Soluções do 1º Simulado Geral de Velocidade

05 de março de 2020

▶ **PROBLEMA 1**

Seja ABC um triângulo. São dados pontos P e Q nos segmentos AB e AC, respectivamente, tais que $AP = AQ$. Sejam S e R pontos distintos no segmento BC tal que S está entre B e R, $\angle BPS = \angle PRS$ e $\angle CQR = \angle QSR$. Prove que os pontos P, Q, R, S são concíclicos.

Solução. Pelos ângulos dados, (PRS) é tangente a AB. Analogamente, (QRS) é tangente a AC. Então,

$$\mathrm{Pot}_{(PRS)}A = PA^2 = QA^2 = \mathrm{Pot}_{(QRS)}A.$$

Suponha que $Q \notin (PRS)$. Então $(PRS) \neq (QRS)$ e, portanto, RS é o eixo radical desses dois círculos. Como A possui a mesma potência de ponto em relação aos dois círculos, $A \in RS = BC$, que é absurdo!

Logo, $Q \in (PRS)$.

▶ **PROBLEMA 2**

Existem n casas numa rua. Onde devemos colocar um ponto de ônibus, de modo a minimizar a soma das distâncias entre cada casa e o ponto de ônibus?

Solução. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ as posições das casas (numeradas de acordo com a rua, isto é, X_i está entre X_j e X_k sempre que i está entre j e k). Seja P a posição do ponto de ônibus. Usando desigualdade triangular, temos que

$$\begin{array}{rcr} X_1P + X_nP \geq X_1X_n & \text{com igualdade} \iff & P \text{ está entre } X_1 \text{ e } X_n \\ X_2P + X_{n-1}P \geq X_2X_{n-1} & \text{com igualdade} \iff & P \text{ está entre } X_2 \text{ e } X_{n-1} \\ \vdots & & \\ X_nP + X_1P \geq X_nX_1 & \text{com igualdade} \iff & P \text{ está entre } X_n \text{ e } X_1 \end{array}$$

Somando todas as inequações, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} X_iP \geq \frac{X_1X_n + X_2X_{n-1} + \cdots + X_nX_1}{2}.$$

Ou seja, mostramos que $\sum_{i=1}^{n} X_iP \geq c$, com igualdade quando todas as inequações também valem igualdade. Por sorte, a interseção acontece, e é exatamente todos os pontos no entre $X_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ e $X_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$, exatamente onde devemos construir o ponto de ônibus.

Observação. Se n é par, o resultado se resume a qualquer ponto entre as duas casas do meio. Se n é impar, o ponto de ônibus deve ser colocado na casa do meio.

Observação. A está entre A e B. A está entre A e A.

▶ **PROBLEMA 3**

Os números reais a, b, c, d satisfazem simultaneamente as equações

$$abc - d = 1, \quad bcd - a = 2, \quad cda - b = 3, \quad dab - c = -6.$$

Prove que $a + b + c + d \neq 0$.

Solução. Somando as equações, temos

$$abc + bcd + cda + dab = a + b + c + d$$

e, portanto, a, b, c e d são as raízes de um polinômio $P(x) = x^4 - Mx^3 + Nx^2 - Mx + K$, em que M, N e K são constantes.

Suponha que $M = 0$. Então, $P(x) = x^4 + Nx^2 + K$. Portanto, $\{a, b, c, d\} = \{p, -p, q, -q\}$ para números reais p, q.

Desse modo,

$$\frac{p^2q^2}{p} - p = \alpha \text{ e } \frac{p^2q^2}{-p} + p = \beta,$$

em que α, β são elementos distintos de $\{1, 2, 3, -6\}$.

Porém, a ultima condição implica que $\alpha = -\beta$, que não pode ser satisfeito. Portanto, $M = a + b + c + d \neq 0$.

▶ **PROBLEMA 4**

Sejam x e y inteiros positivos tais que $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Prove que $x - y$ é um quadrado perfeito.

Solução. Como estamos trabalhando com $x, y \geq 0$, temos que $y + 4y^2 = x + 3x^2 \leq x + 4x^2 \implies y \leq x \implies x - y \geq$

Seja $d = \text{mdc}(x, y)$. Defina v e u tal que $x = dv$ e $y = du$. Então

$$\begin{aligned} x(3x+1) &= y(4y+1) \\ v(3dv+1) &= u(4du+1) \end{aligned}$$

Sabemos que $\text{mdc}(v, u) = 1$, então $v|4du + 1$ e $u|3dv + 1$. Em especial, se $4du + 1 = kv$ e $3dv + 1 = ju$, temos que $v(ju) = u(kv) \implies k = j$. Logo,

$$\begin{cases} 4du + 1 = kv \\ 3dv + 1 = ku \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $v = \frac{4d+k}{k^2-12d^2}$ e $u = \frac{3d+k}{k^2-12d^2}$.

Em especial, descobrimos que

$$\begin{cases} k^2 - 12d^2|(4d+k) - (3d+k) = d \\ k^2 - 12d^2|4(3d+k) - 3(4d+k) = k \end{cases}$$

Seja $e = \text{mdc}(k, d)$. Defina k' e d' tal que $k = ek'$ e $d = ed'$. Pelo teorema de Bezout, sabemos que existem a e b tais que $ak + bd = e$, que implica

$$k^2 - 12d^2|e.$$

Porém, $e^2|k^2 - 12d^2|e \implies e = 1 \implies k^2 - 12d^2 = \pm 1$. Como $u > 0$ e $3d + k > 0$, então $k^2 - 12d^2 > 0$ e, portanto,

$$k^2 - 12d^2 = 1.$$

Para finalizar,

$$\begin{aligned} x - y &= d(v - u) \\ &= d\left(\frac{4d+k}{k^2-12d^2} - \frac{3d-k}{k^2-12d^2}\right) \\ &= d^2. \end{aligned}$$