Problema 1 (APMO 2010, 5)

Find all functions f from the set $\mathbb{R}$ of real numbers into $\mathbb{R}$ which satisfy for all $x, y, z \in \mathbb{R}$ the identity
$$f(f(x)+f(y)+f(z)) = f(f(x)-f(y)) + f(2xy+f(z)) + 2f(xz-yz).$$

Solução. Seja $P(x,y,z)$ a equação

$$f(f(x)+f(y)+f(z)) = f(f(x)-f(y)) + f(2xy+f(z)) + 2f(z(x-y)).$$

Vamos aproveitar a quasi-simetria do enunciado. $P(x,y,z) - P(y,x,z)$ implica

$$f(f(x)-f(y)) + 2f(z(x-y)) = f(f(y)-f(x)) + 2f(z(y-x)). \tag{1}$$

Jogando $z \mapsto 0$ em eq. (1),
$$f(f(x)-f(y)) = f(f(y)-f(x)). \tag{2}$$

Jogando eq. (2) em eq. (1), e $x \mapsto y+1$,temos

$$f(z) = f(-z),$$

isto é, f é par.

Vamos aproveitar a nova quasi-simetria do enunciado. $P(x,x,z)$ implica

$$f(2f(x)+f(z)) = f(z) + f(2x^2+f(z)) + f(0). \tag{3}$$

Já $P(x,-x,z)$ implica

$$f(2f(x)+f(z)) = f(z) + f(-2x^2+f(z)) + f(2zx). \tag{4}$$

Juntando eq. (3) e eq. (4), $z \mapsto 0$ e $w = \pm 2x^2$, temos

$$f(w+f(0)) = f(-w+f(0)) = f(w-f(0)). \tag{5}$$

$w \mapsto 2f(0)$ em eq. (5) implica que
$$f(3f(0)) = f(f(0)).$$

$P(0,0,0)$ implica que
$$f(3f(0)) = 3f(0) + f(f(0)),$$

ou seja,
$$f(0) = 0.$$