Problemas Húngaros – Kürschák Competition

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1 (Kürschák 2017, 1)

Seja ABC um triângulo. A', B' e C' são escolhidos nos segmentos BC, CA e AB, de maneira independente e seguindo numa distribuição uniforme. Para um ponto Z no plano, seja $p(Z)$ a probabilidade de Z estar contido no interior do triângulo formado pelas retas AA', BB' e CC'. Para qual ponto Z no interior do triângulo ABC o valor de $p(Z)$ é máximo?

Esboço. Defina AZ_1, BZ_2, CZ_3 como as medianas do triângulo ABC que passam por Z.

Defina $a := BZ_1/CZ_1, b := CZ_2/AZ_2, c := AZ_3/BZ_3$. Usando Ceva, $abc = 1$.

Descubra que

$$p(Z) = \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} = \frac{2}{2 + a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}} \leq \frac{1}{4},$$

com igualdade quando $a = b = c = 1$, isto é, quando Z é o baricentro de ABC.

Problema 2 (Kürschák 2017, 2)
Existem polinômios $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p^3(x) - q^2(x)$ é linear, mas não constante?

Esboço.

$$p^3(x) - q^2(x) = ax + b$$

$$p^3\left(\frac{1}{a}(ax+b) - \frac{b}{a}\right) - q^2\left(\frac{1}{a}(ax+b) - \frac{b}{a}\right) = ax + b$$

Faça $r(x) = p\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right)$ e $s(x) = q\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right)$.

$$r^3(x) - x = s^2(x)$$

$$3r^2(x)r'(x) - 1 = 2s(x)s'(x)$$

Isso implica que $s(x)$ divide $3r'(x)x - r(x)$. Comparando graus,

$$3r'(x)x = r(x).$$

Comparando coeficientes líderes, o grau de r é $1/3$. Absurdo!

Problema 3 (Kürschák 2016, 2)

Prove que, para qualquer conjunto finito A de inteiros positivos, existe um subconjunto B de A que satisfaz as seguintes condições:

(i) se $b_1, b_2 \in B$ são distintos, então nem b_1 e b_2 nem $b_1 + 1$ e $b_2 + 1$ são mutiplos um do outro;

(ii) para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que a divide b ou $b + 1$ divide $a + 1$.

Problema 4 (Kürschák 2015, 2 ↗)

Seja ABC um triângulo e seja D um ponto no segmento AB. Seja I um ponto no interior do triângulo $\triangle ABC$ sobre a bissetriz de $\angle ACB$. Sejam P, Q as segundas intersecções das retas AI, CI com o circuncírculo de ACD, respectivamente. Analogamente, sejam R, S as segundas intersecções das retas BI, CI com a circuncírculo de BCD, respectively. Mostre que, se $P \neq Q$ e $R \neq S$, então as retas AB, PQ e RS são concorrentes ou paralelas.

Esboço. Seja I' o conjugado isogonal de I. Mostrar que a construção $DQSX \sim CABI'$ acaba o problema.

Problema 5 (Kürschák 2016, 3)

Se $p, q \in \mathbb{R}[x]$ satisfazem $p(p(x)) = q(x)^2$, é verdade que $p(x) = r(x)^2$ para algum $r \in \mathbb{R}[x]$?

Problema 6 (Kürschák 2014, 3)

Seja K um polígono convexo, e seja X um ponto no plano de K. Mostre que existe uma sequência finita de reflexões em relação aos lados de K, tal que K contêm a imagem de X após essas reflexões.