Problemas Sortidos de Álgebra – Live

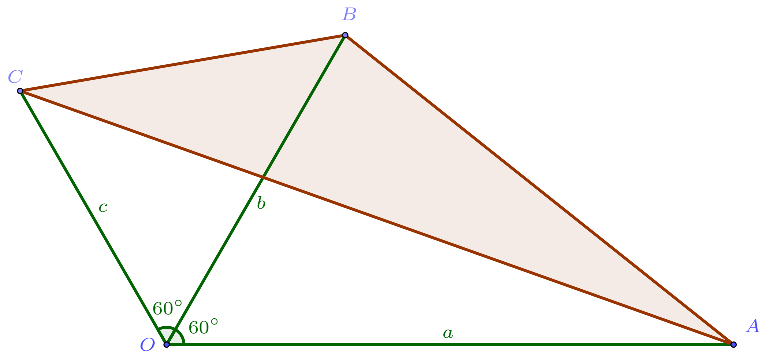
Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. (XXII Semana Olímpica, George Lucas) Sejam a, b e c números reais positivos. Prove a desigualdade

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2},$$

e ache os casos de igualdade.

Rascunho. Use Lei dos Cossenos e Desigualdade Triangular no diagrama abaixo.



2. (Harvard Math Review, Zachary Abel) Chen is thinking of an ordered quadruple of integers (a, b, c, d). Rodrigo, hoping to determine these integers, hands Chen a 4-variable polynomial $P(w, x, y, z)$ with integer coefficients, and Chen returns the value of $P(a, b, c, d)$. From this value alone, Rodrigo can always determine Chen's original ordered quadruple. Construct, with proof, one polynomial that Rodrigo could have used.

2. (Problema 2, com menos Chen e Rodrigo) Ache, com prova, um polinômio $P \in \mathbb{Z}[x, y, z, w]$ tal que $P : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}$ é uma injetiva.

Rascunho.

Definição 1. $\mathbb{N}$ é o conjunto dos inteiros positivos. $\mathbb{N}_0$ é o conjunto dos inteiros não negativos.

Definição 2. Um conjunto S é enumerável sse existe uma função injetora $f : S \to \mathbb{N}$.

Corolário 1. Um conjunto S é enumerável sse existe uma função sobrejetora $f : \mathbb{N} \to S$.

Em outras palavras, um conjunto S é enumerável sse existe uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que todos os elementos de S aparecem pelo menos uma vez.

Lema 1. Seja $2\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos pares. $2\mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração. A função $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, definida por $f(n) = 2n$, é sobrejetora. □

Lema 2. $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Demonstração. Vamos contruir uma função injetora $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(-1) = 3$, $f(n) = n^2$ para $n > 1$ e $f(n) = n^2 + 1$ para $n < -1$. □

Demonstração. Podemos pegar a sequência $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ldots$. Em outras palavras, podemos pegar a função

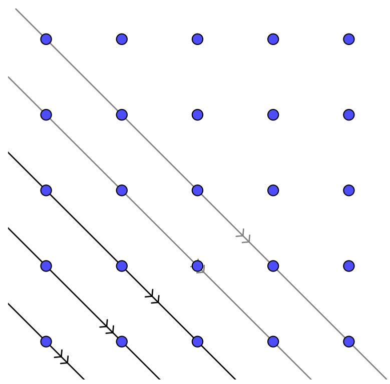
$$f(n) = \begin{cases} n/2, \text{ se } n \text{ é par} \\ -(n-1)/2, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

□

Lema 3. $\mathbb{N}^2$ é enumerável. $\mathbb{Q}$ também é enumerável.

Demonstração. Vamos construir uma função injetora $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Defina $f(x, y) = 2^x 3^y$. □

Demonstração. Vamos construir uma sequência de elementos de $\mathbb{N}^2$ tal que, todo elemento de $\mathbb{N}^2$ aparece pelo menos uma vez.



Seja $\ell(x, y)$ a função que faz a correspondência correta.

- $\ell(x, x) = 2x^2 - 2x + 1$
- $\ell(x, 1) = \frac{x^2+x}{2}$
- $\ell(1, y) = \frac{y^2-y}{2} + 1$.

Como num passe de mágica, a enumeração acima corresponde à função $\ell : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida por

$$\ell(x, y) = \frac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2} + x$$

□

Lema 4. $\mathbb{N}^3$ é enumerável.

Demonstração. Existe uma função injetora $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Vamos construir a função $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ da seguinte maneira: $g(a, b, c) = f(f(a, b), c)$. □

Lema 5(Extra). $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Problema. Ache, com prova, um polinômio $P \in \mathbb{Z}[x, y, z, w]$ tal que $P : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}$ é uma função injetiva.
Rascunho. Vamos definir 4 polinômios, todos injetivos.

Definimos o polinômio $A : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}$ como

$$A(x, y) = (x + y - 1)(x + y) + 2(x + 1).$$

Observação. Note que $A(x, y) = 2\ell(x + 1, y + 1)$, com o polinômio ℓ do Lema 3.

Definimos a função $B : \mathbb{N}_0^4 \to \mathbb{N}$ como

$$B(x, y, z, w) = A(A(x, y), A(z, w))$$

.

Definimos a função $C : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ como

$$C(x, y) = B(x^2, (x + 1)^2, y^2, (y + 1)^2)$$

.

Definimos a função $P : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{N}$ como

$$P(x, y, z, w) = C(C(x, y), C(z, w))$$

3. (The Mandelbrot Problem Book, Sam Vandervelde) Resolva os seguintes itens:

(a) Se $P(x)$ é um polinômio de grau n tal que $P(0) = 1, P(1) = -1, P(2) = 1, P(3) = -1, \dots, P(n) = (-1)^n$. Determine $P(n+1)$.

(b) Se $P(x)$ é um polinômio de grau n tal que $P(1) = 1, P(2) = 3, P(4) = 9, \dots, P(2^n) = 3^n$. Determine $P(2^{n+1})$.