Problemas Sortidos de Teoria dos Números – Edição II – Live 2 (alguns disponíveis no sabor Combinatória)

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

2. (OBM 2018, 3) Sejam k, n inteiros positivos fixados. Em uma mesa circular, são colocados n pinos numerados sucessivamente com os números $1, \dots, n$, com 1 e n vizinhos. Sabe-se que o pino 1 é dourado e os demais são brancos. António e Maria Clara jogam um jogo, em que uma argola é colocada inicialmente em um dos pinos e a cada passo ela muda de posição. O jogo começa com Maria Clara escolhendo com pino inicial para a argola, e o primeiro passo consiste no seguinte: António escolhe um inteiro positivo d qualquer e Maria Clara desloca a argola d pinos no sentido horário ou no sentido anti-horário (as posições são consideradas módulo n, ou seja, os pinos x, y são iguais se e somente se n divide $x - y$). Após isso, a argola muda de pinos de acordo com uma das seguintes regras, a ser escolhida em cada passo por António.

Regra 1: António escolhe um inteiro positivo d qualquer e Maria Clara desloca a argola d pinos no sentido horário ou no sentido anti-horário.

Regra 2: António escolhe um sentido (horário ou anti-horário), e Maria Clara desloca a argola nesse sentido em d ou kd pinos, onde d é o tamanho do último deslocamento realizado.

António vence se, após um número finito de passos, a argola é deslocada para o pino dourado. Determine, em função de k, os valores de n para os quais António possui uma estratégia que garanta sua vitória, não importando como Maria Clara jogue.

Rascunho/Solução.

Podemos renomear os pinos para $0, 1, 2, \dots, n-1$, com o pino dourado sendo o pino 0. (Somente por motivos psicológicos.)

Podemos entender o jogo como uma sequência $a_0, a_1, a_2, \dots$ de inteiros (observe que não estamos olhando para os resíduos módulo n). As regras atuam como o esperado (trocando *sentidos horário* e *anti-horário* por sinais de $+$ ou $-$). Antônio ganha se, e somente se, conseguir garantir que algum $a_i \equiv 0 \pmod{n}$.

Vamos definir $P(n, k)$ como a proposição "António garante ganhar o jogo com os números fixos n e k". Lembrando que proposições admitem os valores de *verdadeiro* ou *falso*.

Lema 1. $P(n, k) \iff P(n, n + k)$

Lema 2. $P(n, 1)$ é verdadeiro.

Demonstração. Suponha que $k = 1$. A estratégia de António é usar a Regra 1 com $d = 1$ e depois usar a Regra 2, sempre escolhendo o mesmo sentido. Assim, nas iterações da Regra 2, a única opção de Maria Clara é movimentar a argola $kd = d = 1$ pinos no sentido escolhido, forçando a passar no pino dourado. □

Lema 3. $P(2n, k) \iff P(n, k)$.

Demonstração. Vamos dividir em ida e volta.

$$\begin{aligned} P(2n, k) &\implies \text{António garante algum } a_i \equiv 0 \pmod{2n} \\ &\implies \text{António garante algum } a_i \equiv 0 \pmod{n} \\ &\implies P(n, k) \end{aligned}$$

$$P(n, k) \implies \text{António garante algum } a_i \equiv 0 \pmod{n}$$

Se $a_i \equiv 0 \pmod{2n}$, conseguimos $P(2n, k)$. Se $a_i \equiv n \pmod{2n}$, então António pode usar a Regra 1 e escolher $d = n$, fazendo com que $a_{i+1} \equiv n \pm n \equiv 0 \pmod{2n}$. Portanto, $P(2n, k)$. □

Lema 4. $P(n, k)$ e $P(m, k) \iff P(nm, k)$

Demonstração. Vamos dividir em ida e volta.

$P(nm,k) \implies$ António garante $a_i \equiv 0 \pmod{nm} \implies P(n,k)$ e $P(m,k)$.

$P(n,k) \implies$ António garante $a_i \equiv 0 \pmod{n}$. Agora, António escolhe a Regra 1, com $d = n$ (somente pra garantir que o "último deslocamento" é múltiplo de n). Nesse momento, $a_{i+1} \equiv nx \pmod{nm}$, para algum inteiro x.

Vamos imaginar outro jogo $b_0, b_1, \cdots$ (isto é, outra sequência), usando o mesmo valor de k, e com $b_0 = x$. Como $P(m,k)$, António consegue garantir $b_j \equiv 0 \pmod{m}$.

Agora, podemos imaginar o jogo b multiplicado por n, ou seja, os pinos t viram pinos nt, os deslocamentos d viram deslocamentos nd, e o pino inicial x vira nx. (Note que as regras e o k continuam os mesmos do jogo original.) Consequentemente, António garante $b_j \equiv 0 \pmod{nm}$.

Ao chegar em $a_{i+1} = nx$, António começa a jogar o jogo b aumentado e consegue garantir $a_{i+1+j} = 0 \pmod{mn}$. Portanto, $P(nm,k)$. $\square$

Lema 5. Se p é um primo ímpar, então $P(p,k) \iff p \mid k-1$.

Demonstração. A volta é direta dos Lemas 1 e 2. Vamos provar a ida. Supondo que $P(p,k)$ é verdadeiro, temos que António garante $a_i \equiv 0 \pmod{p}$. Suponha que a_i é o primeiro elemento da sequência que é $0 \pmod{p}$.

Se o último movimento de António antes de ganhar usou a Regra 1, então independentemente da escolha de Maria Clara, António deve ganhar (em outras palavras, ambas as escolhas da Maria Clara devem levar à vitória de António). Portanto,

$$\begin{aligned} a_{i-1} + d &\equiv 0 \pmod{p} \\ a_{i-1} - d &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Logo, $2a_{i-1} \equiv 0 \pmod{p}$, que implica $a_{i-1} \equiv 0 \pmod{p}$, que é um absurdo, pois António já teria ganhado anteriormente.

Já se o último movimento antes de António ganhar usou a Regra 2, então independentemente da escolha de Maria Clara, António deve ganhar. Portanto,

$$\begin{aligned} a_{i-1} + d &\equiv 0 \pmod{p} \\ a_{i-1} + kd &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Logo, $d(k-1) \equiv 0 \pmod{n}$. Se $k \not\equiv 1 \pmod{p}$, então $d \equiv 0 \pmod{p}$ e, consquentmente, $a_{i-1} \equiv 0 \pmod{p}$, que é um absurdo, pois António já teria ganhado anteriormente. Portanto, $p \mid k-1$. $\square$

Voltando pro início do problema, vamos escrever $n = 2^\alpha \cdot \prod p_i^{\alpha_i}$, com α inteiro não negativo e α_i positivo.

$$\begin{aligned} P(n,k) &\iff P\left(2^\alpha \cdot \prod p_i^{\alpha_i}, k\right) \\ &\iff P(2^\alpha, k) \text{ e } P(p_i^{\alpha_i}, k), \text{ para todo } i \\ &\iff P(2,k) \text{ e } P(p_i,k), \text{ para todo } i \\ &\iff p_i \mid k-1, \text{ para todo } i \end{aligned}$$

Ou seja, António ganha se, e somente se, para todo primo p que divide n, p também divide $k-1$.

3. (IMO 2014, 5) Para cada inteiro positivo n, o Banco da Cidade do Cabo emite moedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada uma coleção finita de tais moedas (de valores não necessariamente distintos) com valor total de no máximo $99 + \frac{1}{2}$, prove que é possível particionar essa coleção em 100 ou menos grupos, cada um com valor total de no máximo 1.

Reformulação. Dada uma coleção finita de tais moedas (de valores não necessariamente distintos) com valor de no máximo $t - \frac{1}{2}$, prove que é possível particionar essa coleção em t grupos, cada um com valor total de no máximo 1.

Seja a_n a quantidade de moedas de valor $\frac{1}{n}$. Como a coleção é finita, existe algum N tal que $a_n = 0$ para $n > N$. Além disso, sabemos que

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_N}{N} \leq t - \frac{1}{2}.$$

Vamos usar indução forte no número de moedas.

Se existe algum i tal que $a_i \geq i$, então podemos formar um grupo com i moedas de valor $\frac{1}{i}$, cuja soma total é 1. Todas as outras moedas, que tem soma no máximo $t - 1 - \frac{1}{2}$, podem ser particionadas (pela hipótese de indução, pois o número de moedas diminuiu) em $t - 1$ grupos, cada um com valor total de no máximo 1. Portanto, podemos particionar a coleção inicial de moedas em t grupos, com valor total de no máximo 1.

Se existe algum i tal que $a_{2i} \geq 2$, então podemos enrolar duas moedas de tamanho $\frac{1}{2i}$ com uma fita adesiva e tratá-las como uma única moeda de tamanho $\frac{1}{i}$. Podemos agora particionar as moedas (todas as outras moedas, junto com a nova moeda de valor $\frac{1}{i}$), cuja soma total é no máximo $t - \frac{1}{2}$, em t grupos, cada um com valor total de no máximo 1. Portanto, podemos desenrolar a fita adesiva (mas deixar as duas moedas de tamanho $\frac{1}{2i}$ no grupo em que elas estão) e obter um jeito de particionar a coleção inicial de moedas em t grupos, cada um com valor total de no máximo 1.

Caso as duas condições anteriores forem falsas, vale $a_{2i} \leq 1$ e $a_{2i-1} \leq 2i - 2$. Observe que

$$\frac{a_{2i-1}}{2i - i} + \frac{a_{2i}}{2i} \leq \frac{2i - 2}{2i - 1} + \frac{1}{2i} < 1.$$

Vamos colocar todas as moedas de valores $\frac{1}{2i-1}$ e $\frac{1}{2i}$ no i-ésimo grupo, para $i = 1, 2, \ldots, t$. (Que é possível pela desigualdade acima.) Já com as moedas restantes, vamos colocar uma a uma, em qualquer grupo em que ela puder entrar (sem que a soma do grupo passe de 1).

Suponha que não é possível colocar uma dessas moedas em nenhum grupo. Vamos chamar essa moeda de especial. Como todas as moedas com valor maior que $\frac{1}{2t}$ já foram inicialmente colocadas em grupos, a moeda especial tem valor $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2t}$. Como a moeda especial não cabe em nenhum grupo, cada um dos t grupos possui soma maior que $1 - \frac{1}{x}$. Isso implica que

$$\begin{aligned}
\text{(Soma das moedas)} &\geq \text{(Soma das moedas em grupos)} + \frac{1}{x} \\
&\geq t\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \\
&\geq t - \frac{t-1}{x} \\
&> t - \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

que é um absurdo. Portanto, não existe moeda que não cabe dentro da caixa. Em outras palavras, é possível colocar todas as moedas em t grupos, cada um um com valor total de no máximo 1.