

Teste

Zeus DM

Problema 1. (OMERJ 2016 - N3) Seja $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de x , isto é, o maior inteiro menor ou igual a x . Seja $\{x\}$ a parte fracionária de x , definida como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Um número real é dito replicante se $x = \{10x\}$. Encontre a soma de todos os números replicantes.

Solução. Vamos achar as soluções de

$$x = \{10x\}$$

$$x = 10x - \lfloor 10x \rfloor$$

$$9x = \lfloor 10x \rfloor = n, \text{ que é inteiro, pois é um piso.}$$

Logo, x é da forma $\frac{n}{9}$. Mas $x = \{10x\}$, que implica $0 \leq x < 1$, isto é, $0 \leq n < 9$. Vamos testar essas soluções: a representação decimal de $\frac{n}{9}$ é $(0, nnnn\dots)$. De fato, $(0, nnnn\dots) = \{(n, nnnn\dots)\}$. Por fim, as soluções são $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{8}{9}$, cuja soma é 4.