Folha 1/4

NÍVEL 3

PROBLEMA 2

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

Operação: Se a e b estão marcados, então

$2a-b$ e $2b-a$ poderão ser marcados.

Definição: Sejam $a \leq b$ inteiros. Defina $[a,b]$ como $\{a, a+1, \dots, b-1, b\}$.

Conjectura 1: $f(2^n) = n$.

Lema 1: $f(2^n) \leq n$.

Prova (por construção)

$0, 1 \rightarrow 2^1$ (1 passo)

$0, 2 \rightarrow 2^2$ (2 passos)

$0, 2^2 \rightarrow 2^3$ (3 passos)

$\vdots$

$0, 2^{n-1} \rightarrow 2^n$ (n passos) $\square$

Conjectura 2: $f(2n) = f(2n-1) = f(n)+1$.

Lema 2: $f(2n) \leq f(n)+1$

$f(2n-1) \leq f(n)+1$

Prova: Para marcar n, fazemos $f(n)$ movimentos a partir de 0 e 1 que marcam n.

Folha 2/4

NÍVEL 3

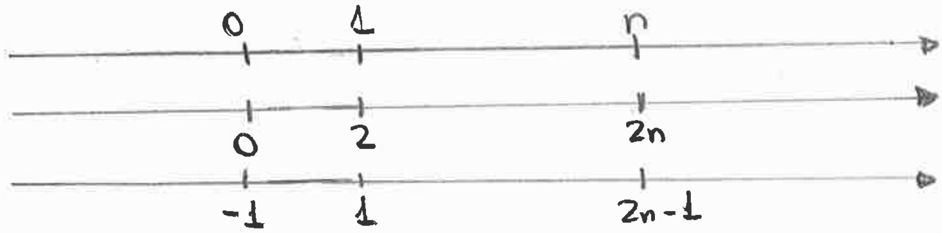
PROBLEMA 2

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Olimpíada Brasileira de Matemática

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27



Se fizermos os mesmos movimentos começando com 0 e 2, marcamos 2n e, a partir de -1 e 1, marcamos 2n-1.

Porém, podemos chegar em 0 e 2 com 1 movimento adicional $(0, 1 \to 2)$ e podemos chegar em -1 e 1 com 1 movimento adicional. $(1, 0 \to -1)$

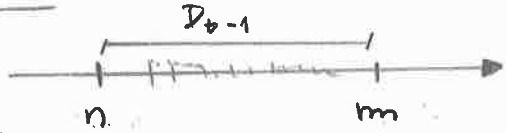
Logo, $f(2n) \leq f(n) + 1$ e $f(2n-1) \leq f(n) + 1$ $\square$

Vamos olhar p/ maior distância entre dois pontos marcados.

Lema 3: Após t movimentos, a maior distância é $\leq 2^t$.

Prova (por indução) $t=0$: $d(0,1) = 1 \leq 2^0$. Ok!

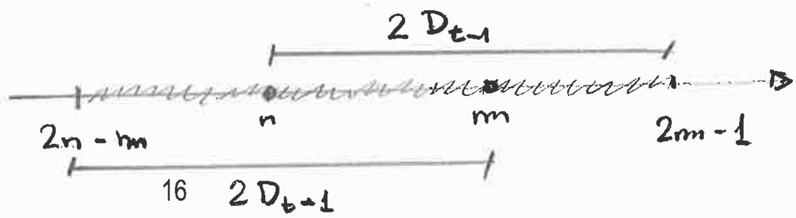
No rodada $t+1$:



Sejam n o mínimo e m o máximo

O novo marcado é $2a-b$:

$2a - b \leq 2m - n$
e
$2a - b \geq 2n - m$ $\Rightarrow$



Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

$\Rightarrow$ A distância D_t máxima será menor que $2D_{t-1}$

$\Rightarrow D_t \leq 2D_{t-1} \leq 2 \cdot 2^{t-1} \leq 2^t$ $\square$

Como 0 sempre está marcado, $n > 2^t$ só poderá ser marcado depois do t-ésimo jogada. (Pelo Lema 3)

Como 1 sempre está marcado, $n < 1 - 2^t$ só poderá ser marcado depois do t-ésimo jogada. (Pelo Lema 3)

Lema 4:

$f(n) > t, \ \forall n > 2^t$ ou $n < 1 - 2^t$.

Como o problema é simétrico em relação a $1/2$, vamos achar $f(x)$ para $x \geq 1/2$ (ou seja $x \geq 1$).

Escreva n como $2^t + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq 2^t$. (isto é, $t = \lfloor \log_2(n-1) \rfloor$)

Claim: $f(n) = t + 1$.

Indução em t: $t = 0$; $n = 1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq 1 \Rightarrow \varepsilon = 1$

$\Rightarrow n = 2$; $f(2) = 0 + 1 = 1$ sim!

Hipótese: p/ $t-1$ funciona.

Pelo lema 4: $f(n) > t$, pois $n > 2^t$.

Pelo lema 2: se $n = 2k$ ou $n = 2k - 1$: $f(n) \leq f(k) + 1$

NÍVEL 3

Folha 4/4

PROBLEMA 2

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

Mas $n = 2K \Rightarrow K = n/2 = 2^{t-1} + \varepsilon/2, \quad 0 < \varepsilon/2 \leq 2^{t-1}$.

$n = 2K-1 \Rightarrow K = \frac{n+1}{2} = 2^{t-1} + \frac{\varepsilon+1}{2}, \quad 0 < \frac{\varepsilon+1}{2} \leq \frac{2^t+1}{2}$. (*)

(*) Mas, como K é inteiro, $\frac{\varepsilon+1}{2}$ é inteiro e, portanto,

$\frac{\varepsilon+1}{2} \leq 2^{t-1} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\varepsilon+1}{2} \leq 2^{t-1}$.

Portanto, vale a hipótese: $f(K) = (t-1)+1 = t$.

$\Rightarrow f(n) \leq t+1$

Mas $f(n) > t \Rightarrow \boxed{f(n) = t+1}$ $\square$

Logo

se $n = 1$: $f(1) = 0$

se $n > 1$: $f(n) = \lfloor \log_2(n-1) \rfloor + 1$ (def de t)

por simetria em $1/2$: ($1-n$ é o simétrico de n)

se $n = 0$: $f(0) = 0$

se $n < 0$: $f(n) = \lfloor \log_2(-n) \rfloor + 1$

Em outras palavras:

$f(n) = t \iff n \in [2^{t-1}+1, 2^t]$ ou $n \in [1-2^t, -2^{t-1}]$, $\forall t > 0$

$f(n) = 0 \iff n = 0$ ou $n = 1$.

Guilherme Zeus Dantes e Moura / 140.264.007-27

Folha de rascunho

Gen 0: 0, 1 $\xrightarrow{3n-1}$

Gen 1: -1, 0, 1, 2 $\xrightarrow{3n-1}$

Gen 2: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 $\xrightarrow{3n-1}$

Gen 3: -13, ..., 14

Gen 4:

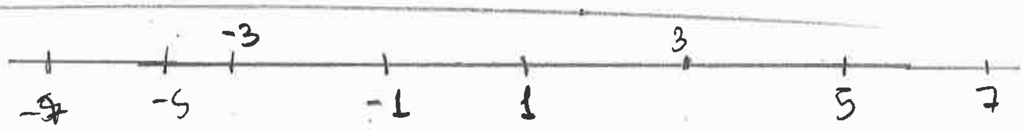
ERRADO

$f(x)=0$: 0, 1

$f(x)=1$: -1, 2

$f(x)=2$: -3, -2, 3, 4

$f(x)=3$:



$f(2a-b) = f(a) + f(b) + 1$ (meio que)

$f(2^n) = n$?

O primeiro "caro" a ser marcado é 2 ou -1

0, 1, 2

$f(2n) \leq f(n) + 1$?

será igual?

-1, 0, 1

$f(2n-1) \leq f(n) + 1$

será igual.