Problema 17 - (The College Math Journal 1123 Mar 2015)

$$f(x)\, f(x f(y)) = x^2 f(y). \qquad [P(x,y)]$$

· $\underline{P(0,y)}$: $f(0)^2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

· $\underline{P(x,x)}$: $f(x) f(x f(x)) = x^2 f(x)$.

$\Rightarrow f(x) = 0$ ou $f(x f(x)) = x^2 \quad (*)$

· $\underline{P(1,y)}$: $f(1) \cdot f(f(y)) = f(y)$

• Se $f(1) = 0$: $f(y) = 0,\ \forall y \Rightarrow \underline{f(x) \equiv 0}$

• Se $f(1) \neq 0 \Rightarrow f(f(1)) = 1$, por $(*)$.

$\underline{P(x, f(1))}$: $f(x)^2 = x^2,\ \forall x. \Rightarrow f(x) = 0 \iff x = 0.\ (+)$

$\to$ Se $f(1) = 1$ e $f(-1) = -1$.

$\underline{P(-1, y)}$: $-f(-f(y)) = f(y) \quad (\square)$

$\underline{P(x,-1)}$: $f(x) \cdot f(-x) = -x^2 = -f(x) \cdot f(x). \Rightarrow$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$, pois $f(x) \neq 0$ para $x \neq 0$ e, para $x = 0$, $f(-0) = -f(0)$ $(\circ)$

Como $x \neq 0 \overset{(+)}{\Rightarrow} f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x f(x)) = x^2 \Rightarrow \mathbb{R}_+ \in Im(f)$. $(\star)$

Logo, juntando $(\square)$ e $(\circ) \Rightarrow f(f(y)) = f(y)$. Como $x \in Im(f),\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow$

$\to f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}_+$. Usando $(\circ) \Rightarrow f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}_- \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{f(x) \equiv x,\ \forall x \in \mathbb{R}}$

Ps $(\star)$ vale em todos os casos.

$\rightarrow$ Se $f(1)=-1$.

· $\underline{P(1,x)}$: $-f(f(y))=f(y)$ $\qquad$ ($\square'$)

· $\underline{P(x,1)}$: $f(x)\cdot f(-x)=-x^2=-f(x)\cdot f(x)$.

Como $x\neq 0 \Rightarrow f(x)\neq 0$: $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\neq 0$.

como $f(0)=-f(0)$ $\therefore$ $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. $\qquad$ ($0'$)

Como, por ($\bigstar$) e ($\square$), $-f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$. Como (0) $\Rightarrow$ $f(x)=-x$, $\forall x\in\mathbb{R}_-$.

$\Rightarrow$ $\underline{f(x)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}}$.

$\rightarrow$ Se $f(1)=1$ e $f(-1)=1$:

· $P(1,x)$: $f(f(x))=f(x)$. $\overset{(\bigstar)}{\Rightarrow}$ $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$.

· $P(-1,x)$: $f(-f(x))=f(x)$ $\overset{(\bigstar)}{\Rightarrow}$ $f(-x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$ $\Rightarrow$ $f(x)=-x$, $\forall x\in\mathbb{R}_-$ $\Bigg] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{f(x)=|x|,\ \forall x\in\mathbb{R}}$.

Soluções: · $f(x)\equiv 0$ $\qquad$ ($0\cdot 0=x^2\cdot 0$ ✓)

· $f(x)\equiv x$ $\qquad$ ($x\cdot(x\cdot y)=x^2y$ ✓)

· $f(x)\equiv -x$ $\qquad$ ($(-x)\cdot(-(x(-y)))=x^2(-y)$ ✓)

· $f(x)=|x|$ $\qquad$ ($|x|\,|x|y||=x^2|y|$ ✓).

$\square$