Partições

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Algumas ideias

- *Casos pequenos.*
- *Provar quantidades iguais:* criar uma bijeção pode ser útil.
- *Pense recursivamente:* para representar x como soma de elementos de A, olhe para os números $x - a$, $a \in A$.
- *Casos grandes:* pensar assintoticamente pode ser útil.
- *Provar existência de representação:* casa dos pombos ou algoritmo guloso podem ser uma solução rápida.
- *Quantidade de parcelas:* usar contagem pode ser útil para fazer estimativas.
- *Funções geratrizes* podem ser úteis.
- *Teoria aditiva:* ao estudar $A + A$, pode ser útil estudar também $A - A$.

Definição

Definição 0.1. Uma *partição* de um inteiro positivo n é uma forma de decomposição de n como soma de interos positivos. Duas somas são consideradas iguais se e somente se possuem as mesmas parcelas, mesmo que em ordem diferente.

Rigorosamente uma partição de um inteiro positivo n é uma sequência de inteiros positivos $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ tais que

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m \text{ e } x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n.$$

Chamamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de *partes* desta partição.

1 Exercícios Elementares

Problema 1.1. Seja $p(n)$ o número de partições de n. Prove que o número de partições de n com todas as partes maiores que 1 é $p(n) - p(n-1)$.

Solução. O número de partições de n com *alguma parte* igual a 1 é igual ao número de partições de $n - 1$, pois existe uma bijeção natural entre esses dois conjuntos: tiramos uma parte com valor 1 de uma partição do primeiro conjunto e obtemos uma partição do segundo conjunto. Por tanto, o número de partições de n sem 1 é

$$p(n) - p(n-1).$$

Problema 1.2. Mostre que o número de partições de um inteiro n em partes tal que a maior parte tem tamanho exatamente r é igual ao número de partições em exatamente r partes.

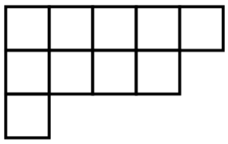
Solução (Recorrência). $q(n, r)$: número de partições de n com r partes. $k(n, r)$: número de partições de n com maior parte r.

Vamos fazer indução em n.

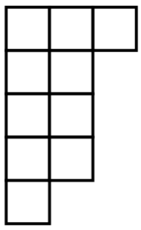
$$q(0,0) = k(0,0) = 1; q(n,0) = k(n,0) = 0; q(0,r) = k(0,r) = 0; \text{ para } n, r > 0.$$

$$q(n,r) = \sum_{i=0}^{r} q(n-r, i)$$
$$k(n,r) = \sum_{i=0}^{r} k(n-r, i)$$

Solução (Bijeção). Para este problema, usaremos o *Young tableau* (ou diagrama de Young), que é um jeito de representar partições visualmente. Por exemplo, a partição $(5, 4, 1)$ é representada assim:



Chamaremos de partição *conjugada* a partição que obtemos ao refletir o Young tableau. Por exemplo, a partição conjugada de $(5, 4, 1)$ é $(3, 2, 2, 2, 1)$, representada por:



Desse modo, podemos ver que há uma bijeção entre o conjunto de partições de n com maior parte exatamente r e o conjunto de partições de n em r partes, definida por essa conjugação.

Problema 1.4. Prove que o número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.

Solução (Funções geratrizes). Seja $f(x)$ a função geratriz que gera o número de partições de n em partes distintas. Seja $g(x)$ a função geratriz que gera o número de partições de n em partes ímpares.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i) \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{2i})}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)} \\
&= \frac{\prod_{i \text{ par}}(1-x^i)}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)} \\
&= \prod_{i \text{ ímpar}} \frac{1}{1-x^i} \\
g(x) &= \prod_{k \text{ ímpar}} (1+x^k+(x^k)^2+(x^k)^3+\cdots) \\
&= \prod_{k \text{ ímpar}} \frac{1}{1-x^k},
\end{aligned}$$

que prova que $f(x)=g(x)$.

Outro jeito é mostrar que $\frac{f(x)}{g(x)}=1$, que indica um pouco mais da relação entre essa solução e a solução usando bijeções:

Lema 1.1.

$$\prod_{\alpha=0}^{\infty}(1+x^{2^\alpha}) = \sum_{t=0}^{\infty} x^t = \frac{1}{1-x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)\cdot \prod_{k \text{ ímpar}}(1-x^k) \\
&= \prod_{k \text{ ímpar}} \prod_{\alpha=0}^{\infty}(1+x^{k2^\alpha})\cdot \prod_{k \text{ ímpar}}(1-x^k) \\
&= \prod_{k \text{ ímpar}} \left(\prod_{\alpha=0}^{\infty}(1+(x^k)^{2^\alpha})\right)(1-x^k) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2 Questões Divertidas

Problema 2.2 (IMO 1997, 6). Para cada inteiro positivo n, definimos $f(n)$ como o número de maneiras de representar n como soma de potências de dois com expoentes não negativos. Representações que diferem somente na ordem das parcelas são consideradas a mesma. Por exemplo, $f(4) = 4$, pois o número 4 pode ser expresso das quatro seguintes maneiras: 4; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$.

Prove que, para qualquer inteiro $n \geq 3$,

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}.$$

Rascunho. Quanto é $f(2k+1)$?

$$f(2k+1) = f(2k).$$

Quanto é $f(2k)$, exatamente?

$$f(2k) = f(k) + f(2(k-1))$$

Somando a expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(2k) &= \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} f(2(k-1)) \\
f(2n) &= \sum_{k=1}^{n} f(k) + f(0) \\
f(2n) &= \sum_{k=0}^{n} f(k)
\end{aligned}$$

Provando a desigualdade superior, temos:

$$\begin{aligned}
f(2^n) &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}} f(k) \\
&\leq (2^{n-1}) f(2^{n-1}) + 1 \\
&< (2^{n-1}) 2^{\frac{(n-1)^2}{2}} \\
&< 2^{\frac{n^2}{2}}
\end{aligned}$$

Tentando provar a desigualdade superior, temos:

$$\begin{aligned}
f(2^n) &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}} f(k) \\
&= \left(\sum_{k=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}} f(k) \right) + \left(\sum_{k=0}^{2^{n-2}} f(k) \right) \\
&= \left(\sum_{k=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}} f(k) \right) + f(2^{n-1}) \\
&\geq 2^{n-2} f(2^{n-2}) + f(2^{n-1}) \\
&> 2^{n-2} 2^{\frac{n^2-4n+4}{4}} + 2^{\frac{n^2-2n+1}{4}} \\
&> 2^{\frac{n^2-4}{4}} + 2^{\frac{n^2-2n+2}{4}},
\end{aligned}$$

que não dá a cota certa.

Referências

[1] Joseph Laurendi. Partitions of integers, January 2005.

[2] George Lucas. Introdução à teoria das partições de inteiros. Semana Olímpica da OBM, January 2020.

[3] David A. Santos. Number theory for mathematical contests, August 2005.

[4] Carlos Shine. Problemas de partições nos inteiros. Treinamento IMO, August 2020.

[5] Yufei Zhao. Combinatorics, week 3. AwesomeMath, August 2007.