Problemas de Geometria

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

1 Problemas $3k + 1$ da OBM

1. **(OBM 2020, 4)** Seja ABC um triângulo. Os círculos ex-inscritos (que tangenciam um lado e os prolongamentos de outros dois lados) tocam os lados BC, CA e AB nos pontos U, V e W, respectivamente. Sejam r_u a reta que passa por U e é perpendicular a BC, r_v a reta que passa por V e é perpendicular a CA e r_w a reta que passa por W e é perpendicular a AB. Prove que as retas r_u, r_v e r_w passam por um mesmo ponto.

2. **(OBM 2019, 1)** Sejam ω_1 e ω_2 duas circunferências de centros C_1 e C_2, respectivamente, que se cortam em dois pontos P e Q. Suponha que a circunferência circunscrita ao triângulo PC_1C_2 intersecte ω_1 novamente em $A \neq P$ e ω_2 novamente em $B \neq P$. Suponha ainda que Q está no interior do triângulo PAB. Demonstre que Q é o incentro do triângulo PAB.

3. **(OBM 2018, 1)** Dizemos que um polígono P está *inscrito* em outro polígono Q quando todos os vértices de P pertencem ao perímetro de Q. Também dizemos nesse caso que Q está *circunscrito* a P. Dado um triângulo T, sejam ℓ o máximo valor do lado de um quadrado inscrito em T e L o mínimo valor do lado de um quadrado circunscrito a T. Prove que, para todo triângulo T, vale a desigualdade $L/\ell \geq 2$, e encontre todos os triângulos T para os quais a igualdade ocorre.

4. **(OBM 2016, 1)** Seja ABC um triângulo. As retas r e s são bissetrizes internas de $\angle ABC$ e $\angle BCA$, respectivamente. Os pontos E sobre r e D sobre s são tais que $AD \parallel BE$ e $AE \parallel CD$. As retas BD e CE se cortam em F. Seja I o incentro do triângulo ABC. Mostre que se os pontos A, F e I são colineares então $AB = AC$.

5. **(OBM 2015, 1)** Seja ABC um triângulo escaleno e acutângulo e N o centro do círculo que passa pelos pés das três alturas do triângulo. Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de ABC e que passam por B e C. Prove que A, D e N são colineares se, e somente se, $\angle BAC = 45°$.

6. **(OBM 2014, 1)** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja P a interseção das diagonais AC e BD. Os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABP, BCP, CDP e DAP são iguais. Prove que $ABCD$ é um losango.

7. **(OBM 2013, 1)** Seja Γ um círculo a A um ponto exterior a Γ. As retas tangentes a Γ que passam por A tocam Γ em B e C. Seja M o ponto médio de AB. O segmento MC corta Γ novamente em D e a reta AD corta Γ novamente em E. Sendo $AB = a$ e $BC = b$, calcular CE em função de a e b.

8. **(OBM 2010, 4)** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M e N os pontos médios dos lados CD e AD, respectivamente. As retas perpendiculares a AB passando por M e a BC passando por N cortam-se no ponto P. Prove que P pertence à diagonal BD se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

9. **(OBM 2008, 4)** Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e r e s as retas simétricas à reta AB em relação às bissetrizes internas dos ângulos $\angle CAD$ e $\angle CBD$, respectivamente. Sendo P a interseção de r e s e O o centro do círculo circunscrito a $ABCD$, prove que OP é perpendicular a CD.

10. **(OBM 2006, 1)** Seja ABC um triângulo, P o pé da bissetriz interna relativa ao lado AC e I seu incentro. Se $AP + AB = CB$, prove que API é um triângulo isósceles.

11. **(OBM 2004, 1)** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Prove que os incírculos de ABC, BCD, CDA e DAB têm um ponto em comum se, e somente se, $ABCD$ é um losango.

12. **(OBM 2003, 4)** São dados: uma circunferência K e um ponto A interior, fixo, distinto do centro. Determine os pontos B, C e D sobre a circunferência de forma que a área do quadrilátero $ABCD$ seja a maior possível.

2 Problemas $3k + 1$ da Cone Sul

13. **(2020 Cono Sur Olympiad, 4)** Let ABC be an acute scalene triangle. D and E are variable points in the half-lines AB and AC (with origin at A) such that the symmetric of A over DE lies on BC. Let P be the intersection of the circles with diameter AD and AE. Find the geometric place of P when varying the line segment DE.

3 Problemas $3k + 1$ da IMO

14. **(IMO 2020, P1)** Considere o quadrilátero convexo $ABCD$. O ponto P está no interior do $ABCD$. Verificam-se as seguintes igualdades entre razões:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Prove que as três seguintes retas se intersectam num ponto: as bissetrizes internas dos ângulos $\angle ADP$ e $\angle PCB$ e a metriatriz do segmento AB.

15. **(IMO 2018, 1)** Seja Γ o circuncírculo do triângulo acutângulo ABC. Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC, respectivamente, de modo que $AD = AE$. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G, respectivamente. Prove que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).

16. **(IMO 2017, 4)** Sejam R e S pontos distintos sobre a circunferência Ω tal que RS não é um diâmetro. Seja ℓ a reta tangente a Ω em R. O ponto T é tal que S é o ponto médio do segmento RT. O ponto J escolhe-se no menor arco RS de Ω de maneira que Γ, a circunferência circunscrita ao triângulo JST, intersecta ℓ em dois pontos distintos. Seja A o ponto comum de Γ e ℓ mais próximo de R. A reta AJ intersecta pela segunda vez Ω em K. Demonstre que a reta KT é tangente a Γ.

17. **(IMO 2016, 1)** O triângulo BCF é retângulo em B. Seja A o ponto da reta CF tal que $FA = FB$ e que F esteja entre A e C. Escolhe-se o ponto D de modo que $DA = DC$ e que AC seja bissetriz de $\angle DAB$. Escolhe-se o ponto E de modo que $EA = ED$ e que AD seja a bissetriz de $\angle EAC$. Seja M o ponto médio de CF. Seja X o ponto tal que $AMXE$ seja um paralelogramo. Prove que BD, FX e ME são concorrentes.

18. **(IMO 2015, 4)** O triângulo ABC tem circuncírculo Ω e circuncentro O. Uma circunferência Γ de centro A intersecta o segmento BC nos pontos D e E, de modo que B, D, E e C são todos diferentes e estão na reta BC, nesta oderm. Sejam F e G os pontos de interseção de Γ e Ω, tais que A, F, B, C e G estão em Ω nesta ordem. Seja K o segundo ponto de interseção do circuncírculo do triângulo BDF com o segmento AB. Seja L o segundo ponto de interseção do circuncírculo do triângulo CGE com o segmento CA.

    Suponha que as retas FK e GL são diferentes e que se intersectam no ponto X. Prove que X pertence a reta AO.

19. **(IMO 2014, 4)** Os pontos P e Q encontram-se sobre o lado BC de um triângulo acutângulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Os pontos M e N encontram-se sobre as retas AP e AQ, respectivamente, de modo que P é o ponto médio de AM e Q é o ponto médio de AN. Prove que as retas BM e CN se intersectam sobre a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

20. **(IMO 2013, 4)** Let ABC be an acute triangle with orthocenter H, and let W be a point on the side BC, lying strictly between B and C. The points M and N are the feet of the altitudes from B and C, respectively. Denote by ω_1 is the circumcircle of BWN, and let X be the point on ω_1 such that WX is a diameter of ω_1. Analogously, denote by ω_2 the circumcircle of triangle CWM, and let Y be the point such that WY is a diameter of ω_2. Prove that X, Y and H are collinear.

21. (IMO 2012, 1) Dado um triângulo ABC, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita[1] é tangente ao lado BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F, e as retas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de interseção das retas AF e BC, e seja T o ponto de interseção das retas AG e BC.

Prove que M é o ponto médio de ST.

22. (IMO 2010, 4) Let P be a point interior to triangle ABC (with $CA \neq CB$). The lines AP, BP and CP meet again its circumcircle Γ at K, L, respectively M. The tangent line at C to Γ meets the line AB at S. Show that from $SC = SP$ follows $MK = ML$.

23. (IMO 2009, 4) Let ABC be a triangle with $AB = AC$. The angle bisectors of $\angle CAB$ and $\angle ABC$ meet the sides BC and CA at D and E, respectively. Let K be the incentre of triangle ADC. Suppose that $\angle BEK = 45°$. Find all possible values of $\angle CAB$.

24. (IMO 2008, 1) Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC. O círculo Γ_A, centrado no ponto médio de BC que passa por H intersecta a reta BC nos pontos A_1 e A_2. Da mesma maneira, defina os pontos B_1, B_2, C_1 e C_2.

Prove que os seis pontos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 são concíclicos.

25. (IMO 2007, 4) In triangle ABC the bisector of angle BCA intersects the circumcircle again at R, the perpendicular bisector of BC at P, and the perpendicular bisector of AC at Q. The midpoint of BC is K and the midpoint of AC is L. Prove that the triangles RPK and RQL have the same area.

26. (IMO 2006, 1) Let ABC be triangle with incenter I. A point P in the interior of the triangle satisfies

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Show that $AP \geq AI$, and that equality holds if and only if $P = I$.

27. (IMO 2005, 1) Six points are chosen on the sides of an equilateral triangle ABC: A_1, A_2 on BC, B_1, B_2 on CA and C_1, C_2 on AB, such that they are the vertices of a convex hexagon $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ with equal side lengths.

Prove that the lines A_1B_2, B_1C_2 and C_1A_2 are concurrent.

28. (IMO 2004, 1) 1. Let ABC be an acute-angled triangle with $AB \neq AC$. The circle with diameter BC intersects the sides AB and AC at M and N respectively. Denote by O the midpoint of the side BC. The bisectors of the angles $\angle BAC$ and $\angle MON$ intersect at R. Prove that the circumcircles of the triangles BMR and CNR have a common point lying on the side BC.

29. (IMO 2003, 4) Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. Let P, Q, R be the feet of the perpendiculars from D to the lines BC, CA, AB, respectively. Show that $PQ = QR$ if and only if the bisectors of $\angle ABC$ and $\angle ADC$ are concurrent with AC.

30. (IMO 2001, 1) Consider an acute-angled triangle ABC. Let P be the foot of the altitude of triangle ABC issuing from the vertex A, and let O be the circumcenter of triangle ABC. Assume that $\angle C \geq \angle B + 30°$. Prove that $\angle A + \angle COP < 90°$.

31. (IMO 2000, 1) Two circles G_1 and G_2 intersect at two points M and N. Let AB be the line tangent to these circles at A and B, respectively, so that M lies closer to AB than N. Let CD be the line parallel to AB and passing through the point M, with C on G_1 and D on G_2. Lines AC and BD meet at E; lines AN and CD meet at P; lines BN and CD meet at Q. Show that $EP = EQ$.

[1] A circunferência ex-inscrita de ABC oposta ao vértice A é a circunferência tangente ao segmento BC, ao prolongamento do segmento AB no sentido de A para B e ao prolongamento do segmento AC no sentido de A para C.

4 Problemas $3k+1$ da EGMO

32. (EGMO 2019, 4) Seja ABC um triângulo com incentro I. A circunferência que passa por B e é tangente a AI no ponto I intersecta o lado AB novamente no ponto P. A circunferência que passa por C e é tangente a AI no ponto I intersecta o lado AC novamente em Q. Prove que PQ é tangente ao incírculo de ABC.

33. (EGMO 2018, 1) Let ABC be a triangle with $CA = CB$ and $\angle ACB = 120°$, and let M be the midpoint of AB. Let P be a variable point on the circumcircle of ABC, and let Q be the point on the segment CP such that $QP = 2QC$. It is given that the line through P and perpendicular to AB intersects the line MQ at a unique point N.

Prove that there exists a fixed circle such that N lies on this circle for all possible positions of P.

34. (EGMO 2017, 1) Let $ABCD$ be a convex quadrilateral with $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ and $\angle ABC > \angle CDA$. Let Q and R be points on segments BC and CD, respectively, such that line QR intersects lines AB and AD at points P and S, respectively. It is given that $PQ = RS$. Let the midpoint of BD be M and the midpoint of QR be N. Prove that the points M, N, A, and C lie on a circle.

35. (EGMO 2016, 4) Two circles ω_1 and ω_2, of equal radius intersect at different points X_1 and X_2. Consider a circle ω externally tangent to ω_1 at T_1, and internally tangent to ω_2 at point T_2. Prove that lines X_1T_1 and X_2T_2 intersect at a point lying on ω.

36. (EGMO 2015, 1) Let $\triangle ABC$ be an acute-angled triangle, and let D be the foot of the altitude from C. The angle bisector of $\angle ABC$ intersects CD at E and meets the circumcircle ω of triangle $\triangle ADE$ again at F. If $\angle ADF = 45°$, show that CF is tangent to ω.

37. (EGMO 2013, 1) The side BC of the triangle ABC is extended beyond C to D so that $CD = BC$. The side CA is extended beyond A to E so that $AE = 2CA$. Prove that, if $AD = BE$, then the triangle ABC is right-angled.

38. (EGMO 2012, 1) Let ABC be a triangle with circumcentre O. The points D, E, F lie in the interiors of the sides BC, CA, AB respectively, such that DE is perpendicular to CO and DF is perpendicular to BO. (By interior we mean, for example, that the point D lies on the line BC and D is between B and C on that line.)

Let K be the circumcentre of triangle AFE. Prove that the lines DK and BC are perpendicular.