Se $f_1, f_2 \in A$, então existe $f_3 \in A$ t.q.:

$$f_1(f_2(y)-x)+2x = f_3(x+y).$$

Prove que, $\forall f \in A$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x-f(x))=0.$$

Solução parcial:

Primeiramente, note que temos não apenas a solução trivial $A=\{x\}$, como também $A=\{x+c, c\in\mathbb{R}\}$ ou $A=\{x+c, c>0\}$.

Tomando $f_1=f_2$ e $x=0$, vemos que

$f_1\circ f_1 = f_3 \in A$.

Mais geralmente por indução

$\forall f\in A$, $f\circ f\circ \cdots \circ f \in A$.

Além disso, tomando $x=0$ na equação original, ficamos com $f_3=f_1\circ f_2$ e

Nosso problema se torna

$\forall f_1, f_2 \in A$:

$f_1(f_2(y)-x)+2x = f_1(f_2(x+y))$ e $f_1\circ f_2 \in A$.

Então temos uma equação funcional fixada.

Além disso, tomando

$$x = \frac{f_1(f_2(0))}{2} \text{ e } y=-x,$$

vemos que toda função $f\in A$ possui zero.

Suponha que $\exists f\in A$ não injetiva. Então $f(y)=f(\tilde{y})$ e $\exists f_3\in A$ t.q.

$$f_3(x+y) = f(f(y)-x)+2x$$
$$= f(f(\tilde{y})-x)+2x$$
$$= f_3(x+\tilde{y}).$$

$\therefore f_3$ é periódica

$f_3(x) = f_3(x+k)$

$f_1=f_2=f$. $P(-x,x)$:

$$f(f(x)+x)-2x = f(f(0))$$

$$f(\ldots) = \underbrace{2x+f(f(0))}_{\text{todos os reais}}$$

$\Rightarrow f$ é sobrejetora.

$$(f\circ f)(\underbrace{f_2(y)-x}_{\text{periódico}})+2x = f\circ f(x+y)$$

Periódico

$x=ak$.

$$\underbrace{f_3(f_2(y))}_{\text{cte}} + \underbrace{2ak}_{\text{varia}} = \underbrace{f_4(y)}_{\text{cte}}$$

Abs!

Algo legal:

① $f_1=f$; $f_2=f\circ f$

$$f(f(f(y))-x)+2x = f(f(f(x+y)))$$

② $f_1=f\circ f$ $f_2=f$

$$f(f(f(y)-x))+2x = f(f(f(x+y)))$$

$$\Rightarrow f(f(t)-x) = f(f(t-x)),$$

$\forall t \in \mathrm{Im}$, $x\in\mathbb{R}$.

SE f INJETORA:

$f(t)-x = f(t-x)$,

$\forall t\in \mathrm{Im}$, $x\in\mathbb{R}$.

$x=f(t)$:

$$0 = f(t-f(t)), \forall t \in \mathrm{Im}$$

$$f_3(x) = f_1(f_2(x))$$

$x = -y$

$$f_1(f_2(y) + y) - 2y = f_1(f_2(0))$$

$x = f_2(y)$:

$$f_1(0) + 2f_2(y) = f_3(f_2(y) + y)$$

$$f_3(f_2(y) + y) = 2y + f_3(f_2(0))$$

Logo $f_2(y) = y + b \quad , \ b \in \mathbb{R}$