9 $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ (Álgebra Elevo 2020)

$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, s_{s_4}, \dots$ é P.A. (1)

e

$s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$ é P.A. (2)

Vamos chamar de r a razão de (1) e r' a razão de (2).

Isso significa que:

$$s_{s_n} = s_{s_1} + (n-1)\cdot r$$

$$s_{s_n+1} = s_{s_1+1} + (n-1) r'$$

<u>Lema 1</u>: $r = r'$.

<u>Prova</u>: $s_{s_n+1} - s_{s_n} > 0$, pois s_i é crescente.

Mas $s_{s_n+1} - s_{s_n} = (n-1)\cdot(r'-r) + cte.$

F1

Para que $n \cdot (r' - r) + cte > 0, \quad \forall n,$

precisamos que $r' - r \geq 0. \Rightarrow \boxed{r' \geq r}$

Por outro lado, como $s_n \geq s_{n-1} + 1 \Rightarrow$

$$s_{s_n} - s_{s_{n-1}+1} \geq 0, \text{ pois } s_i \text{ é crescente.}$$

Mas $s_{s_n} - s_{s_{n-1}} = n \cdot (r - r') + cte$

Para $n \cdot (r - r') + cte \geq 0, \quad \forall n,$

precisamos que $r - r' \geq 0 \Rightarrow \boxed{r \geq r'.}$

(Fim do L. 1)

Seja $t = S_{S_1+1} - S_{S_1}$. (Obs $t \leq r$).

Sabemos que $t = S_{n+1} - S_n$, $\forall n \in (S_i)$

QUEREMOS MOSTRAR QUE $q = S_{n+1} - S_n$, $\forall n$.

Seja $d_K = S_{K+1} - S_K$

Sabemos que:

$$S_n < S_n + 1 < S_n + 2 < \dots < S_{(n+1)}$$

Logo:

$$\underbrace{S_{S_n} < S_{S_{n+1}} < S_{S_{n+2}} < \dots}_{\substack{S_{n+1} - S_n \text{ números em } [S_{S_n}; S_n + r) \\ = d_n}} < S_{S_{(n+1)}} = S_{S_n} + r.$$

$$\Rightarrow \underbrace{d_n \leq r}_{\text{(Lema 2)}} \Rightarrow D := \{x \mid \exists n : d_n = x\} \text{ é finito}$$

$D = \{x \mid \exists k, x = d_k\}$.

$m := \min D$; $M = \max D$.

Como $m \in D \Rightarrow \exists \ell, d(\ell) = m \Rightarrow$

$\Rightarrow S(\ell+1) - S(\ell) = m$

$d(i) \leq M$ (*)

$\Rightarrow$

$$r = S(S(\ell+1)) - S(S(\ell)) = \sum_{i=S(\ell)}^{S(\ell+1)-1} d(i) \leq m \cdot M$$

Como $M \in D \Rightarrow \exists L, d(L) = M \Rightarrow$

$\Rightarrow S(L+1) - S(L) = M$

$d(i) \geq m$ (*)

$$\Rightarrow r = S(S(L+1)) - S(S(L)) = \sum_{i=S(L)}^{S(L+1)-1} d(i) \geq M \cdot m.$$

Logo: $r = M \cdot m$. (Lema 3)

Porém, as desigualdades (*) precisam valer igualdades!

(Corolário 4)

Lema 5: Existem $(m \cdot M)^x$ inteiros i consecutivos tais que $d(i) = m$.

Prova: $x=0$ Existe 1 inteiro tal que $d(i) = m$?

Sim, $i = \ell$.

Supõe que existem inteiros $j, \dots, j + (mM)^x - 1$ tais que, para todos, $d(i) = m$.

Pelo corolário 4, para os $m \cdot (m \cdot M)^x$ inteiros $i \in \{s(j), \dots, s(j) + m(mM)^x - 1\}$, vale

$d(i) = M$.

De novo, pelo corolário 4, para os $(m \cdot M)^{x+1}$ inteiros $i \in \{s(s(j)), \dots, s(s(j)) + (mM)^x - 1\}$, vale

$d(i) = m$.

Portanto, por P.I.F, Lema 5 é verdade

F5

Corolário 6 (Lema 5 amigável)

Para todo x, existe(*) i tal que

tal que $d(i) = d(i+1) = \cdots = d(i+x-1) = m$.

PS: Analogamente, existe j tal que

$$d(j) = d(j+1) = \dots = d(j+x-1) = M.$$

Suponha que $m \neq t$.

Sabemos que $d(s(i)) = t$, $\forall i$.

Pelo corolário 5, para todo x, existem i tq

$$d(i) = d(i+1) = \dots = d(i+x-1) = m \neq t.$$

Portanto, i suficientemente grande (garantido por (*)), existe j tal que $s(j) < i < s(j+1)$

Como $d(i) = d(i+1) = \dots = d(i+x-1) = m \neq t = d(s(j+1))$

$$\Rightarrow s(j+1) \geq i+x > s(j)+x \Rightarrow d(s(j)) > x$$

(*) existem infinitos i's com essa propriedade

Porém, pelo L.2, $d(m) \leq r$.

Basta pegar $x > r$ para gerar um absurdo!

Logo: $m = t$

Analogamente, $M = t$.

$\Rightarrow D = \{t\}$

$\Rightarrow S(K+1) - S(K) = t, \quad \forall K.$

$\square$