

## Estudo em Grupo

Guilherme Zeus Moura  
zeusdanmou@gmail.com

### Problema 1 (França 1990, 4)

- (a) Qual é a área máxima de um triângulo com vértices dentro de um quadrado (incluindo sua borda)?
- (b) Qual é o volume máximo de um tetraedro com vértices em um dado cubo (incluindo sua borda)?

**Problema 2 (Excelence 2019, 1)** Seja  $ABC$  um triângulo escaleno com circuncírculo  $\omega$ . A tangente a  $\omega$  em  $A$  encontra  $BC$  em  $D$ . A mediana relativa ao vértice  $A$  do triângulo  $ABC$  intersecta  $BC$  e  $\omega$  em  $M$  e  $N$ , respectivamente. Seja  $K$  um ponto tal que  $ADMK$  é paralelogramo. Prove que  $KA = KN$ .

**Problema 3 (USAJMO 2015, 1)** Dada uma sequência de números reais, um movimento consiste em escolher dois termos e trocar cada um deles por sua média aritmética.

Mostre que existe uma sequência de 2015 números reais distintos tal que, após um movimento inicial ser aplicado a sequência – não importa qual seja esse movimento – sempre há um jeito de continuar com uma sequência finita de passos e obter, no fim, uma sequência constante

**Problema 4 (Itália 2007, 4)** Após perder uma aposta para Zeus, Guilherme propõe o seguinte jogo. Começando com os números  $0, 1, \dots, 1024$ , Zeus apaga  $2^9$  números a sua escolha; então Guilherme apaga  $2^8$  dos números remanescentes, então Zeus apaga  $2^7$  números, etc. No fim, sobram dois números  $a$  e  $b$ . Guilherme paga a Zeus  $|a - b|$  reais. Qual é a maior quantidade de dinheiro que Zeus pode garantir ganhar independente da estratégia de Guilherme?

**Problema 5 (Itália 2007, 5)** Considere a sequência dada por  $x_1 = 2$ ,  $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ , para  $n \geq 1$ . Prove que  $n$  e  $x_n$  são coprimos para todo  $n \geq 1$ .

**Problema 6 (Itália TST 1999, 1)** Prove que a equação

$$2^p + 3^p = a^n$$

não tem solução para  $p$  primo e  $a, n > 1$  inteiros.