Folha 1/5

NÍVEL 3

PROBLEMA 5

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

$\boxed{a}$ Vamos falar que $n \sim m \iff n \in A_j$ e $m \in A_j$, $\exists j \in \{0,1\}$.

e $n \nsim m \iff$ não $(n \sim m)$.

Lemma 1: $n \nsim 2n$. Prova: $a < 2 = \frac{2n}{n} = 2 < b \Rightarrow$ não $\left(\begin{matrix} \frac{2n}{m} < a \\ \text{ou} \\ b < \frac{2n}{m} \end{matrix} \right)$

$\Rightarrow$ não $(n \sim 2n) \Rightarrow n \nsim 2n$.

Como $n \nsim 2n$, existe $n \leq j < 2n$, tq. $j \nsim j+1$, pois caso contrário, $n \sim n+1 \sim n+2 \sim \dots \sim 2n$. Abs!

$\Rightarrow$ $j \nsim j+1 \nsim 2(j+1) \Rightarrow j \sim 2(j+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2(j+1)}{j} < a$ ou $b < \frac{2(j+1)}{2}$.

$\Rightarrow \underbrace{2 + \frac{2}{j} < a}_{\text{falso, pois } a<2}$ ou $b < 2 + \frac{2}{j}$.

$\Rightarrow b < 2 + \frac{2}{j}$. Mas $j \geq n$. $\Rightarrow b < 2 + \frac{2}{j} \leq 2 + \frac{2}{n}$

Mas n é qualquer, logo $b < 2 + \frac{2}{n}$, $\forall n$.

Mas $\frac{2}{n}$ é tão pequeno quanto eu queira $\Rightarrow b < 2 + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow b \leq 2$. Absurdo!

Logo, não há partições A_0 e A_1 com tal propriedade. $\square$

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

$\boxed{b}$ O lema 1 continua válido, porém $x \nsim y \nsim z$ não mais implica $x \sim z$.

• Se $b > 4$, então $n \nsim 2n$, $n \nsim 4n$; $2n \nsim 4n \Rightarrow n, 2n, 4n$ estão em partições distintas. Como $n \nsim 2n$, $\exists\, j \geq n$ t.q. $j \nsim j+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad j \nsim j+1 \nsim 2(j+1) \qquad \Rightarrow \qquad j \sim 2(j+1)$$
$$j+1 \nsim 4(j+1), \quad 2(j+1) \nsim 4(j+1) \qquad \text{ou} \qquad j \sim 4(j+1)$$

$$\Rightarrow \frac{2(j+1)}{j} > b \quad \text{ou} \quad \frac{4(j+1)}{j} > b \quad \Rightarrow \quad \frac{4(j+1)}{j} > b$$

$$\Rightarrow 4 + \frac{4}{j} > b \quad \Rightarrow \quad 4 + \frac{4}{n} > b, \ \forall n \Rightarrow 4 \geq b \quad \text{Abs!}$$

Logo, $b \leq 4$.

• Se $b > a^2$.

Como $n \nsim 2n$; $\exists\, j \geq n-1$ t.q. $j-1 \nsim j$

Suponha n suficientemente grande. $\Rightarrow j$ suficientemente grande.

$j \nsim \lceil aj \rceil$, pois $\frac{\lceil aj \rceil}{j} > \frac{aj}{j} = a$ e $\frac{\lceil aj \rceil}{j} < \frac{aj+1}{j} = a + \frac{1}{j} < b$, para j suf. gde.

Pelo mesmo motivo,

$\lceil aj \rceil \nsim \lceil a \lceil aj \rceil \rceil$.

Mas será que $j \nsim \lceil a \lceil aj \rceil \rceil$?

$$\frac{\lceil a \lceil aj \rceil \rceil}{j} > \frac{a^2 j}{j} = a^2 > a \quad \text{e} \quad \frac{\lceil a \lceil aj \rceil \rceil}{j} < \frac{a \lceil aj \rceil + 1}{j} = \frac{a^2 j + a + 1}{j} = \quad \ldots$$

NÍVEL 3

Folha 3/5

PROBLEMA 5

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

$= a^2 + \frac{a+1}{j} < b$, para j suficientemente grande.

Logo: $j-1 \nsim j \nsim \lceil aj \rceil$, $j \nsim \lceil a \lceil aj \rceil \rceil$, $\lceil aj \rceil \nsim \lceil a \lceil aj \rceil \rceil$ $\Rightarrow$ $j-1 \sim \lceil aj \rceil$ ou $j-1 \sim \lceil a \lceil aj \rceil \rceil$.

• se $j-1 \sim \lceil aj \rceil \Rightarrow \frac{\lceil aj \rceil}{j-1} > \frac{aj}{j-1} = \frac{aj - a + a}{j-1} = a + \frac{a}{j-1} > a$

e

$\frac{\lceil aj \rceil}{j-1} < \frac{aj+1}{j-1} = \frac{a(j-1) + a + 1}{j-1} = a + \frac{a+1}{j-1} < b$, para j suf. gde. Abs!

• se $j-1 \sim \lceil a \lceil aj \rceil \rceil \Rightarrow \frac{\lceil a \lceil aj \rceil \rceil}{j-1} > \frac{\lceil aj \rceil}{j-1} > a$

e

$\frac{\lceil a \lceil aj \rceil \rceil}{j-1} < \frac{a \lceil aj \rceil + 1}{j-1} < \frac{a(aj+1)+1}{j-1} = \frac{a^2 j + a + 1}{j-1} =$

$= a^2 + \frac{a^2 + a + 1}{j} < b$, para j suf gde.

Abs!

Logo, $b > a^2$ não pode! $\Rightarrow$

$\Rightarrow b \leq a^2$.

Conjectura: Qualquer par (a,b) t.q. $2 < b \leq a^2 < 4$ funciona!

NÍVEL 3 Folha 4/5

PROBLEMA 5

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

Construção (para $a^2 \geq b$ e $a \geq \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

Seja $n_0 = 1$ e $n_i = \lfloor a n_{i-1} \rfloor$.

$$A_0 = [n_0, n_1 - 1] \cup [n_3, n_4 - 1] \cup \cdots$$

$$A_1 = [n_1, n_2 - 1] \cup [n_4, n_5 - 1] \cup \cdots$$

$$A_2 = [n_2, n_3 - 1] \cup [n_5, n_6 - 1] \cup \cdots$$

Prova que funciona:

Dentro de um mesmo intervalinho $[n_i, n_{i+1} - 1]$, quaisquer dois elementos $\alpha < \beta$:

$$\frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{n_{i+1} - 1}{n_i} = \frac{\lfloor a n_i \rfloor - 1}{n_i} \leq \frac{a n_i - 1}{n_i} < a.$$

Dentro de dois intervalinhos diferentes: $\alpha \in [n_i, n_{i+1} - 1]$ e $\beta \geq n_{i+3}$

$$\frac{\beta}{\alpha} \geq \frac{n_{i+3}}{n_{i+1} - 1} = \frac{\lfloor a \lfloor a n_{i+1} \rfloor \rfloor}{n_{i+1} - 1} > \frac{a \lfloor a n_{i+1} \rfloor - 1}{n_{i+1} - 1} > \frac{a(a n_{i+1} - 1) - 1}{n_{i+1} - 1} =$$

$$= \frac{a^2 n_{i+1} - a - 1}{n_{i+1} - 1} = a^2 + \frac{a^2 - a - 1}{n_{i+1} - 1} > b + \frac{a^2 - a - 1}{n_{i+1} - 1} = b + \frac{(a - \varphi)(a - \varphi')}{n_{i+1} - 1} \geq b$$

Logo, funciona!

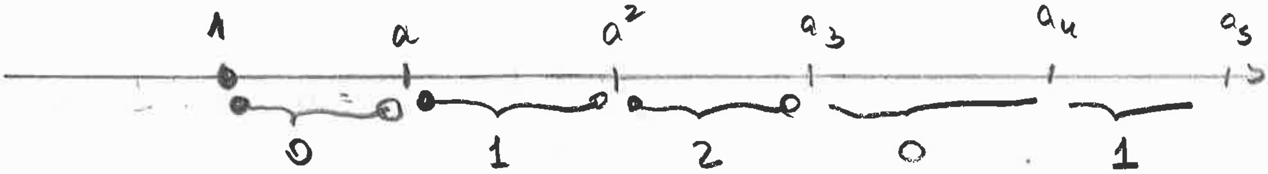
PROBLEMA 5

Todas as suas soluções devem ser justificadas

NÍVEL 3 Folha 5/5

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.204.007-27



Construção p/ $a^2 \geq b$:

$n \in A_0 \iff a^{3t} \leq n < a^{3t+1}, \quad \exists t \in \mathbb{Z}$

$n \in A_1 \iff a^{3t+1} \leq n < a^{3t+2}, \quad \exists t \in \mathbb{Z}$

$n \in A_2 \iff a^{3t+2} \leq n < a^{3t+3}, \quad \exists t \in \mathbb{Z}.$

Prova $\Rightarrow$ Se α e $\beta \in [a^i, a^{i+1}[$ "no mesmo intervalinho"

$$\frac{\beta}{\alpha} < \frac{a^{i+1}}{a^i} = a \qquad \text{OK!}$$

$\rightarrow$ Se $\alpha \in [a^i, a^{i+1}[$ e $\beta \geq a^{i+3}$ "em intervalinhos diferentes"

$$\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} > \frac{a^{i+3}}{a^{i+1}} = a^2 \geq b. \qquad \text{OK!}$$

Logo, (a, b) funciona $\iff$ $2 < b$, $1 < a < 2$, $a^2 \geq b$.

$\square$

Guilherme Zeus Dantas e Moura

Folha de rascunho

$\frac{n}{m} < a$ ou $b < \frac{n}{m}$.

Isto é, não tem uns números pertos do dobro do outro.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

S.P.G, $1 \in A_0$, $\Rightarrow b > \frac{2}{1} > a \Rightarrow 2 \in A_1 \Rightarrow b > \frac{4}{2} > a \Rightarrow 4 \in A_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n \in A_{n \pmod b}$

a — $2 \cdot a$

$a+1$ — $2 \cdot (a+1)$

$a+2$ — $2 \cdot (a+2)$

Pelo mesmo raciocínio

$a \not\sim 2a$

$a+1 \not\sim 2(a+1)$

$a+2 \not\sim 2(a+1)$

b)

A_0	A_1	A_2
$n_0 = 1$	n_1	n_2
⋮	⋮	⋮
$\lfloor a n_0 \rfloor = n_1$	$\lfloor a n_1 \rfloor = n_2$	$\lfloor a n_2 \rfloor = n_3$
n_3		

Guilherme Zeus Dantas e Moura

Folha de rascunho

$a = 1,1$ e $b = 3$?

n; $n+1$, $n+2$; $n+3$; $n+4$

A_0 1 4

$2n$, $2(n+1)$; $2(n+2)$; $2(n+3)$; $2(n+4)$

A_1 2

$\boxed{\frac{b}{a} \leq 2}$

A_2 3

$a = 3/2$? 4

$a^2 \leq b$

ruim

$4n \not\sim 6n \not\sim 9n$

~~Suponha que $a^2 \geq b$.~~

$\boxed{a = 3/2; \quad b = 9/4}$ $\Rightarrow$ $4n+\varepsilon \not\sim 4n+\varepsilon'$?

$6n+\varepsilon$

$9n+\varepsilon$

$\Rightarrow$ $4n+\varepsilon' \sim 6n+\varepsilon$

$9n+\varepsilon \sim$

$4n \not\sim 6n \not\sim 9n$

$(4n-1) \not\sim$

$4n \sim 1 \sim 6n$

$\boxed{4n \sim 1 \sim 9n \text{ pode!}}$

$j' \not\sim j \not\sim aj$

$\not\sim \quad \not\sim$

$a^2 j$

$\Rightarrow$ $j' \sim aj$ ou $j' \sim a^2 j$ $\Big\}$ obs!

1 a a^2 a^3 a^4 a^5

0 1 2 0 1 ...

funciona!