

Problema 1. Um número natural é chamado de *factorion* se ele é igual a soma dos fatoriais dos seu dígitos decimais. Encontre todos os números de 3 dígitos que são factorions.

Observação: O fatorial de um número inteiro não negativo é definido da seguinte forma: $0! = 1$ e para n inteiro positivo, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Por exemplo, $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.

Solução. Seja n um número cuja representação na base decimal é abc . Vamos definir $f(n) = a! + b! + c!$. Para $f(n) = n$:

- 7, 8 e 9 não podem ser dígitos de n , pois, caso contrário, temos $n = f(n) \geq 7! \geq 1000$, que é um absurdo.
- 6 não pode ser dígito de n , pois, caso contrário, temos $n = f(n) \geq 6! = 720$, que implica que o dígito das centenas é 7, 8 ou 9, um absurdo.
- n é, no máximo, 355, pois $n = f(n) \leq 5! + 5! + 5! = 360$. Como os dígitos só podem ser 0, 1, 2, 3, 4 e 5, o resultado é verdade.
- n é, no máximo, 245, pois $n = f(n) \leq 3! + 5! + 5! = 246$. Note que 355 é o valor que maximiza $f(n)$ com a restrição $n \leq 355$.
- 5 deve ser um dígito de n , pois, caso contrário, temos $n = f(n) \leq 4! + 4! + 4! = 72$, que é um absurdo.

Vamos dividir em casos:

– Se $n = 2bc$:

Sabemos que $n = f(n) \leq 2! + 4! + 5! = 146$. Absurdo.

– Se $n = 15c$:

Sabemos que $150 + c = n = f(n) = 1! + 5! + c! = 121 + c!$. Logo, $29 + c = c!$, que não possui solução.

– Se $n = 1b5$:

Sabemos que $105 + 10b = n = f(n) = 1! + b! + 5! = 121 + b!$. Logo, $10b = 16 + b!$, que possui solução $b = 4$.

Logo, 145 é o único factorion.

Problema 2. Considere um triângulo equilátero ABC de lado 1. Um círculo C_1 é construído tangenciando os lados AB e AC . Um círculo C_2 , de raio maior que o raio de C_1 , é construído tangenciando os lados AB e AC e tangenciando externamente o círculo C_1 . Sucessivamente, para n inteiro positivo, o círculo C_{n+1} , de raio maior que o raio de C_n , tangencia os lados AB e AC e tangencia externamente o círculo C_n . Determine os possíveis valores para o raio de C_1 de forma que caibam 4, mas não 5 círculos dessa sequência, inteiramente contidos no interior do triângulo ABC .

Solução. Solução [math/brazil/rio/2018/N3/2](#) não encontrada!

Problema 3. Seja n um inteiro positivo. Uma função $f : \{1, 2, \dots, 2n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é dita *boa* se $f(j+2)$ e $f(j)$ têm a mesma paridade para todo $j = 1, 2, \dots, 2n-2$. Prove que a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito.

Solução. Sabemos que $f(1), f(3), f(5), \dots, f(2n-1)$ tem a mesma paridade e $f(2), f(4), f(6), \dots, f(2n)$ tem a mesma paridade. Vamos dividir em 4 casos:

- $f(\text{ímpar}) = \text{ímpar}$ e $f(\text{par}) = \text{ímpar}$:

Para cada um os n ímpares, podemos escolher entre 1, 3 e 5 para ser o seu respectivo valor de f . Para cada ímpar, há 3 maneiras de escolher, portanto, para todos os ímpares, há 3^n maneiras de escolher.

Da mesma maneira, há 3^n maneiras de escolher o f dos pares.

Logo, a quantidade é $3^n \cdot 3^n$.

- $f(\text{ímpar}) = \text{ímpar}$ e $f(\text{par}) = \text{par}$:

Podemos escolher o f dos ímpares entre 1, 3 e 5 e o f dos pares entre 2 e 4.

Analogamente, a quantidade é $3^n \cdot 2^n$.

- $f(\text{ímpar}) = \text{par}$ e $f(\text{par}) = \text{ímpar}$:

Analogamente, a quantidade é $2^n \cdot 3^n$.

- $f(\text{ímpar}) = \text{par}$ e $f(\text{par}) = \text{par}$:

Analogamente, a quantidade é $2^n \cdot 2^n$.

Portanto, a quantidade total é $3^n \cdot 3^n + 3^n \cdot 2^n + 2^n \cdot 3^n + 2^n \cdot 2^n = (3^n + 2^n)^2$, que é um quadrado perfeito, como queríamos demonstrar.

Problema 4. Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito na circunferência Γ . Sejam D e E pontos em Γ tais que AD é perpendicular a BC e AE é diâmetro. Seja F o ponto de interseção de AE com BC . Prove que se $\angle DAC = 2\angle DAB$, então $DE = CF$.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2018/N3/4](#) não encontrada!

Problema 5. Sejam n um inteiro positivo e $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$ uma permutação de $\{1, \dots, n\}$. O *número de cadência* de σ é o número de blocos decrescentes maximais. Por exemplo, se $n = 6$ e $\sigma = (4, 2, 1, 5, 6, 3)$, então o número de cadência de σ é 3, pois σ possui 3 blocos $(4, 2, 1)$, (5) , $(6, 3)$ decrescentes e maximais. Note que os blocos $(4, 2)$ e $(2, 1)$ são decrescentes, mas não são maximais, já que estão contidos no bloco $(4, 2, 1)$.

Calcule a soma das cadências de todas as permutações de $\{1, \dots, n\}$.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2018/N3/5](#) não encontrada!

Problema 6. Dois quadrados perfeitos são ditos amigáveis se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo, $1225 = 35^2$ e $225 = 15^2$ são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2018/N3/6](#) não encontrada!

Problema 1. Sejam ABC um triângulo e k um número real positivo menor do que 1. Tome A_1 , B_1 e C_1 pontos nos lados BC , AC e AB de modo que

$$\frac{A_1B}{BC} = \frac{B_1C}{AC} = \frac{C_1A}{AB} = k.$$

- (a) Calcule em função de k a razão entre as áreas dos triângulos $A_1B_1C_1$ e ABC .
- (b) Mais geralmente, para todo $n \geq 1$, constrói-se o triângulo $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, de modo que A_{n+1} , B_{n+1} e C_{n+1} sejam pontos nos lados B_nC_n , A_nC_n e A_nB_n satisfazendo

$$\frac{A_{n+1}B_n}{B_nC_n} = \frac{B_{n+1}C_n}{A_nC_n} = \frac{C_{n+1}A_n}{A_nB_n} = k.$$

Determine os valores de k de modo que a soma das áreas de todos os triângulos $A_nB_nC_n$, para $n = 1, 2, 3, \dots$ seja igual a $\frac{1}{3}$ da área do triângulo ABC .

Solução. Solução [math/brazil/rio/2018/N4/1](#) não encontrada!

Problema 2. Seja (a_n) uma sequência de números inteiros tal que $a_1 = 1$ e para $n \geq 1$ inteiro positivo, $a_{2n} = a_n + 1$ e $a_{2n+1} = 10a_n$. Quantas vezes o número 111 aparece nessa sequência?

Solução. Solução [math/brazil/rio/2018/N4/2](#) não encontrada!

Problema 3. Sejam n e k inteiros positivos. Uma função $f : \{1, 2, 3, 4, \dots, kn - 1, kn\} \rightarrow \{1, \dots, 5\}$ é dita *boa* se $f(j + k) - f(j)$ é múltiplo de k para todo $j = 1, 2, \dots, kn - k$.

- (a) Prove que se $k = 2$, então a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito para todo n inteiro positivo.
- (b) Prove que se $k = 3$, então a quantidade de funções boas é um cubo perfeito para todo n inteiro positivo.

Solução. **Solução [math/brazil/rio/2018/N4/3](#) não encontrada!**

Problema 4. Encontre todos os valores reais que a pode assumir de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y^3 + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z^3 = a \end{cases}$$

possua solução com x, y, z reais distintos dois a dois.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2018/N4/4 não encontrada!](#)

Problema 5. Sejam Θ_1 e Θ_2 circunferências com centros O_1 e O_2 , respectivamente, tangentes exteriormente. Sejam A e B pontos sobre Θ_1 e Θ_2 , respectivamente, tais que a reta AB é tangente comum externa a Θ_1 e Θ_2 . Sejam C e D pontos no semiplano determinado por AB que não contém O_1 e O_2 tais que $ABCD$ é um quadrado. Se O é o centro deste quadrado, determine os possíveis valores do ângulo $\angle O_1 O O_2$.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2018/N4/5](#) não encontrada!

Problema 6. Dois quadrados perfeitos são ditos amigáveis se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo, $1225 = 35^2$ e $225 = 15^2$ são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2018/N4/6](#) não encontrada!

Problema 1. Seja $ABCD$ um retângulo com lados $AB = 6$ e $BC = 8$. Por um ponto X do lado AB com $AX < XB$, traça-se uma reta paralela a BC . Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do retângulo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a medida do segmento AX .

Solução. Solução [math/brazil/rio/2017/N3/1](#) não encontrada!

Problema 2. Luiza quer pintar os vértices de um prisma triangular com 5 cores, de modo que se dois vértices estão ligados por uma aresta, então eles têm cores diferentes. De quantas maneiras Luiza pode pintar esse prisma?

Solução. Solução [math/brazil/rio/2017/N3/2](#) não encontrada!

Problema 3. Encontre todos os reais a para os quais o sistema de equações

$$x^2 - yz = ax^2$$

$$y^2 - xz = ax^2$$

$$z^2 - xy = ax^2$$

possui pelo menos uma solução real (x, y, z) com $x \neq 0$.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2017/N3/3](#) não encontrada!

Problema 4. Sejam Γ uma circunferência de centro O e ℓ uma reta tangente a Γ em A . Tome B um ponto em Γ (diferente do ponto diametralmente oposto a A em Γ) e seja B' o simétrico de B em relação a ℓ . Sejam E , distinto de A , o ponto de interseção de Γ com a reta $B'A$ e D , distinto de E , a interseção das circunferências circunscritas aos triângulos $BB'E$ e AOE

- (a) Calcule a medida do ângulo $\angle B'BE$.
- (b) Prove que B , O e D são colineares.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2017/N3/4](#) não encontrada!

Problema 5. Seja N um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos, cuja representação decimal é $(a_{2k}a_{2k-1} \dots a_4a_3a_2a_1)_{10}$. Definimos o *alternado* de N como sendo o número $M = (a_{2k-1}a_{2k} \dots a_3a_4a_1a_2)_{10}$. Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos N tais que $M = 2N - 1$, onde M é o alternado de N .

Solução. Solução [math/brazil/rio/2017/N3/5](#) não encontrada!

Problema 6. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2017/N3/6](#) não encontrada!

Problema 1. Seja $ABCD$ um paralelogramo. Por um ponto X do lado AB , com $AX < XB$, traça-se uma reta paralela a BC . Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do paralelogramo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a razão $\frac{AX}{AB}$.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2017/N4/1](#) não encontrada!

Problema 2. Encontre todos os números reais x que satisfaçam

$$x = \frac{1}{2} [x]^2 + 3 [x] + 2.$$

Solução. Solução [math/brazil/rio/2017/N4/2](#) não encontrada!

Problema 3. Pedro quer pintar os vértices de um tabuleiro $2 \times n$ de modo que cada quadradinho deste tabuleiro possua exatamente um vértice pintado.

- (a) Determine o número máximo de vértices que Pedro pode pintar.
- (b) Determine o número mínimo de vértices que Pedro pode pintar.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2017/N4/3](#) não encontrada!

Problema 4. Seja N um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos, cuja representação decimal é $(a_{2k}a_{2k-1} \dots a_4a_3a_2a_1)_{10}$. Definimos o *alternado* de N como sendo o número $M = (a_{2k-1}a_{2k} \dots a_3a_4a_1a_2)_{10}$. Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos N tais que $M = 2N - 1$, onde M é o alternado de N .

Solução. Solução [math/brazil/rio/2017/N4/4](#) não encontrada!

Problema 5. Seja ABC um triângulo acutângulo e seja AD , com D em BC , a altura relativa ao vértice A . Sejam Γ_1 e Γ_2 as circunferências circunscritas aos triângulos ABD e ACD , respectivamente. A circunferência Γ_1 intersecta o lado AC nos pontos A e P , enquanto Γ_2 intersecta o lado AB nos pontos B e Q . Seja X o ponto de interseção da reta BP com Γ_2 de modo que P está entre B e X . Da mesma forma, seja Y o ponto de interseção da reta CQ com Γ_1 de modo que Q está entre C e Y . Sabendo que A , X e Y são colineares, calcule o menor valor possível para o ângulo $\angle BAC$.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2017/N4/5](#) não encontrada!

Problema 6. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2017/N4/6](#) não encontrada!

Problema 1. A professora de Joãozinho escreveu no quadro um sistema de equações. Joãozinho, quando copiou do quadro o sistema, escreveu errado um, e somente um, coeficiente do sistema. Esse foi o sistema que Joãozinho escreveu em seu caderno:

$$x + y + 2z = 6$$

$$3x + 2y + z = 7$$

$$4x + 2y + 3z = 12$$

Sabendo que o sistema original tem todos os coeficientes inteiros e sua solução é $(\frac{5}{11}, \frac{21}{11}, \frac{20}{11})$, encontre o sistema original.

Solução. **Solução math/brazil/rio/2016/N3/1 não encontrada!**

Problema 2. Seja $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de x , isto é, o maior inteiro menor ou igual a x . Seja $\{x\}$ a parte fracionária de x , definida como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Um número real é dito replicante se $x = \{10x\}$. Encontre a soma de todos os números replicantes.

Solução. Vamos achar as soluções de

$$x = \{10x\}$$

$$x = 10x - \lfloor 10x \rfloor$$

$$9x = \lfloor 10x \rfloor = n, \text{ que é inteiro, pois é um piso.}$$

Logo, x é da forma $\frac{n}{9}$. Mas $x = \{10x\}$, que implica $0 \leq x < 1$, isto é, $0 \leq n < 9$. Vamos testar essas soluções: a representação decimal de $\frac{n}{9}$ é $(0, nnnn\dots)$. De fato, $(0, nnnn\dots) = \{(n, nnnn\dots)\}$. Por fim, as soluções são $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{8}{9}$, cuja soma é 4.

Problema 3. Encontre o número de sequências a_1, a_2, \dots, a_{10} satisfazendo $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ e $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ para todo $n = 1, 2, \dots, 9$.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2016/N3/3](#) não encontrada!

Problema 4. Sejam x , y e z reais satisfazendo $x, y, z \geq -1$ e $x + y \geq 2$, $x + z \geq 2$, $y + z \geq 2$. Prove que $xy + yz + zx \geq 3$.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2016/N3/4](#) não encontrada!

Problema 5. Seja Γ uma circunferência de centro O e seja P um ponto no interior de Γ . Seja O' o ponto tal que P é ponto médio de OO' . Suponha que a circunferência Γ' de centro O' que passa por P é secante a Γ e seja A um ponto na interseção de Γ com Γ' . Se B é o outro ponto de interseção da reta AP com Γ , calcule $\frac{PB}{PA}$.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2016/N3/5](#) não encontrada!

Problema 6. Seja $p \geq 3$ um número primo. Sejam a_1, a_2, \dots, a_{p-1} números inteiros tais que a_1 não é múltiplo de p e $a_1^k + a_2^k + \dots + a_{p-1}^k$ é múltiplo de p para todo $k = 1, \dots, p-2$. Prove que a_i não é múltiplo de p para todo $i = 1, 2, \dots, p-1$, e que $a_i - a_j$ não é múltiplo de p para todos $i, j = 1, 2, \dots, p-1$ com $i \neq j$.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2016/N3/6 não encontrada!](#)

Problema 1. Escrevendo-se a representação decimal de $40!$ da esquerda para direita, qual o último dígito não nulo que foi escrito? (Por exemplo $11! = 39916800$, logo o último dígito não nulo de $11!$ é 8.)

Solução. Solução [math/brazil/rio/2016/N4/1](#) não encontrada!

Problema 2. Encontre o número de sequências a_1, a_2, \dots, a_{10} satisfazendo que $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todo $n = 1, 2, \dots, 10$ e que $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ para todo $n = 1, 2, \dots, 9$.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2016/N4/2](#) não encontrada!

Problema 3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \{10x\}$. Um número é dito tri-replicante se ele satisfaz

$$f(f(f(x))) = x.$$

Encontre a soma de todos os números tri-replicantes.

Observação: $\{x\}$ é a parte fracionária de x , isto é, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é o menor inteiro maior ou igual a x .

Solução. Solução [math/brazil/rio/2016/N4/3](#) não encontrada!

Problema 4. Seja Γ uma circunferência de centro O e seja P um ponto no interior de Γ . Seja O' o ponto tal que P é ponto médio de OO' . Suponha que a circunferência Γ' de centro O' que passa por P é secante a Γ e seja A um ponto na interseção de Γ com Γ' . Se B é o outro ponto de interseção da reta AP com Γ , calcule $\frac{PB}{PA}$.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2016/N4/4](#) não encontrada!

Problema 5. Encontre todos os polinômios P com coeficientes reais tais que

$$xP(x) + yP(y) \geq 2P(xy)$$

para quaisquer x e y reais.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2016/N4/5](#) não encontrada!

Problema 6. Sejam ABC um triângulo acutângulo e Γ sua circunferência circunscrita. Sejam D , E e F os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados BC , AC e AB , respectivamente. Sejam A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 os pontos de interseção de Γ com as retas DE , DF e EF de modo que A_1 e A_2 se encontram no arco menor BC , B_1 e B_2 se encontram no arco menor AC , e C_1 e C_2 se encontram no arco menor AB . Se $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$, prove que o triângulo ABC é equilátero.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2016/N4/6](#) não encontrada!

Problema 1.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2015/N3/1](#) não encontrada!

Problema 2.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2015/N3/2](#) não encontrada!

Problema 3.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2015/N3/3](#) não encontrada!

Problema 4.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2015/N3/4](#) não encontrada!

Problema 5.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2015/N3/5](#) não encontrada!

Problema 6.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2015/N3/6](#) não encontrada!

Problema 1.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2015/N4/1](#) não encontrada!

Problema 2.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2015/N4/2](#) não encontrada!

Problema 3.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2015/N4/3](#) não encontrada!

Problema 4.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2015/N4/4](#) não encontrada!

Problema 5.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2015/N4/5](#) não encontrada!

Problema 6.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2015/N4/6](#) não encontrada!

Problema 1.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2014/N3/1](#) não encontrada!

Problema 2.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2014/N3/2](#) não encontrada!

Problema 3.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2014/N3/3](#) não encontrada!

Problema 4.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2014/N3/4](#) não encontrada!

Problema 5.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2014/N3/5](#) não encontrada!

Problema 6.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2014/N3/6](#) não encontrada!

Problema 1.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2014/N4/1](#) não encontrada!

Problema 2.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2014/N4/2](#) não encontrada!

Problema 3.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2014/N4/3](#) não encontrada!

Problema 4.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2014/N4/4](#) não encontrada!

Problema 5.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2014/N4/5](#) não encontrada!

Problema 6.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2014/N4/6](#) não encontrada!

Problema 1.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2013/N3/1](#) não encontrada!

Problema 2.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2013/N3/2](#) não encontrada!

Problema 3.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2013/N3/3](#) não encontrada!

Problema 4.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2013/N3/4](#) não encontrada!

Problema 5.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2013/N3/5](#) não encontrada!

Problema 6.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2013/N3/6](#) não encontrada!

Problema 1.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2013/N4/1](#) não encontrada!

Problema 2.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2013/N4/2](#) não encontrada!

Problema 3.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2013/N4/3](#) não encontrada!

Problema 4.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2013/N4/4](#) não encontrada!

Problema 5.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2013/N4/5](#) não encontrada!

Problema 6. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(x) - f(y)$$

para todos x e y inteiros.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2013/N4/6](#) não encontrada!

Problema 1.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2012/N3/1](#) não encontrada!

Problema 2.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2012/N3/2](#) não encontrada!

Problema 3.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2012/N3/3](#) não encontrada!

Problema 4.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2012/N3/4](#) não encontrada!

Problema 5. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos x e y reais.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2012/N3/5](#) não encontrada!

Problema 6.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2012/N3/6](#) não encontrada!

Problema 1.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2012/N4/1](#) não encontrada!

Problema 2.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2012/N4/2](#) não encontrada!

Problema 3.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2012/N4/3](#) não encontrada!

Problema 4.

Solução. Solução [math/brazil/rio/2012/N4/4](#) não encontrada!

Problema 5.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2012/N4/5](#) não encontrada!

Problema 6.

Solução. [Solução math/brazil/rio/2012/N4/6](#) não encontrada!