Quarto Teste de Seleção - Primeiro Dia

LX Olímpíada Internacional de Matemática e XXXIV Olimpíada Iberoamericana

Problema 1 Seja ABC um triângulo com $AB = AC$, e seja M o ponto médio de BC. Seja P um ponto tal que $PB < PC$ e PA paralelo a BC. Sejam X e Y pontos nas retas PB e PC, respectivamente, tal que B cai no segmento PX, C cai no segmento PY, e $\angle PXM = \angle PYM$. Prove que o quadrilátero $APXY$ é cíclico.

Problema 2 Given any set S of positive integers, show that at least one of the following two assertions is true:

1. there exist distinct finite subsets F and G of S such that $\sum_{x\in F} 1/x = \sum_{x\in G} 1/x$;
2. there exists a positive rational number $r < 1$ such that $\sum_{x\in F} 1/x \neq r$, for all infinite subsets F of S.

Problema 3 Consider 2018 pairwise crossing circles no three of which are concurrent. These circles subdivide the plane into regions bounded by circular *edges* that meet at *vertices*. Notice that there are an even number of vertices on each circle. given the circle, alternately colour the vertices on that circle red and blue. In doing so for each circle, every vertex is coulored twice – once for each of the two circles that cross at that point. If two colourings agree at a vertex, then it is assigned that colour; otherwise, it becomes yellow. Show that, if some circle contains at least 2061 yellow points, then the vertices of some region are all yellow.

Quarto Teste de Seleção - Segundo Dia

LX Olímpíada Internacional de Matemática e XXXIV Olimpíada Iberoamericana

Problema 4 Considere um tabuleiro $2m \times 2n$, onde m, n são inteiros positivos. Uma pedra é colocada em uma das casinhas unitárias do tabuleiro, casinha dessa diferente da casinha inferior esquerda e fa casinha superior direita. Um caracol parte da casa inferior esquerda e deseja chegar à casa superior direita, caminhando de uma casinha para outra adjacente, uma casinha por vez. Determine todas as casinhas em que a pedra pode estar, de modo que o caracol possa fazer esse percurso visitando casa casinha exatamente uma vez, com exceção da casinha onde está a pedra, que o caracol não visita nenhuma vez.

Problema 5 Four positive integers x, y, z and t satisfy the relations

$$xy - zt = x + y = z + t.$$

Is it possible that both xy and zt are perfect squares?

Problema 6 Let ABC be a triancle with circumcircle ω and incentre I. A line ℓ intersects the lines AI, BI and CI at points D, E, and F, respectively, distinct from the points A, B, C and I. The perpendicular bissectors of the segments AD, BE, and CF determine a triangle Θ. Show that the circumcircle of the triangle Θ is tangent to ω.