Alguns Problemas de Combinatória 2

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1 **(Desafio PUC)** Guilherme e Zeus gostam de jogar cara ou coroa. Guilherme sempre aposta em cara e Zeus sempre aposta emcoroa. Eles gostam de inventar novas maneiras de jogar.

A última maneira que eles inventaram usa uma moeda comum. Eles combinam um número inteiro positivo N e jogam a moeda várias vezes contando as ocorrências até que tenham saído exatamente N caras. Cada coroa vale um ponto para Zeus e cadacara vale um ponto para Guilherme. Quando o jogo terminar, quem tiver mais pontos ganha.

Por exemplo, eles combinaram $N = 5$ e obtiveram os seguintes resultados (com H para cara e T para coroa):

$$HTHTHHH$$

e com isso o jogo acabou com um placar de 5 a 2.

Em função de N, responda:

(a) Qual é a probabilidade de que haja empate (ou seja, uma placar de N a N)?

(b) Qual é o placar final mais provável? (Se houver mais de um placar final com igual probabilidade máxima indique quais são estes placares.)

(c) Qual é a probabilidade de que Guilherme ganhe (por qualquer placar)?

Problema 2 **(OBM 2005, 4)** Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias carregadas para funcionar. Supondo que não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, determine o menor número de tentativas suficiente para garantirmos que o rádio funcione. Uma tentativa consiste em colocar duas das baterias no rádio e verificar se ele, então, funciona.

Problema 3 **(OBM 2002, 4)** Definimos o diâmetro de um subconjunto não vazio de $\{1, 2, \ldots, n\}$ como a diferença entre seu maior elemento e seu menor elemento (em módulo). Calcule a soma dos diâmetros de todos os subconjuntos não vazios de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Problema 4 **(Math Magazine, 2033)** Um baralho é uma coleção de 52 pares (*cartas*) da forma (n, s) onde $1 \leq n \leq 13$ é o número da carta, e o naipe s da carta é um dos símbolos: ouro, copas, paus e espada.

Dada uma partição qualquer do baralho em 13 conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_{13}$ de 4 cartas cada, prove que existe uma partição correspondente C_1, C_2, C_3, C_4 do baralho em 4 conjuntos de 13 cartas cada, tal que, para cada parte C_i ($1 \leq i \leq 4$) vale:

- C_i tem uma carta de S_j para $1 \leq j \leq 13$;
- todas as cartas em C_i tem números diferentes.