

Método Probabilístico

Zeus DM

1. (EGMO 2019) Seja $n \geq 2$ um inteiro, e sejam a_1, a_2, \dots, a_n inteiros positivos. Mostre que existem inteiros positivos b_1, b_2, \dots, b_n , que satisfazem as seguintes três condições:

(a) $a_i \leq b_i$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$;

(b) os restos de b_1, b_2, \dots, b_n na divisão por n são distintos dois a dois;

(c) $b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq n \cdot \left(\frac{n-1}{2} + \left\lceil \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right\rceil \right)$

($\lceil x \rceil$ denota a parte inteira do número real x , isto é, o maior inteiro que é menor ou igual a x .)

2. (IMC 2017) There are n people in a city, and each of them has exactly 1000 friends (friendship is always symmetric). Prove that it is possible to select a group S of people such that at least $n/2017$ persons in S have exactly two friends in S .