Simulado para o 1º Teste de Seleção
Cone Sul e OMCPLP

Instruções:

- Separe o tempo necessário para essa prova: 4 horas e 30 minutos.
- Escreva todas as soluções completas e envie para mim por email, `zeusdanmou@gmail.com`, ou por WhatsApp.

▶ PROBLEMA 1

Determine o menor inteiro positivo n com a seguinte propriedade: para quaisquer n inteiros consecutivos, é possível escolher um conjunto não-vazio de inteiros consecutivos com soma divisível por 2019.

▶ PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo com $AB = AC$, e seja M o ponto médio de BC. Seja P um ponto tal que $PB < PC$ e PA paralelo a BC. Sejam X e Y pontos nas retas PB e PC, respectivamente, tal que B cai no segmento PX, C cai no segmento PY, e $\angle PXM = \angle PYM$. Prove que o quadrilátero $APXY$ é cíclico.

▶ PROBLEMA 3

Seja $n \geq 3$ um inteiro. Dizemos que um vértice $A_i (1 \leq i \leq n)$ de um polígono convexo $A_1 A_2 \ldots A_n$ é *boêmio* se sua reflexão com respeito ao ponto médio de $A_{i-1}A_{i+1}$ (com $A_0 = A_n$ e $A_1 = A_{n+1}$) cai dentro[1] do polígono $A_1 A_2 \ldots A_n$. Determine o menor número possível de vértices boêmios que um n-ágono convexo pode ter (em função de n).

▶ PROBLEMA 4

Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$(f(x) + xy) \cdot f(x - 3y) + (f(y) + xy) \cdot f(3x - y) = (f(x + y))^2$$

para quaisquer x e y reais.

Cada problema vale 7 pontos.
Tempo: 4 horas e 30 minutos.

[1] a borda do polígono é considerada dentro do polígono