

(Barro IMO 1998, N2) [P2, SIMU 17/10/19]

$$a \lfloor bn \rfloor = b \lfloor an \rfloor \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^*$$

$\Leftrightarrow$

$$a(bn - \{bn\}) = b(an - \{an\})$$

$(\Leftrightarrow)$

$$a\{bn\} = b\{an\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{a}{b} = \frac{\{an\}}{\{bn\}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^*$$

• Se  $ab = 0$ , claramente é verdade.

• Se  $a \leq b$ , claramente é verdade.

Suponha  $a, b \neq 0$  e  $a > b$ .

$$\Rightarrow \frac{a}{b} > 1.$$

→ Se  $b$  é irracional:

$\Rightarrow \{\{bn\}, n \in \mathbb{Z}_+^*\}$  é denso

$\Rightarrow \exists n_0, n_1, n_2, \dots \uparrow$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \{bn_i\} = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\{an_i\}}{\{bn_i\}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\lim_{i \rightarrow \infty} \{an_i\}}{\lim_{i \rightarrow \infty} \{bn_i\}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \{an_i\} \leq 1$$

$$\Rightarrow a \leq b \quad \text{Abs!}$$

→ Se  $b$  é racional:

$$b = c/d, \quad (c, d) = 1.$$

$n \rightarrow d$ :

$$a \underbrace{\{bd\}}_0 = b\{ad\}$$

$$\Rightarrow \{ad\} = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{c}{d} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}.$$

$$a = e/f, \quad (e, f) = 1. \quad (\text{Note que } f|d)$$

$n \rightarrow f$

$$a\{bf\} = b\{af\}$$

$$\Rightarrow \{bf\} = 0$$

$$\Rightarrow \{c \cdot \frac{d}{f}\} = 0$$

$$\Rightarrow d|f \Rightarrow \underline{d=f}$$

$$\Rightarrow b = c/d, \quad a = e/d.$$

• Se  $d \neq 1$ :

$$a\{b\} = b\{a\} \text{ e } a\{b(d-1)\} = b\{a(d-1)\}$$

$$\Rightarrow a(\{b\} + \{b(d-1)\}) = b(\{a\} + \{a(d-1)\})$$

$$\Rightarrow a(bd-1) = b(ad-1) \Rightarrow a=b.$$

• Se  $d=1$ , sempre funciona:

Logo: Soluções:

$$(x, 0), (0, x), (x, x), (n, m), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$