Problemas $3k + 1$ de Geometria

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1

São dados: uma circunferência K e um ponto A interior, fixo, distinto do centro. Determine os pontos B, C e D sobre a circunferência de forma que a área do quadrilátero $ABCD$ seja a maior possível.

Problema 2

Sejam ω_1 e ω_2 duas circunferências de centros C_1 e C_2, respectivamente, que se cortam em dois pontos P e Q. Suponha que a circunferência circunscrita ao triângulo PC_1C_2 intersecte ω_1 novamente em $A \neq P$ e ω_2 novamente em $B \neq P$. Suponha ainda que Q está no interior do triângulo PAB. Demonstre que Q é o incentro do triângulo PAB.

Problema 3

Seja ABC um triângulo. As retas r e s são bissetrizes internas de $\angle ABC$ e $\angle BCA$, respectivamente. Os pontos E sobre r e D sobre s são tais que $AD \parallel BE$ e $AE \parallel CD$. As retas BD e CE se cortam em F. Seja I o incentro do triângulo ABC. Mostre que se os pontos A, F e I são colineares então $AB = AC$.

Problema 4

Seja Γ um círculo a A um ponto exterior a Γ. As retas tangentes a Γ que passam por A tocam Γ em B e C. Seja M o ponto médio de AB. O segmento MC corta Γ novamente em D e a reta AD corta Γ novamente em E. Sendo $AB = a$ e $BC = b$, calcular CE em função de a e b.

Problema 5

Seja ABC um triângulo, P o pé da bissetriz interna relativa ao lado AC e I seu incentro. Se $AP + AB = CB$, prove que API é um triângulo isósceles.

Problema 6

O triângulo BCF é retângulo em B. Seja A o ponto da reta CF tal que $FA = FB$ e que F esteja entre A e C. Escolhe-se o ponto D de modo que $DA = DC$ e que AC seja bissetriz de $\angle DAB$. Escolhe-se o ponto E de modo que $EA = ED$ e que AD seja a bissetriz de $\angle EAC$. Seja M o ponto médio de CF. Seja X o ponto tal que $AMXE$ seja um paralelogramo. Prove que BD, FX e ME são concorrentes.

Problema 7

O triângulo ABC tem circuncírculo Ω e circuncentro O. Uma circunferência Γ de centro A intersecta o segmento BC nos pontos D e E, de modo que B, D, E e C são todos diferentes e estão na reta BC, nesta oderm. Sejam F e G os pontos de interseção de Γ e Ω, tais que A, F, B, C e G estão em Ω nesta ordem. Seja K o segundo ponto de interseção do circuncírculo do triângulo BDF com o segmento AB. Seja L o segundo ponto de interseção do circuncírculo do triângulo CGE com o segmento CA.

Suponha que as retas FK e GL são diferentes e que se intersectam no ponto X. Prove que X pertence a reta AO.

Problema 8

Dizemos que um polígono P está *inscrito* em outro polígono Q quando todos os vértices de P pertencem ao perímetro de Q. Também dizemos nesse caso que Q está *circunscrito* a P. Dado um triângulo T, sejam ℓ o máximo valor do lado de um quadrado inscrito em T e L o mínimo valor do lado de um quadrado circunscrito a T. Prove que, para todo triângulo T, vale a desigualdade $L/\ell \geq 2$, e encontre todos os triângulos T para os quais a igualdade ocorre.

Problema 9

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja P a interseção das diagonais AC e BD. Os raios dos círculos inscritos nos triângulos ABP, BCP, CDP e DAP são iguais. Prove que $ABCD$ é um losango.

Problema 10

Os pontos P e Q encontram-se sobre o lado BC de um triângulo acutângulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Os pontos M e N encontram-se sobre as retas AP e AQ, respectivamente, de modo que P é o ponto médio de AM e Q é o ponto médio de AN. Prove que as retas BM e CN se intersectam sobre a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Problema 11

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M e N os pontos médios dos lados CD e AD, respectivamente. As retas perpendiculares a AB passando por M e a BC passando por N cortam-se no ponto P. Prove que P pertence à diagonal BD se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

Problema 12

Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e r e s as retas simétricas à reta AB em relação às bissetrizes internas dos ângulos $\angle CAD$ e $\angle CBD$, respectivamente. Sendo P a interseção de r e s e O o centro do círculo circunscrito a $ABCD$, prove que OP é perpendicular a CD.

Problema 13

Sejam R e S pontos distintos sobre a circunferência Ω tal que RS não é um diâmetro. Seja ℓ a reta tangente a Ω em R. O ponto T é tal que S é o ponto médio do segmento RT. O ponto J escolhe-se no menor arco RS de Ω de maneira que Γ, a circunferência circunscrita ao triângulo JST, intersecta ℓ em dois pontos distintos. Seja A o ponto comum de Γ e ℓ mais próximo de R. A reta AJ intersecta pela segunda vez Ω em K. Demonstre que a reta KT é tangente a Γ.

Problema 14

Seja ABC um triângulo escaleno e acutângulo e N o centro do círculo que passa pelos pés das três alturas do triângulo. Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de ABC e que passam por B e C. Prove que A, D e N são colineares se, e somente se, $\angle BAC = 45°$.

Problema 15

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Prove que os incírculos de ABC, BCD, CDA e DAB têm um ponto em comum se, e somente se, $ABCD$ é um losango.

Problema 16

Seja Γ o circuncírculo do triângulo acutângulo ABC. Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC, respectivamente, de modo que $AD = AE$. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G, respectivamente. Prove que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).