

## Problemas Sortidos de Teoria dos Números – Edição II (alguns disponíveis no sabor Combinatória)

Guilherme Zeus Moura  
zeusdanmou@gmail.com

1. **(IMC 2020, 6)** Ache todos os primos  $p$  tais que existe um único  $a \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  para o qual  $a^3 - 3a + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ .
2. **(OBM 2018, 3)** Sejam  $k, n$  inteiros positivos fixados. Em uma mesa circular, são colocados  $n$  pinos numerados sucessivamente com os números  $1, \dots, n$ , com 1 e  $n$  vizinhos. Sabe-se que o pino 1 é dourado e os demais são brancos. António e Maria Clara jogam um jogo, em que uma argola é colocada inicialmente em um dos pinos e a cada passo ela muda de posição. O jogo começa com Maria Clara escolhendo com pino inicial para a argola, e o primeiro passo consiste no seguinte: António escolhe um inteiro positivo  $d$  qualquer e Maria Clara desloca a argola  $d$  pinos no sentido horário ou no sentido anti-horário (as posições são consideradas módulo  $n$ , ou seja, os pinos  $x, y$  são iguais se e somente se  $n$  divide  $x - y$ ). Após isso, a argola muda de pinos de acordo com uma das seguintes regras, a ser escolhida em cada passo por António.

**Regra 1:** António escolhe um inteiro positivo  $d$  qualquer e Maria Clara desloca a argola  $d$  pinos no sentido horário ou no sentido anti-horário.

**Regra 2:** António escolhe um sentido (horário ou anti-horário), e Maria Clara desloca a argola nesse sentido em  $d$  ou  $kd$  pinos, onde  $d$  é o tamanho do último deslocamento realizado.

António vence se, após um número finito de passos, a argola é deslocada para o pino dourado. Determine, em função de  $k$ , os valores de  $n$  para os quais António possui uma estratégia que garanta sua vitória, não importando como Maria Clara jogue.
3. **(IMO 2014, 5)** Para cada inteiro positivo  $n$ , o Banco da Cidade do Cabo emite moedas de valor  $\frac{1}{n}$ . Dada uma coleção finita de tais moedas (de valores não necessariamente distintos) com valor total de no máximo  $99 + \frac{1}{2}$ , prove que é possível particionar essa coleção em 100 ou menos grupos, cada um com valor total de no máximo 1.