Problema 2 (Álgebra / Shire) - Folha 1/3

(RMM 2013/5) Dado um inteiro $K \geq 2$, seja $a_1 = 1$ e, $\forall n \geq 2$, a_n o menor $x > a_{n-1}$ t.q:

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt[K]{\frac{x}{a_i}} \right\rfloor .$$

Prove que todo primo aparece em $a_1, a_2, \ldots$

Claim: $\exists i$ t.q. $a_i = t \Leftrightarrow \nexists p$ t.q. $p^K | t$.

Como a é crescente, vamos supor que, para certo i_0, vale que

$$(\exists i \leq i_0 \text{ t.q. } a_i = t \Leftrightarrow \nexists p \text{ t.q. } p^K | t), \forall t \leq a_{i_0}.$$

• Base: $i_0 = 1$ ✓

Defina $f_{i_0}(x) = \sum_{j=1}^{i_0} \left\lfloor \sqrt[K]{\frac{x}{a_j}} \right\rfloor$

Assim, a_{i_0+1} é o menor $x > a_{i_0}$ t.q.

$$x = 1 + f_{i_0}(x)$$

Observe que $f_{i_0}(a_{i_0}) = a_{i_0}$, pois o termo $\left\lfloor \sqrt[K]{\frac{a_{i_0}}{a_{i_0}}} \right\rfloor = 1$.

Vamos analisar $g_{i_0}(x) = f_{i_0}(x+1) - f_{i_0}(x)$, para $x = a_{i_0}; a_{i_0}+1; \ldots; a_{i_0+1}$.

• Fato 1: Se $\left\lfloor \sqrt[K]{\frac{x+1}{a_j}} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt[K]{\frac{x}{a_j}} \right\rfloor = 1 \Rightarrow$ $(*)$

$$\Rightarrow \left\lfloor \sqrt[K]{\frac{x+1}{a_\ell}} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt[K]{\frac{x}{a_\ell}} \right\rfloor \neq 1, \forall j \neq \ell \leq i_0 . \quad (+)$$

Prova: Se $(*) \Rightarrow x+1 = a_j \cdot t^K$. S.P.G. $a_j < a_\ell \Rightarrow t > u \Rightarrow$ "sobra" algum fator de t.

Mas, se $(+) \Rightarrow x+1 = a_\ell \cdot u^K$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow a_\ell = \frac{a_j \cdot t^K}{u^K} \Rightarrow \exists p$ t.q. $p^K | a_\ell$. Abs!

□

• Fato 0: $\left\lfloor \sqrt[K]{\frac{x+1}{a_j}} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt[K]{\frac{x}{a_j}} \right\rfloor \leq 1$, pois

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{x+1}{a_j}} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt[K]{\frac{x}{a_j}} \right\rfloor \leq \sqrt[K]{\frac{x+1}{a_j}} - \sqrt[K]{\frac{x}{a_j}} + 1 < \frac{x+1}{a_j} - \frac{x}{a_j} + 1 \leq 2.$$ Como é inteiro... □

ioblema 2 (Álgebra/Shine) - Folha 2/3

Pelo fato 1, temos que $g(x) = 1$ ou 0.

Fato 2: Seja x_0 o primeiro valor t.q. $g_{i_0}(x_0) = 0$.

$\Rightarrow a_{i_0+1} = x_0 + 1$.

Prova: $g_{i_0}(x) = 1, \quad \forall \; a_{i_0} \leq x < x_0$.

$$\Rightarrow f_{i_0}(x+1) = f_{i_0}(a_{i_0}) + (x + 1 - a_{i_0})$$

$$= a_{i_0} + x_0 + 1 - a_{i_0} = x+1 \Rightarrow a_{i_0} \neq x+1, \forall a_{i_0} \leq x < x_0.$$

Mas, $g_{i_0}(x_0) = 0 \Rightarrow f_{i_0}(x_0+1) = f_{i_0}(x_0) = x_0$

$$\Rightarrow (x_0 + 1) = 1 + f_{i_0}(x_0+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{i_0+1} = x_0 + 1. \qquad \square$$

Fato 3: Para todo número t_1 se $\nexists p$ t.q $p^k | t_1$, então $g_{i_0}(t_1 - 1) = 0$

Prova:

Basta mostrar que $\left\lfloor \sqrt[k]{\frac{t_1}{a_j}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{t_1 - 1}{a_j}} \right\rfloor$. $\Leftarrow\Rightarrow$

$\Leftarrow\Rightarrow \sqrt[k]{\frac{t_1}{a_j}}$ não é inteiro $\Leftarrow\Rightarrow \frac{t_1}{a_j}$ não é potência k ésima $\Leftarrow$

$\Leftarrow p^k \nmid t_1, \forall p. \quad \square$

Fato 4: Para todo número t, se $\exists\, p$ t.q. $p^k | t$, então:

$$g(t-1) = 1 \text{ ou } \exists\, a_{i_0} < t' < t \mid g(t'-1) = 0.$$

Escreva $t = a \cdot b^k$, com b máximo. $\Rightarrow p^k \nmid a, \; \forall p$.

- Se $a > a_{i_0} \Rightarrow g(a-1) = 0$, pelo Fato 3.
- Se $a \leq a_{i_0}$, pela hipótese, $a_j = a \Rightarrow \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{t}{a_j}} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{t-1}{a_j}} \right\rfloor = b - (b-1)$
$= 1$.

Pelo Fato 1, $g(t-1) = 0$.

OK!

Os fatos 2, 3 e 4 implicam que:

$$\left(\exists i \leq i_0+1 \text{ t.q. } a_i = t \iff \nexists p \text{ t.q. } p^k \mid t\right), \ \forall t \leq a_{i_0+1}.$$

Logo, por indução:

$$\left(\exists i \text{ t.q. } a_i = t \iff \nexists p \text{ t.q. } p^k \mid t\right), \ \forall t$$

Considerando t primo, o lado direito sempre é verdade,

logo, $\exists i$ t.q. $a_i = p$ primo, $\forall p$ primo.

$\square$