Combinatória Simples

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1 Ideias úteis

(a) *Casos pequenos.* Mesmo que sejam trabalhosos.

(b) *Princípio Extremal:* Analisar propriedades extremais. Usualmente olhamos para o objeto ou exemplo minimal ou maximal, em algum sentido.

2 Problemas

Problema 1. Pinte todas as arestas de um grafo com 6 vértices de preto ou branco. Mostre que existem pelo menos dois triângulos monocromáticos.

Problema 2. (MIT Mathematical Problem Solving) Pedaços de papel com os números de 1 até 99 são colocados num chapéu. Cinco números são retirados aleatóriamente do chapéu, um de cada vez. Qual é a probabilidade de que os números sejam retirados em ordem crescente?

Problema 3. (MIT Mathematical Problem Solving) De quantas formas pode um inteiro positivo n ser escrito como soma de inteiros positivos, levando em consideração a ordem? Por exemplo, 4 pode ser escrito como soma de oito formas: $4 = 3+1 = 1+3 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.

Problema 4. (MIT Mathematical Problem Solving) Quantas matrizes 8×8 existem tal que seus elementos são 0's e 1's e cada coluna e cada linha contém exatamente um número ímpar de 1's?

Problema 5. (MIT Mathematical Problem Solving) Sejam n e k inteiros positivos. Ache o número de k-tuples $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ de subconjuntos S_i of $\{1, 2, \ldots, n\}$ sujeitos a cada uma das seguintes condições:

(a) $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_k$.

(b) Os S_i's são disjuntos dois a dois.

(c) $S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k = \varnothing$.

(d) $S_1 \subseteq S_2 \supseteq S_3 \subseteq S_4 \supseteq S_5 \subseteq \cdots S_k$. (Os símbolos $\subseteq$ e $\supseteq$ alternam.)

Problema 6. (Cone Sul 2001) Um polígono de área S está contido dentro de um quadrado de lado a. Mostre que existem dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior ou igual a S/a.

Problema 7. (Ibero 1997) Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, onde P_1 é o centro do círculo. Para cada $k = 1, \ldots, 1997$, defina x_k como a distância de P_k para o ponto de $\mathcal{P}$ mais próximo de P_k, mas diferente de P_k. Mostre que

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_{1997})^2 \leq 9.$$

Problema 8. (Lusofonia 2018) Num tabuleiro 3×25 são colocadas peças 1×3 (na vertical ou na horizontal) de modo que ocupem inteiramente 3 casas do tabuleiro e não se toquem em nenhum ponto. Qual é o número máximo de peças que podem ser colocadas, e para esse número, quantas configurações existem?

Problema 9. (MIT Mathematical Problem Solving) Seja $f(n)$ o número de formas de pegar um consjunto S de n elementos e, se S tiver mais que um elemento, particionar S em dois subconjuntos disjuntos não vazios S_1 e S_2, e então pegar um dos conjuntos S_1 ou S_2 com mais que um elemento e particionar em dois subconjuntos disjuntos não vazios S_3 e S_4, então pegar um dos conjuntos restantes com mais de um elemento não ainda particionado e particionar em dois subconjuntos disjuntos não vazios, etc., sempre pegando um conjunto com mais de um elemento até sobrar somente conjuntos unitários.

Por examplo, podemos começar com 12345678 (abreviação de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$), e então particioná-lo em 126 e 34578, depois particionar 34578 em 4 e 3578; 126 em 6 e 12; 3578 em 37 e 58; 58 em 5 e 8; 12 em 1 e 2; e finalmente, 37 em 3 e 7.

(A ordem da partição dos conjuntos é importante; por exemplo, particionar 1234 em 12 e 34; 12 em 1 e 2; 34 em 3 e 4, é diferente de particionar 1234 em 12 e 34; 34 em 3 e 4, e 12 em 1 e 2. Porém, particionar 1234 em 12 e 34 é o mesmo que particioná-lo em 34 e 12.)

Ache o termo geral de $f(n)$. Por exemplo, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, e $f(4) = 18$.

Problema 10. (MIT Mathematical Problem Solving) Seja p um primo e $1 \le k \le p - 1$. Quantos subconjuntos de k elementos $\{a_1, \ldots, a_k\}$ de $\{1, 2, \ldots, p\}$ são tais que $a_1 + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod{p}$?

Problema 11. (MIT Mathematical Problem Solving) Seja π uma permutação aleatória de $1, 2, \ldots, n$. Sejam n e k inteiros positivos com $1 \le k \le n$. Qual é a probabilidade de que, na decomposição de ciclos disjuntos de π, o tamanho do ciclo contendo 1 é k, isto é, a probabilidade de k ser o menor inteiro positivo tal que $\pi^k(1) = 1$?

Observação. Podemos modelar esse problema de uma forma mais natural. Considerando um amigo oculto com n em que há chances de uma pessoa tirar ela mesma, qual é a probabilidade de que ciclo que o Zeus participa tem tamanho k?

Problema 12. (MIT Mathematical Problem Solving) Seja π uma permutação aleatória de $1, 2, \ldots, n$. Qual é a probabilidade que 1 e 2 estejam no mesmo ciclo de π?

Problema 13. (MIT Mathematical Problem Solving) Escolha n números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uniformemente e independentemente do intervalo $[0, 1]$. Qual é o valor esperado de $\min_i x_i$, o mínimo de $x_1, x_2, \ldots, x_n$?