Questões Variadas (ou não tão variadas assim)

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

As questões **não** estão em ordem de dificuldade. Aproveite para treinar a escrever as soluções de maneira organizada. Faça os desenhos de geometria com *régua e compasso.*

Problema 1. (Reino Unido 2017/Fase 1) Os inteiros $1, 2, 3, \ldots, 2016$ são escritos na base 10, cada um aparecendo exatamente uma vez. Cada um dos algarismos de 0 a 9 aparece várias vezes nessa lista. Quantos algarismos dessa lista são ímpares? *Por exemplo, 8 dígitos ímpares aparecem na lista* $1, 2, 3, \ldots, 11$.

Problema 2. (Reino Unido 2017/Fase 1) Para cada real positivo x, definimos $\{x\}$ como o maior dos números x e $1/x$, com $1 = 1$. Ache todos os reais positivos y tais que:

$$5y\{8y\}\{25y\} = 1.$$

Problema 3. (Reino Unido 2019/Fase 2) Seja ABC um triângulo. Seja ℓ a reta por B perpendicular a AB. A reta perpendicular a BC que passa por A encontra ℓ no ponto D. A mediatriz de BC encontra ℓ no ponto P. Seja E o pé da perpendicular de D em AC. Prove que BPE é isósceles.

Problema 4. (Reino Unido 2017/Fase 1) Determine todos os pares (m, n) de inteiros positivos que satisfazem a equação:

$$n^2 - 6n = m^2 + m - 10.$$

Problema 5. (Reino Unido 2017/Fase 1) Naomi e Tom jogam um jogo, Naomi começando. A cada turno, cada um escolhe um inteiro entre 1 e 100, cada vez escolhendo um inteiro que ninguém escolheu antes. Um jogador perde se, no fim de seu turno, a soma de todos os inteiros escolhidos desde o começo do jogo (por ambos os jogadores) não pode ser escrito como diferença de quadrados. Determine se um dos jogadores tem uma estratégia vencedora, e caso tenha, qual é.

Problema 6. (Reino Unido 2019/Fase 2) Seja n um inteiro. n^2 peças mágicas de xadrez se organizam num tabuleiro $n^2 \times n^2$ composto por n^4 quadradinhos unitários. Após um sinal, todas as peças de xadrez se teleportam para outro quadradinho do tabuleiro, tal que a distância entre os centros do novo e do antigo quadrado é exatamente n. As peças de xadrez ganham, se e somente se, antes e após o sinal, não tem duas peças na mesma linha ou na mesma coluna. Para quais valores de n, as peças de xadrez ganham?

Problema 7. (Reino Unido 2017/Fase 1) Seja ABC um triângulo com $\angle A < \angle B < 90°$ e seja Γ o círculo que passa por A, B e C. As tangentes a Γ por A e C se intersectam em P. As retas AB e PC se intersectam em Q. É dado que $[ACP] = [ABC] = [BQC]$. Prove que $\angle BCA = 90°$. *Aqui,* $[XYZ]$ *denota a área de* XYZ.

Problema 8. (Reino Unido 2017/Fase 1) Inteiros positivos consecutivos m, $m+1$, $m+2$ e $m+3$ são divisíveis por inteiros positivos ímpares consecutivos n, $n+2$, $n+4$ e $n+6$, respectivamente. Determine o menor m possível em termos de n.

Problema 9. (Reino Unido 2019/Fase 2) Seja p um primo ímpar. Quantos subconjuntos não-vazios de $\{1, 2, 3, \cdots, p-2, p-1\}$ tem soma divisível por p?

Problema 10. (Reino Unido 2019/Fase 2) Ache todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f(x) \leq f(y)$ sempre que $x \leq y$ e

$$f(x^4) + f(x^2) + f(x) + f(1) = x^4 + x^2 + x + 1$$

para todo $x > 0$.