Problemas Sortidos de Combinatória – Live

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. **(Banco IMO 2016, C1)** Um lider de uma equipe da IMO escolhe inteiros positivos n e k, com $n > k$, e anuncia os números para o vice-líder e para um competidor. O líder secretamente conta ao vice-líder uma sequência de n bits (*bit* significa *dígito binário* — 0 ou 1), e o vice-líder escreve num papel todas as sequências de n bits que diferem da sequência escrita pelo líder em exatamente k posições. (Por exemplo, se $n = 3$ e $k = 1$, e o líder escolhe 101, o vice-líder iria escrever 001, 111 e 100.) O competidor pode olhar para as sequências escritas pelo vice-líder e tentar adivinhar a sequência escrita pelo líder. Qual é o número mínimo de tentativas (em função de n e k) necessárias para o competidor garantir uma resposta correta?

Dica. Como em muitos problemas de matemática, especialmente de combinatória, faça casos pequenos. (Inclusive, uma boa ideia é fazer casos pequenos para entender o enunciado.)

Vamos jogar? Eu vou assumir o papel de ambos líder e vice-líder, e você vai assumir o papel do competidor tentando adivinhar a sequência original.

Caso 1. O líder anuncia $n = 5$ e $k = 2$, secretamente conta a sequência de 5 bits escolhida para o vice-líder. Então, o vice-líder escreve num papel as sequências 00111, 11010, 01000, 01110, 10011, 00001, 11001, 01101, 11111, 00010.

(João Arthur conseguiu acertar a sequência original (01011) com uma única tentativa.)

Caso 2. O líder anuncia $n = 2$ e $k = 1$, secretamente conta a sequência de 2 bits escolhida para o vice-líder. Então, o vice-líder escreve num papel as sequências 00, 11.

Pergunta chave. Quantas vezes o i-ésimo bit é invertido ou não é inverido, quando olhamos as sequências do vice-líder? *Resposta.* Aparece invertido $\binom{n-1}{k-1}$ vezes, e aparece não-invertido $\binom{n-1}{k}$.

Logo, se $\binom{n-1}{k-1} \neq \binom{n-1}{k}$, podemos identificar o i-ésimo bit vendo qual bit aparece $\binom{n-1}{k-1}$ vezes (que vai ser o bit invertido) e qual bit aparece $\binom{n-1}{k}$ vezes (que vai ser o bit original).

Como $\binom{n-1}{k-1} \neq \binom{n-1}{k} \iff n \neq 2k$, falta só analisarmos o caso em que $n = 2k$.

Estamos agora no caso $n = 2k$.

Sejam a e b duas sequências de $2k$ bits. Suponha que a e b geram a mesma lista (a lista de sequências geradas pelo vice-líder). As sequências diferenciam em ℓ posições, i.e., são iguais em $2k - \ell$ posições.

Vamos supor que $\ell \geq k$. Vamos criar uma sequência c que é igual a a, com a diferença que, dentre as ℓ posições em que a e b diferenciam, k posições são escolhidas para serem invertidas. Como c é uma sequência derivada da sequência a, com exatamente k posições inveritdas, c está na lista do vice-líder. Mas, c difere de b em $\ell - k$ posições. Como c também está na lista relativa a b, é necessário que $\ell - k = k \implies \ell = 2k \implies a$ e b são sequências inversas.

Algo análogo pode ser feito no caso $\ell \leq k$, que chegará na conclusão de que a e b são sequências iguais. (Minha recomendação é que você tente escrever essa parte por completo.)

Além disso, uma sequência a e sua sequência inversa a' sempre geram a mesma lista. (Minha recomndação é que você mostre por completo porque isso acontece.)

Logo, o competidor pode garantir acertar com número de movimentos máximo $\begin{cases} 2, & \text{se } n = 2k \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

Nota. Um problema interessante que usa essa noção de distância (*diferir em k posições*) é o (EGMO 2013, 6).

2. (Metrópoles 2017, 2) Em um país, há voos de ida e volta, sem escalas, entre alguns pares de cidades. Qualquer cidade pode ser alcançada a partir de qualquer outra usando uma sequência de no máximo 100 voos. Além disso, qualquer cidade pode ser alcançada a partir de qualquer outra usando uma sequência com um número par de voos. Qual é o menor d para o qual se pode sempre afirmar que qualquer cidade pode ser alcançada por qualquer outra usando uma sequência com um número par de voos menor ou igual a d?

Seja $100 = k$. Vamos provar que $d = 2k$.

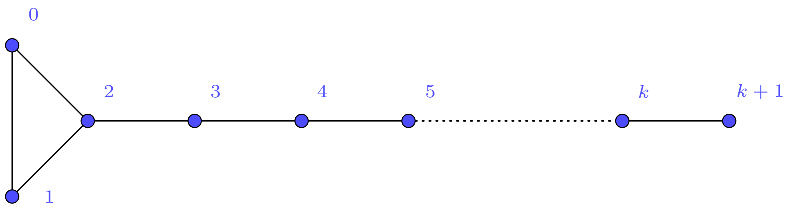
Dizemos que $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_t)$ é um caminho se e somente se v_i tem um voo, sem escala, para $v_{i+1}, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, t-1\}$. Adicionalmente, dizemos que esse caminho liga v_0 e v_t, além de ter tamanho t (número de voos).

Para duas cidades u e v, definimos $d(u, v)$ como o menor tamanho de caminho entre todos os caminhos que ligam u e v. Definimos $d_2(u, v)$ como o menor tamanho de caminho entre todos os caminhos que ligam u e v que possuem tamanho par.

Definimos o *parâmetro de um grafo* G, com símbolo $p(G)$, como o valor máximo de $d_2(u, v)$, variando u e v dentre as cidades (vértices) de G.

Estamos procurando o menor d para o qual se pode sempre afirmar que $d_2(u, v) \leq d$, para quaisquer duas cidades u e v de qualquer grafo G que satisfaça as condições iniciais do enunciado. Em outras palavras, estamosprocurando o menor d para o qual $p(G) \leq d$, para todo grafo G que satisfaça as condições iniciais do enunciado. Em outras palavras (novamente), queremos achar o valor máximo de $p(G)$, variando G dentre os grafos que satisfazem as confições iniciais do enunciado.

Vamos olhar para o grafo G_1 a seguir. O conjunto dos vértices de G_1 é $\{0, 1, 2, 3, \ldots, k+1\}$.



Confira que G_1 satisfaz as condições iniciais do enunciado, ou seja,

- confira que, para qualquer par de cidades, existe um caminho ligando elas com tamanho menor ou igual a k. Em outras palavras, confira que $d(u, v) \leq k$.
- confira que, para qualquer par de cidades, existe um caminho ligando elas com tamanho par.

Confira que $d_2(k, k+1) = 2k$, e que essa é, de fato, o maior valor de $d_2(u, v)$ em G_1. Consequentemente, $p(G_1) = 2k \implies \max p(G) \geq 2k$.

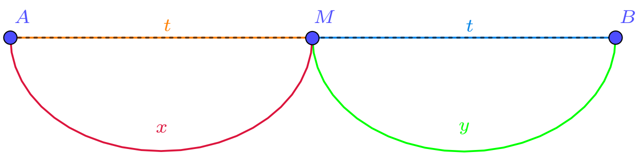
Vamos supor que existe um grafo G_2, que satizfaz as condiçoões iniciais do enunciado, e tal que $p(G_2) = 2t > 2k$. Isso significa que existem dois vértices (que chamaremos de A e B) tal que $d_2(A, B) = 2t$. Um dos caminhos de tamanho $2t$ que liga A e B está desenhado abaixo em pontilhado (note que existem vértices dentro desse caminho que não estão desenhados). Seja M o vértice que se encontra exatamente na metade desse caminho.

M divide o caminho pontilhado naturalmente em dois subcaminhos. O primeiro subcaminho, que liga A e M, está representado na figura com laranja, enquanto o segundo subcaminho, que liga M e B está representado na figura com azul. Ambos esses subcaminhos tem tamanho exatamente t.

Como $d(A, M) \leq k$ (pelo enunciado), existe um caminho com tamanho $x \leq k$ que liga A e M. Analogamente, existe um caminho com tamanho $y \leq k$ que liga M e B.

Se juntarmos os caminhos vermelho e azul, temos um caminho com tamanho $x + t$ (que é menor que $2t$) que liga A e B. Como $d_2(A, B) = 2t$, $x + t$ deve ser ímpar. Analogamente, $y + t$ deve ser impar. Juntando, temos que $x + y$ é par.

Porém, podemos juntar os caminhos vermelho e verde, criando um caminho com tamanho $x + y$ (que é par e é menor que $2t$) que liga A e B. Chegamos numa contradição!



Portanto, não existe grafo G_2 com essa propriedade, o que significa que o valor máximo de $p(G)$ é exatamente $2k$.