Combinatória Geométrica

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

Problema 1. Dados $2n$ pontos no plano, sem três colineares, sendo n vermelhos e n azuis. Prove que existe um pareamento entre os pontos vermelhos e os pontos azuis tal que os segmentos unindo cada par não se intersectam dois a dois.

Problema 2. (Cone Sul 2001) Um polígono de área S está contido dentro de um quadrado de lado a. Mostre que existem dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior ou igual a S/a.

Problema 3. (Ibero 1997) Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, com P_1 sendo o centro do círculo. Para $k = 1, 2, \ldots, 1997$ seja x_k a distância de P_k ao ponto de $\mathcal{P}$ mais próximo de P_k. Mostre que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leq 9.$$

Problema 4. São desenhadas $n \geq 3$ retas no plano tais que:

(i) Quaisquer duas retas são concorrentes;

(ii) Por todo ponto de interseção de duas retas passa pelo menos mais uma reta.

Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.

Problema 5. Seja C um círculo de raio 16 e A um anel com raio interior 2 e raio exterior 3. Agora, suponha que um conjunto S de 650 pontos são selecionados no interior de C. Prove que podemos colocar o anel A no plano de modo que ele cubra pelo menos 10 pontos de S.

Problema 6. (Banco IMO 1989) Temos um conjunto finito de segmentos no plano, de medida total 1. Prove que existe uma reta ℓ tal que a soma das medidas das projeções destes segmentos a reta ℓ é menor que $2/\pi$.

Problema 7. Prove que existe um conjunto S de 3^{1000} pontos no plano tal que, para cada ponto P de S, existem pelo menos 2000 pontos em S cuja distância para P é exatamente uma unidade.

Problema 8. (Turquia) Mostre que o plano não pode ser coberto por um número finito de parábolas.

Problema 9. (Ibero 2002) Seja S um conjunto de nove pontos, sem três pontos colineares. Se P é um ponto de S, mostre que a quantidade de triângulos cujos vértices estão em $S - P$ e P está em seu inteirior é par.

Problema 10. No interior de um quadrado são escolhidos 1000 pontos. Estes pontos, juntamente com os 4 vértices do quadrado, formam um conjunto P onde não há três pontos colineares. Alguns destes pontos são ligados por segmentos de modo a particionar o quadrado em vários triângulos. Não há polígonos com mais de três lados nessa partição e todo ponto é vértice de ao menos um triângulo. Ache a quantidade de triângulos da partição.

Problema 11. (IMO 1989) Sejam n e k dois inteiros positivos e seja S um conjunto de n pontos num plano tais que

(i) Não haja três pontos de S que sejam colineares;

(ii) Para qualquer ponto P, há pelo menos k pontos de S que são equidistantes de P.

Prove que

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Problema 12. (Irã 2010) Temos n pontos no plano de modo que não existam três deles colineares. Prove que o número de triângulos com vértices nestes pontos e cuja área é exatamente 1 não pode ser maior que $\frac{2}{3}(n^2 - n)$.

Problema 13. (China 2000, HongBin Yu) Considere n pontos colineares e todas as distâncias entre dois deles. Suponha que cada distância aparece no máximo duas vezes. Prove que existem pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ destas distâncias que aparecem 1 vez cada.

Problema 14. (China 2011) Seja S um conjunto de n pontos no plano tal que não há quatro pontos colineares. Sejam $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ as diferentes distâncias entre os pares de pontos distintos de S e seja m_i a quantidade de pares de pontos cuja distância é exatamente d_i. Prove que

$$\sum_{i=1}^{k} m_i^2 \leq n^3 - n^2.$$