**PROBLEMA 2**

*Todas as suas soluções devem ser justificadas*

Olimpíada Brasileira de Matemática

## NÍVEL 3

**Nome completo:** Guilherme Zeus Dantas e Moura

**CPF do aluno ou do responsável:** 140.264.007-27

a)

Vamos mostrar que, ao escrever o número da lousa como $\frac{p}{q}$, com $(p, q) = 1$, $q$ é ímpar. Faremos isso por indução.

Base: $0 = \frac{0}{1}$. $q$ é ímpar ✓

P.I.: Suponha que $\frac{p}{q}$ está escrito na lousa e $q$ é ímpar.

Ao realizar a operação 1 ou 2, o novo número é: $\frac{p \pm q}{q}$.

$(p \pm q, q) = (p, q) = 1$ e $q$ é ímpar. OK!

Ao realizar a operação 3, o novo número é:

$$\frac{\frac{p}{q} - 1}{\frac{2p}{q} - 1} = \frac{p-q}{2p-q}.$$

$(2p-q, p-q) = (p, p-q) = (p, q) = 1$ e

$2p - q$ é ímpar OK!

Logo, partindo de 0, só podemos chegar em frações com denominador ímpar, que não é o caso de $\frac{1}{2018}$. □

//

b) Pela solução acima sabemos que se o número for $\frac{p}{q}$, $(p, q) = 1 \Rightarrow q$ é ímpar

(Lema 0)

Lema 1: a 3ª operação é inversa de si mesma.

![Olimpíada Brasileira de Matemática]

Olimpíada Brasileira de Matemática

## NÍVEL 3

# PROBLEMA 2

*Todas as suas soluções devem ser justificadas*

**Nome completo:** Guilherme Zeus ~~Dotta~~ Dantas e Moura

**CPF do aluno ou do responsável:** 140.264.007-27

Prova: $\frac{p}{q} \xrightarrow{3^a} \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\frac{p}{q}-1}{2\frac{p}{q}-1} = \frac{p-q}{2p-q} = \frac{x}{y} \Rightarrow \begin{cases} x = p-q \\ y = 2p-q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = y-x \\ q = y-2x \end{cases}$

$\frac{x}{y} \xrightarrow{3^a} \frac{z}{w} \Rightarrow \begin{cases} z = x-y \\ w = 2x-y \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{z}{w}$ □

Como a $1^a$ é inversa da $2^a$ operação, então sempre há como fazer o caminho inverso. (Lema 3/2)

Vamos definir as seguintes operações:

$\frac{c}{2k} \xrightarrow{1^a} \frac{2k+c}{2k} \xrightarrow{3^a} \frac{c}{2(k+c)}$ (operação 4)

Lema 2: $1/2$ funciona. Prova:

$\frac{1}{2} \xrightarrow{4^a} 1/4 \xrightarrow{4^a} 1/6 \xrightarrow{4^a} 1/8 \xrightarrow{4^a} \cdots \xrightarrow{4^a} 1/2018$. □

Lema 2': $\frac{2k+1}{2}$ funciona. Pois $\frac{2k+1}{2} = k + \frac{1}{2}$. Basta fazer 1 ou 2. □.

Vamos mostrar que todas as frações $\frac{p}{2k}$ levam em uma fração $p'/2$. Faremos isso mostrando que se $|k|>1$, então dá pra levar $p/2k$ em $p'/2k'$, tal que $0<|k'|<|k|$.

S.P.G., $k>0$. Se $k=1$. $p/2k = p/2$ ok!. Se $k>1$: (*)

Se $p>0$, diminua 1 até que o número esteja $-1<n<0$. O número será $\frac{-q}{2k}$, com $q>0$. Se $p<0$, some 1 até que o número seja entre $-1$ e $0$ (*). O número será $\frac{-q}{2k}$.

$\frac{-q}{2k} \xrightarrow{4^a} \frac{-q}{2(k-q)} = \frac{-q}{2k'}$. Temos $k' = k-q$.

NÍVEL 3

# PROBLEMA 2

*Todas as suas soluções devem ser justificadas*

**Nome completo:** Guilherme Zeus Dantas e Moura

**CPF do aluno ou do responsável:** 140.264.007-27

Como $0 > \frac{-q}{2K} > -1 \Rightarrow 0 > -q > -2K \Rightarrow K > K-q > -K \Rightarrow$

$\Rightarrow |K| > |K'| > 0$ pois $K=q$ e $(q, 2K)=1 \Rightarrow K=1$. OK!

Logo, se $|K| > 1$, dá pra levar $\frac{p}{2K} \to \frac{p}{2K'}$, com $|K'| < |K|$

Observe então a sequência $|K|, |K'|, |K''|, |K'''|, \dots$

Ou um dos elementos é 1 $\Rightarrow$ Dá pra levar $\frac{p}{2K} \to \frac{p'}{2K'} \to \dots \to \frac{p''}{2}$. OK!

Ou todos os elementos são $> 1$, que é absurdo, pois a sequência não pode infinita, estritamente decrescente e nos inteiros positivos.

Logo, $\frac{p}{q}$, $(q,p)=1$, leva em $\frac{1}{2018}$ $\Leftrightarrow$ (Lema 2 e 3/2)

$\Leftrightarrow$ $\frac{p}{q}$, $(q,p)=1$, leva em $1/2$ $\Leftrightarrow$

$\Leftarrow$ $q$ é par.

e (Lema 0) $p/q$, $(q,p)=1$, leva em $1/2018$ $\Rightarrow$ $q$ é par.

Logo, vale a ida e a volta e os números que levam em $1/2018$ são todos com denominador par.

NÍVEL 3

# PROBLEMA 2

*Todas as suas soluções devem ser justificadas*

**Nome completo:** Guilherme Zeus Dantas e Moura

**CPF do aluno ou do responsável:** 140.264.007-27

(*) Dá pra chegar em $-1 \leq n \leq 0$ pois os saltos são unitários e o buraco é do tamanho do salto, então dá pra fazer $-1 \leq n \leq 0$.

Porém $n \neq 1$ e $n \neq 0$ pois o denominador é par.

Guilherme Zeus Dantas e Moura 140.264.007-27

# Folha de rascunho

Operação 3:

$$\frac{\frac{x}{y}-1}{2\frac{x}{y}-1} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{x-y}{2x-y} = \frac{p}{q}$$ , como $(x-y, 2x-y) = = (x-y, x) = = (y, x) = 1$ e $(p,q) = 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y = p \\ 2x-y = q \end{cases}$$

"função inversa" WOW!

$x = q-p$ e $y = q-2p$ $\rightarrow$ $\frac{x}{y} = \frac{p-q}{2p-q}$ Wow!

Fazendo só 3: $\frac{1}{2018} \xleftarrow{3} \frac{2017}{2016} \xleftarrow{3} \frac{-1}{-2018}$

---

$$\frac{x}{y} = \frac{q-p}{q-2p} = 1 + \frac{p}{q-2p} = 1 + \frac{1}{\frac{q}{p}-2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{r+k}-2} \; ?$$

---

Inversa da 3: $\begin{bmatrix} -1 & +1 \\ -2 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Inversa da 2 ou 1: $\begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$2018 = 2 \cdot 1009$

$\frac{1}{2016} \rightarrow \frac{2017}{2016} \rightarrow \frac{1}{2018}$ //

$\frac{p}{q} \xleftarrow{2/1} \frac{p+kq}{q} \xleftarrow{3}$

$\xleftarrow{3} \frac{p+q(k-1)}{2p+q(2k-1)}$

---

$\frac{k+1}{k} \xrightarrow{3} \frac{-1}{k+2}$ //

$\frac{k+1}{k} \rightarrow \frac{-1}{k-2}$ //

$\frac{-1}{k+}$

Guilherme Zeus Dantas e Moura 140.264.007-27

# Folha de rascunho

Gen 0: $1/2018$

Gen 1/2: $2018k+1/2018$

3 é inversa de 3
2 é inversa de 1 ✓

Gen 1: $2018(k-1)+1 / 2018(2k-1)+2 = 2018k-2017 / 4096k - 2016$

Gen 2: $$\frac{[2018(k-1)+1] + [2018(2k-1)+2]\cdot(l-1)}{2[2018(k-1)+1] + [2018(2k-1)+2]\cdot(2l-1)}$$

$$\frac{3}{2} \xleftrightarrow{3^2} \frac{1}{4} \to \frac{5}{4} \to \frac{1}{6} \to \frac{7}{6} \to \frac{1}{8}$$

$$\frac{c}{k} \to \frac{k+c}{k} \to \frac{c}{k+c}$$

$$\frac{-c}{k} \to \frac{k-c}{k} \to \frac{-c}{k-c}$$

$$\frac{-p}{2q} \xrightarrow{4} \frac{-p}{2q-p}$$

↑diminuiu!