Aproximando $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$

Adaptado de Dmitry Fuchs, UC Davis, em Berkeley Math Circle 2015-2016*.

Guilherme Zeus Dantas e Moura
zeusdanmou@gmail.com

Matematicamente

19 de abril de 2021

*O material original está disponível aqui.

Esquentando

Sem usar calculadora, tente aproximar:

- $\left(1+\sqrt{2}\right)^0 = 1$
- $\left(1+\sqrt{2}\right)^1 \approx 2{,}4142\ldots$
- $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 \approx 5{,}8284\ldots$
- $\left(1+\sqrt{2}\right)^3 \approx 14{,}0711\ldots$
- $\left(1+\sqrt{2}\right)^4 \approx 33{,}9706\ldots$
- $\left(1+\sqrt{2}\right)^5 \approx 82{,}0122\ldots$
- $\left(1+\sqrt{2}\right)^6 \approx 197{,}9949\ldots$
- $\left(1+\sqrt{2}\right)^7 \approx 478{,}0021\ldots$
- $\left(1+\sqrt{2}\right)^8 \approx 1153{,}9991\ldots$
- $\left(1+\sqrt{2}\right)^9 \approx 2786{,}0004\ldots$

O número $(1+\sqrt{2})^n$ fica cada vez mais perto de um inteiro!

Esquentando

- $\frac{(1+\sqrt{2})^0}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071$
- $\frac{(1+\sqrt{2})^1}{\sqrt{2}} \approx 1{,}7071\ldots$
- $\frac{(1+\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \approx 4{,}1213\ldots$
- $\frac{(1+\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}} \approx 9{,}9497\ldots$
- $\frac{(1+\sqrt{2})^4}{\sqrt{2}} \approx 24{,}0208\ldots$
- $\frac{(1+\sqrt{2})^5}{\sqrt{2}} \approx 57{,}9914\ldots$
- $\frac{(1+\sqrt{2})^6}{\sqrt{2}} \approx 140{,}0036\ldots$
- $\frac{(1+\sqrt{2})^7}{\sqrt{2}} \approx 337{,}9985\ldots$
- $\frac{(1+\sqrt{2})^8}{\sqrt{2}} \approx 816{,}0006\ldots$
- $\frac{(1+\sqrt{2})^9}{\sqrt{2}} \approx 1969{,}9997\ldots$

O número $\frac{(1+\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$ fica cada vez mais perto de um inteiro!

Por que esses números são quase inteiros?

Vamos fazer casos pequenos!

Por que $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$ é tão próximo de 82?

Sabemos que

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

Jogando $x = \sqrt{2}$,

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^5 = 1 + 5\sqrt{2} + 20 + 20\sqrt{2} + 20 + 4\sqrt{2}.$$

Jogando $x = -\sqrt{2}$

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^5 = 1 - 5\sqrt{2} + 20 - 20\sqrt{2} + 20 - 4\sqrt{2}.$$

Somando as equações,

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^5 + \left(1-\sqrt{2}\right)^5 = 82.$$

Por que esses números são quase inteiros?

Sabemos que

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^5 + \left(1-\sqrt{2}\right)^5 = 82.$$

Como $\left|1-\sqrt{2}\right| < 1$, o número $(1-\sqrt{2})^5$ é bem pequeno.

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^5 \approx 82.$$

Por que esses números são quase inteiros?

$n = 5$ não é especial! Isso funciona para todo n.

- $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ é inteiro.
- $(1-\sqrt{2})^n$ é pequeno.

Por que esses números são quase inteiros?

E na divisão por $\sqrt{2}$?

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 5 + 10\sqrt{2} + 20 + 10\sqrt{2} + 4$$

$$\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 5 + 10\sqrt{2} - 20 + 10\sqrt{2} - 4$$

Podemos subtrair as equações

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^5}{\sqrt{2}} - \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^5}{\sqrt{2}} = 58.$$

Por que esses números são quase inteiros?

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^5}{\sqrt{2}} - \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^5}{\sqrt{2}} = 58.$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^5}{\sqrt{2}} \approx 58.$$

De novo, $n = 5$ não é especial! Isso funciona para todo n.

- $\frac{(1+\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} - \frac{(1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$ é inteiro.
- $\frac{(1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$ é pequeno.

Isso só funciona com $1+\sqrt{2}$?

Não!

- Também funciona com $\left(1+\sqrt{3}\right)^n$ e com $\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^n}{\sqrt{3}}$.
- $\left(1+\sqrt{4}\right)^n$ também é próximo de inteiro, mas esse é menos interessante...
- Funciona com $\left(1+\sqrt{5}\right)^n$?

Por exemplo, $\left(1+\sqrt{3}\right)^{10} \approx 23167{,}956\ldots$ e $\left(2+\sqrt{5}\right)^4 \approx 321{,}997\ldots$.

Agora que desvendamos o porquê dessas calculações serem bem próximas de inteiros, **que perguntas podemos fazer?**

Que inteiros são esses?

Agora que a gente sabe o motivo, vamos olhar para **quais** inteiros são esses.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(1+\sqrt{2})^n$ (aprox.)	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726
$\frac{(1+\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$ (aprox.)	2	4	10	24	58	140	338	186	1970	4756

Magicamente, observamos que, nas duas sequências da tabela acima,

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n.$$

Você consegue provar esse fato?

Dica: Olhe para a sequência $b_n = (1+\sqrt{2})^n$*, sem aproximar.*

Que inteiros são esses?

Se definirmos $b_n = (1+\sqrt{2})^n$, sem aproximar, também temos

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n,$$

que é verdade pois

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 2(1+\sqrt{2}) + 1$$

e então, multiplicando por $(1+\sqrt{2})^n$

$$(1+\sqrt{2})^{n+2} = 2(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1+\sqrt{2})^n.$$

Que inteiros são esses?

Sabemos que

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n.$$

Também sabemos que:

- a_{n+2} e $2a_{n+1} + a_n$ são inteiros.
- $a_{n+2} \approx b_{n+2}$.
- $2a_{n+1} + a_n \approx 2b_{n+1} + b_n$.

Logo, provamos que

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n.$$

Resumo da brincadeira

A sequência a_n é descrita das seguintes maneiras:

- Motivação inicial: a_n é o inteiro mais próximo de $(1+\sqrt{2})^n$, para n grande.
- Fórmula exata: $a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$
- Recorrência: $\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_2 = 6, \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \end{cases}$

Observação: Dá pra fazer a mesma coisa com as sequências $\frac{(1+\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$, $(1+\sqrt{3})^n$, ...

Agora que desvendamos varios mistérios sobre a sequência a_n,
que novos caminhos podemos seguir?

Mudando de perspectiva

O que fizemos até agora foi

$$\text{Motivação} \implies \text{Fórmula Exata} \implies \text{Recorrência}.$$

Será que conseguimos usar o nosso aprendizado para conseguir fazer

$$\text{Recorrência} \implies \text{Fórmula Exata}.$$

Por exemplo, você deve conhecer a sequência de Fibonacci, definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Como podemos achar uma fórmula exata?

Uma nova quest!

Considere uma sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ que satisfaz, para todo $n \geqslant 0$,

$$a_{n+2} = K \cdot a_{n+1} + L \cdot a_n$$

para K e L fixos. Conseguimos descobrir uma fórmula direta para a_n?
Perceba que essa condição é bem simples. Ela diz que:

$$\begin{cases} a_2 = Ka_1 + La_0 \\ a_3 = Ka_2 + La_1 \\ a_4 = Ka_3 + La_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Uma nova quest!

$$\begin{cases} a_2 = Ka_1 + La_0 \\ a_3 = Ka_2 + La_1 \\ a_4 = Ka_3 + La_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Existem infinitas sequências. Basta escolher a_0 e a_1 arbitrariamente.

Já que existem infinitas soluções, uma boa ideia é achar soluções bonitas!

Alguém tem alguma sugestão? *Dica:* Lembrem-se do que a gente já fez.

Solução conveniente para a nova quest

Vamos considerar $a_n = \alpha^n$, com α constante. A nossa condição vira

$$\begin{cases} \alpha^2 = K\alpha + L \\ \alpha^3 = K\alpha^2 + L\alpha \\ \alpha^4 = K\alpha^3 + L\alpha^2 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Todas essas equações são equivalentes a

$$\alpha^2 = K\alpha + L.$$

Portanto, se pegarmos α como raiz do polinômio $x^2 - Kx - L$, a sequência $a_n = \alpha^n$ funciona!

Achando novas soluções...

De modo geral, sabemos que $x^2 - Kx - L$ possui duas raízes, α e β.

As sequências (α^n) e (β^n) funcionam!

Quaisquer sequências $(A\alpha^n)$ e $(B\beta^n)$ funcionam!

A *soma* das sequências, $(A\alpha^n + B\beta^n)$, também funciona!

Isso é um ótimo progresso! Achamos **várias** sequências que funcionam, mas será que achamos todas?

Dica: o que define uma sequência que funciona?

Achamos todas as soluções?

Achamos as soluções $(A\alpha^n + B\beta^n)$.
Uma solução é definida por a_0 e a_1. Se for da forma acima, terá que valer

$$\begin{cases} a_0 = A + B \\ a_1 = A\alpha + B\beta \end{cases}$$

Conseguimos reescrever como

$$\begin{cases} A = \frac{a_0\beta - a_1}{\beta - \alpha} \\ B = \frac{a_0\alpha - a_1}{\alpha - \beta} \end{cases}$$

Juntando os pedaços...

Considere uma sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ que satisfaz $a_{n+2} = Ka_{n+1} + La_n$.
Sejam α e β as raízes de $x^2 - Kx - L = 0$.
A sequência

$$\left(\frac{a_0\beta - a_1}{\beta - \alpha} \cdot \alpha^n + \frac{a_0\alpha - a_1}{\alpha - \beta} \cdot \beta^n \right)$$

também satizfaz a recorrência, e também tem os mesmos termos iniciais.

Portanto, como a_0 e a_1 definem unicamente uma solução, as duas sequências citadas são iguais! Ou seja, **qualquer** sequência que satisfaz a recorrência é da forma $(A\alpha^n + B\beta^n)$.

Observação: Isso só funciona quando $\alpha \neq \beta$.

Hora de arregaçar as mangas

- Calcule uma fórmula direta para o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci, definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

- Calcule uma fórmula direta para o n-ésimo termo da sequência definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 5$ e

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n.$$

Hora de arregaçar as mangas

- Calcule uma fórmula direta para o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci, definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Hora de arregaçar as mangas

- Calcule uma fórmula direta para o n-ésimo termo da sequência definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 5$ e
$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n.$$

Próximos passos?

Que novas perguntas podemos fazer? Que novos caminhos podemos seguir?

- O que acontece quando o polinômio tem raíz dupla? Ou seja, $\alpha = \beta$?
- Será que conseguimos resolver recorrências da forma $a_{n+3} = K \cdot a_{n+2} + L \cdot a_{n+1} + M \cdot a_n$?
- É assim que a gente ensina um computador a resolver recorrências?

Agora vocês *escolhem!* Que pergunta vocês querem tentar responder?

PS: Estou escondendo o fato de que eu não preparei essa última parte.

O que acontece quando o polinômio tem raíz dupla? Ou seja, $\alpha = \beta$?

Vamos fazer casos pequenos. Pegaremos $\alpha = \beta = 1$. O polinômio é $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
A sequência a_0, a_1, a_2 segue a recorrência

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \iff \frac{a_{n+2} + a_n}{2} = a_{n+1}$$

A sequência $(\alpha^n) = (1)$ funciona. Em geral, a sequência $(A\alpha^n) = (A)$ funciona.
A sequência (n) funciona. Em geral, a sequência (Bn) funciona.
Finalmente, a sequência $(A + Bn)$ funciona.

$$\begin{cases} a_0 = A \\ a_1 = A + B \end{cases} \iff \begin{cases} A = a_0 \\ B = a_1 - a_0 \end{cases}$$

O que acontece quando o polinômio tem raíz dupla? Ou seja, $\alpha = \beta$?

Pegaremos $\alpha = \beta$. O polinômio é $(x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$.
A sequência a_0, a_1, a_2 segue a recorrência

$$a_{n+2} = \underbrace{(2\alpha)}_{K} a_{n+1} + \underbrace{(-\alpha^2)}_{L} a_n$$

A sequência (α^n) funciona. Em geral, a sequência $(A\alpha^n)$ funciona.
A sequência $(n\alpha^n)$ funciona. Em geral, a sequência $(Bn\alpha^n)$ funciona.
Finalmente, a sequência $((A+Bn)\alpha^n)$ funciona.

$$\begin{cases} a_0 = A \\ a_1 = (A+B)\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} A = a_0 \\ B = \frac{a_1}{\alpha} - a_0 \end{cases}$$

É assim que a gente ensina um computador a resolver recorrências?

O que é um computador? **Modelo 1:**

- Uma moeda pra fazer operações: soma, multiplicação de reais.
- Conseguimos manipular e guardar reais.

Como calcular o F_n?

- Recorrência: $\sim n$ moedas.
- Fórmula direta: $\sim 2n$ moedas.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Computador

Queremos contruir uma função $\mathrm{power}(a, b)$, que calcula a^b.

- $\mathrm{power}(a, 0) := 1$
- $\mathrm{power}(a, 2n) := \mathrm{power}(a, n)^2$
- $\mathrm{power}(a, 2n + 1) := \mathrm{power}(a, 2n) \cdot a$

Quantas moedas gastamos?

- $\sim 2 \log(n)$ moedas.

O que é um computador? **Modelo 2:**

- Uma moeda pra fazer operações: soma, multiplicação de inteiros.
- Conseguimos manipular e guardar inteiros.

Vamos criar uma nova classe dos números legais. Número legal é um número da forma $a + b\sqrt{5}$. Esse conjunto é chamado de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. No computador, a gente vai guardar o número $a + b\sqrt{5}$ como $\mathsf{legal}(a, b)$.

- $\mathsf{legal}(a, b) + \mathsf{legal}(c, d) := \mathsf{legal}(a + c, b + d)$
- $\mathsf{legal}(a, b) \cdot \mathsf{legal}(c, d) := \mathsf{legal}(ac + 5bd, ad + bc)$
- $(a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5}) = (ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}$.

Calcular $\mathsf{power}(\mathsf{legal}(a, b), n)$ gasta $\sim 14 \log n$ moedas. Por extenso:

- Primeiro calcule $\mathsf{legal}(x, y) := \mathsf{power}(\mathsf{legal}(1, 1), n)$.
- $2^{n-1} := \mathsf{power}(2, n - 1)$.
- $F_n := y/2^{n-1}$.

Isso gasta algo na ordem de $\sim \log n$ moedas.