Problema 4 - TST2, Países Baixos 2018.

Vamos provar por indução em n que podemos separar V em U e W t.q. $V = U \cup W$ e $\emptyset = U \cap W$ e $G(U) = K_{|U|}$, $G(V) = \emptyset$.

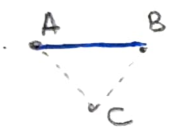
<u>n=1</u>: A

$(U,W) = (\{A\}, \emptyset)$ funciona!

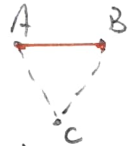
<u>n=2</u>: A.......B

$(U,W) = (\{A\}, \{B\})$ funciona!

<u>n=3</u>:



ou



$\downarrow$ $(U,W) = (\{A,B\}, \{C\})$

$\downarrow$ $(U,W) = (\{C\}, \{A,B\})$

Suponha que a propriedade vale para todos números menores que n.
Se existe alguém A sem amigos, considere o grafo $G' = G - \{A\}$.
Por indução, G' possui (U', W') com as propriedades desejadas. Como A não tem amigos, a partição $(U', W' \cup \{A\})$ funciona!

Podemos supor que todos possuem amigos.

<u>Lema 1</u>: Não pode (pela condição do enunciado):

Legenda

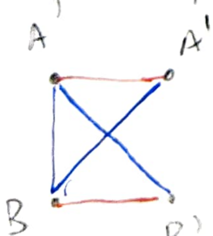
A —— B $\iff$ A ~ B

A —— B $\iff$ A ≁ B

A .   . B   <u>não sei</u>.

<u>Lema 2</u> diâmetro $G \geq 2$

Suponha que $d(A,B) > 2$. Seja $A' \sim A$ e $B' \sim B$. Como $d > 2$, $A \nsim B$, $A \nsim B'$, $B \nsim A'$:



que não pode pelo <u>L.1</u>.

$\square$

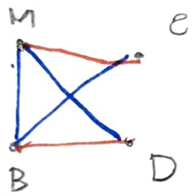
Seja M o elemento com número máximo de vizinhos.

Lema 3: Seja B tal que $B \nsim M$. Todos os amigos de B são amigos de M. Em outras palavras, $V(B) \subset V(M)$.

Prova: Sabemos que $|V(B)| \leq |V(M)|$. Se $V(B) = V(M)$, ok!

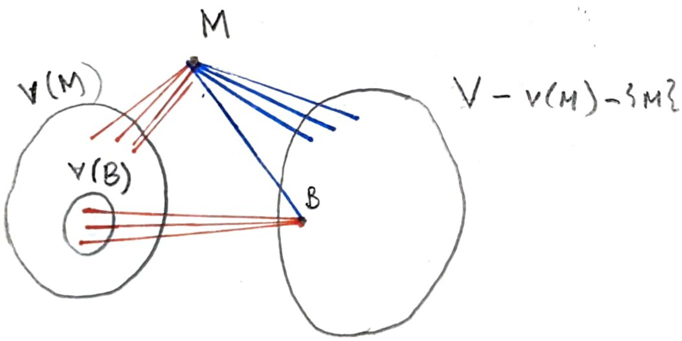
Caso contrário, existe $C \sim M$ e $C \nsim B$.

Suponha que existe $D \nsim M$ e $D \sim B$.



NÃO Pode pelo L.1.

Logo, não existe amigo de B que não é amigo de $M \Rightarrow V(B) \subset V(M)$ □.



Seja $W'' = V - V(M) - M$; e G' o grafo induzido por $V(M)$.

Corolário 4:

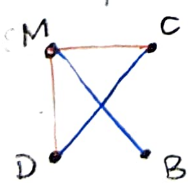
W'' é livre de amigos:

Prova: Suponha que $B \sim B'$, $B, B' \in W''$. Mas $B' \in V(B) \subset V(M) \Rightarrow B' \in V(M)$

$\Rightarrow B' \notin W'$. Abs! □

Lema 5: Suponha que $C \nsim D$, $C, D \in V(M)$ então $C \nsim B$, $\forall B \in W''$.

Prova:



só pode acontecer se $C \nsim B$ e $D \nsim B$.

(pelo L.1) □

$n-1 \geq |V(M)| \geq 1$.

Por indução, sabemos resolver o problema no grupo G', gerando (U', W').

Se existe elemento $F \in W'$ que é amigo de todos em U', vamos trocar

$$(U', W') \quad \text{por} \quad (U' \cup \{F\}, W' - \{F\}).$$

Desse modo, s.p.g., todo $F \in W'$ possui um não-amigo em U'.

Pelo lemma 5, como $F \in W' \Rightarrow F \nsim G$, para algum $G \in U' \overset{(L.5)}{\Rightarrow}$ F não é amigo de ninguém em W''.

Logo, $F \in W'$ não é amigo de ninguém em W',
e
$F \in W''$ não é amigo de ninguém em W''
e
$F \in W'$ não é amigo de ninguém em W''.

Seja $W = W' \cup W''$
$\Rightarrow F \in W$ não é amigo de ninguém em W.

Por outro lado, $F \in U'$ é amigo de todos em U'.
e
M é amigo de todos em $U' \subset V(M)$

Seja $U = U' \cup \{M\}$
$\Rightarrow F \in U$ é amigo de todos em U.

Além disso, $U \cup W = (U' \cup \{M\}) \cup (W' \cup W'') = V(M) \cup \{M\} \cup (V - V(M) - \{M\}) = V$.

Logo, (U, W) funciona!

$\blacksquare$