

Passeios Aleatórios

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

- Isso é uma adaptação (com algumas modificações) para o português de um material intitulado *Random Walks*, em uma aula ministrada por *Paul Zeitz* no *Berkeley Math Circle* em 6 de maio de 2014.
- § é o símbolo para *simoleon*, moeda utilizada nos jogos *The Sims* e *SimCity*.

Probabilidade Recursiva e Valor Esperado

- Dois jogadores jogam uma moeda, de forma alternada. O primeiro jogador que conseguir uma *cara*, ganha. Qual é a probabilidade de:
 - o jogo nunca acabar?
 - o primeiro jogador ganhar?
 - o segundo jogador ganhar?
- Um bilhete de loteria em Sunset Valley no custa §1. O comprador raspa o bilhete para ver o prêmio. Calcule o lucro esperado do governo de Sunset Valley por bilhete vendido, considerando os seguintes cenários de premiação:

(a)

Prêmio	§ 1	§ 10
Probabilidade	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$

(b)

Prêmio	§ 1	§ 10	um bilhete de loteria grátis
Probabilidade	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{5}$

- Em média, quantas vezes um dado de 6 faces deve ser lançado até obter um 6?
 - Em média, quantas vezes um dado de 6 faces deve ser lançado para ver todos os 6 resultados possíveis?
- (Uma formiga num cubo.)** Imagine uma formiga que caminha pelas bordas de um cubo. A formiga não muda de direção enquanto viaja em uma borda. Dois vértices adjacentes, C e V , têm comida e veneno, respectivamente. Se a formiga atingir um desses vértices, ela para de viajar.
Sempre que a formiga alcança um dos outros seis vértices, ela tem três arestas para escolher e escolhe aleatoriamente (i.e., com probabilidade de $1/3$ para cada escolha). Para cada um desses seis vértices iniciais, calcule a probabilidade de a formiga viver (ou seja, atingir C antes de atingir V).
- (Uma história real.)** Quando organizei a Bay Arena Mathematical Olympiad pela primeira vez, eu precisava enviar formulários de inscrição com números de identificação aleatórios para os participantes. Então, eu fiz uma lista dos números de 1 a 1000 e, em seguida, usei meu software de amostragem para obter uma amostra aleatória de tamanho 1000 desses números. No entanto, estupidamente esqueci de verificar o botão *amostra sem substituição* e, em vez disso, fiz uma *amostra com substituição*. Quantos números de identificação distintos foram produzidos?
- (Outra história real.)** No SF Math Circle para crianças do ensino fundamental, 11 crianças de 8 anos estavam em círculo. Eles escreveram seus nomes em um pedaço de papel, e o instrutor os colocou em uma caixa e sacudi a caixa. Então cada criança escolheu aleatoriamente um nome. O instrutor entregou a uma criança uma bola de saquinho de feijão e a criança jogou a bola para a pessoa cujo nome eles tinham. E assim continuou. Se nem todas as crianças jogaram uma bola para elas, o instrutor deu a bola a uma dessas crianças deixadas de fora e o processo continuou.
 - Se uma criança acabasse jogando uma bola para si mesma, ela chorava. Em média, quantas crianças choram?

- (b) Qual é a probabilidade de nenhuma criança chorar?
- (c) O instrutor queria que todas as crianças pudessem jogar a bola sem intervenção. Em outras palavras, idealmente, todas as 11 crianças formarão um "ciclo". Qual é a probabilidade de isso acontecer?
- (d) Se todas as crianças não estiverem em um ciclo, o instrutor solicitou que mudassem de nome para que isso fosse alcançado. O instrutor só permitia que duas crianças de cada vez trocassem seus pedaços de papel. Em média, quantas trocas são necessárias?
- (e) Outro cenário desejável para o instrutor era que a maioria das crianças estivesse em um ciclo. Caso contrário, as crianças têm birras. Qual é a probabilidade de uma birra?