IMO 2019

60TH INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sábado, 06 de abril de 2019

Problema 1. Sejam AC e BD duas cordas de um círculo ω que se intersectam em K, e seja O o centro de ω. Sejam M e N os circuncentros dos triângulos AKB e CKD, respectivamente. Mostre que o quadrilátero $OMKN$ é um paralelogramo.

Problema 2. Seja n um inteiro positivo. Arnaldo está jogando o seguinte jogo com seu computador. Inicialmente, Arnaldo escolhe uma sequência de n inteiros positivos e, a cada rodada, informa ao computador os números da sequência, na ordem em que eles aparecem. O objetivo do computador é descobrir o número que mais aparece na sequência. Porém, ele é adaptado e só armazena duas informações, A e S. Então, ele é programado para realizar a seguinte estratégia: na primeira rodada, ele atribui o valor do número recebido a A e faz $S = 1$. Então, a cada número m que ele recebe de Arnaldo, ele realiza as seguintes operações:

- Se $m = A$, ele troca S por $S + 1$
- Se $m \neq A$ e $S > 0$, ele troca S por $S - 1$;
- Se $S = 0$, então ele troca A por m e faz $S = 1$.

Após receber todos os números da sequência, o computador retorna para Arnaldo o valor atual de A. O computador ganha se A é o número que mais aparece na sequência.

Arnaldo enviou uma sequência e percebeu que o número que mais aparecia nela repetia-se em mais da metade das vezes. Prove que o computador vai ganhar o jogo.

Problema 3. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$xf(2f(y) - x) + y^2 f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y))$$

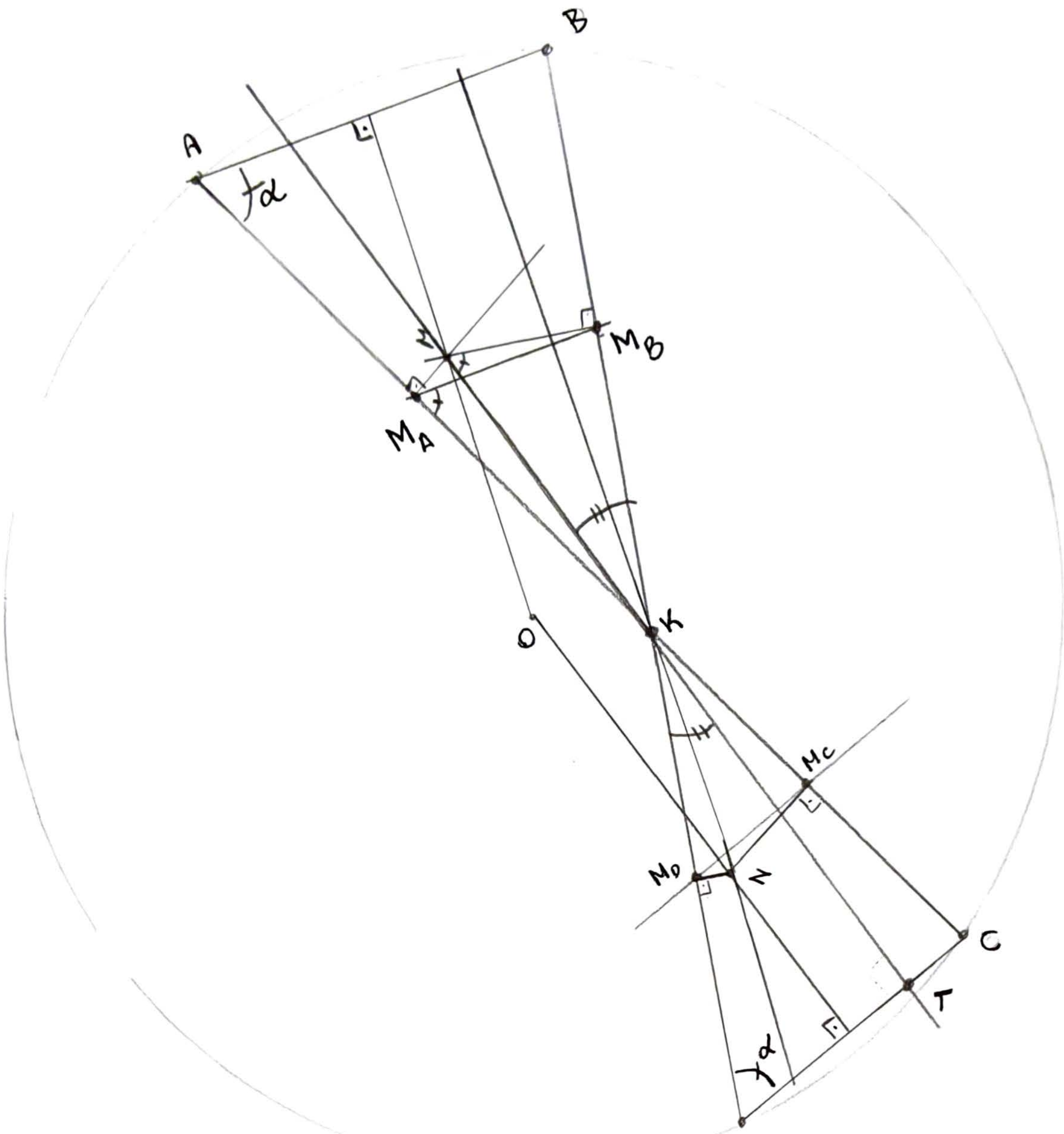
para todos $x, y \in \mathbb{Z}$ com $x \neq 0$.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Problerma 1 - Folha 1/1

Guilherme Zeus D. M.



Seja $\alpha = \angle BAK \Rightarrow \alpha = \angle CDK$.

Seja M_P o ponto médio de K e P, para qq. ponto P. Seja $T = MK \cap DC$.

• (KM_AMM_B) é cíclico e (KM_CNM_D) é cíclico.

• Como são bases médias, $\angle KM_AM_B = \angle KM_DM_C = \alpha$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KMM_B = \alpha$. Como $\angle KM_BM = 90° \Rightarrow \angle M_BKM = 90° - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DKT = 90° - \alpha$. Como $\angle TDK = \alpha \Rightarrow \angle KTD = 90° \Rightarrow KT \perp TD \Rightarrow$

$\Rightarrow MK \perp DC$. Mas, $ON \perp DC$. Logo $MK // ON$.

Analogamente, $NK // OM$. $\Rightarrow$ OMKN é paralelogramo. ∎

Problema 2 - Folha 1/1 . Defina $\#i_k :=$ número de aparições de i até a entrada k

Seja a o número que aparece mais vezes na sequência. $\Rightarrow \#a_n > \frac{n}{2}$.

Vamos provar por indução. Suponha que vale p/ n's $< n$.

• Se o primeiro elemento é a.

→ Se $S > 0$, sempre $\Rightarrow A \equiv a$. OK!

→ Se $S = 0$, após ler $2t$ (*) entradas:

O jogo "recomeça" com a sequência com os $n-2t$ termos restantes que contém, pelo mais que $\frac{n}{2} - t$ a's OK!

• Se o primeiro elemento é $b \neq a$.

→ Se $S > 0$ sempre $\Rightarrow$ Absurdo, pois, cada vez que a é lido, $\Delta S = -1$, c.c., $\Delta S = 1$ ou $\Delta S = -1$.

$\Rightarrow S_{final} \leq \#a_n(-1) + (n - \#a_n) \cdot 1 < 0$.

→ Se $S = 0$, após $2t$ entradas, $\#b_{2t} = t \Rightarrow \#a_{2t} \leq t$. $\Rightarrow$

O jogo "recomeça" com a sequência dos $n-2t$ termos restantes, que contém, pelo menos $\frac{n}{2} - t$ a's. OK!

Logo, no fim, $A = a$.

∎

(*) para cada a, $S \to S+1$, para cada não a, $S \to S-1$

$\Rightarrow$ a paridade do instante em que $S = 0$ é par e, se esse é $2t$, $\#a_{2t} = t$.

Problema 3 - Folha 1/2

Guilherme Zeus D M.

$$x \cdot f(2f(y) - x) + y^2 f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y)) \qquad [P(x,y)]$$

• Em $P(x,y)$, $\frac{f(x)^2}{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \mid f(x)^2$.

• $f(x) \equiv 0$ funciona, pois $x \cdot 0 + y^2 \cdot 0 = \frac{0}{x} + 0$.

• Se $f(0) = 0$.

$P(x,0)$: $x \cdot f(-x) = \frac{f(x)^2}{x} \Rightarrow x^2 \cdot f(-x) = f(x)^2$

$P(-x,0)$: $\Rightarrow x^2 \cdot f(x) = f(-x)^2$

Logo, $x^4 \cdot x^2 \cdot f(x)) = x^4 \cdot f(-x)^2 = (x^2 \cdot f(-x))^2 = f(x)^4 \Rightarrow f(x)^3 = x^6$ ou $f(x) = 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = x^2$ ou $f(x) = 0$.

• $f(x) \equiv x^2$ funciona, pois $x \cdot (2y^2 - x)^2 + y^2(2x - y^2)^2 = x^3 + y^6 = \frac{x^4}{x} + (y \cdot y^2)^2$.

• Se $f(0) \neq 0$:

$P(f(0), 0)$: $f(0) \cdot f(f(0)) = \frac{f(f(0))^2}{f(0)} + f(0) \Rightarrow$

$f(0)^2 \cdot f(f(0)) = f(f(0))^2 + f(0)^2 \Rightarrow$

$f(0)^2 \cdot (f(f(0)) - 1) = f(f(0))^2 \Rightarrow$

$f(f(0)) - 1 \mid f(f(0))^2 \Rightarrow$

$f(f(0)) - 1 \mid 1 \Rightarrow f(f(0)) = 0$ ou 2

Voltando: $f(0)^2 \cdot 0 = 0^2 + f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 0$. Abs!

ou

$f(0)^2 \cdot 2 = 4 + f(0)^2 \Rightarrow f(0)^2 = 4 \Rightarrow f(0) = \pm 2$. (e $f(f(0)) = 2$)

Mas, $P(2f(0), 0)$: $2f(0) \cdot f(0) = 2f(0)^2 = \frac{f(2f(0))^2}{2f(0)} + f(0) \Rightarrow f(2f(0))^2 = 4f(0)^3 - 2f(0)^2 =$

$f(2f(0))^2 = 4 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 24$ ou $f(2f(0))^2 = 4 \cdot (-8) - 2 \cdot 4 = -40$. Abs, pois $\neq \square$.

3 - Folha 2/2.

oltando ao caso $f(0) = 0$.

ara cada x, $f(x) = 0$ ou $f(x) = x^2$.

Suponha que existe $y_0 \neq 0$ t.q. $f(y_0) = 0$.

$$\left.\begin{aligned} P(x, y_0)&: x \cdot f(-x) + y_0^2 f(2x) = f(x)^2/x \\ P(x,0)&: x \cdot f(-x) = f(x)^2/x \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_0^2 f(2x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(2x) = 0, \forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \equiv 0, \forall x.$

Logo, $f(x) \equiv 0$ ou $f(x) \equiv x^2$ são as soluções.