Potência de Ponto e Eixo Radical

Definição 1 Um quadrilátero convexo $ABCD$ é dito cíclico ou inscritível quando existe uma circunferência que passa por seus quatro vértices.

Teorema 1 As três propriedades abaixo são equivalentes:

1. $ABCD$ é cíclico;
2. $\angle ABC + \angle ADC = 180°$;
3. $\angle ABD = \angle ACD$ (ou qualquer outro par de ângulos análogos).

Definição 2 Dados um ponto P e um círculo Γ de centro O e raio r, define-se como a potência do ponto P em relação a Γ como

$$\mathrm{Pot}_\Gamma(P) = PO^2 - r^2.$$

Teorema 2 Dado um quadrilátero $ABCD$ convexo, se $P = AB \cap CD$, então $ABCD$ é inscritível se, e somente se, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Teorema 3 O lugar geométrico dos pontos P tais que a potência do ponto de P à duas circunferências C_1 e C_2 é a mesma é uma reta. A essa reta dá-se o nome de eixo radical das circunferências C_1 e C_2.

Teorema 4 Dadas três circunferências C_1, C_2 e C_3, traçando os eixos radicais existentes entre elas, eles concorrem em um ponto. A esse ponto dá-se o nome de centro radical.

§1 Problemas

Problema 1 Seja C um ponto sobre um semicírculo de diâmetro AB e seja D o ponto médio do arco AC. Seja E a projeção de D sobre a reta BC e F a interseção da reta AE com o semicírculo. Prove que BF bissecta o segmento DE.

Problema 2 Sejam A, B e C três pontos sobre a circunferência Γ com $AB = AC$. As tangentes por A e por B se encontram em D. A reta DC corta Γ novamente no ponto E. Prove que a reta AE bissecta o segmento BD.

Problema 3 As diagonais de um quadrilátero inscritível $ABCD$ se intersectam no ponto K. Os pontos médios das diagonais AC e BD são M e N, respectivamente. Os círculos circunscritos aos triângulos ADM e BCM se intersectam nos pontos M e L. Prove que K, L, M e N estão em uma mesma circunferência (todos os pontos podem ser supostos distintos).

Problema 4 Seja ABC um triângulo actuângulo. A reta por B perpendicular a AC corta o círculo com diâmetro AC nos pontos P e Q e a reta por C perpendcular a AB encontra o círculo com diâmetro AB nos pontos R e S. Prove que $PQRS$ é cíclico.

Problema 5 **(Argentina TST 2013)** Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência e suponha que suas diagonais AC e BD se intersectam em S. Seja ω uma cricunferência que passa por S e por D e que corta os lados AD e CD nos pontos M e N, respectivamente. Seja P a interseção das retas SM e AB e R a interseção das retas SN e BC, de modo que os pontos P e R estão no mesmo semiplano separado por BD que o ponto A. Demonstre que a reta por D paralela a AC e a reta por S paralela a PR se cortam sobre a circunferência ω.

Problema 6 **(Ibero TST 2002)** Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência Γ_1, P o ponto de interseção das diagonais AC e BD e M é o ponto médio de CD. A circunferência Γ_2 que passa por P e tangencia CD em M corta BD e AC nos pontos Q e R, respectivamente. Seja S o ponto do segmento BD tal que $BS = DQ$. A paralela a AB por S corta AC em T. Prove que $AT = CR$.

Problema 7 **(IMO 2000, 1)** Two circles G_1 and G_2 intersect at two points M and N. Let AB be the line tangent to these circles at A and B, respectively, so that M lies closer to AB than N. Let CD be the line parallel to AB and passing through the point M, with C on G_1 and D on G_2. Lines AC and BD meet at E; lines AN and CD meet at P; lines BN and CD meet at Q. Show that $EP = EQ$.

Problema 8 **(Banco CS 2002)** Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível e E interseção das diagonais AC e BD. Se F é um ponto qualquer e as circunferências Γ_1 e Γ_2 circunscritas aos triângulos FAC e FBD se intersectam novamente no ponto G, mostre que E, F e G são colineares.

Problema 9 **(USAMO 1997)** Seja ABC um triângulo. Construa triângulos isósceles BCD, CAE e ABF externamente a ABC de bases BC, CA e AB, respectivamente. Prove que as retas que passam por A, B e C e são perpendiculares a EF, FD e DE, respectivamente, são concorrentes.

Problema 10 **(IMO 1995, 1)** Sejam A, B, C, D pontos distintos sobre uma reta, nesta ordem. As circunferências com diâmetros AC e BD se intersectam em X e Y. A reta XY intersecta BC em Z. Seja P um ponto sobre a reta XY diferente de Z. A reta CP intersecta a circunferência de diâmetro AC em C e M. A reta BP intersecta a circufnerência de diâmetro BD em B e N. Prove que as retas AM, DN e XY são concorrentes.

Problema 11 **(Ibero 1999, 5)** Seja ABC um triângulo com circuncírculo ω centrado em O. Sejam AD, BE e CF as alturas do triângulo ABC. A reta EF encontra ω em P e Q.

(a) Prove que AO é perpendicular a PQ.

(b) Seja M o ponto médio de BC. Prove que $AP^2 = 2 \cdot AD \cdot OM$.

Problema 12 **(APMO 2012, 4)** Let ABC be an acute triangle. Denote by D the foot of the perpendicular line drawn from the point A to the side BC, by M the midpoint of BC, and by H the orthocenter of ABC. Let E be the point of intersection of the circumcircle Γ of the triangle ABC and the half line MH, and F be the point of intersection (other than E) of the line ED and the circle Γ. Prove that $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$ must hold.

Here we denote by XY the length of the line segment XY.

Problema 13 **(IMO 2009, 2)** Let ABC be a triangle with circumcentre O. The points P and Q are interior points of the sides CA and AB respectively. Let K, L and M be the midpoints of the segments BP, CQ and PQ. respectively, and let Γ be the circle passing through K, L and M. Suppose that the line PQ is tangent to the circle Γ. Prove that $OP = OQ$.

Problema 14 **(USAMO 1998)** Sejam C_1 e C_2 duas circunferências concêntricas, com C_2 no interior de C_1. Sejam A um ponto de C_1 e B um ponto sobre C_2 tal que AB é tangente a C_2. Seja C a segunda interseção da reta AB com C_1 e seja D o ponto médio de AB. Uma reta passando por A intesecta C_2 nos pontos E e F de tal modo que as mediatrizes de DE e CF se intersectam em um ponto M sobre AB. Ache, com prova, a razão AM/MC.

Problema 15 **(APMO 2015, 1)** Let ABC be a triangle, and let D be a point on side BC. A line through D intersects side AB at X and ray AC at Y . The circumcircle of triangle BXD intersects the circumcircle ω of triangle ABC again at point Z distinct from point B. The lines ZD and ZY intersect ω again at V and W, respectively. Prove that $AB = VW$.

Problema 16 **(Turquia TST 2013)** Seja E o encontro das diagonais do quadrilátero convexo $ABCD$. É dado que $\angle EDC = \angle DEC = \angle BAD$. Seja F um ponto sobre o lado BC tal que $\angle BAF + \angle EBF = \angle BFE$. Mostre que A, B, F e D são concíclicos.

Problema 17 **(IMO 2017, 4)** Let R and S be different points on a circle Ω such that RS is not a diameter. Let ℓ be the tangent line to Ω at R. Point T is such that S is the midpoint of the line segment RT. Point J is chosen on the shorter arc RS of Ω so that the circumcircle Γ of triangle JST intersects ℓ at two distinct points. Let A be the common point of Γ and ℓ that is closer to R. Line AJ meets Ω again at K. Prove that the line KT is tangent to Γ.

Problema 18 **(Irã TST 2013)** No triângulo ABC, AD e AH são a bissetriz interna e altura do vértice A, respectivamente. A mediatriz do segmento AD intersecta os semicírculos de diâmetros AB e AC que são construídos no exterior do triângulo ABC nos pontos X e Y, respectivamente. Prove que o quadrilátero $XYDH$ é cíclico.

Problema 19 **(IMO 2015, 4)** Triangle ABC has circumcircle Ω and circumcenter O. A circle Γ with center A intersects the segment BC at points D and E, such that B, D, E, and C are all different and lie on line BC in this order. Let F and G be the points of intersection of Γ and Ω, such that A, F, B, C, and G lie on Ω in this order. Let K be the second point of intersection of the circumcircle of triangle BDF and the segment AB. Let L be the second point of intersection of the circumcircle of triangle CGE and the segment CA.

Suppose that the lines FK and GL are different and intersect at the point X. Prove that X lies on the line AO.

Problema 20 **(IMO 2013, 4)** Let ABC be an acute triangle with orthocenter H, and let W be a point on the side BC, lying strictly between B and C. The points M and N are the feet of the altitudes from B and C, respectively. Denote by ω_1 is the circumcircle of BWN, and let X be the point on ω_1 such that WX is a diameter of ω_1. Analogously, denote by ω_2 the circumcircle of triangle CWM, and let Y be the point such that WY is a diameter of ω_2. Prove that X, Y and H are collinear.

Problema 21 **(Balcânica 1996)** Uma reta passando pelo incentro I do triângulo ABC intersecta o circuncírculo de ABC nos pontos F e G e o incírculo nos pontos D e E, com D entre I e F. Prove que $DF \cdot EG \geq r^2$, em que r é o raio do incírculo.

Problema 22 **(Banco IMO 2012, G2)** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral whose diagonals AC and BD meet at E. The extensions of the sides AD and BC beyond A and B meet at F. Let G be the point such that $ECGD$ is a parallelogram, and let H be the image of E under reflection in AD. Prove that D, H, F, G are concyclic.

Problema 23 **(Banco IMO 2013, G4)** Let ABC be a triangle with $\angle B > \angle C$. Let P and Q be two different points on line AC such that $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$ and A is located between P and C. Suppose that there exists an interior point D of segment BQ for which $PD = PB$. Let the ray AD intersect the circle ABC at $R \neq A$. Prove that $QB = QR$.

Problema 24 **(França TST 2012)** Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB \neq AC$. Seja Γ seu circuncírculo, H o ortocentro e O o centro de Γ. Seja M o ponto médio do lado BC. A reta AM encontra Γ novamente no ponto N e a circunferência com diâmetro AM corta Γ novamente em P. Prove que as retas AP, BC e OH concorrem se, e somente se, $AH = HN$.