▶ **PROBLEMA 1**

Seja ABC um triângulo e ω o seu circuncírculo. Defina D e E são os pés das bissetrizes por B e C. A reta DE encontra ω nos pontos F e G. Prove que as tangentes a ω por F e G são tangentes ao ex-incírculo do $\triangle ABC$ relativo ao vértice A.

▶ **PROBLEMA 2**

Na mitologia grega, existem Aleteia, Dolo e Momo. Lete encontra as três criaturas gregas, mas esqueceu quem é quem. Por sorte, Lete sabe que as três criaturas recentemente se encontraram com a titânide Mnemosine, e portanto obtiveram a omnisciência, i.e., o deter todo o saber; e também sabe que Aleteia sempre conta verdades, Dolo sempre conta mentiras e Momo responde aleatóriamente. Uma *pergunta boa* é uma pergunta que qualquer uma das criaturas gregas vai saber responder `SIM` ou `NÃO`.

(a) Lete consegue distinguir as três criaturas gregas, se puder fazer somente 3 perguntas para qualquer um deles?

(b) Lete consegue distinguir as três criaturas gregas, se puder fazer somente 1 pergunta para cada um deles?

▶ **PROBLEMA 3**

Para um inteiro positivo n, dizemos que uma n-*embaralhamento* é uma bijeção $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ tal que existem exatamente dois elementos i em $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\sigma(i) \neq i$.

Fixe quatro n-embaralhamentos distintos dois a dois $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Seja q um primo e seja $\mathbb{F}_q$ o conjunto dos inteiros módulo q. Considere todas as funções $f : (\mathbb{F}_q^n)^n \to \mathbb{F}_q$ que satisfazem, para todo inteiro i com $1 \leq i \leq n$ e todo $x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y, z \in \mathbb{F}_q^n$,

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, y + z, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

e que satisfazem, para todo $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}_q^n$ e todo $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = -f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

(Note que todas as equações anteriores são em $\mathbb{F}_q$.)

Dada uma n-upla $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{F}_q^n)^n$, seja $g(x_1, \dots, x_n)$ o número de diferentes valores que $f(x_1, \dots, x_n)$ pode assumir sobre todas as possíveis funções f nas condições acima.

Pegue $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{F}_q^n)^n$ de forma uniformemente aleatória, e seja $\varepsilon(q, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ o valor esperado de $g(x_1, \dots, x_n)$. Finalmente, seja

$$\kappa(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = -\lim_{q \to \infty} \log_q \left(-\ln \left(\frac{\varepsilon(q, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) - 1}{q - 1} \right) \right).$$

Pegue quatro n-embaralhamentos distintos dois a dois $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ de forma uniformemente aleatória do conjunto de todos os n-embaralhamentos. Seja $\pi(n)$ o valor esperado de $\kappa(\sigma_1, \dots, \sigma_4)$. Suponha que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios com coeficientes reais tais que $q(-3) \neq 0$ e $\pi(n) = \frac{p(n)}{q(n)}$ para infinitos valores de n inteiros positivos. Calcule $\frac{p(-3)}{q(-3)}$.

▶ **PROBLEMA 4**

Seja p_n o número de partições não ordenadas de n, i.e., o número de multiconjuntos com elementos inteiros positivos cuja soma é n. Seja e_n o número de p_i's pares, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Prove que

$$e_n > \frac{\sqrt{n}}{197}.$$

▶ **PROBLEMA 5**

Seja $x_1, x_2, ...$ uma sequência não-decrescente de inteiros positivos definida por:

$$insiraumaequacão$$

Encontre todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes inteiros positivos tais que $\frac{n}{P(x_n)}$ passa por todos os inteiros.