

(IMO 2005 / 4)

Determine todos os inteiros coprimos com todos os termos da sequência
 $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

Seja $p \neq 2, 3$ primo.

$$\begin{aligned} a_{p-2} &\equiv 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \\ &\equiv 2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} - 1 \\ &\equiv 3 \cdot 6^{-1} + 2 \cdot 6^{-1} + 6^{-1} - 6 \cdot 6^{-1} \\ &\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad p \nmid n, \quad \forall p \neq 2, 3. \end{aligned}$$

$$a_1 = 2 + 3 + 6 - 1 = 10. \quad \Rightarrow \quad 2 \nmid n.$$

$$a_2 = 4 + 9 + 36 - 1 = 48 \quad \Rightarrow \quad 3 \nmid n.$$

Logo, o único n possível é 1.

□