Treinamento para Provas de Velocidade em Equipe, #1
"Mini-Guts"

Instruções:

- Tamanho esperado da equipe: 8 pessoas.
- Tempo disponível: 65 minutos.
- São 6 rodadas, com pontuações de, respectivamente, 5, 7, 10, 12, 15 e 20 pontos por problema.

Round 1 (5 points each)

Problem 1. Find the number of pairs of real numbers (x, y) such that $x^4 + y^4 = 4xy - 2$.

Problem 2. Define a function given the following 2 rules: for prime p, $f(p) = p + 1$; and for positive integers a and b, $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$. For how many positive integers $n \leq 100$ is $f(n)$ divisible by 3?

Problem 3. Let a sequence be defined as follows: $a_0 = 1$, and for $n > 0$, a_n is $\frac{1}{3}a_{n-1}$ and is $\frac{1}{9}a_{n-1}$ with probability $\frac{1}{2}$. If the expected value of $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ can be expressed in simplest form as $\frac{p}{q}$, what is $p + q$?

Round 2 (7 points each)

Problem 4. Calcule o período, ou seja, o tamanho da parte que repete, da expansão decimal de $\frac{1}{729}$.

Problem 5. Seja ABC um triângulo com lados $13, 14, 15$. Os pontos no interior de ABC com distância para todos os lados maior que 1 são pintados de preto. A área da região preta pode ser escrita como $\frac{m}{n}$, com m e n primos entre si. Calcule $m + n$.

Problem 6. Sophie has 20 indistinguishable pairs of socks in a laundry bag. She pulls them out one at a time. After pulling out 30 socks, the expected number of unmatched socks among the socks that she has pulled out can be expressed in simplest form as $\frac{m}{n}$. Find $m + n$.

Round 3 (10 points each)

Problem 7. O número 400000001 pode ser escrito como $p \cdot q$, onde p e q são primos. Ache a soma dos fatores primos de $p + q - 1$.

Problem 8. Alguns polígonos regulares se encontram em um ponto no plano tal que os polígonos não se sobrepõem, porém esse ponto é rodeado pelos polígonos (isto é, qualquer círculo suficientemente pequeno centrado nesse ponto está contido na união dos polígonos). Qual é o maior número de lados que um desses polígonos pode ter?

Problem 9. Sejam $0 \leq a, b, c, d \leq 10$. Para quantas quádruplas ordenadas (a, b, c, d), $ad - bc$ é múltiplo de 11?

Round 4 (12 points each)

Problem 10. Let w and h be positive integers and define $N(w, h)$ to be the number of ways of arranging wh people of distinct heights for a photoshoot in such a way that they form w columns of h people, with the people of each column sorted by height (i.e. shortest at the front, tallest at the back). Find the largest value of $N(w, h)$ that divides 1008.

Problem 11. Seja x um real tal que $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{6}$ e $0 < x < \frac{\pi}{6}$. Então, x^2 pode ser escrito da forma $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ para a, b, c, d inteiros com $d > 0$, $(a^2, b^2, c, d^2) = 1$ e c livre de quadrados. Calcule $a + b + c + d$.

Problem 12. Let k be the largest integer such that 2^k divides

$$\left(\prod_{n=1}^{25}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\right)^2\right)\left(\prod_{n=1}^{25}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\right)\right).$$

Find k.

....

Round 5 (15 points each)

Problem 13. Ache o número de termos não-nulos do polinômio $P(x)$, dado que

$$x^{2018} + x^{2017} + x^{2016} + x^{999} + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)P(x).$$

Problem 14. Calcule o menor inteiro positivo n que é múltiplo de 29 com a tal que, para todo inteiro positivo k primo com n, $k^n \equiv 1 \pmod{n}$.

Problem 15. Kite $ABCD$ has right angles at B and D, and $AB < BC$. Points $E \in AB$ and $F \in AD$ satisfy $AE = 4$, $EF = 7$, and $FA = 5$. If $AB = 8$ and points X lies outside $ABCD$ while satisfying $XE - XF = 1$ and $XE + XF + 2XA = 23$, then XA may be written as $\frac{a-b\sqrt{c}}{d}$ for a, b, c, d positive integers with $\gcd(a^2, b^2, c, d^2) = 1$ and c squarefree. Find $a + b + c + d$.

....

Round 6 (20 points each)

Problem 16. Let a, b, and c be such that the coefficient of the $x^a y^b z^c$ term in the expansion of $(x + 2y + 3z)^{100}$ is maximal (no other term has a strictly larger coefficient). Find the sum of all possible values of $1,000,000a + 1,000b + c$.

Problem 17. O triângulo ABC satisfaz $AB = 10$ e possui ângulos $\angle A = 75°$, $\angle B = 60°$, e $\angle C = 45°$. Seja I_A o centro do exincírculo relativo a A, e sejam D, E os circuncentros dos triângulos BCI_A e ACI_A respectivamente. Se O é o circumcentro do triângulo ABC, então a área do triângulo EOD pode ser escrita como $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ para b livre de quadrados e a primo com c. Ache $a + b + c$.

Problem 18. Se a e b são inteiros positivos tais que $3\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = a \cos \frac{\pi}{b}$, ache $a + b$.