Alguns Problemas de Combinatória

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

§1 Ideias úteis

(a) *Casos pequenos.* Mesmo que sejam trabalhosos.

(b) *Princípio Extremal:* Analisar propriedades extremais. Usualmente olhamos para o objeto ou exemplo minimal ou maximal, em algum sentido.

(c) *Indução* e *Indução Forte*.

(d) *Pareamento* e *Agrupamento*: Juntar objetos com propriedades que se relacionam em algum sentido.

§2 Problemas

Problema 1 Pinte todas as arestas de um grafo com 6 vértices de preto ou branco. Mostre que existem pelo menos dois triângulos monocromáticos.

Problema 2 **(MIT Mathematical Problem Solving)** Pedaços de papel com os números de 1 até 99 são colocados num chapéu. Cinco números são retirados aleatóriamente do chapéu, um de cada vez. Qual é a probabilidade de que os números sejam retirados em ordem crescente?

Problema 3 **(MIT Mathematical Problem Solving)** De quantas formas pode um inteiro positivo n ser escrito como soma de inteiros positivos, levando em consideração a ordem? Por exemplo, 4 pode ser escrito como soma de oito formas: $4 = 3 + 1 = 1 + 3 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Problema 4 **(2010 Canada Winter Camp, Jacob Tsimerman)** Se uma casa de um tabuleiro $2^n \times 2^n$ é removida, prove que o tabuleiro resultante pode ser coberto por triminós com formato de L.

Problema 5 **(MIT Mathematical Problem Solving)** Quantas matrizes 8×8 existem tal que seus elementos são 0's e 1's e cada coluna e cada linha contém exatamente um número ímpar de 1's?

Problema 6 **(OMERJ 2018, N3, 5)** Sejam n um inteiro positivo e $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$ uma permutação de $\{1, \dots, n\}$. O *número de cadência* de σ é o número de blocos decrescentes maximais. Por exemplo, se $n = 6$ e $\sigma = (4, 2, 1, 5, 6, 3)$, então o número de cadência de σ é 3, pois σ possui 3 blocos $(4, 2, 1)$, (5), $(6, 3)$ descrescentes e maximais. Note que os blocos $(4, 2)$ e $(2, 1)$ são decrescentes, mas não são maximais, já que estão contidos no bloco $(4, 2, 1)$.

Calcule a soma das cadências de todas as permutações de $\{1, \dots, n\}$.

Problema 7 **(MIT Mathematical Problem Solving)** Sejam n e k inteiros positivos. Ache o número de k-tuples $(S_1, S_2, \dots, S_k)$ de subconjuntos S_i of $\{1, 2, \dots, n\}$ sujeitos a cada uma das seguintes condições:

(a) $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_k$.

(b) Os S_i's são disjuntos dois a dois.

(c) $S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k = \varnothing$.

(d) $S_1 \subseteq S_2 \supseteq S_3 \subseteq S_4 \supseteq S_5 \subseteq \cdots S_k$. (Os símbolos $\subseteq$ e $\supseteq$ alternam.)

Problema 8 **(Cone Sul 2001, 4)** Um polígono de área S está contido dentro de um quadrado de lado a. Mostre que existem dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior ou igual a S/a.

Problema 9 **(Ibero 1997, 6)** Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, onde P_1 é o centro do círculo. Para cada $k = 1, \dots, 1997$, defina x_k como a distância de P_k para o ponto de $\mathcal{P}$ mais próximo de P_k, mas diferente de P_k. Mostre que

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_{1997})^2 \leq 9.$$

Problema 10 **(Lusofonia 2018, 6)** Num tabuleiro 3×25 são colocadas peças 1×3 (na vertical ou na horizontal) de modo que ocupem inteiramente 3 casas do tabuleiro e não se toquem em nenhum ponto. Qual é o número máximo de peças que podem ser colocadas, e para esse número, quantas configurações existem?

Problema 11 **(IMO 2018, 4)** Guilherme e Zeus jogam um jogo num tabuleiro 20×20. No começo do jogo, o tabuleiro está vazio. Em cada turno, Zeus coloca um cavalo preto em um espaço vazio, desde que esse cavalo não ataque nenhum cavalo que já está no tabuleiro. Então, Guilherme coloca uma rainha em um espaçco vazio. O jogo termina quando alguém não puder jogar.

Ache o maior inteiro K tal que, independente da estratégia de Guilherme, Zeus consegue colocar pelo menos K cavalos no tabuleiro.

Problema 12 **(IMO 2019, 5)** O Banco de Bath emite moedas com um H num lado e um T no outro. Harry possui n dessas moedas colocadas em linha, ordenadas da esquerda para a direita. Ele repetidamente realiza a seguinte operação: se há exatamente $k > 0$ moedas mostrando H, então ele vira a k-ésima moeda contada da esquerda para a direita; caso contrário, todas as moedas mostram T e ele para. Por exemplo, se $n = 3$ o processo começando com a configuração THT é $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, que acaba depois de três operações.

(a) Mostre que, para qualquer configuração inicial, Harry para após um número finito de operações.

(b) Para cada configuração inicial C, seja $L(C)$ o número de operações antes de Harry parar. Por exemplo, $L(THT) = 3$ e $L(TTT) = 0$. Determine a média de $L(C)$ sobre todas as 2^n possíveis configurações iniciais C.

Problema 13 **(IMO 2015, 1)** Dizemos que um conjunto finito $\mathcal{S}$ de pontos no plano é *balanceado* se, para quaisquer dois pontos distintos a e B em $\mathcal{S}$, existe um ponto C em $\mathcal{S}$ tal que $AC = BC$. Dizemos que $\mathcal{S}$ é *livre de centro* se, para quaisquer três pontos distintos A, B e C em $\mathcal{S}$, não existe ponto P em $\mathcal{S}$ tal que $PA = PB = PC$.

(a) Mostre que, para todos os inteiros $n \geq 3$, existe um conjunto balanceado com exatamente n pontos.

(b) Determine todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais existe um conjunto balanceado livre de centro com exatamente n pontos.

Problema 14 **(MIT Mathematical Problem Solving)** Seja $f(n)$ o número de formas de pegar um consjunto S de n elementos e, se S tiver mais que um elemento, particionar S em dois subconjuntos disjuntos não vazios S_1 e S_2, e então pegar um dos conjuntos S_1 ou S_2 com mais que um elemento e particionar em dois subconjuntos disjuntos não vazios S_3 e S_4, então pegar um dos conjuntos restantes com mais de um elemento não ainda particionado e particionar em dois subconjuntos disjuntos não vazios, etc., sempre pegando um conjunto com mais de um elemento até sobrar somente conjuntos unitários. Por exemplo, podemos começar com 12345678 (abreviação de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$), e então particioná-lo em 126 e 34578, depois particionar 34578 em 4 e 3578; 126 em 6 e 12; 3578 em 37 e 58; 58 em 5 e 8; 12 em 1 e 2; e finalmente, 37 em 3 e 7. (A ordem da partição dos conjuntos é importante; por exemplo, particionar 1234 em 12 e 34; 12 em 1 e 2; 34 em 3 e 4, é diferente de particionar 1234 em 12 e 34; 34 em 3 e 4, e 12 em 1 e 2. Porém, particionar 1234 em 12 e 34 é o mesmo que particioná-lo em 34 e 12.)

Ache o termo geral de $f(n)$. Por exemplo, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, e $f(4) = 18$.

Problema 15 **(MIT Mathematical Problem Solving)** Seja p um primo e $1 \leq k \leq p - 1$. Quantos subconjuntos de k elementos $\{a_1, \ldots, a_k\}$ de $\{1, 2, \ldots, p\}$ são tais que $a_1 + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod p$?

Problema 16 **(MIT Mathematical Problem Solving)** Seja π uma permutação aleatória de $1, 2, \ldots, n$. Sejam n e k inteiros positivos com $1 \leq k \leq n$. Qual é a probabilidade de que, na decomposição de ciclos disjuntos de π, o tamanho do ciclo contendo 1 é k, isto é, a probabilidade de k ser o menor inteiro positivo tal que $\pi^k(1) = 1$?

Observação. Podemos modelar esse problema de uma forma mais natural. Considerando um amigo oculto com n em que há chances de uma pessoa tirar ela mesma, qual é a probabilidade de que ciclo que o Guilherme participa tem tamanho k?

Problema 17 **(MIT Mathematical Problem Solving)** Seja π uma permutação aleatória de $1, 2, \ldots, n$. Qual é a probabilidade que 1 e 2 estejam no mesmo ciclo de π?

Problema 18 **(MIT Mathematical Problem Solving)** Escolha n números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uniformemente e independentemente do intervalo $[0, 1]$. Qual é o valor esperado de $\min_i x_i$, o mínimo de $x_1, x_2, \ldots, x_n$?