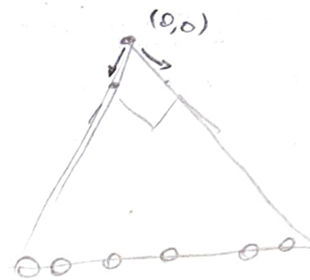
C3, Andrei Negut

A formiga começa em $(0,0)$ e pode dar passos $(1,0)$ ou $(0,1)$

Lema 1: no tempo t, se a formiga está em (i,j) então $i+j=t$.

Seja $D(i,j) = i+j$.

Lema 2: Se $x_t = \left|\{A_K : K \le t \text{ e } D(A_K) \le t\}\right|$ então existem, pelo menos $t+1-x_t$ posições finais em que a formiga pode estar (i.e., existe um caminho válido que termina nesse ponto) no tempo t.



Prova (por indução):

$t=0$: $x_0=0$: existem, pelo menos, $0+1-0$ posições em que a formiga pode estar no tempo 0.

Passo indutivo: No tempo $t-1$, existem $\geq (t-1)+1-x_{t-1}$ posições em que a formiga pode estar. Desconsiderando as posições envenenadas da diagonal $i+j=t$, a formiga consegue alcançar $\geq ((t-1)+1-x_{t-1})+1$ potenciais posições para o tempo t. Porém, no máximo $x_t - x_{t-1}$ delas podem estar envenenadas até o tempo t. Logo, o número de posições finais em que a formiga pode estar no tempo t é, pelo menos:

$$((t-1)+1-x_{t-1})+1-(x_t-x_{t-1}) = t+1-x_t.$$

$\square$

Corolário 3: Como $x_t \le t \Rightarrow$ O número de "posições válidas" no tempo t é ≥ 1. Isto é, existe um caminho arbitrariamente grande que a formiga pode fazer.

Vamos construir recursivamente uma sequência $B_0 = (0,0), B_1, B_2, \ldots$ de pontos. Para todo $i \geq 0$,

Sabemos que B_0 possui caminhos* arbitrariamente grandes que começam em B_0 (no tempo 0)

Se B_i possui caminhos* arbitrariamente grandes que começam em B_i (no tempo i),

então $B_i + (0,1)$ possui caminhos* arbitrariamente grandes que começam em $B_i + (0,1)$ (no tempo $i+1$) (A)

ou

$B_i + (1,0)$ possui caminhos* arbitrariamente grandes que começam em $B_i + (1,0)$ (no tempo $i+1$). (B)

Se (A), defino $B_{i+1} := B_i + (0,1)$. Caso contrário, $B_{i+1} := B_i + (1,0)$.

De todo modo,

- B_t possui caminhos* arbitrariamente grandes que começam em B_t (no tempo t) e, portanto, B_t não está envenenado no tempo t.

e

- B_{t+1} é alcançável por B_t em somente 1 passo.

Logo, $(B_t)_{t \geq 0}$ é um caminho infinito com as propriedades procuradas.

$\square$

---

*: caminhos válidos.