Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro
2012 - 2019

	1	2	3	4	5	6
N3 12						
N4 12						
N3 13						
N4 13						
N3 14						
N4 14						
N3 15						
N4 15						
N3 16						
N4 16						
N3 17						
N4 17						
N3 18						
N4 18						
N3 19						
N4 19						

Todo e qualquer feedback, especialmente sobre erros neste livreto (mesmo erros tipográficos pequenos), é apreciado. Você também pode contribuir enviando suas soluções (de preferência, formatadas em TEX).
Você pode enviar comentários e soluções para `zeusdanmou+tex@gmail.com`.
A versão mais atualizada desse arquivo (provavelmente) está disponível clicando aqui. Última atualização: 1 de agosto de 2020.

PROBLEMA 1

Na Figura 1, há um tabuleiro com números nas suas casas. Em cada passo, pode-se somar 1 a cada casa de uma linha, somar 1 a cada casa de uma coluna, subtrair 1 de cada casa de uma linha ou subtrair 1 de cada casa de uma coluna. Mostre uma série de passos que transforme o tabuleiro da Figura 1 em um tabuleiro da Figura 2.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 1

5	5	5
5	5	5
5	5	5

Figura 2

PROBLEMA 2

Considere um decágono regular $A_1A_2\ldots A_{10}$. De quantas maneiras podemos pintar os vértices deste decágono com as cores azul e vermelho de forma que todo retângulo com vértices no conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_{10}\}$ possua pelo menos dois vértices pintados com cores distintas?

PROBLEMA 3

Determine todos os algarismos não nulos distintos dois a dois O, M , E, R e J tais que

$$\frac{(OM)_{10}}{(ERJ)_{10}} = 0,ERERERERERER\ldots$$

Observação. As notações $(OM)_{10}$ e $(ERJ)_{10}$ denotam as representações decimais de ambos os números.

Observação. A notação $0,ERERERERERER\ldots$ denota a dízima periótica com período $(ER)_{10}$.

PROBLEMA 4

Encontre todos os inteiros positivos n tais que n^2 pode ser escrito como soma de exatamente n quadrados perfeitos não nulos. Por exemplo, $3^2 = 9$ pode ser escrito como $3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$.

PROBLEMA 5

No triângulo acutângulo ABC, as alturas BE e CF se intersectam em H, com E no lado AC e F no lado AB. Suponha que o circuncentro de ABC pertence ao segmento EF. Demonstre que $HA^2 = HB^2 + HC^2$.

PROBLEMA 6

Seja n um inteiro positivo. Divide-se um círculo em n setores circulares iguais. Considere o seguinte processo:

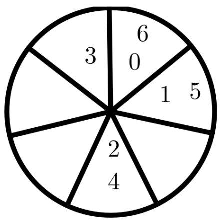
(a) Inicialmente, coloca-se uma joia em um dos setores e escreve-se o número 0 neste setor.

(b) Na etapa 1, move-se a joia um setor, no sentido horário, e escreve-se o número 1 no novo setor onde a joia está.

(c) Na etapa k, move-se a joia k setores, no sentido horário, e escreve-se o número k no novo setor onde a joia está.

Terminamos o processo ao fim da etapa $n - 1$. Para quais valores de n, ao fim do processo, todos os setores possuem um número escrito?

Abaixo, encontra-se o resultado final do processo para n = 7.



PROBLEMA 1
Considere a sequência $1, 2, 4, 3, 5, 7, 6, 8, 10, 12, 9, 11, 13, 14, 17, \ldots$, construída do seguinte modo: escrevemos o primeiro número ímpar, depois os dois primeiros números pares, depois os três ímpares seguintes, depois os quatro pares seguintes, depois os cinco ímpares seguintes e assim por diante.

(a) Qual número desta sequência ocupa a posição 2019?

(b) Em qual posição encontra-se o número 2019 nessa sequência.

Observação. Por exemplo, o número 1 se encontra na primeira posição, o número 4 na terceira posição e o número 10 está na nona posição.

PROBLEMA 2
Seja $n \geq 2$ um número inteiro. Considere um polígono regular de $2n$ lados $A_1A_2 \ldots A_{2n}$. De quantas maneiras podemos pintar os vértices deste polígono com as cores azul e vermelho de forma que todo retângulo com vértices no conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_{2n}\}$ possua pelo menos dois vértices pintados com cores distintas?

PROBLEMA 3
Determine todos os algarismos não nulos distintos dois a dois O, M , E, R e J tais que

$$\frac{(OM)_{10}}{(ERJ)_{10}} = 0, ERERERERERER\ldots$$

Observação. As notações $(OM)_{10}$ e $(ERJ)_{10}$ denotam as representações decimais de ambos os números.

Observação. A notação $0, ERERERERERER\ldots$ denota a dízima periótica com período $(ER)_{10}$.

PROBLEMA 4
Sejam ABC um triângulo e AD, BE e CF suas alturas, com D, E e F nos lados BC, CA e AB, respectivamente. Suponha que o ortocentro H é o ponto médio da altura AD. Determine o menor valor possível que

$$\frac{HB}{HE} + \frac{HC}{HF}$$

pode assumir.

PROBLEMA 5
Seja n um inteiro positivo. Divide-se um círculo em n setores circulares iguais. Considere o seguinte processo:

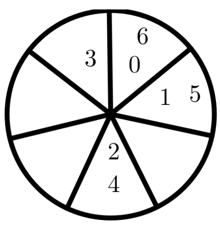
(a) Inicialmente, coloca-se uma joia em um dos setores e escreve-se o número 0 neste setor.

(b) Na etapa 1, move-se a joia um setor, no sentido horário, e escreve-se o número 1 no novo setor onde a joia está.

(c) Na etapa k, move-se a joia k setores, no sentido horário, e escreve-se o número k no novo setor onde a joia está.

Terminamos o processo ao fim da etapa $n - 1$. Para quais valores de n, ao fim do processo, todos os setores possuem um número escrito?

Abaixo, encontra-se o resultado final do processo para n = 7.



PROBLEMA 6
Seja n um inteiro positivo. Calcule

$$\sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq 2n} (2 - a_1) \cdot (4 - a_2) \cdot \cdots \cdot (2n - a_n)$$

onde a soma percorre todas as sequências crescentes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ com termos no conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$.

PROBLEMA 1
Um número natural é chamado de *factorion* se ele é igual a soma dos fatoriais dos seu dígitos decimais. Encontre todos os números de 3 dígitos que são factorions.

Observação: O fatorial de um número inteiro não negativo e definido da seguinte forma: $0! = 1$ e para n inteiro positivo, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Por exemplo, $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.

PROBLEMA 2
Considere um triângulo equilátero ABC de lado 1. Um círculo C_1 é construído tangenciando os lados AB e AC. Um círculo C_2, de raio maior que o raio de C_1, é construído tangenciando os lados AB e AC e tangenciando externamente o círculo C_1. Sucessivamente, para n inteiro positivo, o círculo C_{n+1}, de raio maior que o raio de C_n, tangencia os lados AB e AC e tangencia externamente o círculo C_n. Determine os possíveis valores para o raio de C_1 de forma que caibam 4, mas não 5 círculos dessa sequência, inteiramente contidos no interior do triângulo ABC.

PROBLEMA 3
Seja n um inteiro positivo. Uma função $f : \{1, 2, \ldots, 2n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é dita *boa* se $f(j + 2)$ e $f(j)$ têm a mesma paridade para todo $j = 1, 2, \ldots, 2n - 2$. Prove que a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 4
Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito na circunferência Γ. Sejam D e E pontos em Γ tais que AD é perpendicular a BC e AE é diâmetro. Seja F o ponto de interseção de AE com BC. Prove que se $\angle DAC = 2\angle DAB$, então $DE = CF$.

PROBLEMA 5
Sejam n um inteiro positivo e $\sigma = (a_1, \ldots, a_n)$ uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$. O *número de cadência* de σ é o número de blocos decrescentes maximais. Por exemplo, se $n = 6$ e $\sigma = (4, 2, 1, 5, 6, 3)$, então o número de cadência de σ é 3, pois σ possui 3 blocos $(4, 2, 1)$, (5), $(6, 3)$ descrescentes e maximais. Note que os blocos $(4, 2)$ e $(2, 1)$ são decrescentes, mas não são maximais, já que estão contidos no bloco $(4, 2, 1)$.

Calcule a soma das cadências de todas as permutações de $\{1, \ldots, n\}$.

PROBLEMA 6
Dois quadrados perfeitos são ditos amigáveis se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo, $1225 = 35^2$ e $225 = 15^2$ são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.

PROBLEMA 1

Sejam ABC um triângulo e k um número real positivo menor do que 1. Tome A_1, B_1 e C_1 pontos nos lados BC, AC e AB de modo que

$$\frac{A_1B}{BC} = \frac{B_1C}{AC} = \frac{C_1A}{AB} = k.$$

(a) Calcule em função de k a razão entre as áreas dos triângulos $A_1B_1C_1$ e ABC.

(b) Mais geralmente, para todo $n \geq 1$, constrói-se o triângulo $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, de modo que A_{n+1}, B_{n+1} e C_{n+1} sejam pontos nos lados B_nC_n, A_nC_n e A_nB_n satisfazendo

$$\frac{A_{n+1}B_n}{B_nC_n} = \frac{B_{n+1}C_n}{A_nC_n} = \frac{C_{n+1}A_n}{A_nB_n} = k.$$

Determine os valores de k de modo que a soma das áreas de todos os triângulos $A_nB_nC_n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ seja igual a $\frac{1}{3}$ da área do triângulo ABC.

PROBLEMA 2

Seja (a_n) uma sequência de números inteiros tal que $a_1 = 1$ e para $n \geq 1$ inteiro positivo, $a_{2n} = a_n + 1$ e $a_{2n+1} = 10a_n$. Quantas vezes o número 111 aparece nessa sequência?

PROBLEMA 3

Sejam n e k inteiros positivos. Uma função $f : \{1, 2, 3, 4, \ldots, kn-1, kn\} \to \{1, \cdots, 5\}$ é dita *boa* se $f(j+k) - f(j)$ é múltiplo de k para todo $j = 1, 2. \cdots, kn-k$.

(a) Prove que se $k = 2$, então a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito para todo n inteiro positivo.

(b) Prove que se $k = 3$, então a quantidade de funções boas é um cubo perfeito para todo n inteiro positivo.

PROBLEMA 4

Encontre todos os valores reais que a pode assumir de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y^3 + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z^3 = a \end{cases}$$

possua solução com x, y, z reais distintos dois a dois.

PROBLEMA 5

Sejam Θ_1 e Θ_2 circunferências com centros O_1 e O_2, respectivamente, tangentes exteriormente. Sejam A e B pontos sobre Θ_1 e Θ_2, respectivamente, tais que a reta AB é tangente comum externa a Θ_1 e Θ_2. Sejam C e D pontos no semiplano determinado por AB que não contém O_1 e O_2 tais que $ABCD$ é um quadrado. Se O é o centro deste quadrado, determine os possíveis valores do ângulo $\angle O_1OO_2$.

PROBLEMA 6

Dois quadrados perfeitos são ditos amigáveis se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo, $1225 = 35^2$ e $225 = 15^2$ são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.

PROBLEMA 1
Seja $ABCD$ um retângulo com lados $AB = 6$ e $BC = 8$. Por um ponto X do lado AB com $AX < XB$, traça-se uma reta paralela a BC. Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do retângulo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a medida do segmento AX.

PROBLEMA 2
Luiza quer pintar os vértices de um prisma triangular com 5 cores, de modo que se dois vértices estão ligados por uma aresta, então eles têm cores diferentes. De quantas maneiras Luiza pode pintar esse prisma?

PROBLEMA 3
Encontre todos os reais a para os quais o sistema de equações

$$x^2 - yz = ax^2$$
$$y^2 - xz = ax^2$$
$$z^2 - xy = ax^2$$

possui pelo menos uma solução real (x, y, z) com $x \neq 0$.

PROBLEMA 4
Sejam Γ uma circunferência de centro O e ℓ uma reta tangente a Γ em A. Tome B um ponto em Γ (diferente do ponto diametralmente oposto a A em Γ) e seja B' o simétrico de B em relação a ℓ. Sejam E, distinto de A, o ponto de interseção de Γ com a reta $B'A$ e D, distinto de E, a interseção das circunferências circunscritas aos triângulos $BB'E$ e AOE

(a) Calcule a medida do ângulo $\angle B'BE$.

(b) Prove que B, O e D são colineares.

PROBLEMA 5
Seja N um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos, cuja representação decimal é $(a_{2k}a_{2k-1} \ldots a_4a_3a_2a_1)_{10}$. Definimos o *alternado* de N como sendo o número $M = (a_{2k-1}a_{2k} \ldots a_3a_4a_1a_2)_{10}$. Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos N tais que $M = 2N - 1$, onde M é o alternado de N.

PROBLEMA 6
Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

PROBLEMA 1
Seja $ABCD$ um paralelogramo. Por um ponto X do lado AB, com $AX < XB$, traça-se uma reta paralela a BC. Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do paralelogramo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a razão $\frac{AX}{AB}$.

PROBLEMA 2
Encontre todos os números reais x que satisfaçam

$$x = \frac{1}{2}\lfloor x \rfloor^2 + 3\lfloor x \rfloor + 2.$$

PROBLEMA 3
Pedro quer pintar os vértices de um tabuleiro $2 \times n$ de modo que cada quadradinho deste tabuleiro possua exatamente um vértice pintado.

(a) Determine o número máximo de vértices que Pedro pode pintar.

(b) Determine o número mínimo de vértices que Pedro pode pintar.

PROBLEMA 4
Seja N um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos, cuja representação decimal é $(a_{2k}a_{2k-1}\ldots a_4a_3a_2a_1)_{10}$. Definimos o *alternado* de N como sendo o número $M = (a_{2k-1}a_{2k}\ldots a_3a_4a_1a_2)_{10}$. Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos N tais que $M = 2N - 1$, onde M é o alternado de N.

PROBLEMA 5
Seja ABC um triângulo acutângulo e seja AD, com D em BC, a altura relativa ao vértice A. Sejam Γ_1 e Γ_2 as circunferências circunscritas aos triângulos ABD e ACD, respectivamente. A circunferência Γ_1 intersecta o lado AC nos pontos A e P, enquanto Γ_2 intersecta o lado AB nos pontos B e Q. Seja X o ponto de interseção da reta BP com Γ_2 de modo que P está entre B e X. Da mesma forma, seja Y o ponto de interseção da reta CQ com Γ_1 de modo que Q está entre C e Y. Sabendo que A, X e Y são colineares, calcule o menor valor possível para o ângulo $\angle BAC$.

PROBLEMA 6
Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

PROBLEMA 1
A professora de Joãozinho escreveu no quadro um sistema de equações. Joãozinho, quando copiou do quadro o sistema, escreveu errado um, e somente um, coeficiente do sistema. Esse foi o sistema que Joãozinho escreveu em seu caderno:

$$x + y + 2z = 6$$

$$3x + 2y + z = 7$$

$$4x + 2y + 3z = 12$$

Sabendo que o sistema original tem todos os coeficientes inteiros e sua solução é $\left(\frac{5}{11}, \frac{21}{11}, \frac{20}{11}\right)$, encontre o sistema original.

PROBLEMA 2
Seja $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de x, isto é, o maior inteiro menor ou igual a x. Seja $\{x\}$ a parte fracionária de x, definida como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Um número real é dito replicante se $x = \{10x\}$. Encontre a soma de todos os números replicantes.

PROBLEMA 3
Encontre o número de sequências $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ satisfazendo $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$ e $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots a_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots, 9$.

PROBLEMA 4
Sejam x, y e z reais satisfazendo $x, y, z \geq -1$ e $x + y \geq 2$, $x + z \geq 2$, $y + z \geq 2$. Prove que $xy + yz + zy \geq 3$.

PROBLEMA 5
Seja Γ uma circunferência de centro O e seja P um ponto no interior de Γ. Seja O' o ponto tal que P é ponto médio de OO'. Suponha que a circunferência Γ' de centro O' que passa por P é secante a Γ e seja A um ponto na interseção de Γ com Γ'. Se B é o outro ponto de interseção da reta AP com Γ, calcule $\frac{PB}{PA}$.

PROBLEMA 6
Seja p ¿ 3 um número primo. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ números inteiros tais que a_1 não é múltiplo de p e $a_1^k + a_2^k + \cdots + a_{p-1}^k$ é múltiplo de p para todo $k = 1, \ldots, p-2$. Prove que a_i não é múltiplo de p para todo $i = 1, 2, \ldots, p-1$, e que $a_i - a_j$ não é múltiplo de p para todos $i, j = 1, 2, \ldots, p-1$ com $i \neq j$.

PROBLEMA 1
Escrevendo-se a representação decimal de 40! da esquerda para direita, qual o último digito não nulo que foi escrito? (Por exemplo 11! = 39916800, logo o último dígito não nulo de 11! é 8.)

PROBLEMA 2
Encontre o número de sequências $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ satisfazendo que $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todo $n = 1, 2, \dots, 10$ e que $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ para todo $n = 1, 2, \dots, 9$.

PROBLEMA 3
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \{10x\}$. Um número é dito tri-replicante se ele satisfaz

$$f(f(f(x))) = x.$$

Encontre a soma de todos os números tri-replicantes.
Observação: $\{x\}$ é a parte fracionária de x, isto é, $\{x\} = x = \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é o menor inteiro maior ou igual a x.

PROBLEMA 4
Seja Γ uma circunferência de centro O e seja P um ponto no interior de Γ. Seja O' o ponto tal que P é ponto médio de OO'. Suponha que a circunferência Γ' de centro O' que passa por P é secante a Γ e seja A um ponto na interseção de Γ com Γ'. Se B é o outro ponto de interseção da reta AP com Γ, calcule $\frac{PB}{PA}$.

PROBLEMA 5
Encontre todos os polinômios P com coeficientes reais tais que

$$xP(x) + yP(y) \geq 2P(xy)$$

para quaisquer x e y reais.

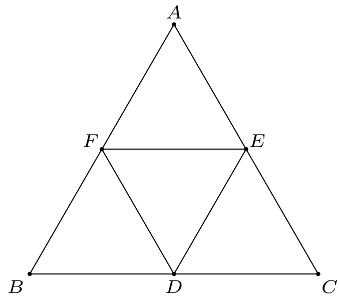
PROBLEMA 6
Sejam ABC um triângulo acutângulo e Γ sua circunferência circunscrita. Sejam D, E e F os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados BC, AC e AB, respectivamente. Sejam A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 os pontos de interseção de Γ com as retas DE, DF e EF de modo que A_1 e A_2 se encontram no arco menor BC, B_1 e B_2 se encontram no arco menor AC, e C_1 e C_2 se encontram no arco menor AB. Se $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$, prove que o triângulo ABC é equilátero.

PROBLEMA 1

O ano 1978 foi *peculiar*, pois a soma dos números formados pelos seus dois primeiros dígitos e pelos seus dois últimos dígitos é igual ao número formado pelos dois dígitos do meio, ou seja, $19 + 78 = 97$. Quando será o próximo ano peculiar?

PROBLEMA 2

Deseja-se colocar os números de 1 a 6 nos pontos A, B, C, D, E, F, dispostos como na figura abaixo. Defina S_{XYZ} como a soma dos números escritos nos vértices do triângulo XYZ.



(a) Determine o valor máximo de $S_{ABC} + S_{BDF} + S_{CDE} + S_{DEF}$.

(b) De quantas maneiras podemos colocar os números de forma a obter o valor máximo do item anterior?

PROBLEMA 3

De quantas maneiras é possível pintar as casas de um tabuleiro 3×3 com 5 cores de modo que cada linha, coluna e diagonal possua 3 cores distintas?

PROBLEMA 4

Encontre todas as soluções reais da equação

$$\sqrt{4 - x\sqrt{4 - (x-2)\sqrt{1 + (x-5)(x-7)}}} = \frac{5x - 6 - x^2}{2}.$$

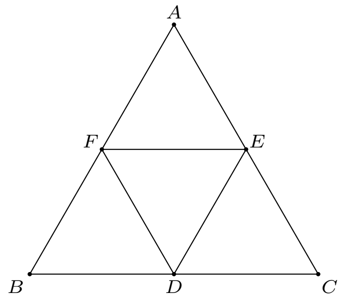
PROBLEMA 5

Sejam $ABCD$ um paralelogramo e P um ponto no lado CD. Sejam Q a interseção da reta AP com a reta BC e F a interseção da reta QD com a reta AB. Prove que $PQ = AB$ se, e somente se, PF é bissetriz do ângulo $\angle DPA$.

PROBLEMA 6

Seja $S = \{1, 2, \ldots, 300\}$ o conjunto dos 300 primeiros números naturais. Escolhendo ao acaso dois números, não necessariamente distintos, em S (cada número tem a mesma probabilidade de ser escolhido), determine a probabilidade do produto destes dois números ser múltiplo de 300.

PROBLEMA 1
Deseja-se colocar os números de 1 a 6 nos pontos A, B, C, D, E, F, dispostos como na figura abaixo. Defina S_{XYZ} como a soma dos números escritos nos vértices do triângulo XYZ.



(a) Determine o valor máximo de $S_{ABC} + S_{BDF} + S_{CDE} + S_{DEF}$.

(b) De quantas maneiras podemos colocar os números de forma a obter o valor máximo do item anterior?

PROBLEMA 2
Seja $ABCD$ um quadrado. CDE e BFG são triângulos equiláteros tais que B é ponto médio de AF, CDE é exterior ao quadrado e G e E estão no mesmo semiplano determinado pela reta AB.

(a) Prove que $DBGE$ é um paralelogramo.

(b) Calcule os ângulos do triângulo ECG.

PROBLEMA 3
De quantas maneiras é possível pintar as casas de um tabuleiro 3×3 com 5 cores de modo que cada linha, coluna e diagonal possua 3 cores distintas?

PROBLEMA 4
Um número é dito *especial* se ele tem dois ou mais algarismos e é múltiplo da soma dos seus algarismos. Por exemplo, 12 é especial pois ele é múltiplo de $1 + 2 = 3$.

(a) Encontre três números especiais consecutivos.

(b) Encontre quatro números especiais consecutivos.

PROBLEMA 5
Sejam a, b e c reais tais que $a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2 = 6$ e $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 7$. Prove que se a é inteiro, então b e c também são inteiros.

PROBLEMA 6
Seja ABC um triângulo tal que $\angle BAC = 60°$. Suponha que o circuncentro O pertence à circunferência inscrita ao triângulo ABC e $AC > AB$. Prove que $\angle ABC < 84°$.

PROBLEMA 1
Seis pessoas tentam advinhar o número de pedras em uma caixa. Arnaldo diz 57 pedras, Bernaldo diz 64, Cernaldo diz 67, Dernaldo diz 70, Ernaldo 54 e Fernaldo 47. Todos erraram, alguns para mais e outros para menos. Eles erraram por 1, 4, 6, 9, 11 e 12, em alguma ordem, mas não se sabe quem cometeu cada erro. Quantas pedras havia na caixa?

PROBLEMA 2
Sabendo que cada uma das letras A, B, C, D, E, F, G e H representa um algarismo diferente entre 0 e 9 e que os números $ABACDE$, $CAFDG$, $CHHBAED$ são lados de um triângulo, descubra qual algarismo cada letra representa.

PROBLEMA 3
Um número n de 3 algarismos é dito *eficiente* se os últimos 3 algarismos de n^2 são os mesmos algarismos de n e na mesma ordem. Encontre todos os números eficientes.

PROBLEMA 4
Seja Γ uma circunferência, ℓ uma reta secante a Γ em B e C e r a reta tangente a Γ por B. Tome A um ponto em ℓ distinto de C com $AB = BC$. Se s é uma reta por A tangente a Γ e P é o ponto de interseção de r e s, prove que o ângulo $\angle APB$ não é obtuso.

PROBLEMA 5
Para cada n inteiro não negativo, calcule a quantidade de triplas (a, b, c) de inteiros não negativos que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$\begin{cases} a+b & \leq & 2n \\ a+c & \leq & 2n \\ b+c & \leq & 2n \end{cases}$$

PROBLEMA 6
Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB \neq AC$. Um ponto P interior ao triângulo é dito B-*bom* se $\angle PBC = \angle PCA$, e é dito C-*bom* se $\angle PCB = \angle PBA$. Sejam D o ponto B-bom mais próximo de A e E o ponto C-bom mais próximo de A. Defina F o ponto de interseção entre as retas BD e CE, e G o ponto de interseção, distinto de F, entre os circuncírculos de BEF e CDF.

(a) Prove que a reta DE é perpendicular a reta BC.

(b) Prove que A, E, D e G são concíclicos.

PROBLEMA 1
Encontre dois números a e b tais que os algarismos de b são os mesmos algarismos de a em outra ordem e o número $a - b$ possui todos os algarismos iguais a 1.

PROBLEMA 2
Um número n de 3 algarismos é dito *eficiente* se os últimos 3 algarismos de n^2 são os mesmos algarismos de n e na mesma ordem. Encontre todos os números eficientes.

PROBLEMA 3
Seja Γ uma circunferência, ℓ uma reta secante a Γ em B e C e r a reta tangente a Γ por B. Tome A um ponto em ℓ distinto de C com $AB = BC$. Se s é uma reta por A tangente a Γ e P é o ponto de interseção de r e s, prove que o ângulo $\angle APB$ não é obtuso.

PROBLEMA 4
Para cada n inteiro não negativo, calcule a quantidade de triplas (a, b, c) de inteiros não negativos que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$\begin{cases} a + b & \leq & 2n \\ a + c & \leq & 2n \\ b + c & \leq & 2n \end{cases}$$

PROBLEMA 5
Seja $A_0 = (0, 0)$, $A_1 = (3, 0)$ e $A_2 = (0, 2)$ pontos no plano cartesiano. Definimos recursivamente o ponto A_{n+3} como o baricentro do triângulo $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ para $n \geq 0$. Encontre um ponto que está no interior de todos os triângulos $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ para todo $n \geq 0$.

PROBLEMA 6
Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB \neq AC$. Um ponto P interior ao triângulo é dito B-*bom* se $\angle PBC = \angle PCA$, e é dito C-*bom* se $\angle PCB = \angle PBA$. Sejam D o ponto B-bom mais próximo de A e E o ponto C-bom mais próximo de A. Defina F o ponto de interseção entre as retas BD e CE, e G o ponto de interseção, distinto de F, entre os circuncírculos de BEF e CDF.

(a) Prove que a reta DE é perpendicular a reta BC.

(b) Prove que A, E, D e G são concíclicos.

PROBLEMA 1
Encontre três números primos distintos dois a dois tais que sua soma e a soma dos seus quadrados são números primos também.

PROBLEMA 2
No castelo da bruxa Elvira Hyvolta existem 2 tipos de poções, as de gigantismo e as de nanicolina. Tomando as de gigantismo, os seres deste reino encantado aumentam em 700% de tamanho, e com as de nanicolina, eles diminuem em 75% seu tamanho. Cada ser toma exatamente uma poção por dia. Desse modo, é possível que um sapo que acabou de chegar, após tomar uma certa combinação das poções de Elvira, retorne a seu tamanho original?

PROBLEMA 3
Sejam A, B e C pontos numa reta com B entre A e C, de modo que $BC < AB$. Constrói-se os quadrados $ABDE$ e $BCFG$ do mesmo lado da reta.

(a) Calcule a razão EF/AG.

(b) Calcule a soma de ângulos $\angle BAG + \angle GFE$.

(c) Prove que as retas AG, EF e DC concorrem em um único ponto.

PROBLEMA 4
Seja a_n o número de maneiras de preencher um tabuleiro $n \times n$ com zeros e uns de modo de que a soma em cada linha e em cada coluna seja a mesma. Calcule a_2, a_3, a_4 e a_5.

PROBLEMA 5
Luca tem uma calculadora com um único botão. Se um número x está na tela da calculadora e apertarmos seu único botão, o número x é substituído pelo número $\frac{2x}{x^2+1}$. Dado que, inicialmente, o número 2 está na tela da calculadora, qual número aparecerá após apertarmos 2013 vezes seu botão?

PROBLEMA 6
Dois números a e b são ditos parceiros se a e b possuem os mesmo fatores primos. Por exemplo, 15 e 375 são parceiros, mas 35 e 70 não são. Prove que existem infinitos pares de inteiros positivos distintos m e n tais que as duas condições a seguir são satisfeitas:

(i) m e n são parceiros;

(ii) $m + 1$ e $n + 1$ são parceiros.

PROBLEMA 1
Dado um número n natural, fazemos uma diamante com os números $1, 2, \ldots, 2n-1$ do seguinte modo, na primeira linha aparece um número 1, na segunda aparecem dois números 2, e assim por diante até que na n-ésima linha aparecem n números n, já na $(n+1)$-ésima linha aparecem $n-1$ números $n+1$, até que na $(2n-1)$-ésima linha aparece um número $2n-1$. Abaixo temos exemplos de diamantes para $n = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{array}{|c|}1\end{array}\quad\begin{array}{|ccc|}&1&\\2&&2\\&3&\end{array}\quad\begin{array}{|ccccc|}&&1&&\\&2&&2&\\3&&3&&3\\&4&&4&\\&&5&&\end{array}\quad\begin{array}{|ccccccc|}&&&1&&&\\&&2&&2&&\\&3&&3&&3&\\4&&4&&4&&4\\&5&&5&&5&\\&&6&&6&&\\&&&7&&&\end{array}$$

Qual a soma de todos os elementos no n-ésimo diamante?

PROBLEMA 2
Sejam A, B e C pontos numa reta com B entre A e C, de modo que $BC < AB$. Constrói-se os quadrados $ABDE$ e $BCFG$ do mesmo lado da reta.

(a) Calcule a razão EF/AG.

(b) Calcule a soma de ângulos $\angle BAG + \angle GFE$.

(c) Prove que as retas AG, EF e DC concorrem em um único ponto.

PROBLEMA 3
Seja a_n o número de maneiras de preencher um tabuleiro $n \times n$ com zeros e uns de modo de que a soma em cada linha e em cada coluna seja a mesma. Calcule a_2, a_3, a_4 e a_5.

PROBLEMA 4
Luca tem uma calculadora com um único botão. Se um número x está na tela da calculadora e apertarmos seu único botão, o número x é substituído pelo número $\frac{2x}{x^2+1}$. Dado que, inicialmente, o número 2 está na tela da calculadora, qual número aparecerá após apertarmos 2013 vezes seu botão?

PROBLEMA 5
Um inteiro é dito *sinistro*se pode ser escrito na forma $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, com x, y, z inteiros. Determine a quantidade de números sinistro existentes de 1 a 2013.

PROBLEMA 6
Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(x) - f(y)$$

para todos x e y inteiros.

PROBLEMA 1
Ao efetuarmos a divisão do número 10^{100} por 7, encontramos quociente q e resto r. Determine a soma dos algarismos de q.

PROBLEMA 2
Ache todos os números de dois dígitos (ab) tais que (ab) divide $(a0b)$.

Observação. (ab) é a representação decimal, a é o dígito das dezenas e b é o dígito das unidades.

PROBLEMA 3
Seja $ABCDEF$ um hexágono regular. De quantas maneiras podemos colocar os números de 1 a 6 nos vértices do hexágono de modo que cada número apareça exatamente uma vez e a soma dos números em quaisquer dois vértices opostos não seja múltipla de 3.

PROBLEMA 4
Seja ABC um triângulo. Sejam D e E pontos no lado BC tal que $2BD = 2DE = EC$. Sabendo que os círculos inscritos nos triângulos ABD, ADE e AEC tem o mesmo raio, calcule o seno do ângulo $\angle ACB$.

PROBLEMA 5
Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos x e y reais.

PROBLEMA 6
Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo matemático. Numa primeira etapa, Arnaldo começa escolhendo um número inteiro não negativo e, em seguida, após ver o número que Arnaldo escolheu, Bernaldo escolhe outro número inteiro não negativo. O processo se repete uma vez, com Arnaldo escolhendo um novo número não negativo e, em seguida, Bernaldo escolhendo um último número não negativo.

Após esse processo, Arnaldo escolhe um subconjunto de 3 números a, b e c dentre os 4 números originais e monta a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Seja d o número não escolhido por Arnaldo. Bernaldo ganha caso consiga encontrar d números inteiros (possivelmente negativos) distintos t_i $(i = 1, 2, ..., d)$ tais que a equação $(a + t_i)x^2 + (b + t_i)x + (c + t_i) = 0$ tenha raiz real. Caso contrário, Arnaldo ganha. Qual jogador possui estratégia vencedora?

Observação. Se $d = 0$ Bernaldo ganha. E uma equação da forma $0x^2 + 0x + 0 = 0$ tem raiz real.
Exemplo. Arnaldo começa escolhendo o número 1, então Bernaldo escolhe 4, depois Arnaldo escolhe 4 e, por fim, Bernaldo escolhe 2. Então, Arnaldo monta a equação $4x^2 + x + 4 = 0$. E Bernaldo ganha porque consegue 2 (o número que sobrou) inteiros, -3 e -4, tais que as equações $(4-3)x^2 + (1-3)x + (4-3) = 0$ e $(4-4)x^2 + (1-4)x + (4-4) = 0$ têm raiz real.

PROBLEMA 1
Considere os polinômios:

$$\binom{x}{0} = 1,\ \binom{x}{1} = x,\ \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2!},\ \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$

Em geral,

$$\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-j+1)}{j!}, \text{ para } j = 1, 2, 3, \ldots.$$

É sabido que para qualquer natural n, existem $a_0, a_1, \ldots, a_n$ satisfazendo

$$x^n = a_0\binom{x}{0} + a_1\binom{x}{1} + \cdots + a_n\binom{x}{n}.$$

Além disso, esses $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dependem apenas de n (não dependem de x) e são únicos para cada n. Por exemplo:

$$x^2 = \binom{x}{1} + 2\binom{x}{2}$$
$$x^3 = \binom{x}{1} + 6\binom{x}{2} + 6\binom{x}{3}$$

Para $n = 2012$, determine os valores de a_0, a_1, a_2, a_3 e a_{2012}.

PROBLEMA 2
Uma permutação $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $(1, 2, \ldots, n)$ é dita *boa* se não existem inteiros $1 \le i < j < k \le n$ tal que x_i, x_j, x_k formam uma sequencia crescente ou decrescente. Por exemplo, a permutação $(4, 1, 5, 2, 3)$ não é boa pois $x_2 = 1, x_4 = 2, x_5 = 3$ estão em ordem crescente. Para cada n, quantas permutações boas existem?

PROBLEMA 3
Seja ABC um triângulo. Sejam D e E pontos no lado BC tal que $2BD = 2DE = EC$. Sabendo que os círculos inscritos nos triângulos ABD, ADE e AEC tem o mesmo raio, calcule o seno do ângulo $\angle ACB$.

PROBLEMA 4
Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos x e y reais.

PROBLEMA 5
Dado um número natural n seja $P(n)$ o produto de seus dígitos. Determine a menor razão $n/P(n)$ inteira de onde n percorre todos os números naturais de 3 dígitos.

PROBLEMA 6
Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo matemático. Numa primeira etapa, Arnaldo começa escolhendo um número inteiro não negativo e, em seguida, após ver o número que Arnaldo escolheu, Bernaldo escolhe outro número inteiro não negativo. O processo se repete uma vez, com Arnaldo escolhendo um novo número não negativo e, em seguida, Bernaldo escolhendo um último número não negativo.

Após esse processo, Arnaldo escolhe um subconjunto de 3 números a, b e c dentre os 4 números originais e monta a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Seja d o número não escolhido por Arnaldo. Bernaldo ganha caso consiga encontrar d números inteiros (possivelmente negativos) distintos t_i $(i = 1, 2, ..., d)$ tais que a equação $(a + t_i)x^2 + (b + t_i)x + (c + t_i) = 0$ tenha raiz real. Caso contrário, Arnaldo ganha. Qual jogador possui estratégia vencedora?

Observação. Se $d = 0$ Bernaldo ganha. E uma equação da forma $0x^2 + 0x + 0 = 0$ tem raiz real.
Exemplo. Arnaldo começa escolhendo o número 1, então Bernaldo escolhe 4, depois Arnaldo escolhe 4 e, por fim, Bernaldo escolhe 2. Então, Arnaldo monta a equação $4x^2 + x + 4 = 0$. E Bernaldo ganha porque consegue 2 (o número que sobrou) inteiros, -3 e -4, tais que as equações $(4-3)x^2 + (1-3)x + (4-3) = 0$ e $(4-4)x^2 + (1-4)x + (4-4) = 0$ têm raiz real.