Alguns Problemas de Geometria

Guilherme Zeus Moura
zeusdanmou@gmail.com

§1 Ideias úteis

- **Faça uma boa figura!** O que é uma boa figura?
  - é feita com régua e compasso;
  - é grande (uma folha inteira);
  - deixa um bom espaço para marcar ângulos e traçar segmentos adicionais;
  - não deixa pontos muito próximos um do outro;
  - não é próxima de casos particulares notáveis (triângulo equilátero, isósceles, retângulo).
- **Não hesite em fazer várias figuras!** Muitas vezes, depois de progredir no problema, algumas partes da figura são inúteis, e devem ser descartadas.
- Marque vários ângulos, procure semelhanças, colineariedades e quadriláteros cíclicos.
- Tome cuidado ao abordar um problema por uma técnica de contas, como geometria analítica ou complexos. Tenha noção de quanto tempo irá levar para resolver o problema usando essas técnicas.

  Mesmo caso decida fazer o problema com contas, faça uma boa figura, pois fatos sintéticos podem simplificar o seu trabalho.

§2 Problemas

Problema 1 Seja ω um círculo com centro O. Seja AB uma corda de ω, e C um ponto em AB. O circuncírculo de OCA corta ω em D.

Prove que $BC = CD$.

Problema 2 **(Bósnia JBMO TST 2012)** Considere 5 pontos numa circunferência A, B, C, D and E, nessa ordem, tal que $\angle ABE = \angle BEC = \angle ECD = 45°$.

Prove que $AB^2 + CE^2 = BE^2 + CD^2$.

Problema 3 **(Grécia JBMO TST 2017)** Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncírculo ω e F um ponto no lado AB tal que $AF < AB/2$. A circunferência de centro F que passa por A intersecta a reta OA no ponto A' e o círculo ω em K.

Prove que os pontos B, K, F, A' e O estão em uma mesma circunferência.

Problema 4 **(IMO 2008, 1)** Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC. O círculo Γ_A, centrado no ponto médio de BC que passa por H intersecta a reta BC nos pontos A_1 e A_2. Da mesma maneira, defina os pontos B_1, B_2, C_1 e C_2.

Prove que os seis pontos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 são concíclicos.

Problema 5 **(JBMO 2016)** Seja $ABCD$ um trapézio ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) circunscrito na circunferência ω, isto é, ω é tangente à AB, BC, CD e DA. O incírculo de ABC toca AB e AC nos pontos M e N, respectivamente.

Prove que o incentro $ABCD$ cai na reta MN.

Problema 6 **(IMO 2012, 1)** Dado um triângulo ABC, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita[1] é tangente ao lado BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F, e as retas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de interseção das retas AF e BC, e seja T o ponto de interseção das retas AG e BC.

Prove que M é o ponto médio de ST.

[1] A circunferência ex-inscrita de ABC oposta ao vértice A é a circunferência tangente ao segmento BC, ao prolongamento do segmento AB no sentido de A para B e ao prolongamento do segmento AC no sentido de A para C.