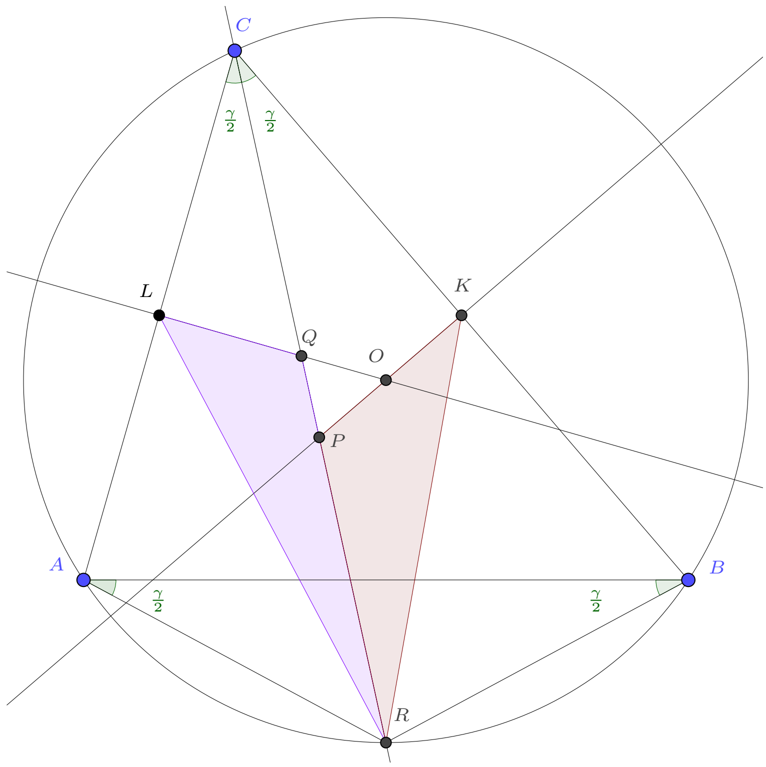
Problema 1. No triângulo ABC, a bissetriz do ângulo $\angle BCA$ intersecta o circumcírculo de novo em R, intersecta a mediatriz de BC em P, e intersecta a mediatriz de AC em Q. O ponto médio de BC é K e o ponto médio de AC é L. Prove que os triângulos RPK and RQL têm a mesma área.

Solução. Vamos desenhar a figura:



Temos que $\angle LQR = 90° + \angle LCQ = 90° + \angle KCP = \angle KPR$.

Logo, $[LQR] = [RPK] \iff \dfrac{LQ \cdot QR \cdot \text{sen}(\angle LQR)}{2} = \dfrac{KP \cdot PR \cdot \text{sen}(\angle KPR)}{2} \iff$

$$\iff \frac{LQ}{KP} = \frac{PR}{QR}.$$

Além disso, $CR = 2R\,\text{sen}(A + \frac{C}{2}) = 2R\,\text{sen}(B + \frac{C}{2}) = R(\text{sen}(A + \frac{C}{2}) + \text{sen}(B + \frac{C}{2})) = R\,\text{sen}\,90°\,\text{sen}(\frac{A-B}{2}) = R\,\text{sen}(\frac{A-B}{2})$.

Mas, $\triangle CLQ$ é semelhante a $\triangle CKP \implies \dfrac{LQ}{KP} = \dfrac{CQ}{CP}$.

Sabemos que $CP = R\frac{\text{sen}\,A}{\cos C}$ e $CQ = R\frac{\text{sen}\,B}{\cos C}$, que implica que $CP+CQ = \frac{R}{\cos C}(\text{sen}\,A+\text{sen}\,B) = \frac{R\,\text{sen}(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})}{\cos C} = R\cos(\frac{A-B}{2}) = CR$.

Como $CP + CQ = CR$, temos $CQ = PR$ e $CP = QR$, que implica

$$\frac{LQ}{KP} = \frac{CQ}{CP} = \frac{PR}{QR},$$

como queríamos demonstrar.