A resposta é 4038.

Fato 1: Existem a, b, c, d, com as propriedades do enunciado tal que $a+b+c+d = 4038$.

Prova: $a = 6 \cdot 336 = 2016$

$b = 3 \cdot 336 = 1008$

$c = 2 \cdot 336 = 672$

$d = 1 \cdot 336 = 336$. $\square$

Fato 2: Para quaisquer a, b, c, d com as propriedades do enunciado, temos $a+b+c+d \leq 4038$.

Prova: S.P.G, $a > b > c > d$. Seja $S = a+b+c+d < 4a$.

Sabemos que $a | S$, $b | S$, $c | S$, $d | S$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{mmc}(a, b, c, d) \mid S$.

• $a | S$ e $a < S < 4a \Rightarrow S = 2a$ ou $S = 3a$

Além disso, $a \mid \text{mmc}(a,b,c,d) \mid S$, então temos os seguintes casos:

Caso 1. $S = 2a$

Caso 2: $S = 3a$

Vamos analisar o caso 2:

$$a|S,\ b|S,\ c|S,\ d|S \Rightarrow$$

$\Rightarrow a,b,c,d$ são divisores de $S=3a$.

Os potenciais divisores de $3a$ são, em ordem decrescente:

$$3a,\ \frac{3a}{2},\ \frac{3a}{3}=a,\ \frac{3a}{4},\ \frac{3a}{5},\ \frac{3a}{6},\ \frac{3a}{7},\ \dots$$

Como $a>b>c>d$, temos que

$$3a = a+b+c+d \leq a+\frac{3a}{4}+\frac{3a}{5}+\frac{3a}{6} = \frac{57a}{20} < 3a \text{ Abs!}$$

Vamos analisar o caso 1:

Se $a=2017$, então, a,b,c,d são divisores distintos de $S=2a$ $=2\cdot 2017$. Mas $2\cdot 2017$ somente possui 3 divisores menores ou iguais a 2017. Abs!

Logo: $a \leq 2016 \Rightarrow S=2a\leq 4032$.

Como queria demonstrar $a+b+c+d\leq 4032$, para todos a,b,c,d que satisfazem o enunciado. $\square$

Os fatos 1 e 2 mostram que 4032 é o máximo desejado.