

Combinatória Geométrica

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1. Dados $2n$ pontos no plano, sem três colineares, sendo n vermelhos e n azuis. Prove que existe um pareamento entre os pontos vermelhos e os pontos azuis tal que os segmentos unindo cada par não se intersectam dois a dois.

Problema 2. (Cone Sul 2001) Um polígono de área S está contido dentro de um quadrado de lado a . Mostre que existem dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior ou igual a S/a .

Problema 3. (Ibero 1997) Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, com P_1 sendo o centro do círculo. Para $k = 1, 2, \dots, 1997$ seja x_k a distância de P_k ao ponto de \mathcal{P} mais próximo de P_k . Mostre que

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1997}^2 \leq 9.$$

Problema 4. São desenhadas $n \geq 3$ retas no plano tais que:

- (i) Quaisquer duas retas são concorrentes;
- (ii) Por todo ponto de interseção de duas retas passa pelo menos mais uma reta.

Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.

Problema 5. Seja C um círculo de raio 16 e A um anel com raio interior 2 e raio exterior 3. Agora, suponha que um conjunto S de 650 pontos são selecionados no interior de C . Prove que podemos colocar o anel A no plano de modo que ele cubra pelo menos 10 pontos de S .

Problema 6. (OBM 2010) Determine todos os valores de n para os quais existe um conjunto S de n pontos, sem que haja três deles colineares, com a seguinte propriedade: é possível pintar todos os pontos de S de modo que todos os ângulos determinados por três pontos de S , todos da mesma cor ou de três cores diferentes, não sejam obtusos. A quantidade de cores disponíveis é ilimitada.

Problema 7. (Banco IMO 1989) Temos um conjunto finito de segmentos no plano, de medida total 1. Prove que existe uma reta ℓ tal que a soma das medidas das projeções destes segmentos a reta ℓ é menor que $2/\pi$.

Problema 8. (OBM 2018) Considere $4n$ pontos no plano, sem três colineares. Utilizando esses pontos como vértices, podemos formar $\binom{4n}{3}$ triângulos. Mostre que existe um ponto X do plano que pertence ao interior de pelo menos $2n^3$ desses triângulos.

Problema 9. Prove que existe um conjunto S de 3^{1000} pontos no plano tal que, para cada ponto P de S , existem pelo menos 2000 pontos em S cuja distância para P é exatamente uma unidade.

Problema 10. (Turquia) Mostre que o plano não pode ser coberto por um número finito de parábolas.

Problema 11. (Ibero 2002) Seja S um conjunto de nove pontos, sem três pontos colineares. Se P é um ponto de S , mostre que a quantidade de triângulos cujos vértices estão em $S - P$ e P está em seu interior é par.

Problema 12. No interior de um quadrado são escolhidos 1000 pontos. Estes pontos, juntamente com os 4 vértices do quadrado, formam um conjunto P onde não há três pontos colineares. Alguns destes pontos são ligados por segmentos de modo a particionar o quadrado em vários triângulos. Não há polígonos com mais de três lados nessa partição e todo ponto é vértice de ao menos um triângulo. Ache a quantidade de triângulos da partição.

Problema 13. (IMO 1989) Sejam n e k dois inteiros positivos e seja S um conjunto de n pontos num plano tais que

- (i) Não haja três pontos de S que sejam colineares;
- (ii) Para qualquer ponto P , há pelo menos k pontos de S que são equidistantes de P .

Prove que

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Problema 14. (Irã 2010) Temos n pontos no plano de modo que não existam três deles colineares. Prove que o número de triângulos com vértices nestes pontos e cuja área é exatamente 1 não pode ser maior que $\frac{2}{3}(n^2 - n)$.

Problema 15. (China 2000, HongBin Yu) Considere n pontos colineares e todas as distâncias entre dois deles. Suponha que cada distância aparece no máximo duas vezes. Prove que existem pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ destas distâncias que aparecem 1 vez cada.

Problema 16. (China 2011) Seja S um conjunto de n pontos no plano tal que não há quatro pontos colineares. Sejam $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ as diferentes distâncias entre os pares de pontos distintos de S e seja m_i a quantidade de pares de pontos cuja distância é exatamente d_i . Prove que

$$\sum_{i=1}^k m_i^2 \leq n^3 - n^2.$$