

## Probabilidade

### Andrey

## 1 Não-transitividade

**Exemplo 1.** Dados d6 não transitivos

**Exemplo 2.** Sequência de moedas

## 2 Martingales

**Teorema 1.** (Teorema Fundamental das Apostas) Seja  $J$  um jogo justo. Qualquer estratégia de iterar  $J$  que:

- termina em tempo limitado ou;
- termina com dinheiro limitado

é justa.

**Problema 1.** Um sorteador de letras a cada minuto, sorteia uma letra A-Z. Qual o tempo médio até aparecer a palavra ABRACADABRA?

*Solução.* Vamos inventar alguns jogos:

$J(X)$  : aposta  $N$  moedas para jogar. Ganha  $26N$  moedas, se cair a letra  $X$ .

$J^*$  : Aposta 1 moeda para jogar. Aposta 1 jogando em  $J(A)$ . Se ganhar, aposta tudo em  $J(B)$ . Se ganhar, aposta tudo em  $J(R)$ . E assim por diante. Se perder em algum momento, sai do jogo.

$J$  é justo, pois o valor esperado de dinheiro é 0.  $J^*$  é um jogo justo, pois é uma iteração de  $J$  e termina com dinheiro limitado.

Vamos jogar diversos jogos  $J^*$  simultaneamente, começando a jogar um novo jogo  $J^*$  a cada minuto e vamos parar imediatamente de jogar todos os jogos quando ganharmos o prêmio final em algum dos jogos  $J$

Como é justo, o dinheiro esperado é 0. Quando finalmente ganharmos o jogo, três de nossos jogos estarão rodando são: ABRACADABRA ABRA e A.

Portanto, ganharemos  $26^{11} + 26^4 + 26$  no fim do jogo. Porém, perdemos  $T$  moedas, onde  $T$  é o número de minutos que passaram. Como o dinheiro esperado é  $0 = 26^{11} + 26^4 + 26 - T$ , temos que  $T = 26^{11} + 26^4 + 26$ .

## 3 Método Probabilístico

**Teorema 2.**  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ .

**Problema 2.** Remova  $n - 1$  arestar de um grafo bipartido  $K_{n,n}$ , existe emparelhamento perfeito.

*Solução.* Os vértices  $1, 2, \dots, n$  de um lado e  $n + 1, n + 2, \dots, 2n$  do outro. Considere  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$  bijetora escolhida de forma uniformemente aleatória.

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}(i \sim \pi(i))) = \mathbb{P}(i \sim \pi(i)) = \frac{n^2 - n + 1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\mathbb{E}(|i : i \sim \pi(i)|) = \mathbb{E}(\sum(\mathbb{1}(i \sim \pi(i)))) = n - 1 + \frac{1}{n} > n - 1.$$

Logo, existe um  $\pi$  tal que  $|i : i \sim \pi(i)| = n$ , isto é,  $i \sim \pi(i)$ , para todo  $i$ : um emparelhamento perfeito.

**Teorema 3.** (Lema Local de Lovász) Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_k$  eventos tal que cada evento ocorre com probabilidade no máximo  $p$  e tal que cada evento é independente de todos os outros, exceto por no máximo  $d$ . Se  $epd \leq 1$ , então existe uma probabilidade não-nula de que nenhum desses eventos ocorra.

**Problema 3.** Prove que existe grafo  $G$  livre de triângulos tal que  $\chi(G) \geq 2019$ .