Resumo das Tutorias

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. (1º Teste de Seleção do Brasil para a IMO 2021, Problema 3) `Problema censurado.`

Esboço. Perguntar para Miguel ou João Rafael.

2. (Banco IMO 2015, G3) Seja ABC um triângulo com $\angle C = 90°$, e seja H o pé da altura relativa a C. Um ponto D é escolhido no interior do triângulo CBH tal que CH bisecta AD. Seja P a intersecção das retas BD e CH. Seja ω o semicírculo de diâmetro BD que encontra o segmento CB em um ponto interior. Uma reta passando por P é tangente a ω em Q. Prove que as retas CQ e AD se encontram em ω.

Solução. Defina Γ como o circuncírculo de ABC. Defina X como a projeção de D sobre AB. Note que $AH = HX$. Defina Z como a intersecção de AD e ω. Como $90° = \angle DZB = \angle AZB$, $Z \in \Gamma$.

Defina Q' como a segunda intersecção de CZ com ω. Como $Q' \in \omega$, vale que $\angle BQ'D = 90°$. Note que $\angle ABC = \angle AZC = \angle DZQ' = \angle DBQ'$. Portanto, por ângulo-ângulo, $\triangle BCA \sim \triangle BQ'D$.

Seja ϕ a rotohomotetia que leva $\triangle BCA$ em $\triangle BQ'D$. A transformação ϕ possui centro B e $\angle ABD$. Tome T como a intersecção da tangente a Γ por C com a reta AB. Vamos mostrar que ϕ leva T em P.

A condição dos ângulos é verdade, pois $\angle TBP = \angle ABD$, que é o ângulo da rotohomotetia. A condição das razões também é verdade, pois temos que

$$\frac{TA}{TB} = \frac{TA}{TC} \cdot \frac{TC}{TB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AC \cdot \cos \angle A}{BC \cdot \cos \angle B} = \frac{AH}{HB} = \frac{HX}{HB} = \frac{PD}{PB}.$$

Portanto, de fato, ϕ leva T em P e, consequentemente, leva a tangente TC ao circulo Γ na reta tangente PQ' a ω. Logo, $Q' \equiv Q$. Finalmente, as retas AD e CQ se intersectam em Z, que está sobre ω.

3. (Banco IMO 2015, A2) Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$.

Esboço. Perguntar para Rosalba, Giglio, Miguel, João Rafael, Thiago Galante, Nikolas, ...

4. Um inteiro a é chamado *amigável* se a equação $(m^2 + n)(n^2 + m) = a(m - n)^3$ possui solução inteira positiva.

(a) Prove que existem pelo menos 500 inteiros amigáveis no conjunto $\{1, 2, \ldots, 2012\}$.

(b) Determine se $a = 2$ é amigável.

Esboço. Não terminamos. Fizemos o primeiro item. Perguntar avanços a Rodrigo, João Rafael, Rosalba, ou João Marcelo.

5. Dado um conjunto A de inteiros positivos, uma partição de A em A_1 e A_1 disjuntos é *sebosa* quando o mínimo múltiplo comum dos elementos de A_1 é igual ao máximo divisor comum dos elementos de A_2. Encontre o menor valor de n para o qual existe um conjunto com n elementos e exatamente 2016 partições sebosas.

Esboço. Não terminamos. Conjecturamos a resposta. Perguntar avanços a Rosalba, Eduardo, ou Thiago Galante.

6. Sejam f e g dois polinômios não identicamente nulos com coeficientes inteiros e $\deg f > \deg g$. Suponha que existem infinitos primos p para os quais o polinômio $pf + g$ possui raíz racional. Prove que f possui raíz racional.

7. Seja S um conjunto não vazio de inteiros positivos. Dizemos que um inteiro positivo n é *bacana* se ele possui uma representação única como soma de uma quantidade ímpar de elementos distintos de S. Prove que existem infinitos inteiros que não são bacanas.

8. (1º Teste de Seleção do Brasil para a IMO 2021, Problema 4) `Problema censurado.`