Miscelânea de Álgebra

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

A proof is something that satisfies the audience.
— Rob Morris, 2019

O polinômio $x^3 - 3x + 1$.

Problema 1 ($x^3 - 3x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$)
Determine as raízes reais do polinômio $x^3 - 3x + 1$.

Problema 2 (IMC 2020, 6)
Ache todos os primos p tais que existe um único $a \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ para o qual $a^3 - 3a + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Em vários problemas, é mais útil saber que um número α é raiz de um certo polinômio, em comparação com saber escrever α explicitamente usando operações, funções trigonométricas, entre outras coisas — principalmente quando o polinômio é bonitinho. Veja mais sobre essa ideia no Matematicamente Ao Vivo #32, e nos problemas da secção "Seja α uma raiz de um certo polinômio".

Um problema interessante em que o polinômio $x^3 - 3x + 1$ aparece é o OBM 2017, 6. Saber os problemas acima ajuda a resolvê-lo, mas também é útil saber sobre Extensão de Corpos. Recomendo o material do Carlos Shine sobre Extensão de Corpos da Semana Olímpica de 2018.

Problema 3 (OBM 2017, 6)
Seja a inteiro positivo e p um divisor primo de $a^3 - 3a + 1$, com $p \neq 3$. Prove que p é da forma $9k + 1$ ou $9k - 1$, sendo k um inteiro.

Seja α uma raiz de um certo polinômio.

Problema 4 (APMO 2006, 2)
Prove que todo inteiro positivo pode ser escrito como soma de um número finito de potências inteiras distintas da razão áurea $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aqui, uma potência inteira de ϕ é um número da forma ϕ^i, onde i é um inteiro (não necessariamente positivo).

Polinômio traiçoeiro.

Problema 5 ($P(k) = 2^k$, $P(n+1) = ?$)
Seja $P(x)$ um polinômio de grau n com coeficientes reais tal que $P(k) = 2^k$, para $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Determine $P(n+1)$.

Problema 6 ($P(k) = F_k$, $P(2n+3) = ?$)
Seja $P(x)$ um polinômio de grau n com coeficientes reais tal que $P(k) = F_k$, para $k \in \{n+2, n+3, \ldots, 2n+2\}$, em que F_k denota o k-ésimo número de Fibonacci[a]. Determine $P(2n+3)$.

[a] $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ para $k \geq 2$.

Determine todas as funções.

Problema 7 (OMERJ 2017, N3, 6)
Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

Problema 8 (IMO 2009, 5)
Determine todas as funções $f : \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{Z}_+^*$ tais que existe um triângulo não degenerado[a] cujos lados medem

$$a, \quad f(b) \quad \text{e} \quad f(b + f(a) - 1)$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \dots\}$.

[a] Um triângulo não degenerado é um triângulo cujos vértices não são colineares.

Problemas para os entediados.

Problema 9 (Canada Winter Camp 2020, Buffet, A1)
Prove que existe um polinômio P tal que, para qualquer inteiro positivo n,

$$\left\lfloor 2\sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor 2\sqrt{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor 2\sqrt{n^2} \right\rfloor = P(n)$$

Problema 10 (IMO 2009, 3)
Suponha que $s_1, s_2, s_3, \dots$ é uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos tais que as subsequências

$$s_{s_1},\ s_{s_2},\ s_{s_3},\ \dots \qquad \text{e} \qquad s_{s_1+1},\ s_{s_2+1},\ s_{s_3+1},\ \dots$$

são ambas progressões aritméticas. Prove que a sequência $s_1, s_2, s_3, \dots$ é uma progressão aritmética.

Problema 11 (Canada Winter Camp 2020, Buffet, A2)
Ache todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(-f(x) - f(y)) = 1 - x - y,$$

para quaisquer x, y inteiros.

Problema 12 (Canada Winter Camp 2020, Buffet, A3)
Seja $P_0 = x^3 - 4x$. Uma sequência de polinômios é definida pela recorrência

$$P_{n+1} = P_n(1 + x)P_n(1 - x) - 1,$$

para inteiros $n \geq 0$. Prove que $x^{2016} \mid P_{2016}(x)$.

Problema 13 (Canada Winter Camp 2020, Buffet, A4)
Considere uma sequência de reais positivos $a_1, a_2, \dots$, tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,

$$a_{mn} = a_m a_n, \qquad\qquad a_{m+n} \leq 2020(a_m + a_n),$$

para todos m, n inteiros positivos. Prove que $a_n = n$ para todo n inteiro positivo.

Algumas Soluções.

Esboço para $x^3 - 3x + 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$. Ache $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. Portanto, $2\cos(3\theta) = 1$ se, e somente se, $2\cos(\theta)$ é raiz de $x^3 - 3x + 1$. Achamos, portanto, $2\cos(20°), 2\cos(40°), 2\cos(80°)$ como raízes.

Esboço para IMC 2020, 6. Note que se α é raíz de $P(x)$, então $\alpha^2 - 2$ também é raíz — podemos ver que isso acontece no problema $x^3 - 3x + 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$ e provar algebricamente. Logo, como $a \pmod p$ é a única raíz, é necessário $a \equiv a^2 - 2 \pmod p \iff a \equiv 2$ or $a \equiv -1$. Para $a \equiv 2$, $P(2) \equiv 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod p \implies p = 3$; para $a \equiv -1$, $P(-1) \equiv (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 \equiv -3 \equiv 0 \pmod p \implies p = 3$.

É necessário verificar que $p = 3$ funciona.

Solução para APMO 2006, 2. Casos pequenos:

$$1 = \phi^0$$

$$2 = \phi^{-2} + \phi^{-1} + \phi^0 = \phi^{-2} + \phi^1$$
$$3 = \phi^{-2} + \phi^0 + \phi^1 = \phi^{-2} + \phi^2$$
$$4 = \phi^{-2} + \phi^0 + \phi^2$$

Quem é ϕ? Ora, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Porém, um jeito por vezes mais útil é ver ϕ como raiz de $x^2 - x - 1$. Ou seja:

$$\phi^2 = \phi + 1.$$

Defina $n \equiv S$, sendo n um inteiro e S um suconjunto finito dos inteiros se, e somente se,

$$n = \sum_{i \in S} \phi^i.$$

Os casos pequenos ficam, então:

$$1 \equiv \{0\}$$
$$2 \equiv \{-2, -1, 0\} \equiv \{-2, 1\}$$
$$3 \equiv \{-2, 0, 1\} \equiv \{-2, 2\}$$
$$4 \equiv \{-2, 0, 2\}$$
$$5 \equiv \{-4, -3, -2, -1, 0, 2\}$$

A equação $\phi^2 = \phi + 1$ é traduzida como uma operação:

Se $n, n+1 \in S$ e $n + 2 \notin S$, então

$$S \equiv (S - \{n, n+1\}) \cup \{n+2\},$$

em outras palavras, podemos trocar n e $n+1$ por $n+2$, ou, em outras palavras,

$$\{n, n+1\} \equiv \{n+2\}.$$

Lema 1

Se $n \equiv S$, então existe R tal que $n \equiv R$ e R não possui consecutivos.

Demonstração. Se S não possui consecutivos, acabou! Suponha que S possui consecutivos, pegue o maior par de consecutivos $(n, n+1)$. $n+2$ não está em S, pois, se estivesse, $(n+1, n+2)$ seria um par de consecutivos maior.

Sabemos que $\phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n$. Logo,

$$n \equiv S' = (S - \{n, n+1\}) \cup \{n+2\}.$$

Repetimos esse algoritmo enquanto houverem consecutivos. Esse algoritmo acaba pois, em cada etapa, o número de elementos do conjunto diminui; e esse número é sempre inteiro não-negativo. (E ele começa como um inteiro finito).

Vamos provar por indução que todo n possui a propriedade desejada. (Base: OK.)

Suponha que $n-1$ possui a propriedade. Pelo Lema, existe $S \equiv n-1$, S sem consecutivos. Seja $-2k$ o maior par não-positivo tal que $-2k \notin S$ (como S é finito, esse número existe). Logo, $-2k+2, -2k+4, \ldots, -2, 0$ estão em S. Como S no possui consecutivos, isso implica que $-2k+1, -2k+3, \ldots, -3, -1$ não estão em S. Note que:

$$\begin{aligned}
1 &= \phi^{-1} + \phi^{-2} \\
&= \phi^{-1} + \phi^{-3} + \phi^{-4} \\
&= \phi^{-1} + \phi^{-3} + \phi^{-5} + \phi^{-6} \\
&\vdots \\
&= \phi^{-1} + \phi^{-3} + \cdots + \phi^{-2k+3} + \phi^{-2k+1} + \phi^{-2k}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$n \equiv S \cup \{-2k, -2k+1, -2k+3, \ldots, -3, -1\}.$$

Esboço para $P(k) = 2^k$, $P(n+1) = ?$. Basta notar que

$$P(k) = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \cdots + \binom{x}{n}.$$

Logo, $P(n+1) = 2^{n+1} - 1$.

Esboço para $P(k) = F_k$, $P(2n+3) = ?$. Definimos $\Delta Q(x) = Q(x+1) - Q(x)$.

$$\begin{gathered}
P(k) = F_k, \text{ para } k \in \{n+2, n+3, \ldots, 2n+2\} \text{ e tem grau } n. \\
\Delta P(k) = F_{k-1}, \text{ para } k \in \{n+2, n+3, \ldots, 2n+1\} \text{ e tem grau } n-1. \\
\Delta^2 P(k) = F_{k-2}, \text{ para } k \in \{n+2, n+3, \ldots, 2n\} \text{ e tem grau } n-2. \\
\vdots \\
\Delta^{n-1} P(k) = F_{k-n+1}, \text{ para } k \in \{n+2, n+3\} \text{ e tem grau } 1. \\
\Delta^n P(k) = F_{k-n}, \text{ para } k \in \{n+2\} \text{ e tem grau } 0.
\end{gathered}$$

Logo, $\Delta^n P(k) = F_2$, para todo k. Em especial, isso é válido para $k = n + 3$.

$$\begin{aligned}
\Delta^n P(n+3) = F_2 &\implies \Delta^{n-1} P(n+4) - \Delta^{n-1} P(n+3) = F_2 \\
&\implies \Delta^{n-1} P(n+4) = F_2 + F_4 \\
&\implies \Delta^{n-2} P(n+5) = F_2 + F_4 + F_6 \\
&\vdots \\
&\implies \Delta^1 P(2n+2) = F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} \\
&\implies P(2n+3) = F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} + F_{2n+2} \\
&\implies P(2n+3) = F_{2n+3} - 1.
\end{aligned}$$