Problemas Sortidos

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1 (2019 Putnam, A1)

Determine todos os possíveis valores de $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$, em que A, B e C são inteiros não-negativos.

Problema 2 (2019 Putnam, A2)

No triângulo $\triangle ABC$, seja G o baricentro, e seja I o incentro. Suponha que os segmentos IG e AB são paralelos e que $\angle B = 2\tan^{-1}(1/3)$. Determine $\angle A$.

Problema 3 (China)

Dados inteiros positivos m e n, suponha que $n \geq 2m \geq 4$. Sejam $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ números reais, tais que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n(n-1).$$

Determine o valor mínimo de $\sum_{k=1}^{m} x_k$.

Problema 4 (2019 Putnam, A5)

Seja p um primo ímpar, e seja $\mathbb{F}_p$ o corpo de inteiros módulo p. Seja $\mathbb{F}_p[x]$ o anel de polinômios sobre $\mathbb{F}_p$, e considere $q(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ definido por $q(x) = \sum_{k=1}^{p-1} a_k x^k$, em que $a_k = k^{(p-1)/2} \pmod{p}$. Ache o maior inteiro não negativo n tal que $(x-1)^n$ divide $q(x)$ em $\mathbb{F}_p[x]$.