Rodadas de Geometria

§1 Rodada 1

Problema 1 **(APMO 2007, 2)** Let ABC be an acute angled triangle with $\angle BAC = 60°$ and $AB > AC$. Let I be the incenter, and H the orthocenter of the triangle ABC. Prove that $2\angle AHI = 3\angle ABC$.

Problema 2 **(Rússia 2008)** Um ponto K é escolhido sobre a diagonal BD do quadrilátero inscritível $ABCD$ tal que $\angle AKB = \angle ADC$. Denote por I e I' os incentros dos triângulos ACD e ABK, respectivamente. Os segmentos II' e BD se intersectam no ponto X. Prove que A, X, I e D são concíclicos.

Problema 3 **(Ibero 2013, 2)** Let X and Y be the diameter's extremes of a circunference Γ and N be the midpoint of one of the arcs XY of Γ. Let A and B be two points on the segment XY. The lines NA and NB cuts Γ again in C and D, respectively. The tangents to Γ at C and at D meets in P. Let M the the intersection point between XY and NP. Prove that M is the midpoint of the segment AB.

Problema 4 **(Rússia 2008)** O incírculo ω do triângulo ABC tangencia os lados BC, CA e AB nos pontos A', B' e C', respectivamente. Dois pontos distintos K e L são escolhidos sobre ω tal que $\angle AKB' + \angle BKA' = \angle ALB' + \angle BLA' = 180°$. Prove que a reta KL é equidistante dos pontos A', B' e C'.

Problema 5 **(USA TST 2017, 5)** Let ABC be a triangle with altitude AE. The A-excircle touches BC at D, and intersects the circumcircle at two points F and G. Prove that one can select points V and N on lines DG and DF such that quadrilateral $EVAN$ is a rhombus.

Problema 6 **(China TST 2013, 2.2)** Let P be a given point inside the triangle ABC. Suppose L, M, N are the midpoints of BC, CA, AB respectively and

$$PL : PM : PN = BC : CA : AB.$$

The extensions of AP, BP, CP meet the circumcircle of ABC at D, E, F respectively. Prove that the circumcentres of $APF, APE, BPF, BPD, CPD, CPE$ are concyclic.

§2 Rodada 2

Problema 7 **(IMO 2008, 1)** Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC. O círculo Γ_A, centrado no ponto médio de BC que passa por H intersecta a reta BC nos pontos A_1 e A_2. Da mesma maneira, defina os pontos B_1, B_2, C_1 e C_2.

Prove que os seis pontos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 são concíclicos.

Problema 8 **(Japão 2009, 4)** Let Γ be a circumcircle. A circle with center O touches to line segment BC at P and touches the arc BC of Γ which doesn't have A at Q. If $\angle BAO = \angle CAO$, then prove that $\angle PAO = \angle QAO$.

Problema 9 **(Bulgária 1998)** Um quadrilátero convexo $ABCD$ tem $AD = CD$ e $\angle DAB = \angle ABC < 90°$. A reta por D e pelo ponto médio de BC corta AB no ponto E. Prove que $\angle BEC = \angle DAC$.

Problema 10 **(IMO 2007, 2)** Consider five points A, B, C, D and E such that $ABCD$ is a parallelogram and $BCED$ is a cyclic quadrilateral. Let ℓ be a line passing through A. Suppose that ℓ intersects the interior of the segment DC at F and intersects line BC at G. Suppose also that $EF = EG = EC$. Prove that ℓ is the bisector of angle DAB.

Problema 11 **(Rússia 2007)** Dado um triângulo ABC, uma circunferência passa pelos vértices B e C e intersecta os lados AB e AC nos pontos D e E, respectivamente. Os segmentos CD e BE se intersectam no ponto O. Denote os incentros dos triângulos ADE e ODE por M e N, respectivamente. Prove que o ponto médio do menor arco DE está sobre a reta MN.

Problema 12 **(Rússia 2012)** O ponto E é o ponto médio do segmento conectando o ortocentro do triângulo escaleno ABC e o ponto A. O incírculo do triângulo ABC tangencia os lados AB e AC nos pontos C' e B', respectivamente. Seja F o simétrico do ponto E em relação à rela $B'C'$ e sejam I e O o incentro e o circumcentro do triângulo ABC, respectivamente. Prove que F, I e O são colineares.

§3 Rodada 3

Problema 13 **(IMO 2014, 4)** Let P and Q be on segment BC of an acute triangle ABC such that $\angle PAB = \angle BCA$ and $\angle CAQ = \angle ABC$. Let M and N be the points on AP and AQ, respectively, such that P is the midpoint of AM and Q is the midpoint of AN. Prove that the intersection of BM and CN is on the circumference of triangle ABC.

Problema 14 **(Rioplatense 2008, 5)** In triangle ABC, where $AB < AC$, let X, Y, Z denote the points where the incircle is tangent to BC, CA, AB, respectively. On the circumcircle of ABC, let U denote the midpoint of the arc BC that contains the point A. The line UX meets the circumcircle again at the point K. Let T denote the point of intersection of AK and YZ. Prove that XT is perpendicular to YZ.

Problema 15 **(Tuymaada 2012, 3)** Point P is taken in the interior of the triangle ABC, so that $\angle PAB = \angle PCB = \dfrac{1}{4}(\angle A + \angle C)$.

Let L be the foot of the angle bisector of $\angle B$. The line PL meets the circumcircle of $\triangle APC$ at point Q. Prove that QB is the angle bisector of $\angle AQC$.

Problema 16 **(Cone Sul 2010, 5)** The incircle of triangle ABC touches sides BC, AC, and AB at D, E, and F respectively. Let ω_a, ω_b and ω_c be the circumcircles of triangles EAF, DBF, and DCE, respectively. The lines DE and DF cut ω_a at $E_a \neq E$ and $F_a \neq F$, respectively. Let r_A be the line E_aF_a. Let r_B and r_C be defined analogously. Show that the lines r_A, r_B, and r_C determine a triangle with its vertices on the sides of triangle ABC.

Problema 17 **(Bulgária 2013)** Considere um triângulo acutângulo ABC com alturas AA_1, BB_1 e CC_1. Considere o ponto C' no prolongamento de B_1A_1 além do ponto A_1 tal que $A_1C' = B_1C_1$. Analogamente, considere o ponto B' no prolongamento de A_1C_1 além do ponto C_1 tal que $C_1B' = A_1B_1$ e o ponto A' no prolongamento de C_1B_1 além do ponto B_1 tal que $B_1A' = C_1A_1$. Denote A'', B'' e C'' os pontos simétricos de A', B' e C' em relação aos pontos BC, CA e AB, respectivamente. Prove que se R, R' e R'' são os circunraios dos triângulos ABC, $A'B'C'$ e $A''B''C''$, então R, R' e R'' são lados de um triângulo com área igual a metade da área do triângulo ABC.

Problema 18 **(Bulgária 2014)** O quadrilátero $ABCD$ está inscrito na circunferência ω. As retas AC e BD se intersectam no ponto E e as semirretas $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{DA}$ se encontram no ponto F. Mostre que a reta pelos incentros de ABE e ABF e a reta pelos incentros de CDE e CDF se encontram em um ponto sobre a circunferência ω.