(USAMO 2018)

Para todo par $i \neq j$, existe um <u>único</u> K

tal que

$$a_i + Ki \equiv a_j + Kj$$

$$\iff$$

$$a_i - a_j \equiv (i-j) \cdot K$$

$$\iff$$

$$K \equiv (a_i - a_j) \cdot (i-j)^{-1}$$ ⟶ existe, pois $i \neq j$.

Seja o grafo $G = (V, E)$; $V = \{1, 2, \dots, p\}$; $E = \binom{V}{2}$.

Para toda aresta $\{i, j\}$, definimos $c(\{i,j\}) := (a_i - a_j) \cdot (i-j)^{-1}$.

$$\binom{p}{2} = \sum_{K=0}^{p-1} \left| \left\{ x \in \binom{V}{2} : c(x) = K \right\} \right|$$

$$\Rightarrow \exists K' : \left| \left\{ x \in \binom{V}{2} : c(x) = K' \right\} \right| \leq \frac{p-1}{2}.$$

$\Rightarrow$ para esse K', existem, no máximo, $\frac{p-1}{2}$ pares $\{i,j\}$ t.q. $a_i + K i \equiv a_j + K j$

$\Rightarrow$ existem, no mínimo, $p - \left(\frac{p-1}{2}\right) = \frac{p+1}{2} > \frac{p}{2}$ restos diferentes. $\square$