Martingales

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Exemplo 1. Imagine os seguintes dados:

- O dado A tem lados 2, 2, 4, 4, 9, 9.
- O dado B tem lados 1, 1, 6, 6, 8, 8.
- O dado C tem lados 3, 3, 5, 5, 7, 7.

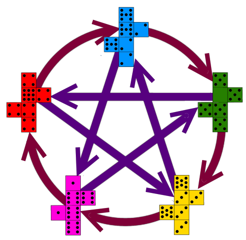
Se jogarmos os dados A e B, a chance do número que sair no dado A ser maior que o número que sair no B é $\frac{5}{9}$.

Se jogarmos os dados B e C, a chance do número que sair no dado B ser maior que o número que sair no C é $\frac{5}{9}$.

Se jogarmos os dados A e C, qual é a chance do número que sair no dado A ser maior que o número que sair no C?

Exemplo 2 (Dados de Grime)**.** Outros dados legais:

Vermelho:	4, 4, 4, 4, 4, 9
Amarelo:	3, 3, 3, 3, 8, 8
Azul:	2, 2, 2, 7, 7, 7
Magenta:	1, 1, 6, 6, 6, 6
Verde:	0, 5, 5, 5, 5, 5



Exemplo 3 (Jogo de Penney)**.** O jogo involve jogar uma moeda, com igual probabilidade de cair cara (H) ou coroa (T). O jogo é jogado por dois jogadores, Guilherme e Zeus, que escolhem sequências de três resultados. Por exemplo, suponha que Guilherme escolheu HHH e Zeus escolheu THH. Quando a moeda é jogada repetidamente, a sequência é algo do tipo:

$$HTHTHHHHTHHHTTTTHTHH\ldots$$

O jogador cuja sequência aparecer primeiro (HHH para Guilherme ou THH para Zeus) é declarado o vencedor.

Definição 1. Um jogo justo (de tempo discreto) é uma sequência de variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$ que satisfaz, para qualquer tempo n:

$$\mathbb{E}(|X_n|) < \infty;$$
$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n, \ldots, X_1) = X_n.$$

Corolário. Para os nossos propósitos, um jogo *justo* é um jogo em que o $\mathbb{E}(\Delta\text{dinheiro}) = 0$.

Teorema 1 (Teorema Fundamental das Apostas / Optional Stopping Theorem)**.** Seja J um jogo justo. Qualquer estratégia de iterar J que:

- termina quase certamente (isto é, $\mathbb{P} = 1$) em tempo limitado por uma constante;
- termina com dinheiro limitado

é justa.

Problema 1. Um sorteador de letras a cada minuto, sorteia uma letra `A-Z`. Qual o tempo médio até aparecer a palavra `ABRACADABRA`?

Solução. Vamos inventar alguns jogos:

$J(X)$: aposta N moedas para jogar. Ganha $26N$ moedas, se cair a letra X.

J^* : Aposta 1 moeda para jogar. Aposta 1 jogando em $J(\texttt{A})$. Se ganhar, aposta tudo em $J(\texttt{B})$. Se ganhar, aposta tudo em $J(\texttt{R})$. E assim por diante. Se perder em algum momento, sai do jogo.

J é justo, pois o valor esperado de dinheiro é 0. J^* é um jogo justo, pois é uma iteração de J e termina com dinheiro limitado.

Vamos jogar diversos jogos J^* simultâneamente, começando a jogar um novo jogo J^* a cada minuto e vamos parar imediatamente de jogar todos os jogos quando ganharmos o prêmio final em algum dos jogos J

Como é justo, o dinheiro esperado é 0. Quando finalmente ganharmos o jogo, três de nossos jogos estarão rodando são: `ABRACADABRA` `ABRA` e `A`.

Portanto, ganharemos $26^{11} + 26^4 + 26$ no fim do jogo. Porém, perdemos T moedas, onde T é o número de minutos que passaram. Como o dinheiro esperado é $0 = 26^{11} + 26^4 + 26 - T$, temos que $T = 26^{11} + 26^4 + 26$.