Problemas do Teste para a Ibero

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1. Determine se existe um inteiro positivo n com a seguinte propriedade: para quaisquer n inteiros consecutivos, existe um deles que pode ser escrito como a soma de inteiro consecutivos (não necessariamente todos positivos) de no máximo 2020 maneiras distintas.

Problema 2. Seja m um inteiro positivo. Encontre o número de soluções reais da equação

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} x^k\right| = |x-1|^m .$$

Problema 3. Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito à circunferência ω. Seja I o centro de ω. Suponha que as retas AD e BC concorrem no ponto Q e que as retas AB e CD concorrem no ponto P, de modo que B está sobre o segmento AP e D está sobre o segmento AQ. Sejam X e Y os incentros dos triângulos PBD e QBD, respectivamente. Seja R o ponto de concorrência das retas PY e QX. Demonstre que a reta RI é perpendicular à reta BD.

Problema 4. Uma quádrupla de inteiros (a, b, c, d) é dita *boa*, se $ad - bc = 2020$. Duas quádruplas boas são ditas dissimilares se não é possível obter uma a partir da outra usando um número finito de aplicações das seguintes operações:

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) &\mapsto (-c, -d, a, b)\\ (a, b, c, d) &\mapsto (a, b, c + a, d + b)\\ (a, b, c, d) &\mapsto (a, b, c - a, d - b).\end{aligned}$$

Seja A um conjunto de k quádruplas boas, duas a duas dissimilares. Prove que $k \leq 4284$.