Quem é $\mathbb{N}$? – Indução

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1 Definindo $\mathbb{N}$

Definição 1 (Axiomas de Peano). Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Então:

i. 1 é um número natural;

ii. Todo natural possui um sucessor;

iii. 1 é o único natural que não é sucessor de nenhum outro natural;

iv. Se o sucessor de um natural x é igual ao sucessor de um natural y, então x é igual a y;

v. *(Axioma da Indução)*[1] Seja $A \subset \mathbb{N}$. Se

- $1 \in A$;
- para todo $n \in A$, $n + 1 \in A$,

então $A = \mathbb{N}$.

2 "Diferentes formas" de indução

2.1 Princípio da Boa Ordem

Todo subconjunto não vazio $A \in \mathbb{N}$ possui um menor elemento.

2.2 Indução

Seja $P(x)$ um predicado, isto é, uma proposição que é verdadeira ou falsa, para cada valor de x. Se:

- $P(1)$ é verdade,
- para todo $k > 1$, $P(k-1)$ implica $P(k)$;

então $P(n)$ é verdade, para todo n natural.

2.3 Indução Forte

Seja $P(x)$ um predicado. Se:

- $P(1)$ é verdade,
- para todo k, $\Big(P(1) \text{ e } P(2) \ \text{ e } \ \cdots \ \text{ e } \ P(k-1)\Big)$ implica $P(k)$;

então $P(n)$ é verdade, para todo n natural.

[1] O axioma da boa ordem é, por vezes, apresentado no lugar do axioma da indução. Não há difereça, pois eles são equivalentes.

3 Problemas

Problema 1. Demonstre que, para todo $n \geq 1$ natural, valem as seguintes proposições.

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

Problema 2. Prove que, para todo $n > 4$ natural, $2^n > n^2$.

Problema 3. Prove que uma soma arbitrária de $n \geq 8$ centavos pode ser paga com moedas de 3 e 5 centavos (tendo essas moedas em quantidade suficiente).

Problema 4. A sequência (a_i) é definida por $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Encontre uma fórmula explícita para o n-ésimo termo dessa sequência.

Problema 5. Em um grafo, cada vértice tem grau menor ou igual a Δ. Prove que é possível pintar os vértices do grafo com $\Delta + 1$ cores de modo que dois vértices conectados têm cores diferentes.

Problema 6. Determine o número máximo de regiões no qual o plano pode ser particionado com n retas.

Problema 7. Determine, com prova, se é possível arranjar os números $1, 2, 3, \ldots, 2020$ em uma fila de tal forma que a média de qualquer par de números distintos não esteja localizada entre esses dois números.

Problema 8. Prove que, para todo inteiro positivo n, existem inteiros positivos a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{41}, $\ldots$, a_{nn}, tal que

$$a_{11}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = \cdots = a_{n1}^2 + \cdots + a_{nn}^2.$$

Problema 9 (MA $\geq$ MG). Sejam n um natural e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais não-negativos. Prove que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Problema 10 (2010 Canada Winter Camp, Jacob Tsimerman). Se uma casa de um tabuleiro $2^n \times 2^n$ é removida, prove que o tabuleiro resultante pode ser coberto por triminós com formato de L.

Problema 11. Dados $k \geq 0$ e $n \geq k$, calcule

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k}.$$

Problema 12. Dados $k \geq 2$ e $n \geq k$, calcule

$$\frac{1}{\binom{k}{k}} + \frac{1}{\binom{k+1}{k}} + \cdots + \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Problema 13 (Países Baixos TST 2018, #2, 4). Em uma sala de aula, o seguinte fato é sempre verdade: para qualquer quatro estudantes, não importa de que forma eles sentem em volta de uma mesa circular, sempre existe alguém que conhece ambos seus vizinhos ou que não conhece ambos seus vizinhos. Prove que é possível dividir os estudantes em dois grupos, tais que no primeiro, quaisquer dois estudantes se conhecem e, no segundo grupo, quaisquer dois estudantes não se conhecem.

Observação. Conhecimento é mútuo, ou seja, A conhece B se e somente se B conhece A.

4 Referências

- Polos Olímpicos de Treinamento. Curso de Álgebra - Nível 2. Marcelo Mendes.
- Algoritmos. Treinamento Cone Sul, 2019. Carlos Shine
- Duke Putnam Preparation (old, Fall 2012). `https://www.imomath.com/index.php?options=525`.
- Harvard Freshman Seminar 24i. Mathematical Problem Solving. Some induction problems. Noam D. Elkies. `http://abel.math.harvard.edu/~elkies/FS24i.10/induction.pdf`.