A3/2018.

• Se S é finito $\Rightarrow$

$r < 1/\max(S)$ não pode ser escrito como $\sum_{x\in F} 1/x$, $F\subset S$.

$\Rightarrow$ (ii) é verdade

• Se S é infinito. Suponha que S não satisfaz nem (i) nem (ii).

$\Rightarrow S-\{1\}$ não satisfaz (i), nem (ii).

pois $F, G \subset S-\{1\} \subset S$. pois 1 não poderia estar em F $(r<1)$.

Logo, vamos supor que $1 \notin S$.

Seja $x_1 < x_2 < \dots$ todos os elementos de S.

$$\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} < 1 \overset{\sim(ii)}{\Rightarrow} \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} = \sum_{x\in F} 1/x \Rightarrow \frac{1}{x_i} = \sum_{x\in F} 1/x + 1/x_{i+1}$$

Se $x_{i+1} \notin F \Rightarrow \sum_{x\in\{x_i\}} \frac{1}{x} = \sum_{x\in F\cup\{x_{i+1}\}} 1/x \Rightarrow$ (i) Absurdo.

Logo $x_{i+1} \in F \Rightarrow \frac{1}{x_i} \geq \frac{2}{x_{i+1}} \Rightarrow x_{i+1} \geq 2x_i$.

Portanto $\sum_{x\in S} 1/x = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1$.

• Se não vale a igualdade: $\sum_{x\in S} 1/x < 1 \Rightarrow \sum_{x\in S} 1/x = \sum_{x\in F} 1/x \Rightarrow \sum_{x\in S-F} \frac{1}{x} = 0$. Abs!

• Se vale a igualdade: $S = \{2, 4, \dots\} \Rightarrow \frac{1}{3} = \sum_{k\in T} \frac{1}{2^k}$. Absurdo! (denom.)

← finito

Logo, (i) ou (ii).

□