Problemas da KöMaL (Setembro, 2019)

Guilherme Zeus Dantas e Moura
guilhermezeus.com

Instruções. A aula de hoje será focada em apresentações individuais (ou em pequenos grupos). Ao resolver ou ter avanços em um problema que você considerou desafiador, você deve anunciar que resolveu o problema (ou que avançou no problema), e eu indicarei um tempo (entre 2 e 10 minutos) para que você e outros alunos preparem-se para a sua apresentação. Depois desse tempo, você apresentará sua solução (ou avanços), e a discussão acontecerá como de costume.

C1553. Determine o termo constante da expressão

$$\left(x^{12} + \frac{1}{x^{18}}\right)^{25}.$$

C1554. Um lado de um retângulo é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vezes maior que o outro lado. O retângulo é recortado e rearranjado para formar um quadrado de mesma área. Qual é a razão entre a diagonal do retângulo e a diagonal do quadrado?

C1555. Ache todas as triplas primos p, q, r para os quais

$$p + q^2 = 4r^2.$$

C1556. A bissetriz interior relativa ao vértice C do triângulo ABC intersecta o lado oposto no lado P. A distância de P aos outros lados é $\frac{24}{11}$, e $AC = 6$, $BC = 5$. Ache o tamanho do segmento AB.

C1557. Dois números são selecionados aleatoriamente (e de maneira uniforme) do conjunto de inteiros com dois dígitos. Qual é a probabilidade que eles tenham um dígito em comum?

C1558. Dependendo do valor do parâmetro a, quantos pontos a circunferência $x^2+y^2 = 1$ e a parábola $y = ax^2 - 1$ vão ter em comum?

C1559. A base de um tetraedro é um triângulo regular, e suas três faces laterais são desacopladas da base, e então desdobradas e planificadas para formar um trapézio com lados 10, 10, 10 e 14. Ache a soma das medidas de todos os lados do tetraedro, e ache também a área de sua superfície.

B5038. Seja P um ponto no interior de um octógono regular $ABCDEFGH$. Mostre que a soma das áreas dos triângulos ABP, CDP, EFP e GHP é igual à soma das áreas dos triângulos BCP, DEP, FGP e HAP.

B5039. Em cada casa de um tabuleiro 2019×2019, está escrito $(+1)$ ou (-1). Se a soma de cada linha e cada coluna for calculada, qual é o máximo de números distintos que podem ser obtidos?

B5040. Em um quadrado $ABCD$, seja F um ponto no segmento AB, e seja E um ponto no segmento AD. Trace a perpendicular à reta CE no ponto E, e a perpendicular à reta CF no ponto F. Seja M a intersecção dessas perpendiculares. Sabendo que a área do triângulo CEF é metade da área do pentágono $BCDEF$, prove que M pertence a diagonal AC do quadrado.

B5041. Um número real está escrito em cada casa de um tabuleiro $n \times n$. Um tabuleiro é *nulo* se a soma dos números em todo subtabuleiro 2×2 é zero. Por exemplo, para $n = 3$, o seguinte tabuleiro é nulo.

$$\begin{array}{rrr} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 5 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}$$

Qual é o maior n para o qual existe um tabuleiro nulo $n \times n$ tal que nem todas as entradas sejam zero?

B5042. O quadrilátero convexo $ABCD$ não é um trapézio, e as diagonais AC e BD possuem mesma medida. Seja M a intersecção das diagonais. Mostre que a outra intersecção (diferente de M) das circunferências ABM e CDM pertence à bissetriz de $\angle BMC$.

B5043. Prove que o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ possui uma quantidade ímpar de subconjuntos não vazios tais que a média aritimética dos elementos é um número inteiro.

B5044. Seja ABC um triângulo, e sejam D, E pontos nos segmentos AB, AC, respectivamente. A intersecção dos segmentos BE e CD é M. Seja x a área do triângulo BCM, e seja y a área do triângulo EDM. Prove que a área do triângulo ABC é maior ou igual a

$$x\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

B5045. Para quais inteiros positivos n existe uma permutação $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dos primeiros n inteiros positivos de modo que $a_1 + 1, a_2 + 2, \ldots, a_n + n$ sejam todos potências perfeitas? (Um número é uma potência perfeita se pode ser representado da forma a^b, com $a, b \geq 2$ inteiros.)

A755. Prove that every polygon that has a center of symmetry can be dissected into a square such that it is divided into finitely many polygonal pieces, and all the pieces can only be translated. (In other words, the original polygon can be divided into polygons $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a square can be divided into polygons a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ such that for $1 \leq i \leq n$ polygon B_i is a translated copy of polygon A_i.)

A756. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$; e

$$f\left(x^2\right) = (f(x))^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

A757. For every n non-negative integer let $S(n)$ denote a subset of the positive integers, for which i is an element of $S(n)$ if and only if the i-th digit (from the right) in the base two representation of n is a digit 1.

Two players, A and B play the following game: first, A chooses a positive integer k, then B chooses a positive integer n for which $2^n \geq k$. Let X denote the set of integers $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, let Y denote the set of integers $\left\{0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\right\}$. The game consists of k rounds, and in each round player A chooses an element of set X or Y then player B chooses an element from the other set. For $1 \leq i \leq k$ let x_i denote the element chosen from set X, let y_i denote the element chosen from set Y.

Player B wins the game, if for every $1 \leq i \leq k$ and $1 \leq j \leq kx_i < x_j$ if and only if $y_i < y_j$ and $S(x_i) \subset S(x_j)$ if and only if $S(y_i) \subset S(y_j)$.

Which player has a winning strategy?