Problema 7 (USA TST 2016). $\sqrt{3} = (1.b_1 b_2 \cdots)_2$

Prove que pelo menos um alg $b_n, \dots, b_{2n}$ é 1.

Suponha que não é.

(TN/Murilo)

$$x = 1.b_1 b_2 \cdots b_{n-1} < 2$$

$$y = 0.b_{2n+1} \cdots \leq 1.$$

⊛ $\sqrt{3}$ é irracional, logo $x^2 \neq 3$.

$$(x + 2^{-2n} y)^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 < 3}$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2^{-2n} y + 2^{-4n} y^2 = 3$$

$$x^2 + 2^{-(2n-2)} + 2^{-4n} \geq 3.$$

$$x^2 \geq 11_{(2)} - 0.\underbrace{000\cdots01}_{2n-2}{}_{(2)} - 0.\underbrace{0000\cdots001}_{4n}{}_{(2)}$$

$$x^2 \geq 10.\underbrace{\underbrace{111\cdots110}_{2n-2}11111\cdots1}_{4n} \qquad (+)$$

Mas, como x possui no máximo $n-1$ algorismos binários, x^2 possui no máximo $2n-2$ algorismos binários. (□)

Logo: $(+) \Rightarrow \quad x^2 \geq 10.\underbrace{111\cdots111}_{2n-2}$. Mas $x^2 < 11.\underbrace{000\dots0}_{2n-2}$.

Logo: $x^2 = 10.\underbrace{1111\cdots11}_{2n-2}$, pois (□). (◇)

Mas, o $(2n-2)^\circ$ algorismo binário de x^2 é $b_{n-1}^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_{n-1} = 1$. Como não há "vai um", o $(2n-3)^\circ$ algorismo binário de x^2 é $2 \cdot b_{n-1} b_{n-2} \not\equiv 1 \pmod 2$. Mas, o $(2n-3)^\circ$ alg b. de x^2 é 1, por (◇).

Mas isso é ilegal! Logo, um dos algorismos $b_n, \dots, b_{2n}$ é 1. □