Análise na Reta

2ª prova (prova final)

Problema 1 Prove ou dê contra-exemplo:

1. Se $A, B \subset \mathbb{R}$ são fechados, então $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ é fechado.
2. Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto e todos os pontos de K são isolados então K é finito.

Problema 2 Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ e $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ é um conjunto infinito então, para todo inteiro positivo k, $\{x \in \mathbb{R} : f^{(k)}(x) = 0\}$ é um conjunto infinito.

Problema 3 Prove ou dê contra-exemplo:

1. Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são convexas, então $f + g$ é convexa.
2. Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são convexas, então $f \cdot g$ é convexa.

Problema 4 Sejam $a, h \in \mathbb{R}$ com $h > 0$, e seja $k \in (0, 1)$. Determine o maior $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: para qualquer função derivável $f : [a - h, a + h] \to \mathbb{R}$ com $|f'(x)| \leq k, \forall x \in [a - h, a + h]$ tal que $|f(a) - a| < \delta$, existe um único $y \in [a - h, a + h]$ tal que $f(y) = y$.

Problema 5 Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e decrescente tal que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Prove que $\lim_{x\to+\infty} x \cdot f(x) = 0$.

Problema 6 Determine todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para quaisquer $a, x \in \mathbb{R}$ com $a > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t)dt.$$

Sugestão: Mostre inicialmente que, se f é uma função como no enunciado, então $f(x-a)+f(x+a) = 2f(x)0$, para quaisquer $a, x \in \mathbb{R}$ com $a > 0$.