

## Treinamento de Velocidade

Guilherme Zeus Moura  
zeusdanmou@gmail.com

### INSTRUÇÕES:

- Tempo disponível: 90 minutos.
- Todas as respostas são inteiros positivos.

#### PROBLEMA 1

Calcule o período, ou seja, o tamanho da parte que repete, da expansão decimal de  $\frac{1}{729}$ .

#### PROBLEMA 2

Seja  $ABC$  um triângulo com lados 13, 14, 15. Os pontos no interior de  $ABC$  com distância para todos os lados maior que 1 são pintados de preto. A área da região preta pode ser escrita como  $\frac{m}{n}$ , com  $m$  e  $n$  primos entre si. Calcule  $m + n$ .

#### PROBLEMA 3

O número 400000001 pode ser escrito como  $p \cdot q$ , onde  $p$  e  $q$  são primos. Ache a soma dos fatores primos de  $p + q - 1$ .

#### PROBLEMA 4

Alguns polígonos regulares se encontram em um ponto no plano tal que os polígonos não se sobrepõem, porém esse ponto é rodeado pelos polígonos (isto é, qualquer círculo suficientemente pequeno centrado nesse ponto está contido na união dos polígonos). Qual é o maior número de lados que um desses polígonos pode ter?

#### PROBLEMA 5

Sejam  $0 \leq a, b, c, d \leq 10$ . Para quantas quádruplas ordenadas  $(a, b, c, d)$ ,  $ad - bc$  é múltiplo de 11?

#### PROBLEMA 6

Seja  $x$  um real tal que  $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{6}$  e  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ . Então,  $x^2$  pode ser escrito da forma  $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$  para  $a, b, c, d$  inteiros com  $d > 0$ ,  $(a^2, b^2, c, d^2) = 1$  e  $c$  livre de quadrados. Calcule  $a + b + c + d$ .

#### PROBLEMA 7

Ache o número de termos não-nulos do polinômio  $P(x)$ , dado que

$$x^{2018} + x^{2017} + x^{2016} + x^{999} + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)P(x).$$

#### PROBLEMA 8

Calcule o menor inteiro positivo  $n$  que é múltiplo de 29 com a tal que, para todo inteiro positivo  $k$  primo com  $n$ ,  $k^n \equiv 1 \pmod{n}$ .

#### PROBLEMA 9

O triângulo  $ABC$  satisfaz  $AB = 10$  e possui ângulos  $\angle A = 75^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ , e  $\angle C = 45^\circ$ . Seja  $I_A$  o centro do exincírculo relativo a  $A$ , e sejam  $D, E$  os circuncentros dos triângulos  $BCI_A$  e  $ACI_A$  respectivamente. Se  $O$  é o circuncentro do triângulo  $ABC$ , então a área do triângulo  $EOD$  pode ser escrita como  $\frac{a\sqrt{b}}{c}$  para  $b$  livre de quadrados e  $a$  primo com  $c$ . Ache  $a + b + c$ .

#### PROBLEMA 10

Se  $a$  e  $b$  são inteiros positivos tais que  $3\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = a \cos \frac{\pi}{b}$ , ache  $a + b$ .