Problema 4 (Rússia 2001) (Met. Alg em Comb/Murilo)

Seja v_i um vetor em $\mathbb{R}^n$, onde a j-ésima coordenada do vetor

$$v_i = \begin{cases} 1, & \text{se o i-ésimo participante acertou a questão j} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Note que, para um vetor $p \in \mathbb{R}^n$, em que a j-ésima coordenada é a pontuação da questão j, temos que a pontuação P_i de um participante satisfaz:

$$P_i = v_i \cdot p.$$

Suponha que $\sum \lambda_i v_i = 0$, sem todos os λ_i nulos.

$$\Rightarrow \sum_{\lambda_i > 0}' \lambda_i v_i = \sum_{\lambda_j < 0} (-\lambda_j) v_j \Rightarrow$$

$$\boxed{\mu_i = -\lambda_i}$$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda_i > 0}' \lambda_i v_i \cdot p = \sum_{\lambda_j < 0} \mu_j v_j \cdot p \Rightarrow, \forall p.$$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda_i > 0}' \lambda_i P_i = \sum_{\lambda_j < 0} \mu_j P_j .$$

• S.p.g, $\sum' \lambda_i \geq \sum \mu_i$. Pegue um ranking em que todos os i's do LE ganham dos i's do LD. $\Rightarrow P_i > c > P_j$, para constante c.

Mas $\sum' \lambda_i P_i > \sum \lambda_i c = (\sum \lambda_i) c \geq (\sum \mu_j) \cdot c = \sum \mu_j c > \sum \mu_j P_j$.

Absurdo!

Logo, $\{v_1, \cdots, v_m\}$ é L.I. $\Rightarrow m \leq n$.

Podemos atingir igualdade com o i-ésimo participante acertando somente a questão i. Para atingir todos os rankings, basta fazer p ser cada uma das permutações de $(1, 2, \ldots, n)$.

$\square$