...ma 2 - Guilherme Zeus $\nearrow$ e.g., $\varepsilon = \frac{M}{10^6}$. 7/7 (Simu 7/Jul)

Seja M a quantidade inicial e $\varepsilon << M$. Ao longo da solução M' será a maior quantidade em cada rodada.

Arnaldo possui estratégia vencedora:

- Se existe uma argila com 4ε, dividir em $\varepsilon, \varepsilon, 2\varepsilon$.
- " " " " " 3ε, " " $\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon$.
- Caso contrário, dividir M' em $M', \varepsilon, \varepsilon$.

Vamos mostrar que essa estratégia é, de fato, vencedora.

Fato 1: A quantidade de argilas, no fim da rodada de Arnaldo, é crescente.

Prova: $\Delta = \underbrace{2}_{\text{Argilas adicionadas por A}} - \underbrace{1}_{\text{Argilas retiradas por B}} = 1$ ✓ □

Fato 2: Nunca há argila diferente de ε, 2ε e M', no fim da jogada de A.

Prova: Indução. No primeiro rodada: $M', \varepsilon, \varepsilon$. OK!

Suponha que, no n-ésimo fim de rodada de A, só há argilas M', ε e 2ε.

B só pode fazer: $M'+\varepsilon \to M'$; $M'+2\varepsilon \to M'$; $\varepsilon+\varepsilon \to 2\varepsilon$; $\varepsilon+2\varepsilon \to 3\varepsilon$; $2\varepsilon+2\varepsilon \to 4\varepsilon$.

Nos três primeiros casos, A dividirá $M' \to M', \varepsilon, \varepsilon$ e as argilas serão $\varepsilon, 2\varepsilon, M$. (no máximo).

No quarto caso, $\varepsilon + 2\varepsilon \xrightarrow{B} 3\varepsilon \xrightarrow{A} \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon$.

No quinto caso, $2\varepsilon+2\varepsilon \xrightarrow{B} 4\varepsilon \xrightarrow{A} \varepsilon+\varepsilon+2\varepsilon$.

} Não haverá argila diferente de $M', \varepsilon, 2\varepsilon$. □

Logo, após 400 rodadas de A (e 399 de B), o # argilas será 400, mas, como as argilas são M', 2ε ou ε, haverá 100 argilas de mesmo tamanho. □