Problemas sabor Combinatória

Aviso aos alérgicos: Pode conter Álgebra, Geometria e Teoria dos Números. Não contém glúten.

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. **(2017 Miklós Schweitzer, 1)** É possível dividir um quadrado em finitos triângulos de forma que nenhum par de triângulos compartilhe um lado? (Os interiores de qualquer par de triângulos não se intersectam, e a união de todos os triângulos é o quadrado.)

   Esboço. Suponha que existe uma triangulação que funciona. Seja T o número de triângulos dessa triangulação Seja $\mathcal{V}$ o conjunto dos vértices dos triângulos. Vamos construir um grafo $\mathcal{G}$ sobre o conjunto de vértices $\mathcal{V}$, de forma que $u \sim v$ se e somente se uv é um segmento no lado de algum triângulo da triangulação sem nenhum outro ponto do conjunto $\mathcal{V}$ em seu interior. Sejam V, E o número de vértices, arestas de $\mathcal{G}$. Note que $\mathcal{G}$ é planar e o número de faces de $\mathcal{G}$ é $T + 1$. Logo, pelo Teorema de Euler para Grafos Planares,

$$V + T - E = 1.$$

2. **(2020 Miklós Schweitzer, 1)** Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos. Seja $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ o conjuntos de todas as sequências $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ de inteiros positivos. Dizemos que duas sequências $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ são *completamente diferentes* se $x_n \neq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $F\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ uma função tal que:

   - $F(\mathbf{x}) \neq F(\mathbf{y})$ para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ completamente diferentes;
   - $F((k, k, \dots)) = k$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

   Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F(\mathbf{x}) = x_n$ para todas sequências $\mathbf{x}$.

3. **(Banco IMO 2009, C5)** Cinco baldes vazios idênticos de 2 litros de capacidade estão localizados nos vértices de um pentágono regular. Bean e Dagmær passam por uma sequência de rodadas: no início de cada rodada, Dagmær pega um litro de água do rio próximo e distribui arbitrariamente nos cinco baldes. Bean escolhe um par de baldes vizinhos, esvazia-os no rio e os coloca de volta em suas posições. Então a próxima rodada começa. Dagmær quer fazer um desses baldes transbordar. Dagmær consegue forçar que isso aconteça?

4. **(Putnam 2020, B2)** Sejam k e n inteiros com $1 \leqslant k < n$. Elfo e Luci jogam um jogo com k bolas e uma sequência de n buracos. No começo do jogo, as bolas ocupam os k buracos mais à esquerda. Um movimento legal consiste em mover uma única bola para qualquer buraco vazio à direita da posição original da bola. Os jogadores alternam os movimentos, com Elfo jogando primeiro. O jogo termina quando as bolas estão nos k buracos mais à direita, de forma que o próximo jogador não pode jogar e portanto perde o jogo. Para quais valores de n e k Elfo possui uma estratégia vencedora?

Problemas para os que estão entediados

5. **(Banco IMO 2014, C2)** Temos 2^m folhas de papel. Em cada folha, o número 1 está escrito. A seguinte operação é definida: duas folhas distintas são escolhidas; se os números nas folhas são a e b, então apagamos esses números e escrevemos o número $a + b$ em ambas as folhas. Prove que após $m2^{m-1}$ operações, a soma dos números em todas as folhas é pelo menos 4^m.

6. **(Banco IMO 2014, C4)** Construa um tetrominó anexando dois dominós 2×1 ao longo de seus lados mais longos, de forma que o ponto médio do lado mais longo de um dominó seja um canto do outro dominó. Esta construção produz dois tipos de tetrominós com orientações opostas. Vamos chamá-los de S- e Z-tetrominós.

   Suponha que um polígono reticulado P pode ser particionado por S-tetrominós. Prove de qualquer modo que particionarmos P usando somente S- e Z-tetrominós, sempre usaramos um número par de Z-tetrominós.

7. **(Banco IMO 2009, C4)** Seja $m \geqslant 1$ um inteiro positivo. Considere as partições de um tabuleiro de xadrez $2^m \times 2^m$ em retângulos formados por quadradinhos do tabuleiro, nas quais cada um dos 2^m quadradinhos da diagonal formam um retângulo isolado na partição. Determine a menor soma de perímetros dos triângulos dentre tais partições.

8. (2008 Miklós Schweitzer, 3) Um grafo bipartido, com $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ sendo os conjuntos de vértices (ou seja, as arestas são da forma $x_i y_j$) é *domesticado* se não possui caminho $x_i y_j x_k y_l$ $(i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\})$ em que $j < l$ e $i + j > k + l$. Calcule o ínfimo do conjunto dos reais α para os quais existe uma constante $c = c(\alpha) > 0$ tal que, para todos os grafos domesticados $e \leqslant cn^\alpha$, onde e é o número de arestas e n é metade do número de vértices.