

Problemas usando Transformações

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

*Sugestões e correções de erros (mesmo que mínimos) são muito bem vindas.
Envie-as para zeusdanmou+tex@gmail.com.*

Sumário

1 Reflexões	1
2 Homotetias	1
3 Rotações	2
4 Roto-homotetias	3

1 Reflexões

Problema 1.1. Seja ABC um triângulo com ortocentro H e circuncentro O . Seja M o ponto médio de BC . Prove que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

Problema 1.2 (Reta de Euler). Seja ABC um triângulo com ortocentro H , circuncentro O e baricentro G . Prove que H, O, G são colineares.

Problema 1.3. Seja ABC um triângulo com ortocentro H e circuncírculo Ω . Seja P um ponto em Ω . Sejam P_A, P_B, P_C as reflexões de P pelas retas BC, CA e AB , respectivamente. Prove que P_A, P_B, P_C, H são colineares.

Problema 1.4 (EGMO 2012, 7). Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncírculo Γ e ortocentro H . Seja K um ponto de Γ no lado oposto de BC relativo a A . Seja L a reflexão de K pela reta AB , e seja M a reflexão de I pela reta BC . Seja E o segundo ponto de intersecção de Γ com o circuncírculo de BLM .

Mostre que as retas KH, EM e BC são concorrentes.

Problema 1.5 (IMO 2011, 6). Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncírculo Γ . Seja ℓ uma reta tangente a Γ , e sejam ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c as retas obtidas após refletir ℓ pelas retas BC, CA e AB , respectivamente.

Mostre que o circuncírculo do triângulo determinado pelas retas ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c é tangente ao círculo Γ .

Problema 1.6 (Balcãs 2018, 1). Um quadrilátero $ABCD$ é inscrito num círculo ω onde $AB > CD$, e AB não é paralelo a CD . Seja M o ponto de intersecção das diagonais AC e BD , e seja E a projeção de M no segmento AB . Se EM bissecta o ângulo $\angle CED$, prove que AB é diâmetro de ω .

2 Homotetias

Problema 2.1 (Círculo de Nove Pontos). Seja ABC um triângulo. Prove que o ponto médio dos lados, o pé das alturas e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices do triângulo com o ortocentro H estão todos sobre um mesmo círculo. Qual é o raio deste círculo?

Problema 2.2. Seja ABC um triângulo com incírculo ω . Seja D a intersecção de ω com BC . Seja T o ponto diametralmente oposto a D em ω . Seja X a intersecção de AT com BC .

Prove que $BD = CX$.

Problema 2.3 (Lema da Estrela da Morte). Sejam Γ_1 e Γ_2 circunferências tangentes, com Γ_1 no interior de Γ_2 . Sejam T o ponto de tangência e AB uma corda de Γ_2 que tangencia Γ_1 em U .

Prove que TU bissecta o arco AB .

Problema 2.4 (IMO 1978, 4). Seja ABC um triângulo com $AB = AC$. Um círculo que é internamente tangente ao circuncírculo de ABC também é tangente aos lados AB e AC nos pontos P e Q , respectivamente.

Prove que o ponto médio de PQ é o incentro de ABC .

Problema 2.5 (IMO 1981, 5). Três circunferências de raios iguais possuem um ponto O em comum e estão no interior de um triângulo dado. Cada circunferência tangencia um par de lados do triângulo.

Prove que o ponto O está na reta que liga o incentro e o circuncentro do triângulo.

Problema 2.6 (IMO 1982, 2). Um triângulo escaleno $A_1A_2A_3$ tem lados a_1, a_2, a_3 , com o lado a_i oposto ao vértice A_i . Seja M_i o ponto médio do lado a_i , e seja T_i o ponto onde o incírculo de $A_1A_2A_3$ tangencia o lado a_i . Seja S_i a reflexão de T_i pela bissetriz interna do ângulo $\angle A_i$.

Prove que as retas M_1S_1, M_2S_2 e M_3S_3 concorrem.

Problema 2.7 (OBM 2012, 2). Dado um triângulo ABC , o exincentro relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas de DB e DC . Sejam I_A, I_B e I_C os exincentros do triângulo escaleno ABC relativos a A, B e C , respectivamente, e X, Y e Z os pontos médios de I_BI_C, I_CI_A e I_AI_B , respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F , respectivamente. Prove que as retas DX, EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO , sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC , respectivamente.

Problema 2.8 (Japão 2007, 3). Seja Γ o circuncírculo do triângulo ABC . Seja Γ_A o círculo que tangencia os lados AB e AC e que tangencia Γ . Seja T_A a intersecção entre Γ e Γ_A . Defina Γ_B, T_B, Γ_C e T_C de maneira análoga.

Prove que as retas AT_A, BT_B e CT_C são concorrentes.

Problema 2.9 (OBM 2014, 6). Seja ABC um triângulo com incentro I e incírculo ω . O círculo ω_A tangencia externamente ω e toca os lados AB e AC em A_1 e A_2 . Seja r_A a reta A_1A_2 . Defina r_B e r_C de modo análogo. As retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo XYZ . Prove que o incentro de XYZ , o circuncentro de XYZ e I são colineares.

Problema 2.10 (OBM 2017, 5). No triângulo ABC , seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC , respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definem um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI .

Problema 2.11 (IMO 1983, 2). Seja A um dos dois pontos de intersecção de duas circunferências C_1 e C_2 , com raios distintos e centros O_1 e O_2 , respectivamente. Uma das tangentes comuns das circunferências tangencia C_1 em P_1 e C_2 em P_2 , enquanto a outra tangente comum tangencia C_1 em Q_1 e C_2 em Q_2 . Seja M_1 o ponto médio de P_1Q_1 e M_2 o ponto médio de P_2Q_2 .

Prove que $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

Problema 2.12 (IMO 1992, 4). Seja Γ uma circunferência, ℓ uma reta tangente à circunferência Γ e M um ponto em ℓ . Ache o lugar geométrico de todos os pontos P com a seguinte propriedade: existem dois pontos Q e R em ℓ tal que M é ponto médio de QR e Γ é incírculo de PQR .

Problema 2.13 (IMO 1999, 5). Duas circunferências Ω_1 e Ω_2 tangenciam internamente a circunferência Ω em M e N e o centro de Ω_2 está sobre Ω_1 . A corda comum de Ω_1 e Ω_2 intersecta Ω em A e B . MA e MB intersectam Ω_1 em C e D . Prove que Ω_2 é tangente a CD .

Problema 2.14 (IMO 2008, 6). Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $BA \neq BC$. Sejam ω_1 e ω_2 os incírculos de ABC e ADC , respectivamente. Suponha que existe uma circunferência ω tangente à reta BA de forma que A está entre B e o ponto de tangência, tangente à reta BC de forma que C está entre B e o ponto de tangência, e que também seja tangente às retas AD e CD . Prove que as tangentes externas comuns a ω_1 e ω_2 se intersectam sobre ω .

3 Rotações

Problema 3.1 (Ponto de Fermat).

- (a) Seja ABC um triângulo com ângulos menores ou iguais a 120° . Construa o triângulo equilátero BCD , com D e A em semiplanos distintos em relação a reta BC . Construa os triângulos equiláteros CAE e ABF de forma análoga. Prove que AD, BE, CF possuem tamanhos iguais e são concorrentes.

Vamos chamar essa intersecção de *ponto de Fermat*.

- (b) Seja ABC um triângulo com ângulos menores ou iguais a 120° . Seja P um ponto no interior de ABC . Prove que $AP + BP + CP$ é mínimo quando P é o ponto de Fermat.

Problema 3.2. Dado um paralelogramo $ABCD$, construa externamente quadrados em seus quatro lados. Prove que os centros desses quadrados foram um quadrado.

Problema 3.3 (Mathematical Olympiad Challenges). Sejam ABC e BCD triângulos equiláteros, com A e D distintos. Uma reta passa por D , intersectando o prolongamento de AC em M e AB em N . Seja P a intersecção de CN e BM . Prove que $\angle BPC = 60^\circ$.

Problema 3.4 (Banco RMM 2019, P4, Original ☞). É dado um ponto P no plano em que reside um triângulo equilátero ABC desconhecido. É dado que $AP < BP < CP$. Suponha que é possível determinar o valor do lado de ABC sabendo somente o valor dos tamanhos AP , BP e CP . Prove que P está no circuncírculo de ABC .

4 Roto-homotetias

Problema 4.1. Sejam AB e CD segmentos, e seja X a intersecção entre AC e BD . Se os circuncírculos de ABX e CDX se intersectam em O , então O é o centro da única roto-homotetia que leva AB em CD .

Problema 4.2 (IMO 2016, 1). O triângulo BCF é retângulo em B . Seja A o ponto da reta CF tal que $FA = FB$ e que F esteja entre A e C . Escolhe-se o ponto D de modo que $DA = DC$ e que AC seja bissetriz de $\angle DAB$. Escolhe-se o ponto E de modo que $EA = ED$ e que AD seja a bissetriz de $\angle EAC$. Seja M o ponto médio de CF . Seja X o ponto tal que $AMXE$ seja um paralelogramo. Prove que BD , FX e ME são concorrentes.

Problema 4.3 (IMO 2010, 2). Seja ABC um triângulo, I o seu incentro e Γ o seu circuncírculo. A reta AI intersecta novamente Γ no ponto D . Sejam E um ponto no arco BC que contém D e F um ponto do segmento BC , tal que

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Seja G o ponto médio de IF , prove que as retas EI e DG se intersectam sobre Γ .

Problema 4.4 (EGMO 2017, 6). Seja ABC um triângulo acutângulo no qual não há dois lados com a mesma medida. As reflexões do baricentro G e do circuncentro O de ABC através dos lados BC, CA, AB são denotadas por G_1, G_2, G_3 e O_1, O_2, O_3 , respectivamente. Mostre que os circuncírculos dos triângulos G_1G_2C , G_1G_3B , G_2G_3A , O_1O_2C , O_1O_3B , O_2O_3A e ABC têm um ponto em comum.

Referências

- [1] Evan Chen. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*. MAA Problem. Mathematical Association of America, 2016.
- [2] Viktoriya Krakovna. Transformations, ceva and menelaus theorems, and harmonic points. Canada Winter Training, January 2010.
- [3] Davi Lopes. Ampliando horizontes geométricos e encolhendo problemas: Homotetias e composição de homotetias. Semana Olímpica da OBM, 2018.
- [4] Anca Mustata. Geometric transformations: Reflections, homotheties (dilations), rotations and spiral similarity, translations.
- [5] Régis. Homotetia e outros temas relacionados. Semana Olímpica da OBM, 2018.