NÍVEL 3

PROBLEMA 3

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

Vamos definir o jogo como uma sequência de números $x \in \mathbb{Z}$.

$A = \{a_1, a_2, \dots\}$, onde os números representam onde a argola cai.

Arnoldo ganha $\iff \exists K \in \mathbb{Z}_+^*$ t.q $a_K \underset{n}{\equiv} 0$ ← S.P.G: Considere os pinos $\{0, 1, \dots, n-1\}$

Seja $J(n, K)$ a proposição:

Arnoldo ganha um jogo com n pinos e pulos d e Kd.

Lema 1: $J(2n, K) \iff J(n, K)$.

$J(2n, K) \Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z}_+^*$ t.q $a_K \equiv 0 \pmod{2n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z}_+^*$ t.q $a_K \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow J(n, K)$.

$J(n, K) \Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z}_+^*$ t.q $a_K \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z}_+^*$ t.q $a_K \equiv 0$ ou $n \pmod{2n}$.

Se $a_K \underset{2n}{\equiv} 0$. OK!

Se $a_K \underset{2n}{\equiv} n$. Arnoldo usa a regra 1 com $d = n$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{K+1} \equiv n \pm n \equiv 0 \pmod{2n} \Rightarrow$

$\Rightarrow J(2n, K)$ □

Lema 2: $J(1, K)$ é verdade.

O único lugar que Bernardo pode colocar é na argola 1. Logo, Arnaldo ganha □

Lema 3: $J(2^x, K)$ é verdade. Prova: Lemas 1 e 2.

NÍVEL 3

PROBLEMA 3

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

Lema 4: $J(2^x n, K) \Leftrightarrow J(n,K)$.

Prova: $J(n,K) \Leftrightarrow J(2n,K) \Leftrightarrow J(2^2 n, K) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow J(2^x, K)$.

Basta analisar para n ímpar.

Lema 5: $J(mn, K) \Leftrightarrow J(m,K)$ e $J(n,K)$, se $(m,n)=1$.

Prova:

Ida: $J(mn,K) \Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z}_+^*$ t.q. $a_K \equiv 0 \pmod{mn} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z}_+^*$ t.q. $a_K \equiv 0 \pmod m$ e $a_K \equiv 0 \pmod n \Rightarrow$

$\Rightarrow J(m,K)$ e $J(n,K)$. OK!

Volta: Vamos jogar o jogo com os pinos $\{a_0, a_0+n, a_0+2n, \dots, a_0+(m-1)n\}$

Nesse jogo, onde escolhemos $d = xn$, podemos levar a argola para qualquer pino, pois $J(m,K)$. Como $(m,n)=1$, existe um pino y nesse jogo tal que $y \equiv 0 \pmod m$. Leve a argola para esse pino.

Agora jogaremos com os pinos $\{y, y+m, \dots, y+(n-1)m\}$. Como $y \equiv 0 \pmod m$, um desses elementos é $\equiv 0 \pmod m$ e $\equiv 0 \pmod n$. $\Rightarrow$ Um desses elementos é $\equiv 0 \pmod{mn}$. Como $J(n,K)$, usando $d = x \cdot m$, podemos levar a argola para o pino 0. OK!

Logo, $J(mn,K) \Leftrightarrow J(n,K)$ e $J(m,K)$, se $(m,n)=1$. $\square$

Olimpíada Brasileira de Matemática

NÍVEL 3

PROBLEMA 3

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

Basta olhar para $J(p^x, K)$, onde p é primo.

<u>Lema 6</u>: $n | K-1 \Rightarrow J(n, K)$

<u>Prova</u>: Com $K \underset{n}{\equiv} 1$, a regra 2 se resume a girar d para uma direção escolhida. Arnaldo escolhe $d=1$ e vai usando a regra 2 para um mesmo sentido. Desse modo, Arnaldo ganha $\Rightarrow J(n, K)$. $\square$

Por enquanto, temos que, sendo D os divisores de $K-1$.

$J(2^x m, K)$, com x inteiro e $m \in D$, é verdade.

Vamos tentar provar que, se não for dessa forma, Arnaldo perde.

Suponha que n ímpar $\notin D$ e Arnaldo ganhou.

A última jogada levou p/ 0. então, na anterior usou-se a regra 1 ou 2.

$\rightarrow$ Se usou a regra 1: O Bernardo iria p/ outro lado.

Logo, Arnaldo ñ ganha.

$\rightarrow$ Se usou a regra 2: Bem, ao invés de pular d, pularia Kd, ou vice versa e, como $K \not\equiv 1 \pmod{n}$, isso só seria viável se o argolo estivesse numa posição y onde $(y, n) \neq 1$.

Porém Bernardo escolhe no início que $(y, n) = 1$ e consegue manter tal condição até o final.

$J(n, K)$ é falso $\Leftrightarrow J(2^x n, K)$ é falso.

NÍVEL 3

PROBLEMA 3

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

Logo Arnaldo ganha $\iff$

$n = 2^x \cdot m$, $x \in \mathbb{Z}$ e $m \mid K-1$.

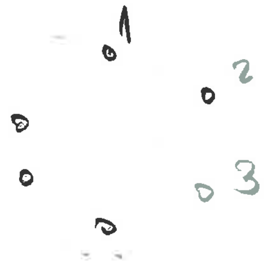
Guilherme Zeus Dantas e Moura 140.264.007-27

Folha de rascunho

A partir de agora, todos os números (exceto k e n) são <u>mod n</u>.

Jogo $(2n, k)$ = Jog (n, k)

$J(n, k)$; $J(m, k)$



$k \underset{n}{\equiv} 1$?

$\Downarrow$

regra 2 é girar p/ direita