N1/2012:

Um conjunto A é admissível se possui a seguinte propriedade:

Se $x, y \in A \Rightarrow x^2 + kxy + y^2 \in A \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}$
(possivelmente $x=y$)

Determine todos os pares (m,n) tais que o único conjunto admissível contendo m e n é $\mathbb{Z}$.

Solução:

- Se $mdc(m,n) = d \neq 1. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ O conjunto $d \cdot \mathbb{Z}$ é admissível e contém m e n.

PS: É admissível pois, se $x, y \in d\cdot\mathbb{Z} \Rightarrow x \equiv y \equiv 0 \pmod d \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + kxy + y^2 \equiv 0 \pmod d \Rightarrow x^2 + kxy + y^2 \in d \cdot \mathbb{Z}$.

- Se $mdc(m,n) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 + k \cdot m \cdot m + m^2 \in A$ e $n^2 + k' n \cdot n + n^2 \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow tm^2 \in A$ e $sn^2 \in A$.

Como $mdc(m,n) = 1 \Rightarrow mdc(m^2, n^2) = 1 \Rightarrow \exists\, t, s \mid tm^2 + sn^2 = 1$.
Fixe t e s com tal propriedade.

$\Rightarrow (tm^2)^2 + 2\, tm^2 \cdot sn^2 + (sn^2)^2 = (tm^2 + sn^2)^2 = 1 \in A$.

$\Rightarrow 1^2 + k \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 = k + 2 \in A \Rightarrow k \in A, \ \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \mathbb{Z}$.

Logo, todos os pares com a propriedade do enunciado são os pares (m,n) com $mdc(m,n) = 1$.

$\square$