Agregado de Problemas

1 Lista 1, PECI

Problema 1.1
Calcule $123123 \div 1001$.

Problema 1.2
Pense em um inteiro de dois algarismos. Subtraia a soma desses algarismos. Divida o resultado por 9. O que você obtém? Explique!

Problema 1.3
Existe algum número de 2 algarismos tal que se subtraírmos o número formado pelos mesmos algarismos na ordem inversa o resultado é um número primo?

Problema 1.4
Encontre um número inteiro positivo menor do que 100 que aumenta em 20% quando a ordem de seus algarismos é invertida.

Problema 1.5
Explique por que o seguinte método funciona: Para elevar ao quadrado um número terminado em 5, basta apagar esse último algarismo, multiplicar o número assim obtido por seu sucessor e acrescentar os algarismos 25 no final do resultado.

Problema 1.6
Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos?

Problema 1.7
O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. O algarismo das centenas de N é:

Problema 1.8
Determine o menor número inteiro positivo cujo primeiro algarismo é 1 e que fica multiplicado por 3 quando esse algarismo é transferido para o final do número.

Problema 1.9
Encontre todos os números cujo primeiro algarismo é 6 e que ficam divididos por 25 quando este algarismo é apagado.

Problema 1.10
Encontre todos os primos que são soma e diferença de dois primos.

Problema 1.11

Determine um número inteiro positivo de 6 algarismos distintos tal que os resultados de suas multiplicações por $2, 3, 4, 5$ e 6 são números formados pelos mesmos algarismos em outra ordem.

Problema 1.12

Qual é o maior inteiro positivo n tal que os restos das divisões de 154, 238 e 334 por n são iguais?

Problema 1.13

Hoje é sábado. Que dia da semana será daqui a 99 dias?

Problema 1.14

Prove que a fração $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível para todo inteiro positivo n.

Problema 1.15

Prove que as expressões $2x+3y$ e $9x+5y$ são divisíveis por 17 para o mesmo conjunto de valores inteiros de x e y.

Problema 1.16

Determine todos os valores inteiros de x tais que $\dfrac{15x^2-11x+37}{3x+2}$ é inteiro.

Problema 1.17

Qual é o maior inteiro n para o qual n^3+100 é divisível por $n+10$?

Problema 1.18

Prove que, para todo natural n,

$$(n!+1, (n+1)!+1) = 1.$$

Problema 1.19

Prove que, para inteiros positivos m e $a > 1$,

$$\left(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1\right) = 1.$$

Problema 1.20

Os números na sequência $101, 104, 109, 116, \ldots$ são gerados pela fórmula $a_n = 100+n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Sendo $d_n = (a_n, a_{n+1})$, qual é o valor máximo assumido por d_n?

Problema 1.21

Prove que existem exatamente três triângulos retângulos cujos lados têm por medida números inteiros e cuja área é numericamente igual ao dobro do perímetro.

Problema 1.22

Prove que n^2 é divisor de $(n+1)^n-1$, para todo inteiro positivo n.

Problema 1.23

Determine o maior inteiro k tal que 2009^k é divisor de $2008^{2009^{2010}}+2010^{2009^{2008}}$.

Problema 1.24 (Números de Fermat)

Seja $F_k = 2^{2^k} + 1$, com k inteiro maior que 1.

(a) Prove que $(F_k, F_j) = 1$ se, e somente se, $k \neq j$.

(b) Prove que os números primos da forma $2^n + 1$ são números de Fermat.

Problema 1.25

Prove que se m e n são números naturais e m é ímpar, então $(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$.

Problema 1.26

Encontre todas as ternas (x, y, z) de números naturais distintos, dois a dois primos entre si, tais que a soma de quaisquer dois é divisível pelo terceiro.

Problema 1.27

Um retângulo de lados inteiros m, n é dividido em quadrados de lado 1. Um raio de luz entra no retângulo por um dos vértices, na direção da bissetriz do ângulo reto, e é refletido sucessivamente nos lados do retângulo. Quantos quadrados são atravessados pelo raio de luz?

Problema 1.28

Ao converter a fração m/n em um número decimal, onde m e n são inteiros positivos e n é menor do que 100, Vladimir encontrou um quociente que continha, em uma determinada posição após a vírgula decimal, os algarismos 167, nesta ordem. Prove que Vladimir cometeu um erro nessa divisão.

Problema 1.29 (O jogo de Euclides)

Um juiz fornece um conjunto de dois números inteiros positivos $C_1 = \{x_1, y_1\}$ a dois jogadores e indica quem faz o primeiro lance. Um lance consiste em substituir $C_n = \{x_n, y_n\}$ por $C_{n+1} = \{x_{n+1}, y_{n+1}\}$ tal que $x_{n+1} = \min C_n$ e $y_{n+1} = \max C_n - kx_{n+1}$, para algum k inteiro positivo.

Ganha o jogador que obtiver pela primeira vez $y_{n+1} = 0$. Determine os valores de x_1/y_1 para os quais o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora, e descreva essa estratégia.

Problema 1.30

Qual é o dígito das unidades do número 3^{2009}?

Fatos que Ajudam

Definição 1.1 (Divisibilidade)

Sejam a, b inteiros. Dizemos que a *divide* b se existe k inteiro tal que $b = ka$. Neste caso usamos a notação $a \mid b$.

Proposição 1.2 (Desigualdade)

Se $a \mid b$ e $b \neq 0$, então $|a| < |b|$.

Definição 1.3 (Máximo Divisor Comum)

Denominamos *máximo divisor comum de* a *e* b ao maior inteiro positivo que é divisor tanto de a como de b. Representaremos esse número por (a, b).

Proposição 1.4 (Algoritmo de Euclides)

$(a, b) = (a, ax + b)$, para todo x.

Teorema 1.5 (Teorema Fundamental da Aritmética)
Se $(a, b) = 1$ e $a \mid bc$, então $a \mid c$.

Definição 1.6 (Primos)
Um número inteiro positivo é dito *primo* quando tem exatamente dois divisores positivos.

Teorema 1.7 (Fatoração Única)
Todo inteiro positivo maior que 1 pode ser expresso, de forma única salvo a ordem dos fatores, como produto de números primos.

Teorema 1.8 (Teorema de Bezout)
(a, b) é o menor inteiro positivo da forma $ax + by$, com $x, y \in \mathbb{Z}$.

2 Lista 2, PECI

Problema 2.1 (IMO)

Quando 4444^{4444} é escrito em notação decimal, a soma dos seus algarismos vale A. Seja B a soma dos algarismos de A. Determine a soma dos algarismos de B.

Problema 2.2

É possível, para algum inteiro positivo n, escrever os números n, n^2 e n^3 utilizando apenas uma vez cada um dos algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9?

Problema 2.3 (OBM 1989)

Se n é um inteiro positivo tal que $\frac{n(n+1)}{3}$ é inteiro e quadrado perfeito, prove que n é múltiplo de 3 e que tanto $n+1$ como $\frac{n}{3}$ são quadrados perfeitos.

Problema 2.4 (OBM 2001)

Dado um inteiro $a_0 > 1$, define-se a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ da seguinte maneira: para cada $k \geq 0$, a_{k+1} é o menor inteiro maior que a_k tal que $\mathrm{mdc}(a_{k+1}, a_0 a_1 \cdots a_k) = 1$. Determine todos os valores de a_0 para os quais todos os termos da sequência são primos ou potências de primos.

Problema 2.5 (IMO 1997)

Encontre todos os pares (a, b) de inteiros positivos tais que

$$a^{b^2} = b^a.$$

Problema 2.6 (IMO 1992)

Encontre todos os inteiros a, b, c com $1 < a < b < c$ tais que o produto $(a-1)(b-1)(c-1)$ é um divisor de $abc - 1$.

Problema 2.7 (IMO 1994)

Determine todos os pares ordenados (m, n) de inteiros positivos tais que

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

é inteiro.

Problema 2.8 (IMO 1998)

Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos tais que ab^2+b+7 é um divisor de a^2b+a+b.

Problema 2.9 (IMO 2006)

Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 2.10

Resolva as seguintes equações em congruências:

(a) $2x \equiv 1 \pmod{17}$

(b) $3x \equiv 6 \pmod{18}$

(c) $25x \equiv 15 \pmod{29}$

(d) $36x \equiv 8 \pmod{102}$

(e) $14x \equiv 36 \pmod{18}$

Problema 2.11

Encontre todas as soluções inteiras das equações

(a) $48x + 7y = 17$

(b) $9x + 16y = 35$

(c) $5x - 53y = 17$

(d) $75x - 131y = 6$

(e) $12x + 25y = 331$

Problema 2.12

Resolva o sistema de congruências

$$\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{9} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

3 Lista 3, PECI

Problema 3.1

Determine o último dígito do número $\left\lfloor \frac{10^{1992}}{10^{83}+7} \right\rfloor$.

Problema 3.2

Determine os dois últimos dígitos de $9^{(9^9)}$ e de $14^{(14^{14})}$.

Problema 3.3

Determine os três últimos dígitos de 7^{9999}.

Problema 3.4

Sejam x, y, z inteiros tais que $x^3 + y^3 - z^3$ é um múltiplo de 7. Mostre que um desses números é múltiplo de 7.

Problema 3.5

Mostre que

(a) Se n é um inteiro positivo maior do que 1 e $2^n + n^2$ é primo, então $n \equiv 3 \pmod 6$.

(b) Seja $x \equiv 23 \pmod{24}$, se a, b são inteiros positivos tais que $ab = x$, então $a+b$ é um múltiplo de 24.

(c) Se $n^2 + m$ e $n^2 - m$ são quadrados perfeitos, então m é divisível por 24.

(d) Se $2n + 1$ e $3n + 1$ são quadrados perfeitos, então n é divisível por 40.

Problema 3.6

Seja S um conjunto de números primos, tal que se a, $b \in S$, então $ab + 4 \in S$. Mostre que S deve ser o conjunto vazio.

Problema 3.7

Prove que a sequência $11, 111, 1111, \ldots$ não contém quadrados.

Problema 3.8

Seja d um inteiro positivo diferente de 2, 5 e 13. Mostre que podemos escolher a e b distintos, $a, b \in \{2, 5, 13, d\}$, tais que $ab - 1$ não seja um quadrado perfeito.

Problema 3.9

Sejam $d_1, d_2, \ldots, d_k$ todos os divisores positivos de um natural n, onde $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Encontre todos os naturais n para os quais $k \geq 4$ e $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$.

Problema 3.10

Para n e $k \in \mathbb{N}$, definimos $F(n, k) = \sum_{r=1}^{n} r^{2k-1}$. Prove que $F(n, 1)$ divide $F(n, k)$.

Problema 3.11

Prove que existe uma sucessão $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$, onde $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, com $a_0 = 6$ tal que para cada inteiro positivo n, sendo $x_n = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \cdots + 10^{n-1}a_{n-1}$, $x_n^2 - x_n$ é divisível por 10^n.

Problema 3.12
Existe um múltiplo de 5^{100} que não contém zeros em sua representação decimal?

Problema 3.13
Para cada natural n, prove que há n naturais consecutivos, nenhum dos quais é potência inteira de um número primo.

Problema 3.14
Existem um milhão de inteiros consecutivos cada um dos quais é divisível pelo quadrado de um número primo?

Problema 3.15
Existem 14 inteiros positivos consecutivos cada um dos quais é divisível por um ou mais primos p do intervalo $2 \leq p \leq 11$?

Problema 3.16
Existem 21 inteiros positivos consecutivos cada um dos quais é divisível por um ou mais primos p do intervalo $2 \leq p \leq 13$?

Problema 3.17
Mostre que existem infinitos conjuntos de 1983 inteiros positivos consecutivos, cada um dos quais é divisível por algum número da forma a^{1983}, onde a é um inteiro positivo.

Problema 3.18
Um ponto do reticulado é dito visível se $(x, y) = 1$. É verdade que dado um inteiro positivo n, existe um ponto do reticulado cuja distância a todo ponto visível é maior ou igual a n?

Problema 3.19
Existe um número ímpar $n > 1$ que não é da forma $2^k + p$, onde k é um número natural e p é um primo ou o número 1?

Problema 3.20
Prove que existe um inteiro positivo k tal que $k \cdot 2^n + 1$ é composto para todo inteiro positivo n.

Problema 3.21 (IMO)
Encontre um par de inteiros positivos a e b tais que $ab(a+b)$ não é divisível por 7 e $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ é divisível por 7^7.

Problema 3.22
Mostre que, para todo inteiro positivo n, a sequência

$$2, 2^2, 2^{2^2}, \ldots \pmod{n}$$

é constante a partir de um certo ponto.

Problema 3.23 (OBM)
Mostre que existe um número da forma $199\cdots91$, com mais de dois noves, que é múltiplo de 1991.

Problema 3.24

Os três últimos dígitos de 1978^m são iguais aos três últimos dígitos de 1978^n $(1 \leq m < n;\ \ m, n \in \mathbb{N})$. Determine m e n tais que $m + n$ seja mínimo.

Problema 3.25

Prove que o conjunto $\{2^k - 3 \mid k = 2, 3, \ldots\}$ contém um subconjunto infinito cujos membros são primos dois a dois.

Problema 3.26

Seja $n > 3$ um inteiro ímpar. Prove que existe um primo p tal que p divide $2^{\phi(n)} - 1$, mas não divide n.

Problema 3.27

Mostre que para todo inteiro positivo n existe uma potência de 2 com uma string de pelo menos n zeros sucessivos.

Problema 3.28

Um inteiro positivo é denominado número duplo se sua representação decimal consiste de um bloco de dígitos não iniciado por zero, seguido imediatamente de um bloco idêntico. Então, por exemplo, 360360 é um número duplo, mas 36036 não é. Mostre que existem infinitos números duplos que são quadrados perfeitos.

Problema 3.29

Prove que existe uma potência de 2 cujos últimos 1000 dígitos são todos iguais a 1 ou 2.

Problema 3.30

Sendo $k \geq 2$ e $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ números naturais tais que $n_2 \mid 2^{n_1} - 1$, $n_3 \mid 2^{n_2} - 1$, $\ldots$, $n_k \mid 2^{n_{k-1}} - 1$ e $n_1 \mid 2^{n_k} - 1$.

Mostre que $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$.

Problema 3.31

Mostre que se n é um inteiro maior do que 1, então n não divide $2^n - 1$.

Problema 3.32

Determine todos os inteiros $n \geq 1$ tais que $(2^n + 1)/n^2$ seja inteiro.

Problema 3.33

Existe um inteiro positivo n com exatamente 2000 fatores primos distintos tal que $n \mid 2^n + 1$?

Problema 3.34

Determine todos os pares (n, p) de inteiros estritamente positivos tais que

(i) p é primo,

(ii) $n \leq 2p$, e

(iii) $(p-1)^n + 1$ é divisível por n^{p-1}.

Problema 3.35

Se p é um primo $(p > 5)$, então o número $(p-1)! + 1$ não é uma k-ésima potência de p, k natural.

Problema 3.36

Se p é um primo ímpar, mostre que

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv p + (p-1)! \pmod{p^2}.$$

Problema 3.37

(a) Encontre todos os primos p tais que p divide $5^{p^2} + 1$.

Problema 3.38

(b) Mostre que existem infinitos pares de primos $(p; q)$ tais que p divide $q^{p^2} + 1$.

Problema 3.39

Mostre que se n é ímpar então $2^{n!} - 1$ é divisível por n.

Problema 3.40

Prove que, dado um primo p, existem infinitos números da forma $2^n - n$, n natural, divisíveis por p.

Problema 3.41

Seja $a > 1$ um número inteiro. Encontre todos os números naturais que dividem algum dos números da forma $a_n = a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1$.

Problema 3.42

Um número é dito *alternado* se seus dígitos na base decimal são alternadamente nulo e não nulo, e se seu dígito das unidades é não nulo. Por exemplo, 4050201 é alternado, mas 4050 não é. Encontre todos os números inteiros positivos que não dividem nenhum número alternado.

Problema 3.43

Determine todas as ternas de números $(a; m; n)$ tais que $a^m + 1$ divide $(a+1)^n$.

Problema 3.44

Seja $A(m, n) = m^{3^{4n}+6} - m^{3^{4n}} - m^5 + m^3$. Encontre todos os valores de n para os quais $A(m, n)$ é divisível por 1992 para todo m inteiro.

Problema 3.45

Seja p um número primo. Demonstre que existe um número primo q tal que, para todo inteiro n, o número $n^p - p$ não é divisível por q.

Fatos que ajudam

Definição 3.1 (Função ϕ de Euler)

A função $\phi\colon \mathbb{Z}_+^* \longrightarrow \mathbb{Z}_+^*$ conta o número de inteiros positivos menores ou iguais a n, primos com n.

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ primo}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Teorema 3.2 (Teorema de Euler-Fermat)
Sendo $\mathrm{mdc}(m, a) = 1$, então
$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

Em particular, quando m é primo, temos o Pequeno Teorema de Fermat:
$$a^m \equiv a \pmod{m}.$$

Definição 3.3 (Menor Expoente)
Seja d o menor expoente tal que $a^d \equiv 1 \pmod{m}$. Então qualquer outro expoente t para o qual $a^t \equiv 1 \pmod{m}$ é um múltiplo de d.

Teorema 3.4 (Teorema de Wilson)
p é primo se, e somente se, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

4 Lista Singular de Teoria dos Números, Matematicamente

Aqui só estão os problemas que nào apareceram acima.

Problema 4.1

Sejam a e b inteiros positivos. Prove que se $4ab - 1$ divide $(4a^2 - 1)^2$, então $a = b$.

Problema 4.2

Determine todas as ternas (p, x, y) de inteiros positivos, com p primo, tais que $x^{p-1} + y$ e $x + y^{p-1}$ são potências de p.

5 Achados do Zeus

Problema 5.1 (Bangladesh 2019, 1)

Find all prime numbers such that the square of the prime number can be written as the sum of cubes of two positive integers.

Problema 5.2 (Canadá 1970, 1)

Find all number triples (x, y, z) such that when any of these numbers is added to the product of the other two, the result is 2.

Problema 5.3 (Canadá 1970, 4)

Solve the following items:

(a) Find all positive integers with initial digit 6 such that the integer formed by deleting 6 is $1/25$ of the original integer.

(b) Show that there is no integer such that the deletion of the first digit produces a result that is $1/35$ of the original integer.

Problema 5.4 (Canadá 1970, 7)

Show that from any five integers, not necessarily distinct, one can always choose three of these integers whose sum is divisible by 3.

Problema 5.5 (Canadá 1970, 10)

Given the polynomial

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

with integer coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$, and given also that there exist four distinct integers a, b, c and d such that

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5,$$

show that there is no integer k such that $f(k) = 8$.

Problema 5.6 (Andrei Neguţ, Problems for the Mathematical Olympiads, N5)

Seja $p \geq 5$ um primo. Se

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p} = \frac{a}{b},$$

prove que p^4 divide $ap - b$.

Problema 5.7 (Balcãs 2017, 3)

Let $\mathbb{N}$ denote the set of positive integers. Find all functions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ such that

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$$

for all $m, n \in \mathbb{N}$

Problema 5.8 (Putnam 2018, A1)

Ache todos os pares ordenados de inteiros positivos (a, b) tais que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2018}.$$

Problema 5.9 (Putnam 2017, A1)

Let S be the smallest set of positive integers such that

(a) 2 is in S,

(b) n is in S whenever n^2 is in S, and

(c) $(n+5)^2$ is in S whenever n is in S.

Which positive integers are not in S? *The set S is "smallest" in the sense that S is contained in any other such set.*

Problema 5.10 (Putnam 2017, B2)

Suppose that a positive integer N can be expressed as the sum of k consecutive positive integers

$$N = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+k-1)$$

for $k = 2017$ but for no other values of $k > 1$. Considering all positive integers N with this property, what is the smallest positive integer a that occurs in any of these expressions?