$f : \{A,B,C\}^n \to \{A,B,C\}^n$.

Seja $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, como descrito no enunciado.

$\boxed{\text{Resp: } n \text{ ímpar é necessário e sufic.}}$

Observe que $R_n = f^n(R_0)$.

Como as cardinalidades do domínio e contra domínio são inteiros e iguais, por P.C.P,

$f$ é injetora $\Longleftrightarrow$ $f$ é sobrejetora.

$\Longleftrightarrow$ $f$ é bijetora.

<u>LEMA 1</u>: Se $f$ é bijetora, então $\forall R_0 \; \exists m$ t.q. $f^m(R_0) = R_0$.

<u>Prova</u>: Como $f$ é bijetora e $\{A,B,C\}^n$ é finito, então $f$ é uma permutação dos elementos de $\{A,B,C\}^n$. Portanto, no grafo $G$ orientado em que $a \to b \Leftrightarrow f(a) = b$, $\forall a \in G$, ingrau$(a)$ = outgrau$(a) = 1$.

$\Rightarrow$ $G$ é uma união de ciclos (incluindo, possivelmente, loops).

Basta pegar o ciclo $C$ em que $R_0$ está. Se $m$ é o tamanho do ciclo, então $f^m(R_0) = R_0$ $\square$

<u>LEMA 2</u>: Se $f$ não é bijetora, então $\exists R_0 \; \forall m \; f^m(R_0) \neq R_0$.

<u>Prova</u> $f$ não é bijetora $\Longleftrightarrow$ $f$ não é sobrejetora $\Rightarrow$ $\exists R_0$ tq

$f(x) \neq R_0 \;\; \forall x \in \{A,B,C\}^n \Rightarrow \exists R_0, \forall m, f(f^{m-1}(R_0)) \neq R_0$. $\square$

<u>LEMA 3</u>: $f$ é bijetora $\Leftrightarrow$ $n$ é o número que procuramos no enunciado.

<u>Prova</u>: Imediato a partir de <u>L. 1 e 2</u> $\square$

Por exemplo, para n par:

$$f(A, A, A, \ldots) = f(B, C, B, C, \ldots) = (A, A, A, A, \ldots).$$

Logo, para n par, f não é injetora $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ n par não funciona.

Toma $A=0$, $B=1$, $C=2$.

Sejo $n$ impar. Suponha que $f(T)=f(U)=V$

<u>Lema 4:</u> $(u_i - t_i) \equiv -(u_{i+1} - t_{i+1})$ $\pmod 3$

<u>Prova:</u> Se $u_i = t_i \Rightarrow u_{i+1} = t_{i+1}$ OK!

Se $u_i \neq t_i$ e se $v_i = u_i$:

$u_{i+1} = u_i$ e $t_{i+1} \equiv -t_i - v_i \equiv -t_i - u_i$

$\Rightarrow u_{i+1} - t_{i+1} \equiv -(u_i - t_i)$ OK!

Se $u_i \neq t_i$ e $v_i = t_i$. Análogo

Se $u_i \neq t_i \neq v_i \neq u_i$:

$u_{i+1} = -u_i - v_i = t_i$; $t_{i+1} = -t_i - v_i = u_i$

$\Rightarrow u_{i+1} - t_{i+1} \equiv -(u_i - t_i)$. $\square$

logo

$n$ impar.

$$+(u_1 - t_1) \equiv -(u_2 - t_2) \equiv +(u_3 - t_3) \equiv \cdots \equiv +(u_n - t_n) \equiv -(u_1 - t_1)$$

$\Rightarrow u_1 \equiv t_1 \pmod 3 \Rightarrow u_1 = t_1$.

$\Rightarrow U = T$. Logo, pro $n$ impar, $f$ é injetora $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ é bijetora $\Rightarrow$ $n$ impar funciona!