Olimpíada Brasileira de Matemática

NÍVEL 3

PROBLEMA 5

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007 - 27

Vamos supor, por absurdo, que há uma quantidade finita de múltiplos de 7. Seja x o maior número t.q. $7 \mid a_x$

Pegue $K = 10^{6n} + 6 \underset{7}{\equiv} 0$, tal que $K > x$.

Observe que $10^{6n} \leq K < K+15 < 10^{6n+1}$. Logo, os números $K, K+1, \dots, K+15$ possuem $6n+1$ dígitos.

Logo; $a_{i+1} = a_i \cdot 10^{6n+1} + (i+1)$, com $i = \{K, \dots, K+15\}$

$$\Downarrow$$

$$a_{i+1} \underset{7}{\equiv} a_i \cdot 3 + (i+1)$$

Vamos provar que entre $a_K, a_{K+1}, \dots, a_{K+15}$ há um múltiplo de 7.

→ Se $a_K \equiv 0 \pmod 7$. OK!

→ Se $a_K \equiv 1 \pmod 7$ ⇒

⇒ $a_{K+1} \equiv 1 \cdot 3 + 1 \equiv 4$ ⇒

⇒ $a_{K+2} \equiv 4 \cdot 3 + 2 \underset{7}{\equiv} 0$. OK!

→ Se $a_K \equiv 2 \pmod 7$ ⇒

⇒ $a_{K+1} \equiv 2 \cdot 3 + 1 \underset{7}{\equiv} 0$ OK!

→ Se $a_K \equiv 3 \pmod 7$ ⇒

⇒ $a_{K+1} \equiv 3 \cdot 3 + 1 \equiv 3$ ⇒

⇒ $a_{K+2} \equiv 3 \cdot 3 + 2 \equiv 4$ ⇒

NÍVEL 3

PROBLEMA 5

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

$\Rightarrow a_{k+3} \equiv 4\cdot 3+3 \equiv 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+4} \equiv 1\cdot 3+4 \underset{7}{\equiv} 0$. OK!

$\rightarrow$ Se $a_k \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+1} \equiv 4\cdot 3+1 \equiv -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+2} \equiv (-1)\cdot 3+2 \equiv -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+3} \equiv (-1)\cdot 3+3 \underset{7}{\equiv} 0$ OK!

$\rightarrow$ Se $a_k \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+1} \equiv 5\cdot 3+1 \equiv 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+2} \equiv 2\cdot 3+2 \equiv 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+3} \equiv 1\cdot 3+3 \equiv -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+4} \equiv (-1)\cdot 3+4 \equiv 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+5} \equiv 1\cdot 3+5 \equiv 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+6} \equiv 1\cdot 3+6 \equiv 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+7} \equiv 2\cdot 3+7 \equiv -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+8} \equiv (-1)\cdot 3+8 \equiv -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+9} \equiv (-2)\cdot 3+9 \equiv 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+10} \equiv 3\cdot 3+10 \equiv -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+11} \equiv (-2)\cdot 3+11 \equiv -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+12} \equiv (-2)3+12 \equiv -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+13} \equiv (-1)\cdot 3+13 \equiv 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+14} \equiv 3\cdot 3+14 \equiv 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{k+15} \equiv 2\cdot 3+15 \underset{7}{\equiv} 0$. OK!

Olimpíada Brasileira de Matemática

NÍVEL 3

PROBLEMA 5

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

→ Se $a_K \equiv 6 \pmod 7$ ⇒

⇒ $a_{K+1} \equiv (-1)\cdot 3 + 1 \equiv -2$ ⇒

⇒ $a_{K+2} \equiv (-2)\cdot 3 + 2 \equiv 3$ ⇒

⇒ $a_{K+3} \equiv 3 \cdot 3 + 3 \equiv -2$ ⇒

⇒ $a_{K+4} \equiv (-2)\cdot 3 + 4 \equiv -2$ ⇒

⇒ $a_{K+5} \equiv (-2)\cdot 3 + 5 \equiv -1$ ⇒

⇒ $a_{K+6} \equiv (-1)\cdot 3 + 6 \equiv 3$ ⇒

⇒ $a_{K+7} \equiv 3 \cdot 3 + 7 \equiv 2$ ⇒

⇒ $a_{K+8} \equiv 2 \cdot 3 + 8 \underset{7}{\equiv} 0$. OK!

Logo, existe $y \geq K > x$ t.q $7 \mid a_y$. Absurdo!

Portanto, existe uma quantidade infinita de múltiplos de 7 na sequência.

Guilherme Zeus Dantas e Moura 140.264.007-27

100 / 10 / 13

Folha de rascunho

$\varphi(7) = 6 \Rightarrow 10^6 \equiv 1 \mod 7.$

$10^3 \equiv -1 \mod 7$

$1 \equiv 1$
$10 \equiv 3$
$10^2 \equiv 2$
$10^3 \equiv -1$
$10^4 \equiv -3 \equiv 4$
$10^5 \equiv -2$
$10^6 \equiv 1$

$10^{x-1} \leq n < 10^{x}$

$x - 1 \leq \log n < x$

$a_K = a_{K-1} \cdot 10^{\lfloor \log K \rfloor + 1} + K$

$\boxed{\times 10^3}$

... 132 $\underbrace{133}$

3 dígitos

$6n+2$

$\boxed{10^2 \leq 133 < 10^3}$

$10^{6n} + 6$

x
$x+1$
$x+3$
$x+6$
$x+10 \equiv x+3$
$x+15 \equiv x+1$
$x+21 \equiv x$
$x+28 \equiv x$
$\equiv x+1$
$\equiv x+3$

$10^{6n} \leq 10^{6n} + 6 \leq$
$\leq 10^{6n+1}$

Logo, $6n+1$ dígitos.

Algo parecido c/ isso

$10^{6n+0} \leq K < 10^{6n+2}$

$\boxed{3} \equiv 10^x$

K≡0 ~~0~~ 1 2 3 4 6
K≡1 4 ~~2~~ 3 -1 2 -3
K≡2 ~~0~~ 4 -1 1 -1
K≡3 1 ~~0~~ -1 -2
K≡4 ~~0~~ 1 -2
K≡5 1 -1
K≡6 2 3
K≡7 -1 2

$) \times 3 + 1$
$) \times 3 + 2$
$) \times 3 + 3$
$) \times 3 + 4$
$) \times 3 + 5$
$) \times 3 + 6$
$) \times 3$

OK!