Desigualdades

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeudanmou@gmail.com

Os problemas desta lista foram majoritamente retirados das listas do Emiliano Augusto Chagas (Semana Olímpica 2015) e Onofre Campos (Semana Olímpica 2001).

1. Seja $x > 1$ um número real. Prove que
$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

2. Sejam a, b reais positivos. Prove que
$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

3. Seja x um número real. Prove que $x^6 + 2 \geqslant x^4 + 2x$.

4. Sejam a, b, c, d reais positivos. Prove que o número
$$\frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$
está estritamente entre 1 e 2.

5. Seja n um inteiro maior que 2. Prove que
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{2} - \frac{1}{n}.$$

6. Seja n um inteiro maior que 1. Prove que
$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

7. Sejam x, y reais. Prove que
$$x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 41 \geqslant 0.$$

8. Sejam a, b, c os tamanhos dos lados de um triângulo. Mostre que a função
$$f(x) = b^2x^2 + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)x + c^2$$
é positiva, para todo real x.

9. Sejam a, b reais positivos. Prove e determine o caso de igualdade das seguintes inequações

(a) $$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

(b) $$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

(c) $$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

10. Sejam a, b reais tais que $a^3 + b^3 = 2$. Prove que $a + b \leqslant 2$.

11. Se a, b são reais positivos tais que $a + b = 1$, prove que $27ab^2 \leqslant 4$ e determine quando ocorre a igualdade.

12. Se x é um real positivo, qual é o valor mínimo que
$$x + \frac{1}{x}$$
pode atingir? Para que valores de x esse mínimo é atingido?

13. Sejam a, b, c reais positivos. Prove que
$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

14. Sejam a, b reais positivos tais que $ab = 1$. Prove que
$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4.$$

15. Generalize as inequações do Problema 9 para três reais positivos e prove as inequações generalizadas.

16. Sejam a, b, c reais. Prove que
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

17. Sejam a, b, c reais. Prove que
$$a^4 + c^4 + b^4 \geqslant abc(a+b+c).$$

18. Sejam a, b, c reais positivos. Prove que
$$a + b + c \leqslant \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}.$$

19. Variando a, b, c sobre os reais positivos, determine o valor mínimo de
$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}.$$

20. Determine todos os x, y, z reais maiores que 1 tais que
$$x + y + z + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{y-1} + \frac{3}{z-1}$$
$$\parallel$$
$$2\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2}\right).$$

21. Seja n um inteiro positivo. Dados n reais positivos, prove que a média aritmética desses termos é maior ou igual a média geométrica dos mesmos.

22. Sejam a, b, c reais positivos. Prove que
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

23. Prove que, para quaisquer números reais positivos a, b e c,
$$(a+b)(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

24. Sejam a, b reais positivos tais que $a + b = 1$. Prove que
$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geqslant 9.$$

25. Sejam a, b, c, d reais positivos. Prove que
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

26. Seja P um ponto no interior de um triângulo e sejam h_a, h_b, h_c as distâncias de P aos lados a, b, c, respectivamente. Mostre que o valor mínimo de
$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c}$$
ocorre quando P é o incentro do triângulo ABC.

27. Sejam a, b, c reais não negativos tais que $a+b+c = 3$. Prove que
$$\left(a^2 - ab + b^2\right)\left(b^2 - bc + c^2\right)\left(c^2 - ca + a^2\right) \leqslant 12$$

28. Sejam a, b, c números reais positivos. Prove que
$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

29. Se a, b, c, d, e são números reais tais que $a + b + c + d + e = 8$ e $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 1$, determine o valor máximo de e.

30. Seja $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ uma sequência infinita de inteiros positivos. Prove que existe um único inteiro $n \geqslant 1$ tal que
$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

31. Let a, b, c be positive real numbers for which $a + b + c = 1$. Prove that
$$\frac{a - bc}{a + bc} + \frac{b - ca}{b + ca} + \frac{c - ab}{c + ab} \leqslant \frac{3}{2}.$$

32. Determine o menor número real C para o qual a desigualdade
$$C(x_1^{2005} + x_2^{2005} + x_3^{2005} + x_4^{2005} + x_5^{2005})$$
$$\geqslant$$
$$x_1x_2x_3x_4x_5(x_1^{125} + x_2^{125} + x_3^{125} + x_4^{125} + x_5^{125})^{16}$$
é válida para quaisquer x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 reais positivos.

33. For positive real numbers a, b, c satisfying $a+b+c = 1$, prove that
$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leqslant 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right).$$

34. Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ reais dados. Prove que
$$|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n|$$
$$\leqslant$$
$$\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

35. Dados n reais positivos $a_1, \ldots, a_n$, prove que
$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2.$$

36. Sejam n um inteiro positivo e $x_1, \ldots, x_n$ reais positivos. Prove que
$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right)(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n)$$
$$\leqslant$$
$$\frac{(n+1)^2}{4n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2.$$

37. Prove que, para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos,
$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right)$$
$$\geqslant$$
$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n).$$

38. Let $n \geqslant 3$ be an integer, and let $a_2, a_3, \ldots, a_n$ be positive real numbers such that $a_2a_3\cdots a_n = 1$. Prove that
$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3\cdots(1 + a_n)^n > n^n.$$

39. Let a, b, c be positive real numbers so that $abc = 1$. Prove that
$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

40. Sejam u, v, w reais positivos tais que $u + v + w + \sqrt{uvw} = 4$. Prove que
$$\sqrt{\frac{uv}{w}} + \sqrt{\frac{vw}{u}} + \sqrt{\frac{wu}{v}} \geqslant u + v + w.$$

41. (a) Prove that
$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$
for all real numbers x, y, z, each different from 1, and satisfying $xyz = 1$.

(b) Prove that equality holds above for infinitely many triples of rational numbers x, y, z, each different from 1, and satisfying $xyz = 1$.

42. Sejam x, y, z reais positivos tais que $xyz \geqslant 1$. Prove que
$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geqslant 0.$$