NÍVEL 3

PROBLEMA 1

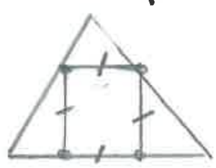
Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140. 264. 007 - 27

Lema 1: Qualquer quadrado inscrito em um triângulo possui um lado totalmente inserido em um segmento do triângulo.

Prova: Por P.C.P, como o triângulo possui 3 lados e o quadrado, 4 vértices, um lado possui 2 vértices

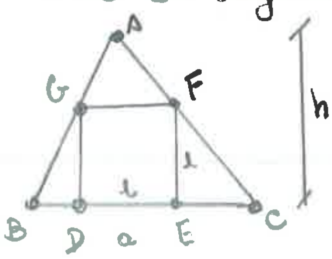


$\square$

Lema 2: Só existem, no máximo, 3 quadrados inscritos em um triângulo.

Prova: Vamos mostrar que o mesmo lado de um triângulo possui no máximo 1 quadrado tal que um lado do quadrado está inserido a este lado.

→ Se os ângulos desse lado não são obtusos.



$$\underbrace{\frac{ah}{2}}_{S_{TOT}} = \underbrace{\frac{l^2}{2}}_{S_{\square}} + \underbrace{\frac{(a-l)\cdot l}{2}}_{S_{BDG}+S_{EFC}} + \underbrace{\frac{(h-l)\cdot l}{2}}_{S_{AFG}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{l = \frac{ah}{a+h}.}$$

↑ Lema 2.1

Logo, como l é único para um lado, só existem dois pontos da base BC cuja altura até o outro lado é l. (pois a função "altura" é crescente, e então decrescente).

Olimpíada Brasileira de Matemática

NÍVEL 3

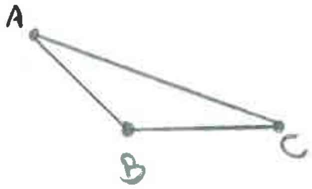
PROBLEMA 1

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

→ Se um dos ângulos desse lado é obtuso.



⇒ Não há como formar quadrado, pois os dois outros vértices estariam em AC e as alturas seriam diferentes.

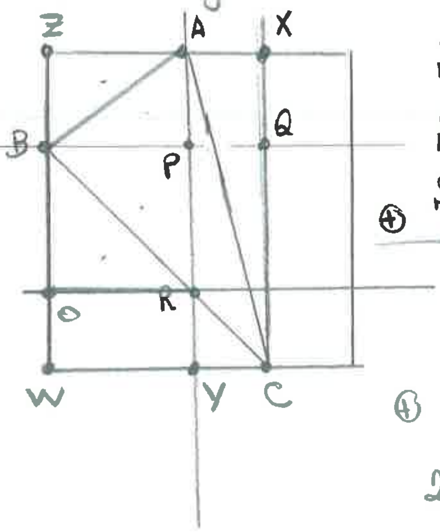
Portanto, só há, no máximo, 1 triângulo por lado e, pelo Lema 1, três quadrados inscritos no triângulo, no máximo. □

MA ≥ MG: $\frac{a+h}{2} \geq \sqrt{ah} \Rightarrow (a+h)^2 \geq 4ah \Rightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{ah}{(a+h)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ah}{4} \geq \frac{a^2h^2}{(a+h)^2} = l^2 \Rightarrow S_{TRIÂNGULO} \geq 2l^2 \quad (3)$$

Vamos mostrar que $L^2 \geq 2\, S_{TRIÂNGULO}$.

→ Se o triângulo tocar 3 lados distintos (caso A)



$S_{APB} = S_{AZB}$

$S_{ARC} \leq S_{AYC} = S_{AXC}$

$S_{BPR} = S_{BOR}$

(+)

⇓

$S_{ABC} \leq S_{\text{FORA DO TRIÂNGULO, DENTRO DO QUADRADO}}$

(+) $S_{ABC} = S_{ABC}$

⇓

$2S_{ABC} \leq S_{\text{DENTRO DO QUADRADO}} \leq S_{QUADRADO}$.

(*) O triângulo é o ABC e as retas auxiliares são perpendiculares aos lados do quadrado.

NÍVEL 3

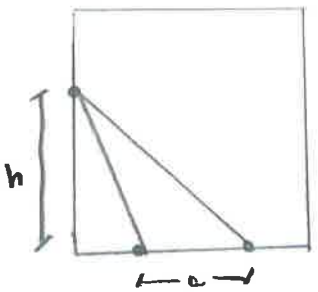
PROBLEMA 1

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140. 264. 007 - 27

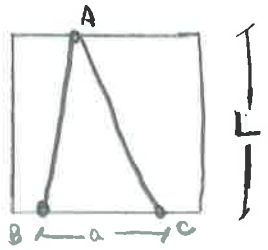
→ Se o triângulo toca 2 lados adjacentes (caso B)



$$S_{ABC} = \frac{a \cdot h}{2} \leq \frac{L \cdot L}{2} \leq \frac{L^2}{2}$$

$$2 S_{ABC} \leq L^2 .$$

→ Se o triângulo toca 2 lados opostos (caso C)



$$S_{ABC} = \frac{aL}{2} \leq \frac{L^2}{2}$$

$$2 S_{ABC} \leq L^2 .$$

(i)

Logo, vale que $L^2 \leq 2 S_{ABC} \leq 2(2 l^2) \Rightarrow \frac{L}{l} \leq 2$ □

A igualdade vale quando todas as igualdades valem.

Logo, em (i); $a = h$.

No caso A $\Rightarrow S_{ARC} = S_{AXC} \Rightarrow R$ no lado do quadrado $\Rightarrow B$ no vértice $\Rightarrow B$ no mesmo lado que $C \Rightarrow$ Caso B ou C.

No caso B $\Rightarrow a = L$ e $h = L \Rightarrow a = h = L$

No caso C $\Rightarrow a = L \Rightarrow a = h = L$.

Logo, vale a igualdade $\Leftrightarrow$ Uma das bases do triângulo é igual à altura relativa a esse lado.

NÍVEL 3

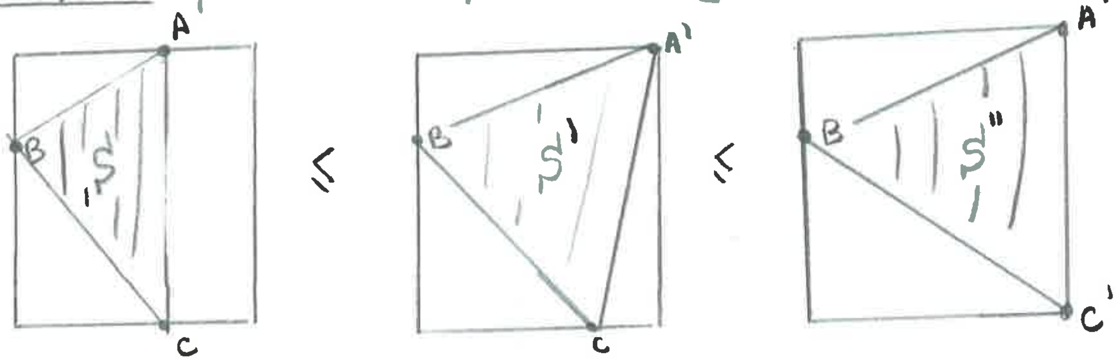
PROBLEMA 1

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

Solução 2: para mostrar que $L^2 \geq S_\Delta$



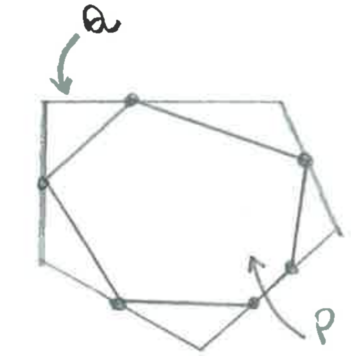
$$\frac{L^2}{2} = S'' \geq S \Rightarrow L^2 \geq 2S \qquad \square$$

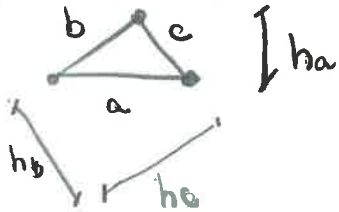
Igualdade quando uma das bases é L e sua altura também é L.

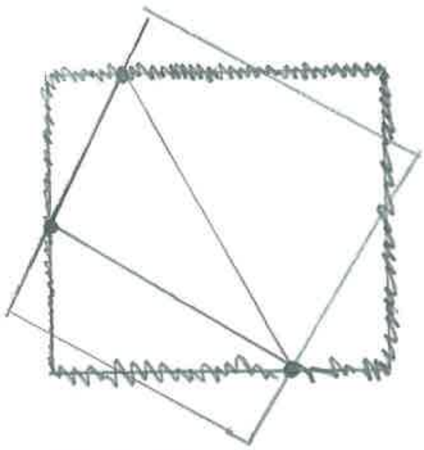
Guilherme Zeus Dantas e Moura 140.264.007-27

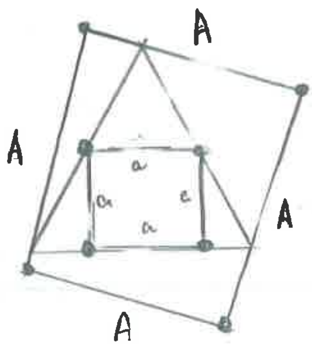
Folha de rascunho

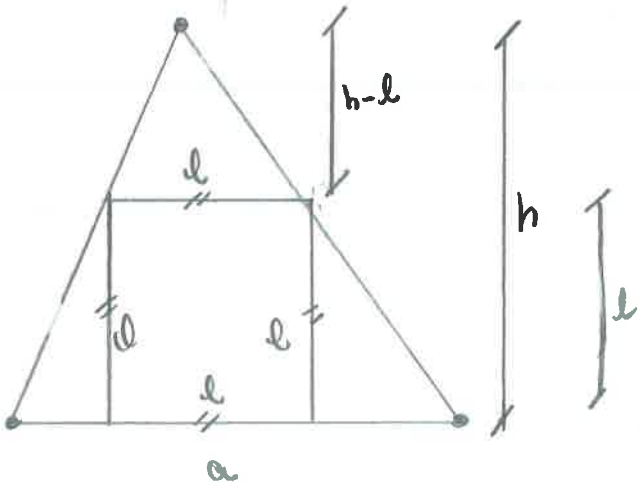
Exemplo:











$S = ah/2$

$S = l^2 + \frac{(a-l)\cdot l}{2} + \frac{l\cdot(h-l)}{2}$

$\frac{ah}{2} = \cancel{l^2} + \frac{al}{2} - \frac{\cancel{l^2}}{\cancel{2}} + \frac{lh}{2} - \frac{\cancel{l^2}}{\cancel{2}}$

$ah = (a+h)\, l$

$\boxed{l = \frac{ah}{a+h}}$

Guilherme Zeus Dantas e Moura 140.264.007-27

Folha de rascunho

$\ell = \frac{ah}{a+h} \longrightarrow$ área quadrado $= \frac{a^2h^2}{(a+h)^2} \overset{?}{\leq} 2ah$

$\Updownarrow$

$\frac{ah}{(a+h)^2} \overset{?}{\leq} 2$

$ah \overset{?}{\leq} (a+h)^2$

$ah \leq$

$\frac{a+h}{2} \geq \sqrt{ah}$

$\frac{(a+h)^2}{4} \geq ah$

$\frac{1}{4} \geq \frac{ah}{(a+h)^2}$

$\frac{ah}{4} \geq \frac{a^2h^2}{(a+h)^2} = \ell^2$