

Sabemos que

$$AN = AS = AK$$

$$\Rightarrow \angle AKN = \angle KNA$$

(ângulos orientados)

Analogamente:

$$\angle BLK = \angle LKB$$

$$\angle CML = \angle MLC$$

$$\angle DNM = \angle NMD$$

Lemma:

$$KLMN \text{ é cíclico} \Leftrightarrow \angle ASB + \angle CSD = \angle BSC + \angle DSA.$$

Prova: (Ângulos orientados)

$$KLMN \text{ é cíclico} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \angle KLM + \angle MNK \\ \parallel \\ \angle LMN + \angle NKL \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (\cancel{\angle KLB} + \angle BLC + \cancel{\angle CLM}) + (\cancel{\angle MND} + \angle DNA + \cancel{\angle ANK}) \\ \parallel \\ (\cancel{\angle LMC} + \angle CMD + \cancel{\angle DMN}) + (\cancel{\angle NKA} + \angle AKB + \cancel{\angle BKL}) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \angle BLC + \angle DNA = \angle CMD + \angle AKB$$

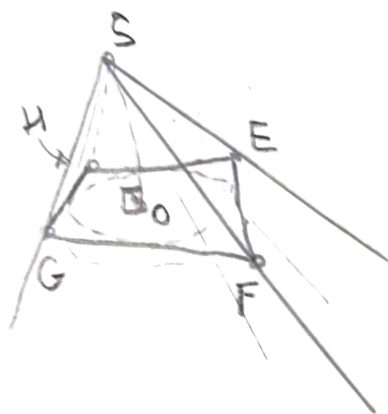
$$\Leftrightarrow \angle BSC + \angle DSA = \angle CSD + \angle ASB.$$

□

Sejam X, Y, Z, W os pontos de tangência da esfera com os planos SAB, SBC, SCD, SDA .



Sabemos que X, Y, Z, W estão num círculo. Seja π o plano desse círculo.



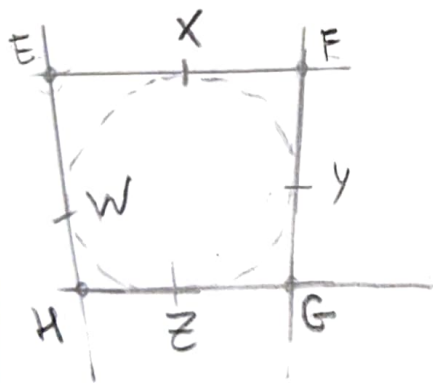
$$\text{Sejam } E = \text{tg}(X) \cap \text{tg}(W)$$

$$F = \text{tg}(Y) \cap \text{tg}(X)$$

$$G = \text{tg}(Z) \cap \text{tg}(Y)$$

$$H = \text{tg}(W) \cap \text{tg}(Z)$$

Como $SX = SY = SZ = SW \Rightarrow$
 $\Rightarrow SO \perp \pi$.



Observe que

$$\angle GFS = \angle EFS,$$

pois, as retas GF e EF são simétricas em relação a reta OF , no plano π e, consequentemente, as retas GF e EF são simétricas em relação ao plano SOF .

Analogamente,

$$\angle HGS = \angle FGS$$

$$\angle EHS = \angle GHS$$

$$\angle FES = \angle HES.$$

Logo,

$$\angle ASB + \angle CSD =$$

$$= \angle ESF + \angle GSH =$$

$$= (180^\circ - \angle EFS - \angle FES) + (180^\circ - \angle GHS - \angle HGS)$$

$$= 360^\circ - \angle EFS - \angle FES - \angle GHS - \angle HGS$$

$$= 360^\circ - \angle GFS - \angle HES - \angle EHS - \angle FGS$$

$$= (180^\circ - \angle GFS - \angle FGS) + (180^\circ - \angle HES - \angle EHS)$$

$$= \angle FSG + \angle HSE$$

$$= \angle BSC + \angle DSA.$$

Logo, pelo Lema,

KLMN é cíclico.

