Oficina de Resolução de Problemas

Marcelo Xavier

Problema 1 **(Math Magazine, 2033)** Um baralho é uma coleção de 52 pares (*cartas*) da forma (n, s) onde $1 \leq n \leq 13$ é o número da carta, e o naipe s da carta é um dos símbolos: ouro, copas, paus e espada.

Dada uma partição qualquer do baralho em 13 conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_{13}$ de 4 cartas cada, prove que existe uma partição correspondente C_1, C_2, C_3, C_4 do baralho em 4 conjuntos de 13 cartas cada, tal que, para cada parte C_i $(1 \leq i \leq 4)$ vale:

- C_i tem uma carta de S_j para $1 \leq j \leq 13$;
- todas as cartas em C_i tem números diferentes.

Problema 2 **(China Girls MO 2005, 4)** Determine todos os reais positivos a tal que exite um inteiro positivo n e conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- cada conjunto A_i tem infinitos elementos;
- cada par de conjuntos distintos A_i e A_j não tem um elemento em comum;
- a união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é o conjunto de todos os inteiros;
- para cada conjunto A_i, a diferença absoluta de qualquer par de elementos de A_i é pelo menos a^i.

Problema 3 **(Banco IMO 2013, N4)** Existe um inteiro positivo N e uma sequência infinita de dígitos $a_1, a_2, \ldots,$ todos não-nulos, tais que, para todo $k > N$, o número cuja representação decimal é $(a_k a_{k-1} \ldots a_1)$ é um quadrado perfeito?