N4/2009: Folha 1

Seja $b_i = a_i + 1$. Podemos substituir por:

$$b_{k+1} \cdot b_{k-1} = (b_k - 1)^2 + 1 \qquad ; k = 2, \ldots, n-1.$$

Suponha que $n \geq 4$. Então:

$$b_3 \cdot b_1 = (b_2 - 1)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad b_3 \mid (b_2-1)^2 + 1$$

$$b_4 \cdot b_2 = (b_3 - 1)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad b_2 \mid (b_3-1)^2 + 1$$

Vamos analisar $\begin{cases} x \mid (y-1)^2 + 1 & (1) \\ y \mid (x-1)^2 + 1 & (2) \end{cases}$

Suponha que existe solução (x, y), com $x > y$. Seja $x' = \frac{(y-1)^2+1}{x} > 0$.

$\mathrm{mdc}(x,y) = 1$

x' é inteiro, por (1). $x' \mid (y-1)^2 + 1$, pois $x' \cdot x = (y-1)^2 + 1$.

$$(x'-1)^2 + 1 \underset{y}{\equiv} (((y-1)^2+1) \cdot x^{-1} - 1)^2 + 1 \underset{y}{\equiv} (2x^{-1} - 1)^2 + 1 \underset{y}{\equiv} 4x^{-2} - 4x^{-1} + 2 \underset{y}{\equiv}$$

$$\underset{y}{\equiv} x^{-2}(4 - 4x + 2x^2) \underset{y}{\equiv} x^{-2} \cdot 2\left(1 + (x-1)^2\right) \underset{y}{\equiv} 0.$$

Logo, existe outra solução (y, x'), com $y > x'$. (*)

Podemos, portanto criar infinitas soluções da forma (x_i, x_{i+1}), com $x_0 = x$; $x_1 = y$ e $x_i > x_{i+1} > 0$. Absurdo!

Logo, $\mathrm{mdc}(x,y) \neq 1$. Mas, se $\mathrm{mdc}(x,y) = k \Rightarrow kx' \mid (ky'-1)^2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \mid 2 \Rightarrow k = 2.$

$\Rightarrow$ x e y pares

(*) Pois $x' \cdot x = (y-1)^2 + 1 \leq y^2 < y \cdot x \Rightarrow x' < y$.

N4/2009 Folha 2

Logo b_2 e b_3 são pares.

Se $n \geq 5$, então, olhando para (b_2, b_3, b_4, b_5), $\Rightarrow$ b_3 e b_4 são pares.

Mas $\underset{\substack{||| \\ 0}}{b_2 \cdot b_4} = \underset{\substack{||| \\ 2}}{(b_3-1)^2+1}$ (mod 4) Absurdo!

Logo, $n \leq 4$.

Basta verificar que $b_1 = 5$; $b_2 = 34$, $b_3 = 218$; $b_4 = 1385$ (*)

funciona!

Logo, existe sequência de qualquer tamanho $n \leq 4$.

(*) Motivação: b_2 é par e não múltiplo de 4.

Se p é primo, $p \mid b_2 \Rightarrow p \mid (b_3-1)^2+1 \Rightarrow -1$ é resíduo quad.

$\Rightarrow p = 4K+1$.

Testando $b_2 = \underset{\times}{2 \cdot 5}$; $\underset{\times}{2 \cdot 13}$; $\underset{\checkmark}{2 \cdot 17}$. OK!