Porismo de Poncelet e Quadriláteros Bicêntricos

Jorge Craveiro

Resumo: *Veremos um resultado de geometria dos mais encantadores, e difíceis, que há atualmente, o Porismo de Poncelet. Para chegar a isso, usaremos várias ferramentas de potência de ponto e círculos coaxiais. Logo depois, como consequência, veremos algumas caracterizações e propriedades dos Quadriláteros Bicêntricos, que admitem círculos inscrito e circunscrito ao mesmo tempo. Não só resultados métricos, como também alguns resultados de geometria projetiva e inversiva, serão muito úteis para deduzir propriedades bem interessantes desses quadriláteros.*

Problema 1 Dados dois círculos C_1 e C_2, de centros O e O', a diferença das potências de um ponto P em relação a eles é igual a $2 \cdot OO' \cdot PX$, em que PX é distância de P ao eixo radical dos círculos.

Problema 2 Dados dois círculos, o lugar geométrico dos pontos cuja razão das potências a esses círculos é constante é um terceiro círculo, coaxial com os dois círculos dados.

Problema 3 Uma reta corta duas circunferências dadas em quatro pontos distintos. As tangentes a esses dois círculos traçadas nesses pontos se intersectam em outros quatro pontos que estão sobre um círculo coaxial aos dois dados.

Problema 4 Se os vértices de um quadrilátero (completo) estão num círculo, uma tranversal que corte lados opostos sob mesmos ângulos corta cada par de lados opostos em ângulos iguais.

Problema 5 Se uma reta forma ângulos iguais com lados opostos de um quadrilátero (completo) inscritível, então podemos traçar círculos tangentes a cada par de lados opostos, tangenciando nas interseções dessa reta com lados opostos nos pontos de interseção da reta. Esses (três) círculos serão coaxiais com o círculo dado.

Problema 6 Se os vértices de um quadrilátero inscrito num círculo se movem de tal maneira que dois lados opostos continuam tangentes a um segundo círculo fixado, então qualquer par de lados opostos (do quadrilátero completo) se move tangenciando algum círculo coaxial com os círculos fixados.

Problema 7 Se os vértices de um triângulo se movem continuamente sobre um círculo, enquanto dois lados continuamente são tangentes a outros círculos fixos, coaxiais ao primeiro, então o terceiro lado tangencia um terceiro círculo fixo coaxial aos anteriores.

Como resultado disso, temos o Porismo de Poncelet:

Problema 8 **(Porismo de Poncelet)** Se dois círculos são tais que um polígono pode ser inscrito em um e circunscrito ao outro, então infinitos polígonos podem ser traçados dessa maneira, e cada diagonal do polígono variável é tangente a um círculo fixo (coaxial aos dois círculos dados).

Agora, vamos olhar para os quadriláteros bicêntricos. Antes disso, um lema útil para uma propriedade do quadrilátero bicêntrico:

Lema 1 Se uma corda AB se move sobre um círculo C sendo enxergada por um ponto fixo P, interno ao círculo, sob $90°$, então o ponto médio da corda e a projeção de P na corda se movem num mesmo círculo C'. Além disso, as tangentes ao círculo C nos pontos A e B se intersectam em um ponto X que se move num círculo, e esses dois círculos são coaxiais com o primeiro, com P sendo um ponto limite desse sistema de círculos.

Para o que segue, consideremos os seguintes: $ABCD$ é um quadrilátero. Quando for circunscritível, os pontos de tangência com seu incírculo serão W, X, Y e Z, sobre AB, BC, CD e DA, respectivamente. O quadrilátero completo $ABCD$ é tal que AB e CD se cortam em J, AD e BC em K, e AC e BD em P. Caso exista, o quadrilátero completo $WXYZ$ é tal que WX e YZ se cortam em L, WZ e XY em M. Caso existam, o incentro de $ABCD$ será I, e o circuncentro de $ABCD$ será O. Os raios dos círculos inscrito e circunscrito serão r, R, e a distância IO será d.

Problema 9 Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Ele será inscritível se, e somente se, os segmentos WY e XZ forem perpendiculares entre si.

Problema 10 **(Fórmula de Fuss)** Se ABCD é bicêntrico, então $\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}$. Se dois círculos são como na descrição acima (raios R, r, e distância entre os centros igual a d), satisfazendo à fórmula, então é possível inscrever/circunscrever um quadrilátero a esses círculos (e, portanto, infinitos).

Problema 11 **(Teorema de Newton)** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Então seu incentro I pertence à mediana de Euler (reta de Gauss) do quadrilátero.

Problema 12 Seja um quadrilátero $ABCD$ circunscritível. O quadrilátero será bicêntrico se, e somente se, $\frac{AW}{WB} = \frac{DY}{YC}$.

Problema 13 Seja um quadrilátero $ABCD$ circunscritível. Os segmentos WY e XZ também se intersectam em P.

Problema 14 Seja o quadrilátero $ABCD$ inscritível. Então O é ortocentro de JKP.

Problema 15 Seja o quadrilátero $ABCD$ circunscritível. Então, J, K, L e M são colineares. Além disso, IP é perpendicular a JK.

Problema 16 Na situação anterior, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, $\angle JIK = 90°$.

Problema 17 Ainda na situação anterior, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, a sua reta de Gauss for perpendicular à reta de Gauss do quadrilátero $WXYZ$.

Problema 18 Seja $ABCD$ um quadrilátero bicêntrico. Mostre que os pontos O, I e P são colineares.