Banco de Problemas para a Tutoria

Guilherme Zeus Dantas e Moura
guilhermezeus.com

1. Sejam a, b, c inteiros positivos. Prove que é impossível que todos os números a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b sejam quadrados perfeitos.

Solução. Sem perda de generalidade, $a \geq b \geq c$. Portanto,

$$a^2 < a^2+b+c \leq a^2+a+a < (a+1)^2,$$

logo a^2+b+c não é quadrado.

2. Five points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 lie on a plane in such a way that no three among them lie on a same straight line. Determine the maximum possible value that the minimum value for the angles $\angle A_iA_jA_k$ can take where i, j, k are distinct integers between 1 and 5.

Esboço. Divida nos possíveis casos para os feixes convexos; pentágono, quadrilátero, ou triângulo. Marque os ângulos minimais dos vértices do feixe convexo. Você marcará, respectivamente, 15, 12, ou 9 ângulos. A soma desses ângulos será, respectivamente, $540°$, $360°$, ou $180°$. Portanto, existirá um ângulo com medida menor ou igual que, respectivamente, $36°$, $30°$, ou $20°$. Portanto, o mínimo de tais ângulos é menor ou igual a $36°$.

Tal mínimo é obtido no pentágono regular.

3. Let P be a point in the interior of a triangle ABC, and let D, E, F be the point of intersection of the line AP and the side BC of the triangle, of the line BP and the side CA, and of the line CP and the side AB, respectively. Prove that the area of the triangle ABC must be 6 if the area of each of the triangles PFA, PDB and PEC is 1.

Solução. Sejam $a = [CDP]$, $b = [AEP]$, $c = [BFP]$. Teorema de Ceva implica que $abc = 1$. Note que

$$\begin{aligned}\frac{1+a}{1} &= \frac{[BAP]}{[BDP]} \\ &= \frac{BC}{BD} \\ &= \frac{[ABC]}{[ABD]} \\ &= \frac{3+a+b+c}{2+c} \\ &= 1 + \frac{1+a+c}{2+c}.\end{aligned}$$

Logo, $a + ca = 1 + b$. Somando ciclicamente,

$$ab + bc + ca = 3,$$

portanto, pela igualdade da MA-MG, temos que $ab = bc = ca$, e portanto, $a = b = c$, o que implica que P é o baricentro. Finalmente, a área de ABC é 6.

4. Into each box of a 2012×2012 square grid, a real number greater than or equal to 0 and less than or equal to 1 is inserted. Consider splitting the grid into 2 non-empty rectangles consisting of boxes of the grid by drawing a line parallel either to the horizontal or the vertical side of the grid. Suppose that for at least one of the resulting rectangles the sum of the numbers in the boxes within the rectangle is less than or equal to 1, no matter how the grid is split into 2 such rectangles. Determine the maximum possible value for the sum of all the 2012×2012 numbers inserted into the boxes.

Esboço. Resolva para 3×3. A resposta é 5.

Para qualquer tabuleiro válido $m \times n$, com $n \geq 4$, dá pra criar um tabuleiro válido $m \times n'$, com $n' < n$ com a mesma soma do tabuleiro original.

Isso prova que a resposta $n \times n$ para $n \geq 4$ é 5 também.