
Simulado
Nível 3 (Ensino Médio)
Primeiro Dia

Problema 1 Um conjunto $S \subset \mathbb{N}$ é *balanceado* quando:

- Cada elemento de S tem exatamente 3 dígitos.
- A soma dos dígitos de cada elemento de S é 9.
- Nenhum elemento de S possui algarismo decimal 0.
- Cada par de elementos de S tem algarismos das unidades diferentes.
- Cada par de elementos de S tem algarismos das dezenas diferentes.
- Cada par de elementos de S tem algarismos das centenas diferentes.

Ache o maior inteiro n tal que existe um conjunto balanceado com n elementos.

Problema 2 Determine todos os pares (a, b) de números reais tal que

$$a \lfloor bn \rfloor = b \lfloor an \rfloor$$

para todo inteiro positivo n .

Problema 3 Seja ABC um triângulo aculângulo com circuncentro O , ortocentro H , e circuncírculo Ω . Seja M o ponto médio de AH e N o ponto médio de BH . Suponha que os pontos M, N, O, H são distintos e caem no círculo ω .

Prove que os círculos ω e Ω são internamente tangentes.

*Cada problema vale 7 pontos.
Tempo: 4 horas e 30 minutos.*

Simulado
Nível 3 (Ensino Médio)
Segundo Dia

Problema 4 Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto dos inteiros positivos e seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função bijetora. É verdade que sempre deve existir um inteiro n tal que $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ é uma permutação de $(1, 2, \dots, n)$?

Problema 5 Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC , com $BC > AC$, inscrito na circunferência Γ . A circunferência com centro C e raio CB intersecta Γ novamente no ponto D , que está no arco AB que não contém C . A circunferência com centro C e raio CA intersecta o segmento CD no ponto K . A reta paralela a BD por K intersecta AB em L . Se M é o ponto médio de AB e N é o pé da perpendicular de H em CL , prove que a reta MN bissecta o segmento CH .

Problema 6 Quatro pontos são escolhidos uniformemente em uma esfera. Qual é a probabilidade de que o centro da esfera esteja no interior do tetraedro formado por esses pontos?

*Cada problema vale 7 pontos.
Tempo: 4 horas e 30 minutos.*