N3/2017 - Folha 1/2

Suponha que é impossível escolher índice i com tal propriedade.

Podemos, então, definir $f(i)$ como o menor índice j tal que $a_i + \cdots + a_{j-1} \equiv_n 0$.

Podemos definir $f_0(i) = i$ e $f_k(i) = f(f_{k-1}(i))$.

Lema 1: $i < f(i) \leq i+n-1$.

Prova: Como uma das somas

- a_i;
- $a_i + a_{i+1}$

$\vdots$

- $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+n-2}$

é divisível por n, segue o lema. $\square$

Vamos olhar para $f_0(i); f_1(i); f_2(i); \cdots; f_n(i)$.

Por P.C.P., existem índices α e β tais que $f_\alpha(i) \equiv_n f_\beta(i)$. S.P.G, $\alpha = 0$.

Temos que as somas

- $a_{f_\alpha(i)} + a_{f_\alpha(i)+1} + \cdots + a_{f_{\alpha+1}(i)+1}$
- $a_{f_{\alpha+1}(i)} + a_{f_{\alpha+1}(i)+1} + \cdots + a_{f_{\alpha+2}(i)-1}$

$\vdots$

- $a_{f_{\beta-1}(i)} + a_{f_{\beta-1}(i)+1} + \cdots + a_{f_\beta(i)-1}$

São divisíveis por n.

Logo, $\sum_{j=f_\alpha(i)}^{f_\beta(i)-1} j \equiv_n 0$. Seja $K = \frac{f_\beta(i) - f_\alpha(i)}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow K \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right) \equiv_n 0$. Mas, $K = \frac{f_\beta(i) - f_\alpha(i)}{n} = \frac{(f_\beta(i) - f_{\beta-1}(i)) + \cdots + (f_{\alpha+1}(i) - f_\alpha(i))}{n}$

$\Rightarrow K \leq \frac{(\beta-\alpha)(n-1)}{n}$. Como $\beta - \alpha \leq n \Rightarrow K \leq n-1$.

- Se n é primo $\Rightarrow K \not\equiv_n 0$ e $(\Sigma a_j) \not\equiv_n 0 \Rightarrow K \cdot (\Sigma a_j) \not\equiv_n 0$. Absurdo!

Logo, para n primo, é possível alcançar a propriedade desejada.

N3/2017 - Folha 2/2.

- Se n não é primo $\Rightarrow n = p \cdot q$, $p, q \in \mathbb{Z}_{>1}$.

Observe a sequência $a_1 = 0$ e $a_i = p$, $\forall i \neq 1$.

Temos:
- $\sum a_j = p \cdot (n-1) \equiv -p \not\equiv 0 \pmod{n}$
- Para todo i, ou os q termos seguintes somam $p \cdot q$ (se não pegar o a_1)
  ou os $q+1$ " " " " (se pegar o a_1).

Logo, para n não primo, nem sempre é possível.

$\Rightarrow$ Todos os n's que satisfazem a propriedade são os n primos

$\square$