Olimpíada Brasileira de Matemática

NÍVEL 3

PROBLEMA 6

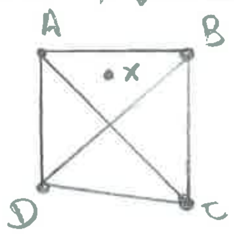
Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

(*)

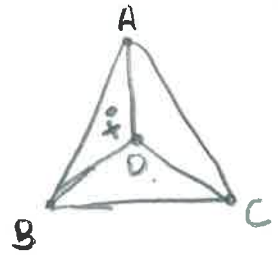
(**CPF do aluno ou do responsável:** 140.264.007-27

$n=1$: → Se o polígono maneiro é quadrilátero



X está em ABC e ABD ✓

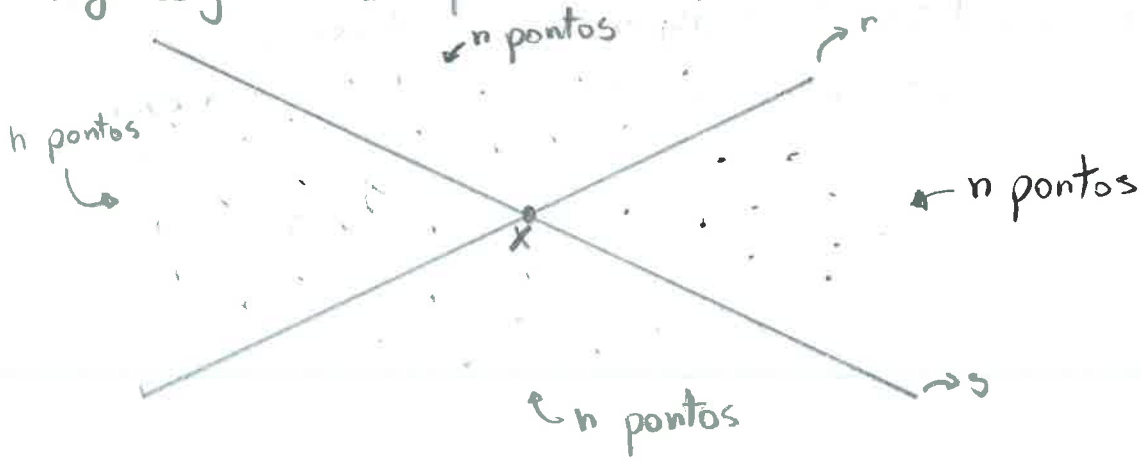
→ Se p.m. é triângulo



X em ABC e ABD ✓

Então, OK! (Observe que X poderia ser qualquer ponto interno ao polígono maneiro)

Será provado em (+) que podemos achar duas retas tais que as 4 regiões formadas possuem n pontos cada. Partindo disso:



Ao pegar um ponto de cada uma das regiões (n^4 possibilidades), temos que o ponto X estará em seu interior do polígono maneiro e, pelo caso $n=1$, existem 2 triângulos que contém X.

(*) polígono maneiro é o polígono com vértices nos pontos e que todos os pontos estão dentro do triângulo

Olimpíada Brasileira de Matemática

NÍVEL 3

PROBLEMA 6

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

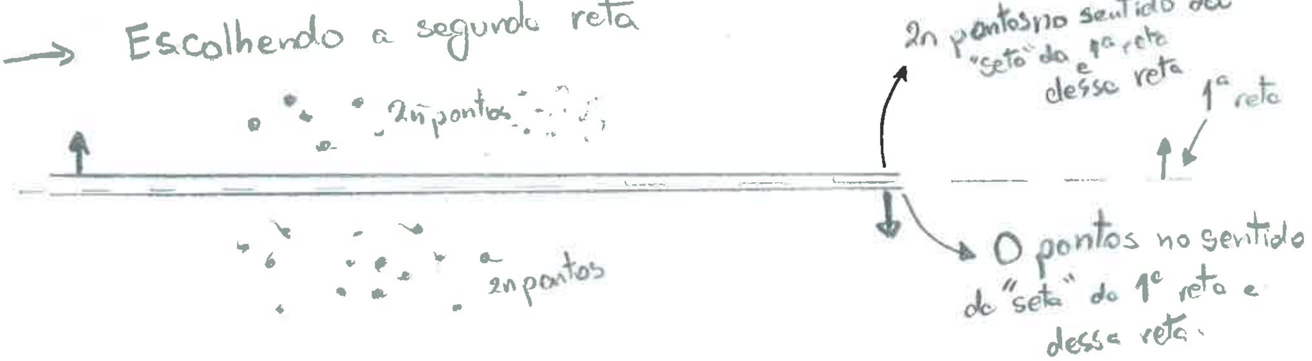
Porém, um certo triângulo pode ser "escolhido" em, no máximo, n casos (fixa os 3 vértices do triângulo e escolhe o outro da região que falta). Logo, o número de triângulos, sem repetição, é no mínimo:

$$\frac{2 \cdot n^4}{n} = 2n^3. \qquad \square$$

(+) Escolhendo a primeira reta:

Por continuidade, existe uma reta que contém 2n pontos de cada lado. (Ainda mais, existe uma em cada direção) (Fato 1)

→ Escolhendo a segunda reta



Olimpíada Brasileira de Matemática

NÍVEL 3

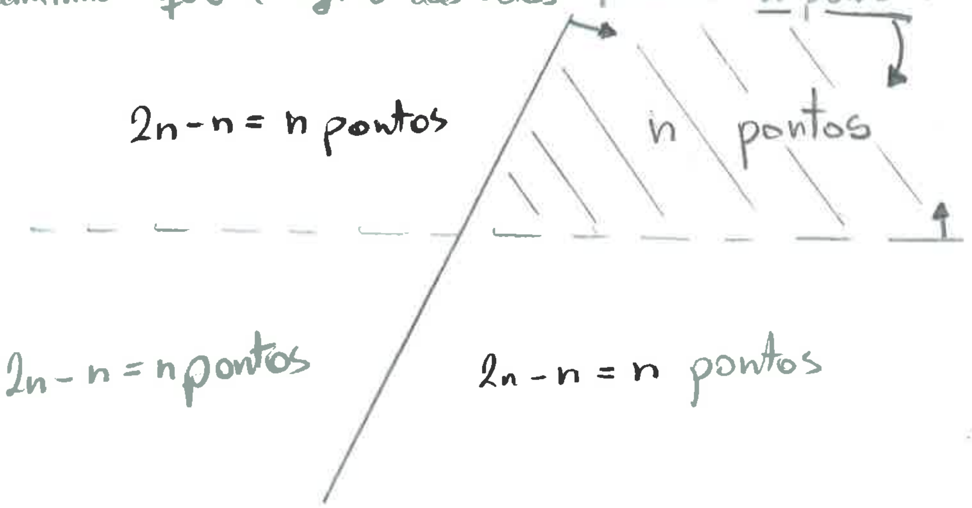
PROBLEMA 6

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

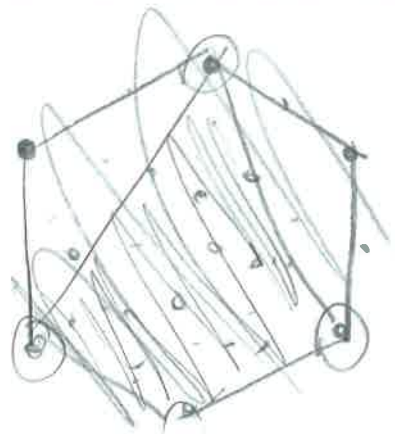
Como há um caminho contínuo de uma reta até a outra passando somente por retas que dividem o plano em $2n$ pontos de cada lado (pois o fato 1 afirma que existe essa reta em cada direção), existe uma reta no "meio do caminho" que a região das "setas" possui n pontos.

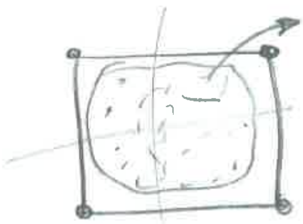


$\square$

Guilherme Leão Dantas e Moura 140. 264. 007 - 27

Folha de rascunho



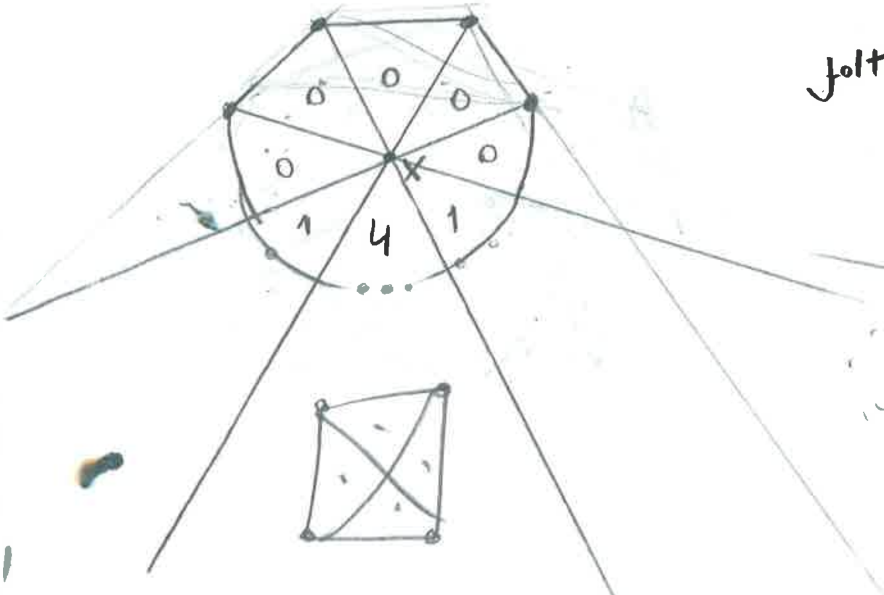


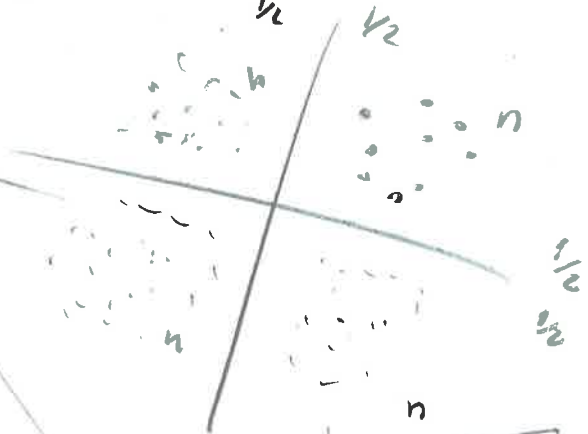
$4(n-1)^3 > 2n^3$

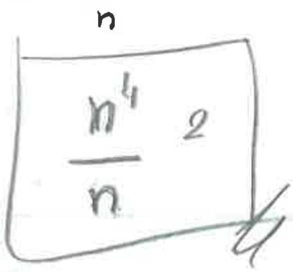
para $n > \varepsilon$

$2(n-1)^3 = 2n^3 - 6n^2 + 6n - 2$ OK!

faltam $6n^2 - 6n + 2$







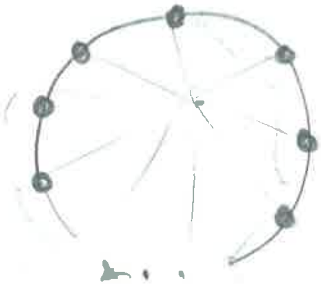
Total $\binom{4n}{3} = \frac{(4n)(4n-1)(4n-2)}{3} = \frac{64n^3}{3} - \underbrace{\varepsilon(n)}_{2^\circ \text{ grau}}$

Se mais que 3 a cada 32 triângulos, "ok"

1 a cada 8 triângulos, OK d+!!

Guilherme Zeus Dantas e Moura 140.264.007-27

Folha de rascunho



Para cada ponto que não é vértice do polígono maneiro, o ponto X estará em exatamente 1 triângulo com base em consecutivos.