Problema 4 (Grécia 2018) (TN/Murilo)

Seja $x_1, x_2, \ldots$ uma sequência tal que $x_{n+1} = 3x_n^3 + x_n$, e tal que $x_1 = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos com $3 \nmid b$.
Se x_m é o quadrado de um racional para algum m, prove que x_1 também é quadrado de um racional.

Vamos mostrar que, se x_m é quadrado de racional, então x_{m-1} é quadrado de racional.

$$x_{m-1} = \frac{a}{b}, \quad x_m = \frac{3a^3 + ab^2}{b^3} = \frac{p^2}{q^2}. \quad (\text{com } (a,b) = 1)$$

$$\underbrace{a(3a^2 + b^2) = p^2}_{(ii)} \quad \text{e} \quad \underbrace{b^3 = q^2}_{(i)}.$$

(i) $\Rightarrow$ b é quadrado. (1)

(ii) Se r primo | $r \mid a \Rightarrow r \mid 3a^2$ e $r \nmid b^2 \Rightarrow r \nmid 3a^2 + b^2$.

Logo $v_r(a \cdot (3a^2 + b^2)) = v_r(p^2)$

$v_r(a) = 2v_r(p)$. $\Rightarrow v_r(a)$ é par, $\forall r \mid a$, r primo.

$\Rightarrow$ a é quadrado (2)

(1) e (2) $\Rightarrow x_{m-1}$ é quadrado de racional.

Por indução, x_m é $\square \Rightarrow x_{m-1}$ é $\square \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_1$ é $\square$.

$\square$