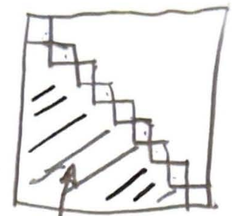
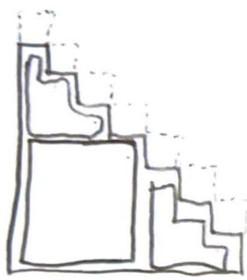
C4 / 2009: Folha 1

Vamos calcular a resposta para



essa parte.

Podemos construir recursivamente:



$$R_{2^m} = 2R_{2^{m-1}} + 2^{m+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{2^m} = m \cdot 2^{m+1}.$$

Seja x_n a resposta pra um quadrado de lado n.

Lema 1: Se o quadrado inferior esquerdo não está no mesmo retângulo de uma célula da diagonal, então há outra configuração com tal propriedade com perímetro menor ou igual.

Prova: Algoritmo:

Suponha que o retângulo que contém o $(1,1)$ possui o (x,y) como célula superior esquerda.

- $(x+1, y)$ e $(x, y+1)$ estão em retângulos diferentes.
- $(x+1, y+1)$ não está no mesmo retângulo que $(x+1, y)$ (1)

  ou

  " " " " " " $(x, y+1)$.
- SPG, vale (1). Então, extender o retângulo $x \cdot y$ para $(x+1) \times y$ ⊛
- Repetir até que $x+y=n$.

PS. Em ⊛, a borda criada é, no máximo, $2y$ e a borda retirada é, no mínimo $2y$. Logo, a borda não aumenta. □

C4/2009: Folha 2

Podemos supor que existe a t.q. (1,1) e (a, n-a) estão no mesmo retângulo.

Assim: $x_n = 2n + x_a + x_{n-a}$, para algum $a \in \{1, \dots, n-1\}$

Vamos provar que $x_n \geq 2n \cdot \log_2 n$.

Base: $n=1$ $\quad x_1 = 0 \geq 2 \cdot 1 \cdot 0$. ✓

$n=2$ $\quad x_2 = 4 \geq 2 \cdot 2 \cdot 1$ ✓

Hipótese: $x_k \geq 2k \cdot \log k$, $\forall k < n$.

$$x_n = 2n + x_a + x_{n-a} \geq 2n + 2a\log a + 2(n-a)\log(n-a),$$ para algum a in $\{1, \dots, n-1\}$

Mas, se $f(x) = x \cdot \log x + (n-x)\log(n-x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} - \log(n-x) - (n-x) \cdot \frac{1}{(n-x)} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

$$= \log x - \log(n-x)$$

. $f'(x) < 0$, se $x < n/2$ e $f'(x) > 0$, se $x > n/2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \geq f(n/2)$, $\forall x$. $\Rightarrow x\log x + (n-x) \cdot \log(n-x) \geq n(\log n - 1)$

Logo, $x_n \geq 2n + 2n(\log n - 1) = 2n \cdot \log n$.

OK!

No caso em que $n = 2^m \Rightarrow x_{2^m} \geq 2^{m+1} \cdot m$.

Com a construção inicial, essa é a melhor forma:

Perímetro total $= 2 \cdot (2^{m+1} \cdot m) + 4 \cdot (2^m) = 2^{m+2} \cdot (m+1)$.

$\square$