

# OMERJ 2012, Questão 5

Guilherme Zeus Moura

8 de agosto de 2019

## 1 Enunciado

Ache todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos  $x$  e  $y$  reais.

## 2 Solução

Vamos chamar  $f(xy - f(x)) = xf(y)$  de  $P(x, y)$ .

$$P(0, y): f(-f(0)) = 0$$

$$P(x, 0): f(-f(x)) = xf(0)$$

$$P(-f(0), 1): f(-f(0) - f(-f(0))) = -f(0)f(1) \implies 0 = f(0)f(1)$$

$$f(0) = 0 \text{ ou } f(1) = 0$$

Sabemos que  $f(x) \equiv 0$  é solução.

Portanto, vamos supor que  $f(k) \neq 0$ .

$$P(x, k): f(xk - f(x)) = xf(k)$$

Como  $xf(k)$  percorre todos os reais,  $f$  é sobrejetora.

Vamos dividir em dois casos:

(Caso (a)) Se  $f(0) = 0$ .