

# Quinto Teste de Seleção

Teste para XXXIV Olimpíada Iberoamericana

29 de julho de 2019

1. Considere o triângulo acutângulo  $ABC$ , com  $\angle A > 60^\circ$ , e seja  $H$  o seu ortocentro. Sejam  $M$  e  $N$  pontos sobre os lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, tais que  $\angle HMB = \angle HNC = 60^\circ$ . Além disso, sejam  $O$  o circuncentro do triângulo  $HMN$  e  $D$  um ponto no mesmo semiplano determinado por  $BC$  contendo  $A$  tal que  $DBC$  é um triângulo equilátero. Prove que  $H$ ,  $O$  e  $D$  são colineares.
2. Dizemos que uma distribuição de estudantes enfileirados em colunas é *bacana* quando não existem dois amigos em uma mesma coluna. Sabemos que todos os participantes de uma olimpíada de matemática podem ser dispostos em uma configuração bacana com  $n$  colunas, mas que isso é impossível com  $n - 1$  colunas. Prove que podemos escolher competidores  $M_1, M_2, \dots, M_n$  de tal modo que  $M_i$  está na  $i$ -ésima coluna, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , e  $M_i$  é amigo de  $M_{i+1}$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .
3. Sejam  $n \geq 2$  um inteiro e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  números reais positivos tais que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Prove que

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-x_i} \right) \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) \leq \frac{n}{2}.$$

4. Sejam  $p \geq 7$  um primo e

$$S = \left\{ jp + 1 : 1 \leq j \leq \frac{p-5}{2} \right\}.$$

Prove que pelo menos um dos elementos de  $S$  pode ser escrito na forma  $x^2 + y^2$ , com  $x$  e  $y$  números inteiros.