Simulado OBM – 2020.12.19

Problema 1

Qual é a maior quantidade de subconjuntos de 5 elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$ que podemos escolher de modo que quaisquer dois compartilhem exatamente 1 elemento.

Esboço. Isso lembra planos projetivos finitos. Os pontos são os elementos de $\{1, 2, \ldots, 20\}$ e as retas são os subconjuntos.

Solução. A resposta é 16. Seja $S = \{1, 2, \ldots, 20\}$.

Para todo $x \in S$, x pertence a, no máximo, 4 conjuntos. *Prova a cargo do leitor.*

Usando contagem dupla em $(x \in S, C)$, com C um dos conjuntos selecionados e $x \in C$, temos que

$$\#(C) \cdot 5 \leq 20 \cdot 4,$$

isto é, $\#(C) \leq 16$.

Eis um exemplo com 16 conjuntos:

$$\begin{aligned}
&\{1, 2, 3, 4, 17\}; \{5, 6, 7, 8, 17\}; \{9, 10, 11, 12, 17\}; \{13, 14, 15, 16, 17\};\\
&\{1, 5, 9, 13, 18\}; \{2, 6, 10, 14, 18\}; \{3, 7, 11, 15, 18\}; \{4, 8, 12, 16, 18\};\\
&\{1, 6, 11, 16, 19\}; \{2, 5, 12, 15, 19\}; \{3, 8, 9, 14, 19\}; \{4, 7, 10, 13, 19\};\\
&\{1, 4, 12, 14, 20\}; \{2, 8, 11, 13, 20\}; \{3, 5, 10, 16, 20\}; \{4, 6, 9, 15, 20\}.
\end{aligned}$$

Problema 2

Seja ABC um triângulo e Γ seu circuncírculo. Os pontos D e E estão no segmento BC de modo que $\angle BAD = \angle CAE$. O círculo ω é tangente a AD em A e seu centro está em Γ. Seja A' a reflexão de A por BC e sejam L e K as intersecções de $A'E$ com ω. Prove que BL e CK ou BK e CL se intersectam em Γ.

Esboço. Vamos reduzir o problema para mostrar que $ABC \sim ALK$.

Então, A é o centro da homotetia que leva BC em LK. Portanto, também é o centro da homotetia que leva BL em CK. Logo, se $X = BL \cap CK$, $ABCX$ e $ALXK$ são cíclicos, que termina o problema.

Problema 3

Seja $d(n)$ a quantidade de divisores positivos de n e $\sigma(n)$ a soma dos divisores positivos de n. Determine todos os inteiros positivos para os quais

$$d(n) \mid 2^{\sigma(n)} - 1.$$

Esboço. Como $\sigma(n) \geq 1$, $2^{\sigma(n)} - 1$ é ímpar. Logo, $d(n)$ deve ser ímpar, ou seja, n é um quadrado perfeito.

Seja $n = m^2$