Problemas Sortidos – Live

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. (Romênia 2018, Regional, Série 9, 1) Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros não negativos. Ache todas as funções estritamente crescentes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que o número

$$\frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x + y)}$$

é um inteiro positivo, para todo $x, y \in \mathbb{N}$.

Rascunho. Algumas funções que funcionam são:

- $f(x) = cx + 1$, para todo $x \in \mathbb{N}$, funciona para todo c inteiro positivo.

Início de Solução.

Usando a proposição original e a condição de f estritamente crescente, temos que

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &\geq 1 + f(x + y) \\ &\geq 2 + f(x + y - 1) \\ &\vdots \\ &\geq (1 + x) + f(y), \end{aligned}$$

e, portanto, descobrimos que

$$f(x) \geq x + 1. \tag{1}$$

Jogando $x = y = 0$ na proposição do enunciado, temos que

$$\begin{aligned} 1 + f(0) \mid 2f(0) &\implies 1 + f(0) \mid 2 \\ &\implies f(0) = 1 \text{ (não pode ser 0 usando 1)} \end{aligned}$$

Jogando $x = t$ e $y = 1$ na proposição original, temos que $1 + f(t + 1) \mid f(t) + f(1)$ e portanto

$$f(x + 1) - f(x) \leq f(1) - 1.$$

Somando a equação anterior de $t = 0$ até $t = x - 1$, temos $f(x) - f(0) \leq (f(1) - 1) \cdot x$, isto é

$$f(x) \leq (f(1) - 1) \cdot x + 1 \text{ para todo } x \text{ inteiro positivo.}$$

Vamos definir $c = f(1) - 1$. Provamos que

$$f(x) \leq cx + 1. \tag{2}$$

Pergunta. Sabemos que $f(0) = 1$ e $f(1) = c + 1$. Quanto é $f(2)$?

Pela condição de ser crescente, $f(2) > f(1) = c + 1$.

Jogando $x = y = 1$, temos que $1 + f(2) \mid 2f(1) = 2(c + 1)$.

Os divisores de $2(c + 1)$ são, em ordem decrescente, $2(c + 1), c + 1, \ldots, 1$. Como $1 + f(2)$ é um divisor de $2(c + 1)$ e é maior que $c + 1$, então

$$f(2) = 2c + 1.$$

Pela condição de ser crescente, $f(3) > f(2) = 2c + 1$.

Jogando $x = 1$ e $y = 2$, temos que $1 + f(3) \mid f(1) + f(2) = 3c + 2$.

O segundo maior divisor de $3c + 2$ é, no máximo, $\frac{3c+2}{2} < 2c + 2 < f(3) + 1$. Portanto, $f(3) + 1$ precisa ser o maior divisor de $3c + 2$, i.e.,

$$f(3) = 3c + 1.$$

Solução.

Sabemos que $f(0) = 1$. Vamos definir $c = f(1) - 1$. Portanto, $f(1) = c + 1$. Vamos provar, usando indução, que $f(n) = cn + 1$.

Base. $n = 0, 1, 2, 3$, ok!

Hipótese de indução. Seja $n \geq 2$. Suponha que $f(n-1) = c(n-1) + 1$.

Como f é crescente, sabemos que $f(n) > f(n-1) = c(n-1) + 1$.

Jogando $x = 1$ e $y = t - 1$ na equação original, temos que

$$1 + f(n) \mid f(1) + f(n-1) = cn + 2.$$

Se $f(n) + 1 \neq cn + 2$ (o maior divisor de $cn + 2$), então $f(n) + 1 \leq \frac{cn+2}{2} < c(n-1) + 2 < f(n) + 1$, um absurdo! Logo,

$$f(n) = cn + 1.$$

2. (Romênia 2018, Regional, Série 9, 3) Sejam AD, BE, CF as alturas do triângulo ABC e sejam K, L, M os ortocentros dos triângulos AEF, BFD e CDE, respectivamente. Sejam G_1 e G_2 os baricentros dos triângulos DEF e KLM, respectivamente. Mostre que $HG_1 = G_1G_2$, onde H é o ortocentro do triângulo ABC.

Solução. Sabemos que $KF \perp AC \perp EB$ e, portanto, $KF \mathbin{//} EB$. Podemos repetir isso para os outros segmentos e descobrir que $HEKF$, $HDME$, $HFLD$ são paralelogramos. Usando vetores, esses paralelogramos implicam que

$$\begin{aligned}
H\vec{K} &= H\vec{E} + H\vec{F}\\
H\vec{L} &= H\vec{D} + H\vec{F}\\
H\vec{M} &= H\vec{D} + H\vec{E}
\end{aligned}$$

Somando as três equações acima e dividindo por 3, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{H\vec{K} + H\vec{L} + H\vec{M}}{3} &= 2\frac{H\vec{D} + H\vec{E} + H\vec{F}}{3}\\
H\vec{G}_2 &= 2H\vec{G}_1,
\end{aligned}$$

que implica que G_1 é ponto médio de HG_2.