Problema 3 (Álgebra / Shine)

(APMO 2013) Dados $2K$ reais $a_1, a_2, \cdots, a_K, b_1, b_2, \cdots, b_K$, defina a sequência X_n por:

$$X_n = \sum_{i=1}^{K} \lfloor n a_i + b_i \rfloor .$$

Sabendo que X_n forma uma p.a., prove que $\sum a_i \in \mathbb{Z}$.

$X_n = nr + s$ (pois é uma p.a.)

Logo: $\sum (n a_i + b_i - 1) < nr + s \leq \sum (n a_i + b_i)$

$\Leftrightarrow \; n \cdot \sum a_i + \sum b_i - K \underset{(i)}{<} n \cdot r + s \underset{(ii)}{\leq} n \cdot \sum a_i + \sum b_i$

$(i) \Rightarrow n \cdot \sum a_i + \sum b_i < n \cdot r + s + K$

$(ii) \Rightarrow n \cdot \sum a_i + \sum b_i \geq n r + s$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow s - \sum b_i \leq n \left(\sum a_i - r \right) \leq s + K - \sum b_i .$ $(*)$

• Se $\sum a_i \neq r \Rightarrow$ fazendo n grande o suficiente $(*)$ não é verdade. (note que os boudaries são constantes).

Logo, $\sum a_i = r \in \mathbb{Z}$.

$\square$