**2.** Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$.

$f(x-z) = f(f(x)) - z - 1, \quad \forall x \in \mathbb{Z}, \ \forall z \in \operatorname{Im} f$

$f(x) \equiv -1, \quad f(x) \equiv x + 1$

$\boxed{\text{Quero cortar/cancelar ...}}$

$P[x, f(x)]$

$f(x - f^2(x)) = -1$ ↳ $f(x)$

$P[f(x), x]$

$f(0) = f^3(x) - f(x) - 1$

$f(-f(0)-1) = -1$

"$z = -1$"

$P[x, -f^2(0)]$

$f(x+1) = f(f(x))$

$f(0) + 1 = f(x+2) - f(x)$

$x \mapsto -2$: $f(-2) = -1$

$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$

$f(x - f(y+2)) = f(f(x)) - f(y+2) - 1$

$f(x - f(y) - (f(0)+1)) = \underbrace{f(f(x)) - f(y) - 1} - (f(0)+1)$

$f(x - f(y) - (f(0)+1)) = f(x - f(y)) - (f(0)+1)$

$x \mapsto x + f(y)$

$f(x - (f(0)+1)) = f(x) - (f(0)+1)$

Seja $f(0) + 1 = t$.

$$f(x+2)-f(x) = t \xrightarrow{t} f(x+2t)-f(x) = t^2$$

$$f(x+t)-f(x) = t \xrightarrow{2} f(x+2t)-f(x) = 2t$$

$$\Rightarrow t=0 \quad \text{ou} \quad t=2$$

$f(0) = -1$ ou $f(0) = 1$

$\Downarrow$

$f(\text{par}) = -1$

e

$f(\text{impar}) = c$

$\boxed{\text{Testar}}$...

CASO 1

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \text{ par} \\ x+c, & \text{se } x \text{ impar} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Testar}}$...

CASO 2

CASO 1 $\quad f(x) \equiv -1, \quad x$ par

$f(x) \equiv c, \quad x$ ímpar

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

$\leadsto c$ par

$\leadsto x$ ímpar, $y$ par

$$\underset{c}{\underbrace{f(x+1)}} = f(c) \qquad c = -1 \quad \text{Abs.}$$

$\leadsto c$ ímpar

$\leadsto x = c, \; y$ par $\Rightarrow c = -1$ ok!

Logo, a única solução é $\boxed{f(x) \equiv -1.}$

---

CASO 2

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \text{ par} \\ x+c, & \text{se } x \text{ ímpar} \end{cases}$$

$\leadsto c$ ímpar $\Rightarrow f$ é injetora $\Rightarrow \boxed{f(x) \equiv x+1.}$

$\leadsto c$ par

$$f(x - (c+1)) = f(f(x)) - c - 2$$

$x$ ímpar:

$$x - c = x + 2c - c - 2$$

$\Rightarrow c = 1$ Abs.