(HMMT Nov '14) Determine todos os inteiros $1 \leq m \leq 50$ para o qual existe um inteiro n tal que $n^{n+1}+1$ é divisível por m.

$$n^{n+1} \equiv -1 \pmod{m} \Rightarrow n^{2(n+1)} \equiv 1 \pmod{m}$$

$\Rightarrow \operatorname{ord}_m n \mid 2(n+1)$, mas $\operatorname{ord}_m n \nmid n+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\operatorname{ord}_m n = 2n+2$ (i)

ou

$\operatorname{ord}_m n = 2$ e n par $\Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{m}$ (ii)

Em (ii): se $n = m-1 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} m-1 \not\equiv 1 \pmod{m}. \\ (m-1)^2 \equiv 1 \pmod{m}. \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{ord}_m n = 2.$

basta n par $\Rightarrow$ m ímpar.

Logo, $\forall$ m ímpar funciona.

Se m é par: $\Rightarrow 2 \mid n^{n+1}+1 \Rightarrow$ n é ímpar. $\Rightarrow n+1$ é par.

- $n = 2K-1 \Rightarrow n+1 = 2K.$

$$(2K-1)^{2K}+1 = \left((2K-1)^K\right)^2+1 \underset{m}{\equiv} 0$$

Logo, -1 é resíduo quadrático mod p, se $p \mid m$.

$\Rightarrow$ m é produto de 2's e primos $4K+1$'s

Basta testar: $p = 2, 5, 13, 17.$

$m = 2$; $m = 4$; $m = 8$, $m = 16$; $m = 32$

$m = 10$; $m = 50$

$m = 26$;

$m = 34$.

(HMMT Nov '14)

- $m=2 \to 1^2+1=2$ ✓
- $m=4 \to -1$ não é resíduo quad.
- $m=8 \to -1$ não é " "
- $m=16 \to -1$ não é " "
- $m=32 \to -1$ " " " "
- $m=10 \to 13^{14}+1 \equiv (3^4)^3 \cdot 3^2+1 \equiv 9+1 \equiv 0 \pmod{10}$ ✓ $(\phi(10)=4)$
- $m=50 \to 57^{58}+1 \equiv 7^{18}+1 \equiv 49^9+1 \equiv (-1)^9+1 \equiv 0 \pmod{50}$ ✓ $(\phi(50)=20)$
- $m=26 \to 21^{22}+1 \equiv (-5)^{10}+1 \equiv 25^5+1 \equiv (-1)^5+1 \equiv 0 \pmod{26}$ ✓ $(\phi(26)=12)$
- $m=34 \to 39^{40}+1 \equiv 5^8+1 \equiv 25^4+1 \equiv 13^2+1 \equiv 169+1 \equiv 170 \equiv 0 \pmod{34}$ ✓ $(\phi(34)=16)$

Logo, funcionam todos m ímpares, 2, 10, 50, 26 e 34. □