MATEMATICAMENTE

09 de Novembro de 2020

Contagem Dupla

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

1 Introdução

Em poucas palavras, contagem dupla é algo que você já fez várias vezes: calcular algo de duas maneiras. Nos problemas a seguir, vamos contar algo de duas maneiras e igualar.

2 Problemas

Problema 1. Em uma casa térrea, todos os cômodos têm um número par de portas. Prove que o número de portas que ligam a casa ao exterior é par.

Problema 2. Em uma escola, há b professores e c estudantes que satisfazem as seguintes condições:

- Cada professor ensina a exatamente k estudantes.
- Para cada dois estudantes distintos, existem exatamente h professores que ensinam a ambos.

Prove que $bk(k-1) = hc(c-1)$.

Problema 3. Prove a seguinte identidade:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

Problema 4 (IMO 1989, 3). Sejam n e k inteiros positivos e seja S um conjunto de n pontos no plano tal que não há três pontos de S colineares e, para cada ponto P em S, existem pelo menos k pontos de S que equidistam de P. Prove que

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

3 Problemas Extras

Problema 5 (OBM). Em um torneio de xadrez, cada participante joga com cada um dos outros exatamente uma vez. Uma vitória vale 1 ponto, um empate vale $\frac{1}{2}$ pontos e uma derrota vale 0 pontos. Cada jogandor ganhou a mesma quantidade de pontos contra homens e contra mulheres. Prove que a quantidade de participantes é um quadrado perfeito.

Problema 6 (Lema de Sperner). Dividimos um triângulo grande em triângulos menores de modo que qualquer dois dentre os triângulos menores ou não têm ponto em comum, ou têm vértice em comum, ou têm um lado (completo) em comum. Os vértices do triângulos são numerados: 1, 2, 3. Os vértices dos triângulos menores também são numerados: 1, 2 ou 3. A numeração é arbitrária, exceto que os vértices sobre os vértices do triângulo maior oposto ao vértice i não podem receber o número i. Mostre que entre os triângulo menores existe um com os vértices 1, 2 e 3.

Problema 7 (MOP Practice Test 2007). Em uma matriz $n \times n$, cada um dos números em $\{1, 2, \ldots, n\}$ aparece exatamente n vezes. Mostre que existe uma linha ou coluna com pelo menos $\sqrt{n}$ números distintos.