Problema 10. AMM 11950 [2017, 84].

Prove que, para todos inteiros positivos a e b, existem infinitos n t.q. n, $n+a$, $n+b$ podem ser expressos como soma de dois quadrados.

<u>Lema 1</u>: Seja c um natural fixo. Existem infinitos $x \in \mathbb{N}$ t.q. x^2+c é soma de quadrados. (Prova no fim da solução)

→ Se $a \not\equiv 2 \pmod 4$

$\Rightarrow \exists u, v$ com $u^2 + a = v^2$.

Seja $n = u^2 + x^2$, com x variável.

- $n + a = u^2 + x^2 + a = x^2 + v^2$.
- $n + b = u^2 + x^2 + b = x^2 + \underbrace{(u^2+b)}_{c} = x^2 + c$, que pelo Lema 1, é soma de quadrados.

→ Se $a \equiv b \equiv 2 \pmod 4$.

$a = 2a_0$; $b = 2b_0$. Pegue $n = 2n_0$. Mas, $2n_0$, $2n_0 + 2a_0$, $2n_0 + 2b_0$ são somas de quadrados $\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ n_0, $n_0 + a_0$, $n_0 + b_0$ são somas de quadrados, que é o caso anterior. □

<u>Prova do Lema 1</u>:

- c ímpar: $x = nc + 1 \Rightarrow x^2 + c = (nc)^2 + 2nc + c + 1$.

  Seria maneira se $y^2 = 2nc + c + 1 \Leftrightarrow 2n + 1 = \frac{y^2 - 1}{c}$.

  Basta pegar $y \equiv 0 \pmod 2$ e $y \equiv 1 \pmod c$, que existem infinitos!

  $\Rightarrow$ infinitos $n \Rightarrow$ infinitos x. ✓

- c par

  $c = z^2 + (2n+1) = z^2 + (n+1)^2 - n^2 \Rightarrow n^2 + c = z^2 + (n+1)^2$.

  quadrado ímpar qualquer.

  infinitos $z \Rightarrow$ infinitos n. ✓