



Simulado 5

Discutiremos em 08 de Março de 2021

Tempo: 4 horas e 30 minutos

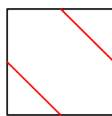
1. Se x, y, z são números reais positivos tais que

$$xyz \geq xy + yz + zx,$$

prove que

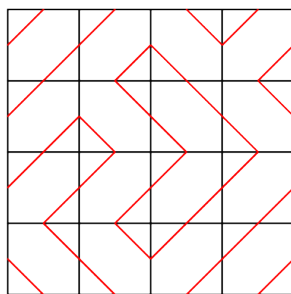
$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

2. Seja N um inteiro positivo. Uma coleção de $4N^2$ quadradinhos unitários com o desenho mostrado abaixo é organizada em um tabuleiro $2N \times 2N$. Os quadradinhos podem ser rotacionados.



Os segmentos nos quadradinhos definem caminhos no tabuleiro. Determine o menor e o maior número possível de tais caminhos.

Por exemplo, existem 9 caminhos no tabuleiro 4×4 mostrado abaixo.



3. Seja ABC um triângulo. A circunferência ω_A passa por A e é tangente à reta BC em B . A circunferência ω_C passa por C e é tangente à reta AB em B . Seja D a segunda intersecção das circunferências ω_A e ω_C . Sejam M o ponto médio de BC e E a intersecção das retas MD e AC . Mostre que E está sobre a circunferência ω_A .