Algoritmos

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Definição 1 Um *algoritmo* é um conjunto de procedimentos sistemáticos que resolvem um problema.

Por definição, um algoritmo deve ter duas propriedades:

- Resolver o problema.
- Terminar.

A segunda propriedade parece uma besteira, mas às vezes não é trivial mostrar que um algoritmo acaba.

Situações em que algoritmos podem ser úteis

- Uma operação é dada no problema, e queremos organizar uma sequência de operações para alcançar uma meta.
- Você quer construir um exemplo.
- Temos uma configuração complicada e queremos reduzi-la a algo mais simples.
- Você quer representar um conjunto de alguma outra forma.
- Você quer empacotar coisas ou separá-las em grupos.
- Jogos com estratégias vencedoras.

Técnicas

- Você pode usar uma indução para provar que um algoritmo funciona.
- Uma maneira de demonstrar que um algoritmo acaba é encontrar um *monovariante*, ou seja, algo que sempre diminui ou sempre aumenta.
- Às vezes um invariante pode ajudar nas duas tarefas.
- *Ordenar* coisas facilita a indução e a organização do seu algoritmo.
- Um algoritmo simples e efetivo em muitas situações é o *algoritmo guloso*, em que sempre escolhemos a melhor opção localmente. Nem sempre o algoritmo guloso é o melhor, porém. Tome cuidado!
- Teste seu algoritmo com *casos pequenos*.

Exemplos

Exemplo 1 Considere o *algoritmo de Euclides*: sejam a e b inteiros positivos com $a > b$. Para calcular $\text{mdc}(a, b)$, fazemos os seguintes passos:

1. Dividimos a por b, obtendo resto r. Se $r = 0$, o $\text{mdc}(a, b)$ é b.
2. Se $r > 0$, trocamos (a, b) por (b, r) e voltamos ao passo anterior.

Problemas

Problema 1 Há pedras de massa total 9 toneladas. Caminhões, cada um com capacidade de 3 toneladas, estão disponíveis para carregar essas pedras. Sabe-se somente que nenhuma pedra pesa mais que 1 tonelada. Qual é a menor quantidade de caminhões necessários para carregar todas as pedras? Cada caminhão só faz uma viagem.

Problema 2 Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de $\{1, 2, \ldots n\}$, todos com 3 elementos. Prove que é possível pintar $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ números de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de modo que cada A_i tenha pelo menos um número não pintado.

Problema 3 Uma quantidade finida de cartas é colocada em cada um dos pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, O, sendo $n \geq 3$. Em cada passo é permitido fazer uma das seguintes operações:

(i) Se há mais de duas cartas em A_i, tirar três cartas de A_i e colocá-las em A_{i-1}, A_{i+1} e O, uma carta em cada ponto; os indíces são cíclicos, isto é, $A_{n+1} = A_1$ e $A_0 = A_n$.

(ii) Se há pelo menos n cartas em O, tirar n cartas de O e colocá-las em $A_1, A_2, \ldots, A_n$, uma carta em cada ponto.

Sendo a quantidade de cartas pelo menos n^2+3n+1, prove que é possível deixar, após uma quantidade finita de operações, pelo menos $n + 1$ cartas em cada ponto.

Problema 4 Temos um tabuleiro $m \times n$. Atribui-se inicialmente um número inteiro não negativo a cada uma das casas. No tabuleiro é permitido efetuar a seguinte operação: em qualquer par de casas com um lado em comum, pode-se modificar os dois números somando-lhes um mesmo número inteiro (que pode ser negativo), sempre que ambos resultados sejam não negativos.

Que condições devem ser satisfeitas inicialmente na atribuição dos números, para deixar, mediante aplicações reiteradas da operação, zero em todas as casas?

Problema 5 Prove que o algoritmo de Euclides termina após no máximo $\lceil \log_\phi \max(a, b) \rceil$ passos, em que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a razão áurea.

Problema 6 (Frações Egípcias) Prove que todo racional positivo menor que 1 pode ser escirto como soma de frações de numerador 1 e denominadores todos distintos.

Problema 7 Em um grafo, cada vértice tem grau menor ou igual a Δ. Prove que é possível pintar os vértices do grafo com $\Delta + 1$ cores, de modo que dois vértices conectados têm cores diferentes.

Problema 8 Uma loja vende garrafas com as seguintes capacidades: 1 litro, 2 litros, . . . , 1966 litros. Os preços das garrafas satisfazem duas condições:

- Duas garrafas têm o mesmo preço se e somente se suas capacidades m, n ($m > n$) satisfazem $m - n = 1000$.
- Cada garrafa de m litros de capacidade ($1 \leq m \leq 1000$) custa $1996 - m$ dinheiros.

Ache todos os pares de garrafas de m e n litros tais que:

(a) $m + n = 1996$.

(b) o custo total do par seja o menor possível;

(c) com o par se possa medir k litros, para todo k inteiro desde 1 até 1996.

Observação. As operações permitidas para medir são:

- Encher ou esvaziar qualquer das duas garrafas.
- Passar líquido de uma garrafa para a outra.

Ter-se-á conseguido medir k litros quando a quantidade de litros de uma garrafa mais a quantidade de litros da outra é igual a k.

Problema 9 Em cada casa de um tabuleiro quadriculado 2000×2000 deve-se escrever um dos três números: -1, 0 ou 1. Se, em seguida, somam-se os números escritos em cada linha e colina, obtém-se 4000 resultados. Mostre é que possível preencher o tabuleiro de modo que os 4000 ressultados sejam todos distintos.

Problema 10 Determine se existe uma sequência infinita $a_0, a_1, \ldots$ de inteiros positivos que satisfaz as seguintes condições:

- Todos os números inteiros positivos aparecem na sequência uma única vez.
- Todos os números inteiros positivos aparecem na sequência $|a_0 - a_1|, |a_1 - a_2|, \ldots$ uma única vez.

Problema 11 Seja $A_1A_2B_1B_2$ um quadrilátero convexo. Nos vértices A_1 e A_2, adjacentes, há duas cidades argentinas. Nos vértices B_1 e B_2, há duas cidades brasileiras. No interior do quadrilátero, existem a cidades argentinas e b cidades brasileiras, sem haver três cidades colineares. Determine se é possível, independentemente da posição das cidades, construir estradas retas, cada uma das quais conecta duas cidades argentinas ou duas cidades brasileiras, de modo que:

- Não existam duas estradas que se intersectem em um ponto que não seja uma cidade.
- De qualquer cidade argentina, seja possível chegar a qualquer outra cidade argentina.
- De qualquer cidade brasileira, seja possível chegar a qualquer outra cidade brasileira.

Se for sempre possível, monte um algoritmo que construa uma possível configuração.

Problema 12 Prove que, dado k inteiro positivo, m e unicamente representado na forma

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_t}{t}$$

em que $a_k > a_{k-1} > \cdots > a_t \geq t \geq 1$.

Problema 13 Um conjunto de inteiros não negativos $\{x, y, z\}$ com $x < y < z$ é *histórico* se satisfaz $\{z - y, y - x\} = \{1776, 2001\}$. Mostre que podemos expressar os inteiros não negativos como união disjunta de conjuntos históricos.

Problema 14 Um conjunto A de inteiros é *soma-cheia* se $A \subseteq A + A$, ou seja, cada elemento de A é a soma de dois elementos (não necessáriamente distintos) de A. Um conjunto A de inteiros é *livre de soma zero* se 0 é o único inteiro que não pode ser expresso como soma dos elementos de um subconjunto finito não vazio de A.

Determine se existe um conjunto soma-cheia e livre de soma zero.

Problema 15 **(Casamentos estáveis)** Considere n garotos e n garotas. Cada garoto ordena as garotas e cada garota ordena os garotos. Mostre que é possível formar n casais, cada um com um garoto e uma garota, de modo que não existam dois casais (a, b) e (c, d) tais que a apareça acima de c na ordem de d e d apareça acima de b na ordem de a.

Problema 16 Há n inteiros positivos escritos na lousa, $n \geq 2$. Em cada passo, podemos escolher dois números escritos na lousa, apagá-los e substituí-los por sua soma (ou seja, trocamos a e b por $a + b$ e $a + b$). Encontre todos os valores de n para os quais é sempre possível deixar os n números na lousa iguais após uma quantidade finita de passos.

Problema 17 O senhor Patinhas tem três contas bancárias, cada uma com uma quantidade inteira de patacas. Ele só transfere dinheiro de uma conta para outra se o saldo da segunda conta é dobrado. Prove que o senhor Patinhas consegue deixar todo seu rico dinheirinho em duas contas.

Problema 18 Dada um família F de subconjuntos de $S = \{1, 2, ..., n\}$ ($n \geq 2$), uma jogada permitida é escolher dois conjuntos disjuntos A e B de F e agregar $A \cup B$ a F, mantendo A e B em F.

Inicialmente, F tem exatamente todos os subconjuntos unitários de S. O objetivo é obter, mediante jogadas permitidas, que F tenha todos os subconjuntos de $n - 1$ elementos de S.

Determine o menor número de jogadas necessárias para alcançar o objetivo.

Problema 19 Determine se existe uma sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ de inteiros não negativos que satisfaz as seguintes condições:

- Todos os inteiros não negativos aparecem na sequência uma única vez.
- A sequência
$$b_n = a_n + n, n \geq 0$$
é formada por todos os números primos, cada um aparecendo exatamente uma vez.

Problema 20 **(OBM 2018, 2)** Guilherme escreve um número racional q em uma lousa. Uma operação consiste em apagar q e substituí-lo por $q+1$; ou por $q-1$; ou por $\frac{q-1}{2q-1}$ se $q \neq \frac{1}{2}$. O objetivo final de Guilherme é escrever o número $\frac{1}{2018}$ após realizar uma quantidade finita de operações.

a) Mostre que se o número inicial escrito é 0, então Guilherme não poderá alcançar seu objetivo.

b) Encontre todos os números iniciais para os quais Guilherme pode atingir seu objetivo.

Problema 21 **(IMO 2019, 5)** O Banco de Bath emite moedas com um H num lado e um T no outro. Harry possui n dessas moedas colocadas em linha, ordenadas da esquerda para a direita. Ele repetidamente realiza a seguinte operação: se há exatamente $k > 0$ moedas mostrando H, então ele vira a k-ésima moeda contada da esquerda para a direita; caso contrário, todas as moedas mostram T e ele para. Por exemplo, se $n = 3$ o processo começando com a configuração THT é $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, que acaba depois de três operações.

(a) Mostre que, para qualquer configuração inicial, Harry para após um número finito de operações.

(b) Para cada configuração inicial C, seja $L(C)$ o número de operações antes de Harry parar. Por exemplo, $L(THT) = 3$ e $L(TTT) = 0$. Determine a média de $L(C)$ sobre todas as 2^n possíveis configurações iniciais C.

Problema 22 **(IMO 2019, 3)** Uma rede social possui 2019 usuários, alguns deles são amigos. Sempre que o usuário A é amigo do usuário B, o usuário B também é amigo do usuário A. Eventos do seguinte tipo podem acontecer repetidamente, um de cada vez:

Três usuários A, B e C tais que A é amigo de B e A é amigo de C, mas B e C não são amigos, mudam seus estados de amizade de modo que B e C agora são amigos, mas A deixa de ser amigo de B e A deixa de ser amigo de C. Todos os outros estados de amizade não são alterados.

Inicialmente, 1010 usuários possuem exatamente 1009 amigos cada e 1009 usuários possuem exatamente 1010 amigos cada. Prove que existe uma sequência de tais eventos tal que, após essa sequência, cada usuário é amigo de no máximo um outro usuário.

Referências

[1] *Algoritmos,* Carlos Shine.