Problemas Sortidos de Teoria dos Números

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1. Determine todos os primos p tal que $5^p + 4p^4$ é um quadrado perfeito.

Problema 2. Seja a um inteiro positivo. Considere a sequência (a_n) com $a_0 = a$ e $a_n = a_{n-1} + 40^{n!}$. Prove que existem infinitos números dessa sequência que são múltiplos de 2009.

Problema 3. Ache todos os inteiros k tais que, para todo inteiro n, $4n + 1$ e $kn + 1$ são coprimos.

Problema 4. Seja n um inteiro positivo. Prove que se a soma de todos os divisores positivos de n é uma potência de 2, então o número de divisores também é uma potência de 2.

Problema 5. Prove que um inteiro positivo pode ser escrito como soma de pelo menos dois inteiros consecutivos se, e somente se, não é uma potência de dois.

Problema 6. Ache todos os inteiros positivos k tais que existem inteiros positivos m e n satisfazendo

$$k = \frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}.$$

Problema 7. (a) Ache todos os primos p tais que $\frac{7^{p-1}-1}{p}$ é um quadrado perfeito.

(b) Ache todos os primos p tais que $\frac{11^{p-1}-1}{p}$ é um quadrado perfeito.

Problema 8 (Colombia 2009). Encontre todas as triplas de inteiros positivos (a, b, n) que satisfazem a

$$a^b = 1 + b + \cdots + b^n.$$

Problema 9. Prove que existem infinitos naturais n com as seguintes propriedades:

- n pode ser escrito como soma de dois quadrados;
- n pode ser escrito como soma de dois cubos;
- n não pode ser escrito como soma de duas potências sextas.

Problema 10. (a) Sejam $b, n > 1$ inteiros. Suponha que para todo $k > 1$ existe um inteiro a_k tal que $b - a_k^n$ é divisível por k. Prove que $b = A^n$ para algum inteiro A.

(b) A conclusão ainda é verdadeira se só soubermos que para todo primo p existe um inteiro a_p tal que $b - a_p^n$ é divisível por p?

Problema 11. Mostre que existem infinitos pares de primos distintos (p, q) tal que

$$p | 2^{q-1} - 1 \quad \text{e} \quad q | 2^{p-1} - 1.$$