Contagem Dupla

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

§1 Introdução

Em poucas palavras, contagem dupla é algo que você já fez várias vezes: calcular algo de duas maneiras. Nos problemas a seguir, vamos contar algo de duas maneiras e igualar.

§1.1 Alerta

Se você já conhece algum desses problemas, ótimo! Essa é uma oportunidade de treinar a sua escrita de problemas.

§2 Problemas

Os problemas não estão ordenados por dificuldade!

Problema 1 Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que possam ser costurados. Cada costura une dois lados de duas deças peças. Quantas costuras são feitas na fabricação de uma bola de futebol?

Problema 2 Em uma casa térrea, todos os cômodos têm um número par de portas. Prove que o número de portas que ligam a casa ao exterior é par.

Problema 3 Em uma escola, há b professores e c estudantes que satisfazem as seguintes condições:

- Cada professor ensina a exatamente k estudantes.
- Para cada dois estudantes distintos, existem exatamente h professores que ensinam a ambos.

Prove que $bk(k-1) = hc(c-1)$.

Problema 4 Prove a seguinte identidade:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

Problema 5 **(China Hong Kong 2007)** Em uma escola com 2007 meninas e 2007 meninos, cada estudante faz parte de, no máximo, 100 clubes. Sabemos que qualquer dois estudantes de gêneros opostos estão em um mesmo clube. Mostre que existe um clube com pelo menos 11 meninos e 11 meninas.

Problema 6 Dado n inteiro, seja $d(n)$ o número de divisores de n. Seja $D(n)$ o número médio de divisores dos números entre 1 e n, isto é,

$$D(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d(j).$$

Mostre que

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \leq D(n) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Problema 7 **(OBM)** Em um torneio de xadrez, cada participante joga com cada um dos outros exatamente uma vez. Uma vitória vale 1 ponto, um empate vale $\frac{1}{2}$ pontos e uma derrota vale 0 pontos. Cada jogandor ganhou a mesma quantidade de pontos contra homens e contra mulheres. Prove que a quantidade de participantes é um quadrado perfeito.

Problema 8 **(IMO 1987, 1)** Seja $p_n(k)$ o número de permutações do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que possuem exatamente k pontos fixos. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!.$$

Problema 9 **(Irã 2010, 6)** Uma escola possui n estudantes, e cada estudante possui liberdade para escolher assistir as aulas que quiser. Cada aula possui pelo menos dois estudantes. Sabemos que, se duas aulas diferentes tem pelo menos dois estudantes em comum, então o número de estudantes nessas aulas são diferentes. Prove que o número de aulas é menor ou igual a $(n-1)^2$.

Problema 10 **(Teorema de Euler)** Um poliedro é um sólido delimitado por polígonos. Sejam V, A e F as quantidades de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Prove que

$$V - A + F = 2.$$

Problema 11 **(IMO 1998, 2)** Numa competição, existem m atletas e n jurados, com $n \geq 3$ um inteiro ímpar. Cada atleta é julgado por cada jurado como *bom* ou *ruim*. Suponha que cada par de jurados concorda com no máximo k atletas. Prove que

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}.$$

Problema 12 **(MOP Practice Test 2007)** Em uma matriz $n \times n$, cada um dos números em $\{1, 2, \ldots, n\}$ aparece exatamente n vezes. Mostre que existe uma linha ou coluna com pelo menos $\sqrt{n}$ números distintos.

Problema 13 **(USAMO 1995, 5)** Suponha que numa certa sociedade, cada par de pessoas pode ser classificada como *amigável* ou como *hostil*. Dizemos que cada membro de um par amigável é amigo do outro membro e cada membro de um par hostil é inimigo do outro membro. Suponha que a sociedade seja composta por n pessoas e q pares amigáveis, e que, para trio de pessoas, exista ao menos um par hostil. Prove que existe pelo menos um membro da sociedade cujos inimigos formam no máximo $q(1 - 4q/n^2)$ pares amigáveis.

Problema 14 Considere um grafo com n vértices que não possui ciclos de tamanho 4. Mostre que o número de arestas é no máximo $\frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$.

Problema 15 **(IMO 1989, 3)** Sejam n e k inteiros positivos e seja S um conjunto de n pontos no plano tal que não há três pontos de S colineares e, para cada ponto P em S, existem pelo menos k pontos de S que equidistam de P. Prove que

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Problema 16 **(Treinamento Cone Sul 2020, L1, 10)** Em uma circunferência de diâmetro 1 são desenhadas algumas cordas. Sabe-se que a soma dos comprimentos das cordas desenhadas é pelo menos 19. Prove que existe um diâmetro da circunferência intersectando ao menos 7 cordas.

Problema 17 **(Andrei Neguţ, Problems for the Mathematical Olympiads, C1)** Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, cada um deles com pelo menos $\frac{n}{2}$ elementos, e tal que, para todo $i \neq j$, temos $|A_i \cap A_j| \leq \frac{n}{4}$. Prove que

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_k \right| = \frac{k}{k+1} n.$$

Problema 18 **(Pequeno Teorema de Fermat)** Sejam a um inteiro e p um primo, então $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Problema 19 **(Lema de Sperner)** Dividimos um triângulo grande em triângulos menores de modo que qualquer dois dentre os triângulos menores ou não têm ponto em comum, ou têm vértice em comum, ou têm um lado (completo) em comum. Os vértices do triângulos são numerados: 1, 2, 3. Os vértices dos triângulos menores também são numerados: 1, 2 ou 3. A numeração é arbitrária, exceto que os vértices sobre os vértices do triângulo maior oposto ao vértice i não podem receber o número i. Mostre que entre os triângulo menores existe um com os vértices 1, 2 e 3.

§3 Referências

- Combinatória. Luciano Monteiro de Castro. Treinamento para IMO 2018. Eleva.
- Contagem Dupla. Carlos Shine. Curso de Combinatória – Nível 3. POTI.
- Problemas em Contagem Dupla. Davi Lopes. Colóquio de Matemática 2018. Farias Brito.
- Contagem Dupla. Lucas Barros. Treinamento Cone Sul 2018.
- Double Couting. Victoria Krakovna. Canada IMO Summer Training 2010.