Tutoria, 18:00

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. Seja ABC um triângulo com $\angle C = 90°$, e seja H o pé da altura relativa a C. Um ponto D é escolhido no interior do triângulo CBH tal que CH bisecta AD. Seja P a intersecção das retas BD e CH. Seja ω o semicírculo de diâmetro BD que encontra o segmento CB em um ponto interior. Uma reta passando por P é tangente a ω em Q. Prove que as retas CQ e AD se encontram em ω.

Solução. Defina Γ como o circuncírculo de ABC. Defina X como a projeção de D sobre AB. Note que $AH = HX$. Defina Z como a intersecção de AD e ω. Como $90° = \angle DZB = \angle AZB$, $Z \in \Gamma$.

Defina Q' como a segunda intersecção de CZ com ω. Como $Q' \in \omega$, vale que $\angle BQ'D = 90°$. Note que $\angle ABC = \angle AZC = \angle DZQ' = \angle DBQ'$. Portanto, por ângulo-ângulo, $\triangle BCA \sim \triangle BQ'D$.

Seja ϕ a rotohomotetia que leva $\triangle BCA$ em $\triangle BQ'D$. A transformação ϕ possui centro B e $\angle ABD$. Tome T como a intersecção da tangente a Γ por C com a reta AB. Vamos mostrar que ϕ leva T em P.

A condição dos ângulos é verdade, pois $\angle TBP = \angle ABD$, que é o ângulo da rotohomotetia. A condição das razões também é verdade, pois temos que

$$\frac{TA}{TB} = \frac{TA}{TC} \cdot \frac{TC}{TB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AC \cdot \cos\angle A}{BC \cdot \cos\angle B} = \frac{AH}{HB} = \frac{HX}{HB} = \frac{PD}{PB}.$$

Portanto, de fato, ϕ leva T em P e, consequentemente, leva a tangente TC ao circulo Γ na reta tangente PQ' a ω. Logo, $Q' \equiv Q$. Finalmente, as retas AD e CQ se intersectam em Z, que está sobre ω.

2. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$.