

---

**SIMULADO**  
Nível 3 (Ensino Médio)  
Primeiro Dia

---

**Problema 1** Um conjunto  $S \subset \mathbb{N}$  é *balanceado* quando:

- Cada elemento de  $S$  tem exatamente 3 dígitos.
- A soma dos dígitos de cada elemento de  $S$  é 9.
- Nenhum elemento de  $S$  possui algarismo decimal 0.
- Cada par de elementos de  $S$  tem algarismos das unidades diferentes.
- Cada par de elementos de  $S$  tem algarismos das dezenas diferentes.
- Cada par de elementos de  $S$  tem algarismos das centenas diferentes.

Ache o maior inteiro  $n$  tal que existe um conjunto balanceado com  $n$  elementos.

---

**Problema 2** Determine todos os pares  $(a, b)$  de números reais tal que

$$a \lfloor bn \rfloor = b \lfloor an \rfloor$$

para todo inteiro positivo  $n$ .

---

**Problema 3** Seja  $ABC$  um triângulo aculângulo com circuncentro  $O$ , ortocentro  $H$ , e circuncírculo  $\Omega$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $AH$  e  $N$  o ponto médio de  $BH$ . Suponha que os pontos  $M, N, O, H$  são distintos e caem no círculo  $\omega$ .

Prove que os círculos  $\omega$  e  $\Omega$  são internamente tangentes.

---

*Cada problema vale 7 pontos.  
Tempo: 4 horas e 30 minutos.*

---

## SIMULADO

Nível 3 (Ensino Médio)

Segundo Dia

---

**Problema 4** Seja  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  o conjunto dos inteiros positivos e seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma função bijetora. É verdade que sempre deve existir um inteiro  $n$  tal que  $(f(1), f(2), \dots, f(n))$  é uma permutação de  $(1, 2, \dots, n)$ ?

---

**Problema 5** Seja  $H$  o ortocentro do triângulo acutângulo  $ABC$ , com  $BC > AC$ , inscrito na circunferência  $\Gamma$ . A circunferência com centro  $C$  e raio  $CB$  intersecta  $\Gamma$  novamente no ponto  $D$ , que está no arco  $AB$  que não contém  $C$ . A circunferência com centro  $C$  e raio  $CA$  intersecta o segmento  $CD$  no ponto  $K$ . A reta paralela a  $BD$  por  $K$  intersecta  $AB$  em  $L$ . Se  $M$  é o ponto médio de  $AB$  e  $N$  é o pé da perpendicular de  $H$  em  $CL$ , prove que a reta  $MN$  bissecta o segmento  $CH$ .

---

**Problema 6** Quatro pontos são escolhidos uniformemente em uma esfera. Qual é a probabilidade de que o centro da esfera esteja no interior do tetraedro formado por esses pontos?

---

*Cada problema vale 7 pontos.  
Tempo: 4 horas e 30 minutos.*