Problemas da OBM

Rafael Filipe: 10h–13h Guilherme Zeus: 14h–19h

Problema 1 (OBM 2016, 6)

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, não circunscritível, sem lados paralelos. As retas AB e CD se cortam em E. Seja $M \neq E$ a interseção dos circuncírculos de ADE e BCE. As bissetrizes internas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro I e as bissetrizes externas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro J. Prove que I, J e M são colineares.

Problema 2 (OBM 2014, 2)

Encontre todos os inteiros $n > 1$ com a seguinte propriedade: para todo k, $0 \leq k < n$, existe um múltiplo de n cuja soma dos algarismos, na base decimal, deixa resto k na divisão por n.

Problema 3 (OBM 2015, 3)

Dado um natural $n > 1$ e sua fatoração em primos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, sua *falsa derivada* é definida por:

$$f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 p_2^{\alpha_2 - 1} \dots \alpha_k p_k^{\alpha_k - 1}$$

Prove que existem infinitos naturais n tais que $f(n) = f(n-1) + 1$.

Problema 4 (OBM 2010, 4)

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M e N os pontos médios dos lados CD e AD, respectivamente. As retas perpendiculares a AB passando por M e a BC passando por N cortam-se no ponto P. Prove que P pertence à diagonal BD se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

Problema 5 (OBM 2011, 6)

Sejam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2011}$ reais não negativos cuja soma é $\frac{2011}{2}$. Prove que

$$\left| \prod_{\text{cic}} (x_i - x_{i+1}) \right| = |(x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_3) \cdot \dots \cdot (x_{2010} - x_{2011}) \cdot (x_{2011} - x_1)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Problema 6 (OBM 2013, 3)

Encontre todas as funções injetoras $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tais que

$$f(x+y) \cdot (f(x) + f(y)) = f(xy)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^*$ com $x + y \neq 0$.

Extra

Problema 7 (Rússia 2016, 11.8)

Sejam AM_A, BM_B, CM_C as medianas de um triângulo ABC, que se intersectam em M. Seja Ω_A a circunferência que passa pelo ponto médio de AM e tangencia BC em M_A. Defina Ω_B e Ω_C analogamente. Prove que Ω_A, Ω_B e Ω_C passam por um mesmo ponto.