Miscelânea de Álgebra

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

A proof is something that satisfies the audience.
— Rob Morris, 2019

O polinômio $x^3 - 3x + 1$.

Problema 1 ($x^3 - 3x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$)
Determine as raízes reais do polinômio $x^3 - 3x + 1$.

Problema 2 (IMC 2020, 6)
Ache todos os primos p tais que existe um único $a \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ para o qual $a^3 - 3a + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Em vários problemas, é mais útil saber que um número α é raiz de um certo polinômio, em comparação com saber escrever α explicitamente usando operações, funções trigonométricas, entre outras coisas — principalmente quando o polinômio é bonitinho. Veja mais sobre essa ideia no Matematicamente Ao Vivo #32, e nos problemas da secção "Seja α uma raiz de um certo polinômio".

Um problema interessante em que o polinômio $x^3 - 3x + 1$ aparece é o OBM 2017, 6. Saber os problemas acima ajuda a resolvê-lo, mas também é útil saber sobre Extensão de Corpos. Recomendo o material do Carlos Shine sobre Extensão de Corpos da Semana Olímpica de 2018.

Problema 3 (OBM 2017, 6)
Seja a inteiro positivo e p um divisor primo de $a^3 - 3a + 1$, com $p \neq 3$. Prove que p é da forma $9k + 1$ ou $9k - 1$, sendo k um inteiro.

Seja α uma raiz de um certo polinômio.

Problema 4 (APMO 2006, 2)
Prove que todo inteiro positivo pode ser escrito como soma de um número finito de potências inteiras distintas da razão áurea $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aqui, uma potência inteira de ϕ é um número da forma ϕ^i, onde i é um inteiro (não necessariamente positivo).

Polinômio traiçoeiro.

Problema 5 ($P(k) = 2^k$, $P(n+1) = ?$)
Seja $P(x)$ um polinômio de grau n com coeficientes reais tal que $P(k) = 2^k$, para $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Determine $P(n+1)$.

Problema 6 ($P(k) = F_k$, $P(2n+3) = ?$)
Seja $P(x)$ um polinômio de grau n com coeficientes reais tal que $P(k) = F_k$, para $k \in \{n+2, n+3, \ldots, 2n+2\}$, em que F_k denota o k-ésimo número de Fibonacci[a]. Determine $P(2n+3)$.

[a] $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ para $k \geq 2$.

Determine todas as funções.

Problema 7 (OMERJ 2017, N3, 6)
Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y)$$

para todos x e y reais.

Problema 8 (IMO 2009, 5)
Determine todas as funções $f : \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{Z}_+^*$ tais que existe um triângulo não degenerado[a] cujos lados medem

$$a, \quad f(b) \quad \text{e} \quad f(b + f(a) - 1)$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \dots\}$.

[a]Um triângulo não degenerado é um triângulo cujos vértices não são colineares.

Problemas para os entediados.

Problema 9 (Canada Winter Camp 2020, Buffet, A1)
Prove que existe um polinômio P tal que, para qualquer inteiro positivo n,

$$\left\lfloor 2\sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor 2\sqrt{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor 2\sqrt{n^2} \right\rfloor = P(n)$$

Problema 10 (IMO 2009, 3)
Suponha que $s_1, s_2, s_3, \dots$ é uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos tais que as subsequências

$$s_{s_1},\ s_{s_2},\ s_{s_3},\ \dots \qquad \text{e} \qquad s_{s_1+1},\ s_{s_2+1},\ s_{s_3+1},\ \dots$$

são ambas progressões aritméticas. Prove que a sequência $s_1, s_2, s_3, \dots$ é uma progressão aritmética.

Problema 11 (Canada Winter Camp 2020, Buffet, A2)
Ache todas as funções $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(-f(x) - f(y)) = 1 - x - y,$$

para quaisquer x, y inteiros.

Problema 12 (Canada Winter Camp 2020, Buffet, A3)
Seja $P_0 = x^3 - 4x$. Uma sequência de polinômios é definida pela recorrência

$$P_{n+1} = P_n(1 + x)P_n(1 - x) - 1,$$

para inteiros $n \geq 0$. Prove que $x^{2016} \mid P_{2016}(x)$.

Problema 13 (Canada Winter Camp 2020, Buffet, A4)
Considere uma sequência de reais positivos $a_1, a_2, \dots$, tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,

$$a_{mn} = a_m a_n, \qquad a_{m+n} \leq 2020(a_m + a_n),$$

para todos m, n inteiros positivos. Prove que $a_n = n$ para todo n inteiro positivo.