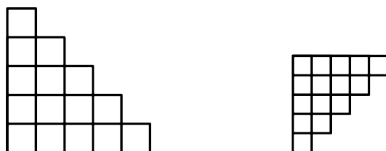

2º Simulado Geral de Velocidade

12 de março de 2020

► PROBLEMA 1

Seja n um inteiro positivo fixado. Uma n -escada é um poliminó com $\frac{n(n+1)}{2}$ células agrupadas assim como uma escada, com tamanho arbitrário. Aqui estão exemplos de 5-escadas:



Prove que uma n -escada pode ser particionada¹ em n -escadas estritamente menores.

► PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo com $AB = 5$, $AC = 8$, e $\angle BAC = 60^\circ$. Seja $UVWXYZ$ um hexágono regular inscrito em ABC tal que U e V estão no lado BA , W e X estão no lado AC , e Z está no lado CB . Qual é o tamanho do lado de $UVWXYZ$?

► PROBLEMA 3

Seja $a = 256$. Ache todos os números reais $x > a^2$ tais que

$$\log_a \log_a \log_a x = \log_{a^2} \log_{a^2} \log_{a^2} x.$$

Observação. $\log_b(a)$ é definido como o número real x que satisfaz $b^x = a$.

► PROBLEMA 4

Para inteiros positivos n e k , seja $\mathcal{U}(n, k)$ o número de fatores primos distintos de n maiores ou iguais a k . Por exemplo, $\mathcal{U}(90, 3) = 2$, dado que os únicos fatores primos de 90 que são pelo menos 3 são 3 e 5. Ache o inteiro mais próximo de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{U}(n, k)}{3^{n+k-7}}.$$

Cada problema vale 7 pontos.
Tempo: 1 hora e 40 minutos.

¹células podem ser particionadas também!