International Mathematical Olympiad 2019

Dia 1

Bath, United Kingdom

Problema 1 Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

para quaisquer a e b inteiros.

Problema 2 No triângulo ABC, o ponto A_1 está no lado BC e o ponto B_1 está no lado AC. Sejam P e Q pontos nos segmentos AA_1 e BB_1, respectivamente, tal que PQ é paralelo a AB. Seja P_1 um ponto na reta PB_1, tal que B_1 está estritamente entre P e P_1 e $\angle PP_1C = \angle BAC$. Analogamente, seja Q_1 um ponto na reta QA_1, tal que A_1 está estritamente entre Q e Q_1 e $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Prove que os pontos P, Q, P_1 e Q_1 são concíclicos.

Problema 3 Uma rede social possui 2019 usuários, alguns deles são amigos. Sempre que o usuário A é amigo do usuário B, o usuário B também é amigo do usuário A. Eventos do seguinte tipo podem acontecer repetidamente, um de cada vez:

Três usuários A, B e C tais que A é amigo de B e A é amigo de C, mas B e C não são amigos, mudam seus estados de amizade de modo que B e C agora são amigos, mas A deixa de ser amigo de B e A deixa de ser amigo de C. Todos os outros estados de amizade não são alterados.

Inicialmente, 1010 usuários possuem exatamente 1009 amigos cada e 1009 usuários possuem exatamente 1010 amigos cada. Prove que existe uma sequência de tais eventos tal que, após essa sequência, cada usuário é amigo de no máximo um outro usuário.

International Mathematical Olympiad 2019

Dia 2

Bath, United Kingdom

Problema 4 Encontre todos os pares (k, n) de inteiros positivos tais que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problema 5 O Banco de Bath emite moedas com um H num lado e um T no outro. Harry possui n dessas moedas colocadas em linha, ordenadas da esquerda para a direita. Ele repetidamente realiza a seguinte operação: se há exatamente $k > 0$ moedas mostrando H, então ele vira a k-ésima moeda contada da esquerda para a direita; caso contrário, todas as moedas mostram T e ele para. Por exemplo, se $n = 3$ o processo começando com a configuração THT é $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, que acaba depois de três operações.

(a) Mostre que, para qualquer configuração inicial, Harry para após um número finito de operações.

(b) Para cada configuração inicial C, seja $L(C)$ o número de operações antes de Harry parar. Por exemplo, $L(THT) = 3$ e $L(TTT) = 0$. Determine a média de $L(C)$ sobre todas as 2^n possíveis configurações iniciais C.

Problema 6 Seja I o incentro do triângulo acutângulo ABC com $AB \neq AC$. A circunferência inscrita (incírculo) ω de ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. A reta que passa por D perpendicular a EF intersecta ω novamente em R. A reta AR intersecta ω novamente em P. As circunferências circunscritas (circuncírculos) dos triângulos PCE e PBF se intersectam novamente no ponto Q. Prove que as retas DI e PQ se intersectam sobre a reta que passa por A perpendicular a AI.