Probabilidade

Andrey

§1 Não-transitividade

Exemplo 1 Dados d6 não transitivos

Exemplo 2 Sequência de moedas

§2 Martingales

Teorema 1 (Teorema Fundamental das Apostas) Seja J um jogo justo. Qualquer estratégia de iterar J que:

- termina em tempo limitado ou;
- termina com dinheiro limitado

é justa.

Problema 1 Um sorteador de letras a cada minuto, sorteia uma letra `A-Z`. Qual o tempo médio até aparecer a palavra `ABRACADABRA`?

Solução. Vamos inventar alguns jogos:

$J(X)$: aposta N moedas para jogar. Ganha $26N$ moedas, se cair a letra X.

J^* : Aposta 1 moeda para jogar. Aposta 1 jogando em $J(\mathtt{A})$. Se ganhar, aposta tudo em $J(\mathtt{B})$. Se ganhar, aposta tudo em $J(\mathtt{R})$. E assim por diante. Se perder em algum momento, sai do jogo.

J é justo, pois o valor esperado de dinheiro é 0. J^* é um jogo justo, pois é uma iteração de J e termina com dinheiro limitado.

Vamos jogar diversos jogos J^* simultâneamente, começando a jogar um novo jogo J^* a cada minuto e vamos parar imediatamente de jogar todos os jogos quando ganharmos o prêmio final em algum dos jogos J

Como é justo, o dinheiro esperado é 0. Quando finalmente ganharmos o jogo, três de nossos jogos estarão rodando são: `ABRACADABRA` `ABRA` e `A`.

Portanto, ganharemos $26^{11} + 26^4 + 26$ no fim do jogo. Porém, perdemos T moedas, onde T é o número de minutos que passaram. Como o dinheiro esperado é $0 = 26^{11} + 26^4 + 26 - T$, temos que $T = 26^{11} + 26^4 + 26$.

§3 Método Probabilístico

Teorema 2 $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Problema 2 Remova $n - 1$ arestar de um grafo bipartido $K_{n,n}$, existe emparelhamento perfeito.

Solução. Os vértices $1, 2, \dots, n$ de um lado e $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ do outro. Consirere $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$ bijetora escolhida de forma uniformemente aleatória.

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}(i \sim \pi(i))) = \mathbb{P}(i \sim \pi(i)) = \frac{n^2 - n + 1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\mathbb{E}(|i : i \sim \pi i|) = \mathbb{E}\left(\sum(\mathbb{1}(i \sim \pi))\right) = n - 1 + \frac{1}{n} > n - 1.$$

Logo, existe um π tal que $|i : i \sim \pi i| = n$, isto é, $i \sim \pi(i)$, para todo i: um emparelhamento perfeito.

Teorema 3 (Lema Local de Lovász) Sejam $A_1, A_2, \dots, A_k$ eventos tal que cada evento ocorre com probabilidade no máximo p e tal que cada evento é independente de todos os outros, exceto por no máximo d. Se $epd \leq 1$, então existe uma probabilidade não-nula de que nenhum desses eventos ocorra.

Problema 3 Prove que existe grafo G livre de triângulos tal que $\chi(G) \geq 2019$.