N1/2011

Defino $f(d)$ como o menor inteiro com exatamente d divisores.

Prove que $f(2^k) \mid f(2^{k+1})$.

Solução:

Seja $\$ = \{p^{2^i},\ p \text{ primo},\ i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Seja $d(n)$ o # divisores de n.

Lema 1: Se $d(n) = 2^k \Rightarrow n = \prod_{x \in T} x$, para um conjunto T: $|T| = k$ e $T \subset \$$.

Prova: Seja $n = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i} \Rightarrow d(n) = \prod_{i=1}^{t} (\alpha_i + 1) = 2^k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_i + 1 = 2^{t_i+1} \Rightarrow \alpha_i = 2^{t_i+1} - 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{t_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\sum_{j=0}^{t_i} 2^j} = \prod_{i=1}^{t} \prod_{j=0}^{t_i} p_i^{2^{t_i}}.$$

por fim: $|T| = \Sigma(t_i+1)$ e $d(n) = \prod(2^{t_i+1}) = 2^{\Sigma(t_i+1)} = 2^{|T|}$ $\square$

Seja $\$_i$ o conjunto dos i menores elementos de $\$$. Seja s_i o i-ésimo menor elemento de $\$$.

Lema 2: Se $n_i = \prod_{x \in \$_i} x \Rightarrow d(n) = 2^i$.

Base: $\$_0 = \emptyset \Rightarrow n_0 = 1 \Rightarrow d(n_0) = 2^0 = 1$ ✓

$\$_1 = \{2\} \Rightarrow n_1 = 2 \Rightarrow d(n_1) = 2^1 = 2$ ✓

Passo ind: $d(n_i) = 2^i$. O $(i+1)$ menor elemento de $\$$ é p^{2^k}.

$$\Rightarrow p^{2^0}, p^{2^1}, \dots, p^{2^{k-1}} \text{ estão em } \$_i \Rightarrow v_p(n_i) = 2^k - 1.$$

Como o próximo elemento a ser adicionado é $p^{2^k} \Rightarrow v_p(n_{i+1}) = 2^{k+1} - 1$.

Para q primo $\neq p \Rightarrow v_q(n_i) = v_q(n_{i+1}) \Rightarrow d(n_{i+1}) = \frac{(v_p(n_{i+1})+1)}{(v_p(n_i)+1)} \cdot d(n_i)$

$$= 2^{i+1}. \quad \square$$

Lema 3: $f(2^i) = n_i = \prod_{x \in \$_i} x$.

Prova: Pelo lema 1, todo número n com 2^i divisores é produto de i elementos de $\$$.

Como n_i é o produto dos i menores elementos de $\$$ e $d(n_i) = 2^i \Rightarrow f(2^i) = n_i$ $\square$

Por fim, $n_{i+1} = n_i \cdot (s_{i+1}) \Rightarrow n_i \mid n_{i+1} \Rightarrow f(2^i) \mid f(2^{i+1})$ $\square$