Tutoria

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. Seja ABC um triângulo, e D um ponto em seu interior. Definimos o ponto A_0 como ponto médio do arco BDC, na circunferência que passa por B, C e D. Da mesma maneira, defina B_0 como o ponto médio do arco ADC e C_0 como o ponto médio do arco ADB. Prove que existe uma única circunferência que passa por D, A_0, B_0, C_0.

2. Seja A um ponto fora de uma circunferência ω. Por A são traçadas duas retas, cada uma intersecta ω em dois pontos. A primeira intersecta ω em B e C, a segunda intersecta em D e E (D está entre A e E). A reta por D paralela a BC corta ω novamente em F. A reta AF corta ω novamente em T, diferente de F. As retas BC e ET se encontram em M. O ponto N é tal que M é o ponto médio de AN. Seja K o ponto médio de BC. Prove que os pontos D, E, K e N estão sobre uma mesma circunferência.

3. Seja n um inteiro positivo dado. Determine o menor valor possível do inteiro positivo m ($m > n$) para o qual o conjunto $M = \{n, n+1, n+2, \ldots, m\}$ pode ser particionado em subconjuntos disjuntos de maneira que em cada um destes subconjuntos, existe um elemento que é igual à soma de todos os outros elementos.

4. Seja a_1, a_2, $\ldots$, a_n uma sequência de inteiros positivos satisfazendo $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ para todo inteiro positivo n. Prove que para todo inteiro positivo k, existe um inteiro positivo m tal que a_m é divisível por k.