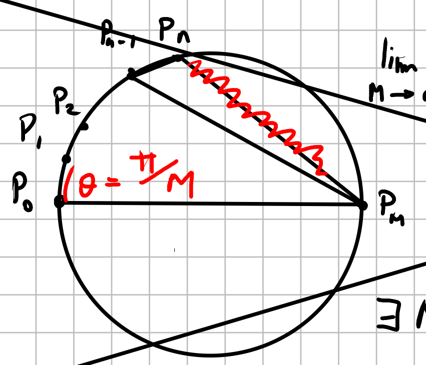
Um círculo ω de raio 1 é dado. Uma coleção T de triângulos é chamada *boa* se:

(*i*) cada triângulo de T é inscrito em ω, e;

(*ii*) nenhum par de triângulos de T possui ponto interior comum.

Encontre todos os números reais positivos t tais que, para todo inteiro positivo n, existe uma coleção boa com n triângulos, cada um com perímetro maior que t.



i fixo $0 \le i < n$

$\lim_{M\to\infty}$ Perímetro $P_M P_i P_{i+1} = \lim_{M\to\infty} |P_M P_i| + \lim_{M\to\infty} |P_M P_{i+1}| + \lim_{M\to\infty} |P_i P_{i+1}|$

$= 2 + 2 + 0$

$= 4.$

$\exists M$ tq Perímetro $P_M P_i P_{i+1} > 4 - \varepsilon$.

Logo, $t = 4 - \varepsilon$ funciona.

$t = 4 + \varepsilon$

$a > b > c$

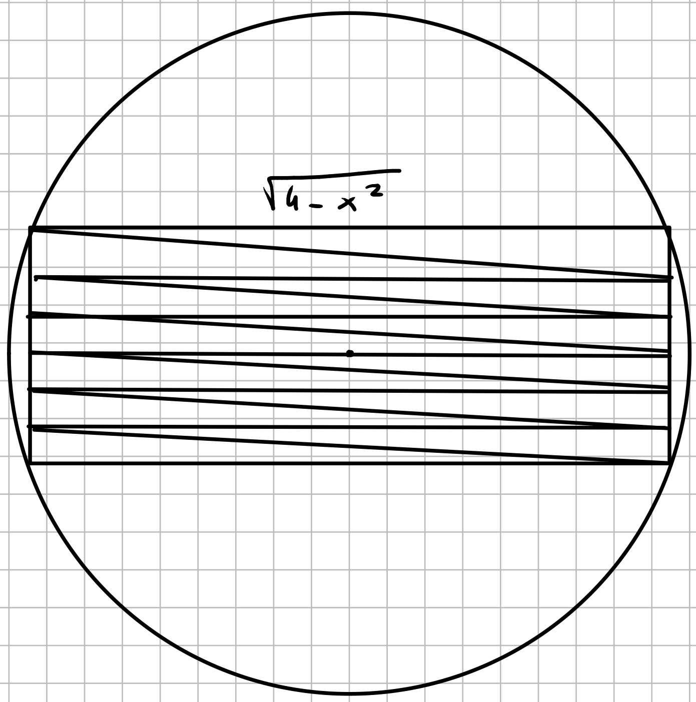
$a < 2 \quad b < 2$

$\left.\begin{array}{l} a+b+c > 4+\varepsilon \\ a+b < 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c > \varepsilon}$

$S = \frac{abc}{4} > \frac{\varepsilon^3}{4}$

$\frac{n\varepsilon^3}{4} < \pi$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} > \sqrt{\left(2+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}}$



Seja $x < 8n/(4n^2+1)$.

x/n

$\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{n} + \sqrt{4-x^2+x^2/n^2}$

$>$

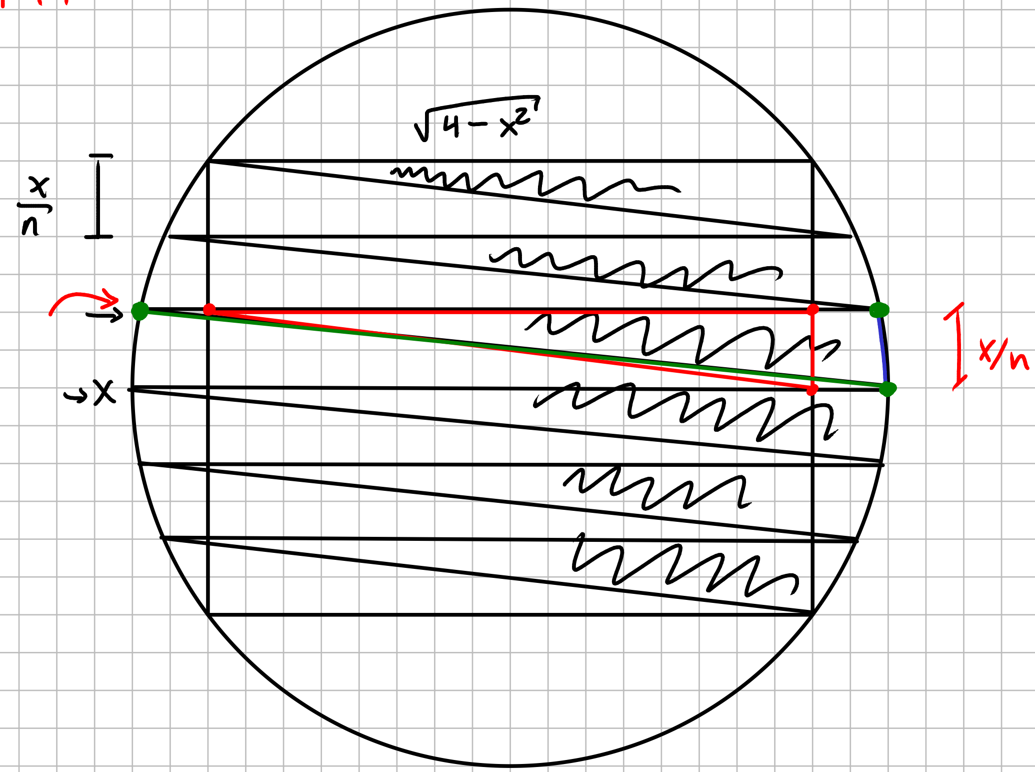
$2\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{n} > 4$

$\iff$

$x < \frac{8n}{4n^2+1}$.

OK

Seja $x < \frac{8n}{4n^2+1}$



$$\text{perím} = \frac{x}{n} + \sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-x^2+\frac{x^2}{n^2}}$$

$$> \frac{x}{n} + 2\sqrt{4-x^2} > 4, \text{ pois :}$$

$$2n\sqrt{4-x^2} > 4n - x$$

$$4n^2(4-x^2) > 16n^2 - 8xn + x^2$$

$$-4n^2x > -8n + x$$

$$8n > (4n^2+1)\,x$$

$$\frac{8n}{4n^2+1} > x$$

+1