N5, Andrei Neguț

Seja $p \geq 5$ primo e a, b inteiros t.q.

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} = \frac{a}{b}$$

prove que $p^4 \mid ap - b$.

S.P.G., a e b são primos entre si.

Logo, $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} = \frac{p \cdot (\text{—}) + (p-1)!}{p!} = \frac{a}{b} \Rightarrow v_p(b) = 1$

Seja $b = p \cdot c$. Logo $a = p \cdot c \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right) = c \cdot \left(p + \frac{p}{2} + \dots + \frac{p}{p-1} + 1\right)$

$$p^4 \mid p \cdot c \cdot \left(p + \frac{p}{2} + \dots + \frac{p}{p-1} + 1\right) - p \cdot c$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p \cdot c \equiv p \cdot c \left(p + p \cdot 2^{-1} + p \cdot 3^{-1} + \dots + p(p-1)^{-1} + 1\right) \pmod{p^4}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cancel{1} \equiv p + p \cdot 2^{-1} + p \cdot 3^{-1} + \dots + p(p-1)^{-1} + \cancel{1} \pmod{p^3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 \equiv 1 + 2^{-1} + 3^{-1} + \dots + (p-1)^{-1} \pmod{p^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 \equiv \left(1^{-1} + 2^{-1} + \dots + (p-1)^{-1}\right) + \left((p-1)^{-1} + (p-2)^{-1} + \dots + 1^{-1}\right) \pmod{p^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 \equiv \left(1^{-1} + (p-1)^{-1}\right) + \left(2^{-1} + (p-2)^{-1}\right) + \dots + \left((p-1)^{-1} + 1^{-1}\right) \pmod{p^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 \equiv p \cdot \left(1^{-1}(p-1)^{-1} + 2^{-1}(p-2)^{-1} + \dots + (p-1)^{-1} \cdot 1^{-1}\right) \pmod{p^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 \equiv \left(1^{-1} \cdot (p-1)^{-1} + 2^{-1}(p-2)^{-1} + \dots + (p-1)^{-1} \cdot 1^{-1}\right) \pmod{p}$$

$\Leftrightarrow$

$$0 \equiv (1^{-1})^2 + (2^{-1})^2 + (3^{-1})^2 + \dots + ((p-1)^{-1})^2 \pmod p$$

$\Leftrightarrow$

$$0 \equiv (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \dots + (p-1)^2 \pmod p$$

$\Leftrightarrow$

$$0 \equiv (p-1) \cdot p \cdot (2p-1) \cdot \cancel{6}^{-1} \pmod p.$$

$\Leftrightarrow$

$$0 \equiv (p-1) \cdot p(2p-1) \pmod p$$

que é verdade!

$\square$