
Equações Funcionais

Guilherme Zeus Moura

zeusdanmou@gmail.com

Ideias úteis

- (a) Procurar algumas soluções para saber o que tentar provar.
- (b) Injetividade, sobretetividade, paridade, ...
- (c) Explorar expressões quase simétricas.
- (d) Resolver para \mathbb{Z} , estender para \mathbb{Q} e estender para \mathbb{R} .

Problemas

1. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$2f(x) + f(1-x) = 1+x$$

para todo x real.

2. (OMERJ 2006, N3, 4) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$2xf(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

para todo real não nulo x .

3. (Equação de Cauchy) Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tais que

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para quaisquer x e y racional.

4. (IMO 2019, 1) Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

para quaisquer a e b inteiros.

5. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(0) = 1$ e

$$f(xy+1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2$$

para todos os x e y reais.

6. (2018 IMO Canada Training) Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x-f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

para todos os x e y inteiros.

7. (OMERJ 2013, N4, 6) Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x-f(y)) = f(x) - f(y)$$

para todos x e y inteiros.

8. (IMO 2010, 1) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

para quaisquer x e y reais.

9. (IMO 2002, 5) Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$(f(x) + f(y))(f(w) + f(z)) = f(xw - yz) + f(xz + yw)$$

para todos os x, y, w e z reais.

10. (OMERJ 2012, N3, 5) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos x e y reais.

11. (Ucrânia 2018) Ache todas as funções $f : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$, tais que

$$f(f(x) + f(y)) = xyf(x+y)$$

para quaisquer x e y não negativos.

12. (OMERJ 2017, N3, 6) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

13. (OBM 2010, 1) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(a+b) = f(ab)$$

para todos a, b irracionais.

14. (OBM 1998, 5) Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que satisfazem

$$f(2f(x)) = x + 1998$$

para todo $x \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

15. (IMO 2004, 2) Encontre todos os polinômios $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ que satisfaz a igualdade

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

para todas os a, b, c reais tais que $ab + bc + ca = 0$.

16. (IMO 2009, 5) Determine todas as funções $f : \mathbb{Z}_+^* \rightarrow \mathbb{Z}_+^*$ tais que existe um triângulo não degenerado¹ cujos lados medem

$$a, \quad f(b) \quad \text{e} \quad f(b+f(a)-1)$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \dots\}$.

¹Um triângulo não degenerado é um triângulo cujos vértices não são colineares.

- 17. (IMO 1999, 6)** Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

para todos x e y reais.

- 18. (IMO 2017, 2)** Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy)$$

para todos x e y reais.

- 19. (OBM 2013, 3)** Encontre todas as funções injetoras $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ tais que

$$f(x + y) \cdot (f(x) + f(y)) = f(xy)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^*$ com $x + y \neq 0$.

- 20. (OBM 2012, 6)** Encontre todas as funções sobrejetoras $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tais que

$$2x \cdot f(f(x)) = (f(f(x)) + x) \cdot f(x)$$

para todo x real positivo.

- 21. (OBM 2006, 3)** Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$$

para todos x e y reais.

- 22. (OBM 2019, 3)** Seja $\mathbb{R}_{>0}$ o conjunto dos números reais positivos. Determine todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tais que

$$f(xy + f(x)) = f(f(x)f(y)) + x$$

para todos os reais positivos x e y .

- 23. (RMM 2019, 5)** Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem

$$f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2019y),$$

para todos os números reais x e y .