Problema 1 - Teoria dos Números - R.F. - Folha 1/2

Vamos olhar a sequência (mod p_1).

É fácil ver que é periódica, pois um par (p_n, p_{n+1}) define unicamente os termos p_{n-1} e p_{n+2} e, por P.C.P, existem dois pares (p_i, p_{i+1}) e (p_j, p_{j+1}) iguais $\Rightarrow$ a sequência pode ser transladada de $j-i$ e continuará a mesma.

Como é periódica, existe $p_{t+1} \equiv p_1 \equiv 0 \pmod{p_1}$. $\Rightarrow p_{t+1} = p_1$.
$\Rightarrow p_{kt+1} = p_1$.

Vamos analizar $\Delta_n = p_{n+1} - p_n = p_{n-1} + k$. Momentaneamente, temos:

$\Rightarrow$ Se $p_{n-1} > -k$, a $p_n \to p_{n+1}$ aumenta. (1)

Se $p_{n-1} = -k$, $p_n = p_{n+1}$ (2)

Se $p_{n-1} < -k$, $p_n \to p_{n+1}$ diminui. (3)

Se existe n tal que n, $n+1$ caiem no mesmo caso, então $n+1$ cairá no mesmo caso e então (p_i) será extritamente crescente, decrescente ou constante. Porém, como $p_{kt+1} = p_1$, só pode ser constante.

Se existe n tal que caia no caso (2) $\Rightarrow$ para $n+1$ e $n+2$, cairá no mesmo caso $\Rightarrow (p_i)$ é constante.

Logo, se não for constante, preciso alternar entre caso (1) e caso (3), para poder atingir p_1 várias vezes.

Vamos olhar pros n's que caem no caso $p_n < -k$. (Todos os pares ou todos os ímpares)

Sabemos que ele satisfaz: $p_{n+2} = 3p_n - p_{n-2} + k$.

Como os primos menores que $-k$ são finitos, existem pares (p_i, p_{i+2}) e (p_j, p_{j+2}) iguais, que definem unicamente toda a sequência de (p_n).

Logo, (p_n) é periódica. S.P.G., $p_1 < -k$

$\Delta_n = p_{n+1} - p_n = p_{n-1} + K.$ ⊛

Desigualdade triangular: $|p_{n+1} - (-K)| + \underbrace{|p_n - (-K)|}_{>0} = |p_{n+1} - p_n|$
$= |p_{n-1} + K|$

$\Rightarrow |p_{n+1} + K| < |p_{n-1} + K|.$

Usando n par, temos que

$p_{n+1} > p_{n-1}$, pois p_{n+1} e p_{n-1} são menores que $-K$.

Como a sequência

$p_1, p_3, p_5, \ldots$ é limitada superiormente e é estritamente crescente nos inteiros. Absurdo!

Logo, a sequência deve ser constante.

Basta escolher $-K = p$; $p_1 = p$ e $p_2 = p$ e a sequência será constante e igual à um primo p.

□

⊛ Igualdade vale pois $-K$ está entre p_n e p_{n+1}.