Problema 1 (2016 PUMaC Combinatorics A, 4 ↗). A knight is placed at the origin of the Cartesian plane. Each turn, the knight moves in an chess L-shape (2 units parallel to one axis and 1 unit parallel to the other) to one of eight possible location, chosen at random. After 2016 such turns, what is the expected value of the square of the distance of the knight from the origin?

Problema 2 (Romênia). $ABCD$ é um quadrilátero convexo inscrito em um círculo Γ. Mostre que existe $P \in \Gamma$ tal que $PA + PC = PB + PD$.

Problema 3 (2014 ELMO Shortlist, N2 ↗). Define the Fibanocci sequence recursively by $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ and $F_{i+2} = F_i + F_{i+1}$ for all i. Prove that for all integers $b, c > 1$, there exists an integer n such that the sum of the digits of F_n when written in base b is greater than c.

Problema 4 (OBM 2007, 2). Para quantos números inteiros c, $-2007 \leq c \leq 2007$, existe um inteiro x tal que $x^2 + c$ é múltiplo de 2^{2007}?

Problema 5 (China TST3 2019, 1 ↗). Given complex numbers x, y, z, with $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$. Prove that:

$$|x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz| \leq 1$$

Problema 6 (OBM 2007, 4). Arrumam-se 2007^2 quadradinhos iguais, formando um tabuleiro 2007×2007. Anna e Elsa disputam o seguinte jogo: cada jogada de Anna consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2×2. Cada jogada de Elsa consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Os jogadores jogam alternadamente, sendo Anna o primeiro a jogar. Quando Anna não puder fazer sua jogada, Elsa fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. É possível que Elsa ganhe o jogo, não importando como Anna jogue?

Problema 7 (2016 PUMaC Combinatorics A, 5 ↗). Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be an infinite sequence where for all positive integers i, a_i is chosen to be a random positive integer between 1 and 2016, inclusive. Let S be the set of all positive integers k such that for all positive integers $j < k$, $a_j \neq a_k$. (So $1 \in S$; $2 \in S$ if and only if $a_1 \neq a_2$; $3 \in S$ if and only if $a_1 \neq a_3$ and $a_2 \neq a_3$; and so on.) In simplest form, let $\frac{p}{q}$ be the expected number of positive integers m such that m and $m+1$ are in S. Compute pq.