C1/2012 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ inteiros,

Se $a_i > a_{i+1}$, podemos fazer $(a_i, a_{i+1}) := (a_{i+1}+1, a_i)$

ou

$(a_i, a_{i+1}) := (a_i - 1; a_i)$

Prove que só dá pra fazer isso finitos vezes.

<u>Prova:</u> Suponha que dê para fazer infinitos movimentos.

Seja S a soma de todos os números. Depois de uma operação:

$$S := S + 1 \quad \text{ou} \quad S := S + (a_i - 1 - a_{i+1})$$

aumenta

não diminui e

não aumenta $\iff a_{i+1} = a_i - 1$.

Seja T o maior inteiro. Após uma operação, os novos números são:

$a_{i+1} + 1 \leq a_i \leq T$; $a_i \leq T$, $a_i - 1 \leq T$.

Logo, T sempre é o maior inteiro. $\Rightarrow S \leq n \cdot T$ sempre.

Desse modo, S não pode aumentar para sempre, logo todas as operações trocam $(x, x-1)$ por $(x-1, x)$; após certo número de operações suficientemente grande.

Porém, cada operação desse tipo reduz em 1 o número de inversões.

Como o #inversões ≥ 0, não dá pra fazer esse movimento infinitos vezes.

Logo, não é possível fazer essas operações infinitos vezes.

$\square$