# Aula Extra

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

**Problema 1** (OBM 2016, 2)

Encontre o menor $n$ tal que qualquer conjunto de $n$ pontos do plano cartesiano, todos com coordenadas inteiras, contém dois cujo quadrado da distância é um múltiplo de 2016.

*Resposta.* $2(3 \cdot 4 \cdot 7)^2 + 1$.

**Problema 2** (OBM 2016, 5)

Considere o polinômio do segundo grau $P(x) = 4x^2 + 12x - 3015$. Defina a sequência de polinômios $P_1(x) = \frac{P(x)}{2016}$ e $P_{n+1}(x) = \frac{P(P_n(x))}{2016}$.

(a) Prove que existe um número real $r$ tal que $P_n(r) < 0$ para todo inteiro positivo $n$.

(b) Determine a quantidade de inteiros $m$ tais que $P_n(m) < 0$ para infinitos inteiros positivos $n$

*Esboço.*

(a) A raiz $r$ negativa de $P(x) - 2016x$ funciona.

(b) Seja $f(x) = \frac{P(x)}{2016} = \frac{4x^2+12x-3015}{2016}$.
Use o fato de que $(-3/2, -3/2)$ é o mínimo de $f$ e tambem é raíz $f(x) - x$ para mostrar que para qualquer $x \in (-3/2, 1005/2)$,

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = -3/2.$$

**Problema 3** (OBM 2014, 5)

Em cada casa de um tabuleiro $2m \times 2n$ está escrito um inteiro. A operação permitida é tomar três casas formando um L-triminó (ou seja, uma casa $C$ e outras duas casas com um lado em comum com $C$, um na horizontal e outro na vertical) e somar 1 ao inteiro em cada uma das três casas. Determine a condição necessária e suficiente, em função de $m$, $n$ e dos números iniciais, para que seja possível deixar todos os números iguais.

*Esboço.* A soma dos elementos mod 3 é constante.

Vamos provar por indução em $m \cdot n$ que, se $3 \mid mn$, então a condição necessária e suficiente é que a soma dos números iniciais é múltipla de 3 e, se $3 \nmid mn$, então sempre funciona.

Bases: $2 \times 2$, $2 \times 4$ e $4 \times 4$.

Se $3 \nmid mn$, escreva $2m = 6k + k_0$ e $2n = 6l + l_0$, com $k_0, l_0 \in \{2, 4\}$. Divida em 4 (ou possivelmente 2) tabuleiros menores de tamanhos $6k \times 6l$, $6k \times l_0$, $k_0 \times 6l$ e $k_0 \times l_0$ e resolva usando a hipótese.

Se $3 \mid mn$, sem perda de generalidade, $3 \mid m$. Escreva $2m = 6k$ e divida em 2 tabuleiros $4k \times 2n$ e $2k \times 2n$ e resolva usando a hipótese.

**Problema 4** (OBM 2013, 5)

Seja $x$ um número irracional entre 0 e 1 e $x = 0, a_1a_2\ldots$ a sua representação decimal. Para cada $k \geq 1$, seja $p(k)$ a quantidade de sequências distintas $a_{j+1}a_{j+2}\ldots a_{j+k}$ de $k$ algarismos consecutivos na representação decimal de $x$. Prove que $p(k) \geq k + 1$ para todo $k$ inteiro positivo.

*Esboço.* Prove por indução que $p(k) \geq k + 1$.

O passo indutivo se resume a $p(k-1) = p(k) = 1$. Nesse caso, construiremos um grafo ordenado em que $V = \{\text{sequências distintas de tamanho } k-1 \text{ em } x\}$ e $s \to s'$ se, e somente se, $s = a_{j+1}\ldots a_{j+k-1}$ e $s' = a_{j+2}\ldots a_{j+k}$, para algum $j$.

Dá pra provar que $\operatorname{outdeg}(v) = 1$, para todo $v \in V$ (usando $p(k-1) = p(k) = k$) e depois mostrar que isso implica que $x$ é, na verdade, um racional (a sequência dos $a$'s é periódica).

**Problema 5** (Banco IMO 2010, A4)

A sequence $x_1, x_2, \ldots$ is defined by $x_1 = 1$ and $x_{2k} = -x_k, x_{2k-1} = (-1)^{k+1}x_k$ for all $k \geq 1$. Prove that $\forall n \geq 1$ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 0$.

*Esboço.* Vamos provar por indução forte em $k$ que, para todo $n \leq 4k$,

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0.$$

**Problema 6** (HMMO November 2020, Team, 9)

Alice and Bob take turns removing balls from a bag containg 10 black balls and 10 white balls, with Alice going first. Alice always removes a black ball if there is one, while Bob removes one of the remaining balls uniformly at random. Once all balls have been removed, the expected number of black balls which Bob has can be expressed as $\frac{a}{b}$, where $a$ and $b$ are relatively prime positive integers. Compute $100a + b$.

*Esboço.* Defina $E(b, p)$ como o esperado de bolas pretas que Bob terá no final do jogo, caso o jogo comece com $b$ bolas brancas e $p$ bolas pretas, e seja a vez do Bob de jogar. O problema pede para calcular $E(10, 9)$.

Construa a equação de recorrência de $E(p, b)$ e faça casos pequenos para conjecturar que

$$E(b, p) = \frac{p(p+1)}{2(b+p)}.$$

Prove a equação anterior usando indução.