Geometria – Crux Mathematicorum

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. **(Crux Mathematicorum, 4560)** Sejam E e F respectivamente os pontos médios dos lados CA e AB do triângulo ABC, e seja P a segunda intersecção dos círculos ABE e ACF. Defina X como a segunda intersecção do círculo AEF com a reta AP. Prove que $AX = 2 \cdot XP$.

2. **(Crux Mathematicorum, 4509)** Sejam B e C dois pontos fixos distintos no plano e seja M o ponto médio de BC. Ache o lugar geométrico dos pontos A, $A \notin BC$, tal que $4R \cdot AM = AB^2 + AC^2$, onde R é o circumraio de ABC.

3. **(Crux Mathematicorum, 4494)** Seja ABC um triângulo com circuncentro O, tal que $\angle BAC \neq 90°$. Defina γ como o circuncírculo de BOC e centro X. Seja P é um ponto sobre o lado BC, seja Q a interseção de OP com γ, com $Q \neq O$. Seja M a intersecção de OA e XQ. Prove que $MA = MQ$ se, e somente se, AP é a bissetriz de $\angle BAC$.

4. **(Crux Mathematicorum, 4503)** Let ABC be a triangle with $\angle BAC = 90°$ and let Γ be the circle with centre B and radius BC. A circle γ passing through B and A intersects Γ at X, Y with $X \neq Y$. Let E and F be the orthogonal projections of X and Y onto CY and CX, respectively. Prove that the line CA bisects EF.

5. **(Crux Mathematicorum, 4440)** Let H be the orthocenter of triangle ABC and let AA_1, BB_1, CC_1 be the altitudes; define the points X to be the intersection of AA_1 with B_1C_1 and Y to be where the perpendicular from X to AC intersects AB. Prove that the line YA_1 passes through the midpoint of BH.