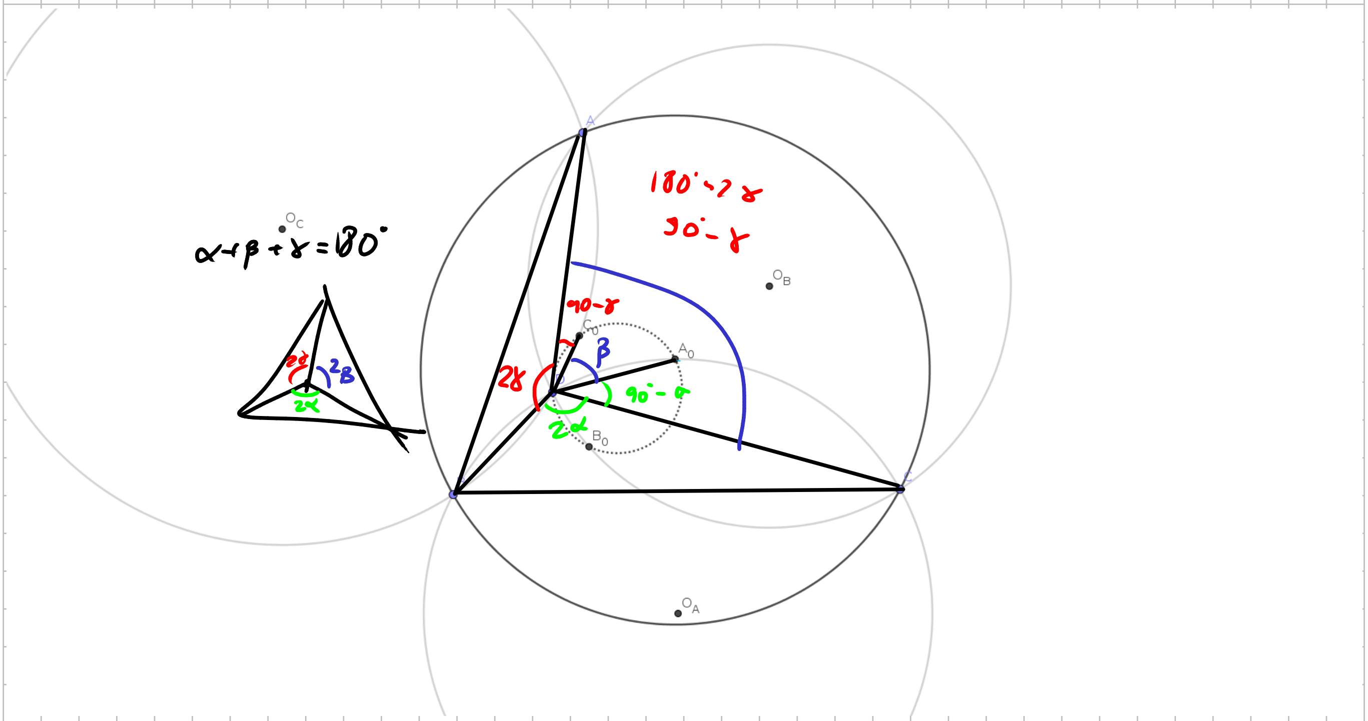
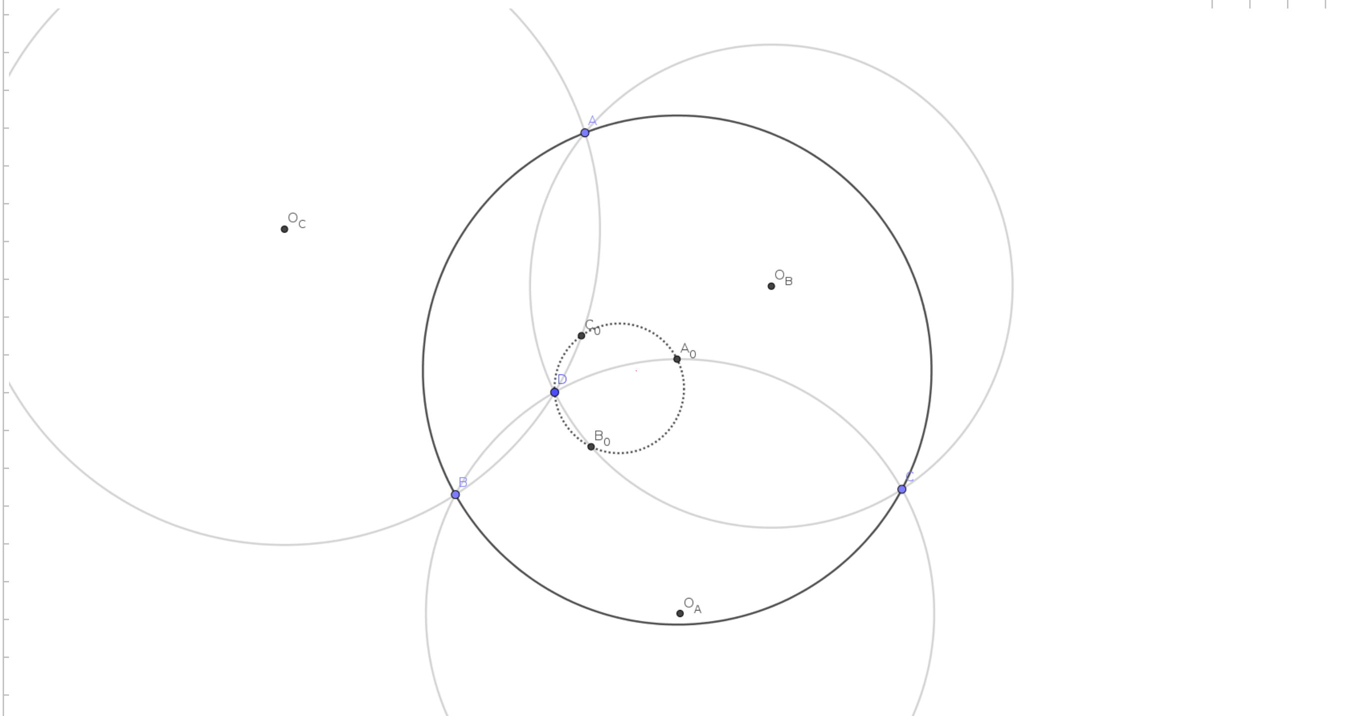
1. Seja ABC um triângulo, e D um ponto em seu interior. Definimos o ponto A_0 como ponto médio do arco BDC, na circunferência que passa por B, C e D. Da mesma maneira, defina B_0 como o ponto médio do arco ADC e C_0 como o ponto médio do arco ADB. Prove que existe uma única circunferência que passa por D, A_0, B_0, C_0.



1. Seja ABC um triângulo, e D um ponto em seu interior. Definimos o ponto A_0 como ponto médio do arco BDC, na circunferência que passa por B, C e D. Da mesma maneira, defina B_0 como o ponto médio do arco ADC e C_0 como o ponto médio do arco ADB. Prove que existe uma única circunferência que passa por D, A_0, B_0, C_0.



3. Seja n um inteiro positivo dado. Determine o menor valor possível do inteiro positivo m ($m > n$) para o qual o conjunto $M = \{n, n+1, n+2, \ldots, m\}$ pode ser particionado em subconjuntos disjuntos de maneira que em cada um destes subconjuntos, existe um elemento que é igual à soma de todos os outros elementos.

$n=1$. $m=2$ não funciona

$m=3$ funciona $M=\{1,2,3\}$ $1+2=3$

$n=2$ $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$10=6+4$
$9=2+7$
$8=3+5$

pares

$n=3$ $\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$

$17=12+5$
$16=7+9$
$15=11+4$
$14=6+8$
$13=10+3$

ímpares

$n=4$ $\{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,\underbrace{18,19,20,21,22,23,24}_{2n-1}\}$

19 21 23
18 20 22 24

$5n-3$ $7n-4$

CONSTRUÇÃO $2n-1$ somas $3(2n-1)$ elementos

$$m = n + 3(2n-1) - 1 = 7n-4$$

$$7n-4 = (5n-3) + (2n-1)$$
$$7n-6 = (5n-4) + (2n-2)$$
$$7n-8 = (5n-5) + (2n-3)$$
$$\vdots$$
$$5n-2 = (4n-2) + n$$

$$7n-5 = (4n-3) + (3n-2)$$
$$7n-7 = (4n-4) + (3n-3)$$
$$\vdots$$
$$5n-1 = (3n-1) + 2n$$

DÁ COM

$$m = 7n-4$$

$K \geq n$ SOMAS. TEM QUE TER PELO MENOS $3K$ CARAS.

SOMA TOTAL $= \dfrac{(m-n+1)(n+m)}{2}$ SOMA DOS K MAIORES $= \dfrac{K(2m-K+1)}{2}$.

Será que $\dfrac{(m-n+1)(n+m)}{2} \overset{?}{\geq} 2\,\dfrac{K(2m-K+1)}{2}$.

$\Uparrow$

$m-n+1 \geq 3K$ BASTA FAZER $m = 3K+n-1$

$$(m-n+1)(n+m) \overset{?}{\geq} 2\,k(2m-k+1).$$

$$3\cancel{k}\,(2n+3k-1) \overset{?}{\geq} 2\cancel{k}\,(5k+2n-1)$$

$$6n+9k-3 \overset{?}{\geq} 10k+4n-2$$

$$\Updownarrow \quad 2n-1 \overset{?}{\geq} k$$

Se $2n-1 > k$, então $\dfrac{(m-n+1)(n+m)}{2} > 2\,\dfrac{k(2m-k+1)}{2}.$

, logo, não funciona.

Portanto, para funcionar, $k \geq 2n-1$ e $k = 2n-1$ funciona!

4. Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uma sequência de inteiros positivos satisfazendo $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ para todo inteiro positivo n. Prove que para todo inteiro positivo k, existe um inteiro positivo m tal que a_m é divisível por k.

1

$+a_1 \to$ 2 3 4

$+a_2 \to$ 6 8 10 12 14

$+a_3 \to$ 17 20 23 26 29 32 35

39 43 47 51 55 59 63 67 71

77 83 89 95 101 107 113 119 125

$+a_t \to \boxed{\quad 2t+1 \quad}$

Se $2t+1 \geq K$ e a_t é primo c/ K, existe m. K nessa linha

Lema: Para todo inteiro positivo k, existem infinitos m tal que a_m é primo com k.

Provamos esse lema para $K = p^{\alpha}$.

Basta provar para $k = p_1 p_2 \cdots p_x$.

Vamos tentar provar para $K = pq$.

Seja l o maior t.q. a_l é primo com pq.

$$\begin{array}{cccc} a_{l^2} & a_{l^2+1} & a_{l^2+2} & a_{l^2+3} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ p & q & p & q \end{array}$$

se $2 \leq 2l \Rightarrow p \mid a_{l^2+2} - a_{l^2} = 2 \cdot a_l \Rightarrow p \mid 2 \Rightarrow p = 2$

se $3 \leq 2l \Rightarrow q \mid a_{l^2+3} - a_{l^2+1} = 2 a_l \Rightarrow q \mid 2 \Rightarrow q = 2$

logo, $l \leq 1 \Rightarrow l = 1 \Rightarrow pq$ não é primo com 2 e 3 $\Rightarrow pq = 6. \Rightarrow 6$ funciona. pois 17 é p.c. 6.

Se $K = pqr$.

$l = 1$ ou $l = 2$ ok;

Seja l o maior t.q. a_l é primo com pqr

$a_{l^2} \quad a_{l^2+1} \quad a_{l^2+2} \quad a_{l^2+3} \quad a_{l^2+4} \quad a_{l^2+5} \quad \cdots \quad a_{l^2+2l}$

se $p = 2$ Abs

se $p \leq 3$ Abs

$$\approx \frac{p-1}{p} \cdot \frac{q-1}{q} \cdot \frac{r-1}{r} \gtrsim \frac{1}{2l}$$

$$2l \gtrsim \frac{pqr}{(p-1)(q-1)(r-1)}$$

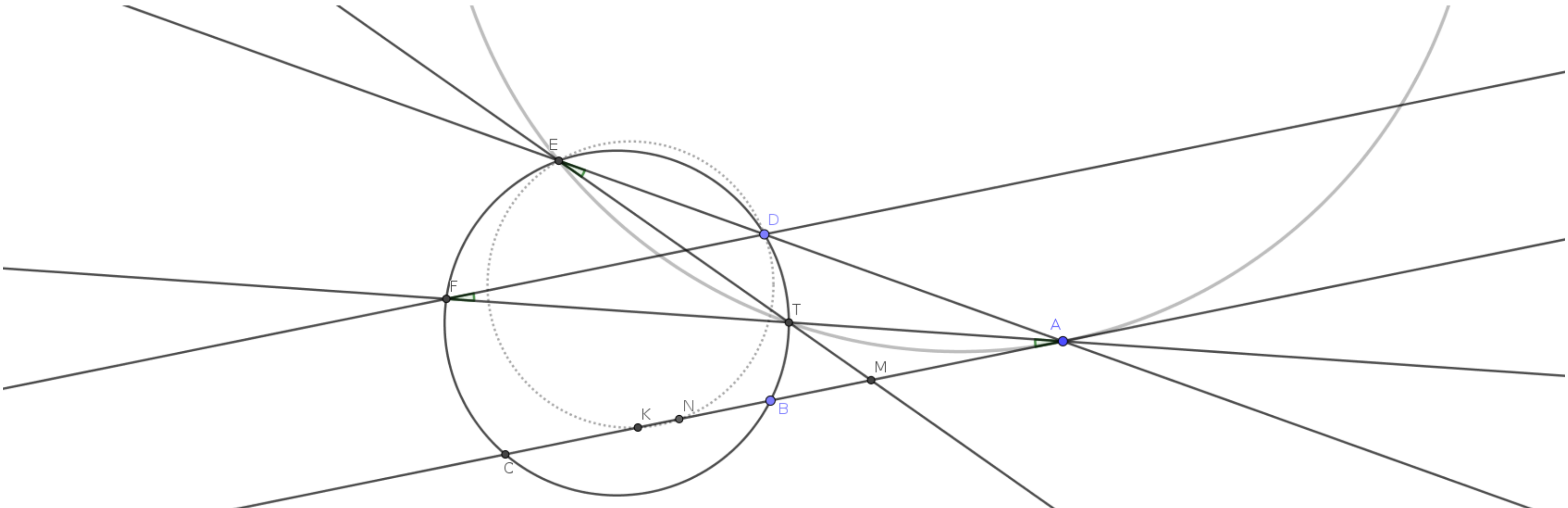
$$\prod_{p \text{ primo}} \left(1+\frac{1}{p-1}\right) \leq 2 \cdot \prod_{p \text{ primo}} \left(1+\frac{1}{p}\right)$$

$x \not\equiv a_1 \pmod{p_1}$

$\vdots$

$x \not\equiv a_k \pmod{p_k}$

$$\prod_{p \text{ primo}} \left(1+\frac{1}{p}\right) = \sum_{n \text{ livre de quadrados}} \frac{1}{n}$$



$AD \cdot AE = AB \cdot AC$

$MA^2 = MT \cdot ME = MB \cdot MC$

$AD \cdot AE = AK \cdot AN$

$AB \cdot AC = AK \cdot AN$

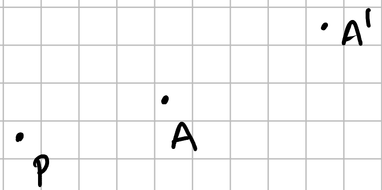
$MA^2 = (AB - AM)(AC - AM)$

$0 = AB \cdot AC - (AB + AC) \cdot AM \Rightarrow$

$AB \cdot AC = \left(\frac{AB + AC}{\cancel{2}}\right) \cancel{2} \cdot AM$

$AB \cdot AC = (AB + AC) \cdot AM$

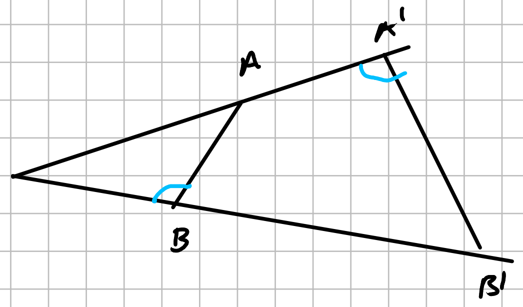
polo P, raio r.

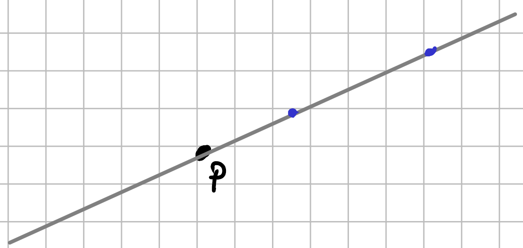


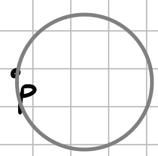
• $A' \in \overrightarrow{PA}$

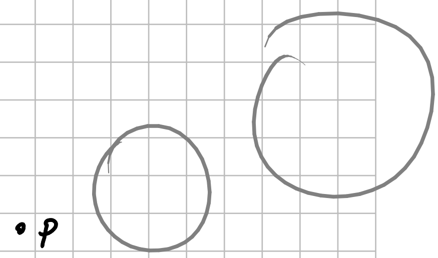
e

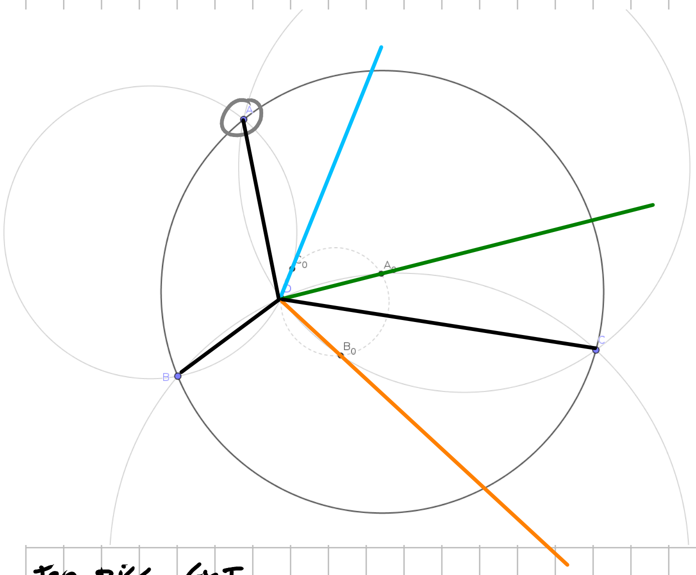
• $PA \cdot PA' = r^2$.

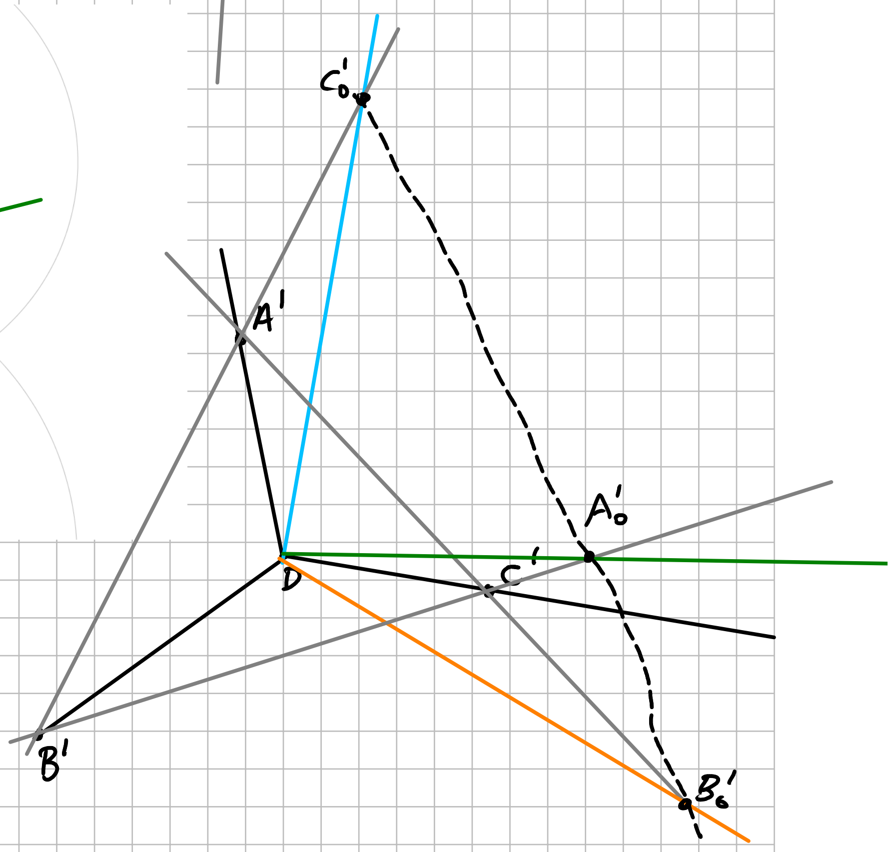












Teo Biss. Ext.

$$\frac{B'C_0'}{A'C_0'} = \frac{B'D}{A'D}$$

$$\frac{A'B_0'}{C'B_0'} = \frac{A'D}{C'D}$$

$$\frac{C'A_0'}{B'A_0'} = \frac{C'D}{B'D}$$

$\otimes$

$$\frac{B'C_0'}{A'C_0'} \cdot \frac{A'B_0'}{C'B_0'} \cdot \frac{C'A_0'}{B'A_0'} = 1 \quad \overset{\text{Menelaus}}{\Longrightarrow} \quad A_0'B_0'C_0' \text{ colinear} \Rightarrow DA_0B_0C_0 \text{ cíclico.}$$