Aquecimento

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1 (OBM 1999, 2). Prove que há pelo menos um algarismo diferente de zero entre a 1000000ª e a 3000000ª casa decimal de $\sqrt{2}$ após a vírgula.

Suponha que todos os algarismos são zero. Então,

$$\sqrt{2} = 1,414\ldots a_{999999}\ \underbrace{00000\cdots00000}_{20000001\ \text{algarismos}}\ a_{3000001}\ldots.$$

$$\sqrt{2} = \frac{N}{10^{10^6-1}} + \varepsilon,\ \text{com } \varepsilon < \frac{1}{10^{3\cdot 10^6}} \text{ e } N \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} 2 &= \left(\frac{N}{10^{10^6-1}} + \varepsilon\right)^2 \\ &= \frac{N^2}{10^{2(10^6-1)}} + \frac{2N\varepsilon}{10^{10^6-1}} + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$2 \cdot (10^{2(10^6-1)}) - N^2 = 2N\varepsilon(10^{10^6-1}) + \varepsilon^2(10^{2(10^6-1)})$$

- $2 \cdot (10^{2(10^6-1)}) = 2\underbrace{00\cdots00}_{2(10^6-1)}$.
- N^2 é inteiro, aproximadamente, na ordem de $10^{2(10^6-1)}$.
- $2N\varepsilon(10^{10^6-1}) < \frac{2N}{10^{2(10^6-1)}}$, na ordem de $\frac{1}{10^{10^6}}$
- $\varepsilon^2(10^{2(10^6-1)}) < \frac{1}{10^{4(10^6-1)}}$

LE é inteiro. LD é muito pequeno. Logo, como $LD = LE$, $LD = LE = 0$.

$$LD = 0 \implies 2 = \left(\frac{N}{10^{10^6-1}}\right)^2 \implies \sqrt{2} \text{ racional. Absurdo!}$$