XXXII Olimpíada de Matemática do Pacífico-Asiático

APMO

9 de Março de 2020

Duração da prova: 4 horas | *Cada problema vale 7 pontos*

*** *Informe nome completo, data de nascimento e escola.***

* *Essa prova também servirá para a seleção da equipe do Brasil na IMO.*
* *Os problemas da prova devem ser mantidos CONFIDENCIAIS até eles serem divulgados no website oficial da APMO (`http://apmo-official.org`). Não divulgue ou discuta os problemas pela Internet até essa data. Não é permitido o uso de calculadoras.*
*** *A primeira página da sua solução de cada um do(s) problema(s) de geometria dessa prova deve ser somente a figura do problema feita com régua e compasso. Caso isso não aconteça, sua pontuação máxima no problema na seletiva será 6 pontos.***
*** *Somente escreva em um lado de cada folha que utilizar.***
* *Essa prova tem cinco problemas.*

*** *Não se esqueça: Informe nome completo, data de nascimento e escola.***

Problema 1. Seja Γ o circuncírculo do $\triangle ABC$. Seja D um ponto sobre o lado BC. A reta tangente a Γ em A intersecta a reta paralela a BA que passa por D em E. O segmento CE intersecta Γ novamente em F. Suponha que B, D, E e F são concíclicos. Prove que AC, BF e DE são concorrentes.

Problema 2. Mostre que $r = 2$ é o maior número real r que satisfaz a seguinte condição:
Se uma sequência $a_1, a_2, \ldots$ de inteiros positivos satisfaz as desigualdades

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + r a_{n+1}}$$

para todo inteiro positivo n, então existe um inteiro positivo M tal que $a_{n+2} = a_n$ para todo $n \geq M$.

Problema 3. Determine todos os inteiros positivos k para os quais existe um inteiro positivo m e um conjunto S de inteiros positivos tais que todo inteiro $n > m$ pode ser escrito como uma soma de elementos distintos de S em exatamente k maneiras.

Problema 4. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto de todos os inteiros. Encontre todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes inteiros que satisfazem à seguinte propriedade:
Para toda sequência infinita $a_1, a_2, \ldots$ de inteiros em que cada inteiro de $\mathbb{Z}$ aparece exatamente uma vez, existem índices $i < j$ e um inteiro k tais que $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j = P(k)$.

Problema 5. Seja $n \geq 3$ um inteiro fixado. O número 1 é escrito n vezes em uma lousa. Abaixo da lousa há dois baldes inicialmente vazios. Um movimento consiste em apagar dois números a e b, trocá-los pelos números 1 e $a + b$, adicionar uma pedra no primeiro balde e $\mathrm{mdc}(a, b)$ pedras no segundo balde. Após uma quantidade finita de movimentos, há s pedras no primeiro balde e t pedras no segundo balde, em que s e t são inteiros positivos. Encontre todos os possíveis valores da razão $\dfrac{t}{s}$.

*** *Não se esqueça: Informe nome completo, data de nascimento e escola.***