NÍVEL 3

Folha 1/2

PROBLEMA 4

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

Fato 1: $\frac{1}{1^m} = 1$.

Lema 1: Dados a e b primos entre si,

$$\{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}_+\}$$

contém $\{n, n+1, \dots\}$ para algum inteiro n.

Prova do Lema 1: Por Bezout, $ax_0 + by_0 = 1$, para $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$. S.P.G, $x_0 > 0$.

Além disso, $a(-b) + b(a) = 0$.

$$\text{Logo, } n = a(nx_0) + b(ny_0) = a(nx_0 - b) + b(ny_0 + a) = \cdots$$

$$= a(nx_0 - Kb) + b(ny_0 + Ka).$$

Seja $K = \left\lfloor \frac{nx_0}{b} \right\rfloor$; isto é $nx_0 = Kb + r$; $0 \leq r < b$.

$$\Rightarrow n = a \cdot r + b(ny_0 + Ka).$$

Para $n \geq ab$, $n \geq ab > ar \Rightarrow b(ny_0 + Ka) > 0 \Rightarrow ny_0 + Ka > 0$.

Logo, $n \geq ab$ pode ser escrito como $ax + by$, com $x, y \in \mathbb{Z}_+$ $\square$

Seja $S = \{n : \text{existem inteiros } a_1, \dots, a_n : \frac{1}{a_1^m} + \dots + \frac{1}{a_n^m} = 1\}$.

Lema 2: Se $n \in S \Rightarrow n + (B^m - 1) \in S$.

Prova: Se $n \in S \Rightarrow \frac{1}{a_1^m} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}^m} + \frac{1}{a_n^m} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^m} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}^m} + \underbrace{\frac{1}{(Ba_n)^m} + \dots + \frac{1}{(Ba_n)^m}}_{B^m \text{ vezes}} = 1$$

$\Rightarrow n + (B^m - 1) \in S$

Olimpíada Brasileira de Matemática

NÍVEL 3

Folha 2/2

PROBLEMA 4

Todas as suas soluções devem ser justificadas

Nome completo: Guilherme Zeus Dantas e Moura

CPF do aluno ou do responsável: 140.264.007-27

<u>Cor. 2.1</u>: $n \in S \Rightarrow n + k(B^m - 1) \in S$.

<u>Prova</u>: $n \in S \Rightarrow n + (B^m + 1) \in S \Rightarrow n + 2(B^m - 1) \in S \Rightarrow \dots \Rightarrow n + k(B^m - 1) \in S$.

<u>Cor. 1.1</u> Dados a e b, com $mdc(a,b) = d$,

$$\{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}_+\}$$

contém $\{dn, d(n+1), \dots\}$ para algum n inteiro.

<u>Prova</u>: $a = da'$; $b = db'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{a'x + b'y : x, y \in \mathbb{Z}_+\} \supset \{n, (n+1), \dots\}$ pelo Lema 1.

$\Rightarrow \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}_+\} \supset \{dn, d(n+1), \dots\}$ $\square$

Seja $D = mdc(2^m - 1, 3^m - 1)$.

Pelo Cor 2.1, $\{1, D^m, \dots, 1 + (D-1)(D^m - 1)\} \subset S$, isto é, todas as classes de resíduos (mod D) estão em S.

Pelo Cor 2.1, $n \in S \Rightarrow n + x(2^m - 1) \in S \Rightarrow n + x(2^m - 1) + y(3^m - 1) \in S$

$\Rightarrow n + D \cdot t \in S$ (pelo Cor 1.1), $\forall t \geq N$.

$\Rightarrow$ Como toda classe de resíduos está em S e podemos pegar todos os elementos de uma certa classe de resíduos, existe

N tal que, $\forall n \geq N$; $n \in S$.

$\square$

Guilherme Zeus Dantas e Moura

Folha de rascunho

Vamos restringir $a_i = 2^{\beta_i}$. Logo:

$$2^{-\beta_1 \cdot m} + 2^{-\beta_2 \cdot m} + 2^{-\beta_3 \cdot m} + \dots + 2^{-\beta_n \cdot m} = 1$$

$\frac{1}{1^m} = 2^m \cdot \frac{1}{2^m}$

$\frac{1}{2^m} = 2^m \cdot \frac{1}{4^m}$

$\frac{1}{4^m} = 2^m \cdot \frac{1}{8^m}$

wow!

$$\boxed{\frac{1}{2^m} = 3^m \frac{1}{6^m}}$$

Podemos trocar $\frac{1}{2^{\beta m}}$ por 2^m termos $\frac{1}{2^{(\beta+1) m}}$

Como podemos fazer inicialmente 1 termo $1/1^m$ conseguimos uma construção p/ $1 + K(2^m - 1)$.

Base 2 foi arbitrária, poderia ter sido qualquer base B.

$\Rightarrow$ Construção p/ $n = 1 + K \cdot (B^m - 1)$ (que infelizmente não é bom o suficiente)