



Desigualdades

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeudanmou@gmail.com

Os problemas desta lista foram majoritariamente retirados das listas do Emiliano Augusto Chagas (Semana Olímpica 2015) e Onofre Campos (Semana Olímpica 2001).

Problema 1

Seja $x > 1$ um número real. Prove que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

Problema 2

Sejam a, b reais positivos. Prove que

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Problema 3

Seja x um número real. Prove que $x^6 + 2 \geq x^4 + 2x$.

Problema 4

Sejam a, b, c, d reais positivos. Prove que o número

$$\frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

está estritamente entre 1 e 2.

Problema 5

Seja n um inteiro maior que 2. Prove que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{2} - \frac{1}{n}.$$

Problema 6

Seja n um inteiro maior que 1. Prove que

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Problema 7

Sejam x, y reais. Prove que

$$x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 41 \geq 0.$$

Problema 8

Sejam a, b, c os tamanhos dos lados de um triângulo. Mostre que a função

$$f(x) = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$$

é positiva, para todo real x .

Problema 9

Sejam a, b reais positivos. Prove e determine o caso de igualdade das seguintes inequações

(a)
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

(b)
$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

(c)
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Problema 10

Sejam a, b reais tais que $a^3 + b^3 = 2$. Prove que $a + b \leq 2$.

Problema 11

Se a, b são reais positivos tais que $a + b = 1$, prove que $27ab^2 \leq 4$ e determine quando ocorre a igualdade.

Problema 12

Se x é um real positivo, qual é o valor mínimo que

$$x + \frac{1}{x}$$

pode atingir? Para que valores de x esse mínimo é atingido?

Problema 13

Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Problema 14

Sejam a, b reais positivos tais que $ab = 1$. Prove que

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 4.$$

Problema 15

Generalize as inequações do Problema 9 para três reais positivos e prove as inequações generalizadas.

Problema 16

Sejam a, b, c reais. Prove que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Problema 17

Sejam a, b, c reais. Prove que

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

Problema 18

Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$a + b + c \leq \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}.$$

Problema 19

Variando a, b, c sobre os reais positivos, determine o valor mínimo de

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}.$$

Problema 20

Determine todos os x, y, z reais maiores que 1 tais que

$$x + y + z + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{y-1} + \frac{3}{z-1} \\ \parallel \\ 2 \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2} \right).$$

Problema 21

Seja n um inteiro positivo. Dados n reais positivos, prove que a média aritmética desses termos é maior ou igual a média geométrica dos mesmos.

Problema 22

Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Problema 23

Prove que, para quaisquer números reais positivos a, b e c ,

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Problema 24

Sejam a, b reais positivos tais que $a+b=1$. Prove que

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9.$$

Problema 25

Sejam a, b, c, d reais positivos. Prove que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Problema 26

Seja P um ponto no interior de um triângulo e sejam h_a, h_b, h_c as distâncias de P aos lados a, b, c , respectivamente. Mostre que o valor mínimo de

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c}$$

ocorre quando P é o incentro do triângulo ABC .

Problema 27

Sejam a, b, c reais não negativos tais que $a+b+c=3$. Prove que

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \leq 12$$

Problema 28

Sejam a, b, c números reais positivos. Prove que

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

Problema 29

Se a, b, c, d, e são números reais tais que $a + b + c + d + e = 8$ e $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 1$, determine o valor máximo de e .

Problema 30

Seja $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ uma sequência infinita de inteiros positivos. Prove que existe um único inteiro $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problema 31

Let a, b, c be positive real numbers for which $a + b + c = 1$. Prove that

$$\frac{a - bc}{a + bc} + \frac{b - ca}{b + ca} + \frac{c - ab}{c + ab} \leq \frac{3}{2}.$$

Problema 32

Determine o menor número real C para o qual a desigualdade

$$\frac{C(x_1^{2005} + x_2^{2005} + x_3^{2005} + x_4^{2005} + x_5^{2005})}{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 (x_1^{125} + x_2^{125} + x_3^{125} + x_4^{125} + x_5^{125})^{16}} \geq 1$$

é válida para quaisquer x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 reais positivos.

Problema 33

For positive real numbers a, b, c satisfying $a + b + c = 1$, prove that

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leq 2 \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right).$$

Problema 34

Sejam $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ reais dados. Prove que

$$\frac{|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}} \leq 1.$$

Problema 35

Dados n reais positivos a_1, \dots, a_n , prove que

$$\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2.$$

Problema 36

Sejam n um inteiro positivo e x_1, \dots, x_n reais positivos. Prove que

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n}\right)(x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) \\ \geq \\ \frac{(n+1)^2}{4n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2.$$

Problema 37

Prove que, para quaisquer a_1, a_2, \dots, a_n reais positivos,

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \dots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \\ \geq \\ (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n).$$

Problema 38

Let $n \geq 3$ be an integer, and let a_2, a_3, \dots, a_n be positive real numbers such that $a_2 a_3 \dots a_n = 1$. Prove that

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Problema 39

Let a, b, c be positive real numbers so that $abc = 1$. Prove that

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Problema 40

Sejam u, v, w reais positivos tais que $u + v + w + \sqrt{uvw} = 4$. Prove que

$$\sqrt{\frac{uv}{w}} + \sqrt{\frac{vw}{u}} + \sqrt{\frac{wu}{v}} \geq u + v + w.$$

Problema 41 (a) Prove that

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

for all real numbers x, y, z , each different from 1, and satisfying $xyz = 1$.

(b) Prove that equality holds above for infinitely many triples of rational numbers x, y, z , each different from 1, and satisfying $xyz = 1$.

Problema 42

Sejam x, y, z reais positivos tais que $xyz \geq 1$. Prove que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$