

Alguns Problemas de Geometria

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1 Ideias úteis

- **Faça uma boa figura!** O que é uma boa figura?
 - é feita com régua e compasso;
 - é grande (uma folha inteira);
 - deixa um bom espaço para marcar ângulos e traçar segmentos adicionais;
 - não deixa pontos muito próximos um do outro;
 - não é próxima de casos particulares notáveis (triângulo equilátero, isósceles, retângulo).
- **Não hesite em fazer várias figuras!** Muitas vezes, depois de progredir no problema, algumas partes da figura são inúteis, e devem ser descartadas.
- Marque vários ângulos, procure semelhanças, colinearidades e quadriláteros cíclicos.
- Tome cuidado ao abordar um problema por uma técnica de contas, como geometria analítica ou complexos. Tenha noção de quanto tempo irá levar para resolver o problema usando essas técnicas. Mesmo caso decida fazer o problema com contas, faça uma boa figura, pois fatos sintéticos podem simplificar o seu trabalho.

2 Problemas

Problema 1. Seja ω um círculo com centro O . Seja AB uma corda de ω , e C um ponto em AB . O circuncírculo de OCA corta ω em D .

Prove que $BC = CD$.

Problema 2. Considere 5 pontos numa circunferência A, B, C, D and E , nessa ordem, tal que $\angle ABE = \angle BEC = \angle ECD = 45^\circ$.

Prove que $AB^2 + CE^2 = BE^2 + CD^2$.

Problema 3. Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncírculo ω e F um ponto no lado AB tal que $AF < AB/2$. A circunferência de centro F que passa por A intersecta a reta OA no ponto A' e o círculo ω em K .

Prove que os pontos B, K, F, A' e O estão em uma mesma circunferência.

Problema 4. Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC . O círculo Γ_A , centrado no ponto médio de BC que passa por H intersecta a reta BC nos pontos A_1 e A_2 . Da mesma maneira, defina os pontos B_1, B_2, C_1 e C_2 .

Prove que os seis pontos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 são concíclicos.

Problema 5. Seja $ABCD$ um trapézio ($AB \parallel CD, AB > CD$) circunscrito na circunferência ω , isto é, ω é tangente à AB, BC, CD e DA . O incírculo de ABC toca AB e AC nos pontos M e N , respectivamente.

Prove que o incentro $ABCD$ cai na reta MN .

Problema 6. Dado um triângulo ABC , o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A . Esta circunferência ex-inscrita¹ é tangente ao lado BC em M , e às retas AB e AC em K e L , respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F , e as retas KM e CJ intersectam-se em G . Seja S o ponto de interseção das retas AF e BC , e seja T o ponto de interseção das retas AG e BC .

Prove que M é o ponto médio de ST .

¹A circunferência ex-inscrita de ABC oposta ao vértice A é a circunferência tangente ao segmento BC , ao prolongamento do segmento AB no sentido de A para B e ao prolongamento do segmento AC no sentido de A para C .