MATEMATICAMENTE

10 de Setembro de 2021

Treinamento de Velocidade

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. (Putnam 2013, B1) Para inteiros positivos n, sejam os números $c(n)$ definidos pelas regras $c(1) = 1$, $c(2n) = c(n)$ e $c(2n+1) = (-1)^n c(n)$. Determine o valor de

$$\sum_{n=1}^{2013} c(n)c(n+2).$$

Solução.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2013} c(n)c(n+2) &= \sum_{k=1}^{1006} c(2k)c(2k+2) + \sum_{k=0}^{1006} c(2k+1)c(2k+3) \\
&= \sum_{k=1}^{1006} c(k)c(k+1) + \left(c(1)c(3) + \sum_{k=1}^{1006} (-1)^k c(k)(-1)^{k+1} c(k+1) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{1006} c(k)c(k+1) + c(1)c(3) - \sum_{k=1}^{1006} c(k)c(k+1) \\
&= c(1)c(3) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

2. (Putnam 2018, B3 ↗) Determine todos os inteiros positivos $n < 10^{100}$ para os quais n divide 2^n, $n-1$ divide $2^n - 1$, e $n-2$ divide $2^n - 2$.

Solução. Let's enumerate the conditions:

(1) $n \mid 2^n$.

(2) $n - 1 \mid 2^n - 1$.

(3) $n - 2 \mid 2^n - 2$.

Condition (1) is equivalent to n being a power of 2. Let's write $n = 2^k$. Then, conditions (2) and (3) are equivalent to:

(2) $2^k - 1 \mid 2^{2^k} - 1$.

(3) $2^{k-1} - 1 \mid 2^{2^k - 1} - 1$.

Lema 1(Order). Let m, i be positive integers. Then,

$$m \mid i \iff 2^m - 1 \mid 2^i - 1.$$

Demonstração. Since $2^m \equiv 1 \pmod{2^m - 1}$, we conclude that if $i \equiv j \pmod{m}$, then $2^i - 1 \equiv 2^j - 1 \pmod{2^m - 1}$. Futhermore, the integers $2^0 - 1, 2^1 - 1, \ldots, 2^{m-1} - 1$ are distinct integers between 0 and $2^m - 2$, so they are in distict residue classes modulo $2^m - 1$. Therefore,

$$i \equiv j \pmod{m} \iff 2^i - 1 \equiv 2^j - 1 \pmod{2^m - 1},$$

and in particular, the result follows from applying $j = 0$.

Applying the Lemma, conditions (2) and (3) are equivalent to:

(2) $k \mid 2^k$.

(3) $k - 1 \mid 2^k - 1$.

These are the same conditions as (1) and (2) for n! (2) implies that $k = 2^p$, and (3) implies that

(3) $p \mid 2^p$,

thus p is a power of 2.

Now, we just need to use the "size" condition. $2^{2^p} = 2^k = n < 10^{100} < 2^{334} < 2^{2^9}$, thus $p < 9$, i.e., $p = 1, 2, 4, 8$ are the possible values of p. The possible values of n are $2^2, 2^{2^2}, 2^{2^4}, 2^{2^8}$.

3. (HMMT 2021, Time, 6) Seja $f(x) = x^2 + x + 1$. Determine todos os inteiros positivos n tais que $f(k)$ divide $f(n)$ sempre que k é um divisor positivo de n.

Resposta. O número n funciona se, e somente se, $n \equiv 1 \pmod 3$, e $n = 1$ ou $n = p$ ou $n = p^2$ para algum p primo.

Solução.

Lema 2. $n \equiv 1 \pmod 3$ é uma condição necessária.

Demonstração. 1 é sempre um divisor positivo de n, portanto $3 = f(1) \mid f(n) = n^2 + n + 1$ é uma condição necessária. Porém, $0^2 + 0 + 1 \not\equiv 0 \pmod 3$ e $2^2 + 2 + 1 \not\equiv 0 \pmod 3$, portanto, $n \equiv 1 \pmod 3$ é uma condição necessária. □

Lema 3. $n \equiv 1 \pmod 3$, e $n = 1$ ou $n = p$ ou $n = p^2$ para algum p primo é uma condição suficiente.

Demonstração. Vamos dividir nos casos:

i. $n = 1$.

Basta checar que, para $k = 1$, $f(1) \mid f(1)$.

ii. $n = p \equiv 1 \pmod 3$, com p primo.

Para $k = 1$, como $f(1) = 3$, $p^2 + p + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Para $k = p$, com certeza $f(p) \mid f(p)$.

iii. $n = p^2$, com p primo $\neq 3$.

Para $k = 1$, como $f(1) = 3$, $p^4 + p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Para $k = p$, note que $f(p) = p^2 + p + 1 \mid (p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1) = p^4 + p + 1 = f(p^2)$. Para $k = p^2$, com certeza $f(p^2) \mid f(p^2)$.

□

Lema 4. Se $n = ab$, para inteiros positivos $a > b > 1$, então n não funciona. Equivalentemente, $n = 1$ ou $n = p$ ou $n = p^2$ para algum p primo é uma condição necessária.

Demonstração. Suponha que $n = ab$, com $a > b > 1$, funciona. Logo, $f(a) = a^2 + a + 1$ divide $a^2b^2 + ab + 1 = f(b)$. Portanto, $a^2 + a + 1$ divide

$$\frac{(a^2b^2 + ab + 1) - (a^2 + a + 1)}{a} - b^2(a^2 + a + 1) + (a^2b^2 + ab + 1) = (a - b)(b - 1).$$

Finalmente, $0 < (a - b)(b - 1) < a^2 < a^2 + a + 1$, uma contradição. □