Problemas da OBM

Rafael Filipe: 10h–13h Guilherme Zeus: 14h–19h

Problema 1 (OBM 2016, 6)

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, não circunscritível, sem lados paralelos. As retas AB e CD se cortam em E. Seja $M \neq E$ a interseção dos circuncírculos de ADE e BCE. As bissetrizes internas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro I e as bissetrizes externas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro J. Prove que I, J e M são colineares.

Problema 2 (OBM 2014, 2)

Encontre todos os inteiros $n > 1$ com a seguinte propriedade: para todo k, $0 \leq k < n$, existe um múltiplo de n cuja soma dos algarismos, na base decimal, deixa resto k na divisão por n.

Problema 3 (OBM 2015, 3)

Dado um natural $n > 1$ e sua fatoração em primos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, sua *falsa derivada* é definida por:

$$f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 p_2^{\alpha_2 - 1} \dots \alpha_k p_k^{\alpha_k - 1}$$

Prove que existem infinitos naturais n tais que $f(n) = f(n-1) + 1$.

Esboço. Note que

$$f(nm) = f(n)f(m),$$

se m, n são primos entre si.

Se m é livre de quadrados e é primo com n, então

$$f(nm) = f(n).$$

Note que $f(13^2) + 1 = 2 \cdot 13 + 1 = 27 = 3 \cdot 3^2 = f(3^3)$.

Logo, se x é primo com 3, y é primo com 13 e x, y são livres de quadradps, vale que

$$f(27x) = f(169y) + 1.$$

O problema resume a mostrar que existem infinitos pares de x, y livres de quadrados (e primos com 3 e 13, respectivamente) tais que

$$27x - 169y = 1.$$

As soluções desconsiderando as condições extras

$$\begin{cases} x = 169t + 482 \\ y = 27t + 77. \end{cases}$$

(*Escrevi deste jeito, pois* $(77, 482)$ *funcionam como* (x, y) *com as condições extras.*)

Lema 1

Sejam $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$, x, y livres de quadrados, com $(a, x), (b, y) = 1$. Então existem infinitos n tais que $an + x$ e $bn + y$ são livres de quadrados.

Demonstração. Seja P o produto de todos os primos menores que c, para c suficientemente grande tal que $p|x$ ou $p|y$ implica $p|P$. Vamos contar a quantidade de n até N tais que $aP^2n + x$ ou $bP^2n + y$ não é livre de quadrados. Seja T essa quantidade.

Vamos cotar essa quantidade olhando para cada p^2 que pode dividir $aP^2n + x$ ou $bP^2n + y$. Isto acontece quando $n \equiv -x/(aP^2)$ ou $n \equiv -y/(bP^2) \pmod{p^2}$. Logo, isso acontece aproximadamente 2 vezes a cada p^2 valores dentre os N possíveis valores para n. Logo:

$$\begin{aligned} T &\le \sum_{\text{primos } c < p < \sqrt{bN + y}} \left\lceil \frac{2N}{p^2} \right\rceil \\ &\le \sum_{\text{primos } c < p < \sqrt{bN + y}} \left(\frac{2N}{p^2} + 1 \right) \\ &\le \left(2N \cdot \sum_{\text{primos } p > c} \frac{1}{p^2} \right) + \pi(\sqrt{bN + y}). \end{aligned}$$

Portanto, a densidade é:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{T}{N} &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{2N \cdot \sum_{\text{primos } p \,>\, c} \frac{1}{p^2}}{N} + \frac{\pi(\sqrt{bN+y})}{N} \\
&\leq 2 \cdot \sum_{\text{primos } p \,>\, c} \frac{1}{p^2} \\
&\leq 2 \cdot \sum_{n=c}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\
&\leq 2 \cdot \frac{1}{c-1} \\
&<< 1.
\end{aligned}
$$

Logo, como a densidade dos números que não funcionam tende a uma constante menor que 1, a densidade dos números n que funcionam é não nula! Logo existem infinitos n que funcionam. $\square$

Problema 4 (OBM 2010, 4)

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M e N os pontos médios dos lados CD e AD, respectivamente. As retas perpendiculares a AB passando por M e a BC passando por N cortam-se no ponto P. Prove que P pertence à diagonal BD se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

Problema 5 (OBM 2011, 6)

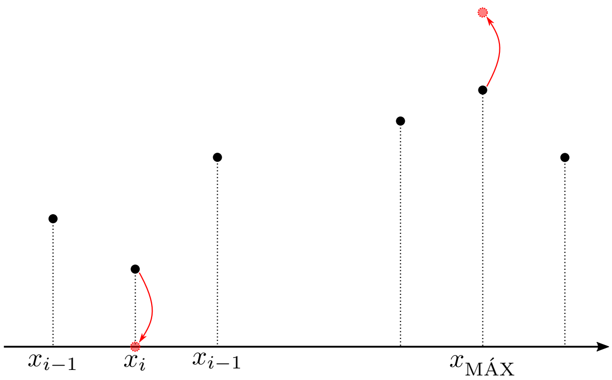
Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2011}$ reais não negativos cuja soma é $\frac{2011}{2}$. Prove que

$$\left|\prod_{\text{cic}}(x_i - x_{i+1})\right| = |(x_1 - x_2)\cdot(x_2 - x_3)\cdot\cdots\cdot(x_{2010} - x_{2011})\cdot(x_{2011} - x_1)| \le \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Esboço. Optimizar localmente. Essência parecida com IMO 2014, 5 (Banco da Cidade do Cabo).

De maneira mais clara, vamos fazer operações na sequência $\vec{x}$ que aumentam o produto procurado.

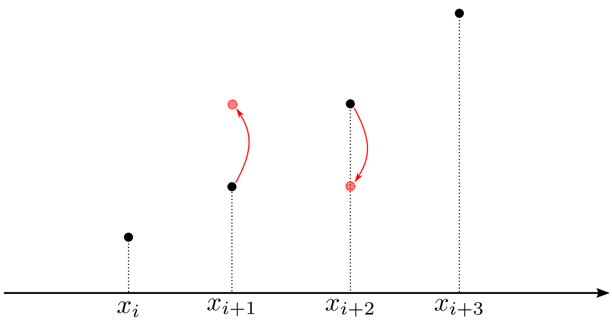
Se, em qualquer momento, existir $\boldsymbol{x_{i-1} \ge x_i \le x_{i+1}}$, $\boldsymbol{x_i > 0}$ então levamos $x_i \mapsto 0$ e $x_{\text{MÁX}} \mapsto x_{\text{MÁX}} + x_i$. Essa operação aumenta o produto.



Essa optimização garante que os mínimos locais são 0. Vamos chamar de *montanha* uma subsequência $(x_i = 0, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j = 0)$, onde só há zeros nas pontas. Dizemos que $j-i$ é o tamanho da montanha. Note que, dentro de uma montanha, não existem *depressões*, isto é, não existe $x_{i-1} \ge x_i \le x_{i+1}$. Portanto, dentro de uma montanha, há uma parte de subida seguida de uma parte de descida, isto é,

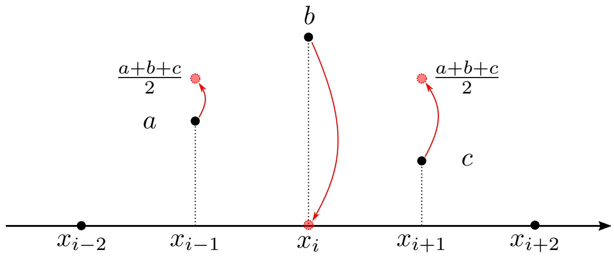
$$x_i \le \cdots \le x_k \ge \cdots \ge x_j.$$

Se, em qualquer momento, existir $\boldsymbol{x_i \le x_{i+1} \le x_{i+2} \le x_{i+3}}$ ou $\boldsymbol{x_i \ge x_{i+1} \ge x_{i+2} \ge x_{i+3}}$, então levamos $x_{i+1} \mapsto x_{i+2}$ e $x_{i+2} \mapsto x_{i+1}$. Essa operação aumenta o produto.



Essa operação "quebra" montanhas grandes em montanhas menores (*na verdade, ela cria depressões dentro de montanhas grandes, e a operação 1 "quebra" a montanha em montanhas menores*). Em especial, as partes de subida e de descida não podem ter tamanho maior que 2. Isto limita os possíveis tamanhos de montanhas: $2, 3, 4$.

Se, em qualquer momento, existir uma montanha de tamanho 4, digamos $(0, a, b, c, 0)$, então transformamos (ou melhor, terraformamos) essa montanha na cordilheira $(0, \frac{a+b+c}{2}, 0, \frac{a+b+c}{2}, 0)$. Essa operação aumenta o produto.



Note que a ordem das montanhas não importa, o produto é o mesmo independente da ordem.

Se, em qualquer momento, existirem duas montanhas de tamanho 2, digamos $(0, a, 0, b, 0)$, então terraformamos essa cordilheira na cordilheira $(0, \frac{a+b}{2}, 0, \frac{a+b}{2}, 0)$. Essa operação aumenta o produto.

Se, em qualquer momento, existirem duas montanhas de tamanho 3, digamos $(0, a, b, 0, c, d, 0)$, então terraformamos essa cordilheira na cordilheira $(0, \frac{a+b+c+d}{3}, 0, \frac{a+b+c+d}{3}, 0, \frac{a+b+c+d}{3}, 0)$. Essa operação aumenta o produto.

Logo, há, no máximo, uma montanha de tamanho 3. E, como 2011 é ímpar, há uma montanha de tamanho 3. Além disso, todas as montanhas de tamanho 2 tem mesmo tamanho.

Se, em qualquer momento, existir uma montanha de tamanho 3 com soma $2m$, ela será da forma $(0, m - x, m + x, 0)$; s.p.g. $x \geq 0$, o produto dessa montanha será $2m^2x - x^3$, que é máximo quando $x = \frac{m}{\sqrt{3}}$, com o produto valendo $\frac{4m^3}{3\sqrt{3}}$.

Finalmente, seja x a altura das montanhas de tamanho 2. Existem 1004 dessas montanhas. Como a soma das alturas é 2011/2, temos que $4m + 2008x = 2011$, e o produto total é $P = \frac{4}{3\sqrt{3}}m^3x^{2008}$.

Usando MA $\geq$ MG, temos

$$1 = \frac{3\left(\frac{4}{3}m\right) + 2008x}{2011} \geq \left(\frac{4}{3}m\right)^3 x^{2008} = \frac{16}{3\sqrt{3}}P.$$

$$P \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Problema 6 (OBM 2013, 3)
Encontre todas as funções injetoras $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tais que

$$f(x+y)\cdot(f(x)+f(y)) = f(xy)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^*$ com $x + y \neq 0$.

Esboço. Vamos calcular $f(2)$.
Vamos calcular $f(-1)$.
Vamos calcular $f(1)$.
Vamos achar

$$\frac{1}{f(x+n)} = \frac{1}{f(x)} + n.$$

Vamos achar

$$\frac{1}{f(xn)} = \frac{n}{f(x)}.$$

Vamos achar

$$\frac{1}{f(x+q)} = \frac{1}{f(x)} + q.$$

Vamos descobrir que $\frac{1}{f(x)} > 0$, se e somente se, $x > 0$.
Suponha que $\frac{1}{f(\alpha)} = \beta \neq \alpha$. Existe q racional entre α e β. Existe 0 entre $\alpha - q$ e $\beta - q$. Absurdo.

Extra

Problema 7 (Rússia 2016, 11.8)

Sejam AM_A, BM_B, CM_C as medianas de um triângulo ABC, que se intersectam em M. Seja Ω_A a circunferência que passa pelo ponto médio de AM e tangencia BC em M_A. Defina Ω_B e Ω_C analogamente. Prove que Ω_A, Ω_B e Ω_C passam por um mesmo ponto.