

---

Oficina de Resolução de ProblemasGuilherme Zeus Moura  
zeusdanmou@gmail.com

---

**Problema 1.** (OBM 2018) Guilherme escreve  $2n$  números reais  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ , todos pertencentes ao intervalo  $[0, 1]$ , ao redor de um círculo e multiplica todos os pares de números vizinhos entre si, obtendo, no sentido anti-horário, os produtos  $p_1 = x_1x_2$ ,  $p_2 = x_2x_3$ ,  $\dots$ ,  $p_{2n} = x_{2n}x_1$ . Guilherme soma os produtos de índice par e subtrai os produtos de índice ímpar. Qual é o maior resultado que Guilherme pode obter?

**Problema 2.** (Reino Unido 2017/Fase 1) Seja  $ABC$  um triângulo com  $\angle A < \angle B < 90^\circ$  e seja  $\Gamma$  o círculo que passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$ . As tangentes a  $\Gamma$  por  $A$  e  $C$  se intersectam em  $P$ . As retas  $AB$  e  $PC$  se intersectam em  $Q$ . É dado que

$$[ACP] = [ABC] = [BQC].$$

Prove que  $\angle BCA = 90^\circ$ .

**Problema 3.** (Rússia 2017) Um real  $x$  é escolhido tal que cada uma das somas  $S = \sin 64x + \sin 65x$  e  $C = \cos 64x + \cos 65x$  é racional. Prove que, em uma dessas somas, ambas as parcelas são racionais.

**Problema 4.** (Rússia 2017) Determine se para quaisquer inteiros positivos  $a$ ,  $b$  e  $c$  existe um polinômio quadrático  $P(x) = kx^2 + lx + m$ , com  $k$ ,  $l$  e  $m$  inteiros,  $k > 0$ , tal que para valores inteiros o polinômio assume  $a^3$ ,  $b^3$  e  $c^3$ ?