Geometria – Crux Mathematicorum – Live

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

1. **(Crux Mathematicorum, 4560)** Sejam E e F respectivamente os pontos médios dos lados CA e AB do triângulo ABC, e seja P a segunda intersecção dos círculos ABE e ACF. Defina X como a segunda intersecção do círculo AEF com a reta AP. Prove que $AX = 2 \cdot XP$.

   Solução.
   Dica principal. Inverta por A (com qualquer valor pro raio r). Procure mais sobre o que é inversão na internet (ou peça pra eu te mandar alguns artigos sobre isso). Esse é um ótimo problema pra *aprender* sobre inversão.

   Observação. Se você quiser, você pode submeter a sua solução para esse problema na revista Crux Mathematicorum. Procure no Google sobre ela.

2. (Crux Mathematicorum, 4509) Sejam B e C dois pontos fixos distintos no plano e seja M o ponto médio de BC. Ache o lugar geométrico dos pontos A, $A \notin BC$, tal que $4R \cdot AM = AB^2 + AC^2$, onde R é o circumraio de ABC.

Solução 1, calculando AM com Stweart.

Se A estiver na circunferência de diâmetro BC, funciona! $R = AM$ e $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4R^2$.
Se A estiver na mediatriz de BC, funciona! (ver arquivo do Miguel)
Vamos calcular AM (com duas leis de cossenos em AMB e AMC, ou com Stweart).

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \cos(\angle AMB)$$
$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \cdot \cos(\angle AMC)$$

Somando, temos

$$2 \cdot AM^2 = AB^2 + AC^2 - 2BM^2.$$
$$4 \cdot AM^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2.$$

Logo, $4R \cdot AM = AB^2 + AC^2 \iff$

$$4 \cdot AM^2 - 8R \cdot AM + BC^2 = 0.$$

$$AM = R \pm \sqrt{R^2 - (BC/2)^2}$$
$$AM = R \pm \sqrt{R^2 - BM^2}$$
$$AM = AO \pm OM$$

Usando Desigualdade Triangular, A, O, M são colineares. Portanto:

- Se $O \neq M$, OM é mediatriz de BC e, portanto, A está na mediatriz.
- Se $O = M$, então $AM = AO \implies A$ está no círculo de diâmetro BC.

Solução 2, calculando AM com (uma) Lei dos Cossenos.

Seja D o ponto tal que $ABDC$ é um paralogramo. M é ponto médio de AD. Portanto, usando Lei dos Cossenos em ADC, temos

$$4AM^2 = AD^2 = AC^2 + AB^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Desse modo, as seguintes linhas são equivalentes (i.e, $\iff$).

$$4R \cdot AM = AB^2 + BC^2$$
$$4R^2 \cdot 4AM^2 = (b^2 + c^2)^2$$
$$(2R)^2 \cdot (b^2 + c^2 + 2bc \cos A) = (b^2 + c^2)^2$$
$$a^2 \cdot (b^2 + c^2 + 2bc \cos A) = (b^2 + c^2)^2 \sin^2 A$$
$$(b^2 + c^2 - 2bc \cos A) \cdot (b^2 + c^2 + 2bc \cos A) = (b^2 + c^2)^2 \sin^2 A$$
$$(b^2 + c^2)^2 - (2bc \cos A)^2 = (b^2 + c^2)^2 \sin^2 A$$
$$(b^2 + c^2)^2 (1 - \sin^2 A) = (2bc \cos A)^2$$
$$(b^2 + c^2)^2 \cos^2 A = (2bc \cos A)^2$$
$$\cos^2 A((b^2 + c^2)^2 - 4b^2c^2) = 0$$
$$\cos^2 A(b^2 - c^2)^2 = 0$$
$$\cos^2 A = 0 \text{ ou } b^2 - c^2 = 0$$
$$\angle A = 90^\circ \text{ ou } b = c$$

3. (Crux Mathematicorum, 4494) Seja ABC um triângulo com circuncentro O, tal que $\angle BAC \neq 90°$. Defina γ como o circuncírculo de BOC e centro X. Seja P é um ponto sobre o lado BC, seja Q a interseção de OP com γ, com $Q \neq O$. Seja M a intersecção de OA e XQ. Prove que $MA = MQ$ se, e somente se, AP é a bissetriz de $\angle BAC$.

Seja D a segunda interseção de AP com o cicuncírculo de ABC.

$AODQ$ é cíclico, pois $AP \cdot PD = BP \cdot PC = OP \cdot PQ$. Podemos marcar os ângulos como no diagrama abaixo, usando esse quadrilátero cíclico e usando os ângulos isósceles que aparecem naturalmente quando traçamos raios.

Desse modo:

$$\begin{aligned}
&AP \text{ é bissetriz de } \angle BAC \\
\iff\ & D \text{ é ponto médio do arco } BC \\
\iff\ & O, D, X \text{ são colineares} \\
\iff\ & \angle QOX = \angle QOD \\
\iff\ & \angle \text{azul} = \angle \text{verde} \\
\iff\ & \angle \text{azul} + \angle \text{vermelho} = \angle \text{verde} + \angle \text{vermelho} \\
\iff\ & \angle QAM = \angle AQM \\
\iff\ & MA = MQ
\end{aligned}$$