

Os pontos Humpty-Dumpty

Jorge Craveiro

Resumo: Vamos ver algumas propriedades interessantes de dois tipos de pontos em um triângulo. Em vários exemplos, veremos como identificá-los, para assim matar problemas bem mais facilmente. Esses pontos de que vamos falar não têm um nome específico, então o autor do artigo os chamou de Humpty e Dumpty. Esses pontos dependem do vértice do triângulo, então os chamaremos de X -Humpty, e X -Dumpty, aos relativos ao vértice X .

1 Humpty

Definição 1. No triângulo ABC , o ponto A -Humpty, P_A , é definido como o ponto interno ao triângulo tal que $\angle P_A BC = \angle P_A AB$ e $\angle P_A CB = \angle P_A AC$.

Proposição 1. P_A está sobre a mediana de A no triângulo ABC .

Proposição 2. P_A está sobre o círculo de Apolônio de A no triângulo ABC , ou seja, $\frac{P_A B}{P_A C} = \frac{AB}{AC}$.

Proposição 3. B , P_A , H e C são concíclicos, sendo H ortocentro de ABC .

Proposição 4. $P_A H$ e $P_A A$ são perpendiculares, ou seja, o A -Humpty é a projeção de H na mediana de A .

2 Dumpty

Definição 2. No triângulo ABC , o ponto A -Dumpty, Q_A , é definido como o ponto interno ao triângulo tal que $\angle Q_A BA = \angle Q_A AC$ e $\angle Q_A AB = \angle Q_A CA$.

Proposição 5. Q_A está na simediana de A no triângulo ABC .

Proposição 6. Q_A é o centro de roto-homotetia dos triângulos $AQ_A C$ e $CQ_A B$, ou seja, a que transforma AC em BA .

Proposição 7. B , Q_A , O e C são concíclicos, em que O é circuncentro do triângulo ABC .

Proposição 8. $Q_A O$ e $Q_A A$ são perpendiculares, ou seja, o A -Dumpty é a projeção de O na simediana de A .

3 Humpty-Dumpty

Além disso note:

Proposição 9. Os pontos A -Humpty e A -Dumpty são conjugados isogonais.

4 Problemas olímpicos

Problema 1. (ELMO 2014) No triângulo ABC , H e O são ortocentro e circuncentro, respectivamente. O círculo (BOC) intersecta o círculo de diâmetro AO no ponto M . A reta AM intersecta (BOC) novamente em X . Da mesma maneira, (BHC) intersecta o círculo de diâmetro AH em N , e AN intersecta (BHC) novamente em Y . Mostre que MN é paralelo a XY .

Problema 2. (USAMO 2008) No triângulo ABC , M e N são os pontos médios de AB e AC . As mediatrizes de AB e AC cortam a mediana de A nos pontos D e E , respectivamente. BD e CE se cortam em F . Mostre que $AMFN$ é inscritível.

Problema 3. (USA TST 2015) ABC é um triângulo escaleno. K_A , L_A , M_A são, respectivamente, as interseções de BC com a bissetriz interna, bissetriz externa e mediana de A . O círculo $(AK_A L_A)$ intersecta AM_A novamente em X_A . De maneira análoga, defina os pontos X_B e X_C . Mostre que o circuncentro do triângulo $X_A X_B X_C$ está na reta de Euler do triângulo ABC .

Problema 4. (USA TST2005) P é um ponto interno ao triângulo ABC tal que os ângulos PAB e PBC são iguais, bem como PAC e PCB . A mediatriz de AP corta BC em Q . Se O é circuncentro de ABC , prove que $\angle AQP$ é o dobro de $\angle OQB$.

5 Exercícios

Problema 5. No triângulo ABC , a simediana de A intersecta o circuncírculo em K . O simétrico de K em relação a BC é K^* . Prove que AK^* é a mediana.

Problema 6. Um ponto P varia sobre BC , lado do triângulo ABC . Os pontos M e N estão sobre AB e AC , respectivamente, de tal forma que $PM \parallel AC$, e $PN \parallel AB$. Prove que, ao variar P , o círculo (AMN) passa por um ponto fixo além de A .

Problema 7. Os pontos M e N estão sobre uma semicircunferência de diâmetro AB e centro O . A reta MN intersecta a AB em X . Os círculos (MBO) e (NAO) se cortam em K . Mostre que XK é perpendicular a KO .

Problema 8. Q_A é o A -Dumpty do triângulo ABC . Seja AD altura de A . Prove que DQ_A bissecta a base média relativa a BC no triângulo ABC .

Problema 9. P é um ponto na simediana de A no triângulo ABC . O_1 e O_2 são circuncentros dos triângulos APB e CAP . Se O é circuncentro do triângulo ABC , prove que AO bissecta O_1O_2 .

Problema 10. AD é altura de A no triângulo ABC . Um círculo de centro sobre AD é tangente externamente ao (BOC) em X , em que O é circuncentro de ABC . Mostre que AX é simediana de A .