Problemas Sortidos II

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1 (Metrópoles 2018, 4)
Sejam $1 = d_0 < d_1 < \cdots < d_m = 4k$ todos os divisores positivos de $4k$, em que k é um inteiro positivo. Prove que existe inteiro $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $d_i - d_{i-1} = 2$.

Solução. Vamos definir a seguinte sequência: $a_0 = 1$,

$$a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n.$$

É fácil demonstrar que essa sequência é crescente.

Seja m o menor inteiro positivo tal que a_m não divide $4k$.

Vamos provar que $a_m - 1, a_m + 1$ dividem $4k$, usando que os termos anteriores da sequência dividem $4k$.

- $m = 0$ nunca acontece.
- Se $m = 1$, então $3 \nmid 4k$, mas $2, 4 \mid 4k$.
- Se $m > 1$, então

$$2a_{m-1} \mid 4k \implies a_m + (-1)^m \mid 4k.$$
$$4a_{m-2} \mid 4k \implies 2a_{m-1} + 2(-1)^{m-1} \mid 4k \implies a_m - (-1)^m \mid 4k.$$

Problema 2 (Putnam 2018, B1)
Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de vetores definitos por

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \, 0 \le a \le 2, 0 \le b \le 100, \text{ and } a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ache todos vetores $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$ tais que o conjunto $\mathcal{P} \setminus \{\mathbf{v}\}$ obtido ao remover o vetor $\mathbf{v}$ de $\mathcal{P}$ pode ser particionado em dois conjuntos de tamanhos e somas iguais.

Esboço. Trocar 100 por $4k$. A resposta são os vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ \text{par} \end{pmatrix}$. Provar por indução em k.

Problema 3 (2019 Putnam, B1)
Seja $\mathbb{Z}^2$ o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano com coordenadas inteiras. Para cada inteiro $n \ge 0$, seja P_n o subconjunto de $\mathbb{Z}^2$ que consiste do ponto $(0, 0)$ e de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 + y^2 = 2^k$ para algum inteiro $k \le n$. Determine, em função de n, a quantidade de subconjuntos com 4 pontos de P_n cujos elementos são vértices de um quadrado.

Resposta. $5n + 1$.