
Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro 2012 - 2018

Todo e qualquer feedback, especialmente sobre erros neste livreto (mesmo erros tipográficos pequenos), é apreciado. Você também pode contribuir enviando suas soluções (de preferência, formatadas em $\text{T}_\text{E}\text{X}$).
Você pode enviar comentários e soluções para zeusdanmou+tex@gmail.com.
A versão mais atualizada desse arquivo (provavelmente) está disponível [clikando aqui](#). Última atualização: 17 de julho de 2020.

PROBLEMA 1

Um número natural é chamado de *factorion* se ele é igual a soma dos fatoriais dos seu dígitos decimais. Encontre todos os números de 3 dígitos que são factorions.

Observação: O fatorial de um número inteiro não negativo é definido da seguinte forma: $0! = 1$ e para n inteiro positivo, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Por exemplo, $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.

PROBLEMA 2

Considere um triângulo equilátero ABC de lado 1. Um círculo C_1 é construído tangenciando os lados AB e AC . Um círculo C_2 , de raio maior que o raio de C_1 , é construído tangenciando os lados AB e AC e tangenciando externamente o círculo C_1 . Sucessivamente, para n inteiro positivo, o círculo C_{n+1} , de raio maior que o raio de C_n , tangencia os lados AB e AC e tangencia externamente o círculo C_n . Determine os possíveis valores para o raio de C_1 de forma que caibam 4, mas não 5 círculos dessa sequência, inteiramente contidos no interior do triângulo ABC .

PROBLEMA 3

Seja n um inteiro positivo. Uma função $f : \{1, 2, \dots, 2n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é dita *boa* se $f(j+2)$ e $f(j)$ têm a mesma paridade para todo $j = 1, 2, \dots, 2n-2$. Prove que a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 4

Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito na circunferência Γ . Sejam D e E pontos em Γ tais que AD é perpendicular a BC e AE é diâmetro. Seja F o ponto de interseção de AE com BC . Prove que se $\angle DAC = 2\angle DAB$, então $DE = CF$.

PROBLEMA 5

Sejam n um inteiro positivo e $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$ uma permutação de $\{1, \dots, n\}$. O *número de cadência* de σ é o número de blocos decrescentes maximais. Por exemplo, se $n = 6$ e $\sigma = (4, 2, 1, 5, 6, 3)$, então o número de cadência de σ é 3, pois σ possui 3 blocos $(4, 2, 1)$, (5) , $(6, 3)$ decrescentes e maximais. Note que os blocos $(4, 2)$ e $(2, 1)$ são decrescentes, mas não são maximais, já que estão contidos no bloco $(4, 2, 1)$.

Calcule a soma das cadências de todas as permutações de $\{1, \dots, n\}$.

PROBLEMA 6

Dois quadrados perfeitos são ditos *amigáveis* se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo, $1225 = 35^2$ e $225 = 15^2$ são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.

PROBLEMA 1

Sejam ABC um triângulo e k um número real positivo menor do que 1. Tome A_1 , B_1 e C_1 pontos nos lados BC , AC e AB de modo que

$$\frac{A_1B}{BC} = \frac{B_1C}{AC} = \frac{C_1A}{AB} = k.$$

- (a) Calcule em função de k a razão entre as áreas dos triângulos $A_1B_1C_1$ e ABC .
- (b) Mais geralmente, para todo $n \geq 1$, constrói-se o triângulo $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, de modo que A_{n+1} , B_{n+1} e C_{n+1} sejam pontos nos lados B_nC_n , A_nC_n e A_nB_n satisfazendo

$$\frac{A_{n+1}B_n}{B_nC_n} = \frac{B_{n+1}C_n}{A_nC_n} = \frac{C_{n+1}A_n}{A_nB_n} = k.$$

Determine os valores de k de modo que a soma das áreas de todos os triângulos $A_nB_nC_n$, para $n = 1, 2, 3, \dots$ seja igual a $\frac{1}{3}$ da área do triângulo ABC .

PROBLEMA 2

Seja (a_n) uma sequência de números inteiros tal que $a_1 = 1$ e para $n \geq 1$ inteiro positivo, $a_{2n} = a_n + 1$ e $a_{2n+1} = 10a_n$. Quantas vezes o número 111 aparece nessa sequência?

PROBLEMA 3

Sejam n e k inteiros positivos. Uma função $f : \{1, 2, 3, 4, \dots, kn - 1, kn\} \rightarrow \{1, \dots, 5\}$ é dita *boa* se $f(j+k) - f(j)$ é múltiplo de k para todo $j = 1, 2, \dots, kn - k$.

- (a) Prove que se $k = 2$, então a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito para todo n inteiro positivo.
- (b) Prove que se $k = 3$, então a quantidade de funções boas é um cubo perfeito para todo n inteiro positivo.

PROBLEMA 4

Encontre todos os valores reais que a pode assumir de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y^3 + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z^3 = a \end{cases}$$

possua solução com x, y, z reais distintos dois a dois.

PROBLEMA 5

Sejam Θ_1 e Θ_2 circunferências com centros O_1 e O_2 , respectivamente, tangentes exteriormente. Sejam A e B pontos sobre Θ_1 e Θ_2 , respectivamente, tais que a reta AB é tangente comum externa a Θ_1 e Θ_2 . Sejam C e D pontos no semiplano determinado por AB que não contém O_1 e O_2 tais que $ABCD$ é um quadrado. Se O é o centro deste quadrado, determine os possíveis valores do ângulo $\angle O_1OO_2$.

PROBLEMA 6

Dois quadrados perfeitos são ditos amigáveis se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo, $1225 = 35^2$ e $225 = 15^2$ são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.

PROBLEMA 1

Seja $ABCD$ um retângulo com lados $AB = 6$ e $BC = 8$. Por um ponto X do lado AB com $AX < XB$, traça-se uma reta paralela a BC . Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do retângulo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a medida do segmento AX .

PROBLEMA 2

Luiza quer pintar os vértices de um prisma triangular com 5 cores, de modo que se dois vértices estão ligados por uma aresta, então eles têm cores diferentes. De quantas maneiras Luiza pode pintar esse prisma?

PROBLEMA 3

Encontre todos os reais a para os quais o sistema de equações

$$x^2 - yz = ax^2$$

$$y^2 - xz = ax^2$$

$$z^2 - xy = ax^2$$

possui pelo menos uma solução real (x, y, z) com $x \neq 0$.

PROBLEMA 4

Sejam Γ uma circunferência de centro O e ℓ uma reta tangente a Γ em A . Tome B um ponto em Γ (diferente do ponto diametralmente oposto a A em Γ) e seja B' o simétrico de B em relação a ℓ . Sejam E , distinto de A , o ponto de interseção de Γ com a reta $B'A$ e D , distinto de E , a interseção das circunferências circunscritas aos triângulos $BB'E$ e AOE

(a) Calcule a medida do ângulo $\angle B'BE$.

(b) Prove que B , O e D são colineares.

PROBLEMA 5

Seja N um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos, cuja representação decimal é $(a_{2k}a_{2k-1} \dots a_4a_3a_2a_1)_{10}$. Definimos o *alternado* de N como sendo o número $M = (a_{2k-1}a_{2k} \dots a_3a_4a_1a_2)_{10}$. Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos N tais que $M = 2N - 1$, onde M é o alternado de N .

PROBLEMA 6

Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

PROBLEMA 1

Seja $ABCD$ um paralelogramo. Por um ponto X do lado AB , com $AX < XB$, traça-se uma reta paralela a BC . Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do paralelogramo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a razão $\frac{AX}{AB}$.

PROBLEMA 2

Encontre todos os números reais x que satisfaçam

$$x = \frac{1}{2} [x]^2 + 3 [x] + 2.$$

PROBLEMA 3

Pedro quer pintar os vértices de um tabuleiro $2 \times n$ de modo que cada quadradinho deste tabuleiro possua exatamente um vértice pintado.

- (a) Determine o número máximo de vértices que Pedro pode pintar.
- (b) Determine o número mínimo de vértices que Pedro pode pintar.

PROBLEMA 4

Seja N um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos, cuja representação decimal é $(a_{2k}a_{2k-1} \dots a_4a_3a_2a_1)_{10}$. Definimos o *alternado* de N como sendo o número $M = (a_{2k-1}a_{2k} \dots a_3a_4a_1a_2)_{10}$. Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos N tais que $M = 2N - 1$, onde M é o alternado de N .

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo acutângulo e seja AD , com D em BC , a altura relativa ao vértice A . Sejam Γ_1 e Γ_2 as circunferências circunscritas aos triângulos ABD e ACD , respectivamente. A circunferência Γ_1 intersecta o lado AC nos pontos A e P , enquanto Γ_2 intersecta o lado AB nos pontos B e Q . Seja X o ponto de interseção da reta BP com Γ_2 de modo que P está entre B e X . Da mesma forma, seja Y o ponto de interseção da reta CQ com Γ_1 de modo que Q está entre C e Y . Sabendo que A , X e Y são colineares, calcule o menor valor possível para o ângulo $\angle BAC$.

PROBLEMA 6

Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

PROBLEMA 1

A professora de Joãozinho escreveu no quadro um sistema de equações. Joãozinho, quando copiou do quadro o sistema, escreveu errado um, e somente um, coeficiente do sistema. Esse foi o sistema que Joãozinho escreveu em seu caderno:

$$x + y + 2z = 6$$

$$3x + 2y + z = 7$$

$$4x + 2y + 3z = 12$$

Sabendo que o sistema original tem todos os coeficientes inteiros e sua solução é $(\frac{5}{11}, \frac{21}{11}, \frac{20}{11})$, encontre o sistema original.

PROBLEMA 2

Seja $[x]$ a parte inteira de x , isto é, o maior inteiro menor ou igual a x . Seja $\{x\}$ a parte fracionária de x , definida como $\{x\} = x - [x]$. Um número real é dito replicante se $x = \{10x\}$. Encontre a soma de todos os números replicantes.

PROBLEMA 3

Encontre o número de sequências a_1, a_2, \dots, a_{10} satisfazendo $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ e $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ para todo $n = 1, 2, \dots, 9$.

PROBLEMA 4

Sejam x, y e z reais satisfazendo $x, y, z \geq -1$ e $x + y \geq 2, x + z \geq 2, y + z \geq 2$. Prove que $xy + yz + zx \geq 3$.

PROBLEMA 5

Seja Γ uma circunferência de centro O e seja P um ponto no interior de Γ . Seja O' o ponto tal que P é ponto médio de OO' . Suponha que a circunferência Γ' de centro O' que passa por P é secante a Γ e seja A um ponto na interseção de Γ com Γ' . Se B é o outro ponto de interseção da reta AP com Γ , calcule $\frac{PB}{PA}$.

PROBLEMA 6

Seja $p \nmid 3$ um número primo. Sejam a_1, a_2, \dots, a_{p-1} números inteiros tais que a_1 não é múltiplo de p e $a_1^k + a_2^k + \dots + a_{p-1}^k$ é múltiplo de p para todo $k = 1, \dots, p-2$. Prove que a_i não é múltiplo de p para todo $i = 1, 2, \dots, p-1$, e que $a_i - a_j$ não é múltiplo de p para todos $i, j = 1, 2, \dots, p-1$ com $i \neq j$.

PROBLEMA 1

Escrevendo-se a representação decimal de $40!$ da esquerda para direita, qual o último dígito não nulo que foi escrito? (Por exemplo $11! = 39916800$, logo o último dígito não nulo de $11!$ é 8.)

PROBLEMA 2

Encontre o número de sequências a_1, a_2, \dots, a_{10} satisfazendo que $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todo $n = 1, 2, \dots, 10$ e que $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ para todo $n = 1, 2, \dots, 9$.

PROBLEMA 3

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \{10x\}$. Um número é dito tri-replicante se ele satisfaz

$$f(f(f(x))) = x.$$

Encontre a soma de todos os números tri-replicantes.

Observação: $\{x\}$ é a parte fracionária de x , isto é, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é o menor inteiro maior ou igual a x .

PROBLEMA 4

Seja Γ uma circunferência de centro O e seja P um ponto no interior de Γ . Seja O' o ponto tal que P é ponto médio de OO' . Suponha que a circunferência Γ' de centro O' que passa por P é secante a Γ e seja A um ponto na interseção de Γ com Γ' . Se B é o outro ponto de interseção da reta AP com Γ , calcule $\frac{PB}{PA}$.

PROBLEMA 5

Encontre todos os polinômios P com coeficientes reais tais que

$$xP(x) + yP(y) \geq 2P(xy)$$

para quaisquer x e y reais.

PROBLEMA 6

Sejam ABC um triângulo acutângulo e Γ sua circunferência circunscrita. Sejam D , E e F os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados BC , AC e AB , respectivamente. Sejam A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 os pontos de interseção de Γ com as retas DE , DF e EF de modo que A_1 e A_2 se encontram no arco menor BC , B_1 e B_2 se encontram no arco menor AC , e C_1 e C_2 se encontram no arco menor AB . Se $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$, prove que o triângulo ABC é equilátero.

PROBLEMA 1

PROBLEMA 2

PROBLEMA 3

PROBLEMA 4

PROBLEMA 5

PROBLEMA 6

PROBLEMA 1

PROBLEMA 2

PROBLEMA 3

PROBLEMA 4

PROBLEMA 5

PROBLEMA 6

PROBLEMA 1

PROBLEMA 2

PROBLEMA 3

PROBLEMA 4

PROBLEMA 5

PROBLEMA 6

PROBLEMA 1

PROBLEMA 2

PROBLEMA 3

PROBLEMA 4

PROBLEMA 5

PROBLEMA 6

PROBLEMA 1

PROBLEMA 2

PROBLEMA 3

PROBLEMA 4

PROBLEMA 5

PROBLEMA 6

PROBLEMA 1**PROBLEMA 2****PROBLEMA 3****PROBLEMA 4****PROBLEMA 5****PROBLEMA 6**

Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(x) - f(y)$$

para todos x e y inteiros.

PROBLEMA 1**PROBLEMA 2****PROBLEMA 3****PROBLEMA 4****PROBLEMA 5**

Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos x e y reais.

PROBLEMA 6

PROBLEMA 1

PROBLEMA 2

PROBLEMA 3

PROBLEMA 4

PROBLEMA 5

PROBLEMA 6