USAMO

	1	2	3	4	5	6
98						
99						
00						
01						
02						
03						
04						
05						
06						
07						
08						
09						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						

Dia I

Problema 1 Let a, b, c be positive real numbers such that $a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$. Prove that

$$2\left(ab+bc+ca\right)+4\min\left(a^2,b^2,c^2\right)\geq a^2+b^2+c^2.$$

Problema 2 Find all functions $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ such that

$$f\left(x+\frac{1}{y}\right)+f\left(y+\frac{1}{z}\right)+f\left(z+\frac{1}{x}\right)=1$$

for all $x, y, z>0$ with $xyz=1$.

Problema 3 For a given integer $n\geq 2$, let $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ be the set of positive integers less than n that are relatively prime to n. Prove that if every prime that divides m also divides n, then $a_1^k+a_2^k+\cdots+a_m^k$ is divisible by m for every positive integer k.

Dia II

Problema 4 Let p be a prime, and let $a_1, \ldots, a_p$ be integers. Show that there exists an integer k such that the numbers

$$a_1+k, a_2+2k, \ldots, a_p+pk$$

produce at least $\frac{1}{2}p$ distinct remainders upon division by p.

Problema 5 In convex cyclic quadrilateral $ABCD$, we know that lines AC and BD intersect at E, lines AB and CD intersect at F, and lines BC and DA intersect at G. Suppose that the circumcircle of $\triangle ABE$ intersects line CB at B and P, and the circumcircle of $\triangle ADE$ intersects line CD at D and Q, where C, B, P, G and C, Q, D, F are collinear in that order. Prove that if lines FP and GQ intersect at M, then $\angle PAC=90°$.

Problema 6 Let a_n be the number of permutations $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ of the numbers $(1, 2, \ldots, n)$ such that the n ratios $\frac{x_k}{k}$ for $1\leq k\leq n$ are all distinct. Prove that a_n is odd for all $n\geq 1$.

Dia I

Problema 1 Prove that there are infinitely many distinct pairs (a, b) of relatively prime integers $a > 1$ and $b > 1$ such that $a^b + b^a$ is divisible by $a + b$.

Problema 2 Let $m_1, m_2, \ldots, m_n$ be a collection of n positive integers, not necessarily distinct. For any sequence of integers $A = (a_1, \ldots, a_n)$ and any permutation $w = w_1, \ldots, w_n$ of $m_1, \ldots, m_n$, define an A-*inversion* of w to be a pair of entries w_i, w_j with $i < j$ for which one of the following conditions holds:

- $a_i \geq w_i > w_j$
- $w_j > a_i \geq w_i$, or
- $w_i > w_j > a_i$.

Show that, for any two sequences of integers $A = (a_1, \ldots, a_n)$ and $B = (b_1, \ldots, b_n)$, and for any positive integer k, the number of permutations of $m_1, \ldots, m_n$ having exactly k A-inversions is equal to the number of permutations of $m_1, \ldots, m_n$ having exactly k B-inversions.

Problema 3 Let ABC be a scalene triangle with circumcircle Ω and incenter I. Ray AI meets $\overline{BC}$ at D and meets Ω again at M; the circle with diameter $\overline{DM}$ cuts Ω again at K. Lines MK and BC meet at S, and N is the midpoint of $\overline{IS}$. The circumcircles of $\triangle KID$ and $\triangle MAN$ intersect at points L_1 and L_2. Prove that Ω passes through the midpoint of either $\overline{IL_1}$ or $\overline{IL_2}$.

Dia II

Problema 4 Let $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ be $2n$ distinct points on the unit circle $x^2 + y^2 = 1$, other than $(1, 0)$. Each point is colored either red or blue, with exactly n red points and n blue points. Let $R_1, R_2, \ldots, R_n$ be any ordering of the red points. Let B_1 be the nearest blue point to R_1 traveling counterclockwise around the circle starting from R_1. Then let B_2 be the nearest of the remaining blue points to R_2 travelling counterclockwise around the circle from R_2, and so on, until we have labeled all of the blue points $B_1, \ldots, B_n$. Show that the number of counterclockwise arcs of the form $R_i \to B_i$ that contain the point $(1, 0)$ is independent of the way we chose the ordering $R_1, \ldots, R_n$ of the red points.

Problema 5 Let $\mathbb{Z}$ denote the set of all integers. Find all real numbers $c > 0$ such that there exists a labeling of the lattice points $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ with positive integers for which:

- only finitely many distinct labels occur, and
- for each label i, the distance between any two points labeled i is at least c^i.

Problema 6 Find the minimum possible value of

$$\frac{a}{b^3+4} + \frac{b}{c^3+4} + \frac{c}{d^3+4} + \frac{d}{a^3+4}$$

given that a, b, c, d are nonnegative real numbers such that $a + b + c + d = 4$.

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2016/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2016/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2016/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2016/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2016/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2016/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2015/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2015/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2015/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2015/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2015/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2015/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2014/1` não encontrado!

Problema 2 Let $\mathbb{Z}$ be the set of integers. Find all functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that

$$xf(2f(y) - x) + y^2 f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y))$$

for all $x, y \in \mathbb{Z}$ with $x \neq 0$.

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2014/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Let k be a positive integer. Two players A and B play a game on an infinite grid of regular hexagons. Initially all the grid cells are empty. Then the players alternately take turns with A moving first. In his move, A may choose two adjacent hexagons in the grid which are empty and place a counter in both of them. In his move, B may choose any counter on the board and remove it. If at any time there are k consecutive grid cells in a line all of which contain a counter, A wins. Find the minimum value of k for which A cannot win in a finite number of moves, or prove that no such minimum value exists.

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2014/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2014/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2013/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2013/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2013/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2013/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2013/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2013/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2012/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2012/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2012/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2012/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2012/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2012/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2011/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2011/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2011/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2011/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2011/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2011/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2010/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2010/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2010/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2010/4` não encontrado!

Problema 5 Let $q = \frac{3p-5}{2}$ where p is an odd prime, and let

$$S_q = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{q(q+1)(q+2)}.$$

Prove that if $\frac{1}{p} - 2S_q = \frac{m}{n}$ for integers m and n, then $m - n$ is divisible by p.

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2010/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2009/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2009/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2009/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2009/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2009/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2009/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Prove that for each positive integer n, there are pairwise relatively prime integers $k_0, k_1, \ldots, k_n$, all strictly greater than 1, such that $k_0 k_1 \ldots k_n - 1$ is the product of two consecutive integers.

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2008/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2008/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2008/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2008/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2008/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2007/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2007/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2007/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2007/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2007/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2007/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2006/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2006/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2006/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2006/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2006/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2006/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2005/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2005/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2005/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2005/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2005/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2005/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2004/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2004/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2004/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2004/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2004/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2004/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Prove that for every positive integer n there exists an n-digit number divisible by 5^n all of whose digits are odd.

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2003/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2003/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Let ABC be a triangle. A circle passing through A and B intersects segments AC and BC at D and E, respectively. Lines AB and DE intersect at F, while lines BD and CF intersect at M. Prove that $MF = MC$ if and only if $MB \cdot MD = MC^2$.

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2003/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2003/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2002/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2002/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2002/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2002/4` não encontrado!

Problema 5 Let a, b be integers greater than 2. Prove that there exists a positive integer k and a finite sequence $n_1, n_2, \ldots, n_k$ of positive integers such that $n_1 = a$, $n_k = b$, and $n_i n_{i+1}$ is divisible by $n_i + n_{i+1}$ for each i $(1 \le i < k)$.

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2002/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2001/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2001/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2001/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2001/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2001/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2001/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/2000/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/2000/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/2000/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/2000/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/2000/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/2000/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/1999/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/1999/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/1999/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/1999/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/1999/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/1999/6` não encontrado!

Dia I

Problema 1 Problema `math/usa/mo/1998/1` não encontrado!

Problema 2 Problema `math/usa/mo/1998/2` não encontrado!

Problema 3 Problema `math/usa/mo/1998/3` não encontrado!

Dia II

Problema 4 Problema `math/usa/mo/1998/4` não encontrado!

Problema 5 Problema `math/usa/mo/1998/5` não encontrado!

Problema 6 Problema `math/usa/mo/1998/6` não encontrado!