Resolvendo a IMO 2019

Guilherme Zeus Moura

7 de agosto de 2019

Problemas

1. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que, para quaisquer inteiros a e b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

2. No triângulo ABC, o ponto A_1 está no lado BC e o ponto B_1 está no lado AC. Sejam P e Q pontos nos segmentos AA_1 e BB_1, respectivamente, tal que PQ é paralelo a AB. Seja P_1 um ponto na reta PB_1, tal que B_1 está estritamente entre P e P_1 e $\angle PP_1C = \angle BAC$. Analogamente, seja Q_1 um ponto na reta QA_1, tal que A_1 está estritamente entre Q e Q_1 e $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Prove que os pontos P, Q, P_1 e Q_1 são concíclicos.

3. Uma rede social possui 2019 usuários, alguns deles são amigos. Sempre que o usuário A é amigo do usuário B, o usuário B também é amigo do usuário A. Eventos do seguinte tipo podem acontecer repetidamente, um de cada vez:

   Três usuários A, B e C tais que A é amigo de B e A é amigo de C, mas B e C não são amigos, mudam seus estados de amizade de modo que B e C agora são amigos, mas A deixa de ser amigo de B e A deixa de ser amigo de C. Todos os outros estados de amizade não são alterados.

   Inicialmente, 1010 usuários possuem exatamente 1009 amigos cada e 1009 usuários possuem exatamente 1010 amigos cada. Prove que existe uma sequência de tais eventos tal que, após essa sequência, cada usuário é amigo de no máximo um outro usuário.

4. Encontre todos os pares (k, n) de inteiros positivos tais que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

5. O Banco de Bath emite moedas com um H num lado e um T no outro. Harry possui n dessas moedas colocadas em linha, ordenadas da esquerda para a direita. Ele repetidamente realiza a seguinte operação: se há exatamente $k > 0$ moedas mostrando H, então ele vira a k-ésima moeda contada da esquerda para a direita; caso contrário, todas as moedas mostram T e ele para. Por exemplo, se $n = 3$ o processo começando com a configuração THT é $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, que acaba depois de três operações. (a) Mostre que, para qualquer configuração inicial, Harry para após um número finito de operações. (b) Para cada configuração inicial C, seja $L(C)$ o número de operações antes de Harry parar. Por exemplo, $L(THT) = 3$ e $L(TTT) = 0$. Determine a média de $L(C)$ sobre todas as 2^n possíveis configurações iniciais C.

6. Seja I o incentro do triângulo acutângulo ABC com $AB \neq AC$. A circunferência inscrita (incírculo) ω de ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. A reta que passa por D perpendicular a EF intersecta ω novamente em R. A reta AR intersecta ω novamente em P. As circunferências circunscritas (circuncírculos) dos triângulos PCE e PBF se intersectam novamente no ponto Q. Prove que as retas DI e PQ se intersectam sobre a reta que passa por A perpendicular a AI.

Problema 1 - Equação Funcional

A ideia é sempre explorar a equação funcional.

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Uma das ideias pra começar é "chutar" a resposta. Isso é bastante legal para guiar a solução, porém tem que tomar algum cuidado com isso, pois nem sempre todas as soluções são triviais de achar.

$f(x) \equiv 0$ e $f(x) \equiv 2x$ são funções que funcionam. Outra função um pouco menos fácil de ver que funciona é $f(x) \equiv 2x + c$, para qualquer constante inteira c. Não achar essa terceira solução pode guiar a sua solução a achar $f(0) = 0$ (que não é verdade).

Enfim, vamos tentar jogar alguns valores para a ou para b e explorar a "simetria" do problema:

Jogando $a = 0$ e $b = n$:

$$f(0) + 2f(n) = f(f(n))$$

Jogando $a = n$ e $b = 0$:

$$f(2n) + 2f(0) = f(f(n))$$

Fazer isso é maneiro pois os lados esquerdos são iguais, logo:

$$2f(n) = f(2n) + f(0)$$

Uma coisa maneira de notar é que isso é uma propriedade das progressões aritméticas. Além disso, relaciona $f(n)$ com $f(2n)$, que são expressões que aparecem na equação original. Usando essa informação na original:

$$2f(a) + 2f(b) = f(0) + f(f(a + b))$$

Mas, fazendo $b = 0$:

$$2f(a) + f(0) = f(f(a))$$

Aqui, dá pra ver que a solução está no caminho certo, pois as expressões "base" na equação original, $f(2n)$ e $f(f(n))$ estão agora em função de $f(n)$. Substituindo na original, $f(2a)+2f(b) = f(f(a + b))$ vira:

$$2f(a) + 2f(b) = 2f(0) + 2f(a + b)$$

$$f(a) + f(b) = f(0) + f(a + b)$$

Como a ideia é mostrar que é P.A., jogar $b = 1$ relaciona $f(a)$ e $f(a + 1)$:

$$f(a + 1) - f(a) = f(1) - f(0)$$

Que implica que é uma P.A. $\implies f(x) \equiv mx + q$. Jogando de volta na original:

$$(2ma + q) + 2(mb + q) = m(ma + mb + q) + q$$

$$2ma + 2mb + 3q = m^2a + m^2b + (m + 1)q$$

Jogando $a = b = 0 \implies m = 2$ ou $q = 0$.

- $m = 2$: A equação é válida para qualquer $q \implies f(x) \equiv 2x + q$ funciona.
- $q = 0$: Jogando $a = 1$, $b = 0 \implies 2m = m^2$. Então, $m = 2$, que é o caso acima, ou $m = 0$, que é o caso $f(x) \equiv 0$.

Final Alternativo usando Cauchy

O que é a Equação de Cauchy? Se vale: $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$f(a) + f(b) = f(a+b),$$

então, a solução é:

$$f(x) = mx.$$

Voltando ao problema, usando a função $g(x) = f(x) - f(0)$, achamos a relação $g(a) + g(b) = g(a+b)$, que implica $g(x) = mx$ e, portanto, $f(x) = mx + q$. (E a solução segue daí.)

Parece meio carteado para esse problema, mas a equação de Cauchy é um resultado bem importante em equações funcionais.

Problema 4 - Teoria dos Números

Esse problema usa uma ideia bem maneira de teoria dos números: contar os fatores primos.

Usando $\nu_p(n)$ como o maior k tal que p^k divide n, podemos resolver esse problema usando o ν_2 e o ν_3. Em outras palavras, contando o número de fatores 2 e 3 em cada um dos lados.

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1})$$

Colocando os fatores 2 em evidência:

$$k! = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}(2^n - 1)(2^{n-1} - 1)(2^{n-2} - 1)\cdots(2 - 1)$$

- Calculando o ν_2:

$$\nu_2(LE) = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \cdots < \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \cdots = k$$

$$\nu_2(LD) = 0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

  Logo: $n(n-1) < 2k$

- Calculando o ν_3:

$$\nu_3(LE) = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{9} \right\rfloor + \cdots \geq \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \geq \frac{k-2}{3}$$

  Quanto é $\nu_3(2^n - 1)$?

  Se $n = 2t + 1 \implies 2^{2t+1} - 1 = 4^t \cdot 2 - 1 \equiv 2 - 1 = 1 \pmod 3$. Logo, $\nu_3(2^{2t+1} - 1) = 0$.

  Se $n = 2t \implies 2^{2t} - 1 = 4^t - 1 \equiv 2 - 1 = 0 \pmod 3$. Podemos aplicar o Teorema do Levantamento de Expoente, que implica:

$$\nu_3(4^t - 1) = \nu_3(t) + \nu_3(4 - 1) = \nu_3(t) + 1.$$

  Agora, podemos calcular o ν_3 do lado direito. Chamando $n = 2t$ ou $n = 2t + 1$:

$$\nu_3(LD) = \nu_3(t) + \nu_3(t-1) + \cdots \nu_3(1) + t = t + \left(\left\lfloor \frac{t}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{t}{9} \right\rfloor + \cdots \right)$$

$$\nu_3(LD) < \frac{t}{3} + \frac{t}{9} + \cdots = \frac{t}{2} \leq \frac{n}{4}$$

  Isso implica que:

$$2k < \frac{3n}{2} + 4$$

Juntando as duas informações:

$$2n(n-1) < 3n+8 \implies n < 4$$

Basta testar:

- $n = 1 \implies k! = 2 - 1 = 1 = 1! \implies (1,1)$ é solução.
- $n = 2 \implies k! = (4-1)(4-2) = 6 = 3! \implies (3,2)$ é solução.
- $n = 3 \implies k! = (8-1)(8-2)(8-4) = 7 \cdot 4!$ Absurdo.

Logo, as soluções são $(1,1)$ e $(3,2)$.