TST 3 - Prob 2 - Netherlands 2018.

As funções que funcionam são: x.

$-x$.

Testando:

Se $f(x) \equiv x$:

$$x^2 - y^2 \leqslant (x+y)(x-y).$$ OK!

Se $f(x) \equiv -x$:

$$y^2 - x^2 \leqslant (-x+y)(x+y).$$ OK!

Vamos mostrar que só elas funcionam!

TST 3 - [redacted] Netherlands 2018. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Prob. 2.

$P(x,y)$: $f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x)+y)(x - f(y))$.

$P(x,x)$: $0 \leq (f(x)+x)(x - f(x)) = x^2 - f(x)^2$

$\Rightarrow$ $|f(x)| \leq |x|$. Fato 1. $\Rightarrow f(0) = 0$

$P(x,-x)$: $0 \leq (f(x) - x)(x - f(-x))$

$\Rightarrow$ $f(x) \geq x \geq f(-x)$

ou

$f(x) \leq x \leq f(-x)$. Fato 2.

Fato 2: $(x) \to (-x)$.

$f(x) \geq -x \geq f(-x)$

ou

$f(x) \leq -x \leq f(-x)$ Fato 2*.

Juntando os Fatos 2 e 2*. Temos, para $x \geq 0$:

$f(x) \geq x \geq -x \geq f(-x)$

ou

$f(-x) \geq x \geq -x \geq f(x)$ Fato 3.

$P(x,0)$: $f(x^2) \leq f(x) \cdot x$

$P(0,x)$: $-f(x^2) \leq -f(x) \cdot x$

$\Rightarrow f(x^2) = f(x) \cdot x$

Juntando Fatos 1 e 3, temos:

$$f(x) = -f(-x) = \pm x. \quad \text{Fato 4}$$

$P(x,1)$: $f(x^2) - f(1) \leq (f(x)+1)(x - f(1))$

$$\cancel{f(x^2)} - \cancel{f(1)} \leq -f(x)\cdot f(1) + \cancel{x\cdot f(x)} + x - \cancel{f(1)}.$$

$$\Rightarrow \quad x \geq f(x)\cdot f(1).$$

Seja $c = f(1)$. $\quad x \geq f(x)\cdot c$.

$P(x,-1)$:

$$f(x^2) - c \leq (f(x) - 1)(x + c)$$

$$\cancel{f(x^2)} - \cancel{c} \leq \cancel{xf(x)} - x + cf(x) - \cancel{c}$$

$$x \leq cf(x)$$

$\Rightarrow x = f(x)\cdot c \Rightarrow$ $f(x) = x, \forall x$

ou

$f(x) = -x, \forall x.$