Folha 1/3

NÍVEL 3

PROBLEMA 3

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

$P(x,y)$: $f(xy+f(x)) = f(f(x)f(y)) + x$

$P(y,x)$: $f(xy+f(y)) = f(f(x)f(y)) + y$

$\Rightarrow f(xy+f(x)) + y = f(xy+f(y)) + x$ $[Q(x,y)]$

Lema 1: f é injetora.

Prova: Se $f(x)=f(y) \Rightarrow f(xy+f(x)) = f(xy+f(y))$

$\Rightarrow f(f(x)f(y)) + x = f(f(x)f(y)) + y$

$\Rightarrow x = y$

$\square$

Lema 2: Se $f(1)=1$, então $f(n)=n$, $\forall n$ natural.

Indução: Base: $f(1)=1$.

Se $f(x)=x$

$P(1,x)$: $f(x+1) = \underbrace{f(\underbrace{f(x)}_{x})}_{x} + 1 = x+1.$

ok!

Fato 1: $f(x) \equiv x$ funciona.

$((xy+(x)) = (((x)(y)) + x$ ok!

Lema 3: Se $f(1)=1$, então $f(1/n) = 1/n$, $\forall n$ natural.

$P(n, 1/n)$: $f(\underbrace{1+\underbrace{f(n)}_{n}}_{n+1}) = f(f(n^{-1})n) + n$

$f(1) = 1 = f(f(n^{-1})\cdot n) \Rightarrow f(n^{-1}) = n^{-1}$ ok!

Olimpíada Brasileira de Matemática

NÍVEL 3

Folha 2/3

PROBLEMA 3

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

<u>Lema 4</u>: Se $f(1)=1$, então $f(q)=q$, $\forall q$ racional positivo

Escreva $q = \frac{n}{m}$. Indução em n...

$n=1$: OK.

$P(1/m, 1)$: $f(1/m + 1/m) = f(1/m) + 1/m \Rightarrow f(2/m) = 2/m$

$P(\frac{n-1}{m}, \frac{1}{n-1})$: $f(1/m + n-1/m) = f(1/m) + n-1/m \Rightarrow f(n/m) = n/m$. $\square$

<u>Lema 5</u>: f não é limitada: $f(xy + f(x)) > x$, $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$. $\square$

<u>Lema 6</u>: Se $x > f(z) \Rightarrow f(x) > z$.

<u>Prova</u>:

$P(z, y)$: $f(yz + f(z)) = f(\dots) + z > z$.

$\Rightarrow f(yz + f(z)) > z$.

Como $x > f(z)$, existe $y > 0$ t.q. $x = zy + f(z)$.

$\Rightarrow f(x) > z$.

<u>Lema 6.1</u>: Variantes do Lema 6 (trocando x por z e contra-positiva)

- $x > f(z) \Rightarrow f(x) > z$
- $z > f(x) \Rightarrow f(z) > x$
- $x \geq f(z) \Rightarrow f(x) \geq z$
- $z \geq f(x) \Rightarrow f(z) \geq x$.

Folha 3/3

NÍVEL 3

PROBLEMA 3

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

<u>Lema 7</u>: $x \leq f(x)$, $\forall x$.

<u>Prova</u>: Se $x > f(x)$, pelo Lema 6, $f(x) > x$, absurdo!

$\Rightarrow x \leq f(x)$. $\square$

Guilherme Zeus Dantas e Moura / 140.264.007-27

Folha de rascunho

$$f(xy + f(x)) = f(f(x)f(y)) + x \qquad [P(x,y)]$$

• $P(y,x)$: $f(xy + f(y)) = f(f(x)f(y)) + y$

$\Rightarrow \quad f(xy + f(y)) + x = f(xy + f(x)) + y \quad (*)$

Testando $f(x) \equiv 1/x$

$$\frac{1}{xy + \frac{1}{x}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} + y$$

$$\frac{x}{x^2 y + 1} \stackrel{?}{=} xy + y \qquad \text{Nope!}$$

Testando $f(x) \equiv x$: $\quad xy + x = xy + x \quad$ yay!

$P(x,x)$: $f(x^2 + f(x)) = f(f(x)^2) + x$

$(*) \Rightarrow$ Se $f(x) = f(y)_{=c} \Rightarrow f(xy + c) + x = f(xy + c) + y$

$\Rightarrow x = y$.

Injetora!

Guilherme Zeus Dantas e Moura / 140.264.007-27

Folha de rascunho

$\boxed{f(1) = c}$

$P(1, y)$: $f(y + f(1)) = f(f(1) \cdot f(y)) + 1$

$f(y + c) = f(f(y) c) + 1$

$\cancel{f(y + c + 1) = f((y+1)c) + 1 = f(yc + c) + 1 = f(yc^2) + 2}$

Se $f(t) = 1$.

$P(t, y)$: $f(ty + 1) = f(f(y)) + t$

$\Rightarrow f(t^2 + 1) = f(1) + t$

$P(xy, 1)$: $f(xy + f(xy)) = f(f(xy) f(1)) + xy$

$P(1, xy)$: $f(xy + f(1)) = f(f(xy) f(1)) + 1$

$\Rightarrow f(x + f(x)) + 1 = f(x + f(1)) + x$

Se $f(1) = 1$

Se $f(x) = x$

$P(1, x)$: $f(x + 1) = f(\underbrace{f(x) \cdot 1}_{x}) + 1 \Rightarrow f(x + 1) = x + 1$

$\Rightarrow f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Mais rascunho nas págs 24, 10, 8, 12, 32.

Guilherme Zeus Dantas e Moura / 440.264.007-27

RASCUNHO DO PROBLEMA 3

$f(1) = c \neq 1.$

$P(1,x): f(x+c) = f(f(x)\cdot c) + 1$

$P(x,1): f(x+f(x)) = f(f(x)\cdot c) + x$

$P(1,1): f(c+1) = f(c^2)+1$

$P(t,t): f(t^2+f(t)) = f(f(t)^2) + t$

$f(x+c) = f(f(x)\cdot c) + 1$
$\geq f(x)\cdot c + 1$

$f(x+c) + x = f(x+f(x)) + 1$

$\Rightarrow f(x+c) + x - 1 = f(x+f(x)) > 0$

$f(x+c) > 1 - x$

$P(x, 1/x): f(1+f(x)) = f(f(x)\cdot f(1/x)) + x$

$Q(x, 1/x): f(1+f(x)) + \frac{1}{x} = f(1+f(1/x)) + x$

$\Rightarrow x f(1+f(x)) + 1 = x f(1+f(1/x)) + x^2$

$P(\cancel{1}, 1/m):$

$\cancel{f(1/m+1)}$

$f(1/m$

$P(1, x-1):$

$f(x) = f(f(x-1)) + 1$

$f(2x): f(2x+f(2)) = f(f(x)\cdot f(2)) + 2$

$P(q, \frac{x}{q} - 1) \quad \frac{x}{q} > 1;\ x > q$

$f(x) = f(q\cdot f(\frac{x}{q} - 1)) + q$

$Q(x,y): f(xy + f(x)) + y = f(xy + f(y)) + x$

$Q(x,1): f(x + f(x)) + 1 = f(x + f(1)) + x$

$Q(y,1): f(y + f(y)) + 1 = f(y + f(1)) + y$

Quero: $f(qx) = qf(x)$

P

Se $f(1) = 1$

$P(n,x): f(n(x+1)) = f(f(x)\cdot n) + n$

$P(x, x^{-1}) \Rightarrow \underbrace{f(1+f(x))}_{x+1} = f(f(x^{-1})\cdot x) + x$

$\Rightarrow f(f(x^{-1})x) = 1$

$\Rightarrow f(x^{-1})x = 1$

$\Rightarrow f(x^{-1}) = x^{-1}$

Guilherme Zeus Dantas e Moura - 140.204.007-27

Folha de rascunho

RASCUNHO DO P3

$x > f(x)$

$P(x,y): f(\underbrace{xy+f(x)}_{x}) > x$

$f(x) > x$.

$P(x,y): f(xy+f(x)) = f(f(x)\cdot f(y)) + x$

$\leq f(\;)$

$x < f(x)$

$P(f(x),y): f(f(x)y + f(f(x))) = f(f(f(x))f(y)) + f(x)$

$f(xy+f(x)) = f(f(x)\cdot f(y)) + x$

$x \leq f(x)$

$f(xy+f(x)) \geq xy + f(x)$

$f(f(x)f(y)) + x \geq xy + f(x)$

$y=0$

$f(f(x)c) \geq f(x)$

$\vee$

$f(x)c$

$f(x+f(x))$

$x = f(y)$

$\Downarrow$

$x \geq f(y)$

$\Downarrow$

$f(x) \geq y$

$xy + f(x) \leq f(xy+f(x))$

$= f(f(x)\cdot f(y)) + x$

$< f(f(x)\cdot f(y)) + f(y)$

se $x < f(y)$

$\Rightarrow xy < f(f(x)\cdot f(y))$

$Q(x,y)$:

$f(xy+f(y)) + x = f(xy+f(x)) + y$

se desse pra tirar...

$f(y) + x = f(x) + y$

$\Rightarrow f(x) - x = cte.$

$\Rightarrow$ teste: $cte = 0$

$\boxed{x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\,?}$???

$\boxed{f(x+y) = f(x) + y}$????

ou

$\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y)}$???

$f(xy + f(x)) > x$

NÍVEL 3

PROBLEMA 1

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: [redacted]

RASCUNHO do P3

- $f(x) \geq x$
- $f(xy + f(x)) = f(f(x)f(y)) + x$
- $f(xy + f(x)) + y = f(xy + f(y)) + x \geq xy + f(y) + x$

$\underline{x=1}$: $f(y+c) \geq f(y) + 1$

$\underline{f(y+nc) \geq f(y) + n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

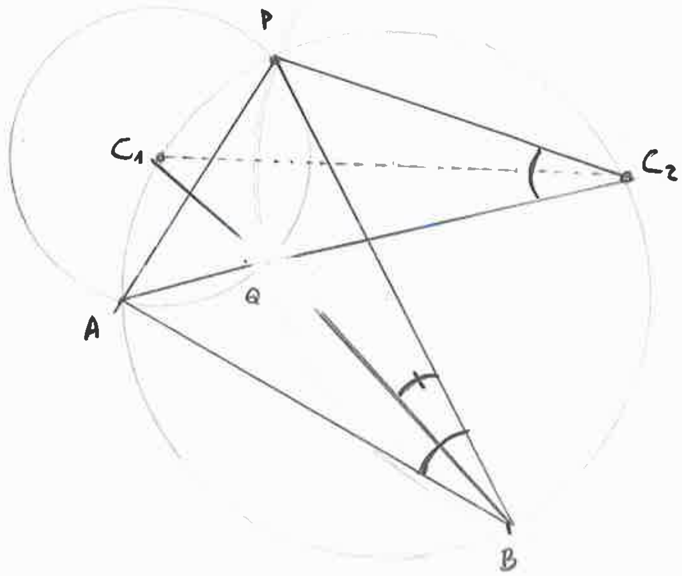
"inútil"

GRR...!!!

Guilherme Zeus Dantas e Moura / 140.264.007-27

Folha de rascunho

RASCUNHO P1



RASCUNHO P3

Se $f(t) = 1$. $(t \leq 1)$

$P(t,x)$: $f(xt+1) = f(f(x)) + t$

$P(t,t)$: $f(t^2+1) = f(1) + t$

$f(t^2+1) = c + t \Rightarrow \boxed{c = f(t^2+1) - t}$

Olimpíada Brasileira de Matemática

NÍVEL 3

PROBLEMA 3

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

RASCUNHO P3

$$f(xy+f(x)) = f(f(x)f(y)) + x$$