Análise na Reta

1ª prova

Problema 1 Para cada um dos conjuntos abaixo, diga se ele é ou não enumerável, e justifique:

(a) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} | a_1 = 1 \text{ e } a_{n+1} > (a_n)^2, \forall n \geq 1\}$.

(b) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} | a_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 1 \text{ e } (a_n) \text{ converge}\}$.

Problema 2 Suponha que $X \subset \mathbb{R}$ é não-vazio, limitado superiormente e que existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| \geq \delta$ para quaisquer $x, y \in X$ distintos. Prove que $\sup(X) \in X$.

Problema 3 Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência dada por $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3+a_n}, \forall n \geq 1$.
Prove que (a_n) converge e determine seu limite.

Problema 4 Seja (a_n) uma sequência decrescente. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ converge.

Problema 5 Dada uma sequência (a_n) de números reais, dizemos que b é valor de aderência da sequência se ela tem uma subsequência que converge a b.
Prove que o conjunto dos valores de aderência de uma dada sequência é sempre fechado.

Problema 6 Seja $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a bijeção tal que $\phi(1) = 1$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $\phi(k^2 + 2r - 1) = k^2 + k + r$, para r inteiro com $1 \leq r \leq k + 1$ e $\phi(k^2 + 2r) = k^2 + k + 1 - r$, para r inteiro com $1 \leq r \leq k$.
Assim, por exemplo, $\phi(1) = 1, \phi(2) = 3, \phi(3) = 2, \phi(4) = 4, \phi(5) = 7, \phi(6) = 6, \phi(7) = 8, \phi(8) = 5, \phi(9) = 9$.

(a) Prove que se (a_n) é uma sequência tal que $\sum a_n$ converge então $\sum a_{\phi(n)}$ converge e $\sum a_n = \sum a_{\phi(n)}$.

(b) Exiba uma sequência (b_n) tal que $\sum b_n$ diverge mas $\sum b_{\phi(n)}$ converge.