
Minha sequência favorita

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1

Considere uma coloração dos inteiros não-negativos em duas cores, azul e vermelho. É verdade que existe uma progressão aritmética infinita monocromática?

Problema 2

Seja t um inteiro positivo.

É possível achar uma partição do conjunto $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ em dois conjuntos disjuntos I e J tal que

$$\sum_{i \in I} i^k = \sum_{j \in J} j^k,$$

para $k \in \{0, 1, \dots, t\}$.

Problema 3

Um alfabeto é um conjunto finito de letras. Uma palavra é uma sequência (finita ou infinita) de letras.

Uma palavra é dita *uniformemente recorrente* se toda subpalavra aparece infinitas vezes.

Existe uma palavra infinita que é uniformemente recorrente, mas não periódica?

Problema 4

Um *quadrado* é uma palavra que resulta da concatenação de duas palavras finitas iguais. Por exemplo, AABCAABC é um quadrado.

Uma palavra é dita *livre de quadrados* se nenhuma subpalavra é um quadrado. Por exemplo, ABCBAC é livre de quadrados, mas BAAC não.

Determine se existe uma palavra infinita e livre de quadrados num alfabeto com 2 letras. E com 3 letras?

Pergunta 5

Num colégio com $2n$ alunos, o professor de educação física foi substituído por um professor de matemática. O professor de matemática escolheu \mathcal{A} e \mathcal{B} como capitães de duas equipes para uma partida de queimada.

Em alguma ordem, \mathcal{A} e \mathcal{B} escolhem um aluno por vez para se juntar à sua equipe.

Determine qual é a ordem “mais justa” das escolhas de \mathcal{A} e \mathcal{B} .