(8, Treinamento Cone Sul, Lista 3)

Sequência x_n:
- $x_1 = 5$
- $x_{k+1} = x_k^2 - 3x_k + 3$

Prove $x_k > 3^{2^{k-1}}$.

$x_1 = 5 > 3^{2^0} = 3$

$x_2 = 13 > 3^{2^1} = 9$

$x_{k+1} = x_k(x_k - 3) + 3$.

Seja $y_i = x_i - 3/2$. Então $x_i = y_i + 3/2$.

$\Rightarrow y_{i+1} + 3/2 = (y_i + 3/2)(y_i - 3/2) + 3 \Rightarrow y_{i+1} = y_i^2 - \frac{9}{4} + 3 - \frac{3}{2} = y_i^2 - \frac{3}{4}$.

Quero $y_i > 3^{2^{k-1}} - 3/2$ (Acho que dá pra provar $y_i \geq 3^{2^{k-1}} + 1/2$).

$y_1 = 7/2 \geq 3^1 + 1/2$.

$y_2 = (7/2)^2 - 3/4 = \frac{46}{4} = \frac{23}{2} > 3^2 + 1/2 = 19/2$.

Suponha que $y_k \geq 3^{2^{k-1}} + 1/2 \Rightarrow (y_k)^2 \geq 3^{2^k} + 3^{2^{k-1}} + 1/4$

$\Rightarrow y_{k+1} \geq 3^{2^k} + \underbrace{3^{2^k}}_{\geq 1} - 1/2 \geq 3^{2^k} + 1/2$ $\square$

Por indução

$\Rightarrow y_k \geq 3^{2^{k-1}} + 1/2 \Rightarrow x_k \geq 3^{2^{k-1}} + 2$.