



## Problemas Sortidos III

Guilherme Zeus Dantas e Moura  
zeusdanmou@gmail.com

### Problema 1 (Metrópolis 2016, 2)

Sejam  $a_1, \dots, a_n$  inteiros positivos satisfazendo

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{2}.$$

Todo ano, o governo de Optimistica publica seu Relatório Anual com  $n$  indicadores econômicos. Para cada  $i = 1, \dots, n$ , os possíveis valores do  $i$ -ésimo indicador são  $1, 2, \dots, a_i$ . O Relatório Anual é dito otimista se pelo menos  $n - 1$  indicadores possuem valores maiores que no relatório anterior. Prove que o governo pode publicar Relatórios Anuais otimistas numa sequência infinitamente longa.

### Problema 2 (Kosovo TST 2020, 1 )

Ache todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x + yf(x + y)) = y^2 + f(x)f(y),$$

para quaisquer  $x, y$  reais.

### Problema 3 (Kosovo TST 2020, 2 )

Seja  $p$  um primo ímpar. Ana e Ben alternam turnos ao jogar o seguinte jogo: em cada movimento, o jogador do turno escolhe um número não escolhido anteriormente do conjunto  $\{1, 2, \dots, 2p-3, 2p-2\}$ . Esse processo continua até que não sobre nenhum número. Depois do fim do processo, cada jogador cria um número multiplicando os números escolhidos e, então, somando 1. Dizemos que um jogador ganha se o número criado é divisível por  $p$ , enquanto o número criado pelo oponente não é divisível por  $p$ . Caso contrário, o jogo termina em empate. Ana começa a jogar. Algum dos jogadores possui estratégia vencedora?

### Problema 4 (Kosovo TST 2020, 3 )

Seja  $ABCD$  um quadrilátero cíclico com centro  $O$  tal que  $BD$  bissecta  $AC$ . Suponha que a bissetriz de  $\angle ABC$  intersecta a bissetriz de  $\angle ADC$  em  $X$  diferente de  $B$  e  $D$ . Prove que a reta passando pelos circuncentros dos triângulos  $XAC$  e  $XBD$  bissecta o segmento  $OX$ .