Problemas Sortidos

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1 (2019 Putnam, A1)
Determine todos os possíveis valores de $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$, em que A, B e C são inteiros não-negativos.

Solução. Seja $f(A, B, C) = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$. Usando MA-MG, temos que

$$\frac{A^3 + B^3 + C^3}{3} \geq \sqrt[3]{A^3B^3C^3}$$

que implica $f(A, B, C) \geq 0$.

Conseguimos fatorar:

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) \\ &= (A + B + C)((A + B + C)^2 - 3(AB + BC + CA)). \end{aligned}$$

Note que $3 \mid A + B + C \iff 3 \mid (A + B + C)^2 - 3(AB + BC + CA)$. Logo, se $3 \mid f(A, B, C)$, então $9 \mid f(A, B, C)$.

Note que

$$\begin{aligned} f(n, n, n \pm 1) &= 2n^3 + (n \pm 1)^3 - 3n^2(n \pm 1) \\ &= 3n \pm 1. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} f(n - 1, n, n + 1) &= (n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 - 3(n - 1)n(n + 1) \\ &= 9n. \end{aligned}$$

Portanto, os valores possíveis para $f(ABC)$ são todos os inteiros positivos n tais que $3 \nmid n$ ou $9 \mid n$.

Problema 2 (2019 Putnam, A2)

No triângulo $\triangle ABC$, seja G o baricentro, e seja I o incentro. Suponha que os segmentos IG e AB são paralelos e que $\angle B = 2\tan^{-1}(1/3)$. Determine $\angle A$.

Solução. Sejam D, E as projeções de I, C em AB, respectivamente.

Sem perda de generalidade, $r = ID = 1$. Como $GI//AB$, temos que $CE = 3$. Como $\tan(\angle B/2) = 1/3$, $BD = 3$. Como

$$\tan(\angle B) = \frac{2\tan(\angle B/2)}{1 - \tan^2(\angle B/2)} = \frac{3}{4},$$

e $CE = 3$, temos que $BE = 4$.

Coincidentemente, $BD + r = 3 + 1 = 4 = BE$, que implica que CE é tangente ao incírculo e, finalmente, $E \equiv A$. Portanto, $\angle A = 90°$.

Problema 3 (China)

Dados inteiros positivos m e n, suponha que $n \geq 2m \geq 4$. Sejam $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ números reais, tais que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n(n-1).$$

Determine o valor mínimo de $\sum_{k=1}^{m} x_k$.

Esboço. Seja $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} x_k$.

Note que $f(1, 1, 1, \dots, 1, 1-n) = m$.

Mostre que para toda sequência válida $(x_1, \dots, x_n)$, existem a, b, c tais que $(a, b, \dots, b, c)$ é válida e

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(a, b, \dots, b, c).$$

Problema 4 (2019 Putnam, A5)

Seja p um primo ímpar, e seja $\mathbb{F}_p$ o corpo de inteiros módulo p. Seja $\mathbb{F}_p[x]$ o anel de polinômios sobre $\mathbb{F}_p$, e considere $q(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ definido por $q(x) = \sum_{k=1}^{p-1} a_k x^k$, em que $a_k = k^{(p-1)/2} \pmod{p}$. Ache o maior inteiro não negativo n tal que $(x-1)^n$ divide $q(x)$ em $\mathbb{F}_p[x]$.

Esboço. A resposta é $\frac{p-1}{2}$

Prove o seguinte fato, usando raiz primitiva:

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^t \equiv \begin{cases} -1, \text{se } p-1 \mid t \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove que $q^{(\ell)}(1) \equiv 0$, para $\ell < \frac{p-1}{2}$ e $q^{(\ell)}(1) \not\equiv 0$, para $\ell = \frac{p-1}{2}$, onde $q^{(\ell)}(x)$ é a ℓ-ésima derivada de $q(x)$.