Problemas Sortidos de Combinatória

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. **(Banco IMO 2016, C1)** Um lider de uma equipe da IMO escolhe inteiros positivos n e k, com $n > k$, e anuncia os números para o vice-líder e para um competidor. O líder secretamente conta ao vice-líder uma sequência de n bits (*bit* significa *dígito binário* — 0 ou 1), e o vice-líder escreve num papel todas as sequências de n bits que diferem da sequência escrita pelo líder em exatamente k posições. (Por exemplo, se $n = 3$ e $k = 1$, e o líder escolhe 101, o vice-líder iria escrever 001, 111 e 100.) O competidor pode olhar para as sequências escritas pelo vice-líder e tentar adivinhar a sequência escrita pelo líder. Qual é o número mínimo de tentativas (em função de n e k) necessárias para o competidor garantir uma resposta correta?

2. **(Metrópoles 2017, 2)** Em um país, há voos de ida e volta, sem escalas, entre alguns pares de cidades. Qualquer cidade pode ser alcançada a partir de qualquer outra usando uma sequência de no máximo 100 voos. Além disso, qualquer cidade pode ser alcançada a partir de qualquer outra usando uma sequência com um número par de voos. Qual é o menor d para o qual se pode sempre afirmar que qualquer cidade pode ser alcançada por qualquer outra usando uma sequência com um número par de voos menor ou igual a d?

3. **(EGMO 2014, 5)** Seja n um inteiro positivo. Algumas pedras estão distribuídas em n caixas. Um movimento consiste em pegar duas pedras de uma mesma caixa, jogar uma fora e colocar a outra em uma caixa da nossa escolha. Uma configuração inicial de pedras é chamada *solucionável* se é possível atingir uma configuração sem caixas vazias, em uma quantidade finita (possivelmente zero) de movimentos. Determine todas as configurações iniciais de pedras que não são solucionáveis, mas tornam-se solucionáveis quando uma pedra é adicionada a uma caixa, independentemente da caixa escolhida.

4. **(Balcãs 2015, 3)** Um comitê de 3366 críticos está votando para os Oscars. Cada crítico vota em apenas um ator e uma atriz. Após a votação, foi descoberto que, para cara inteiro $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$, existe algum ator ou alguma atriz que recebeu exatamente n votos. Prove que existem dois críticos que votaram no mesmo ator e na mesma atriz.