



## Problemas Sortidos II

Guilherme Zeus Dantas e Moura  
zeusdanmou@gmail.com

### Problema 1 (Metrópoles 2018, 4)

Sejam  $1 = d_0 < d_1 < \dots < d_m = 4k$  todos os divisores positivos de  $4k$ , em que  $k$  é um inteiro positivo. Prove que existe inteiro  $i \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $d_i - d_{i-1} = 2$ .

### Problema 2 (Putnam 2018, B1 )

Seja  $\mathcal{P}$  o conjunto de vetores definidos por

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid 0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 100, \text{ and } a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ache todos vetores  $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$  tais que o conjunto  $\mathcal{P} \setminus \{\mathbf{v}\}$  obtido ao remover o vetor  $\mathbf{v}$  de  $\mathcal{P}$  pode ser particionado em dois conjuntos de tamanhos e somas iguais.

### Problema 3 (2019 Putnam, B1 )

Seja  $\mathbb{Z}^2$  o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  do plano com coordenadas inteiras. Para cada inteiro  $n \geq 0$ , seja  $P_n$  o subconjunto de  $\mathbb{Z}^2$  que consiste do ponto  $(0, 0)$  e de todos os pontos  $(x, y)$  tais que  $x^2 + y^2 = 2^k$  para algum inteiro  $k \leq n$ . Determine, em função de  $n$ , a quantidade de subconjuntos com 4 pontos de  $P_n$  cujos elementos são vértices de um quadrado.

### Problema 4 (Metrópoles 2018, 2)

Um quadrilátero convexo  $ABCD$  é circunscrito num círculo  $\omega$ . Seja  $PQ$  o diâmetro de  $\omega$  perpendicular a  $AC$ . Suponha que as retas  $BP$  e  $DQ$  intersectam no ponto  $X$ , e as retas  $BQ$  e  $DP$  intersectam no ponto  $Y$ . Mostre que os pontos  $X$  e  $Y$  estão sobre a reta  $AC$ .