Olimpíada Brasileira de Matemática
1998 - 2018

	1	2	3	4	5	6
98						
99						
00						
01						
02						
03						
04						
05						
06						
07						
08						
09						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						

Dia I

Problema 1. Dizemos que um polígono P está *inscrito* em outro polígono Q quando todos os vértices de P pertencem ao perímetro de Q. Também dizemos nesse caso que Q está *circunscrito* a P. Dado um triângulo T, sejam ℓ o máximo valor do lado de um quadrado inscrito em T e L o mínimo valor do lado de um quadrado circunscrito a T. Prove que, para todo triângulo T, vale a desigualdade $L/\ell \geq 2$, e encontre todos os triângulos T para os quais a igualdade ocorre.

Problema 2. Azambuja escreve um número racional q em uma lousa. Uma operação consiste em apagar q e substituí-lo por $q+1$; ou por $q-1$; ou por $\frac{q-1}{2q-1}$ se $q \neq \frac{1}{2}$. O objetivo final de Azambuja é escrever o número $\frac{1}{2018}$ após realizar uma quantidade finita de operações.

a) Mostre que se o número inicial escrito é 0, então Azambuja não poderá alcançar seu objetivo.

b) Encontre todos os números iniciais para os quais Azambuja pode atingir seu objetivo.

Problema 3. Sejam k, n inteiros positivos fixados. Em uma mesa circular, são colocados n pinos numerados sucessivamente com os números $1, \ldots, n$, com 1 e n vizinhos. Sabe-se que o pino 1 é dourado e os demais são brancos. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo, em que uma argola é colocada inicialmente em um dos pinos e a cada passo ela muda de posição. O jogo começa com Bernaldo escolhendo com pino inicial para a argola, e o primeiro passo consiste no seguinte: Arnaldo escolhe um inteiro positivo d qualquer e Bernaldo desloca a argola d pinos no sentido horário ou no sentido anti-horário (as posições são consideradas módulo n, ou seja, os pinos x, y são iguais se e somente se n divide $x - y$). Após isso, a argola muda de pinos de acordo com uma das seguintes regras, a ser escolhida em cada passo por Arnaldo.

Regra 1: Arnaldo escolhe um inteiro positivo d qualquer e Bernaldo desloca a argola d pinos no sentido horário ou no sentido anti-horário.

Regra 2: Arnaldo escolhe um sentido (horário ou anti-horário), e Bernaldo desloca a argola nesse sentido em d ou kd pinos, onde d é o tamanho do último deslocamento realizado.

Arnaldo vence se, após um número finito de passos, a argola é deslocada para o pino dourado. Determine, em função de k, os valores de n para os quais Arnaldo possui uma estratégia que garanta sua vitória, não importando como Bernaldo jogue.

Dia II

Problema 4. Esmeralda escreve $2n$ números reais $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, todos pertencentes ao intervalo $[0,1]$, ao redor de um círculo e multiplica todos os pares de números vizinhos entre si, obtendo, no sentido anti-horário, os produtos $p_1 = x_1x_2$, $p_2 = x_2x_3$, $\ldots$, $p_{2n} = x_{2n}x_1$. Ela soma os produtos de índice par e subtrai os produtos de índice ímpar. Qual é o maior resultado que Esmeralda pode obter?

Problema 5. Considere a sequência em que $a_1 = 1$ e a_n é obtido justapondo ao final da representação decimal de a_{n-1} à representação decimal de n. Ou seja: $a_1 = 1, a_2 = 12, \ldots, a_9 = 123456789, a_{10} = 12345678910$ e assim sucessivamente. Prove que infinitos termos dessa sequência são múltiplos de 7.

Problema 6. Considere $4n$ pontos no plano, sem três colineares. Utilizando esses pontos como vértices, podemos formar $\binom{4n}{3}$ triângulos. Mostre que existe um ponto X do plano que pertence ao interior de pelo menos $2n^3$ desses triângulos.

Dia I

Problema 1.

(a) Mostre que podemos escolher dois racionais p e q entre 0 e 1 tal que, a partir das representações decimais $p = 0.p_1p_2p_3\ldots$ e $q = 0.q_1q_2q_3\ldots$, é possível construir um número irracional $\alpha = 0.a_1a_2a_3\ldots$ tal que, para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$ temos $a_i = p_i$ ou $a_i = q_i$.

(b) Mostre que existem um racional $s = 0.s_1s_2s_3\ldots$ e um irracional $\beta = 0.b_1b_2b_3\ldots$ tal que, para cada $N \geq 2017$, o número de índices $1 \leq i \leq N$ tais que $s_i \neq b_i$ é menor ou igual a $\frac{N}{2017}$.

Problema 2. Seja $n \geq 3$ um inteiro. Prove que, para todo k inteiro, com $1 \leq k \leq \binom{n}{2}$, existe um conjunto A com n elementos inteiros positivos distintos tais que o conjunto $B = \{\text{mdc}(x, y) : x, y \in A, x \neq y\}$ (obtido a partir do máximo divisor comum de todos os pares de elementos distintos de A) contém exatamente k elementos distintos.

Problema 3. Um quadrilátero $ABCD$ tem um círculo inscrito ω e é tal que as semirretas AB e DC se cortam no ponto P e as semirretas AD e BC se cortam no ponto Q. As retas AC e PQ se cortam no ponto R. Seja T o ponto de ω mais próximo da reta PQ. Prove que a reta RT passa pelo incentro do triângulo PQC.

Dia II

Problema 4. Nós vemos, nas figuras 1 e 2, exemplos de bloqueio de tela de um telefone celular que só funciona com uma senha que não é digitada, mas desenhada com segmentos de reta. Esses segmentos formam uma linha poligonal com vértices em um reticulado. Ao desenhar o padrão correspondente à senha, o dedo deve permanecer todo o tempo tocando a tela. Toda a linha poligonal corresponde a uma sequência de algarismos e essa sequência é que é, de fato, a senha. O traçado das poligonais obedece às regras a seguir:

a) O traçado começa por um dos pontos destacados, os quais correspondem aos algarismos de 1 a 9 (figura 3).

b) Cada segmento do padrão deve ter como um dos seus extremos (aquele em que terminamos de traçar o segmento) um ponto que ainda não foi usado.

c) Se um segmento liga dois pontos e contém um terceiro (o seu ponto médio), então o algarismo correspondente a esse terceiro ponto é incluído na senha. Isso não acontece quando esse ponto/algarismo já foi usado.

d) Toda senha tem pelo menos quatro algarismos.

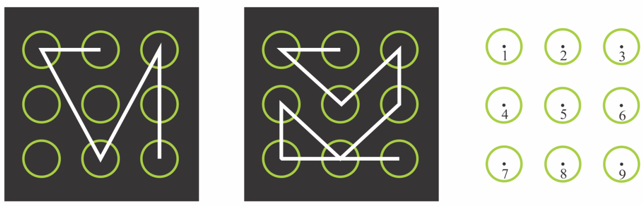


figura 1 figura 2 figura 3

Assim, toda linha poligonal é associada a uma sequência de quatro ou mais algarismos, os quais aparecem na senha na mesma ordem em que são visitados. Na figura 1 acima, por exemplo, a senha é 218369, caso o primeiro ponto visitado tenha sido o 2. Note que o segmento ligando os pontos associados aos algarismos 3 e 9 inclui o ponto associado ao algarismo 6. Se o primeiro ponto visitado fosse o 9, então a senha seria 963812. Se o primeiro ponto visitado fosse o 6, então a senha seria 693812. Note que o 6 seria pulado, já que não poderia repetir. Por outro lado, a linha poligonal da figura 2 é associada a uma única senha.

Determine o menor $n \geq 4$ tal que dado qualquer subconjunto de n algarismos de 1 a 9 é possível elaborar uma senha que envolva exatamente esses algarismos em alguma ordem.

Problema 5. No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definem um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI.

Problema 6. Seja a inteiro positivo e p um divisor primo de $a^3 - 3a + 1$, com $p \neq 3$. Prove que p é da forma $9k + 1$ ou $9k - 1$, sendo k um inteiro.

Dia I

Problema 1. Seja ABC um triângulo. As retas r e s são bissetrizes internas de $\angle ABC$ e $\angle BCA$, respectivamente. Os pontos E sobre r e D sobre s são tais que $AD \parallel BE$ e $AE \parallel CD$. As retas BD e CE se cortam em F. Seja I o incentro do triângulo ABC. Mostre que se os pontos A, F e I são colineares então $AB = AC$.

Problema 2. Encontre o menor n tal que qualquer conjunto de n pontos do plano cartesiano, todos com coordenadas inteiras, contém dois cujo quadrado da distância é um múltiplo de 2016.

Problema 3. Seja k um inteiro positivo fixado. Alberto e Beralto participam do seguinte jogo: dado um número inicial N_0 e começando por Alberto, eles alternadamente fazem a seguinte operação: trocar um número n por um número m tal que $m < n$ e n e m diferem, na sua representação em base 2, exatamente l dígitos consecutivos para algum l tal que $1 \leq l \leq k$. Quem não conseguir jogar perde.

Dizemos que um inteiro não negativo t e *vencedor* quando o jogador que recebe t tem uma estratégia vencedora, ou seja, consegue escolher os números seguintes de modo a garantir a vitória, não importando como o outro jogador faça suas escolhas. Caso contrário, dizemos que t é *perdedor*.

Prove que, para todo N inteiro positivo, a quantidade de inteiros não-negativos perdedores e menores do que 2^N é $2^{N-\lfloor \log_2(\min\{k,N\}) \rfloor}$.

Observação. $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$ e $\lfloor -4,6 \rfloor = -5$.

Dia II

Problema 4. Qual é a maior quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 2016 que podemos escolher de modo que não haja dois números cuja diferença é 1, 2 ou 6?

Problema 5. Considere o polinômio do segundo grau $P(x) = 4x^2 + 12x - 3015$. Defina a sequência de polinômios $P_1(x) = \frac{P(x)}{2016}$ e $P_{n+1}(x) = \frac{P(P_n(x))}{2016}$.

(a) Prove que existe um número real r tal que $P_n(r) < 0$ para todo inteiro positivo n.

(b) Determine a quantidade de inteiros m tais que $P_n(m) < 0$ para infinitos inteiros positivos n

Problema 6. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, não circunscritível, sem lados paralelos. As retas AB e CD se cortam em E. Seja $M \neq E$ a interseção dos circuncírculos de ADE e BCE. As bissetrizes internas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro I e as bissetrizes externas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro J. Prove que I, J e M são colineares.

Dia I

Problema 1. Seja ABC um triângulo escaleno e acutângulo e N o centro do círculo que passa pelos pés das três alturas do triângulo. Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de ABC e que passam por B e C. Prove que A, D e N são colineares se, e somente se, $\angle BAC = 45°$.

Problema 2. Seja $S = 1, 2, 3, \ldots, 6n, n > 1$. Encontre o maior valor de k para o qual a seguinte afirmação é verdadeira: todo subconjunto A de S com $4n$ elementos tem pelo menos k subconjuntos a, b com $a < b$ e b múltiplo de a.

Problema 3. Dado um natural $n > 1$ e sua fatoração em primos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, sua *falsa derivada* é definida por:

$$f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 p_2^{\alpha_2 - 1} \ldots \alpha_k p_k^{\alpha_k - 1}$$

Prove que existem infinitos naturais n tais que $f(n) = f(n-1) + 1$.

Dia II

Problema 4. Seja n um inteiro positivo e sejam $n = d_1 > d_2 > \cdots > d_k = 1$ seus divisores positivos.

a) Prove que

$$d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{k-1} d_k = n - 1$$

se, e somente se, n é primo ou $n = 4$.

b) Determine os três inteiros positivos n para os quais

$$d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{k-1} d_k = n - 4.$$

Problema 5. É verdade que existem um polinômio $f(x)$ de coeficientes racionais, nem todos inteiros, de grau $n > 0$, um polinômio $g(x)$, com todos os coeficientes inteiros, e um conjunto S com $n+1$ inteiros tais que $g(t) = f(t)$ para todo $t \in S$?

Problema 6. Seja ABC um triângulo escaleno e X, Y e Z pontos sobre as retas BC, AC e AB, respectivamente, tais que $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$. Os circuncírculos de BXZ e CXY se cortam em $P \neq X$. Prove que P está sobre a circunferência cujo diâmetro tem extremidades no ortocentro H e no baricentro G de ABC.

Dia I

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja P a interseção das diagonais AC e BD. Os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABP, BCP, CDP e DAP são iguais. Prove que $ABCD$ é um losango.

Problema 2. Encontre todos os inteiros $n > 1$ com a seguinte propriedade: para todo k, $0 \leq k < n$, existe um múltiplo de n cuja soma dos algarismos, na base decimal, deixa resto k na divisão por n.

Problema 3. Seja N um inteiro maior do que 2. Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: há N pedras em uma pilha. Na primeira jogada, feita por Arnaldo, ele deve tirar uma quantidade k de pedras da pilha com $1 \leq k < N$. Em seguida, Bernaldo deve retirar uma quantidade de pedras m da pilha com $1 \leq m \leq 2k$, e assim por diante, ou seja, cada jogador, alternadamente, tira uma quantidade de pedras da pilha entre 1 e o dobro da última quantidade que seu oponente tirou, inclusive. Ganha o jogador que tirar a última pedra.

Para cada valor de N determine qual jogador garante a vitória, independe de como o outro jogar, e explique qual é a estratégia vencedora para cada caso.

Dia II

Problema 4. Uma sequência infinita de polinômios $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots$ é definida por

$$P_0(x) = x \text{ e } P_n(x) = P_{n-1}(x-1) \cdot P_{n-1}(x+1), \text{ para todo } n \geq 1$$

. Determine o maior inteiro k para o qual o polinômio $P_{2014}(x)$ é múltiplo de x^k.

Problema 5. Em cada casa de um tabuleiro $2m \times 2n$ está escrito um inteiro. A operação permitida é tomar três casas formando um L-triminó (ou seja, uma casa C e outras duas casas com um lado em comum com C, um na horizontal e outro na vertical) e somar 1 ao inteiro em cada uma das três casas. Determine a condição necessária e suficiente, em função de m, n e dos números iniciais, para que seja possível deixar todos os números iguais.

Problema 6. Seja ABC um triângulo com incentro I e incírculo ω O círculo ω_A tangencia externamente ω e toca os lados AB e AC em A_1 e A_2. Seja r_A a reta A_1A_2. Defina r_B e r_C de modo análogo. As retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo XYZ. Prove que o incentro de XYZ, o circuncentro de XYC e I são colineares.

Dia I

Problema 1. Seja Γ um círculo a A um ponto exterior a Γ. As retas tangentes a Γ que passam por A tocam Γ em B e C. Seja M o ponto médio de AB. O segmento MC corta Γ novamente em D e a reta AD corta Γ novamente em E. Sendo $AB = a$ e $BC = b$, calcular CE em função de a e b.

Problema 2. Arnaldo e Bernaldo fazem a seguinte brincadeira: dado um conjunto finito de inteiros positivos A fixado, que os dois conhecem, Arnaldo escolhe um número $a \in A$, mas não conta a ninguém qual número escolheu. Em seguida, Bernaldo pode escolher um inteiro positivo b qualquer (b pode pertencer a A ou não). Então Arnaldo fala apenas o número de divisores inteiros positivos do produto ab. Mostre que Bernaldo pode escolher b de modo que consiga descobrir o número a escolhido por Arnaldo.

Problema 3. Encontre todas as funções injetoras $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tais que

$$f(x+y) \cdot (f(x) + f(y)) = f(xy)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^*$ com $x + y \neq 0$.

Dia II

Problema 4. Encontrar o maior valor de n para o qual existe uma sequência $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de algarismos não nulos (ou seja, $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$) tal que, para todo k, $1 \leq k \leq n$, o número de k dígitos $(a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_0) = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_0$ divide o número de $k+1$ dígitos $(a_k a_{k-1} \ldots a_0)$.

Problema 5. Seja x um número irracional entre 0 e 1 e $x = 0, a_1 a_2 \ldots$ a sua representação decimal. Para cada $k \geq 1$, seja $p(k)$ a quantidade de sequências distintas $a_{j+1}a_{j+2}\ldots a_{j+k}$ de k algarismos consecutivos na representação decimal de x. Prove que $p(k) \geq k + 1$ para todo k inteiro positivo.

Problema 6. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F respectivamente. Seja P o ponto de interseção das retas AD e BE. As reflexões de P em relação a EF, FD e DE são X, Y e Z, respectivamente. Prove que as retas AX, BY e CZ têm um ponto comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC.

Dia I

Problema 1. Quando duas amebas vermelhas se juntam, se transformam em uma única ameba azul; quando uma ameba vermelha se junta com uma ameba azul, as duas se transformam em três amebas vermelhas; quando duas amebas azuis se juntam, elas se transformam em quatro amebas vermelhas. Um tubo de ensaio tem inicialmente a amebas azuis e v amebas vermelhas. Determine, em função de a e v, todas as quantidades de amebas possíveis no tubo de ensaio e, para cada quantidade de amebas, as possibilidades de quantidades de amebas de cada cor.

Problema 2. Dado um triângulo ABC, o exincentro relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas de DB e DC. Sejam I_A, I_B e I_C os exincentros do triângulo escaleno ABC relativos a A, B e C, respectivamente, e X, Y e Z os pontos médios de I_BI_C, I_CI_A e I_AI_B, respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Prove que as retas DX, EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente.

Problema 3. Qual é o menor natural n para o qual existe k natural de modo que os 2012 últimos dígitos na representação decimal de n^k são iguais a 1?

Dia II

Problema 4. Determine se existem inteiros positivos n, a_1, a_2, $\ldots$, a_2012, todos maiores ou iguais a 2, tais que

$$n^2 = a_1^2 + a_2^3 + a_3^5 + \cdots + a_i^{p_i} + \cdots + a_{2012}^{p_{2012}},$$

em que p_i é o i-ésimo primo (ou seja, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$).

Problema 5. De quantas maneiras podemos pintar as casas de um tabuleiro $n \times n$ com 4 cores de modo que casas com um lado em comum não tenham a mesma cor e em cada quadrado 2×2 formado por quatro casas em linhas e colunas consecutivas apareçam as quatro cores?

Problema 6. Encontre todas as funções sobrejetoras $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tais que

$$2x \cdot f(f(x)) = (f(f(x)) + x) \cdot f(x)$$

para todo x real positivo.

Dia I

Problema 1. Dizemos que um número inteiro positivo é *chapa* quando ele é formado apenas por algarismos não nulos e a soma dos quadrados de todos os seus algarismos é também um quadrado perfeito. Por exemplo, 221 é chapa pois $2^2+2^2+1^2 = 9$ e todos os seus algarismos são não nulos, 403 não é chapa, pois, apesar de $4^2+0^2+3^2 = 52$, um de seus algarismos de 403 é nulo e 12 não é chapa pois $1^2 + 2^2 = 5$ não é quadrado perfeito.

Prove que, para todo inteiro positivo n, existe um número chapa com exatamente n algarismos.

Problema 2. Um álbum, composto por 2011 figurinhas, está sendo colecionado por 33 amigos. Uma distribuição de figurinhas entre os 33 amigos é incompleta quando existe pelo menos uma figurinha que nenhum dos 33 amigos tem. Determinar o menor valor de m com a seguinte propriedade: toda distribuição de figurinhas entre os 33 amigos tal que, para quaisquer dois dos amigos, faltam, para ambos, pelo menos m figurinhas em comum, é incompleta.

Problema 3. Mostre que, para todo pentágono convexo $P_1P_2P_3P_4P_5$ de área 1, existem dois triângulos $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ e $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ (em que $P_6 = P_1$ e $P_7 = P_2$), formados por três vértices consecutivos do pentágono, tais que

$$\mathrm{A}(P_iP_{i+1}P_{i+2}) \leq \frac{5-\sqrt{5}}{10} \leq \mathrm{A}(P_jP_{j+1}P_{j+2})$$

Dia II

Problema 4. Existem 2011 inteiros positivos $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2011}$ tais que, para todo $1 \leq i < j \leq 2011$, $\mathrm{mdc}(a_i, a_j) = a_j - a_i$?

Problema 5. Seja ABC um triângulo acutângulo e H seu ortocentro. As retas BH e CH cortam AC e AB em D e E, respectivamente. O circuncírculo de ADE corta o circuncírculo de ABC em $F \neq A$. Provar que as bissetrizes internas de $\angle BFC$ e $\angle BHC$ se cortam em um ponto sobre o segmento BC.

Problema 6. Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2011}$ reais não negativos cuja soma é $\frac{2011}{2}$. Prove que

$$\left|\prod_{\text{cic}}(x_i - x_{i+1})\right| = |(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_{2010} - x_{2011}) + (x_{2011} - x_1)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Dia I

Problema 1. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(a+b) = f(ab)$$

para todos a, b irracionais.

Problema 2. Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes reais. Prove que existem inteiros positivos n e k tais que k tem n dígitos e mais de $P(n)$ divisores positivos.

Problema 3. Qual é a maior sombra que um cubo sólido de aresta 1 pode ter, no sol a pino?

Observação: Entende-se "maior sombra de uma figura no sol a pino" como a maior área possível para a projeção ortogonal da figura sobre um plano.

Dia II

Problema 4. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M e N os pontos médios dos lados CD e AD, respectivamente. As retas perpendiculares a AB passando por M e a BC passando por N cortam-se no ponto P. Prove que P pertence à diagonal BD se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

Problema 5. Determine todos os valores de n para os quais existe um conjunto S de n pontos, sem que haja três deles colineares, com a seguinte propriedade: é possível pintar todos os pontos de S de modo que todos os ângulos determinados por três pontos de S, todos da mesma cor ou de três cores diferentes, não sejam obtusos. A quantidade de cores disponíveis é ilimitada.

Problema 6. Encontre todos os pares (a, b) de inteiros positivos tais que

$$3^a = 2b^2 + 1.$$

Dia I

Problema 1. Esmeralda escreve 2009^2 números inteiros em uma tabela com 2009 linhas e 2009 colunas, colocando um número em cada casa da tabela. Ela soma corretamente os números em cada linha e em cada coluna, obtendo 4018 resultados. Ela percebeu que os resultados são todos distintos. É possível que esses resultados sejam todos quadrados perfeitos?

Problema 2. Considere um primo q da forma $2p + 1$, sendo $p > 0$ um primo. Prove que existe um múltiplo de q cuja soma dos algarismos na base decimal é menor ou igual a 3.

Problema 3. São colocadas 2009 pedras em alguns pontos (x, y) de coordenadas inteiras do plano cartesiano. Uma operação consiste em escolher um ponto (a, b) que tenha quatro ou mais pedras, retirar quatro pedras de (a, b) e colocar uma pedra em cada um dos pontos

$$(a, b - 1), (a, b + 1), (a - 1, b), (a + 1, b).$$

Mostre que, após um número finito de operações, cada ponto terá no máximo três pedras. Além disso, prove que a configuração final não depende da ordem das operações.

Dia II

Problema 4. Mostre que existe um inteiro positivo n_0 com a seguinte propriedade: para qualquer inteiro $n \geq n_0$ é possível particionar um cubo em n cubos menores.

Problema 5. Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. As retas AB e AC cortam o circuncírculo de OBC novamente em $B_1 \neq B$ e $C_1 \neq C$, respectivamente, as retas BA e BC cortam o circuncírculo de OAC em $A_2 \neq A$ e $C_2 \neq C$, respectivamente, e as retas CA e CB cortam o circuncírculo de OAB em $A_3 \neq A$ e $B_3 \neq B$, respectivamente. Prove que as retas A_2A_3, B_1B_3 e C_1C_2 passam por um mesmo ponto.

Problema 6. Seja $n > 3$ um inteiro fixado e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos. Encontre, em função de n, todos os possíveis valores reais de

$$\frac{x_1}{x_n + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_n + x_1}$$

Dia I

Problema 1. Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \cdot 7$. Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

Problema 2. Sobre uma reta há um conjunto S de $6n$ pontos. Destes, $4n$ são escolhidos ao acaso e pintados de azul; os $2n$ demais são pintados de verde. Prove que existe um segmento que contém exatamente $3n$ pontos de S, sendo $2n$ pintados de azul e n pintados de verde.

Problema 3. Sejam x, y, z reais quaisquer tais que $x + y + z = xy + yz + zx$. Encontre o valor mínimo de

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1}$$

Dia II

Problema 4. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e r e s as retas simétricas à reta AB em relação às bissetrizes internas dos ângulos $\angle CAD$ e $\angle CBD$, respectivamente. Sendo P a interseção de r e s e O o centro do círculo circunscrito a $ABCD$, prove que OP é perpendicular a CD.

Problema 5. Prove que para quaisquer inteiros $a > 1$ e $b > 1$ existe uma função f dos inteiros positivos nos inteiros positivos tal que $f(a \cdot f(n)) = b \cdot n$ para todo n inteiro positivo.

Problema 6. O profeta venusiano Zabruberson enviou a seus discípulos uma palavra de 10000 letras, sendo cada uma delas A ou E: a *Palavra Zabrúbica*. Seus seguidores passaram a considerar, para $1 \le k \le 10000$, cada palavra formada por k letras consecutivas da Palavra Zabrúbica uma *palavra profética* de tamanho k. Sabe-se que há no máximo 7 palavras proféticas de tamanho 3. Determine o número máximo de palavras proféticas de tamanho 10.

Dia I

Problema 1. Seja $f(x) = x^2 + 2007x + 1$. Prove que, para todo n inteiro positivo, a equação

$$f(f(\cdots(f(x))\cdots)),$$

onde f é aplicada n vezes, tem pelo menos uma solução real.

Problema 2. Para quantos números inteiros c, $-2007 \leq c \leq 2007$, existe um inteiro x tal que $x^2 + c$ é múltiplo de 2^{2007}?

Problema 3. São dados n pontos no plano, os quais são os vértices de um polígono convexo. Prove que o conjunto das medidas dos lados e das diagonais do polígono tem pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ elementos distintos.

Observação: $\lfloor x \rfloor$ denota o maior número inteiro que não excede x. Por exemplo, $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ e $\lfloor -1,2 \rfloor = -2$.

Dia II

Problema 4. Arrumam-se 2007^2 quadradinhos iguais, formando um tabuleiro 2007×2007. Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: cada jogada de Arnaldo consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2×2. Cada jogada de Bernaldo consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Os jogadores jogam alternadamente, sendo Arnaldo o primeiro a jogar. Quando Arnaldo não puder fazer sua jogada, Bernaldo fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. É possível que Bernaldo ganhe o jogo, não importando como Arnaldo jogue?

Problema 5. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, P a interseção das retas AB e CD, Q a interseção das retas AD e BC e O a interseção das diagonais AC e BD. Prove que se $\angle POQ$ é um ângulo reto então PO é bissetriz de $\angle AOD$ e QO é bissetriz de $\angle AOB$.

Problema 6. Dados números reais $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, suponha que todo número real ocorre no máximo duas vezes entre as diferenças $x_j - x_i$, com $1 \leq i < j \leq n$. Prove que há pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ números reais que ocorrem exatamente uma vez entre tais diferenças.

Observação: $\lfloor x \rfloor$ denota o maior número inteiro que não excede x. Por exemplo, $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ e $\lfloor -1,2 \rfloor = -2$.

Dia I

Problema 1. Seja ABC um triângulo, P o pé da bissetriz interna relativa ao lado AC e I seu incentro. Se $AP + AB = CB$, prove que API é um triângulo isósceles.

Problema 2. Seja n um inteiro, $n \geq 3$. Definimos $f(n)$ como a maior quantidade possível de triângulos isósceles cujos vértices pertencem a algum conjunto de n pontos do plano sem três pontos colineares. Prove que existem constantes positivas a e b tais que $an^2 < f(n) < bn^2$, para todo n inteiro, $n \geq 3$.

Problema 3. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$$

para todos x e y reais.

Dia II

Problema 4. Um número inteiro positivo é *arrojado* quando tem 8 divisores positivos cuja soma é 3240. Por exemplo, o número 2006 é arrojado porque seus 8 divisores positivos, 1, 2, 17, 34, 59, 118, 1003 e 2006, somam 3240. Encontre o menor número inteiro positivo arrojado.

Problema 5. Seja P um polígono convexo de 2006 lados. As 1003 diagonais ligando vértices opostos e os 1003 segmentos que ligam os pontos médios dos lados opostos são concorrentes, ou seja, todos os 2006 segmentos possuem um ponto em comum. Prove que os lados opostos de P são paralelos e congruentes.

Problema 6. O professor Piraldo participa de jogos de futebol em que saem muitos gols e tem uma maneira peculiar de julgar um jogo. Um jogo com placar de m gols a n gols, $m \geq n$, é dito equilibrado quando $m \leq f(n)$, sendo $f(n)$ definido por $f(0) = 0$ e, para $n \geq 1$, $f(n) = 2n - f(r) + r$, onde r é o maior inteiro tal que $r < n$ e $f(r) \leq n$.

Sendo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, prove que um jogo com placar de m gols a n, $m \geq n$, está equiliblado se $m \leq \phi n$ e não está equilibrado se $m \geq \phi n + 1$

Dia I

Problema 1. Um número natural é palíndromo quando se obtém o mesmo número ao escrevermos os seus dígitos na ordem inversa. Por exemplo, 481184, 131 e 2 são palíndromos. Determine todos os pares de inteiros positivos (m, n) tais que

$$(11\cdots 1)\cdot(11\cdots 1)$$

é palíndromo, onde o primeiro número possui m algarismos 1 e o segundo possui n algarismos 1.

Problema 2. Determine o menor número real C para o qual a desigualdade

$$C(x_1^{2005}+x_2^{2005}+x_3^{2005}+x_4^{2005}+x_5^{2005})\le x_1x_2x_3x_4x_5(x_1^{125}+x_2^{125}+x_3^{125}+x_4^{125}+x_5^{125})^{16}$$

é válida para todos os números reais positivos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Problema 3. Dizemos que um quadrado está contido em um cubo quando todos os seus pontos estão nas faces ou no interior do cubo. Determine o maior $l > 0$ tal que existe um quadrado de lado l contido num cubo de aresta 1.

Dia II

Problema 4. Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias carregadas para funcionar. Supondo que não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, determine o menor número de tentativas suficiente para garantirmos que o rádio funcione. Uma tentativa consiste em colocar duas das baterias no rádio e verificar se ele, então, funciona.

Problema 5. Sejam ABC um triângulo acutângulo e F o seu ponto de Fermat, isto é, o ponto interior ao triângulo ABC tal que os três ângulos $\angle AFB$, $\angle BFC$ e $\angle CFA$ medem 120 graus. Para cada um dos triângulos ABF, ACF e BCF trace a sua reta de Euler, ou seja, a reta que liga o seu circuncentro e o seu baricentro. Prove que essas três retas concorrem em um ponto.

Problema 6. Dados a, c inteiros positivos e b inteiro, prove que existe x inteiro positivo tal que

$$a^x + x \equiv b \pmod{c}$$

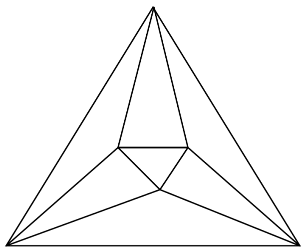
ou seja, existe x inteiro positivo tal que c é um divisor de $a^x + x - b$.

Dia I

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Prove que os incírculos de ABC, BCD, CDA e DAB têm um ponto em comum se, e somente se, $ABCD$ é um losango.

Problema 2. Determine todos os valores de n tais que é possível dividir um triângulo em n triângulos de modo que não haja três vértices alinhados e em cada vértice incida o mesmo número de segmentos.

Mostramos a seguir tal divisão para $n = 7$. Observe que em cada um dos seis vértices incidem quatro segmentos.



Problema 3. Seja $x_1, x_2, \ldots, x_{2004}$ uma sequência de números inteiros satisfazendo

$$x_{k+3} = x_{k+2} + x_{k+1}x_k, \quad 1 \leq k \leq 2001$$

É possível que mais da metade de seus termos sejam negativos?

Dia II

Problema 4. Considere todas as maneiras de colocarmos nas casas de um tabuleiro 10×10 exatamente dez vezes cada um dos algarismos $0, 1, 2, \ldots, 9$. Encontre o maior inteiro n com a propriedade de que, em cada tabuleiro, alguma linha ou alguma coluna contenha pelo menos n algarismos diferentes.

Problema 5. Considere a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

$$a_n a_{n-4} = a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2$$

Mostre que todos os termos dessa seqüência são números inteiros.

Problema 6. Sejam a e b números reais. Considere a função $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f_{a,b}(x; y) = (a - by - x^2; x)$. Sendo $P = (x; y) \in \mathbb{R}^2$, definimos $f_{a,b}^0(P) = P$ e $f_{a,b}^{k+1}(P) = f_{a,b}(f_{a,b}^k(P))$, para k inteiro não negativo.

O conjunto $per(a; b)$ dos *pontos periódicos* da função $f_{a,b}$ é o conjunto dos pontos P de $\mathbb{R}^2$ para os quais existe um inteiro positivo n tal que $f_{a,b}^n(P) = P$.

Fixando o real b, prove que o conjunto $A_b = \{a \in \mathbb{R} \mid per(a, b) \neq \varnothing\}$ tem um menor elemento. Calcule esse menor elemento.

Dia I

Problema 1. Determine o menor número primo positivo que divide $x^2 + 5x + 23$ para algum inteiro x.

Problema 2. Seja S um conjunto de n elementos. Determine o menor inteiro positivo k com a seguinte propriedade: dados quaisquer k subconjuntos distintos $A_1, A_2, \dots, A_k$ de S, existe uma escolha adequada dos sinais $+$ e $-$ de modo que $S = A_1^{\pm} \bigcup A_2^{\pm} \bigcup \cdots \bigcup A_k^{\pm}$, onde $A_i^+ = A$ e $A_i^- = S - A$ é o complementar de A_i em relação a S.

Problema 3. Seja $ABCD$ um losango. Sejam E, F, G e H pontos sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, e tais que as retas EF e GH são tangentes à circunferência inscrita no losango. Prove que as retas EH e FG são paralelas.

Dia II

Problema 4. São dados: uma circunferência K e um ponto A interior, fixo, distinto do centro. Determine os pontos B, C e D sobre a circunferência de forma que a área do quadrilátero $ABCD$ seja a maior possível.

Problema 5. Suponha que $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satizfaz:

i) $x < y \implies f(x) < f(y)$

ii) $f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, para todo $x, y \in (0, +\infty)$

Prove que existe $x_0 \in (0, +\infty)$ tal que $f(x_0) < 0$.

Problema 6. Um grafo cujo conjunto de vértices V tem n elementos é bacana se existir um conjunto $D \subset N$ e uma função injetiva $f : V \to [1, n^2/4] \cap N$ tal que os vértices p e q são ligados por uma aresta se e somente se $|f(p) - f(q)| \in D$.

Mostre que existe $n_0 \in N$ tal que para todo $n \geq n_0$ existem grafos com n vértices que não são bacanas.

Observação: Um grafo com conjunto de vértices V é um par (V, E) onde E é um conjunto de subconjuntos de V, todos com exatamente dois elementos. Um conjunto $\{p, q\}$ é chamado de *aresta* se pertencer a E e neste caso dizemos que esta aresta liga os vértices p e q.

Dia I

Problema 1. Mostre que existe um conjunto A formado por inteiros positivos tendo as seguintes propriedades:

a) A tem 2002 elementos.

b) A soma de qualquer quantidade de elementos distintos de A (pelo menos um) nunca é uma potência perfeita.

Observação. Uma potência perfeita é um número da forma a^b, onde a e b são inteiros positivos e $b \geq 2$.

Problema 2. $ABCD$ é um quadrilátero convexo e inscritível e M é um ponto sobre o lado CD, tal que o triângulo ADM e o quadrilátero $ABCM$ têm a mesma área e o mesmo perímetro. Prove que $ABCD$ tem dois lados de comprimentos iguais.

Problema 3. Numeramos as casas de um tabuleiro quadriculado $m \times n$, onde $m, n \geq 2$, com os inteiros $1, 2, 3, \ldots, mn$ de modo que, para todo $i \leq mn - 1$, as casas i e $i + 1$ tenham um lado em comum.

Prove que existe $i \leq mn - 3$ tal que as casas i e $i + 3$ têm um lado em comum.

Dia II

Problema 4. Definimos o diâmetro de um subconjunto não vazio de $\{1, 2, \ldots, n\}$ como a diferença entre seu maior elemento e seu menor elemento (em módulo). Calcule a soma dos diâmetros de todos os subconjuntos não vazios de $1, 2, \ldots, n$.

Problema 5. Temos um número finito de quadrados, de área total 4. Prove que é possível arranjá-los de modo a cobrir um quadrado de lado 1.

Obs: É permitido sobrepor quadrados e parte deles pode ultrapassar os limites do quadrado a ser coberto.

Problema 6. Arnaldo e Beatriz se comunicam durante um acampamento usando sinais de fumaça, às vezes usando uma nuvem grande, às vezes uma pequena. No tempo disponível antes do café da manhã, Arnaldo consegue enviar uma sequência de 24 nuvens. Como Beatriz nem sempre consegue distinguir uma nuvem pequena de uma grande, ela e Arnaldo fizeram um dicionário antes de ir para o acampamento. No dicionário aparecem N sequências de 24 tamanhos de nuvem (como por exemplo a sequência PGPGPGPGPGPGGPGPGPGPGPGP, onde G significa nuvem grande e P significa nuvem pequena). Para cada uma das N sequências, o dicionário indica seu significado. Para evitar interpretações erradas, Arnaldo e Beatriz evitaram incluir no dicionário sequências parecidas. Mais precisamente, duas sequências no dicionário sempre diferem em pelo menos 8 das 24 posições. Demonstre que $N \leq 4096$.

Dia I

Problema 1. Prove que, para quaisquer números reais positivos a, b e c,

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Problema 2. Dado um inteiro $a_0 > 1$ definimos uma seqüência $(a_n)_{n\geq 0}$ a da seguinte forma; para cada $k \geq 0$, a_{k+1} é o menor inteiro $a_{k+1} > a_k$ tal que $\text{mdc}(a_{k+1}, a_0 \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_k) = 1$. Diga para quais valores de a_0 temos que todos os termos a_k da seqüência são primos ou potências de primos.

Problema 3. E e F são pontos do lado AB, do triângulo ABC, tais que $AE = EF = FB$. D é ponto da reta BC tal que BC é perpendicular a ED. AD é perpendicular a CF. Os ângulos $\angle BDF$ e $\angle CFA$ medem x e $3x$, respectivamente. Calcule a razão DB/DC.

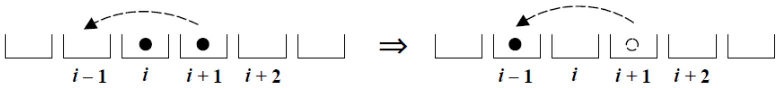
Dia II

Problema 4. Uma calculadora tem o número 1 na tela. Devemos efetuar 2001 operações, cada uma das quais consistindo em pressionar a tecla *sen* ou a tecla *cos*. Essas operações calculam respectivamente o seno e o cosseno com argumentos em radianos. Qual é o maior resultado possível depois das 2001 operações?

Problema 5. Em um quadrilátero convexo, a *altura* em relação a um lado é definida como a perpendicular a esse lado passando pelo ponto médio do lado oposto. Prove que as quatro alturas têm um ponto comum se e somente se o quadrilátero é inscritível, isto é, se e somente se existe uma circunferência que contém seus quatro vértices.

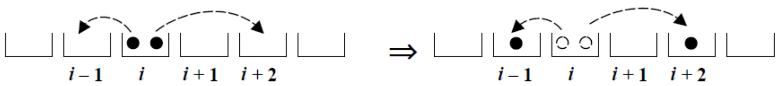
Problema 6. Temos uma fileira longa de copos e n pedras no copo central (copo 0). Os seguintes movimentos são permitidos:

Movimento tipo A



Se há pelo menos uma pedra no copo i e pelo menos uma no copo $i+1$ podemos fazer uma pedra que está no copo $i+1$ pular para o copo $i-1$ eliminando uma pedra do copo i.

Movimento tipo B



Se há pelo menos duas pedras no copo i podemos pular uma para o copo $i+2$ e uma outra para o copo $i-1$.

Demonstre o seguinte fato: fazendo os movimentos tipo A ou B durante um tempo suficientemente longo sempre chegaremos a uma configuração a partir da qual não é mais possível fazer nenhum desses dois tipos de movimento. Além disso essa configuração final não depende da escolha de movimentos durante o processo.

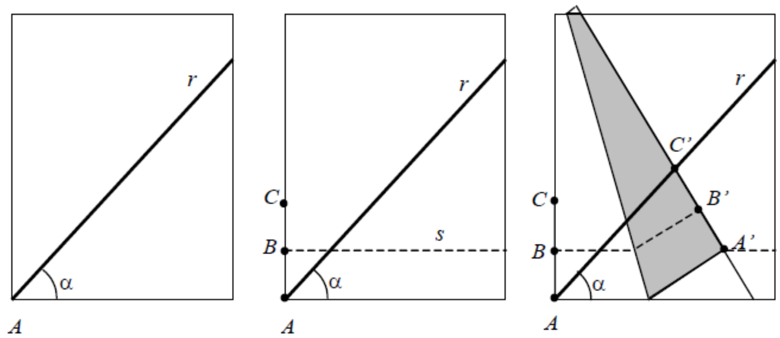
Dia I

Problema 1. Em uma folha de papel a reta r passa pelo canto A da folha e forma um ângulo α com a borda horizontal, como na figura 1. Para dividir este ângulo α em três partes iguais, executaremos as seguintes construções:

a) inicialmente, marcamos dois pontos B e C sobre a borda vertical de modo que $AB = BC$; pelo ponto B traçamos a reta s paralela à borda (figura 2);

b) a seguir, dobramos o papel, ajustando-o de modo que o ponto C coincida com um ponto C' sobre a reta r e o ponto A coincida com um ponto A' sobre a reta s (figura 3); chamamos de B' o ponto com o qual B coincide.

Mostre que as retas AA' e AB' dividem o ângulo α em três partes iguais.



Problema 2. Seja $\sigma(n)$ a soma de todos os divisores positivos de n, onde n é um inteiro positivo (por exemplo, $\sigma(6) = 12$ e $\sigma(11) = 12$). Dizemos que n é *quase perfeito* se $\sigma(n) = 2n - 1$ (por exemplo, 4 é quase perfeito, pois $\sigma(4) = 7$) Sejam $n \mod k$ o resto da divisão de n por k e $s(n) = \sum_{k=1}^{n} n \mod k$ (por exemplo, $s(6) = 0+0+0+2+1+0 = 3$ e $s(11) = 0+1+2+3+1+5+4+3+2+1+0 = 22$).

Prove que n é quase perfeito se, e somente se, $s(n) = s(n-1)$.

Problema 3. Seja f uma função definida nos inteiros positivos da seguinte forma: Dado n, escrevemos $n = 2^a \cdot (2b+1)$, com a e b inteiros e definimos $f(n) = a^2 + a + 1$. Determine o menor inteiro positivo n tal que $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \geq 123456$.

Dia II

Problema 4. A avenida Providência tem infinitos semáforos igualmente espaçados e sincronizados. A distância entre dois semáforos consecutivos é de 1.500m. Os semáforos ficam abertos por 1min 30s, depois fechados por 1 min, depois abertos por 1 min 30s e assim sucessivamente.

Suponha que um carro trafegue com velocidade constante igual a v, em m/s, pela avenida Providência.

Para quais valores de v é possível que o carro passe por uma quantidade arbitrariamente grande de semáforos sem parar em qualquer um deles?

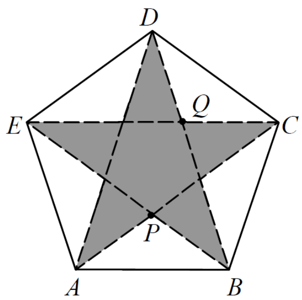
Problema 5. Seja X o conjunto de todas as sequências $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{2000})$ tais que $a_i \in 0, 1, 2$ se $1 \leq i \leq 1000$ e $a_i \in 0, 1$ se $1001 \leq i \leq 2000$. Dados A e B em X, definimos a distância $d(A, B)$ entre A e B como sendo o número de valores de i, $1 \leq i \leq 2000$, tais que $a_i \neq b_i$. Determine o número de funções $f : X \to X$ que preservam distância, isto é, tais que $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$, para quaisquer A e B em X.

Problema 6. Seja C um cubo de madeira. Para cada um dos 28 pares de vértices de C cortamos o cubo C pelo plano mediador dos dois vértices do par. Em quantos pedaços fica dividido o cubo?

Nota: Dados dois pontos A e B no espaço, o plano mediador de A e B é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a A e B são iguais. Em outras palavras: é o plano perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto médio de AB.

Dia I

Problema 1. Seja $ABCDE$ um pentágono regular tal que a estrela $ACEBD$ tem área 1. Sejam P interseção entre AC e BE e Q a interseção entre BD e CE. Determine a área de $APQD$.



Problema 2. Prove que há pelo menos um algarismo diferente de zero entre a 1000000ª e a 3000000ª casa decimal de $\sqrt{2}$ após a vírgula.

Problema 3. Temos um tabuleiro quadrado 10×10. Desejamos colocar n peças em casas do tabuleiro de tal forma que não existam 4 peças formando em retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro. Determine o maior valor de n para o qual é possível fazer esta construção.

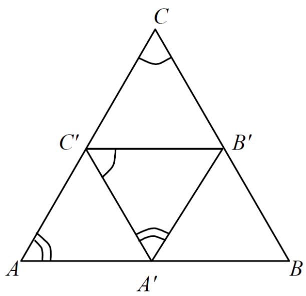
Dia II

Problema 4. O planeta *Zork* é esférico e tem várias cidades. Dada qualquer cidade existe uma cidade antípoda (i.e., simétrica em relação ao centro do planeta). Existem em *Zork* estradas ligando pares de cidades. Se existe uma estrada ligando as cidades P e Q então também existe uma estrada ligando as cidades P' e Q', onde P' é a antípoda de P e Q' é a antípoda de Q. Além disso, estradas não se cruzam e dadas duas cidades P e Q sempre é possível viajar de P a Q usando alguma sequência de estradas.

O preço da *Kriptonita* em *Urghs* (a moeda planetária) em duas cidades ligadas por uma estrada difere por no máximo 100 *Urghs*. Prove que existem duas cidades antípodas onde o preço da *Kriptonita* difere por no máximo 100 *Urghs*.

Problema 5. Em Tumbólia existem n times de futebol. Deseja-se organizar um campeonato em que cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros. Todos os jogos ocorrem aos domingos, e um time não pode jogar mais de uma vez no mesmo dia. Determine o menor inteiro positivo m para o qual é possível realizar um tal campeonato em m domingos.

Problema 6. Dado triângulo ABC mostre como construir com régua e compasso um triângulo $A'B'C'$ de área mínima com $C' \in AC$, $A' \in AB$ e $B' \in BC$ tal que $\angle B'A'C' = \angle BAC$ e $\angle A'C'B' = \angle ACB$.



Dia I

Problema 1. São dados 15 números naturais maiores que 1 e menores que 1998 tais que dois quaisquer são primos entre si. Mostre que pelo menos um desses 15 números é primo.

Problema 2. No triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E o ponto do lado BC tal que $BE = 2EC$. Dado que os ângulos $\angle ADC$ e $\angle BAE$ são iguais, encontre o ângulo $\angle BAC$.

Problema 3. Duas pessoas disputam um jogo da maneira descrita a seguir. Inicialmente escolhem dois números naturais: $n \geq 2$ (o número de rodadas) e $t \geq 1$(o incremento máximo). Na primeira rodada o jogador A escolhe um natural $m1 > 0$ e, posteriormente, o jogador B escolhe um natural positivo $n1 \neq m1$ Para $2 \leq k \leq n$, na rodada k o jogador A escolhe um natural m_k com $m_{k-1} < m_k \leq mk - 1 + t$ e posteriormente o jogador B escolhe um natural n_k com $n_{k-1} < n_k \leq n_{k-1} + t$. Após essas escolhas, nessa k-ésima rodada, o jogador A ganha $\text{mdc}(m_k, n_{k-1})$ pontos e o jogador B ganha $\text{mdc}(m_k, n_k)$ pontos. Ganha o jogo o jogador com maior pontuação total ao fim das n rodadas. Em caso de pontuações totais iguais o jogador A é considerado vencedor. Para cada escolha de n e t, determine qual dos jogadores possui estratégia vencedora.

Dia II

Problema 4. Dois meninos jogam o seguinte jogo. O primeiro escolhe dois números inteiros diferentes de zero e o segundo monta uma equação do segundo grau usando como coeficientes os dois números escolhidos pelo primeiro jogador e 1998, na ordem que quiser (ou seja, se o primeiro jogador escolhe a e b o segundo jogador pode montar a equação $1998x^2 + ax + b = 0$, ou $bx^2 + 1998x + a = 0$, etc.)

O primeiro jogador é considerado vencedor se a equação tiver duas raízes racionais diferentes.

Mostre que o primeiro jogador pode ganhar sempre.

Problema 5. Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfazem

$$f(2f(x)) = x + 1998$$

para todo $x \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Problema 6. Dois matemáticos, perdidos em Berlim, chegam à esquina da rua Barbarossa com a rua Martin Luther, e precisam chegar à esquina da rua Meininger com a rua Martin Luther. Infelizmente eles não sabem para que lado fica a rua Meininger, nem a que distância ela está, e eles são obrigados portanto a ir e voltar ao longo da rua Martin Luther até chegaram à esquina desejada.

Qual é o menor valor para o número positivo K tal que eles podem ter certeza de que se há N quarteirões (ou quadras) entre as ruas Barbarossa e Meininger então eles conseguem chegar ao destino andando no máximo KN quarteirões (ou quadras)?