Problemas Sortidos de Combinatória - Live 2

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

3. (EGMO 2014, 5) Seja n um inteiro positivo. Algumas pedras estão distribuídas em n caixas. Um movimento consiste em pegar duas pedras de uma mesma caixa, jogar uma fora e colocar a outra em uma caixa da nossa escolha. Uma configuração inicial de pedras é chamada *solucionável* se é possível atingir uma configuração sem caixas vazias, em uma quantidade finita (possivelmente zero) de movimentos. Determine todas as configurações iniciais de pedras que não são solucionáveis, mas tornam-se solucionáveis quando uma pedra é adicionada a uma caixa, independentemente da caixa escolhida.

Observação. Só pra deixar algumas coisas claras (tenha em mente que esse comentário não é necessário). A quantidade de pedras em uma caixa é um inteiro não-negativo. Outra clarificação tamb

Dica. Como em muitos problemas de matemática, especialmente de combinatória, faça casos pequenos. (Inclusive, uma boa ideia é fazer casos pequenos para entender o enunciado.)

Quando eu digo caso pequeno, eu quero dizer caso pequeno mesmo!

- $n = 1$:

  (0) não é solucionável. (1), (2), (3), $\ldots$ são solucionáveis. (Usando 0 movimentos.)

  Se adicionarmos uma pedra em qualquer caixa da configuração (0), ela se torna uma configuração solucionável.

  Logo, a resposta, para $n = 1$, é somente (0).

- $n = 2$:

  $(0, 0), (0, 1), (0, 2)$ e suas permutações são todas as configurações não-solucionáveis.

  Dentre essas, somente $(0, 2)$ satisfaz as condições do enunciado.

- $n = 3$:

  $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 0, 3), (0, 0, 4), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 2)$ são todas as configurações não-solucionáveis.

  Dentre essas, somente $(0, 0, 4)$ e $(0, 2, 2)$ são boas.

- $n = 4$:

  $(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), \ldots$ (vou deixar pra vocês, porém, se não souberem o que fazer, recomendo que façam).

  Até agora, encontramos essas configurações boas: $(0, 0, 0, 6), (0, 0, 2, 4), (0, 2, 2, 2)$.

- $n = 5$:

  Encontramos essas configurações boas: $(0, 2, 2, 2, 2), (0, 0, 2, 2, 4), (0, 0, 0, 2, 6), (0, 0, 0, 4, 4), (0, 0, 0, 0, 8)$.

Conjectura. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é boa se, e somente se, a_i é par e $\sum a_i = 2n - 2$.

Definição. (Poder) Vamos definir o poder P_i caixa i com a_i pedras como

$$P_i = \begin{cases} k, & \text{se } a_i = 2k + 1 \\ k, & \text{se } a_i = 2k + 2 \end{cases}$$

Vamos dizer que o poder P da configuração é a soma dos poderes de todas as casas. O que acontece com P quando você faz um movimento?

- No movimento: "tira duas pedras de uma caixa i e coloca numa caixa j, com a_j ímpar": P_i diminiu em uma unidade, enquanto P_j fica constante.

  Ou seja, o P dimiui em 1.

- No movimento: "tira duas pedras de uma caixa i e coloca numa caixa j, com a_j par": P_i diminui em uma unidade, enquanto P_j aumenta em uma unidade.

  Ou seja, o P fica constante.

Suponha que uma configuração inicial possui $P < 0$. Como qualquer configuração sem caixas vazias só posui poderes pelo menos 0, essa configuração não é solucionável.

Suponha que uma configuração inicial possui $P \geq 0$. Se essa configuração possui k caixas vazias, então existe alguma caixa com poder > 0. Fazendo um movimento dessa casa com poder positivo, para uma casa vazia, caímos numa configuração com $P \geq 0$ e $k-1$ caixas vazias. Repetimos esse processo até termos 0 caixas vazias. Logo, essa configuração inicial é solucionável.

Vamos voltar a olhar para as configurações boas (isto é, as configurações não-solucionáveis, que, ao adicionar uma pedra em qualquer uma das caixas, vira solucionável).

Note que, se aumentarmos em um o número de pedras da caixa i com a_i pedras, P_i mantém constante (se a_i era ímpar) ou aumenta em 1 (se a_i era par).

Desse modo, as configurações boas (ou seja, as configurações com $P < 0$ que, ao adicionar uma pedra em qualquer caixa, o P fica ≥ 0) são as configurações com $P = -1$ e a_i par, para todo i.

Mas, como a_i é par, temos agora que $-2 = 2P = \sum 2P_i = (\sum a_i - 2) = (\sum a_i) - 2n \iff (\sum a_i) = 2n - 2$.

4. (Balcãs 2015, 3) Um comitê de 3366 críticos está votando para os Oscars. Cada crítico vota em apenas um ator e uma atriz. Após a votação, foi descoberto que, para cada inteiro $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$, existe algum ator ou alguma atriz que recebeu exatamente n votos. Prove que existem dois críticos que votaram no mesmo ator e na mesma atriz.

Reformulação. Um comitê de 3366 críticos está votando para os Oscars com 100 atores (independentemente de gênero). Cada crítico vota em, no máximo, um ator e vota em, no máximo, uma atriz. Após a votação, foi descoberto que, para cada inteiro $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$, existe algum ator ou alguma atriz que recebeu exatamente n votos. Prove que existem dois críticos que votaram no mesmo ator e na mesma atriz.

Suponha que não existem dois críticos que votaram no mesmo ator e na mesma atriz.

Vamos construir um grafo G bipartido, com os conjuntos de vértices sendo os conjuntos de atores e o conjunto de atrizes. Vamos ligar um ator u com a atriz v se, e somente se, existe um crítico que votou em ambos u e v.

Seja a_n ator ou atriz que recebeu exatamente n votos.

- O grau de a_i em G é, no máximo, i.
- Entre os 100 atores e atrizes, existem $1 + 2 + \cdots + 100 = 5050$ votos. Portanto, pelo menos $5050 - 3366 = 1684$ críticos votaram para em algum desses atores e em alguma dessas atrizes.

  Logo, o grafo G possui pelo menos 1684 arestas.
- Considere o grafo G' que é uma cópia de G removendo os vértices $a_1, a_2, \dots, a_{33}$. O grafo G' é bipartido e possui 67 vértices, portanto possui no máximo $33 \cdot 34$ arestas. Como $a_1, a_2, \dots, a_{33}$ tem grau no máximo $1, 2, \dots, 33$, respectivamente, então existem no máximo $1 + 2 + \cdots 33 = \frac{33 \cdot 34}{2}$ arestas que ligam em algum dos vértices $a_1, a_2, \cdots$ ou a_{33}. Portanto, o número total de vértices é, no máximo, $33 \cdot 34 + \frac{33 \cdot 34}{2} = 1683$.

Chegamos num absurdo!

Logo, existe um par de críticos que votou no mesmo ator e na mesma atriz.