(9, Treinamento Cone Sul, Lista 3).

Queremos todo n tal que:

$$a^3 + a$$

cobre todos os resíduos mod n.

Casos pequenos:

- $\underline{n=1}$ $\quad 0^3+0 \equiv 0 \quad$ yes!
- $n=2$ $\quad 0^3+0 \equiv 0$, $\quad 1^3+1 \equiv 0 \quad$ Nope!
- $\underline{n=3}$ $\quad 0^3+0 \equiv 0$, $\quad 1^3+1 \equiv 2$, $\quad 2^3+2 \equiv 1 \quad$ yes!
- $n=4$ $\quad 0^3+0 \equiv 0$, $\quad 1^3+1 \equiv 2$, $\quad 2^3+2 \equiv 2$, $\quad 3^3+3 \equiv 2 \quad$ hope!
- $n=5$ $\quad 0^3+0 \equiv 0$, $\quad 1^3+1 \equiv 2$, $\quad 2^3+2 \equiv 0 \quad$ nope!
- $n=7$ $\quad 0^3+0 \equiv 0$, $\quad 1^3+1 \equiv 2$, $\quad 2^3+2 \equiv 3$, $\quad 3^3+3 \equiv 2 \quad$ hope!

Se a^3+a cobre todos os resíduos mod n

$\Rightarrow$ a^3+a cobre todos os resíduos mod p, $p \mid n$.

- Se existe $v^2 \underset{p}{\equiv} -1$, então (que é verdade se $p \underset{4}{\equiv} 1$)

$$v^3+v \equiv v(v^2+1) \equiv 0 \pmod p$$

e

$$0^3+0 \equiv 0$$

$\{0^3+0, 1^3+1, \dots, (p-1)^3+(p-1)\}$ não cobre todos os resíduos $\underline{\text{mod } p}$

- $p=2$ não funciona!

Em particular, sobram os números n somente com fatores primos $4k+3$.