Questões de Geometria da OBM

Guilherme Zeus Moura

1 Geometria Usual

1. (OBM 2016) Seja ABC um triângulo. As retas r e s são bissetrizes internas de $\angle ABC$ e $\angle BCA$, respectivamente. Os pontos E sobre r e D sobre s são tais que $AD \parallel BE$ e $AE \parallel CD$. As retas BD e CE se cortam em F. Seja I o incentro do triângulo ABC. Mostre que se os pontos A, F e I são colineares então $AB = AC$.

2. (OBM 2015) Seja ABC um triângulo escaleno e acutângulo e N o centro do círculo que passa pelos pés das três alturas do triângulo. Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de ABC e que passam por B e C. Prove que A, D e N são colineares se, e somente se, $\angle BAC = 45°$.

3. (OBM 2014) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja P a interseção das diagonais AC e BD. Os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABP, BCP, CDP e DAP são iguais. Prove que $ABCD$ é um losango.

4. (OBM 2013) Seja Γ um círculo a A um ponto exterior a Γ. As retas tangentes a Γ que passam por A tocam Γ em B e C. Seja M o ponto médio de AB. O segmento MC corta Γ novamente em D e a reta AD corta Γ novamente em E. Sendo $AB = a$ e $BC = b$, calcular CE em função de a e b.

5. (OBM 2006) Seja ABC um triângulo, P o pé da bissetriz interna relativa ao lado AC e I seu incentro. Se $AP + AB = CB$, prove que API é um triângulo isósceles.

6. (OBM 2004) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Prove que os incírculos de ABC, BCD, CDA e DAB têm um ponto em comum se, e somente se, $ABCD$ é um losango.

7. (OBM 2010) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M e N os pontos médios dos lados CD e AD, respectivamente. As retas perpendiculares a AB passando por M e a BC passando por N cortam-se no ponto P. Prove que P pertence à diagonal BD se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

8. (OBM 2008) Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e r e s as retas simétricas à reta AB em relação às bissetrizes internas dos ângulos $\angle CAD$ e $\angle CBD$, respectivamente. Sendo P a interseção de r e s e O o centro do círculo circunscrito a $ABCD$, prove que OP é perpendicular a CD.

9. (OBM 2001) Uma calculadora tem o número 1 na tela. Devemos efetuar 2001 operações, cada uma das quais consistindo em pressionar a tecla *sen* ou a tecla *cos*. Essas operações calculam respectivamente o seno e o cosseno com argumentos em radianos. Qual é o maior resultado possível depois das 2001 operações?

10. (OBM 2012) Dado um triângulo ABC, o exincentro relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas de DB e DC. Sejam I_A, I_B e I_C os exincentros do triângulo escaleno ABC relativos a A, B e C, respectivamente, e X, Y e Z os pontos médios de I_BI_C, I_CI_A e I_AI_B, respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Prove que as retas DX, EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente.

11. (OBM 2002) $ABCD$ é um quadrilátero convexo e inscritível e M é um ponto sobre o lado CD, tal que o triângulo ADM e o quadrilátero $ABCM$ têm a mesma área e o mesmo perímetro. Prove que $ABCD$ tem dois lados de comprimentos iguais.

12. (OBM 2017) No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definem um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI.

13. (OBM 2011) Seja ABC um triângulo acutângulo e H seu ortocentro. As retas BH e CH cortam AC e AB em D e E, respectivamente. O circuncírculo de ADE corta o circuncírculo de ABC em $F \neq A$. Provar que as bissetrizes internas de $\angle BFC$ e $\angle BHC$ se cortam em um ponto sobre o segmento BC.

14. (OBM 2009) Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. As retas AB e AC cortam o circuncírculo de OBC novamente em $B_1 \neq B$ e $C_1 \neq C$, respectivamente, as retas BA e BC cortam o circuncírculo de OAC em $A_2 \neq A$ e $C_2 \neq C$, respectivamente, e as retas CA e CB cortam o circuncírculo de OAB em $A_3 \neq A$ e $B_3 \neq B$, respectivamente. Prove que as retas A_2A_3, B_1B_3 e C_1C_2 passam por um mesmo ponto.

15. (OBM 2007) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, P a interseção das retas AB e CD, Q a interseção das retas AD e BC e O a interseção das diagonais AC e BD. Prove que se $\angle POQ$ é um ângulo reto então PO é bissetriz de $\angle AOD$ e QO é bissetriz de $\angle AOB$.

16. (OBM 2005) Sejam ABC um triângulo acutângulo e F o seu ponto de Fermat, isto é, o ponto interior ao triângulo ABC tal que os três ângulos $\angle AFB$, $\angle BFC$ e $\angle CFA$ medem 120 graus. Para cada um dos triângulos ABF, ACF e BCF trace a sua reta de Euler, ou seja, a reta que liga o seu circuncentro e o seu baricentro. Prove que essas três retas concorrem em um ponto.

17. (OBM 2017) Um quadrilátero $ABCD$ tem um círculo inscrito ω e é tal que as semirretas AB e DC se cortam no ponto P e as semirretas AD e BC se cortam no ponto Q. As retas AC e PQ se cortam no ponto R. Seja T o ponto de ω mais próximo da reta PQ. Prove que a reta RT passa pelo incentro do triângulo PQC.

18. (OBM 2003) Seja $ABCD$ um losango. Sejam E, F, G e H pontos sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, e tais que as retas EF e GH são tangentes à circunferência inscrita no losango. Prove que as retas EH e FG são paralelas.

19. (OBM 2001) E e F são pontos do lado AB, do triângulo ABC, tais que $AE = EF = FB$. D é ponto da reta BC tal que BC é perpendicular a ED. AD é perpendicular a CF. Os ângulos $\angle BDF$ e $\angle CFA$ medem x e $3x$, respectivamente. Calcule a razão DB/DC.

20. (OBM 1998) Duas pessoas disputam um jogo da maneira descrita a seguir. Inicialmente escolhem dois números naturais: $n \geq 2$ (o número de rodadas) e $t \geq 1$(o incremento máximo). Na primeira rodada o jogador A escolhe um natural $m1 > 0$ e, posteriormente, o jogador B escolhe um natural positivo $n1 \neq m1$ Para $2 \leq k \leq n$, na rodada k o jogador A escolhe um natural m_k com $m_{k-1} < m_k \leq mk - 1 + t$ e posteriormente o jogador B escolhe um natural n_k com $n_{k-1} < n_k \leq n_{k-1} + t$. Após essas escolhas, nessa k-ésima rodada, o jogador A ganha $\text{mdc}(m_k, n_{k-1})$ pontos e o jogador B ganha $\text{mdc}(m_k, n_k)$ pontos. Ganha o jogo o jogador com maior pontuação total ao fim das n rodadas. Em caso de pontuações totais iguais o jogador A é considerado vencedor. Para cada escolha de n e t, determine qual dos jogadores possui estratégia vencedora.

21. (OBM 2016) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, não circunscritível, sem lados paralelos. As retas AB e CD se cortam em E. Seja $M \neq E$ a interseção dos circuncírculos de ADE e BCE. As bissetrizes internas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro I e as bissetrizes externas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro J. Prove que I, J e M são colineares.

22. (OBM 2015) Seja ABC um triângulo escaleno e X, Y e Z pontos sobre as retas BC, AC e AB, respectivamente, tais que $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$. Os circuncírculos de BXZ e CXY se cortam em $P \neq X$. Prove que P está sobre a circunferência cujo diâmetro tem extremidades no ortocentro H e no baricentro G de ABC.

23. (OBM 2014) Seja ABC um triângulo com incentro I e incírculo ω O círculo ω_A tangencia externamente ω e toca os lados AB e AC em A_1 e A_2. Seja r_A a reta A_1A_2. Defina r_B e r_C de modo análogo. As retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo XYZ. Prove que o incentro de XYZ, o circuncentro de XYC e I são colineares.

24. (OBM 2013) O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F respectivamente. Seja P o ponto de interseção das retas AD e BE. As reflexões de P em relação a EF, FD e DE são X, Y e Z, respectivamente. Prove que as retas AX, BY e CZ têm um ponto comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC.

2 Geometria Não-Usual

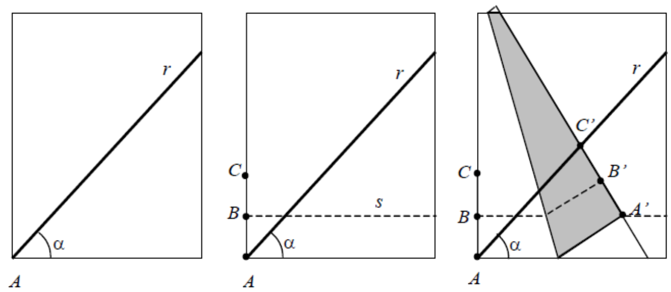
1. (OBM 2018) Dizemos que um polígono P está *inscrito* em outro polígono Q quando todos os vértices de P pertencem ao perímetro de Q. Também dizemos nesse caso que Q está *circunscrito* a P. Dado um triângulo T, sejam ℓ o máximo valor do lado de um quadrado inscrito em T e L o mínimo valor do lado de um quadrado circunscrito a T. Prove que, para todo triângulo T, vale a desigualdade $L/\ell \geq 2$, e encontre todos os triângulos T para os quais a igualdade ocorre.

2. (OBM 2000) Em uma folha de papel a reta r passa pelo canto A da folha e forma um ângulo α com a borda horizontal, como na figura 1. Para dividir este ângulo α em três partes iguais, executaremos as seguintes construções:

   a) inicialmente, marcamos dois pontos B e C sobre a borda vertical de modo que $AB = BC$; pelo ponto B traçamos a reta s paralela à borda (figura 2);

   b) a seguir, dobramos o papel, ajustando-o de modo que o ponto C coincida com um ponto C' sobre a reta r e o ponto A coincida com um ponto A' sobre a reta s (figura 3); chamamos de B' o ponto com o qual B coincide.

   Mostre que as retas AA' e AB' dividem o ângulo α em três partes iguais.



3. (OBM 2003) São dados: uma circunferência K e um ponto A interior, fixo, distinto do centro. Determine os pontos B, C e D sobre a circunferência de forma que a área do quadrilátero $ABCD$ seja a maior possível.

4. (OBM 2006) Seja P um polígono convexo de 2006 lados. As 1003 diagonais ligando vértices opostos e os 1003 segmentos que ligam os pontos médios dos lados opostos são concorrentes, ou seja, todos os 2006 segmentos possuem um ponto em comum. Prove que os lados opostos de P são paralelos e congruentes.

5. (OBM 2011) Mostre que, para todo pentágono convexo $P_1P_2P_3P_4P_5$ de área 1, existem dois triângulos $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ e $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ (em que $P_6 = P_1$ e $P_7 = P_2$), formados por três vértices consecutivos do pentágono, tais que

$$\mathrm{A}(P_iP_{i+1}P_{i+2}) \leq \frac{5-\sqrt{5}}{10} \leq \mathrm{A}(P_jP_{j+1}P_{j+2})$$

6. (OBM 2010) Qual é a maior sombra que um cubo sólido de aresta 1 pode ter, no sol a pino?

   Observação: Entende-se “maior sombra de uma figura no sol a pino” como a maior área possível para a projeção ortogonal da figura sobre um plano.

7. (OBM 2005) Dizemos que um quadrado está contido em um cubo quando todos os seus pontos estão nas faces ou no interior do cubo. Determine o maior $l > 0$ tal que existe um quadrado de lado l contido num cubo de aresta 1.

8. (OBM 2000) Seja C um cubo de madeira. Para cada um dos 28 pares de vértices de C cortamos o cubo C pelo plano mediador dos dois vértices do par. Em quantos pedaços fica dividido o cubo?

   Nota: Dados dois pontos A e B no espaço, o plano mediador de A e B é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a A e B são iguais. Em outras palavras: é o plano perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto médio de AB.