Problemas Sortidos de Teoria dos Números

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

- Esse foi o arquivo gerado ao vivo na aula de 11 de Junho de 2020.
- As soluções aqui não são soluções completas, são somente esboços de soluções. É esperado que você argumente um pouco melhor quando for escrever as suas soluções.

Problema 1. Determine todos os primos p tal que $5^p + 4p^4$ é um quadrado perfeito.

$$5^p + (2p^2)^2 = n^2$$
$$5^p = n^2 - (2p^2)^2$$
$$5^p = (n - 2p^2)(n + 2p^2)$$

$$\begin{cases} 5^a = n - 2p^2 \\ 5^b = n + 2p^2 \\ a + b = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2n = 5^a + 5^b \\ 4p^2 = 5^b - 5^a \\ a + b = p \end{cases}$$

Se $a, b > 0$, então $4p^2$ tem fator 5, que implica $p = 5$.
Se $a = 0$ e $p \neq 5$, então:

$$\begin{cases} 2n = 5^p + 1 \\ 4p^2 = 5^p - 1 \end{cases}$$

Olhando a segunda equação $\pmod p$:

$$0 \equiv 4,$$

logo $p = 2$.
Testando $p = 5$ e $p = 2$, vemos que só $p = 5$ funciona.

Problema 2. Seja a um inteiro positivo. Considere a sequência (a_n) com $a_0 = a$ e $a_n = a_{n-1} + 40^{n!}$. Prove que existem infinitos números dessa sequência que são múltiplos de 2009.

$$40^{\phi(2009)} \equiv 1 \pmod{2009}$$

Para todo $n \geq \phi(2009)$, vale que $40^{n!} \equiv 40^{\phi(2009) \cdot k} \equiv 1 \pmod{2009}$.

Problema 3. Ache todos os inteiros k tais que, para todo inteiro n, $4n+1$ e $kn+1$ são coprimos.

Definição 1. (a,b) denota o maior divisor comum entre a e b.

Teorema 1 (Teorema Útil).

$$(a,b) = (a, b+ka)$$

$$\begin{aligned} 1 &= (4n+1, kn+1) \\ &= (4n+1, n(k-4)) \\ &= (4n+1, k-4) \end{aligned}$$

Seja p um primo.

Se $p = 4l+1$, então jogando $n = l$, p não divide $k-4$.

Se $p = 4l+3$, então $3p = 12l+9 = 4(l+2)+1$. Jogando $n = l+2$, temos que p não divide $k-4$.

Logo, o único primo que pode dividir $k-4$ é 2. Em outras palavras, $k-4 = \pm 2^{\alpha}$, para α inteiro não negativo.

Testando $k = 4 \pm 2^{\alpha}$, sempre funciona!

Problema 4. Seja n um inteiro positivo. Prove que se a soma de todos os divisores positivos de n é uma potência de 2, então o número de divisores também é uma potência de 2.

Vamos escrever $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$.
Um divisor arbitrário de n é da forma $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$, com $0 \le \beta_i \le \alpha_i$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.
Logo, a soma dos divisores é

$$s(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \cdot (1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{\alpha_k}).$$

Logo, o número de divisores é

$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1).$$

$$s(k) = 2^x$$

$$(1 + p + p^2 + \cdots p^\alpha) = 2^y$$

$$p^{\alpha+1} - 1 = 2^y(p-1)$$

Seja $\alpha + 1 = 2^j \cdot \ell$, ℓ ímpar.

$$p^{2^j \ell} - 1 = 2^y(p-1)$$

$$(p^{2^{j-1}\ell} + 1)(p^{2^{j-1}\ell} - 1) = 2^y(p-1)$$

$$(p^{2^{j-1}\ell} + 1)(p^{2^{j-2}\ell} + 1)(p^{2^{j-2}\ell} - 1) = 2^y(p-1)$$

$$(p^{2^{j-1}\ell} + 1)(p^{2^{j-2}\ell} + 1) \cdots (p^{\ell} + 1)(p^{\ell} - 1) = 2^y(p-1)$$

$$(p^{2^{j-1}\ell} + 1) \cdot (p^{2^{j-2}\ell} + 1) \cdots (p^{\ell} + 1) \cdot \frac{(p^\ell - 1)}{(p-1)} = 2^y$$

$$\frac{(p^\ell - 1)}{(p-1)} = p^{\ell-1} + \dots + 1 = 2^z$$

$$\ell = 1$$

$$\alpha + 1 = 2^j$$

$$d(n) = 2^h$$

Problema 5. Prove que um inteiro positivo pode ser escrito como soma de pelo menos dois inteiros positivos consecutivos se, e somente se, não é uma potência de dois.

Seja $n = 2^j \ell$, com ℓ ímpar.

$$2^j \ell = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+i), \text{ para algum } n \text{ e } i \text{ inteiros positivos}$$

$$2^{j+1} \ell = (2n+i)(i+1)$$

Ida: Como $2n+i$ e $i+1$ tem paridades diferentes, logo, k não é potência de 2.
Volta: Seja a e b o maior e o menor entre $2^j+1, \ell$. Como $\ell \geq 3$, podemos fazer

$$\begin{cases} a = 2n+i \\ b = i+1 \end{cases}$$

que possui solução pois a e b tem paridades diferentes.

Problema 6. Ache todos os inteiros positivos k tais que existem inteiros positivos m e n satisfazendo

$$k = \frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}.$$

Valores de k encontrados. (Casos Pequenos)

- $k = 3$: $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,6)$
- $k = 4$: $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,6)$

Solução.
Suponha que existam $n_0 \geq n_1$ inteiros tais que a $(m,n) \mapsto (n_0, n_1)$ valida a equação.

$$n_0 n_1 k = n_0^2 + n_0 + n_1^2 + n_1$$
$$0 = n_0^2 - (n_1 k - 1)n_0 + (n_1^2 + n_1)$$

Sejam n_0 e n_2 as raízes do polinômio $P(x) = x^2 - (n_1 k - 1)x + (n_1^2 + n_1)$.
Por soma e produto,

$$\begin{cases} n_0 + n_2 = n_1 k - 1 \\ n_0 \cdot n_2 = n_1(n_1 + 1) \end{cases}$$

Se $n_0 > n_1$, então $n_1 + 1 > n_2$, ou seja, $n_1 \geq n_2$.
Além disso,

$$0 = n_2^2 - (n_1 k - 1)n_2 + (n_1^2 + n_1)$$

Logo, $(m,n) \mapsto (n_1, n_2)$ também valida a equação.
(Note que podemos definir o resto da sequência de forma análoga. Fazendo n_3 em função do par (n_1, n_2), e assim por diante.)

Conclusão: Se $n_0 > n_1$ tal que (n_0, n_1) satisfaz a equação, então $n_1 \geq n_2$ tal que (n_1, n_2) também satisfaz a equação. Em outras palavras, em três termos consecutivos, se o primero é maior que o segundo, então o segundo é maior ou igual que o terceiro.

Isso implica que, enquanto $n_i > n_{i+1}$, $n_{i+1} \geq n_{i+2}$. Isto é, enquanto dois termos consecutivos são diferentes, a sequência não cresce. Como é uma sequência de inteiros positivos, essa sequência não pode decrescer para sempre, temos que $n_j = n_{j+1}$, para algum j. Como $(n_j, n_{j+1}) = (n,n)$ satisfaz a equação, concluímos que

$$k = \frac{2(n+1)}{n},$$

que só admite solução se $n = 1$ ou $n = 2$ e, respectivamente, $k = 4$ ou $k = 3$.

Observação. Se quiser estudar mais sobre essa técnica, procure por *Descida de Fermat* ou *Vieta Jumping* ou *root flipping.*