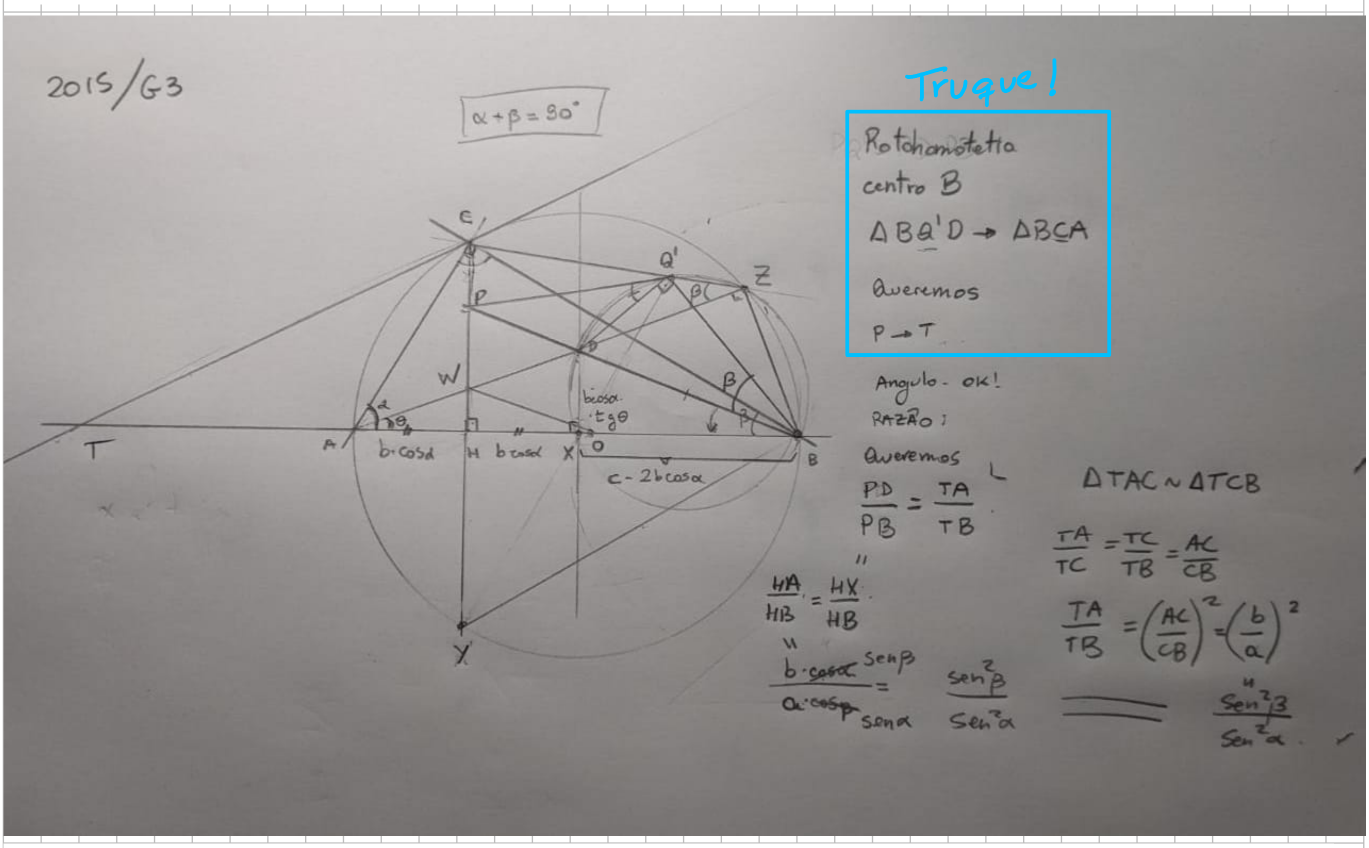
1. Seja ABC um triângulo com $\angle C = 90°$, e seja H o pé da altura relativa a C. Um ponto D é escolhido no interior do triângulo CBH tal que CH bisecta AD. Seja P a intersecção das retas BD e CH. Seja ω o semicírculo de diâmetro BD que encontra o segmento CB em um ponto interior. Uma reta passando por P é tangente a ω em Q. Prove que as retas CQ e AD se encontram em ω.



2. Um inteiro a é chamado *amigável* se a equação $(m^2+n)(n^2+m) = a(m-n)^3$ possui solução inteira positiva.

(a) Prove que existem pelo menos 500 inteiros amigáveis no conjunto $\{1, 2, \ldots, 2012\}$.

(b) Determine se $a = 2$ é amigável.

(b) $(m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3$

SUPONHA QUE m, n pares.

$v_2(n) = \alpha \leq v_2(m) = \beta$

$\alpha = \beta = 0$

$\alpha = \beta \neq 0$

$v_2(LD) = 3\alpha + 1$ (se $\alpha \neq \beta$)

$2\alpha = \beta \neq 0$

$v_2(LE) = \alpha + \beta$ (se $2\alpha > \beta$) ou 3α (se $2\alpha < \beta$) (se $2\alpha \neq \beta$)

Abs → $2\alpha > \beta$ e $\alpha \neq \beta$

Abs → $2\alpha < \beta$ e $\alpha \neq \beta$

$\Rightarrow \beta = \alpha$ ou 2α

• $\beta = \alpha \neq 0$

$v_2(LD) \geq 3\alpha + 4$

$v_2(LE) = 2\alpha$

Absurdo!

• $\beta = 2\alpha \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} v_2(LD) = 3\alpha + 1 \\ v_2(LE) \geq \alpha + 2\alpha + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v_2(n^2+m) = 2\alpha+1$$

$$n = 2^{\alpha} x \qquad m = 2^{2\alpha} y$$

$$(m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3$$

$$(2^{4\alpha} \cdot y^2 + 2^{\alpha} \cdot x)(2^{2\alpha} x^2 + 2^{2\alpha} y) = 2(2^{2\alpha} y - 2^{\alpha} x)^3$$

$$(2^{3\alpha} y^2 + x)(x^2+y) = 2(2^{\alpha} y - x)^3$$

$$\rightsquigarrow x(x^2+y) \underset{(4)}{\equiv} 2(2^{\alpha} y - x)^3 \Rightarrow x^2+y \underset{(4)}{\equiv} 2 \Rightarrow y \underset{(4)}{\equiv} 1$$

$$\rightsquigarrow x(x^2+y) \underset{(8)}{\equiv} 2 \cdot 3 \cdot (2^{\alpha} y) x^2 + 2 \cdot x^3$$

$$\Downarrow$$

$$y \underset{(8)}{\equiv} 2^{\alpha+1} \cdot 3 y x + x^2$$

$$\alpha \geq 2: \quad y \equiv x^2 \ (8) \rightarrow y \equiv 1 \ (8)$$

$$\alpha = 1: \quad y \equiv 4 + x^2 \ (8) \rightsquigarrow y \equiv 5 \ (8)$$

. Suponho m, n ímpares

$$(m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3 \qquad v_2(m-n) = \theta \quad > 0$$

LD é m. de $2^{3\theta+1}$ $\qquad \rho = \left\lceil \frac{3\theta+1}{2} \right\rceil > \theta$

SPG (m^2+n) é m. de 2^{ρ}.

$$\left.\begin{array}{ll} m^2 \equiv -n & (\text{mod } 2^{\theta}) \\ m \equiv n & (\text{mod } 2^{\theta}) \end{array}\right\} \Rightarrow m^2 \equiv -m \ (2^{\theta})$$

$$\Rightarrow m \equiv -1 \ (2^{\theta})$$

$$\Rightarrow n \equiv -1 \ (2^{\theta})$$

$$n = 2^{\theta} x - 1 \qquad m = 2^{\theta} y - 1 \qquad y \not\equiv x \ (2) \quad \text{spg } y \text{ ímpar}$$

$$(2^{2\theta} x^2 + 2^{\theta}(y - 2x))(2^{2\theta} y^2 + 2^{\theta}(x - 2y)) = 2^{3\theta+1}(y-x)^3$$

$$(2^{\theta} x^2 + y - 2x)(2^{\theta} y^2 + x - 2y) = 2^{\theta+1}(y-x)^3$$

2. Um inteiro a é chamado *amigável* se a equação $(m^2+n)(n^2+m) = a(m-n)^3$ possui solução inteira positiva.

(a) Prove que existem pelo menos 500 inteiros amigáveis no conjunto $\{1, 2, \ldots, 2012\}$.

(b) Determine se $a = 2$ é amigável.

$$a = \frac{(m^2+n)(n^2+m)}{(m-n)^3}$$

$a=5$, $n=1$, $m=3$ é solução

$\underline{m=n+1}$:

$n=1$: $a=15$
$n=2$: $a=77$
$n=3$: $a=247$
$n=4$: $a=609$
$n=5$: $a=1271$

$\underline{m=n+2}$

$\rightarrow \underline{m=2n+1}$

$((2n+1)^2+n)(n+1)^2 = a(n+1)^3$

$4n^2+5n+1 = a(n+1)$

$4n+1 = a$

$(n,m,a) = (n, 2n+1, 4n+1)$ funciona

Item (a), ok!