Problemas Sortidos

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. **(Romênia 2018, Regional, Série 9, 1)** Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros não negativos. Ache todas as funções estritamente crescentes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que o número

$$\frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x + y)}$$

é um inteiro positivo, para todo $x, y \in \mathbb{N}$.

2. **(Romênia 2018, Regional, Série 9, 3)** Sejam AD, BE, CF as alturas do triângulo ABC e sejam K, L, M os ortocentros dos triângulos AEF, BFD e CDE, respectivamente. Sejam G_1 e G_2 os baricentros dos triângulos DEF e KLM, respectivamente. Mostre que $HG_1 = G_1G_2$, onde H é o ortocentro do triângulo ABC.

3. **(Romênia 2019, Regional, Série 9, 4)** Ache todos os inteiros positivos p para o qual existe um inteiro positivo n tal que $p^n + 3^n \mid p^{n+1} + 3^{n+1}$.