

Geometria no Plano Projetivo

Sumário

I. Abordagem Axiomática	3
1. Definindo o Plano Projetivo	4
1.1. Plano Euclidiano	4
1.2. Plano Projetivo	5
II. Abordagem com Álgebra Linear	6
2. Álgebra Linear	7
2.1. Algumas definições	7
2.2. Até que enfim Espaço	8
2.2.1. Coisas relacionadas com base	9
3. Reta Projetiva	12
4. Plano Projetivo	13
5. Projeções e Projetividades	14
6. Cônicas e Polaridades	15

Parte I.

Abordagem Axiomática

1. Definindo o Plano Projetivo

1.1. Plano Euclidiano

Você talvez esteja acostumado com a noção do Plano Euclidiano. Essa estrutura envolve muitos conceitos, incluindo (mas não limitado a):

- pontos,
- retas,
- segmentos de reta,
- distância,
- ângulos,
- polígonos (triângulos, quadriláteros, ...),
- circunferências,
- transformações (rotações, translações, reflexões, ...).

Apesar de todas esses conceitos estarem empacotadas no Plano Euclidiano, parece que os conceitos mais fundamentais são os primeiros dessa lista. Em outras palavras, os conceitos de *pontos* e *retas* parecem ser mais simples e mais relacionados à definição de Plano Euclidiano, do que os conceitos de *ângulos* e *transformações*.

Nós poderíamos gastar algumas folhas formalizando a definição de Plano Euclidiano (usando o que os matemáticos chamam de *axiomas*) e nos convencer de que, de fato, *pontos* e *retas* são intimamente relacionados ao que realmente o Plano Euclidiano é. Porém, nós preferimos não fazer isso. Na verdade, vamos listar duas propriedades que o Plano Euclidiano *parece* ter:

- (i) Para cada par de pontos distintos, existe uma única reta passando por ambos.
- (ii) Para cada par de retas distintas, existe um único ponto que está em ambas.

Exercício 1. *Descubra se as propriedades acima são verdades ou não no Plano Euclidiano.*

1.2. Plano Projetivo

No Exercício 1, você talvez tenha notado que, embora a propriedade (i) seja verdadeira, (ii) não é. Existe até um nome especial para um par de retas que não se encontra em nenhum ponto: dizemos que essas retas são *retas paralelas*.

Mas... as propriedades (i) e (ii) são tão bonitas (pelo menos pra nós). É tão triste que elas não são verdadeiras. Bem, nós somos matemáticos! Nós podemos fazer o que quisermos com nossas definições (apesar de ter que viver com suas consequências).

Proposta de Definição 1. Um *plano projetivo* é uma estrutura que consiste em três coisas:

- um conjunto \mathcal{P} de pontos,
- um conjunto \mathcal{L} de retas, e
- uma noção de incidência, i.e., se P é um ponto e ℓ é uma reta, nós poderemos dizer se ℓ passa (ou não) pelo ponto P .

Adicionalmente, precisamos das seguintes propriedades:

- (i) Para cada par de pontos distintos, existe uma única reta passando por ambos.
- (ii) Para cada par de retas distintas, existe um único ponto que está em ambas.

Parte II.

Abordagem com Álgebra Linear

2. Álgebra Linear

2.1. Algumas definições

Antes de partirmos para o tópico principal é necessário que algumas definições estejam claras.

Definição 2. f é uma função do conjunto A no conjunto B (denota-se $f : A \rightarrow B$) se:

$$f \subset A \times B \text{ tal que } \forall a \in A \exists! b \in B \mid (a, b) \in f$$

Denotamos $f(a) = b \iff (a, b) \in f$

Definição 3. Uma operação binária "*estrela*" em um conjunto A é, por definição, uma função de A cartesiano A em A , ou em matematicues:

$$\star : A \times A \rightarrow A$$

Denotamos $a \star b = c \iff \star(a, b) = c$

Vale uma observação que pela nossa definição de função seria justo que estivesse escrito $\star((a, b))$, já que o elemento no qual aplicamos a função é o (a, b) , mas por uma certa comodidade ou talvez preguiça omitimos um dos parenteses.

Definição 4. Um corpo \mathbb{K} é um conjunto e duas operações, usualmente chamadas de adição e multiplicação, ou seja $\mathbb{K} = \{C, +, \cdot\}$. Essas operações tem que ter algumas propriedades, sendo elas, para $a, b, c \in C$:

1. Associativa:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

2. Comutativa:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

2. Álgebra Linear

3. Elemento neutro:

$$\exists e \in C \mid \forall a \in C, a + e = e + a = a$$

$$\exists e' \in C \mid \forall a \in C, a \cdot e' = e' \cdot a = a$$

4. Inverso:

$$\forall a \in C \exists a' \in C \mid a + a' = a' + a = e$$

$$\forall a \neq e \in C \exists a' \in C \mid a \cdot a' = a' \cdot a = e'$$

5. Distributiva

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

É usual chamar o e de 0, o e' de 1, o inverso aditivo de a de $-a$ e o multiplicativo de a^{-1} mesmo quando não estamos falando dos números reais. Além disso também é usual denotarmos $a \in \mathbb{K}$ ao invés de $a \in C$.

Dadas essas definições são bons exercícios mostrar que, para $a, b, c \in \mathbb{K}$:

1. $a \cdot (-1) = -a$

2. $a \cdot 0 = 0$

2.2. Até que enfim Espaço

Definição 5. Um espaço vetorial V sobre o corpo \mathbb{K} é um conjunto munido de duas operações, \oplus e \odot . Sendo $\oplus : V \times V \rightarrow V$ e $\odot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$

Sendo que estas possuem algumas propriedades, para $v, u, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos:

1. Associativa em \oplus e \odot

$$v \oplus (u \oplus w) = (v \oplus u) \oplus w$$

$$\alpha \odot (\beta \odot v) = \beta \odot (\alpha \odot v) = (\alpha \cdot \beta) \odot v$$

2. Comutativa em \oplus

$$v \oplus u = u \oplus v$$

3. Elemento neutro

$$\exists e \in V \mid \forall v \in V, v \oplus e = e \oplus v = v, \text{ usualmente denotamos esse elemento como } 0.$$

$$1 \odot v = v, \text{ sendo } 1 \text{ o elemento neutro da multiplicação em } \mathbb{K}.$$

4. Inverso

$$\forall v \in V, \exists v' \in V \mid v \oplus v' = e \text{ usualmente denotamos } v' \text{ por } -v$$

2. Álgebra Linear

5. Distributiva

$$(\alpha + \beta) \odot v = \alpha \odot v \oplus \beta \odot v$$

$$\alpha \odot (v \oplus u) = \alpha \odot v + \alpha \odot u$$

Vale observar, que como em corpos, também é usual simplificarmos um pouco a notação, usando o mesmo símbolo para soma (+) e o produto por escalar é usualmente denotado apenas pela justaposição dos elementos do corpo e do espaço (αv), ainda no produto vale ressaltar que só está definido αv , logo sempre que estiver escrito $v\alpha$, queremos dizer αv .

Em resumo, tudo que der pra escrever menos, nós vamos escrever menos.

São bons exercícios mostrar que:

1. $0v = 0$
2. $(-1)v = -v$

Definição 6. Chamamos o espaço vetorial V' de um subespaço de V se:

1. V' está definido sobre o mesmo corpo.
2. $\forall v \in V', v \in V$
3. As operações de V' são as operações de V com o domínio e contradomínio restritos à V' .

2.2.1. Coisas relacionadas com base

As definições a seguir podem parecer um pouco desconexas separadas, contudo após elas todas estarem claras, o motivo da existência de cada uma fica mais claro também.

Definição 7. Falamos que o vetor u é uma combinação linear entre os vetores v_1, v_2, \dots, v_n , quando quando existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

Definição 8. Chamamos os vetores v_1, v_2, \dots, v_n de linearmente independentes quando nenhum deles podem ser escritos como uma combinação linear dos outros vetores.

Corolário 1. v_1, v_2, \dots, v_n são LI (linearmente independentes) $\iff \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Definição 9. Um espaço V' gerado pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_n de V é o menor subespaço de V que contém v_1, v_2, \dots, v_n .

Obs.: "Menor" significa que não existe nenhum subespaço que contenha esses vetores e esteja contido em V' , tirando o próprio V' .

2. Álgebra Linear

Lema 2. O espaço gerados pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_n é o conjunto de todas as possíveis combinações lineares entre eles.

Demonstração. Como V' é um subespaço, ele é fechado na operação, com isso temos que $\alpha v_i \in V'$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, e como se $v, u \in V'$ então $v + u \in V'$ temos que os vetores da forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ tem que estar em V' , como isso configura um espaço pois satisfaz todas as propriedades, como por exemplo ter 0 e ter inverso, e como todo subespaço que contém v_1, v_2, \dots, v_n contém as combinações lineares deles, V' é necessariamente o menor. \square

Vale observar que se eu adicionar ao conjunto de vetores v_1, v_2, \dots, v_n algum vetor u tal que u é uma combinação linear entre os v 's temos que o espaço gerado por v_1, v_2, \dots, v_n e v_1, v_2, \dots, v_n, u é o mesmo pois adicionamos alguém que já estava lá. Com isso temos:

Definição 10. Chamamos de base de V qualquer conjuntos de vetores LI de V tal que o espaço gerado por esse conjunto é V .

Lema 3. Se v_1, v_2, \dots, v_n é uma base de V então $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, v_2, \dots, v_n$ também é uma base de V se $\alpha_1 \neq 0$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, v_2, \dots, v_n$ são linearmente independentes:

Suponha que existem $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tal que $\beta_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n = 0$, ou seja $(\beta_1 \cdot \alpha_1) \cdot v_1 + (\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2) \cdot v_2 + \dots + (\beta_1 \cdot \alpha_n + \beta_n) \cdot v_n = 0$, como v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes temos que $\beta_1 \cdot \alpha_1 = \beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 = \dots = \beta_1 \cdot \alpha_n + \beta_n = 0$, como $\alpha_1 \neq 0$ temos que $\beta_1 = 0$ o que implica $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = 0$, e assim temos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, v_2, \dots, v_n$ são linearmente independentes.

Agora vamos mostrar que esses vetores $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, v_2, \dots, v_n$ geram o espaço inteiro:

Queremos mostrar que para todo vetor u em V , u é gerado pelos vetores, ou seja, existe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ elementos do corpo \mathbb{K} , tal que $u = \gamma_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_n v_n$, arrumando a equação temos $u = (\gamma_1 \cdot \alpha_1) v_1 + (\gamma_1 \cdot \alpha_2 + \gamma_2) v_2 + (\gamma_1 \cdot \alpha_3 + \gamma_3) v_3 + \dots + (\gamma_1 \cdot \alpha_n + \gamma_n) v_n$, contudo como v_1, v_2, \dots, v_n é uma base temos que existe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tal que $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n = u$, com isso temos que $\gamma_1 = \beta_1 \cdot \alpha_1^{-1}$ e $\gamma_i = \beta_i - \beta_1 \cdot \alpha_1^{-1} \cdot \alpha_i$ para $i > 1$.

Como $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, v_2, \dots, v_n$ geram o espaço todo e além disso são linearmente independentes, temos que eles formam uma base. \square

2. Álgebra Linear

Teorema 4. *Dado um espaço vetorial V sobre \mathbb{K} , todas as suas bases possuem o mesmo número de vetores.*

Demonstração. Suponha que existem duas bases com tamanhos distintos, seja v_1, v_2, \dots, v_n a menor base de V e u_1, u_2, \dots, u_m outra base de V , com isso $m > n$. Como $v_1 \in \mathbb{K}$, temos que existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tal que $v_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m$. Como v_1 é não nulo, temos que para algum i , α_i é diferente de 0, sem perda de generalidade suponha $\alpha_1 \neq 0$ pelo lema 3, temos que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m, u_2, \dots, u_m$ é uma base, ou seja, v_1, u_2, \dots, u_m é uma base.

Como $v_2 \in V$ temos que existem $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tal que $\beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n v_n = v_2$. Se $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ forem todos nulos, então temos que v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente dependentes. Isso é um absurdo pois eles formariam uma base, logo existe $i > 1$ com $\beta_i \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\beta_2 \neq 0$. Pelo lema 3, temos que $v_1, \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n v_n, u_3, \dots, u_m$ é uma base, ou seja $v_1, v_2, u_3, \dots, u_m$ é uma base.

Podemos continuar esse processo indutivamente assim obtemos que $v_1, v_2, \dots, v_n, u_{n+1}, \dots, u_m$ é uma base, contudo como v_1, v_2, \dots, v_n é uma base, temos que eles geram u_m , com isso $v_1, v_2, \dots, v_n, u_{n+1}, \dots, u_m$ são linearmente dependentes. Com isso temos um absurdo pois eles formam uma base, logo temos que as bases não podem ter tamanhos diferentes. \square

3. Reta Projetiva

4. Plano Projetivo

5. Projeções e Projetividades

6. Cônicas e Polaridades