

Problemas Sortidos de Geomeria – #2

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1 Questões Interessantes

Problema 1.1. Seja ABC um triângulo e H seu ortocentro. Sejam D um ponto no segmento AC e E um ponto na reta BC tal que BC é perpendicular a DE . Prove que EH é perpendicular a BD se, e somente se, BD passa pelo ponto médio de AE .

Problema 1.2. Seja D o pé da altura relativa a B no triângulo ABC , no qual $AB = 1$. O incírculo do triângulo BCD coincide com o baricentro do triângulo ABC . Calcule os comprimentos dos segmentos AC e BC .

Problema 1.3. Seja P um ponto no interior do ângulo agudo $\angle BAC$. Suponha que $\angle ABP = \angle ACP = 90^\circ$. Os pontos D e E estão nos segmentos BA e CA , respectivamente, de modo que $BD = BP$ e $CP = CE$. Os pontos F e G estão nos segmentos AC e AB , respectivamente, de modo que DF é perpendicular a AB e EG é perpendicular a AC . Mostre que $PF = PG$.

Problema 1.4. Em triângulo escaleno ABC , seja D o pé da altura relativa ao vértice A . Seja M o ponto médio de BC e N a reflexão de M por D . O circuncentro do triângulo AMN intersecta o lado AB em $P \neq A$ e o lado AC em $Q \neq A$. Prove que AN , BQ e CP são concorrentes.

2 Problemas Divertidos

Problema 2.1. As circunferências ω_1 e ω_2 se intersectam nos pontos A e B . O ponto C está na reta tangente por A de ω_1 tal que $\angle ABC = 90^\circ$. Uma reta ℓ passa por C e corta ω_2 nos pontos P e Q . As retas AP e AQ cortam ω_1 novamente em X e Z , respectivamente. Seja Y o pé da altitude de A na reta ℓ . Prove que os pontos X , Y e Z são colineares.

Problema 2.2. O quadrilátero $XABY$ é inscrito na semicircunferência ω com diâmetro XY . Os segmentos AY e BX se intersectam em P . Seja Z a projeção de P em XY . Seja C um ponto em ω tal que a reta XC seja perpendicular a AZ . Seja Q a intersecção entre AY e XC . Prove que

$$\frac{BY}{XP} + \frac{CY}{XQ} = \frac{AY}{AX}.$$

Problema 2.3. Num triângulo acutângulo ABC , o $\angle A$ mede 45° . Sejam O e H são o circuncentro e o ortocentro do triângulo ABC , respectivamente. Seja D é o pé da altura relativa a B no triângulo ABC e seja X o ponto médio do arco AH do circuncírculo do triângulo ADH que contém D . Prove que $DX = DO$.

Problema 2.4. Seja $APBQ$ um quadrilátero inscrito à circunferência ω com $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ e $AP = AQ < BP$. Seja X um ponto variável no segmento PQ . A reta AX intersecta novamente ω em $S \neq A$. Tome T um ponto no arco AQB de ω tal que XT seja perpendicular a AX . Seja M o ponto médio de ST . Ao variar X no segmento PQ , mostre que M varia ao longo de uma circunferência.