Quinto Teste de Seleção

Teste para XXXIV Olimpíada Iberoamericana

Problema 1 Considere o triângulo acutângulo ABC, com $\angle A > 60^\circ$, e seja H o seu ortocentro. Sejam M e N pontos sobre os lados AB e AC, respectivamente, tais que $\angle HMB = \angle HNC = 60^\circ$. Além disso, sejam O o circumcentro do triângulo HMN e D um ponto no mesmo semiplano determinado por BC contendo A tal que DBC é um triângulo equilátero. Prove que H, O e D são colineares.

Problema 2 Dizemos que uma distribuição de estudantes enfileirados em colunas é *bacana* quando não existem dois amigos em uma mesma coluna. Sabemos que todos os participantes de uma olimpíada de matemática podem ser dispostos em uma configuração bacana com n colunas, mas que isso é impossível com $n-1$ colunas. Prove que podemos escolher competidores $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de tal modo que M_i está na i-ésima coluna, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, e M_i é amigo de M_{i+1}, para cada $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Problema 3 Sejam $n \geq 2$ um inteiro e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos tais que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Prove que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i}\right)\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j\right) \leq \frac{n}{2}.$$

Problema 4 Sejam $p \geq 7$ um primo e

$$S = \left\{ jp + 1 : 1 \leq j \leq \frac{p-5}{2} \right\}.$$

Prove que pelo menos um dos elementos de S pode ser escrito na forma $x^2 + y^2$, com x e y números inteiros.