Treinamento de Velocidade — Live

Guilherme Zeus Dantas e Moura
guilhermezeus.com

1. (2021 Korea Junior Math Olympiad, 2) Seja (a_n) uma sequência de inteiros satisfazendo as seguintes condições:

- $a_1 = 2021^{2021}$;
- $0 \leq a_k < k$ para todo inteiro $k \geq 2$; e
- $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{k+1} a_k$ é múltiplo de k para todo inteiro positivo k.

Determine o 2021^{2022}-ésimo termo da the sequência (a_n).

Esboço. A resposta é 0. Defina

$$S_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{k_1} a_k,$$

e $b_k = \frac{S_k}{k}$.

Note que a_{k+1} é o único número tal que $0 \leq a_{k+1} \leq k$ e $S_k + (-1)^k a_{k+1} \equiv 0 \pmod{k+1}$. Isso é equivalente a $a_{k+1} = (-1)^k b_k \pmod{k+1}$.

Para $k \geq 2021^{2021}$, dá pra cotar $-k < b_l < k$.

- Se k é par, concluímos que

$$a_{k+1} = \begin{cases} (b_k) & b_k \geq 0 \\ (b_k + k + 1) & b_k < 0. \end{cases}$$

Logo,

$$(k+1)b_{k+1} = S_{k+1} = S_k + (-1)^k a_{k+1} = \begin{cases} (k+1)b_k & b_k \geq 0 \\ (k+1)(b_k + 1) & b_k < 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k & b_k \geq 0 \\ b_k + 1 & b_k < 0. \end{cases}$$

- Se k é ímpar, concluímos que

$$a_{k+1} = \begin{cases} -b_k + k + 1 & b_k > 0 \\ -b_k & b_k \leq 0. \end{cases}$$

Logo,

$$(k+1)b_{k+1} = S_{k+1} = S_k + (-1)^k a_{k+1} = \begin{cases} (k+1)(b_k - 1) & b_k > 0 \\ (k+1)(b_k) & b_k \leq 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k - 1 & b_k > 0 \\ b_k & b_k \leq 0. \end{cases}$$

Seja $N = 2021^{2021}$. Seja $k \geq N$ qualquer. Portanto, concluímos que, se $b_k \neq 0$, então $|b_{k+2}| = |b_k| - 1$; e, se $b_k = 0$, então $b_{k+1} = 0$. Como $b_N < N$, isso implica que $b_{3N} = 0$, que finalmente implicará que $S_k = b_k = a_k = 0$ para todo $k > 3N$.

2. (2021 Korea Junior Math Olympiad, 4) Em um triângulo acutângulo ABC com $AB < AC$, a bissetriz do ângulo $\angle A$ e a mediatriz do segmento BC se intersectam em D. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC. A reta CP encontra o circuncírculo do triângulo ABP nos pontos P e K. Prove que B, D, K são colineares se, e somente se, AD e BC se encontram no circuncírculo do triângulo APC.

Solução. Seja E a intersecção de BC e AD.

$$\begin{aligned}
K,\ B,\ D \text{ são colineares} &\iff \angle ABK = 180^\circ - \angle DBA \\
&\iff \angle APK = \angle ACD \\
&\iff \angle APK = \angle ACB + \angle BCD \\
&\iff \angle APK = \angle ACE + \angle BAD \\
&\iff \angle APK = \angle ACE + \angle DAC \\
&\iff \angle APK = \angle ACE + \angle EAC \\
&\iff \angle APK = \angle AEB \\
&\iff \angle APC = \angle AEC \\
&\iff APEC \text{ é cíclico.}
\end{aligned}$$

3. (2021 Korea Junior Math Olympiad, 5) Determine todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(f(x+y) - f(x-y)) = y^2 f(x)$$

para todos reais x e y.

Solução. Jogando $(x, y) \mapsto (x, 0)$ na equação original, temos que $f(0) = 0$.

Observe que, se f é solução, então $-f$ também é solução, pois a equação original com $(x, y) \mapsto (x, -y)$ implica

$$(-f)((-f)(x+y) - (-f)(x-y)) = y^2(-f)(x).$$

A função identicamente nula funciona. Suponha que f não é a função identicamente nula. Portanto, existe c tal que $f(c) \neq 0$. Temos que $c \neq 0$, pois $f(0) = 0$. Pela observação do parágrafo anterior, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f(c) > 0$.

Seja $y \geq 0$ qualquer real não-negativo. Defina $z_y = \sqrt{\frac{y}{f(c)}}$. Jogando $(x, y) \mapsto (c, z_y)$ na equação original, temos que

$$f(f(c + z_y) - f(c - z_y)) = y,$$

portanto, y está na imagem de f.

Defina por w_y o número tal que $f(2w_y) = y$, que existe, como vimos acima. Jogando $(x, y) \mapsto (w_y, w_y)$ e $(x, y) \mapsto (w_y, -w_y)$ na equação original, temos que

$$\begin{aligned}
f(y) = f(f(2w_y)) &= w_y^2 f(w_y) \\
&= (-w_y)^2 f(w_y) = f(-f(2w_y)) = f(-y),
\end{aligned}$$

para todo $y \geq 0$.

Portanto, trocando $y \mapsto -y$ caso y seja negativo, concluímos que

$$f(y) = f(-y)$$

para todo y real; ou seja, f é uma função par.

Finalmente, jogando $(x, y) \mapsto (x, c)$ e $(x, y) \mapsto (c, x)$ na equação original, concluímos que

$$\begin{aligned}
c^2 f(x) &= f(f(x+c) - f(x-c)) \\
&= f(f(c+x) - f(c-x)) = x^2 f(c),
\end{aligned}$$

para todo x real, e portanto,

$$f(x) = \frac{f(c)}{c^2} x^2.$$

Basta testarmos a função $f(x) = kx^2$, para uma constante k. Concluímos que $k = 0$, $k = 1/4$ ou $k = -1/4$, e portanto, as funções que satisfazem o enunciado são

$$f(x) = \frac{-x^2}{4}, \quad f(x) = 0, \quad f(x) = \frac{x^2}{4}.$$

4. (2021 HMIC, 1) 2021 pessoas estão sentadas numa mesa circular. Em um movimento, você pode trocar de lugar duas pessoas adjacentes. Determine o número mínimo de movimentos necessários para fazer cada pessoa terminar 1000 posições para a esquerda de sua posição inicial.

Solução. Seja $n = 2021$ e $k = 1000$. A resposta é $k(n-k)$.

Cada pessoa possui um contador de passos orientados. Cada vez em que uma pessoa é movimentada no sentido anti-horário, seu contador de passos aumenta em 1. Cada vez em que uma pessoa é movimentada no sentido horário, seu contador de passos diminui em 1. Seja p_i o valor do contador de passos da pessoa i.

Em cada operação, uma pessoa é movimentada no sentido anti-horário; e outra é movimentada no sentido horário. Portanto, $\sum p_i$ é constante em qualquer momento; isto é $\sum p_i = 0$. Note também que, em cada operação, $\sum |p_i|$ aumenta em no máximo 2 unidades.

Suponha que, após M movimentos, cada pessoa se encontra k posições no sentido horário de onde começou. Isso implica que, para cada pessoa i,

$$p_i \equiv k \pmod{n},$$

ou seja,

$$p_i \in \{\dots, k-2n, k-n, k, k+n, \dots\}.$$

Como M movimentos foram feitos, concluímos que $\sum |p_i| \leq 2M$. Sejam

$$\mathcal{P} = \{i : f(i) \geq 0\} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{N} = \{i : f(i) < 0\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} p_i \\ &= \sum_{i \in \mathcal{P}} p_i + \sum_{i \in \mathcal{N}} p_i \\ &= \sum_{i \in \mathcal{P}} |p_i| - \sum_{i \in \mathcal{N}} |p_i|. \end{aligned}$$

Seja $X = \sum_{i \in \mathcal{P}} |p_i| = \sum_{i \in \mathcal{N}} |p_i|$. Note que $X = \sum_{i \in \mathcal{P}} |p_i| \geq |\mathcal{P}| \cdot k$ e $X = \sum_{i \in \mathcal{N}} |p_i| \geq |\mathcal{N}|(n-k)$. Portanto,

$$\begin{aligned} 2M \geq \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} |p_i| &= \sum_{i \in \mathcal{P}} |p_i| + \sum_{i \in \mathcal{N}} |p_i| \\ &= 2X \\ &= 2\left(\frac{kX + (n-k)X}{n}\right) \\ &\geq 2\left(\frac{k(n-k)|\mathcal{N}| + (n-k)k|\mathcal{P}|}{n}\right) \\ &= 2k(n-k)\frac{|\mathcal{P}| + |\mathcal{N}|}{n} = 2k(n-k), \end{aligned}$$

ou seja, o número de movimentos é maior ou igual a $k(n-k)$.

Tal número é atingível com a seguinte sequências de movimentos:

0. No início, estão todos em fila:

$$1, 2, 3, \dots, k, k+1, k+2, k+3, \dots, n$$

1. Faça k movimentos, trocando o $k+1$ com k, então trocando $k+1$ com $k-1$, e assim por diante, até trocar $k+1$ com 1. Teremos, então, a seguinte sequência:

$$k+1, 1, 2, \dots, k-1, k, k+2, k+3, \dots, n$$

2. Faça outros k movimentos, trocando o $k+2$ com k, então trocando $k+2$ com $k-1$, e assim por diante, até trocar $k+2$ com 1. Teremos, então, a seguinte sequência:

$$k+1, k+2, 1, \dots, k-2, k-1, k, k+3, \dots, n$$

$\vdots$

$n-k$. Por fim, faça outros k movimentos, trocando o n com k, então trocando n com $k-1$, e assim por diante, até trocar n com 1. Teremos, então, a seguinte sequência:

$$k+1, k+2, \dots, n-1, n, 1, 2, \dots, k$$