
Problemas Sortidos de Álgebra

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. **(XXII Semana Olímpica, George Lucas)** Sejam a , b e c números reais positivos. Prove a desigualdade

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2},$$

e ache os casos de igualdade.

2. **(Harvard Math Review, Zachary Abel)** Chen is thinking of an ordered quadruple of integers (a, b, c, d) . Rodrigo, hoping to determine these integers, hands Chen a 4-variable polynomial $P(w, x, y, z)$ with integer coefficients, and Chen returns the value of $P(a, b, c, d)$. From this value alone, Rodrigo can always determine Chen's original ordered quadruple. Construct, with proof, one polynomial that Rodrigo could have used.
2. **(Problema 2, com menos Chen e Rodrigo)** Ache, com prova, um polinômio $P \in \mathbb{Z}[x, y, z, w]$ tal que $P : \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma injetiva.
3. **(The Mandelbrot Problem Book, Sam Vandervelde)** Resolva os seguintes itens:
- (a) Se $P(x)$ é um polinômio de grau n tal que $P(0) = 1, P(1) = -1, P(2) = 1, P(3) = -1, \dots, P(n) = (-1)^n$. Determine $P(n+1)$.
 - (b) Se $P(x)$ é um polinômio de grau n tal que $P(1) = 1, P(2) = 3, P(4) = 9, \dots, P(2^n) = 3^n$. Determine $P(2^{n+1})$.