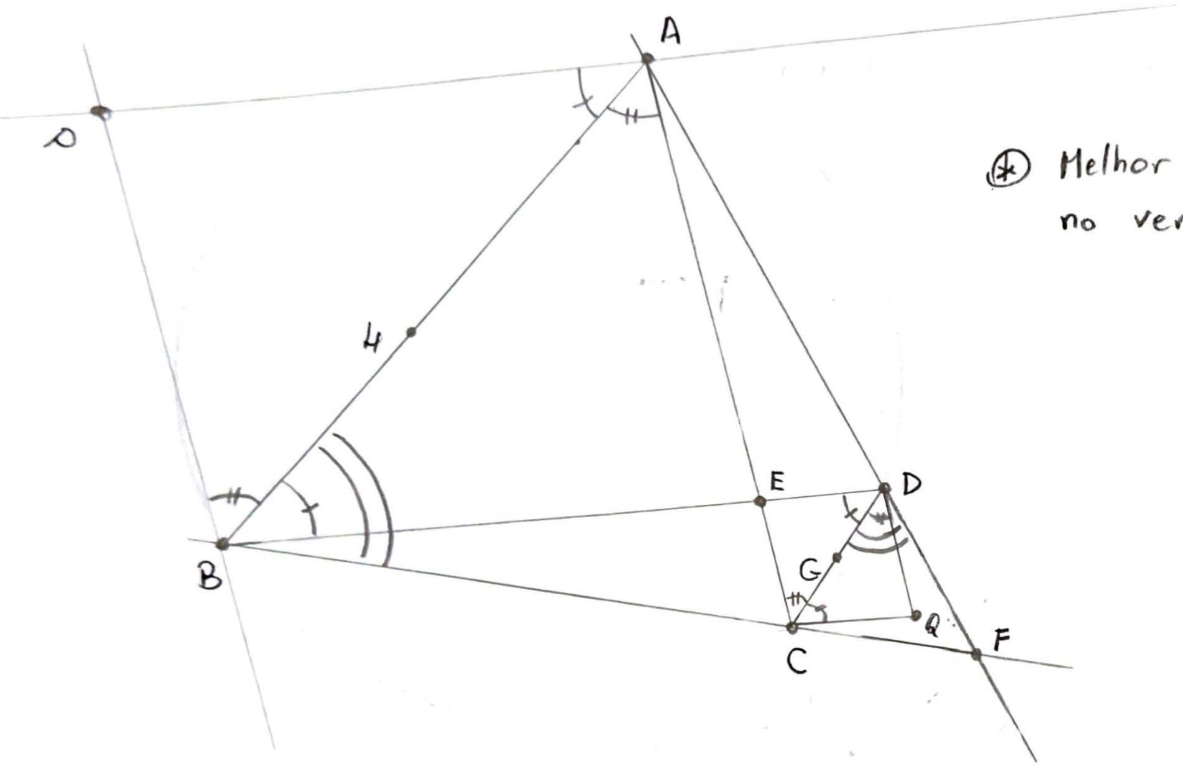
G4/2009: Folha 1

Quadrilátero cíclico ABCD; $AC \cap BD = E$; $AD \cap BC = F$.

H e G pontos médios de AB e CD.

Prove que: EF é tangente ao círculo EGH.

//



(*) Melhor desenho no verso!

Seja P tal que PBEA é paralelogramo e Q tal que DECQ é paralelogramo.

Sabemos que $\Delta FCD \sim \Delta FAB$. Considere a reflexão na bissetriz de $\angle F$ e homotetia de razão $\frac{FA}{FC}$. Temos que essa transformação leva ΔFCD em ΔFAB. Como consequência, leva o ponto E no ponto P (pois possuem a mesma construção a partir de ΔFCD e ΔFAB). Logo, FE é isogonal de FP, no ângulo F.

Analogamente, essa transformação leva Q em E $\Rightarrow$ FE é isogonal de FQ.

$\Rightarrow$ F, Q, P colineares.

Mas H é ponto médio de PE e G é ponto médio de QE. Usando base média,

$PQ \parallel HG$. $\Rightarrow \angle GHE = \angle FPE$.

Além disso, pela transformação: $\angle FEQ = \angle FPE$. $\Rightarrow \angle FEG = \angle GHE \Rightarrow$

$\Rightarrow$ EF é tangente a GHE. $\square$

G4/2009 : Folha 2