SIMULADO

Nível 3 (Ensino Médio)

Problema 1 **(Banco Junior Balkan 2018, C2)** Um conjunto $S \subset \mathbb{N}$ é *balanceado* quando:

- Cada elemento de S tem exatamente 3 dígitos.
- A soma dos dígitos de cada elemento de S é 9.
- Nenhum elemento de S possui algarismo decimal 0.
- Cada par de elementos de S tem algarismos das unidades diferentes.
- Cada par de elementos de S tem algarismos das dezenas diferentes.
- Cada par de elementos de S tem algarismos das centenas diferentes.

Ache o maior inteiro n tal que existe um conjunto balanceado com n elementos.

Problema 2 **(Banco IMO 1998, N2)** Determine todos os pares (a, b) de números reais tal que

$$a\lfloor bn\rfloor = b\lfloor an\rfloor$$

para todo inteiro positivo n.

Problema 3 **(HMIC 2016, 2)** Seja ABC um triângulo aculângulo com circuncentro O, ortocentro H, e circuncírculo Ω. Seja M o ponto médio de AH e N o ponto médio de BH. Suponha que os pontos M, N, O, H são distintos e caem no círculo ω.

Prove que os círculos ω e Ω são internamente tangentes.

Problema 4 **(HMMT 2019, Time, 2)** Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto dos inteiros positivos e seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função bijetora. É verdade que sempre deve existir um inteiro n tal que $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ é uma permutação de $(1, 2, \dots, n)$?

Problema 5 **(Banco Junior Balkan 2018, G1)** Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC, com $BC > AC$, inscrito na circunferência Γ. A circunferência com centro C e raio CB intersecta Γ novamente no ponto D, que está no arco AB que não contêm C. A circunferência com centro C e raio CA intersecta o segmento CD no ponto K. A reta paralela a BD por K intersecta AB em L. Se M é o ponto médio de AB e N é o pé da perpendicular de H em CL, prove que a reta MN bisecta o segmento CH.

Problema 6 **(Putnam 1992, A6)** Quatro pontos são escolhidos uniformemente em uma esfera. Qual é a probabilidade de que o cento da esfera esteja no interior do tetraedro formado por esses pontos?
