Problema 4 - (Números no SL / Murilo)

→ Se $a \geq b \geq 2 \Rightarrow 3a \geq 2b+2$ ok!

→ Se $a \geq b$ e $b=1 \Rightarrow a!+1 \mid a!$ Abs!

→ Se $a<b$: $b=a+c$.

$$a!+b! \mid a!b! \Leftrightarrow a!+b! \mid (a!)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a!\left(1+(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+c)\right) \mid (a!)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+(a+1)(a+2)\cdots(a+c) \mid a! \Rightarrow (*)$$

$(*) \Rightarrow$

$(a+1)\cdots(a+c) < 2\cdots c$

Como os fatores do lado direito são menores que os fatores do lado esquerdo, então $\#\text{fatores}_{LD} > \#\text{fatores}_{LE}$

$\Rightarrow a-1 > c$.

Como $\binom{a+c}{a} = \frac{(a+1)\cdots(a+c)}{c!} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(1+(a+1)\cdots(a+c),\ c!\right) = 1$.

$$(*) \Leftrightarrow 1+(a+1)\cdots(a+c) \;\Big|\; \frac{a!}{c!} \quad (+) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)\cdots(a+c) < (c+1)\cdots(a-1)a. \quad (+)$$

De novo, cada fator do lado direito é menor que cada fator do lado esquerdo. Logo, $\#\text{fatores}_{LD} > \#\text{fatores}_{LE}$.

$$\Rightarrow a-c > c \Rightarrow a > 2c \Rightarrow a \geq 2c+1.$$

Logo. $3a \geq 2a+2c+1 = 2b+1$.

Basta provar que $3a = 2b+1$ é impossível, isto é, $a = 2c+1$ é impossível.

$(+)$: $1+(a+1)\cdots(a+c)$ é primo com $c!$

Mas, como $a > 2c \Rightarrow \binom{a}{c} = \frac{a!}{c!(a-c)!} = \frac{a!}{c!\cdot c!\cdot ?} \Rightarrow (c!)^2 \mid a! \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1+(a+1)(a+2)\cdots(a+c) \;\Big|\; \frac{(c+1)\cdots(a-1)\cdot a}{c!} \Rightarrow (a+1)(a+2)\cdots(a+c) < \frac{(c+1)(c+2)}{c!}(a-1)a$$

$$< 4\cdot(c+3)\cdots(a-1)\cdot a$$

$c \geq 3 \Rightarrow a \geq 7$.

De novo, $\#\text{fatores}\ LD > \#\text{fatores}\ LE \Rightarrow$

$$a-c-1 > c \Rightarrow a > 2c+1.$$
$$a \geq 2c+2.$$

$$\Rightarrow 3a \geq 2a+2c+2 = 2b+2$$

□