Combinatória Geométrica

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1 Dados $2n$ pontos no plano, sem três colineares, sendo n vermelhos e n azuis. Prove que existe um pareamento entre os pontos vermelhos e os pontos azuis tal que os segmentos unindo cada par não se intersectam dois a dois.

Problema 2 **(Cone Sul 2001, 4)** Um polígono de área S está contido dentro de um quadrado de lado a. Mostre que existem dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior ou igual a S/a.

Problema 3 **(Ibero 1997, 6)** Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, onde P_1 é o centro do círculo. Para cada $k = 1, \ldots, 1997$, defina x_k como a distância de P_k para o ponto de $\mathcal{P}$ mais próximo de P_k, mas diferente de P_k. Mostre que

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_{1997})^2 \leq 9.$$

Problema 4 **(Ibero 1997)** Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, com P_1 sendo o centro do círculo. Para $k = 1, 2, \ldots, 1997$ seja x_k a distância de P_k ao ponto de $\mathcal{P}$ mais próximo de P_k. Mostre que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leq 9.$$

Problema 5 São desenhadas $n \geq 3$ retas no plano tais que:

(i) Quaisquer duas retas são concorrentes;

(ii) Por todo ponto de interseção de duas retas passa pelo menos mais uma reta.

Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.

Problema 6 Seja C um círculo de raio 16 e A um anel com raio interior 2 e raio exterior 3. Agora, suponha que um conjunto S de 650 pontos são selecionados no interior de C. Prove que podemos colocar o anel A no plano de modo que ele cubra pelo menos 10 pontos de S.

Problema 7 **(OBM 2010, 5)** Determine todos os valores de n para os quais existe um conjunto S de n pontos, sem que haja três deles colineares, com a seguinte propriedade: é possível pintar todos os pontos de S de modo que todos os ângulos determinados por três pontos de S, todos da mesma cor ou de três cores diferentes, não sejam obtusos. A quantidade de cores disponíveis é ilimitada.

Problema 8 **(Banco IMO 1989)** Temos um conjunto finito de segmentos no plano, de medida total 1. Prove que existe uma reta ℓ tal que a soma das medidas das projeções destes segmentos a reta ℓ é menor que $2/\pi$.

Problema 9 **(OBM 2018, 6)** Considere $4n$ pontos no plano, sem três colineares. Utilizando esses pontos como vértices, podemos formar $\binom{4n}{3}$ triângulos. Mostre que existe um ponto X do plano que pertence ao interior de pelo menos $2n^3$ desses triângulos.

Problema 10 Prove que existe um conjunto S de 3^{1000} pontos no plano tal que, para cada ponto P de S, existem pelo menos 2000 pontos em S cuja distância para P é exatamente uma unidade.

Problema 11 **(Turquia)** Mostre que o plano não pode ser coberto por um número finito de parábolas.

Problema 12 **(Ibero 2002)** Seja S um conjunto de nove pontos, sem três pontos colineares. Se P é um ponto de S, mostre que a quantidade de triângulos cujos vértices estão em $S - P$ e P está em seu inteiror é par.

Problema 13 No interior de um quadrado são escolhidos 1000 pontos. Estes pontos, juntamente com os 4 vértices do quadrado, formam um conjunto P onde não há três pontos colineares. Alguns destes pontos são ligados por segmentos de modo a particionar o quadrado em vários triângulos. Não há polígonos com mais de três lados nessa partição e todo ponto é vértice de ao menos um triângulo. Ache a quantidade de triângulos da partição.

Problema 14 **(IMO 1989)** Sejam n e k dois inteiros positivos e seja S um conjunto de n pontos num plano tais que

(i) Não haja três pontos de S que sejam colineares;

(ii) Para qualquer ponto P, há pelo menos k pontos de S que são equidistantes de P.

Prove que

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Problema 15 **(Irã 2010)** Temos n pontos no plano de modo que não existam três deles colineares. Prove que o número de triângulos com vértices nestes pontos e cuja área é exatamente 1 não pode ser maior que $\frac{2}{3}(n^2 - n)$.

Problema 16 **(China 2000, HongBin Yu)** Considere n pontos colineares e todas as distâncias entre dois deles. Suponha que cada distância aparece no máximo duas vezes. Prove que existem pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ destas distâncias que aparecem 1 vez cada.

Problema 17 **(China 2011)** Seja S um conjunto de n pontos no plano tal que não há quatro pontos colineares. Sejam $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ as diferentes distâncias entre os pares de pontos distintos de S e seja m_i a quantidade de pares de pontos cuja distância é exatamente d_i. Prove que

$$\sum_{i=1}^{k} m_i^2 \leq n^3 - n^2.$$