Problemas Húngaros – Kürschák Competition

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1 (Kürschák 2017, 1)
Seja ABC um triângulo. A', B' e C' são escolhidos nos segmentos BC, CA e AB, de maneira independente e seguindo numa distribuição uniforme. Para um ponto Z no plano, seja $p(Z)$ a probabilidade de Z estar contido no interior do triângulo formado pelas retas AA', BB' e CC'. Para qual ponto Z no interior do triângulo ABC o valor de $p(Z)$ é máximo?

Problema 2 (Kürschák 2017, 2)
Existem polinômios $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p^3(x) - q^2(x)$ é linear, mas não constante?

Problema 3 (Kürschák 2016, 2)
Prove que, para qualquer conjunto finito A de inteiros positivos, existe um subconjunto B de A que satisfaz as seguintes condições:

(i) se $b_1, b_2 \in B$ são distintos, então nem b_1 e b_2 nem $b_1 + 1$ e $b_2 + 1$ são mutiplos um do outro;
(ii) para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que a divide b ou $b + 1$ divide $a + 1$.

Problema 4 (Kürschák 2015, 2)
Seja ABC um triângulo e seja D um ponto no segmento AB. Seja I um ponto no interior do triângulo $\triangle ABC$ sobre a bissetriz de $\angle ACB$. Sejam P, Q as segundas intersecções das retas AI, CI com o circuncírculo de ACD, respectivamente. Analogamente, sejam R, S as segundas intersecções das retas BI, CI com a circuncírculo de BCD, respectively. Mostre que, se $P \neq Q$ e $R \neq S$, então as retas AB, PQ e RS são concorrentes ou paralelas.

Problema 5 (Kürschák 2016, 3)
Se $p, q \in \mathbb{R}[x]$ satisfazem $p(p(x)) = q(x)^2$, é verdade que $p(x) = r(x)^2$ para algum $r \in \mathbb{R}[x]$?

Problema 6 (Kürschák 2014, 3)
Seja K um polígono convexo, e seja X um ponto no plano de K. Mostre que existe uma sequência finita de reflexões em relação aos lados de K, tal que K contêm a imagem de X após essas reflexões.