$f = xg$

Sejam f e g dois polinômios não identicamente nulos com coeficientes inteiros e $\deg f > \deg g$. Suponha que existem infinitos primos p para os quais o polinômio $pf+g$ possui raíz racional. Prove que f possui raíz racional.

$pf + g$ possui raiz racional para infinitos primos p.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

$$(p_i f + g)\left(\frac{x_i}{y_i}\right) = 0.$$

$$\left.y_i \mid p_i \cdot a_n \right\} \Rightarrow y_i \mid a_n$$

$$p_i = -\frac{g(x_i/y_i)\, y_i^n}{f(x_i/y_i)\, y_i^n}$$

SPG $p_i \mid y_i$ para todos i.

$$p_i \le y_i \le c_n p_i \qquad n = \deg f$$

$$f\left(\frac{x_i}{y_i}\right) \cdot y_i^n + \left[g\left(\frac{x_i}{y_i}\right) y_i^{n-1}\right] \left[\frac{y_i}{p_i}\right] = 0$$

Se grau $g \le n-2$. Absurdo.

Logo grau $g = n-1$, $\Leftarrow$

$$-\frac{1}{p_i} = \frac{f}{g}\left(\frac{x_i}{y_i}\right)$$