3º Simulado da Quarentena (Soluções)
OMERJ 2020

Disponível na sexta, 03 de abril de 2020.
Entrega até terça, 07 de abril de 2020.

PROBLEMA 1 (França 1990, 1, Alterado)
Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros não negativos. Considere a sequência u_n definida por $u_0 = 0$ e $u_{2n} = u_n$, $u_{2n+1} = 1 - u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calcule u_{2020}.

(b) Ache a quantidade de índices $n \leq 2020$ para os quais $u_n = 0$.

(c) Seja m um número natural e $N = (2^m - 1)^2$. Ache u_N.

Solução. Primeiro, note que $u_n = 0$ ou $u_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Podemos provar que u_n tem a mesma paridade que soma dos dígitos de n em sua representação binária. Este exercício fica para o leitor, mas este fato só será usado no item (c).

(a)

$$u_{2020} = u_{1010} = u_{505} = 1 - u_{252} = 1 - u_{126} = 1 - u_{63} = u_{31} = 1 - u_{15} = u_7 = 1 - u_3 = u_1 = 1 - u_0$$
$$u_{2020} = 1$$

(b) Observe que existe exatamente um 0 entre u_{2n} e u_{2n+1}, pois $u_{2n+1} = 1 - u_{2n}$.

Logo, olhando para os 1010 pares $(u_0, u_1), (u_2, u_3), \ldots, (u_{2018}, u_{2019})$, exitem exatamente 1010 0's.

Portanto, sabendo que $u_{2020} = 1$, temos que existem 1010 índices $n \leq 2020$ tal que $u_n = 0$.

(c) Se $m = 0$, $N = 0$ e $u_N = 0$. Se $m \geq 0$, vamos usar que $u_N \equiv$ soma dos dígitos de N na base 2 (mod 2).

$$N = (2^m - 1)^2 = 2^{2m} - 2^{m+1} + 1 = \underbrace{11\cdots1}_{m-1}\underbrace{000\cdots0}_{m}1 \quad \text{na base } 2.$$

Logo,

$$u_N \equiv \text{soma dos dígitos de } N \text{ na base } 2 = m \pmod 2.$$

Ou seja,

$$u_N = \begin{cases} 1, \text{se } m \text{ é ímpar} \\ 0, \text{se } m \text{ é par} \end{cases}.$$

PROBLEMA 2 (França 1990, 2)
Um jogo consiste em peças no formato de um tetraetro regular de lado 1. Cada face é pintada com uma de n cores, e as faces de uma mesma peça não possuem cores necessariamente distintas. Determine o número máximo de peças que esse jogo pode ter, tal que quaisquer duas peças sejam sempre distinguíveis, mesmo que o jogador possa rotacioná-las.

Solução. Vamos dividir em casos.

A. Se todas as faces do tetraedro têm cores diferentes.

Vamos primeiro escolher as quatro cores, a, b, c, d. Existem $\binom{n}{4}$ formas de fazer isso.

Depois de escolhidas as cores, existem duas formas de pintar tetraetros indistinguíveis.

Total desse caso: $2\binom{n}{4}$

B. Se há exatamente um par de faces com a mesma cor.

Vamos primeiro escolher a cor que aparece duas vezes. Existem n formas de fazer isso.

Depois, vamos escolher as duas cores restantes. Existem $\binom{n-1}{2}$ formas de fazer isso.

Depois de escolhidas as cores, só existe uma forma de pintar o tetraedro.

Total desse caso: $n\binom{n-1}{2}$

C. Se existem dois pares de faces com cor igual, com cores distintas entre si.

Vamos escolher as duas cores que aparecem. Existem $\binom{n}{2}$ formas de fazer isso.

Depois de escolhidas as cores, só existe uma forma de pintar o tetraedro.

Total desse caso: $\binom{n}{2}$

D. Se existem um trio de faces com cores iguais e uma quarta face com cor distinta.

Vamos escolher primeiro a cor que aparece três vezes. Existem n formas de fazer isso.

Depois, vamos escolher a cor que aparece uma vez. Existem $n-1$ formas de fazer isso.

Depois de escolhidas as cores, só existe uma forma de pintar o tetraedro.

Total desse caso: $n(n-1)$

E. Se todas as faces têm a mesma cor.

Vamos escolher a única cor. Existem n formas de fazer isso.

Depois de escolhida a cor, só existe uma forma de pintar o tetraedro.

Total desse caso: n

Por fim, temos que

$$\begin{aligned}\#(\text{peças}) &= 2\binom{n}{4} + n\binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} + n(n-1) + n \\ &= \frac{n^4 + 11n^2}{12}.\end{aligned}$$

PROBLEMA 3 (França 1990, 3) (a) Ache todas as triplas de inteiros positivos (a, b, c) para os quais

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

(b) Ache todos os inteiros positivos n para os quais exitem inteiros positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que

$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}.$$

Solução. (a) Sem perda de generalidade, $a \leq b \leq c$.

Se $a \leq 2$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\ 0 &\geq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \end{aligned}$$

Absurdo.

Se $a \geq 4$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\ &\leq 3 \cdot \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Absurdo.

Logo, $a = 3$.

Se $b \geq 4$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\ &\leq \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Absurdo.

Logo, $b = 3$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{36} &= \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

Logo, $c = 3$. Todas as soluções para (a, b, c) são $(3, 3, 6)$, $(3, 6, 3)$ e $(6, 3, 3)$.

(b) Observe que

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(2x)^2} + \frac{1}{(2x)^2} + \frac{1}{(2x)^2} + \frac{1}{(2x)^2}.$$

Logo, se n satisfaz a condição do enunciado, $n + 3$ também satisfaz.

Como 1, 6 e 8 satisfazem a condição do enunciado,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{1^2} \\ 1 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} \\ 1 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} \end{aligned}$$

automaticamente, qualquer número da forma $3k + 1$, $3k + 6$ e $3k + 8$ também satisfazem o enunciado.

Sobram os números 2, 3 e 5.

A. Se $n = 2$ ou $n = 3$,

Se $x_i = 1$ para algum i, então $LD > 1$. *Absurdo!*

Logo, $x_i \geq 2$ para todo i.

Mas, se $x_i \geq 2$ para todo i, então $LD \leq \frac{n}{4} < 1$. *Absurdo!*

B. Se $n = 5$.

Se $x_i = 1$ para algum i, então $LD > 1$. *Absurdo!*

Logo, $x_i \geq 2$ para todo i.

Mas, se $x_i = 2$ para mais que 3 valores de i, então $LD > 1$. *Absurdo!*

Logo, há, no máximo, 3 valores de i tal que $x_i = 2$ e, para os outros índices i, $x_i \geq 3$.

Portanto, $LD \leq 3\frac{1}{2^2} + 2\frac{1}{3^2} < 1$. *Absurdo!*

Deste modo, todos os números diferentes de 2, 3 ou 5 funcionam.

PROBLEMA 4 (França 1991, 4)
Seja p um inteiro não negativo e seja $n = 2^p$. Considere um subconjunto A do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ com a propriedade que de que, sempre que $x \in A$, então $2x \notin A$. Ache o número máximo de elementos que A pode ter.

Solução. Todo número k pode ser escrito unicamente como $m \cdot 2^\alpha$, com m ímpar. Como todo número k só "interage" com os números $2k$ e $k/2$, podemos dividir em grupos em relação ao m. Isto é, dividir nos seguintes grupos:

$$\begin{gathered}
G_1 = \{1, 2, 4, 8, \dots\} \\
G_3 = \{3, 6, 12, 24, \dots\} \\
G_5 = \{5, 10, 20, 40, \dots\} \\
G_7 = \{7, 14, 28, 56, \dots\} \\
\vdots \\
G_m = \{m, 2m, 4m, 8m, \dots\}
\end{gathered}$$

Se o grupo $G_m = \{m, 2m, 4m, 8m, \dots, 2^{\alpha-1}m\}$ tem tamanho α, a quantidade máxima de números desse grupo em A é $\left\lfloor \frac{\alpha+1}{2} \right\rfloor$.

Esse máximo pode ser obtido colocando $m, 4m, 16m, \dots$ em A, para todo m. Desse modo, $k \in A \iff k = m \cdot 2^\alpha$, com α par.

Podemos calcular quantos números até 2^p tem "α" par[1].

(a) Se p é par:

$$\begin{aligned}
\max |A| &= \underbrace{2^{p-1}}_{\alpha=0} + \underbrace{2^{p-3}}_{\alpha=2} + \cdots + \underbrace{2^{p-1-2i}}_{\alpha=2i} + \cdots + \underbrace{2^1}_{\alpha=p-2} + \underbrace{1}_{\alpha=p} \\
&= \frac{2^{p+1} + 1}{3}
\end{aligned}$$

(b) Se p é ímpar:

$$\begin{aligned}
\max |A| &= \underbrace{2^{p-1}}_{\alpha=0} + \underbrace{2^{p-3}}_{\alpha=2} + \cdots + \underbrace{2^{p-1-2i}}_{\alpha=2i} + \cdots + \underbrace{2^0}_{\alpha=p-1} \\
&= \frac{2^{p+1} - 1}{3}
\end{aligned}$$

Para simplificar,

$$\max |A| = \frac{2^{p+1} + (-1)^p}{3}.$$

[1] Para os que conhecem a notação, queremos a quantidade de números k tal que $\nu_2(k)$ é par

PROBLEMA 5 (França 1994, 4)
Seja ABC um triângulo. Seja P um ponto no plano, e sejam L, M, N os pés das perpendiculares passando por P aos lados BC, CA, AB, respectivamente. Determine o ponto P para o qual $BL^2 + CM^2 + AN^2$ é mínimo.

Solução. Primeiro, uma desigualdade[2] que usaremos é

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2,$$

com igualdade se, e somente se, $x = y$.

$$\begin{aligned}
BL^2 + CM^2 + AN^2 &= (BP^2 - PL^2) + (CP^2 - PM^2) + (AP^2 - PN^2) \\
&= (BP^2 - PN^2) + (CP^2 - PL^2) + (AP^2 - PM^2) \\
&= BN^2 + AM^2 + CL^2 \\
&= \frac{1}{2}\Big((BL^2 + LC^2) + (CM^2 + MA^2) + (AN^2 + NB^2)\Big) \\
&\geq \frac{1}{4}\Big((BL + LC)^2 + (CM + MA)^2 + (AN + NB)^2\Big) \\
&\geq \frac{1}{4}\Big(BC^2 + CA^2 + AB^2\Big)
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $BL = LC$, $CM = MA$ e $AN = NB$, ou seja, quando P é o circumcentro de ABC.

[2]Para provar essa igualdade, basta usar que $(x-y)^2 \geq 0$.

PROBLEMA 6 (França 1995, 5)
Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros não negativos. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função bijetora. Prove que sempre existem inteiros não negativos a, b, c tais que $a < b < c$ e $f(a) + f(c) = 2f(b)$.

Solução. Seja $n = f(0)$. Seja k o menor número i tal que $f(i) > n$. Dessa forma, $f(k) = n + t$, para algum inteiro $t > 0$. Como a função f é bijetora, existe l tal que $f(l) = n + 2t$.

Como $f(l) > n$ e k é o menor número i tal que $f(i) > n$, então $l \geq k$. Além disso, $l \neq k$, pois $f(l) \neq f(k)$. Observe que

$$0 < k < l,$$
$$f(0) + f(l) = n + (n + 2t) = 2 \cdot (n + t) = 2 \cdot f(k),$$

ou seja, 0, k e l satisfazem as propriedades desejadas.