19ª Vingança Olímpica
23ª Semana Olímpica – Natal, RN
30 e 31 de janeiro de 2020

- Não escreva mais de uma questão por folha.
- Escreva seu nome em cada folha que usar.

▶ **PROBLEMA 1**
Seja n um inteiro positivo e $a_1, a_2, \dots, a_n$ reais não-nulos. Qual é a quantidade mínima de coeficientes não-nulos que o polinômio $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$ pode ter?

▶ **PROBLEMA 2**
Para um inteiro positivo n, dizemos que um n-*embaralhamento* é uma bijeção $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ tal que existem exatamente dois elementos i em $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\sigma(i) \neq i$.
Fixe três n-embaralhamentos distintos dois a dois $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Seja q um primo e seja $\mathbb{F}_q$ o conjunto dos inteiros módulo q. Considere todas as funções $f : (\mathbb{F}_q^n)^n \to \mathbb{F}_q$ que satisfazem, para todo inteiro i com $1 \leq i \leq n$ e todo $x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y, z \in \mathbb{F}_q^n$,

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, y + z, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

e que satisfazem, para todo $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}_q^n$ e todo $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = -f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Dada uma n-upla $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{F}_q^n)^n$, seja $g(x_1, \dots, x_n)$ o número de diferentes valores que $f(x_1, \dots, x_n)$ pode assumir sobre todas as possíveis funções f nas condições acima.
Pegue $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{F}_q^n)^n$ de forma uniformemente aleatória, e seja $\varepsilon(q, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ o valor esperado de $g(x_1, \dots, x_n)$. Finalmente, seja

$$\kappa(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -\lim_{q \to \infty} \log_q \left(-\ln \left(\frac{\varepsilon(q, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - 1}{q - 1} \right) \right).$$

Pegue três n-embaralhamentos distintos dois a dois $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ de forma uniformemente aleatória do conjunto de todos os n-embaralhamentos. Seja $\pi(n)$ o valor esperado de $\kappa(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Suponha que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios com coeficientes reais tais que $q(-3) \neq 0$ e $\pi(n) = \frac{p(n)}{q(n)}$ para infinitos valores de n inteiros positivos. Calcule $\frac{p(-3)}{q(-3)}$.

▶ **PROBLEMA 3**
Seja ABC um triângulo e ω o seu circuncírculo. Defina D e E como os pés das bissetrizes por B e C. A reta DE encontra ω nos pontos F e G. Prove que as tangentes a ω por F e G são tangentes ao exincírculo do $\triangle ABC$ relativo ao vértice A.

▶ **PROBLEMA 4**
Seja n um inteiro positivo e A um conjunto de inteiros tal que o conjunto $\{x = a + b \mid a, b \in A\}$ contém $\{1^2, 2^2, \dots, n^2\}$. Prove que existe N tal que se $n \geq N$, então $|A| > n^{0.666}$.

▶ **PROBLEMA 5**
Seja n um inteiro positivo. Dados n pontos no plano, prove que é possível marcar um ângulo de medida $\frac{2\pi}{n}$ com vértice em cada um dos pontos dados, tal que qualquer ponto do plano está no interior de um ângulo.

Linguagem: Português

Tempo: 5 horas.
Cada problema vale 7 pontos.