Problemas Sortidos de Geomeria – #2

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1 Questões Interessantes

Problema 1.1 (Baltic Way 2019, 12). Seja ABC um triângulo e H seu ortocentro. Sejam D um ponto no segmento AC e E um ponto na reta BC tal que BC é perpendicular a DE. Prove que EH é perpendicular a BD se, e somente se, BD passa pelo ponto médio de AE.

Problema 1.2 (Baltic Way 2015, 13). Seja D o pé da altura relativa a B no triângulo ABC, no qual $AB = 1$. O incírculo do triângulo BCD coincide com o baricentro do triângulo ABC. Calcule os comprimentos dos segmentos AC e BC.

Problema 1.3 (Baltic Way 2017, 14). Seja P um ponto no interior do ângulo agudo $\angle BAC$. Suponha que $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. Os pontos D e E estão nos segmentos BA e CA, respectivamente, de modo que $BD = BP$ e $CP = CE$. Os pontos F e G estão nos segmentos AC e AB, respectivamente, de modo que DF é perpendicular a AB e EG é perperdicular a AC. Mostre que $PF = PG$.

Problema 1.4 (Baltic Way 2015, 14). Em triângulo escaleno ABC, seja D o pé da altura relativa ao vértice A. Seja M o ponto médio de BC e N a reflexão de M por D. O circuncentro do triângulo AMN intersecta o lado AB em $P \neq A$ e o lado AC em $Q \neq A$. Prove que AN, BQ e CP são concorrentes.

2 Problemas Divertidos

Problema 2.1 (IGO 2019, 1). As circunferências ω_1 e ω_2 se intersectam nos pontos A e B. O ponto C está na reta tangente por A de ω_1 tal que $\angle ABC = 90°$. Uma reta ℓ passa por C e corta ω_2 nos pontos P e Q. As retas AP e AQ cortam ω_1 novamente em X e Z, respectivamente. Seja Y o pé da altitude de A na reta ℓ. Prove que os pontos X, Y e Z são colineares.

Problema 2.2 (USAJMO 2013, 5). O quadrilátero $XABY$ é inscritível na semicircunferência ω com diâmetro XY. Os segmentos AY e BX se intersectam em P. Seja Z a projeção de P em XY. Seja C um ponto em ω tal que a reta XC seja perpendicular a AZ. Seja Q a intersecção entre AY e XC. Prove que

$$\frac{BY}{XP} + \frac{CY}{XQ} = \frac{AY}{AX}.$$

Problema 2.3 (IGO 2018, 2). Num triângulo acutângulo ABC, o $\angle A$ mede $45°$. Sejam O e H são o circuncentro e o ortocentro do triâgulo ABC, respectivamente. Seja D é o pé da altura relativa a B no triângulo ABC e seja X o ponto médio do arco AH do circuncículo do triângulo ADH que contém D. Prove que $DX = DO$.

Problema 2.4 (USAJMO 2015, 3). Seja $APBQ$ um quadrilátero inscritível à circunferência ω com $\angle P = \angle Q = 90°$ e $AP = AQ < BP$. Seja X um ponto variável no segmento PQ. A reta AX intersecta novamente ω em $S \neq A$. Tome T um ponto no arco AQB de ω tal que XT seja perpendicular a AX. Seja M o ponto médio de ST. Ao variar X no segmento PQ, mostre que M varia ao longo de uma circunferência.