



## Combinatória & Divisibilidade

Guilherme Zeus Dantas e Moura  
zeusdanmou@gmail.com

### 1 Problema Motivador

**Problema 1 (IMO 1995, 6).** Seja  $p$  um primo ímpar. Quantos subconjuntos de tamanho  $p$  do conjunto  $\{1, 2, \dots, 2p\}$  possuem soma de seus elementos múltipla de  $p$ .

### 2 Pensando combinatóriamente

O objetivo é que, no final dessa aula, vocês entendam como métodos combinatórios podem ajudar a entender divisibilidades.

*Ideia.* Para mostrar que uma quantidade de objetos é múltipla de  $n$ , basta dividir esses objetos em vários grupos de tamanho  $n$ , ou em  $n$  grupos de mesmo tamanho.

**Problema 2 (Pequeno Teorema de Fermat).** Sejam  $p$  um primo e  $a$  um inteiro positivo. Prove, usando argumentos de combinatória, que  $a^p - a$  é múltiplo de  $p$ .

**Problema 3.** Seja  $p$  um primo ímpar. Quantos subconjuntos do conjunto  $\{1, 2, \dots, p\}$  possuem soma de seus elementos múltipla de  $p$ .

*Observação.* A soma dos elementos do conjunto vazio é zero.

### 3 De Volta ao Problema Motivador

**Problema 1 (IMO 1995, 6).** Seja  $p$  um primo ímpar. Quantos subconjuntos de tamanho  $p$  do conjunto  $\{1, 2, \dots, 2p\}$  possuem soma de seus elementos múltipla de  $p$ .

### 4 Desafio

Fica como desafio para casa, para treinar a precisão e formalização, o seguinte problema:

**Problema 4 (Generalização do IMO 1995, 6).** Sejam  $p$  um primo ímpar e  $m < n$  inteiros positivos. Quantos subconjuntos de tamanho  $mp$  do conjunto  $\{1, 2, \dots, np\}$  possuem soma de seus elementos múltipla de  $p$ ?