ABC be an acute triangle. Let ω be a circle whose centre L lies on the side BC. Suppose that ω is tangent to AB at B' and AC at C'. Suppose also that the circumcentre O of triangle ABC lies on the shorter arc $B'C'$ of ω. Prove that the circumcircle of ABC and ω meet at two points.

20. **(Banco IMO 2011, G2)** Let $A_1A_2A_3A_4$ be a non-cyclic quadrilateral. Let O_1 and r_1 be the circumcentre and the circumradius of the triangle $A_2A_3A_4$. Define O_2, O_3, O_4 and r_2, r_3, r_4 in a similar way. Prove that

$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{O_2A_2^2 - r_2^2} + \frac{1}{O_3A_3^2 - r_3^2} + \frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2} = 0.$$

21. **(Banco IMO 2010, G1)** Let ABC be an acute triangle with D, E, F the feet of the altitudes lying on BC, CA, AB respectively. One of the intersection points of the line EF and the circumcircle is P. The lines BP and DF meet at point Q. Prove that $AP = AQ$.

22. **(IMO 2010, 4)** Let P be a point interior to triangle ABC (with $CA \neq CB$). The lines AP, BP and CP meet again its circumcircle Γ at K, L, respectively M. The tangent line at C to Γ meets the line AB at S. Show that from $SC = SP$ follows $MK = ML$.

[1] A circunferência ex-inscrita de ABC oposta ao vértice A é a circunferência tangente ao segmento BC, ao prolongamento do segmento AB no sentido de A para B e ao prolongamento do segmento AC no sentido de A para C.