

**Problema 1**

Qual é a maior quantidade de subconjuntos de 5 elementos do conjunto  $\{1, 2, \dots, 20\}$  que podemos escolher de modo que quaisquer dois compartilhem exatamente 1 elemento.

*Esboço.* Isso lembra planos projetivos finitos. Os pontos são os elementos de  $\{1, 2, \dots, 20\}$  e as retas são os subconjuntos.



*Solução.* A resposta é 16. Seja  $S = \{1, 2, \dots, 20\}$ .

Para todo  $x \in S$ ,  $x$  pertence a, no máximo, 4 conjuntos. *Prova a cargo do leitor.*

Usando contagem dupla em  $(x \in S, C)$ , com  $C$  um dos conjuntos selecionados e  $x \in C$ , temos que

$$\#(C) \cdot 5 \leq 20 \cdot 4,$$

isto é,  $\#(C) \leq 16$ .

Eis um exemplo com 16 conjuntos:

$\{1, 2, 3, 4, 17\}; \{5, 6, 7, 8, 17\}; \{9, 10, 11, 12, 17\}; \{13, 14, 15, 16, 17\};$   
 $\{1, 5, 9, 13, 18\}; \{2, 6, 10, 14, 18\}; \{3, 7, 11, 15, 18\}; \{4, 8, 12, 16, 18\};$   
 $\{1, 6, 11, 16, 19\}; \{2, 5, 12, 15, 19\}; \{3, 8, 9, 14, 19\}; \{4, 7, 10, 13, 19\};$   
 $\{1, 4, 12, 14, 20\}; \{2, 8, 11, 13, 20\}; \{3, 5, 10, 16, 20\}; \{4, 6, 9, 15, 20\}.$