



Treinamento de Velocidade

Guilherme Zeus Dantas e Moura

guilhermezeus.com

Siga as instruções a seguir:

- Você tem 1 hora e 30 minutos para pensar nos problemas a seguir.
 - O seu objetivo é que, no fim do horário, para cada um dos quatro problemas:
 - você tenha escrito uma solução completa; ou
 - você tenha preenchido três folhas de rascunho.
-

1. Seja (a_n) uma sequência de inteiros satisfazendo as seguintes condições:

- $a_1 = 2021^{2021}$;
- $0 \leq a_k < k$ para todo inteiro $k \geq 2$; e
- $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{k+1} a_k$ é múltiplo de k para todo inteiro positivo k .

Determine o 2021^{2022} -ésimo termo da sequência (a_n) .

2. Em um triângulo acutângulo ABC com $AB < AC$, a bissetriz do ângulo $\angle A$ e a mediatriz do segmento BC se intersectam em D . Seja P um ponto no interior do triângulo ABC . A reta CP encontra o circuncírculo do triângulo ABP nos pontos P e K . Prove que B, D, K são colineares se, e somente se, AD e BC se encontram no circuncírculo do triângulo APC .

3. Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(f(x+y) - f(x-y)) = y^2 f(x)$$

para todos reais x e y .

4. 2021 pessoas estão sentadas numa mesa circular. Em um movimento, você pode trocar de lugar duas pessoas adjacentes. Determine o número mínimo de movimentos necessários para fazer cada pessoa terminar 1000 posições para a esquerda de sua posição inicial.