

Geometria no Plano Projetivo

Sumário

I. Abordagem Axiomática	3
1. Definindo o Plano Projetivo	4
1.1. Plano Euclidiano	4
1.2. Plano Projetivo	5
II. Abordagem com Álgebra Linear	6

Parte I.

Abordagem Axiomática

1. Definindo o Plano Projetivo

1.1. Plano Euclidiano

Você talvez esteja acostumado com a noção do Plano Euclidiano. Essa estrutura envolve muitos conceitos, incluindo (mas não limitado a):

- pontos,
- retas,
- segmentos de reta,
- distância,
- ângulos,
- polígonos (triângulos, quadriláteros, ...),
- circunferências,
- transformações (rotações, translações, reflexões, ...).

Apesar de todas esses conceitos estarem empacotadas no Plano Euclidiano, parece que os conceitos mais fundamentais são os primeiros dessa lista. Em outras palavras, os conceitos de *pontos* e *retas* parecem ser mais simples e mais relacionados à definição de Plano Euclidiano, do que os conceitos de *ângulos* e *transformações*.

Nós poderíamos gastar algumas folhas formalizando a definição de Plano Euclidiano (usando o que os matemáticos chamam de *axiomas*) e nos convencer de que, de fato, *pontos* e *retas* são intimamente relacionados ao que realmente o Plano Euclidiano é. Porém, nós preferimos não fazer isso. Na verdade, vamos listar duas propriedades que o Plano Euclidiano *parece* ter:

- (i) Para cada par de pontos distintos, existe uma única reta passando por ambos.
- (ii) Para cada par de retas distintas, existe um único ponto que está em ambas.

Exercício 1. *Descubra se as propriedades acima são verdades ou não no Plano Euclidiano.*

1.2. Plano Projetivo

No Exercício 1, você talvez tenha notado que, embora a propriedade (i) seja verdadeira, (ii) não é. Existe até um nome especial para um par de retas que não se encontra em nenhum ponto: dizemos que essas retas são *retas paralelas*.

Mas... as propriedades (i) e (ii) são tão bonitas (pelo menos pra nós). É tão triste que elas não são verdadeiras. Bem, nós somos matemáticos! Nós podemos fazer o que quisermos com nossas definições (apesar de ter que viver com suas consequências).

Proposta de Definição 1. Um *plano projetivo* é uma estrutura que consiste em três coisas:

- um conjunto \mathcal{P} de pontos,
- um conjunto \mathcal{L} de retas, e
- uma noção de incidência, i.e., se P é um ponto e ℓ é uma reta, nós poderemos dizer se ℓ passa (ou não) pelo ponto P .

Adicionalmente, precisamos das seguintes propriedades:

- (i) Para cada par de pontos distintos, existe uma única reta passando por ambos.
- (ii) Para cada par de retas distintas, existe um único ponto que está em ambas.

Parte II.

Abordagem com Álgebra Linear