Problema 1. (Números no SL/Murilo) (IMO 2009/P1)

Suponha que sim. (que $n \mid a_k(a_1-1)$)

Logo $n \mid a_i(a_{i+1}-1)$, para todo i, com índices tomados mod K.

$n \mid a_1(a_2-1)$ $\Rightarrow$ $n = p_1 \cdot q_1$ t.q. $p_1 \mid a_1$ e $q_1 \mid a_2 - 1$

$n \mid a_2(a_3-1)$ $\vdots$

$\vdots$ $\Rightarrow$ $n = p_i q_i$ t.q. $p_i \mid a_i$ e $q_i \mid a_{i+1}-1$

$n \mid a_K(a_1-1)$

$(q_i, p_{i+1}) = 1$, pois $q_i \mid a_{i+1}-1$ e $p_{i+1} \mid a_{i+1}$.

Se primo $r^\alpha \mid q_i \Rightarrow r \nmid p_{i+1} \Rightarrow r^\alpha \mid q_{i+1}$, pois $n = p_{i+1} \cdot q_{i+1}$ e $r^\alpha \mid n$. (*)

$\Downarrow$

$r^\alpha \mid p_i \cdot q_i = n$.

Seja r um primo qualquer e $v_r(q_i) = \alpha$. S.P.G, $v_r(q_i) \geq v_r(q_j)$, $\forall j \neq i$.

Por (*) $r^\alpha \mid q_i \Rightarrow r^\alpha \mid q_{i+1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow r^\alpha \mid q_{i-1}$.

Como $r^{\alpha+1} \nmid q_{i+1}, q_{i+2}, \ldots, q_{i-1} \Rightarrow r^\alpha \parallel q_j$, $\forall j$.

Repetindo esse argumento para todos os primos, $q_i = q_j$, $\forall i, j$.
$\qquad$ $\overset{\shortparallel}{q}$

Como $n = q_i \cdot p_i \Rightarrow p_i = p_j$, $\forall i, j$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $\overset{\shortparallel}{p}$

Logo, $q \mid a_i - 1$ e $p \mid a_i$. Como $(q,p) = 1 \Rightarrow n \mid a_i - C$, para alguma constante C (T.C.R). Mas como $a_i \in \{1, \ldots, n\}$, há um único valor $c \equiv_n C$ nesse intervalo $\Rightarrow$

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = c$. Absurdo!

Logo, $n \nmid a_K(a_1-1)$ $\square$