OBM 2017/6 (Sol 1)

Suponha que exista $x \in \mathbb{Z}_p$ tal que $a = x + x^{-1}$ em $\mathbb{Z}_p$.

$$\left.\begin{aligned} a^3 - 3a + 1 &= (x+x^{-1})^3 - 3(x+x^{-1}) + 1 \\ &= x^3 + x^{-3} + 1 \qquad = 0 \\ \Rightarrow \quad \Phi_9(x) &= 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

$\Rightarrow \operatorname{ord}_p x = 9 \qquad \therefore \qquad x^{p-1} = 1$

$\Rightarrow 9 \mid p-1 \quad \Rightarrow \quad 9 \mid p^2-1.$

Se não existe x com tal propriedade, então

$a = x + x^{-1}$ não tem solução em $\mathbb{Z}_p$.

$x^2 - ax + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{Z}_p$.

$(2x-a)^2 = a^2-4$ não tem solução em $\mathbb{Z}_p$.

Vamos expandir o corpo $\mathbb{Z}_p$ em $\mathbb{Z}_p[j]$, adicionando um elemento j que é raiz de $x^2 - (a^2-4) = 0$.

Agora, em $\mathbb{Z}_p[j]$, $x = 2^{-1}(a \pm j)$ é solução de $(2x-a)^2 = a^2-4$.

$\Rightarrow$ os passos $(*)$ são verdade em $\mathbb{Z}_p[j] \Rightarrow \operatorname{ord} x = 9$.

Mas, $(\mathbb{Z}_p[j])^\times$ tem p^2-1 elementos $\overset{(+)}{\Rightarrow} 9 \mid p^2-1$

(+) Considere o subgrupo de $\mathbb{Z}_p[j]$, $H = \langle x \rangle$. Como $(\mathbb{Z}_p[j])^\times$ é comutativo, $aH = Ha$, $\forall a \in (\mathbb{Z}_p[j])^\times$

$\Rightarrow H$ gera classes de equivalência de mesmo tamanho

$\Rightarrow |H| \mid |(\mathbb{Z}_p[j])^\times| \Rightarrow \operatorname{ord} x \mid p^2-1.$

OBM 2017/6. (Sol 2)

Vamos achar as soluções em $\mathbb{R}$ para:

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Com certa esperteza, fazemos a substituição $x \to 2\cos\theta$:

$$8\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1 = 0$$

$$2\cos 3\theta = -1$$

$$\cos 3\theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \theta \equiv 40^\circ \text{ ou } \theta \equiv 80^\circ \text{ ou } \theta \equiv 160^\circ .$$