



---

## Simulado 1

---

*Discutiremos em 08 de Fevereiro de 2021*

*Tempo: 4 horas e 30 minutos*

1. A sequência de Fibonacci é definida por  $F_1 = F_2 = 1$ ,  $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ , para  $k \in \mathbb{N}$ .

Suponha que  $a$ ,  $b$  e  $n$  são inteiros positivos tais que  $\frac{a}{b}$  está entre as duas frações  $\frac{F_n}{F_{n-1}}$  e  $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ . Prove que  $b \geq F_{n+1}$ .

2. Seja  $ABC$  um triângulo com circuncírculo  $\omega$ . Seja  $\Omega$  o círculo que tangencia externamente  $\omega$ , e também tangencia as semirretas  $AB$  e  $AC$  em  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Prove que o exincentro relativo a  $A$  do triângulo  $ABC$  é o ponto médio de  $PQ$ .

*Observação.* O exincentro relativo a  $A$  do triângulo  $ABC$  é o encontro da bissetriz interna de  $A$  com as bissetrizes externas de  $B$  e  $C$ .

3. Prove que qualquer conjunto finito  $H$  de pontos do plano com coordenadas inteiras possui um subconjunto  $K$  com as seguintes propriedades:
- qualquer reta vertical ou horizontal intersecta  $K$  em no máximo 2 pontos,
  - qualquer ponto de  $H \setminus K$  está contido em algum segmento com extremos em  $K$ .