Contando $(\{P, P'\}, E)$

- Por problemas

$$\# \geq \binom{6}{2} \cdot \left(\left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor + 1 \right) = 15 \cdot \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor + 15$$

- Por estudantes

$$\# \leq \binom{4}{2} (n-1) + \binom{5}{2} = 6n + 4$$

Logo:

$$15 \cdot \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor + 15 \leq 6n + 4$$

$$15 \cdot \left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor + 11 \leq 6n$$

$$\left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor \leq \frac{6n - 11}{15} = \frac{2n}{5} - \frac{11}{15}$$

$$\left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2n}{5} - \frac{11}{15} \right\rfloor$$

$$\left\lfloor \frac{2n}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n}{5} - \frac{11}{15} \right\rfloor$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{11}{15} \leq \left\{\frac{2n}{5}\right\} < 1$

$\Leftrightarrow \quad \left\{\frac{2n}{5}\right\} = \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \quad n \equiv 2 \pmod 5$

Logo: $\boxed{n = 5k + 2.}$

Contando por problemas:

$$\# \geq \binom{6}{2}\left(\left\lfloor \frac{10k+4}{5} \right\rfloor + 1\right) = 15 \cdot (2k+1) = 30k + 15$$

Contando por estudante

$$\# \leq \binom{4}{2}(n-1) + \binom{5}{2} = 6n + 4 = 30k + 16.$$

se alguém fez somente 3 problemas, essa desigualdade fica: $\# \leq 30k + 13$. Abs!

Logo, todos fizeram 4 problemas, exceto quem fez 5.

Logo: $\# = 30K + 16$, o que significa que, para todo par de problemas, exatamente $2K+1$ estudantes fizeram ambos, exceto para um certo par em que $2K+2$ estudantes fizeram ambos.

Olhando somente para t_i estudantes que fizeram o problema i.

- Para (quase) todo problema $j \neq i$, exatamente $2K+1$ ($2K+2$, na exceção) fizeram o problema j.
- Para (quase) todo estudante, ele fez exatamente 3 (4, na exceção) outros problemas.

Logo: Contando (P,E);

$\# = 10K + 5$ ou $10K + 6$, se houver exceção (que tem p/ 2 valores de i)

$\# = 3t_i$ ou $3t_i + 1$, se houver excessão (que tem p/ 5 valores de i)

$\# \underset{(3)}{\equiv} k+1$, para 4 valores de i

$\# \underset{(3)}{\equiv} k+2$, para 2 valores de i

Mas,

$\# \underset{(3)}{\equiv} 0$, para 1 valor de i

e

$\# \underset{(3)}{\equiv} 1$, para 5 valores de i.

Absurdo!