IMO 2018 - P2

Resposta: Múltiplos de 3.

Exemplo: $(-1,-1,2,\cdots)$

- Não existe $-,-,-$.

Se $a_i<0$ e $a_{i+1}<0 \Rightarrow \underbrace{a_i\cdot a_{i+1}+1}_{a_{i+2}}>0$.

- Não existe $+,+$.

Se $a_i>0$ e $a_{i+1}>0 \Rightarrow a_{i+2}>1 \Rightarrow a_{i+3}>1 \Rightarrow a_{i+4}>a_{i+3}+1$

$\Rightarrow a_{i+5}>a_{i+4}+1 \cdots \Rightarrow a_k>a_{k-1}+1$. Abs, pois é cíclico!

- Não existe 0.

Se $a_i=0 \Rightarrow a_{i+1}=a_i\cdot a_{i-1}+1=1 \Rightarrow a_{i+2}=a_{i+1}\,a_i+1=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ existe $+,+$. Abs!

- Não existe $--+-+$.

pois ñ pode $++$

$a_i<0$; $a_{i+1}<0 \Rightarrow a_{i+2}>1 \Rightarrow a_{i+3}=a_{i+2}\cdot a_{i+1}+1<0$

$a_{i+4}=a_{i+3}\cdot a_{i+2}+1<1$ $\quad\cdot\, a_{i+5}=a_{i+4}\cdot a_{i+3}+1$

$a_{i+5}-a_{i+4}=(a_{i+4}\cdot a_{i+3}+1)-(a_{i+3}\cdot a_{i+2}+1)=\underbrace{a_{i+3}}_{<0}\underbrace{(a_{i+4}-a_{i+2})}_{<0}>0$

Mas $0<a_{i+4}<a_{i+5} \Rightarrow$ existe $+,+$. Abs!

- Não pode $-,+,-,+,-,+,\cdots$

$a_i<0$; $a_{i+1}>0$

$a_{i+2}=a_{i+1}\cdot a_i+1<0<a_{i+3}=a_{i+2}\cdot a_{i+1}+1 \Rightarrow a_{i+2}>a_i$.

Mas então: $a_i<a_{i+2}<a_{i+4}<\cdots$. Abs! pois é cíclico!

Logo, deve existir um $-,-$. Depois dele, deve existir um $+$. Porém, após $-,-,+$, não pode existir zero $-$, pois teríamos $+,+$; não pode existir um $-$, pois teríamos $-,-,+,-,+$; não pode existir mais de três $-$, pois teríamos $-,-,-$.

Logo, temos $-,-,+,-,-,+,\ldots$. Logo, o período é múltiplo de 3. □