Seja $P(x) = Ax^k + \dots$

Seja x_n um número t.q. $P(x_n) = 2^n$.

$$x_n - x_{n-1} \mid P(x_n) - P(x_{n-1}) = 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad x_n - x_{n-1} = (-1)^{\beta(n-1)} \cdot 2^{\alpha(n-1)}$$

- Para n grande,

$$P(x) \approx Ax^k.$$

Portanto, como

$$2 = \frac{P(x_n)}{P(x_{n-1})} \approx \frac{x_n^k}{x_{n-1}^k}$$

$$\Rightarrow |x_n| \approx \sqrt[k]{2} \cdot |x_{n-1}|$$

$$\Rightarrow x_n \approx (-1)^{\theta(n-1)} \cdot \sqrt[k]{2} \cdot x_{n-1}$$

Sabemos que $\quad$ Seja $c = \sqrt[k]{2}$

$$x_n - x_{n-1} = (-1)^{\beta(n-1)} \cdot 2^{\alpha(n-1)}$$

$$x_n \approx (-1)^{\theta(n-1)} \cdot c \cdot x_{n-1},$$

Logo:

$$x_{n-1} \cdot \left[(-1)^{\theta(n-1)} \cdot c - 1\right] \approx (-1)^{\beta(n-1)} \cdot 2^{\alpha(n-1)}.$$

$$x_n \left[(-1)^{\theta(n)} \cdot c - 1\right] \approx (-1)^{\beta(n)} \cdot 2^{\alpha(n)}$$

Fazendo a diferença:

$$c \cdot \left[x_n \cdot (-1)^{\theta(n)} - x_{n-1} \cdot (-1)^{\theta(n-1)}\right] \approx (-1)^{\beta(n)} \cdot 2^{\alpha(n)}.$$

- se $\theta(n) \equiv_2 \theta(n-1)$, para algum n grande:

$$c \cdot \left|x_n - x_{n-1}\right| \approx \left|(-1)^{\beta(n)} \cdot 2^{\alpha(n)}\right|$$

$$c \cdot 2^{\alpha(n-1)} \approx 2^{\alpha(n)}.$$ Absurdo!

- se $\theta(n) \not\equiv_2 \theta(n-1)$, para todo n grande, então existe t grande tq:

$$x_t, x_{t+1}, x_{t+4}, x_{t+5}, \dots > 0$$

e

$$x_{t+2}, x_{t+3}, x_{t+6}, x_{t+7}, \dots < 0$$

Então, para $l \equiv t \pmod 2$ para l grande

$$x_{l+1} - x_l = (-1)^{\beta(l)} \cdot 2^{\alpha(l)} \qquad (\mathrm{I})$$

$$x_{l+3} - x_{l+2} = (-1)^{\beta(l+2)} \cdot 2^{\alpha(l+2)} \qquad (\mathrm{II})$$

Como $LE(\mathrm{I}) \cdot (-c^2) \approx LE(\mathrm{II})$

$$\Rightarrow \quad (-c^2) \cdot (-1)^{\beta(l)} \cdot 2^{\alpha(l)} \approx (-1)^{\beta(l+2)} \cdot 2^{\alpha(l+2)}$$

$$\Rightarrow \quad c^2 \cdot 2^{\alpha(l)} \approx 2^{\alpha(l+2)}$$

que é absurdo para $K > 2$.

Para $K = 2$, só não é absurdo se

$\alpha(l) + 1 = \alpha(l+2)$, $\forall l \underset{(2)}{\equiv} t$ grande.

Para $K = 2$; $|x_{n+2}| \approx c|x_{n+1}| \approx c^2|x_n| = 2|x_n|$.

Logo: $|x_{n+2}| = 2|x_n|$ para n grande.

Como os sinais começam a ficar $+, +, -, -,$ a partir de um momento

$$x_{n+2} = -2x_n, \quad \text{para } n \text{ grande}$$

$$P(x_{n+2}) = P(-2x_n) = A(-2x_n)^2 + B(-2x_n) + C$$

$$P(x_n) = Ax_n^2 + Bx_n + C$$

Logo: $P(x_{n+2}) = 4Ax_n^2 - 2Bx_n + C$

$$4P(x_n) = 4Ax_n^2 + 4Bx_n + 4C \quad \ominus$$

$$0 = 6Bx_n + 3C \quad , \quad \forall n \text{ grande}$$

$$\Rightarrow B = C = 0 .$$

Logo $P(x) = Ax^2$

Logo: $\dfrac{P(x_1)}{P(x_2)} = 2$; mas $\dfrac{P(x_1)}{P(x_2)} = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2$

Como $\sqrt{2}$ é irracional, não existem x_1 e x_2.

t.q. $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = 2$. Absurdo!

Portanto $K \leq 1$. Se $P(x) = mx + q \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x_1) \equiv P(x_2) \equiv q \pmod{m} \Rightarrow m \mid 2. \Rightarrow$ $m = \pm 1$ ou $m = \pm 2$.

nota se que $P(x) = \pm x + q$ sempre funciona e $P(x) = \pm 2x + q$ funciona sse q é par. $\blacksquare$