Solução de Rússia 2018, Problema 11.8

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1. Initially, a red leaper stands on the lower left corner cell of a checkered 2018×2018 board, and a blue leaper stands on the lower right corner cell. Roger and Bazil make moves in turn, Roger makes the first move. By a move, the player moves his leaper (the red one for Roger, and the blue one for Bazil) by 20 cells in one coordinate, and simultaneously by 17 cells in the other coordinate; a leaper cannot stand on the cell occupied by the other leap. It is prohibited to obtain a position which already appeared on the board before (two positions are identical if the cells occupied by the red leaper coincide, and the cells occupied by the blue one also coincide). A player who cannot make a move loses the game. Who of the players has a winning strategy?

Solução. Vamos pintar o tabuleiro como o de xadrez. Para não confundir com as cores vermelho e azul (relativas aos saltadores), cada casa do tabuleiro terá uma *pintura* branca ou preta. Cada vez que um saltador salta, ele muda de pintura. Como os saltadores começam em cores distintas, vale o seguinte lema.

Lema 1. Os saltadores estão em pinturas distintas se, e somente se, o próximo a jogar é Roger.

Sejam X_0 e Y_0 as casas iniciais dos saltadores vermelho e azul, respectivamente. Generalizando, seja X_n (Y_n) a casa do saltador vermelho (azul) imediatamente após a n-ésima jogada de Roger (Bazil).

Lema 2. Existe uma série de movimentos que começa em Y_0 e termina em X_1, que não passa pela memsa casa duas vezes e *com certa liberdade.*

Demonstração. A demonstração ficará para mais tarde, devido a incerteza da liberdade.

Sejam $Z_0 = Y_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_t = X_1$ as casas visitadas por uma das série de movimentos garantida pelo Lema 2. Pela pintura, t é par.

A primeira jogada de Bazil será $Y_1 = Z_1$.

Seja k o menor número tal que X_k não é X_0 ou X_1. (Dizemos que $k = \infty$, se não existir nenhum número com tal propriedade.)

Já sabemos se $k = 2$ ou se $k > 2$.

Lema 3. Se $3 \leq k \leq t$, então Bazil ganha.

Demonstração. Sabemos que $X_2 = X_0, X_3 = X_1, \ldots, X_{k-1} = X_{k-1 \pmod 2}$ e $X_k \notin \{X_0, X_1\}$.