# Problemas usando Transformações

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

*Sugestões e correções de erros (mesmo que mínimos) são muito bem vindas.
Envie-as para* `zeusdanmou+tex@gmail.com`.

## Sumário



## 1 Reflexões

**Problema 1.1.** Seja $ABC$ um triângulo com ortocentro $H$ e circumcentro $O$. Seja $M$ o ponto médio de $BC$. Prove que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

**Problema 1.2 (Reta de Euler).** Seja $ABC$ um triângulo com ortocentro $H$, circumcentro $O$ e baricentro $G$. Prove que $H$, $O$, $G$ são colineares.

**Problema 1.3.** Seja $ABC$ um triângulo com ortocentro $H$ e circumcírculo $\Omega$. Seja $P$ um ponto em $\Omega$. Sejam $P_A$, $P_B$, $P_C$ as reflexões de $P$ pelas retas $BC$, $CA$ e $AB$, respectivamente. Prove que $P_A$, $P_B$, $P_C$, $H$ são colineares.

**Problema 1.4 (EGMO 2012, 7).** Seja $ABC$ um triângulo acutângulo com circuncírculo $\Gamma$ e ortocentro $H$. Seja $K$ um ponto de $\Gamma$ no lado oposto de $BC$ relativo a $A$. Seja $L$ a reflexão de $K$ pela reta $AB$, e seja $M$ a reflexão de $I$ pela reta $BC$. Seja $E$ o segundo ponto de intersecção de $\Gamma$ com o circuncírculo de $BLM$.

Mostre que as retas $KH$, $EM$ e $BC$ são concorrentes.

**Problema 1.5 (IMO 2011, 6).** Seja $ABC$ um triângulo acutângulo com circuncírculo $\Gamma$. Seja $\ell$ uma reta tangente a $\Gamma$, e sejam $\ell_a$, $\ell_b$ e $\ell_c$ as retas obtidas após refletir $\ell$ pelas retas $BC$, $CA$ e $AB$, respectivamente.

Mostre que o circuncírculo do triângulo determinado pelas retas $\ell_a, \ell_b$ e $\ell_c$ é tangente ao círculo $\Gamma$.

**Problema 1.6 (Balcãs 2018, 1).** Um quadrilátero $ABCD$ é inscrito num círculo $\omega$ onde $AB > CD$, e $AB$ não é paralelo a $CD$. Seja $M$ o ponto de intersecção das diagonais $AC$ e $BD$, e seja $E$ a projeção de $M$ no segmento $AB$. Se $EM$ bisecta o ângulo $\angle CED$, prove que $AB$ é diâmetro de $\omega$.

## 2 Homotetias

**Problema 2.1 (Círculo de Nove Pontos).** Seja $ABC$ um triângulo. Prove que o ponto médio dos lados, o pé das alturas e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices do triângulo com o ortocentro $H$ estão todos sobre um mesmo círculo. Qual é o raio deste círculo?

**Problema 2.2.** Seja $ABC$ um triângulo com incírculo $\omega$. Seja $D$ a intersecção de $\omega$ com $BC$. Seja $T$ o ponto diametralmente oposto a $D$ em $\omega$. Seja $X$ a intersecção de $AT$ com $BC$.

Prove que $BD = CX$.

**Problema 2.3 (Lema da Estrela da Morte).** Sejam $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ circunferências tangentes, com $\Gamma_1$ no interior de $\Gamma_2$. Sejam $T$ o ponto de tangência e $AB$ uma corda de $\Gamma_2$ que tangencia $\Gamma_1$ em $U$.

Prove que $TU$ bissecta o arco $AB$.

**Problema 2.4 (IMO 1978, 4).** Seja $ABC$ um triângulo com $AB = AC$. Um círculo que é internamente tangente ao circuncírculo de $ABc$ também é tangente aos lados $AB$ e $AC$ nos pontos $P$ e $Q$, respectivamente.

Prove que o ponto médio de $PQ$ é o incentro de $ABC$.

**Problema 2.5 (IMO 1981, 5).** Três circunferências de raios iguais possuem um ponto $O$ em comum e estão no interior de um triângulo dado. Cada circunferência tangencia um par de lados do triângulo.

Prove que o ponto $O$ está na reta que liga o incentro e o circuncentro do triângulo.

**Problema 2.6 (IMO 1982, 2).** Um triângulo escaleno $A_1A_2A_3$ tem lados $a_1$, $a_2$, $a_3$, com o lado $a_i$ oposto ao vértice $A_i$. Seja $M_i$ o ponto médio do lado $a_i$, e seja $T_i$ o ponto onde o incírculo de $A_1A_2A_3$ tangencia o lado $a_i$. Seja $S_i$ a reflexão de $T_i$ pela bissetriz interna do ângulo $\angle A_i$.

Prove que as retas $M_1S_1$, $M_2S_2$ e $M_3S_3$ concorrem.

**Problema 2.7 (OBM 2012, 2).** Dado um triângulo $ABC$, o exincentro relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas de $DB$ e $DC$. Sejam $I_A$, $I_B$ e $I_C$ os exincentros do triângulo escaleno $ABC$ relativos a $A$, $B$ e $C$, respectivamente, e $X$, $Y$ e $Z$ os pontos médios de $I_BI_C$, $I_CI_A$ e $I_AI_B$, respectivamente. O incírculo do triângulo $ABC$ toca os lados $BC$, $CA$ e $AB$ nos pontos $D$, $E$ e $F$, respectivamente. Prove que as retas $DX$, $EY$ e $FZ$ têm um ponto em comum pertencente à reta $IO$, sendo $I$ e $O$ o incentro e o circuncentro do triângulo $ABC$, respectivamente.

**Problema 2.8 (Japão 2007, 3).** Seja $\Gamma$ o circuncírculo do triângulo $ABC$. Seja $\Gamma_A$ o círculo que tangencia os lados $AB$ e $AC$ e que tangencia $\Gamma$. Seja $T_A$ a intersecção entre $\Gamma$ e $\Gamma_A$. Defina $\Gamma_B$, $T_B$, $\Gamma_C$ e $T_C$ de maneira análoga.

Prove que as retas $AT_A$, $BT_B$ e $CT_C$ são concorrentes.

**Problema 2.9 (OBM 2014, 6).** Seja $ABC$ um triângulo com incentro $I$ e incírculo $\omega$ O círculo $\omega_A$ tangencia externamente $\omega$ e toca os lados $AB$ e $AC$ em $A_1$ e $A_2$. Seja $r_A$ a reta $A_1A_2$. Defina $r_B$ e $r_C$ de modo análogo. As retas $r_A$, $r_B$ e $r_C$ determinam um triângulo $XYZ$. Prove que o incentro de $XYZ$, o circuncentro de $XYC$ e $I$ são colineares.

**Problema 2.10 (OBM 2017, 5).** No triângulo $ABC$, seja $r_A$ a reta que passa pelo ponto médio de $BC$ e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina $r_B$ e $r_C$ da mesma forma. Sejam $H$ e $I$ o ortocentro e o incentro de $ABC$, respectivamente. Suponha que as três retas $r_A$, $r_B$, $r_C$ definem um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de $HI$.

**Problema 2.11 (IMO 1983, 2).** Seja $A$ um dos dois pontos de intersecção de duas circunferências $C_1$ e $C_2$, com raios distintos e centros $O_1$ e $O_2$, respectivamente. Uma das tangentes comuns das circunferências tangencia $C_1$ em $P_1$ e $C_2$ em $P_2$, enquanto a outra tangente comum tangencia $C_1$ em $Q_1$ e $C_2$ em $Q_2$. Seja $M_1$ o ponto médio de $P_1Q_1$ e $M_2$ o ponto médio de $P_2Q_2$.

Prove que $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

**Problema 2.12 (IMO 1992, 4).** Seja $\Gamma$ uma circunferência, $\ell$ uma reta tangente à circunferência $\Gamma$ e $M$ um ponto em $\ell$. Ache o lugar geométrico de todos os pontos $P$ com a seguinte propriedade: existem dois pontos $Q$ e $R$ em $\ell$ tal que $M$ é ponto médio de $QR$ e $\Gamma$ é incírculo de $PQR$.

**Problema 2.13 (IMO 1999, 5).** Duas circunferências $\Omega_1$ e $\Omega_2$ tangenciam internamente a circunferência $\Omega$ em $M$ e $N$ e o centro de $\Omega_2$ está sobre $\Omega_1$. A corda comum de $\Omega_1$ e $\Omega_2$ intersecta $\Omega$ em $A$ e $B$. $MA$ e $MB$ intersectam $\Omega_1$ em $C$ e $D$. Prove que $\Omega_2$ é tangente a $CD$.

**Problema 2.14 (IMO 2008, 6).** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $BA \neq BC$. Sejam $\omega_1$ e $\omega_2$ os incírculos de $ABC$ e $ADC$, respectivamente. Suponha que existe uma circunferência $\omega$ tangente à reta $BA$ de forma que $A$ está entre $B$ e o ponto de tangência, tangente à reta $BC$ de forma que $C$ está entre $B$ e o ponto de tangência, e que também seja tangente às retas $AD$ e $CD$. Prove que as tangentes externas comuns a $\omega_1$ e $\omega_2$ se intersectam sobre $\omega$.

# 3 Rotações

**Problema 3.1 (Ponto de Fermat).**

(a) Seja $ABC$ um triângulo com ângulos menores ou iguais a $120°$. Construa o triângulo equilátero $BCD$, com $D$ e $A$ em semiplanos distintos em relação a reta $BC$. Construa os triângulos equiláteros $CAE$ e $ABF$ de forma análoga. Prove que $AD$, $BE$, $CF$ possuem tamanhos iguais e são concorrentes.

Vamos chamar essa intersecção de *ponto de Fermat*.

(b) Seja $ABC$ um triângulo com ângulos menores ou iguais a $120°$. Seja $P$ um ponto no interior de $ABC$. Prove que $AP + BP + CP$ é mínimo quando $P$ é o ponto de Fermat.

**Problema 3.2.** Dado um paralelogramo $ABCD$, construa externamente quadrados em seus quatro lados. Prove que os centros desses quadrados foram um quadrado.

**Problema 3.3 (Mathematical Olympiad Challenges).** Sejam $ABC$ e $BCD$ triângulos equiláteros, com $A$ e $D$ distintos. Uma reta passa por $D$, intersectando o prolongamendo de $AC$ em $M$ e $AB$ em $N$. Seja $P$ a intersecção de $CN$ e $BM$. Prove que $\angle BPC = 60°$.

**Problema 3.4 (Banco RMM 2019, P4, Original).** É dado um ponto $P$ no plano em que reside um triângulo equilátero $ABC$ desconhecido. É dado que $AP < BP < CP$. Suponha que é possível determinar o valor do lado de $ABC$ sabendo somente o valor dos tamanhos $AP$, $BP$ e $CP$. Prove que $P$ está no circuncírculo de $ABC$.

## 4 Roto-homotetias

**Problema 4.1.** Sejam $AB$ e $CD$ segmentos, e seja $X$ a intersecção entre $AC$ e $BD$. Se os circuncírculos de $ABX$ e $CDX$ se intersectam em $O$, então $O$ é o centro da única roto-homotetia que leva $AB$ em $CD$.

**Problema 4.2 (IMO 2016, 1).** O triângulo $BCF$ é retângulo em $B$. Seja $A$ o ponto da reta $CF$ tal que $FA = FB$ e que $F$ esteja entre $A$ e $C$. Escolhe-se o ponto $D$ de modo que $DA = DC$ e que $AC$ seja bissetriz de $\angle DAB$. Escolhe-se o ponto $E$ de modo que $EA = ED$ e que $AD$ seja a bissetriz de $\angle EAC$. Seja $M$ o ponto médio de $CF$. Seja $X$ o ponto tal que $AMXE$ seja um paralelogramo. Prove que $BD$, $FX$ e $ME$ são concorrentes.

**Problema 4.3 (IMO 2010, 2).** Seja $ABC$ um triângulo, I o seu incentro e $\Gamma$ o seu circuncírculo. A reta $AI$ intersecta novamente $\Gamma$ no ponto $D$. Sejam $E$ um ponto no arco $BC$ que contém $D$ e $F$ um ponto do segmento $BC$, tal que

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Seja $G$ o ponto médio de $IF$, prove que as retas $EI$ e $DG$ se intersectam sobre $\Gamma$.

**Problema 4.4 (EGMO 2017, 6).** Seja $ABC$ um triângulo acutângulo no qual não há dois lados com a mesma medida. As reflexões do baricentro $G$ e do circuncentro $O$ de $ABC$ através dos lados $BC, CA, AB$ são denotadas por $G_1, G_2, G_3$ e $O_1, O_2, O_3$, respectivamente. Mostre que os circuncírculos dos triângulos $G_1G_2C$, $G_1G_3B$, $G_2G_3A$, $O_1O_2C$, $O_1O_3B$, $O_2O_3A$ e $ABC$ têm um ponto em comum.

## Referências


[1] Evan Chen. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*. MAA Problem. Mathematical Association of America, 2016.

[2] Viktoriya Krakovna. Transformations, ceva and menelaus theorems, and harmonic points. Canada Winter Training, January 2010.

[3] Davi Lopes. Ampliando horizontes geométricos e encolhendo problemas: Homotetias e composição de homotetias. Semana Olímpica da OBM, 2018.

[4] Anca Mustata. Geometric transformations: Reflections, homotheties (dilations), rotations and spiral similarity, translations.

[5] Régis. Homotetia e outros temas relacionados. Semana Olímpica da OBM, 2018.