Problema 3 - British MO2 2019

Seja p um primo ímpar. Quantos subconjuntos não vazios de

$$\{1, 2, 3, \dots, p-2, p-1\}$$

tem soma divisível por p?

Seja N a resposta desse problema, assumindo o subconjunto vazio.

Observe que $2N$ é o número de subconjuntos de

$$\{0, 1, 2, \dots, p-2, p-1\}$$

que tem soma divisível por p. ⊛ Porquê?

Considere um bilhete de loteria com marcações possíveis dos números de 0 até $p-1$:

geramos, a partir de um bilhete,$^{(1)}$ outros p bilhetes, a partir de rotações. Se S é a soma no bilhete que começamos e K é o número de bolinhas marcadas, então cada bilhete nesse grupo de bilhetes relacionados por rotação tem somas $(\text{mod } p)$:

$$S,\ S+K,\ S+2K,\ \dots,\ S+(p-1)K.$$

Como $K \not\equiv_p 0$ $^{(1)}$, $\{S, S+K, \dots, S+(p-1)K\} \equiv_p \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Logo, exatamente um bilhete, nesse grupo de p bilhetes, tem soma de suas casas marcadas múltiplos de p.

Como p é primo. ⊛ Pq?

(1): Quando essa rotação gera p bilhetes? Sempre que nem todos os números são marcados nem nenhum número é marcado. Nesses dois bilhetes que não geram novos p bilhetes, a soma dos números marcados é múltiplo de p.

Logo: $2N = \dfrac{2^p - 2}{p} + 2 \Rightarrow N = \dfrac{2^{p-1}-1}{p} + 1 \Rightarrow \boxed{N - 1 = \dfrac{2^{p-1}-1}{p}}$ ← Resposta, disconsiderando o conjunto vazio.

□