Problema 8 (Balkan 2017). (TN/ Murilo)

Ache todas funções $f: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ t.q.

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

$n + f(m) \mid f(n) - n^2, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}_{>0}.$

• Se $f(n) = n^2, \ \forall n.$

$\Rightarrow \ n + m^2 \mid n^2 + nm^2$. <u>OK!</u>

• Se $\exists n_0 \mid f(n_0) \neq n_0^2$.

$\Rightarrow n_0 + f(m) \in \text{Divisores}(f(n_0) - n_0^2), \ \forall m.$

Como $\text{Divisores}(f(n_0) - n_0^2)$ é finito $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists m_1, m_2, \dots \mid n_0 + f(m_1) = n_0 + f(m_2) = \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow C = f(m_1) = f(m_2) = \dots, \quad m_1 < m_2 < \dots$

Mas, $m_i + f(n) \mid C - f(n)^2, \ \forall n, i.$

$\Rightarrow \ C - f(n)^2$ tem infinitos divisores distintos $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ f(n)^2 = C, \ \forall n.$

Mas $f(m_1)^2 = C \Rightarrow C^2 = C \Rightarrow \underline{C = 1}$.

Logo: $f(n) = 1, \ \forall n.$ (Testando: $n+1 \mid 1 + n \cdot 1$)

Portanto $f(n) \equiv 1$ ou $f(n) \equiv n^2$.