Identidade:

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \cdots$$

$$\frac{1}{a^n-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{a^2}\right)^n + \left(\frac{1}{a^3}\right)^n + \cdots$$

$$\frac{b^n-1}{a^n-1} = b^n \cdot \left(\frac{1}{a^n-1}\right) - \left(\frac{1}{a^n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \left(\frac{b}{a^3}\right)^n + \cdots + \left(\frac{b}{a^k}\right)^n + \left(\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n + \cdots\right) + \frac{-1}{a^n-1}.$$

Seja $x_n := \dfrac{b^n-1}{a^n-1}$.

Seja $y_n := \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \cdots + \left(\frac{b}{a^k}\right)^n$.

Sabemos que y_n segue uma recorrência linear.

$$x_n - y_n = \left(\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n + \left(\frac{b}{a^{k+2}}\right)^n + \cdots\right) - \frac{1}{a^n-1}.$$

Quanto maior o n, $x_n - y_n \to 0$.

$\Rightarrow y_n = x_n + o(1)$.

Vamos explorar que y_n segue uma recorrência linear.
Essa recorrência tem os coeficentes do polinômio com raízes
$\frac{b}{a}, \frac{b}{a^2}, \dots, \frac{b}{a^k}$, que é:

$$P(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right)\left(x - \frac{b}{a^2}\right)\left(x - \frac{b}{a^3}\right)\cdots\left(x - \frac{b}{a^k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{a^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot P(x)}_{Q(x)} = (ax - b)(a^2x - b)(a^3x - b)\cdots(a^kx - b)$$

$$\Rightarrow Q(x) = a^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot x^k + \dots + (-b)^k.$$

Logo: $a^{\frac{k(k-1)}{2}} y_{k+n} + \dots + (-b)^k y_n = 0, \quad \forall n.$

$$\Rightarrow \quad a^{\frac{k(k-1)}{2}} x_{k+n} + \dots + (-b)^k x_n = o(1)$$

Como x_n é sempre inteiro, existe N tal que

$$a^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot x_{k+n} + \dots + (-b)^k x_n = 0, \quad \forall n \geq N.$$

Portanto, x_n pode ser escrito como (para $n \geq N$)

$$x_n = \alpha_1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \dots + \alpha_k \left(\frac{b}{a^k}\right)^n, \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \left(\frac{b}{a}\right)^n + \dots + \alpha_k \cdot \left(\frac{b}{a^k}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n + \dots + \left(\frac{b}{a^k}\right)^n + (x_n - y_n)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 - 1) \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^n + \dots + (\alpha_k - 1) \left(\frac{b}{a^k}\right)^n = x_n - y_n.$$

Quando $n \to \infty$, $x_n - y_n \to 0$ e, portanto,

$$(\alpha_1 - 1) \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^n + \dots + (\alpha_k - 1) \left(\frac{b}{a^k}\right)^n \to 0.$$

Isso implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, pois, caso contrário, a exponencial com a maior base "dominaria" a expressão e a expressão não tenderia a zero.

Logo: $x_n - y_n = 0$, $\forall n \geq N$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n + \left(\frac{b}{a^{k+2}}\right)^n + \dots\right) = \frac{1}{a^n - 1}, \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \frac{b^n}{a^{kn}} \left(\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{a^2}\right)^n + \dots\right) = \frac{1}{a^n - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{b^n}{a^{kn}} = 1 \Rightarrow b^n = a^{kn} \Rightarrow \boxed{b = a^k}$$

$\blacksquare$