Um inteiro $a$ é chamado *amigável* se a equação $(m^2+n)(n^2+m) = a(m-n)^3$ possui solução inteira positiva.

~~(a)~~ Prove que existem pelo menos 500 inteiros amigáveis no conjunto $\{1, 2, \ldots, 2012\}$.

(b) Determine se $a = 2$ é amigável.

$$(m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3$$

$$\left(\frac{m^2+n+n^2+m}{2} + \frac{m^2+n-n^2-m}{2}\right)\left(\frac{m^2+n+n^2+m}{2} - \frac{m^2+n-n^2-m}{2}\right) = 2(m-n)^3$$

$$(m^2+n+n^2+m)^2 - (m^2+n-n^2-m)^2 = 8\underline{(m-n)}^3$$

$$(m^2+n+n^2+m)^2 - \underline{(m-n)}^2(m+n-1)^2 = 8(m-n)^3$$

$$(m^2+n+n^2+m)^2 = (m-n)^2\Big((m+n-1)^2 + 8(m-n)\Big)$$

$\Rightarrow (m+n-1)^2 + 8(m-n)$ é quadrado perfeito

$$(m+n-1)^2 < (m+n-1)^2 + 8(m-n) < (m+n+3)^2$$

Logo:

$$(m+n-1)^2 + 8(m-n) = (m+n+1)^2$$

$$\Rightarrow m = 3n$$

Voltando:

$$(m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3$$

$$\Rightarrow (9n^2+n)(n^2+3n) = 16n^3$$

$$\Rightarrow (9n+1)(n+3) = 16n$$

$\Rightarrow 9n^2+12n+3 = 0$ não dá p/ $n > 0$.

Fixe uma circunferência $\Gamma$ e três pontos $A$, $B$, e $C$ sobre ela. Fixe também um número real $\lambda \in (0, 1)$. Para um ponto variável $P \notin \{A, B, C\}$ em $\Gamma$, seja $M$ o ponto do segmento $CP$ tal que $CM = \lambda \cdot CP$. Seja $Q$ o segundo ponto de intersecção das circunferências $AMP$ e $BMC$. Prove que, ao variar $P$, o ponto $Q$ cai sobre um círculo fixo.