Problema 5 (Álgebra/Shine) (IMO 2009/5)

Determine todas as funções $f: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ t.q. $\forall a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$.

$$a; \quad f(b); \quad f(b+f(a)-1)$$

formam um triângulo não degenerado.

• $\underline{a=1}$ $\Rightarrow$ $1; f(b); f(b+f(1)-1)$ é um triângulo.

$\Rightarrow f(b) = f(b+(f(1)-1))$.

Se $f(1) \neq 1 \Rightarrow f(x) = f(x \pmod{f(1)-1})$.

Logo, fazendo $a \to a+n\cdot(f(1)-1)$. e fazendo $n \to \infty$

$$\underbrace{a+n(f(1)-1)}_{\to\infty}, \ \underbrace{f(b)}_{\text{cte.}}; \ \underbrace{f(b+f(a)-1)}_{\text{cte}} \text{ formam um } \Delta.$$

Absurdo!

Logo $f(1)=1$.

• $\underline{b=1}$: $a; 1; f(f(a))$ formam Δ.

$\Rightarrow f(f(a)) = a, \ \forall a$.

• $\underline{a=2}$: • $r = f(2)-1$

$2; f(b); f(b+r)$ formam Δ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f(b) = f(b+r) \Rightarrow b = f(f(b)) = f(f(b+r)) = b+r$. Abs!

ou

$f(b) \pm 1 = f(b+r)$. $(*)$

Mas, $f(b) \neq f(b+2r)$, pois $b \neq b+2r \Rightarrow f(f(b)) \neq f(f(b+2r)) \Rightarrow f(b) \neq f(b+2r)$.

Logo, para "b" e para "b+r" os sinais em $(*)$ são ambos + ou ambos −.

blema 5 (Álgebra / Shine) (IMO 2009/5)

Se existir b tal que ambos são $-$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f(b) - 1 = f(b+r)$$

$$f(b+r) - 1 = f(b+2r)$$

$$\vdots$$

$$f(b+(k-1)r) - 1 = f(b+kr)$$

$+$

$$f(b) - k = f(b+kr).$$

Tome $k = f(b) \Rightarrow 0 = f(b+f(b)r)$. Abs!

Logo, sempre:

$$f(b) + 1 = f(b+r).$$

- $b \rightarrow f(b)$:

$$b + 1 = f(f(b)+r) \Rightarrow f(b+1) = f(b) + r. \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ é linear $\Rightarrow f(b) = xb + y$.

Mas $f(f(b)) = b \Rightarrow x(xb+y) + y = b \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(b) = b$.

Por fim, podemos checar que $f(b) \equiv b$ é a única solução observando que

a, b, $a+b-1$ sempre forma Δ.

$\square$