Problema 1 (Métodos Alg em Comb. / Murilo)

Considere a bijeção que leva um subconjunto A_i no vetor v_i em $\mathbb{F}_2^n$,

tal que a j-ésima coordenada de v_i é $1 \iff j \in A_i$.

- $|A_i|$ ímpar $\iff v_i \cdot v_i = 1$ em $\mathbb{F}_2$.
- $|A_i \cap A_j|$ é par $\iff v_i \cdot v_j = 0$ em $\mathbb{F}_2$.

Suponha que existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ t.q. $\sum \lambda_i v_i = 0$.

$\Rightarrow v_j \cdot \left(\sum \lambda_i v_i\right) = \lambda_j$, mas também $= 0$.

Logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$. $\Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é L.I.

Mas, como a dimensão de $\mathbb{F}_2^n$ é n, $|\{v_1, \dots, v_r\}| \leq n \Rightarrow$

$\Rightarrow r \leq n$.

Podemos atingir a igualdade fazendo $A_i = \{i\}$.

Logo $r_{máx} = n$. $\square$

Problema 2 (Met. Alg. em Comb. / Murilo)

Considere a bijeção entre S_i e um vetor $v_i \in \mathbb{F}_2^n$, tal que a j-ésima coordenada de $v_i = 1 \iff j \in S_i$.

Suponha que o enunciado é falso.

Logo: $\cdot\ |S_i|$ par $\Rightarrow \mathbb{1} \cdot v_i = 0$ em $\mathbb{F}_2$ e $v_i \cdot v_i = 0$ em $\mathbb{F}_2$

$\cdot\ |S_i \cap S_j|$ ímpar $\Rightarrow v_i \cdot v_j = 1$ em $\mathbb{F}_2$.

- Suponha que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.D. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum \lambda_i v_i = 0$, com λ_i não todos nulos.

Mas, $v_j\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i - \lambda_j = 0$.

$\Rightarrow \sum \lambda_i = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n \Rightarrow \lambda_1 = \sum \lambda_i = n \cdot \lambda_1 \Rightarrow (n-1)\lambda_1 = 0$ em $\mathbb{F}_2$.

Como n é par $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Absurdo!

- Suponha que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I. como $|\{v_1, \dots, v_n\}| = n = \dim(\mathbb{F}_2^n)$,

$\{v_1, \dots, v_n\}$ gera $\mathbb{F}_2 \Rightarrow (0,0,\dots,0,1) = \sum \alpha_i v_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(0,0,\dots,0,1) \cdot \mathbb{1}}_{=1} = \sum \alpha_i \underbrace{v_i \cdot \mathbb{1}}_{0} = 0 \quad \Rightarrow 1 = 0 \text{ em } \mathbb{F}_2.$$

Absurdo!

Logo, existe $i < j$ t.q. $|S_i \cap S_j|$ é par.

Problema 3 (Met. Alg. em Comb).

Seja v_i o vetor em $\mathbb{R}^n$ t.q. a j-ésima coordenada de $v_i = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow j \in A_i$, e j-ésima coordenada de $v_i = 0 \Leftrightarrow j \notin A_i$.

Como $|\{v_1, \dots, v_{n+1}\}| = n+1 > n = \dim(\mathbb{R}^n)$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ é L.D. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum' \lambda_i v_i = 0$, com λ_i não todos nulos.

$$\Rightarrow \sum_{\lambda_i > 0} (\lambda_i) \cdot v_i = \sum_{\lambda_i < 0}' (-\lambda_i) \cdot v_i \qquad (*)$$

Defina $I = \{i \mid \lambda_i > 0\}$ e $J = \{i \mid \lambda_i < 0\}$. (+)

Por $(*)$, analisando a j-ésima coordenada, temos que:

(j-ésima coordenada de LE $= 0 \Leftrightarrow$ j-ésima coordenada de LD $= 0$)

$\Rightarrow (j \notin A_k,\ \forall k \in I \Leftrightarrow j \notin A_k,\ \forall k \in J) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(j \notin \bigcup_{k \in I} A_k \Leftrightarrow j \notin \bigcup_{k \in J} A_k \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k \in I} A_k = \bigcup_{k \in J} A_k$$

$\square$

(+) Claramente, I e J são disjuntos.