Problema 1 [Polynomials / R. Miyazaki] Folha 1

(USAMO) Suponha que $q_1, q_2, \cdots$ é uma sequência infinita de inteiros satisfazendo:

(i) $m-n \mid q_m - q_n$, $\forall m > n \geq 0$.

(ii) $\exists$ polinômio P tal que $|q_n| < P(n)$, $\forall n$.

Solução: Seja $d = \deg P$.

Seja Q o polinômio de grau no máximo d tal que $Q(i) = q_i$, $i = 0, 1, \ldots, d$.

Esse polinômio existe pelo Interpolador de Lagrange. Como consequência, $Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Seja K inteiro tal que $K \cdot Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Seja $T = K \cdot Q$.

Termos que $m - n \mid T(m) - T(n)$

e

$m - n \mid K \cdot q_m - K \cdot q_n$

• Fixando m e variando n em $\{0, 1, 2, \cdots, d\}$:

$K \cdot q_m \equiv K \cdot q_n = T(n) \equiv T(m) \pmod{m-n}$. isto é:

$$\left.\begin{aligned} K \cdot q_m &\equiv T(m) \pmod{m} \\ \text{"} &\equiv \text{"} \pmod{m-1} \\ \text{"} &\equiv \text{"} \pmod{m-2} \\ &\vdots \\ K \cdot q_m &\equiv T(m) \pmod{m-d} \end{aligned}\right\} K \cdot q_m \equiv T(m) \; \big(\bmod \; \operatorname{mmc}(m, m-1, \ldots, m-d)\big)$$

Mas, podermos estimar que $\operatorname{mdc}(m, m-1, \cdots, m-d) > c \cdot m^{d+1}$, $m > d+1$.

Prova: Base: $d = 1$. $\operatorname{mmc}(m, m-1) = m^2 - m > \frac{1}{2} m^2$

Hipótese $\operatorname{mmc}(m, m-1, \cdots, m-d+1) > c \cdot m^d$.

$$\operatorname{mmc}(m, m-1, \cdots, m-d) = \operatorname{mmc}(\operatorname{mmc}(m, \cdots, m-d+1), m-d) = \frac{\operatorname{mmc}(m, \cdots, m-d+1) \cdot (m-d)}{\operatorname{mdc}(\operatorname{mmc}(m, \cdots, m-d+1), m-d)}$$

$$> \frac{c \cdot m^d (m-d)}{d!} > c' \cdot m^{d+1}$$

$\square$

Problema 1 [Polynomials / R. Miyazaki] Folha 2

Portanto, existe M t.q., $\forall m \geq M$, $\underbrace{\text{mdc}(m, \ldots, m-d)}_{K(m)} > c \cdot m^{\frac{d+1}{e}} > 2K \cdot P(m)$.
$> T(m)$

Como $K \cdot q_m \in (-K(m), K(m))$ e $T(m) \in (-K(m), K(m)) \Rightarrow$

$\Rightarrow T(m) = Kq_m$, $\forall m \geq M$. $\Rightarrow Q(m) = q_m$, $\forall m \geq M$.

Basta mostrar para $d+1 \leq m \leq M-1$.

Pegando $m \geq M$:

$T(n) \equiv Kq_n \pmod{m}$; $\forall m \geq M \Rightarrow$

$\Rightarrow T(n) = K \cdot q_n \Rightarrow Q(n) = q_n$, $\forall n$.

$\square$