(Romania TST '96) Ache todos os primos p e q tais que, para todo inteiro n, o número $n^{3pq}-n$ é divisível por $3pq$.

Folha 1/2

• Se $(3,p,q)$ são diferentes dois a dois

$$n^{3pq} \equiv n \pmod{3pq} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} n^{3pq} &\equiv n \pmod 3 \\ n^{3pq} &\equiv n \pmod p \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ n^{3pq} &\equiv n \pmod q \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$(\mathrm{ord}_3 n \mid 3pq-1$ ou $3 \mid n)$ e

$(\mathrm{ord}_p n \mid 3pq-1$ ou $p \mid n)$ e , $\forall n \in \mathbb{Z}$

$(\mathrm{ord}_q n \mid 3pq-1$ ou $q \mid n)$

existe raiz prim. — existe raiz primitiva — existe raiz primitiva

$$\Longleftrightarrow$$

$3-1 \mid 3pq-1$ e $p-1 \mid 3pq-1$ e $q-1 \mid 3pq-1$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $2 \mid pq-1$ e $p-1 \mid 3q-1$ e $q-1 \mid 3p-1$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $p, q \neq 2$ e $\underbrace{p-1 \mid 3q-1}_{(i)}$ e $\underbrace{q-1 \mid 3p-1}_{(ii)}$.

(i) $\Rightarrow p-1 \leq 3q-1 \Rightarrow p \leq 3q$. $\Rightarrow 3p-1 \leq 9q-1 = 9(q-1)+8 \leq 13(q-1)$

(ii) $\Rightarrow q-1 \leq 3p-1 \Rightarrow q \leq 3p$. $\Rightarrow 3q-1 \leq 9p-1 = 9(p-1)+8 \leq 13(p-1)$

$\Rightarrow a\cdot(p-1) = 3q-1$ e $b\cdot(q-1) = 3p-1$, $1 \leq a,b \leq 13$.

$$\Rightarrow \begin{cases} ap - 3q = a-1 \\ -3a + bq = b-1 \end{cases} \begin{aligned} &\Rightarrow (ab-9)q = 3a-3+ab-a = ab+2a-3 \\ &\Rightarrow (ab-9)p = 3b-3+ab-b = ab+2b-3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} q &= \frac{ab+2a-3}{ab-9} = 1 + \frac{2a+6}{ab-9} \\ p &= \frac{ab+2b-3}{ab-9} = 1 + \frac{2b+6}{ab-9} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &1 \leq ab-9 \leq 2a+6 \Rightarrow a(b-2) \leq 15 \\ &\text{e} \\ &1 \leq ab-9 \leq 2b+6 \Rightarrow b(a-2) \leq 15 \end{aligned}$$

↖ ñ negativo

(Romenia TST '96)

$\boxed{\text{Folha } 2/2}$

S.P.G., $a>b$. ($a\neq b$ pois $p\neq q$).

• $b=1 \Rightarrow 9\le a\le 13$

e $a-9 \mid 8$

e

$a-9 \mid 2a+6$

$\Rightarrow a-9 \mid -12$

$a-9 \mid 4 \Rightarrow a-9=-4,-2,-1,1,2,4$

$a=\cancel{5},\cancel{7},\cancel{8},10,11,13$

• $a=10$: $p=1+\dfrac{8}{1}=9$. não é primo.

• $a=11$: $p=1+\dfrac{8}{2}=5$; $q=1+\dfrac{28}{2}=15$, não é primo

• $a=13$: $p=1+\dfrac{8}{4}=3$; $q=1+\dfrac{32}{4}=9$, não é primo.

• $b=2 \Rightarrow 5\le a\le 9$

e $2a-9 \mid 2a+6$

$\Rightarrow 2a-9 \mid -3$

e

$2a-9 \mid 10$

$2a-9 \mid 1 \Rightarrow 2a-9=-1,1$

$\Rightarrow a=\cancel{4},5$

• $a=5$: $p=1+\dfrac{10}{1}=11$; $q=1+\dfrac{16}{1}=17$

Testando:

$2 \mid 11\cdot 17-1$ ✓ $10 \mid 3\cdot 17-1=50$ ✓ $16 \mid 3\cdot 11-1=32$ ✓ OK.

$(p,q)=(11,17)$.

• $b=3 \Rightarrow 4\le a\le 5$

• $a=4$: $3 \mid 2\cdot 4+6$? ⊗

• $a=5$: $3 \mid 2\cdot 5+6$? ⊗

• $b=4 \Rightarrow a=5$: $11 \mid 2\cdot 4+6=14$ ⊗

Se dois elementos de $\{3,p,q\}$ são iguais a r (seja t o terceiro) $\Rightarrow$

$\Rightarrow r^{r^2 t}\equiv r \pmod{r^2} \Rightarrow$

$r\equiv 0 \pmod{r^2}$ Abs!

Logo, $(p,q)=(11,17)$ ou $(17,11)$ $\square$