

---

**Simulado B**  
Nível 3 (Ensino Médio)

---

**Instruções:**

- Separe o tempo necessário para essa prova.
  - Escreva todas as soluções completas e envie para mim por email, [zeusdanmou@gmail.com](mailto:zeusdanmou@gmail.com), ou por WhatsApp.
- 

**Problema 1** Seja  $ABC$  um triângulo com  $AB = AC$ , e seja  $M$  o ponto médio de  $BC$ . Seja  $P$  um ponto tal que  $PB < PC$  e  $PA$  paralelo a  $BC$ . Sejam  $X$  e  $Y$  pontos nas retas  $PB$  e  $PC$ , respectivamente, tal que  $B$  cai no segmento  $PX$ ,  $C$  cai no segmento  $PY$ , e  $\angle PXM = \angle PYM$ . Prove que o quadrilátero  $APXY$  é cíclico.

---

**Problema 2** Seja  $S$  um conjunto finito, e seja  $\mathcal{A}$  o conjunto de todas as funções de  $S$  em  $S$ . Seja  $f$  um elemento de  $\mathcal{A}$ , e seja  $T = f(S)$  a imagem de  $S$  pela função  $f$ . Supponha que  $f \circ g \circ f \neq g \circ f \circ g$  para todo  $g$  em  $\mathcal{A}$  com  $g \neq f$ . Mostre que  $f(T) = T$ .

---

**Problema 3** Para cada inteiro positivo  $n$ , o Banco do Pensi produz moedas com valor  $\frac{1}{n}$ . Dada uma coleção finita de tais moedas (com valores não necessariamente distintos) com valor total de até  $99 + \frac{1}{2}$ , prove que é possível dividir essa coleção em 100 ou menos grupos, tal que cada grupo contém valor total menor ou igual a 1.

---

**Problema 4** Seja  $n$  um inteiro positivo. Zeus executa uma sequência de movimentos numa fita que consiste em  $n + 1$  quadrados enfileirados, numerados de 0 a  $n$ , da esquerda pra direita. Inicialmente,  $n$  pedras são colocadas no quadrado 0, e os outros quadrados ficam vazios. Em cada turno, Zeus escolhe qualquer quadrado não vazio (com  $k$  pedras), tira uma dessas pedras e move ela para a direita no máximo  $k$  quadrados (a pedra deve continuar na fita). O objetivo de Zeus é mover todas as  $n$  pedras para o quadrado  $n$ .

Prove que Zeus não alcança seu objetivo com menos que

$$\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$$

movimentos.

*Cada problema vale 7 pontos.  
Tempo: 4 horas e 30 minutos.*