

(Banco JBMO 2018, C2) [P1, SIMU 17/10/19]

De (i), (ii) e (iii), os elementos de S são:

711,
621, 612
531, 522, 513
441, 432, 423, 414
351, 342, 333, 324, 315
261, 252, 243, 234, 225, 216
171, 162, 153, 144, 153, 162, 171.

• $n=5$:

$S = \{ 522, 441, 315, 234, 153 \}$ funciona!

$\Rightarrow \boxed{n=5}$

Além disso, pela regra (vi), no máximo um elemento de cada linha pode estar em S . $\Rightarrow n \leq 7$

• $n=7$?

Se $n=7$, então $711 \in S$ e $(612 \in S \text{ ou } 621 \in S)$.

$\Rightarrow \left. \begin{matrix} 711 \\ e \\ 612 \end{matrix} \right\} \text{Regra (v)} \quad \text{ou} \quad \left. \begin{matrix} 711 \\ e \\ 621 \end{matrix} \right\} \text{Regra (iv)} \Rightarrow \text{Absurdo!} \Rightarrow n \neq 7!$

• $n=6$?

\rightarrow Se $711 \in S$:

$\Rightarrow 621, 612, 531, 513, 441, 414 \notin S$.

Como nenhum elemento da 2ª linha está em S , necessariamente deve ter um elemento de cada uma das outras linhas.

$\Rightarrow 522 \in S \Rightarrow 432, 423 \notin S$. Absurdo! Pois algum elemento da 4ª linha deveria estar em S .

\rightarrow Se $711 \notin S \Rightarrow$ Deve ter um elemento de todas as outras linhas.

S.P.G, $621 \in S \Rightarrow 531, 522 \notin S \Rightarrow 513 \in S$.

$\Rightarrow 441, 423, 414 \notin S \Rightarrow 432 \in S \Rightarrow$

$\Rightarrow 351, 342, 333, 324, 315 \in S \Rightarrow \text{Absurdo!}$

$\Rightarrow n \neq 6!$