Problema 2 (Macedônia 2018) (TN/Murilo)

Encontre todos os inteiros positivos n tal que $9^n - 7$ pode ser escrito como o produto de pelo menos dois inteiros positivos consecutivos.

O produto de três ou mais consecutivos é múltiplo de 3, mas $9^n - 7$ não é múltiplo de 3. Logo, deve ser o produto de exatamente dois inteiros consecutivos. Logo, existe x t.q.:

$$x \cdot (x+1) = 9^n - 7$$

$$x^2 + x - (9^n - 7) = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 9^n - 28 = (2 \cdot 3^n)^2 - 27 = t^2$$

Mas, a diferença entre $(2 \cdot 3^n)^2$ e t^2

$$\geq$$

$$(2 \cdot 3^n)^2 - (2 \cdot 3^n - 1)^2 = 4 \cdot 3^n - 1$$

$$\Rightarrow \quad 27 \geq 4 \cdot 3^n - 1 \quad \Rightarrow \quad 7 \geq 3^n \quad \Rightarrow \quad n \leq 1.$$

Basta checar que $n = 1$ é a única solução:

$$9^1 - 7 = 2 = 1 \cdot 2.$$

Logo, $n = 1$ é a única solução $\square$