

Seja p primo. Um multiconjunto de $p+2$ inteiros é interessante se a soma de quaisquer p deles é divisível pelos outros dois.

Determine todos conjuntos interessantes

(*) Seja $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{p+2}\}$ um multiconjunto. Seja $S = \sum_{i=1}^{p+2} a_i$

Sebermos que, para todo $i \neq j$, temos:

$$a_i \mid S - a_i - a_j \Rightarrow \boxed{a_i \mid S - a_j, \forall i \neq j} \quad (I)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Logo: } a_i \mid S - a_1 \\ a_i \mid S - a_2 \\ \vdots \\ a_i \mid S - a_{i-1} \\ a_i \mid S - a_{i+1} \\ \vdots \\ a_i \mid S - a_{p+2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_i \mid (p+1) \cdot S - (S - a_i) \\ \Rightarrow \boxed{a_i \mid p \cdot S, \forall i} \quad (II) \end{array}$$

$$\text{Por (I), } \exists k: p \nmid a_k \Rightarrow a_k \mid S \stackrel{(I)}{\Rightarrow} a_k \mid a_i, \forall i \neq k \Rightarrow a_k = 1.$$

$$\text{Logo, } a_i \mid S - 1 \text{ e } a_i \mid p \cdot S \Rightarrow a_i \mid p \Rightarrow (a_i = 1 \text{ ou } a_i = p), \forall i.$$

$$\text{Seja } n = |\{i: a_i = 1\}|. \text{ Logo, } S = n + p \cdot (p+2 - n) = p^2 + 2p - pn + n.$$

$$\text{Se } n = p+2, \text{ OK. } (A = \{1, \dots, 1\})$$

$$\text{Se } n = p+1, \text{ OK. } (A = \{1, \dots, 1, p\})$$

Caso contrário:

$$p \mid S - p \text{ e } p \mid S - 1 \Rightarrow p \mid p - 1. \text{ (Abs!)} \quad (A \text{ abs!})$$

Logo:

$$A = \{c, c, \dots, c\}$$

$$A = \{c, c, c, \dots, c, cp\}$$

são todos os conj. interessantes.

(*) Sempre que A é interessante, $c \cdot A$ é interessante. Logo, s.p.g., $\nexists c > 1: c \mid a_i, \forall i.$