

# Problema 4 (Polinômios Inteiros / Murilo)

Seja  $\hat{t} = 1$ . (chapéu de invisibilidade).

Defina o polinômio de Lagrange:

$$P_i(x) = (x-0) \cdots (x-(i-1)) \overbrace{(x-i)}^{(-1)} (x-(i+1)) \cdots (x-p-1) \cdot (-f(i))$$

$$P_i(t) = 0, \text{ para } i \neq t$$

$$P_i(i) \equiv \underbrace{1 \cdot 2 \cdots (p-1)}_{\equiv -1 \text{ (Wilson)}} \cdot (-1) \cdot f(i) \equiv f(i).$$

$$\text{Logo, } P(x) = \sum_{i=0}^{p-1} P_i(x) \equiv f(x), \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Logo  $P(x) - f(x)$  é múltiplo de  $(x^p - x)$ , em  $\mathbb{F}_p \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(x) - f(x) = Q(x) \cdot (x^p - x).$$

Suponha que  $\deg f \leq p-2$ . Mas  $\deg P = p-1 \Rightarrow \deg(P-f) = p-1$ .

Mas  $\deg(Q \cdot (x^p - x)) \geq p$  ou  $\deg Q = 0$

$\Downarrow$   
 $p-1 \geq p$ .  
 Abs!

$\Downarrow$   
 $P(x) = f(x) \Rightarrow \deg f = p-1$ . ou! Absurdo!

Logo,  $\deg f \geq p-1$ .

□