NÍVEL 3

Olimpíada Brasileira de Matemática

PROBLEMA 4

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

Lema 1: O resultado máximo pode ser obtido apenas com $x_i \in \{0,1\}$, $\forall i \in \{1, \dots, 2n\}$.

Prova: Suponha que o número mínimo de $x_i \notin \{0,1\}$ t.q. a sequência possa atingir o resultado máximo seja $K>0$, isto é, não existe sequência com menos de K termos $x_i \notin \{0,1\}$ t.q. o $\underbrace{\text{resultado}}_{\$}$ seja máximo.

Seja $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n})$ tal sequência com K de seus elementos $\notin \{0,1\}$.

Seja a_i um desses termos $\notin \{0,1\}$

Vamos analisar as seguintes sequências:

$A' = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_{2n})$ e

$A'' = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_{2n})$

(*) $\begin{cases} \$(A') = \$(A) - (-1)^{i-1} \cdot a_{i-1} \cdot a_i - (-1)^i a_i \cdot a_{i+1} + (-1)^{i-1} \cdot a_{i-1} + (-1)^i a_{i+1} \\ \$(A'') = \$(A) - (-1)^{i-1} \cdot a_{i-1} \cdot a_i - (-1)^i a_i a_{i+1} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \$(A') - \$(A) = (-1)^i (a_{i-1} - a_{i+1})(a_i - 1) \\ \$(A'') - \$(A) = (-1)^i (a_{i-1} - a_{i+1}) a_i \end{cases}$

Como $(a_i - 1) < 0$ e $a_i > 0 \Rightarrow$ sinal$(\$(A') - \$(A)) \neq$ sinal$(\$(A'') - \$(A))$ ou $\$(A) = \$(A') = \$(A'')$

$\Rightarrow \$(A)$ está entre $\$(A')$ e $\$(A'')$ ou $\$(A) = \$(A') = \$(A'') \Rightarrow$

(*) Seja $\$(X) = p_2 + p_4 + \dots + p_{2n} - p_1 - p_3 - \dots - p_{2n-1}$.

$= \sum (-1)^i p_i$

$= \sum (-1)^i a_i \cdot a_{i+1}$

Olimpíada Brasileira de Matemática

NÍVEL 3

PROBLEMA 4

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

$\Rightarrow$ $S(A)$ não é o S máximo ou $S(A')$, em que A' possui $K-1$ termos $\notin \{1,0\}$

$\Downarrow$ Absurdo!

é máximo $\Downarrow$ Absurdo!

Logo, $K=0$, isto é, o S máximo é atingido por uma sequência de 1's e 0's. $\square$

Basta, com o Lema 1, achar o S máximo para sequências de 1's ou 0's.

Nessas sequências, $p_i = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i = x_{i+1} = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Conjectura: $S_{máx} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Seja $K = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, onde $n = 2K$ ou $n = 2K+1$.

Vamos provar que a conjectura é verdadeira.

Primeiro, um exemplo de que é atingível:

$\longrightarrow$ Se $n = 2K$:

$x_{4i} = x_{4i+1} = 0$ e $x_{4i+2} = x_{4i+3} = 1$, isto é:

$X = \{0, 1, 1, 0, 0, 1, \dots, 0, 1, 1, 0\}$

$S(X) = K$. OK!

$\longrightarrow$ Se $n = 2K+1$:

Igualmente, $x_{4i} = x_{4i+1} = 0$ e $x_{4i+2} = x_{4i+3} = 1$.

$X = \{0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, \dots, 0, 1, 1, 0, 0, 1\}$.

$S(X) = K$. OK!

Vamos supor, então, que $S(X) \geq K+1$.

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

Lema 2: Se $p_i = p_{i+2} = 1$ então $p_{i+1} = 1$.

Prova: $\left.\begin{array}{l} p_i = 1 \Rightarrow a_{i+1} = 1 \\ p_{i+2} = 1 \Rightarrow a_{i+2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p_{i+1} = 1$. □

$$S(X) = \underbrace{\sum_{i \text{ pares}} p_i}_{\mathbb{P}} - \underbrace{\sum_{i \text{ ímpares}} p_i}_{\mathbb{I}} \geq K+1 \Rightarrow \mathbb{P} \geq K+1.$$

núm círculo.

Porém, por P.C.P, como existem n produtos "pares"(*) e K+1 produtos "pares" iguais a 1, existe uma dupla de produtos "pares" consecutivos iguais a 1.

Seja W o número de "pares" consecutivos iguais a 1.

Pelo lema 2, então existem W produtos "ímpares" iguais a 1. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{I} \geq W$. $\Rightarrow \mathbb{P} \geq K+W+1$. Por P.C.P, como p_i = 1 ou 0, o número de produtos "pares" consecutivos é $\geq W+1$. Absurdo!

Logo, não existe sequência X t.q. $S(X) \geq K+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S(X) \leq K$.

Logo, o maior resultado que Esmeralda pode encontrar é

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

(*) produtos "pares" $\rightarrow p_{2t}$ / consecutivos $\rightarrow p_{2t}$ e p_{2t+2}.

Guilherme Zeus Dantas e Moura 140.264.007-27

Folha de rascunho

$$M = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i x_i x_{i+1}.$$ Maximize M para $x_i \in [0, 1]$

$\Rightarrow M = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ← Bom?

$n = 1$: $M = ab - ba = 0$

$n = 2$: $M = ab - bc + cd - da = \underbrace{(b - d)}_{1 \leq 1}\underbrace{(a - c)}_{1 \leq 1} \leqslant 1$ ← igualdade $a = b = 1$, $c = d = 0$ ✓

$n = 3$ $M = ab - bc + cd - de + ef - fa$

?

$n = 4$ $M = ab - bc + cd - de + ef - fg + gh - ha$

$= b(a - c) - d(e - c) + f(e - g) - h(a - g)$

$n = 2K$ →

Supõe que $S(x) \geq K + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ existem