

---

---

# Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro

## 2012 - 2019

---

---

|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| N3 12 |   |   |   |   |   |   |
| N4 12 |   |   |   |   |   |   |
| N3 13 |   |   |   |   |   |   |
| N4 13 |   |   |   |   |   |   |
| N3 14 |   |   |   |   |   |   |
| N4 14 |   |   |   |   |   |   |
| N3 15 |   |   |   |   |   |   |
| N4 15 |   |   |   |   |   |   |
| N3 16 |   |   |   |   |   |   |
| N4 16 |   |   |   |   |   |   |
| N3 17 |   |   |   |   |   |   |
| N4 17 |   |   |   |   |   |   |
| N3 18 |   |   |   |   |   |   |
| N4 18 |   |   |   |   |   |   |
| N3 19 |   |   |   |   |   |   |
| N4 19 |   |   |   |   |   |   |

Todo e qualquer feedback, especialmente sobre erros neste livreto (mesmo erros tipográficos pequenos), é apreciado. Você também pode contribuir enviando suas soluções (de preferência, formatadas em  $\text{\LaTeX}$ ).

Você pode enviar comentários e soluções para [zeusdanmou+tex@gmail.com](mailto:zeusdanmou+tex@gmail.com).

A versão mais atualizada desse arquivo (provavelmente) está disponível [clikando aqui](#). Última atualização: 18 de julho de 2020.

**PROBLEMA 1**

Na Figura 1, há um tabuleiro com números nas suas casas. Em cada passo, pode-se somar 1 a cada casa de uma linha, somar 1 a cada casa de uma coluna, subtrair 1 de cada casa de uma linha ou subtrair 1 de cada casa de uma coluna. Mostre uma série de passos que transforme o tabuleiro da Figura 1 em um tabuleiro da Figura 2.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Figura 1

|   |   |   |
|---|---|---|
| 5 | 5 | 5 |
| 5 | 5 | 5 |
| 5 | 5 | 5 |

Figura 2

**PROBLEMA 2**

Considere um decágono regular  $A_1A_2 \dots A_{10}$ . De quantas maneiras podemos pintar os vértices deste decágono com as cores azul e vermelho de forma que todo retângulo com vértices no conjunto  $\{A_1, A_2, \dots, A_{10}\}$  possua pelo menos dois vértices pintados com cores distintas?

**PROBLEMA 3**

Determine todos os algarismos não nulos distintos dois a dois  $O, M, E, R$  e  $J$  tais que

$$\frac{(OM)_{10}}{(ERJ)_{10}} = 0,ERERERERERER\dots$$

*Observação.* As notações  $(OM)_{10}$  e  $(ERJ)_{10}$  denotam as representações decimais de ambos os números.

*Observação.* A notação  $0,ERERERERERER\dots$  denota a dízima periódica com período  $(ER)_{10}$ .

**PROBLEMA 4**

Encontre todos os inteiros positivos  $n$  tais que  $n^2$  pode ser escrito como soma de exatamente  $n$  quadrados perfeitos não nulos. Por exemplo,  $3^2 = 9$  pode ser escrito como  $3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$ .

**PROBLEMA 5**

No triângulo acutângulo  $ABC$ , as alturas  $BE$  e  $CF$  se intersectam em  $H$ , com  $E$  no lado  $AC$  e  $F$  no lado  $AB$ . Suponha que o circuncentro de  $ABC$  pertence ao segmento  $EF$ . Demonstre que  $HA^2 = HB^2 + HC^2$ .

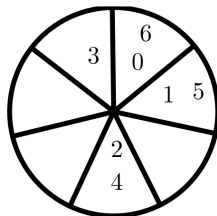
**PROBLEMA 6**

Seja  $n$  um inteiro positivo. Divide-se um círculo em  $n$  setores circulares iguais. Considere o seguinte processo:

- Inicialmente, coloca-se uma joia em um dos setores e escreve-se o número 0 neste setor.
- Na etapa 1, move-se a joia um setor, no sentido horário, e escreve-se o número 1 no novo setor onde a joia está.
- Na etapa  $k$ , move-se a joia  $k$  setores, no sentido horário, e escreve-se o número  $k$  no novo setor onde a joia está.

Terminamos o processo ao fim da etapa  $n - 1$ . Para quais valores de  $n$ , ao fim do processo, todos os setores possuem um número escrito?

Abaixo, encontra-se o resultado final do processo para  $n = 7$ .



**PROBLEMA 1**

Considere a sequência 1, 2, 4, 3, 5, 7, 6, 8, 10, 12, 9, 11, 13, 14, 17, ..., construída do seguinte modo: escrevemos o primeiro número ímpar, depois os dois primeiros números pares, depois os três ímpares seguintes, depois os quatro pares seguintes, depois os cinco ímpares seguintes e assim por diante.

- (a) Qual número desta sequência ocupa a posição 2019?
- (b) Em qual posição encontra-se o número 2019 nessa sequência.

*Observação.* Por exemplo, o número 1 se encontra na primeira posição, o número 4 na terceira posição e o número 10 está na nona posição.

**PROBLEMA 2**

Seja  $n \geq 2$  um número inteiro. Considere um polígono regular de  $2n$  lados  $A_1A_2 \dots A_{2n}$ . De quantas maneiras podemos pintar os vértices deste polígono com as cores azul e vermelho de forma que todo retângulo com vértices no conjunto  $\{A_1, A_2, \dots, A_{2n}\}$  possua pelo menos dois vértices pintados com cores distintas?

**PROBLEMA 3**

Determine todos os algarismos não nulos distintos dois a dois  $O, M, E, R$  e  $J$  tais que

$$\frac{(OM)_{10}}{(ERJ)_{10}} = 0,ERERERERERERER\dots$$

*Observação.* As notações  $(OM)_{10}$  e  $(ERJ)_{10}$  denotam as representações decimais de ambos os números.

*Observação.* A notação  $0,ERERERERERERER\dots$  denota a dízima periódica com período  $(ER)_{10}$ .

**PROBLEMA 4**

Sejam  $ABC$  um triângulo e  $AD, BE$  e  $CF$  suas alturas, com  $D, E$  e  $F$  nos lados  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente. Suponha que o ortocentro  $H$  é o ponto médio da altura  $AD$ . Determine o menor valor possível que

$$\frac{HB}{HE} + \frac{HC}{HF}$$

pode assumir.

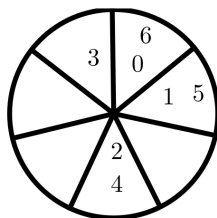
**PROBLEMA 5**

Seja  $n$  um inteiro positivo. Divide-se um círculo em  $n$  setores circulares iguais. Considere o seguinte processo:

- (a) Inicialmente, coloca-se uma joia em um dos setores e escreve-se o número 0 neste setor.
- (b) Na etapa 1, move-se a joia um setor, no sentido horário, e escreve-se o número 1 no novo setor onde a joia está.
- (c) Na etapa  $k$ , move-se a joia  $k$  setores, no sentido horário, e escreve-se o número  $k$  no novo setor onde a joia está.

Terminamos o processo ao fim da etapa  $n - 1$ . Para quais valores de  $n$ , ao fim do processo, todos os setores possuem um número escrito?

Abaixo, encontra-se o resultado final do processo para  $n = 7$ .

**PROBLEMA 6**

Seja  $n$  um inteiro positivo. Calcule

$$\sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2n} (2 - a_1) \cdot (4 - a_2) \cdot \dots \cdot (2n - a_n)$$

onde a soma percorre todas as sequências crescentes  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  com termos no conjunto  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ .

**PROBLEMA 1**

Um número natural é chamado de *factorion* se ele é igual a soma dos fatoriais dos seu dígitos decimais. Encontre todos os números de 3 dígitos que são factorions.

**Observação:** O fatorial de um número inteiro não negativo é definido da seguinte forma:  $0! = 1$  e para  $n$  inteiro positivo,  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ . Por exemplo,  $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ .

**PROBLEMA 2**

Considere um triângulo equilátero  $ABC$  de lado 1. Um círculo  $C_1$  é construído tangenciando os lados  $AB$  e  $AC$ . Um círculo  $C_2$ , de raio maior que o raio de  $C_1$ , é construído tangenciando os lados  $AB$  e  $AC$  e tangenciando externamente o círculo  $C_1$ . Sucessivamente, para  $n$  inteiro positivo, o círculo  $C_{n+1}$ , de raio maior que o raio de  $C_n$ , tangencia os lados  $AB$  e  $AC$  e tangencia externamente o círculo  $C_n$ . Determine os possíveis valores para o raio de  $C_1$  de forma que caibam 4, mas não 5 círculos dessa sequência, inteiramente contidos no interior do triângulo  $ABC$ .

**PROBLEMA 3**

Seja  $n$  um inteiro positivo. Uma função  $f : \{1, 2, \dots, 2n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  é dita *boa* se  $f(j+2)$  e  $f(j)$  têm a mesma paridade para todo  $j = 1, 2, \dots, 2n-2$ . Prove que a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito.

**PROBLEMA 4**

Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo inscrito na circunferência  $\Gamma$ . Sejam  $D$  e  $E$  pontos em  $\Gamma$  tais que  $AD$  é perpendicular a  $BC$  e  $AE$  é diâmetro. Seja  $F$  o ponto de interseção de  $AE$  com  $BC$ . Prove que se  $\angle DAC = 2\angle DAB$ , então  $DE = CF$ .

**PROBLEMA 5**

Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$  uma permutação de  $\{1, \dots, n\}$ . O *número de cadência* de  $\sigma$  é o número de blocos decrescentes maximais. Por exemplo, se  $n = 6$  e  $\sigma = (4, 2, 1, 5, 6, 3)$ , então o número de cadência de  $\sigma$  é 3, pois  $\sigma$  possui 3 blocos  $(4, 2, 1)$ ,  $(5)$ ,  $(6, 3)$  decrescentes e maximais. Note que os blocos  $(4, 2)$  e  $(2, 1)$  são decrescentes, mas não são maximais, já que estão contidos no bloco  $(4, 2, 1)$ .

Calcule a soma das cadências de todas as permutações de  $\{1, \dots, n\}$ .

**PROBLEMA 6**

Dois quadrados perfeitos são ditos *amigáveis* se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo,  $1225 = 35^2$  e  $225 = 15^2$  são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.

**PROBLEMA 1**

Sejam  $ABC$  um triângulo e  $k$  um número real positivo menor do que 1. Tome  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  pontos nos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  de modo que

$$\frac{A_1B}{BC} = \frac{B_1C}{AC} = \frac{C_1A}{AB} = k.$$

- (a) Calcule em função de  $k$  a razão entre as áreas dos triângulos  $A_1B_1C_1$  e  $ABC$ .
- (b) Mais geralmente, para todo  $n \geq 1$ , constrói-se o triângulo  $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ , de modo que  $A_{n+1}$ ,  $B_{n+1}$  e  $C_{n+1}$  sejam pontos nos lados  $B_nC_n$ ,  $A_nC_n$  e  $A_nB_n$  satisfazendo

$$\frac{A_{n+1}B_n}{B_nC_n} = \frac{B_{n+1}C_n}{A_nC_n} = \frac{C_{n+1}A_n}{A_nB_n} = k.$$

Determine os valores de  $k$  de modo que a soma das áreas de todos os triângulos  $A_nB_nC_n$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$  seja igual a  $\frac{1}{3}$  da área do triângulo  $ABC$ .

**PROBLEMA 2**

Seja  $(a_n)$  uma sequência de números inteiros tal que  $a_1 = 1$  e para  $n \geq 1$  inteiro positivo,  $a_{2n} = a_n + 1$  e  $a_{2n+1} = 10a_n$ . Quantas vezes o número 111 aparece nessa sequência?

**PROBLEMA 3**

Sejam  $n$  e  $k$  inteiros positivos. Uma função  $f : \{1, 2, 3, 4, \dots, kn - 1, kn\} \rightarrow \{1, \dots, 5\}$  é dita *boa* se  $f(j+k) - f(j)$  é múltiplo de  $k$  para todo  $j = 1, 2, \dots, kn - k$ .

- (a) Prove que se  $k = 2$ , então a quantidade de funções boas é um quadrado perfeito para todo  $n$  inteiro positivo.
- (b) Prove que se  $k = 3$ , então a quantidade de funções boas é um cubo perfeito para todo  $n$  inteiro positivo.

**PROBLEMA 4**

Encontre todos os valores reais que  $a$  pode assumir de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y^3 + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z^3 = a \end{cases}$$

possua solução com  $x, y, z$  reais distintos dois a dois.

**PROBLEMA 5**

Sejam  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  circunferências com centros  $O_1$  e  $O_2$ , respectivamente, tangentes exteriormente. Sejam  $A$  e  $B$  pontos sobre  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ , respectivamente, tais que a reta  $AB$  é tangente comum externa a  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ . Sejam  $C$  e  $D$  pontos no semiplano determinado por  $AB$  que não contém  $O_1$  e  $O_2$  tais que  $ABCD$  é um quadrado. Se  $O$  é o centro deste quadrado, determine os possíveis valores do ângulo  $\angle O_1OO_2$ .

**PROBLEMA 6**

Dois quadrados perfeitos são ditos amigáveis se um é obtido a partir do outro acrescentando o dígito 1 à esquerda. Por exemplo,  $1225 = 35^2$  e  $225 = 15^2$  são amigáveis. Prove que existem infinitos pares de quadrados perfeitos amigáveis e ímpares.

**PROBLEMA 1**

Seja  $ABCD$  um retângulo com lados  $AB = 6$  e  $BC = 8$ . Por um ponto  $X$  do lado  $AB$  com  $AX < XB$ , traça-se uma reta paralela a  $BC$ . Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do retângulo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a medida do segmento  $AX$ .

**PROBLEMA 2**

Luiza quer pintar os vértices de um prisma triangular com 5 cores, de modo que se dois vértices estão ligados por uma aresta, então eles têm cores diferentes. De quantas maneiras Luiza pode pintar esse prisma?

**PROBLEMA 3**

Encontre todos os reais  $a$  para os quais o sistema de equações

$$x^2 - yz = ax^2$$

$$y^2 - xz = ax^2$$

$$z^2 - xy = ax^2$$

possui pelo menos uma solução real  $(x, y, z)$  com  $x \neq 0$ .

**PROBLEMA 4**

Sejam  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$  e  $\ell$  uma reta tangente a  $\Gamma$  em  $A$ . Tome  $B$  um ponto em  $\Gamma$  (diferente do ponto diametralmente oposto a  $A$  em  $\Gamma$ ) e seja  $B'$  o simétrico de  $B$  em relação a  $\ell$ . Sejam  $E$ , distinto de  $A$ , o ponto de interseção de  $\Gamma$  com a reta  $B'A$  e  $D$ , distinto de  $E$ , a interseção das circunferências circunscritas aos triângulos  $BB'E$  e  $AOE$ .

(a) Calcule a medida do ângulo  $\angle B'BE$ .

(b) Prove que  $B$ ,  $O$  e  $D$  são colineares.

**PROBLEMA 5**

Seja  $N$  um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos, cuja representação decimal é  $(a_{2k}a_{2k-1}\dots a_4a_3a_2a_1)_{10}$ . Definimos o *alternado* de  $N$  como sendo o número  $M = (a_{2k-1}a_{2k}\dots a_3a_4a_1a_2)_{10}$ . Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos  $N$  tais que  $M = 2N - 1$ , onde  $M$  é o alternado de  $N$ .

**PROBLEMA 6**

Encontre todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos  $x$  e  $y$  reais.

**PROBLEMA 1**

Seja  $ABCD$  um paralelogramo. Por um ponto  $X$  do lado  $AB$ , com  $AX < XB$ , traça-se uma reta paralela a  $BC$ . Esta reta, juntamente com as diagonais e os lados do paralelogramo, determinará 3 quadriláteros. Sabendo que a soma das áreas desses quadriláteros é a maior possível, calcule a razão  $\frac{AX}{AB}$ .

**PROBLEMA 2**

Encontre todos os números reais  $x$  que satisfaçam

$$x = \frac{1}{2} [x]^2 + 3 [x] + 2.$$

**PROBLEMA 3**

Pedro quer pintar os vértices de um tabuleiro  $2 \times n$  de modo que cada quadradinho deste tabuleiro possua exatamente um vértice pintado.

- (a) Determine o número máximo de vértices que Pedro pode pintar.
- (b) Determine o número mínimo de vértices que Pedro pode pintar.

**PROBLEMA 4**

Seja  $N$  um número inteiro positivo com uma quantidade par de algarismos, cuja representação decimal é  $(a_{2k}a_{2k-1} \dots a_4a_3a_2a_1)_{10}$ . Definimos o *alternado* de  $N$  como sendo o número  $M = (a_{2k-1}a_{2k} \dots a_3a_4a_1a_2)_{10}$ . Por exemplo, o alternado de 489012 é 840921. Encontre todos os inteiros positivos  $N$  tais que  $M = 2N - 1$ , onde  $M$  é o alternado de  $N$ .

**PROBLEMA 5**

Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo e seja  $AD$ , com  $D$  em  $BC$ , a altura relativa ao vértice  $A$ . Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  as circunferências circunscritas aos triângulos  $ABD$  e  $ACD$ , respectivamente. A circunferência  $\Gamma_1$  intersecta o lado  $AC$  nos pontos  $A$  e  $P$ , enquanto  $\Gamma_2$  intersecta o lado  $AB$  nos pontos  $B$  e  $Q$ . Seja  $X$  o ponto de interseção da reta  $BP$  com  $\Gamma_2$  de modo que  $P$  está entre  $B$  e  $X$ . Da mesma forma, seja  $Y$  o ponto de interseção da reta  $CQ$  com  $\Gamma_1$  de modo que  $Q$  está entre  $C$  e  $Y$ . Sabendo que  $A$ ,  $X$  e  $Y$  são colineares, calcule o menor valor possível para o ângulo  $\angle BAC$ .

**PROBLEMA 6**

Encontre todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos  $x$  e  $y$  reais.

**PROBLEMA 1**

A professora de Joãozinho escreveu no quadro um sistema de equações. Joãozinho, quando copiou do quadro o sistema, escreveu errado um, e somente um, coeficiente do sistema. Esse foi o sistema que Joãozinho escreveu em seu caderno:

$$x + y + 2z = 6$$

$$3x + 2y + z = 7$$

$$4x + 2y + 3z = 12$$

Sabendo que o sistema original tem todos os coeficientes inteiros e sua solução é  $(\frac{5}{11}, \frac{21}{11}, \frac{20}{11})$ , encontre o sistema original.

**PROBLEMA 2**

Seja  $[x]$  a parte inteira de  $x$ , isto é, o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . Seja  $\{x\}$  a parte fracionária de  $x$ , definida como  $\{x\} = x - [x]$ . Um número real é dito replicante se  $x = \{10x\}$ . Encontre a soma de todos os números replicantes.

**PROBLEMA 3**

Encontre o número de sequências  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  satisfazendo  $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$  para todo  $n = 1, 2, 3, \dots, 10$  e  $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  para todo  $n = 1, 2, \dots, 9$ .

**PROBLEMA 4**

Sejam  $x, y$  e  $z$  reais satisfazendo  $x, y, z \geq -1$  e  $x + y \geq 2, x + z \geq 2, y + z \geq 2$ . Prove que  $xy + yz + zx \geq 3$ .

**PROBLEMA 5**

Seja  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$  e seja  $P$  um ponto no interior de  $\Gamma$ . Seja  $O'$  o ponto tal que  $P$  é ponto médio de  $OO'$ . Suponha que a circunferência  $\Gamma'$  de centro  $O'$  que passa por  $P$  é secante a  $\Gamma$  e seja  $A$  um ponto na interseção de  $\Gamma$  com  $\Gamma'$ . Se  $B$  é o outro ponto de interseção da reta  $AP$  com  $\Gamma$ , calcule  $\frac{PB}{PA}$ .

**PROBLEMA 6**

Seja  $p \geq 3$  um número primo. Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$  números inteiros tais que  $a_1$  não é múltiplo de  $p$  e  $a_1^k + a_2^k + \dots + a_{p-1}^k$  é múltiplo de  $p$  para todo  $k = 1, \dots, p-2$ . Prove que  $a_i$  não é múltiplo de  $p$  para todo  $i = 1, 2, \dots, p-1$ , e que  $a_i - a_j$  não é múltiplo de  $p$  para todos  $i, j = 1, 2, \dots, p-1$  com  $i \neq j$ .



**PROBLEMA 1**

Escrevendo-se a representação decimal de  $40!$  da esquerda para direita, qual o último dígito não nulo que foi escrito? (Por exemplo  $11! = 39916800$ , logo o último dígito não nulo de  $11!$  é 8.)

**PROBLEMA 2**

Encontre o número de sequências  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  satisfazendo que  $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$  para todo  $n = 1, 2, \dots, 10$  e que  $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  para todo  $n = 1, 2, \dots, 9$ .

**PROBLEMA 3**

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \{10x\}$ . Um número é dito tri-replicante se ele satisfaz

$$f(f(f(x))) = x.$$

Encontre a soma de todos os números tri-replicantes.

**Observação:**  $\{x\}$  é a parte fracionária de  $x$ , isto é,  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ , onde  $\lfloor x \rfloor$  é o menor inteiro maior ou igual a  $x$ .

**PROBLEMA 4**

Seja  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$  e seja  $P$  um ponto no interior de  $\Gamma$ . Seja  $O'$  o ponto tal que  $P$  é ponto médio de  $OO'$ . Suponha que a circunferência  $\Gamma'$  de centro  $O'$  que passa por  $P$  é secante a  $\Gamma$  e seja  $A$  um ponto na interseção de  $\Gamma$  com  $\Gamma'$ . Se  $B$  é o outro ponto de interseção da reta  $AP$  com  $\Gamma$ , calcule  $\frac{PB}{PA}$ .

**PROBLEMA 5**

Encontre todos os polinômios  $P$  com coeficientes reais tais que

$$xP(x) + yP(y) \geq 2P(xy)$$

para quaisquer  $x$  e  $y$  reais.

**PROBLEMA 6**

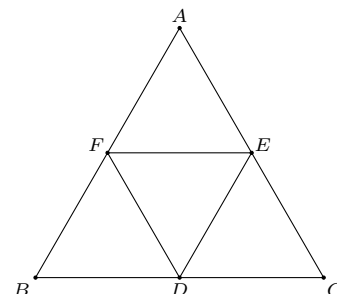
Sejam  $ABC$  um triângulo acutângulo e  $\Gamma$  sua circunferência circunscrita. Sejam  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  os pontos de interseção de  $\Gamma$  com as retas  $DE$ ,  $DF$  e  $EF$  de modo que  $A_1$  e  $A_2$  se encontram no arco menor  $BC$ ,  $B_1$  e  $B_2$  se encontram no arco menor  $AC$ , e  $C_1$  e  $C_2$  se encontram no arco menor  $AB$ . Se  $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$ , prove que o triângulo  $ABC$  é equilátero.

**PROBLEMA 1**

O ano 1978 foi *peculiar*, pois a soma dos números formados pelos seus dois primeiros dígitos e pelos seus dois últimos dígitos é igual ao número formado pelos dois dígitos do meio, ou seja,  $19 + 78 = 97$ . Quando será o próximo ano peculiar?

**PROBLEMA 2**

Deseja-se colocar os números de 1 a 6 nos pontos  $A, B, C, D, E, F$ , dispostos como na figura abaixo. Defina  $S_{XYZ}$  como a soma dos números escritos nos vértices do triângulo  $XYZ$ .



- (a) Determine o valor máximo de  $S_{ABC} + S_{BDF} + S_{CDE} + S_{DEF}$ .
- (b) De quantas maneiras podemos colocar os números de forma a obter o valor máximo do item anterior?

**PROBLEMA 3**

De quantas maneiras é possível pintar as casas de um tabuleiro  $3 \times 3$  com 5 cores de modo que cada linha, coluna e diagonal possua 3 cores distintas?

**PROBLEMA 4**

Encontre todas as soluções reais da equação

$$\sqrt{4 - x \sqrt{4 - (x - 2) \sqrt{1 + (x - 5)(x - 7)}}} = \frac{5x - 6 - x^2}{2}.$$

**PROBLEMA 5**

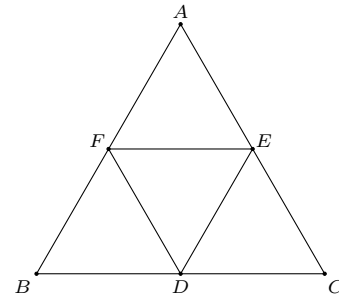
Sejam  $ABCD$  um paralelogramo e  $P$  um ponto no lado  $CD$ . Sejam  $Q$  a interseção da reta  $AP$  com a reta  $BC$  e  $F$  a interseção da reta  $QD$  com a reta  $AB$ . Prove que  $PQ = AB$  se, e somente se,  $PF$  é bissetriz do ângulo  $\angle DPA$ .

**PROBLEMA 6**

Seja  $S = \{1, 2, \dots, 300\}$  o conjunto dos 300 primeiros números naturais. Escolhendo ao acaso dois números, não necessariamente distintos, em  $S$  (cada número tem a mesma probabilidade de ser escolhido), determine a probabilidade do produto destes dois números ser múltiplo de 300.

**PROBLEMA 1**

Deseja-se colocar os números de 1 a 6 nos pontos  $A, B, C, D, E, F$ , dispostos como na figura abaixo. Defina  $S_{XYZ}$  como a soma dos números escritos nos vértices do triângulo  $XYZ$ .



- Determine o valor máximo de  $S_{ABC} + S_{BDF} + S_{CDE} + S_{DEF}$ .
- De quantas maneiras podemos colocar os números de forma a obter o valor máximo do item anterior?

**PROBLEMA 2**

Seja  $ABCD$  um quadrado.  $CDE$  e  $BFG$  são triângulos equiláteros tais que  $B$  é ponto médio de  $AF$ ,  $CDE$  é exterior ao quadrado e  $G$  e  $E$  estão no mesmo semiplano determinado pela reta  $AB$ .

- Prove que  $DBGE$  é um paralelogramo.
- Calcule os ângulos do triângulo  $ECG$ .

**PROBLEMA 3**

De quantas maneiras é possível pintar as casas de um tabuleiro  $3 \times 3$  com 5 cores de modo que cada linha, coluna e diagonal possua 3 cores distintas?

**PROBLEMA 4**

Um número é dito *especial* se ele tem dois ou mais algarismos e é múltiplo da soma dos seus algarismos. Por exemplo, 12 é especial pois ele é múltiplo de  $1 + 2 = 3$ .

- Encontre três números especiais consecutivos.
- Encontre quatro números especiais consecutivos.

**PROBLEMA 5**

Sejam  $a, b$  e  $c$  reais tais que  $a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2 = 6$  e  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 7$ . Prove que se  $a$  é inteiro, então  $b$  e  $c$  também são inteiros.

**PROBLEMA 6**

Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $\angle BAC = 60^\circ$ . Suponha que o circuncentro  $O$  pertence à circunferência inscrita ao triângulo  $ABC$  e  $AC > AB$ . Prove que  $\angle ABC < 84^\circ$ .

**PROBLEMA 1**

Seis pessoas tentam adivinhar o número de pedras em uma caixa. Arnaldo diz 57 pedras, Bernaldo diz 64, Cernaldo diz 67, Dernaldo diz 70, Ernaldo 54 e Fernaldo 47. Todos erraram, alguns para mais e outros para menos. Eles erraram por 1, 4, 6, 9, 11 e 12, em alguma ordem, mas não se sabe quem cometeu cada erro. Quantas pedras havia na caixa?

**PROBLEMA 2**

Sabendo que cada uma das letras  $A, B, C, D, E, F, G$  e  $H$  representa um algarismo diferente entre 0 e 9 e que os números  $ABACDE, CAFDG, CHHBAED$  são lados de um triângulo, descubra qual algarismo cada letra representa.

**PROBLEMA 3**

Um número  $n$  de 3 algarismos é dito *eficiente* se os últimos 3 algarismos de  $n^2$  são os mesmos algarismos de  $n$  e na mesma ordem. Encontre todos os números eficientes.

**PROBLEMA 4**

Seja  $\Gamma$  uma circunferência,  $\ell$  uma reta secante a  $\Gamma$  em  $B$  e  $C$  e  $r$  a reta tangente a  $\Gamma$  por  $B$ . Tome  $A$  um ponto em  $\ell$  distinto de  $C$  com  $AB = BC$ . Se  $s$  é uma reta por  $A$  tangente a  $\Gamma$  e  $P$  é o ponto de interseção de  $r$  e  $s$ , prove que o ângulo  $\angle APB$  não é obtuso.

**PROBLEMA 5**

Para cada  $n$  inteiro não negativo, calcule a quantidade de triplas  $(a, b, c)$  de inteiros não negativos que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$\begin{cases} a + b \leq 2n \\ a + c \leq 2n \\ b + c \leq 2n \end{cases}$$

**PROBLEMA 6**

Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo com  $AB \neq AC$ . Um ponto  $P$  interior ao triângulo é dito *B-bom* se  $\angle PBC = \angle PCA$ , e é dito *C-bom* se  $\angle PCB = \angle PBA$ . Sejam  $D$  o ponto *B-bom* mais próximo de  $A$  e  $E$  o ponto *C-bom* mais próximo de  $A$ . Defina  $F$  o ponto de interseção entre as retas  $BD$  e  $CE$ , e  $G$  o ponto de interseção, distinto de  $F$ , entre os circuncírculos de  $BEF$  e  $CDF$ .

(a) Prove que a reta  $PQ$  é perpendicular a reta  $BC$ .

(b) Prove que  $A, E, D$  e  $G$  são concíclicos.

**PROBLEMA 1**

Encontre dois números  $a$  e  $b$  tais que os algarismos de  $b$  são os mesmos algarismos de  $a$  em outra ordem e o número  $a - b$  possui todos os algarismos iguais a 1.

**PROBLEMA 2**

Um número  $n$  de 3 algarismos é dito *eficiente* se os últimos 3 algarismos de  $n^2$  são os mesmos algarismos de  $n$  e na mesma ordem. Encontre todos os números eficientes.

**PROBLEMA 3**

Seja  $\Gamma$  uma circunferência,  $\ell$  uma reta secante a  $\Gamma$  em  $B$  e  $C$  e  $r$  a reta tangente a  $\Gamma$  por  $B$ . Tome  $A$  um ponto em  $\ell$  distinto de  $C$  com  $AB = BC$ . Se  $s$  é uma reta por  $A$  tangente a  $\Gamma$  e  $P$  é o ponto de interseção de  $r$  e  $s$ , prove que o ângulo  $\angle APB$  não é obtuso.

**PROBLEMA 4**

Para cada  $n$  inteiro não negativo, calcule a quantidade de triplas  $(a, b, c)$  de inteiros não negativos que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$\begin{cases} a + b \leq 2n \\ a + c \leq 2n \\ b + c \leq 2n \end{cases}$$

**PROBLEMA 5**

Seja  $A_0 = (0, 0)$ ,  $A_1 = (3, 0)$  e  $A_2 = (0, 2)$  pontos no plano cartesiano. Definimos recursivamente o ponto  $A_{n+3}$  como o baricentro do triângulo  $A_n A_{n+1} A_{n+2}$  para  $n \geq 0$ . Encontre um ponto que está no interior de todos os triângulos  $A_n A_{n+1} A_{n+2}$  para todo  $n \geq 0$ .

**PROBLEMA 6**

Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo com  $AB \neq AC$ . Um ponto  $P$  interior ao triângulo é dito *B-bom* se  $\angle PBC = \angle PCA$ , e é dito *C-bom* se  $\angle PCB = \angle PBA$ . Sejam  $D$  o ponto *B-bom* mais próximo de  $A$  e  $E$  o ponto *C-bom* mais próximo de  $A$ . Defina  $F$  o ponto de interseção entre as retas  $BD$  e  $CE$ , e  $G$  o ponto de interseção, distinto de  $F$ , entre os circuncírculos de  $BEF$  e  $CDF$ .

(a) Prove que a reta  $PQ$  é perpendicular a reta  $BC$ .

(b) Prove que  $A$ ,  $E$ ,  $D$  e  $G$  são concíclicos.

**PROBLEMA 1**

Encontre três números primos distintos dois a dois tais que sua soma e a soma dos seus quadrados são números primos também.

**PROBLEMA 2**

No castelo da bruxa Elvira Hyvolta existem 2 tipos de poções, as de gigantismo e as de nanicolina. Tomando as de gigantismo, os seres deste reino encantado aumentam em 700% de tamanho, e com as de nanicolina, eles diminuem em 75% seu tamanho. Cada ser toma exatamente uma poção por dia. Desse modo, é possível que um sapo que acabou de chegar, após tomar uma certa combinação das poções de Elvira, retorne a seu tamanho original?

**PROBLEMA 3**

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos numa reta com  $B$  entre  $A$  e  $C$ , de modo que  $BC < AB$ . Constrói-se os quadrados  $ABDE$  e  $BCFG$  do mesmo lado da reta.

- (a) Calcule a razão  $EF/AG$ .
- (b) Calcule a soma de ângulos  $\angle BAG + \angle GFE$ .
- (c) Prove que as retas  $AG$ ,  $EF$  e  $DC$  concorrem em um único ponto.

**PROBLEMA 4**

Seja  $a_n$  o número de maneiras de preencher um tabuleiro  $n \times n$  com zeros e uns de modo de que a soma em cada linha e em cada coluna seja a mesma. Calcule  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  e  $a_5$ .

**PROBLEMA 5**

Luca tem uma calculadora com um único botão. Se um número  $x$  está na tela da calculadora e apertarmos seu único botão, o número  $x$  é substituído pelo número  $\frac{2x}{x^2+1}$ . Dado que, inicialmente, o número 2 está na tela da calculadora, qual número aparecerá após apertarmos 2013 vezes seu botão?

**PROBLEMA 6**

Dois números  $a$  e  $b$  são ditos parceiros se  $a$  e  $b$  possuem os mesmo fatores primos. Por exemplo, 15 e 375 são parceiros, mas 35 e 70 não são. Prove que existem infinitos pares de inteiros positivos distintos  $m$  e  $n$  tais que as duas condições a seguir são satisfeitas:

- (i)  $m$  e  $n$  são parceiros;
- (ii)  $m + 1$  e  $n + 1$  são parceiros.

**PROBLEMA 1**

Dado um número  $n$  natural, fazemos uma diamante com os números  $1, 2, \dots, 2n-1$  do seguinte modo, na primeira linha aparece um número 1, na segunda aparecem dois números 2, e assim por diante até que na  $n$ -ésima linha aparecem  $n$  números  $n$ , já na  $(n+1)$ -ésima linha aparecem  $n-1$  números  $n+1$ , até que na  $(2n-1)$ -ésima linha aparece um número  $2n-1$ . Abaixo temos exemplos de diamantes para  $n = 1, 2, 3, 4$ .

$$\begin{array}{c}
 | \quad 1 \quad | \\
 | \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad | \\
 | \quad \quad 3 \quad \quad | \\
 | \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad | \\
 | \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad | \\
 | \quad \quad 5 \quad \quad | \\
 | \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad | \\
 | \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad | \\
 | \quad \quad 6 \quad \quad | \\
 | \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad | \\
 | \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad | \\
 | \quad \quad 7 \quad \quad |
 \end{array}$$

Qual a soma de todos os elementos no  $n$ -ésimo diamante?

**PROBLEMA 2**

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos numa reta com  $B$  entre  $A$  e  $C$ , de modo que  $BC < AB$ . Constrói-se os quadrados  $ABDE$  e  $BCFG$  do mesmo lado da reta.

- Calcule a razão  $EF/AG$ .
- Calcule a soma de ângulos  $\angle BAG + \angle GFE$ .
- Prove que as retas  $AG$ ,  $EF$  e  $DC$  concorrem em um único ponto.

**PROBLEMA 3**

Seja  $a_n$  o número de maneiras de preencher um tabuleiro  $n \times n$  com zeros e uns de modo de que a soma em cada linha e em cada coluna seja a mesma. Calcule  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  e  $a_5$ .

**PROBLEMA 4**

Luca tem uma calculadora com um único botão. Se um número  $x$  está na tela da calculadora e apertarmos seu único botão, o número  $x$  é substituído pelo número  $\frac{2x}{x^2+1}$ . Dado que, inicialmente, o número 2 está na tela da calculadora, qual número aparecerá após apertarmos 2013 vezes seu botão?

**PROBLEMA 5**

Um inteiro é dito *sinistrose* pode ser escrito na forma  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ , com  $x, y, z$  inteiros. Determine a quantidade de números sinistro existentes de 1 a 2013.

**PROBLEMA 6**

Encontre todas as funções  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tais que

$$f(x - f(y)) = f(x) - f(y)$$

para todos  $x$  e  $y$  inteiros.

**PROBLEMA 1**

Ao efetuarmos a divisão do número  $10^{100}$  por 7, encontramos quociente  $q$  e resto  $r$ . Determine a soma dos algarismos de  $q$ .

**PROBLEMA 2**

Ache todos os números de dois dígitos  $(ab)$  tais que  $(ab)$  divide  $(a0b)$ .

*Observação.*  $(ab)$  é a representação decimal,  $a$  é o dígito das dezenas e  $b$  é o dígito das unidades.

**PROBLEMA 3**

Seja  $ABCDEF$  um hexágono regular. De quantas maneiras podemos colocar os números de 1 a 6 nos vértices do hexágono de modo que cada número apareça exatamente uma vez e a soma dos números em quaisquer dois vértices opostos não seja múltipla de 3.

**PROBLEMA 4**

Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $D$  e  $E$  pontos no lado  $BC$  tal que  $2BD = 2DE = EC$ . Sabendo que os círculos inscritos nos triângulos  $ABD$ ,  $ADE$  e  $AEC$  tem o mesmo raio, calcule o seno do ângulo  $\angle ACB$ .

**PROBLEMA 5**

Encontre todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos  $x$  e  $y$  reais.

**PROBLEMA 6**

Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo matemático. Numa primeira etapa, Arnaldo começa escolhendo um número inteiro não negativo e, em seguida, após ver o número que Arnaldo escolheu, Bernaldo escolhe outro número inteiro não negativo. O processo se repete uma vez, com Arnaldo escolhendo um novo número não negativo e, em seguida, Bernaldo escolhendo um último número não negativo.

Após esse processo, Arnaldo escolhe um subconjunto de 3 números  $a$ ,  $b$  e  $c$  dentre os 4 números originais e monta a equação  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Seja  $d$  o número não escolhido por Arnaldo. Bernaldo ganha caso consiga encontrar  $d$  números inteiros (possivelmente negativos) distintos  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, d$ ) tais que a equação  $(a + t_i)x^2 + (b + t_i)x + (c + t_i) = 0$  tenha raiz real. Caso contrário, Arnaldo ganha. Qual jogador possui estratégia vencedora?

*Observação.* Se  $d = 0$  Bernaldo ganha. E uma equação da forma  $0x^2 + 0x + 0 = 0$  tem raiz real.

*Exemplo.* Arnaldo começa escolhendo o número 1, então Bernaldo escolhe 4, depois Arnaldo escolhe 4 e, por fim, Bernaldo escolhe 2. Então, Arnaldo monta a equação  $4x^2 + x + 4 = 0$ . E Bernaldo ganha porque consegue 2 (o número que sobrou) inteiros,  $-3$  e  $-4$ , tais que as equações  $(4-3)x^2 + (1-3)x + (4-3) = 0$  e  $(4-4)x^2 + (1-4)x + (4-4) = 0$  têm raiz real.



**PROBLEMA 1**

Considere os polinômios:

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{1} = x, \quad \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2!}, \quad \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$

Em geral,

$$\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-j+1)}{j!}, \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots$$

É sabido que para qualquer natural  $n$ , existem  $a_0, a_1, \dots, a_n$  satisfazendo

$$x^n = a_0 \binom{x}{0} + a_1 \binom{x}{1} + \cdots + a_n \binom{x}{n}.$$

Além disso, esses  $a_0, a_1, \dots, a_n$  dependem apenas de  $n$  (não dependem de  $x$ ) e são únicos para cada  $n$ . Por exemplo:

$$\begin{aligned} x^2 &= \binom{x}{1} + 2 \binom{x}{2} \\ x^3 &= \binom{x}{1} + 6 \binom{x}{2} + 6 \binom{x}{3} \end{aligned}$$

Para  $n = 2012$ , determine os valores de  $a_0, a_1, a_2, a_3$  e  $a_{2012}$ .

**PROBLEMA 2**

Uma permutação  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $(1, 2, \dots, n)$  é dita *boa* se não existem inteiros  $1 \leq i < j < k \leq n$  tal que  $x_i, x_j, x_k$  formam uma sequência crescente ou decrescente. Por exemplo, a permutação  $(4, 1, 5, 2, 3)$  não é boa pois  $x_2 = 1, x_4 = 2, x_5 = 3$  estão em ordem crescente. Para cada  $n$ , quantas permutações boas existem?

**PROBLEMA 3**

Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $D$  e  $E$  pontos no lado  $BC$  tal que  $2BD = 2DE = EC$ . Sabendo que os círculos inscritos nos triângulos  $ABD$ ,  $ADE$  e  $AEC$  tem o mesmo raio, calcule o seno do ângulo  $\angle ACB$ .

**PROBLEMA 4**

Encontre todas as funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(xy - f(x)) = xf(y)$$

para todos  $x$  e  $y$  reais.

**PROBLEMA 5**

Dado um número natural  $n$  seja  $P(n)$  o produto de seus dígitos. Determine a menor razão  $n/P(n)$  inteira de onde  $n$  percorre todos os números naturais de 3 dígitos.

**PROBLEMA 6**

Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo matemático. Numa primeira etapa, Arnaldo começa escolhendo um número inteiro não negativo e, em seguida, após ver o número que Arnaldo escolheu, Bernaldo escolhe outro número inteiro não negativo. O processo se repete uma vez, com Arnaldo escolhendo um novo número não negativo e, em seguida, Bernaldo escolhendo um último número não negativo.

Após esse processo, Arnaldo escolhe um subconjunto de 3 números  $a, b$  e  $c$  dentre os 4 números originais e monta a equação  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Seja  $d$  o número não escolhido por Arnaldo. Bernaldo ganha caso consiga encontrar  $d$  números inteiros (possivelmente negativos) distintos  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, d$ ) tais que a equação  $(a + t_i)x^2 + (b + t_i)x + (c + t_i) = 0$  tenha raiz real. Caso contrário, Arnaldo ganha. Qual jogador possui estratégia vencedora?

*Observação.* Se  $d = 0$  Bernaldo ganha. E uma equação da forma  $0x^2 + 0x + 0 = 0$  tem raiz real.

*Exemplo.* Arnaldo começa escolhendo o número 1, então Bernaldo escolhe 4, depois Arnaldo escolhe 4 e, por fim, Bernaldo escolhe 2. Então, Arnaldo monta a equação  $4x^2 + x + 4 = 0$ . E Bernaldo ganha porque consegue 2 (o número que sobrou) inteiros,  $-3$  e  $-4$ , tais que as equações  $(4-3)x^2 + (1-3)x + (4-3) = 0$  e  $(4-4)x^2 + (1-4)x + (4-4) = 0$  têm raiz real.