Simulado 1

Discutiremos em 08 de Fevereiro de 2021 *Tempo: 4 horas e 30 minutos*

1. **(Kürschák 2002, 2)** A sequência de Fibonacci é definida por $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, para $k \in \mathbb{N}$.

   Suponha que a, b e n são inteiros positivos tais que $\frac{a}{b}$ está entre as duas frações $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ e $\frac{F_{n+1}}{F_n}$. Prove que $b \geq F_{n+1}$.

2. **(Kürschák 2004, 1)** Seja ABC um triângulo com circuncírculo ω. Seja Ω o círculo que tangencia externamente ω, e também tangencia as semirretas AB e AC em P e Q, respectivamente. Prove que o exincentro relativo a A do triângulo ABC é o ponto médio de PQ.

   Observação. O exincentro relativo a A do triângulo ABC é o encontro da bissetriz interna de A com as bissetrizes externas de B e C.

3. **(Kürschák 2007, 3)** Prove que qualquer conjunto finito H de pontos do plano com coordenadas inteiras possui um subconjunto K com as seguintes propriedades:

   - qualquer reta vertical ou horizontal intersecta K em no máximo 2 pontos,
   - qualquer ponto de $H \setminus K$ está contido em algum segmento com extremos em K.