Problema 1 (Álgebra / Shine)

(Rússia 2016) Seja n um inteiro positivo e sejam $K_0, K_1, \dots, K_{2n}$ inteiros não nulos com soma não nula.

É verdade que sempre existe uma permutação $(a_0, \dots, a_{2n})$ de $(K_0, \dots, K_{2n})$ tal que a equação

$$a_{2n}x^{2n} + \dots + a_0 = 0$$

não tem raízes inteiras?

Solução: S.p.g, $|K_{2n}| \geq |K_{2n-1}| \geq \dots \geq |K_0|$ e $K_{2n} > 0$.

Suponha que toda equação tem raízes inteiras.

Pegue uma permutação em que $a_{2n} = K_{2n}$.

- Equação: $K_{2n} x^{2n} + \dots + a_0 = 0$.

Mas $K_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_0 \geq$ (seja $y = |x|$)

$$\geq K_{2n} y^{2n} - K_{2n} y^{2n-1} - K_{2n} y^{2n} - \dots - K_{2n} \geq$$

$$\geq 0, \text{ se } y \geq 2.$$

Logo: $|x| = 0$ ou $1 \Rightarrow x = 0$, $x = 1$ ou $x = -1$.

- Se $x = 0 \Rightarrow a_0 = 0$. Absurdo!
- Se $x = 1 \Rightarrow \sum K_i = 0$. Absurdo.

Logo: $x = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow K_{2n} - a_{2n-1} + a_{2n-2} + \dots + a_0 \overset{(*)}{=} 0, \text{ para qualquer permutação } a.$$

Mas também:

$$K_{2n} - a_{2n-2} + a_{2n-1} + \dots + a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{2n-1} = a_{2n-2} \Rightarrow K_0 = K_1 = K_2 = \dots = K_{2n-1} \overset{(*)}{\Rightarrow} K_{2n} = 0. \text{ Absurdo!}$$

Logo, sempre há permutação a t.q. a equação não tenha raízes inteiras. $\square$