Geometria no Plano Projetivo

Sumário

Preâmbulo

Este livro de geometria projetiva é um compilado do aprendizado dos autores em diversos cursos de geometria projetiva lecionados pelo Prof. Luciano Guimarães Monteiro de Castro, tanto na Academia Matematicamente, quanto na Escola Eleva. É uma tentativa de continuação do artigo [1].

O foco desse livro é explorar as aplicações de geometria projetiva sobre espaços reais para resolver problemas de olimpíadas, para isso é necessário que o leitor tenha alguma familiaridade com álgebra linear.

Parte I.

Abordagem sem Coordenadas

1. A reta real não tem harmonia

1.1. Divisão Harmônica

Exercício 1.1. *Dados dois pontos A e B distintos na reta real, marque, com régua e compasso, todos os pontos P na reta real tais que $\frac{AP}{BP} = 2$.*

Você observará que existem dois pontos, digamos P e Q — um dentro do segmento AB e o outro fora do segmento AB — tais que $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ} = 2$.

Por terem essa propriedade, dizemos que P e Q dividem A e B harmonicamente, na razão 2.

Não há nada especial com o número 2; *parece* que, dado qualquer λ real positivo, existem sempre dois pontos que dividem A e B harmonicamente na razão λ... Na verdade, tem um valor de λ para o qual isso não é verdade.

Exercício 1.2. *Dados dois pontos A e B distintos na reta real, marque, com régua e compasso, todos os pontos P na reta real tais que $\frac{AP}{BP} = 1$.*

Você observará que somente um ponto possui a propriedade acima; o ponto médio do segmento AB. Não existe ponto fora do segmento AB com essa propriedade — de fato, um dos segmentos AP ou BP estará contido no outro, e portanto um será menor que o outro.

2. Definindo o Plano Projetivo

2.1. Plano Euclidiano

Você talvez esteja acostumado com a noção do Plano Euclidiano. Essa estrutura envolve muitos conceitos, incluindo (mas não limitado a):

- pontos,
- retas,
- segmentos de reta,
- distância,
- ângulos,
- polígonos (triângulos, quadriláteros, ...),
- circunferências,
- transformações (rotações, translações, reflexões, ...).

Apesar de todas esses conceitos estarem empacotados no Plano Euclidiano, parece que os conceitos mais fundamentais são os primeiros dessa lista. Em outras palavras, os conceitos de *pontos* e *retas* parecem ser mais simples e mais relacionados à definição de Plano Euclidiano, do que os conceitos de *ângulos* e *transformações*.

Nós poderíamos gastar algumas folhas formalizando a definição de Plano Euclidiano (usando o que os matemáticos chamam de *axiomas*) e nos converncer de que, de fato, *pontos* e *retas* são intimamente relacionados ao que realmente o Plano Euclidiano é. Porém, nós prefirimos não fazer isso. Na verdade, vamos listar duas propriedades que o Plano Euclidiano *parece* ter:

(i) Para cada par de pontos distindos, existe uma única reta passando por ambos.

(ii) Para cada par de retas distintas, existe um único ponto que está em ambas.

Exercício 2.1. *Descubra se as propriedades acima são verdades ou não no Plano Euclideano.*

2.2. Plano Projetivo

No Exercício 2.1, você talvez tenha notado que, embora a propriedade *(i)* seja verdadeira, *(ii)* não é. Existe até um nome especial para um par de retas que não se encontra em nenhum ponto: dizemos que essas retas são *retas paralelas*.

Mas... as propriedades *(i)* e *(ii)* são tão bonitas (pelo menos pra nós). É tão triste que elas não são verdadeiras. Bem, nós somos matemáticos! Nós podemos fazer o que quisermos com nossas definições (apesar de ter que viver com suas consequências).

Proposta de Definição 2.1. Um *plano projetivo* é uma estrutura que consiste em três coisas:

- um conjunto $\mathcal{P}$ de pontos,
- um conjunto $\mathcal{L}$ de retas, e
- uma noção de incidência, i.e., se P é um ponto e ℓ é uma reta, nós poderemos dizer se ℓ passa (ou não) pelo ponto P.

Adicionalmente, precisamos das seguintes propriedades:

(i) Para cada par de pontos distindos, existe uma única reta passando por ambos.

(ii) Para cada par de retas distintas, existe um único ponto que está em ambas.

Essa proposta de definição é muito boa, porém ela aceita noções de planos projetivos bastante distintos do plano euclidiano.

Exemplo 2.1. Considere $\mathcal{P}$ um conjunto qualquer de pontos, e $\mathcal{L} = \{\ell\}$ um conjunto contendo uma única reta ℓ. Defina a noção de incidência de modo que qualquer ponto esteja na reta ℓ. Ambas as propriedades *(i)* e *(ii)* são satisfeitas; portanto essa estrutura é um plano projetivo pela Definição 2.1.

Exemplo 2.2 (Plano de Fano)**.** Seja $\mathcal{P} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{L} = \{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6\}$. Defina a noção de incidência de modo que

$$\begin{aligned}
\ell_0 &= \{0, 1, 3\} \\
\ell_1 &= \{1, 2, 4\} \\
\ell_2 &= \{2, 3, 5\} \\
\ell_3 &= \{3, 4, 6\} \\
\ell_4 &= \{0, 4, 5\} \\
\ell_5 &= \{1, 5, 6\} \\
\ell_6 &= \{0, 2, 6\}.
\end{aligned}$$

Você consegue verificar que ambas as propriedades *(i)* e *(ii)* são satisfeitas; portanto essa estrutura é um plano projetivo pela Definição 2.1.

2.2.1. Plano Projetivo Real

Considere $\mathcal{P}$ consistindo de todos os pontos do plano euclidiano; vamos também adicionar um ponto (que não está no plano euclidiano) para cada feixe de retas paralelas do plano euclidiano; isto é, além dos pontos convencionais do ponto euclidiano, para cada direção, existe um ponto novo — que chamaremos de ponto no infinito relacionado a essa direção.

Considere $\mathcal{L}$ consistindo de todas as retas do plano euclidiano, com a diferença que essa reta também irá incidir no ponto do infinito relacionado a sua direção. Além disso, também adicionaremos uma reta em $\mathcal{L}$ que contém todos os pontos do infinito — que chamaremos de reta do infinito.

Apesar de ser confuso, vamos tentar verificar as condições (i) e (ii).

Para a condição (i), vamos dividir nas possibilidades para os pares de pontos.

- Dados dois pontos P e Q do plano euclidiano, sabemos que há uma única reta que passa por eles no plano euclidiano; a mesma reta passará por eles na nova estrutura proposta.
- Dado um ponto P do plano euclidiano, e um ponto Q_∞ do infinito, sabemos que há uma única reta que passa por P e está na direção relacionada ao ponto Q_∞. A reta análoga a esta passará por P e Q_∞ na nova estrutura proposta.
- Dados dois pontos P_∞ e Q_∞ do infinito, a chamada reta do infinito é a única reta que passa por ambos na estrutura proposta.

Para a condição (ii), vamos dividir nas possibilidades para os pares de retas.

- Dadas duas retas ℓ_1 e ℓ_2 concorrentes no plano euclidiano, sabemos que há um único ponto em ambas no plano euclidiano; o mesmo ponto estará em ambas as retas na nova estrutura proposta.
- Dadas duas retas ℓ_1 e ℓ_2 paralelas no plano euclidiano, o ponto do infinito relacionado a sua direção estará em ambas as retas na nova estrutura proposta.
- Dadas uma reta ℓ_1 no plano euclidiano e a reta ℓ_∞ do infinito, o ponto do infinito relacionado a direção de ℓ_1 estará em ambas as retas na nova estrutura proposta.

Portanto, essa nova estrutura é um plano projetivo, é é muito similar ao plano euclidiano — de fato, é o plano euclidiano mais alguns pontos e uma reta. Chamamos essa estrutura de plano projetivo real.

Parte II.

Abordagem com Coordenadas

3. Álgebra Linear

3.1. Algumas definições

Antes de partimos para o tópico principal é necessário que algumas definições estejam claras.

Definição 3.1. f é uma função do conjunto A no conjunto B (denota-se f : A $\rightarrow$ B) se:

$$f \subset A \times B \text{ tal que } \forall a \in A\ \exists!\ b \in B \mid (a, b) \in f$$

Denotamos $f(a) = b \iff (a, b) \in f$

Definição 3.2. Uma operação binária *"estrela"* em um conjunto A é, por definição, uma função de A cartesiano A em A, ou em matematiques:

$$\star : A \times A \rightarrow A$$

Denotamos $a \star b = c \iff \star(a, b) = c$

Vale uma observação que pela nossa definição de função seria justo que estivesse escrito $\star((a, b))$, já que o elemento no qual aplicamos a função é o (a, b), mas por uma certa comodidade ou talvez preguiça omitimos um dos parenteses.

Definição 3.3. Um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto e duas operações, usualmente chamadas de adição e multiplicação, ou seja $\mathbb{K} = \{C, +, \cdot\}$. Essas operações tem que ter algumas propriedades, sendo elas, para $a, b, c \in C$:

1. Associativa:

   $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$

2. Comutativa:

   $a + b = b + a$

   $a \cdot b = b \cdot a$

3. Elemento neutro:

   $\exists e \in C \mid \forall a \in C,\ a + e = e + a = a$

   $\exists e' \in C \mid \forall a \in C,\ a \cdot e' = e' \cdot a = a$

4. Inverso:

   $\forall a \in C\ \exists\ a' \in C \mid a + a' = a' + a = e$

   $\forall a \neq e \in C\ \exists\ a' \in C \mid a \cdot a' = a' \cdot a = e'$

5. Distributiva

   $(a + b) \cdot c = a \cdot c + a \cdot b$

É usual chamar o e de 0, o e' de 1, o inverso aditivo de a de $-a$ e o multiplicativo de a^{-1} mesmo quando não estamos falando dos números reais. Além disso também é usual denotarmos $a \in \mathbb{K}$ ao invés de $a \in C$.

Dadas essa definições são bons exercícios mostrar que, para $a, b, c \in \mathbb{K}$:

1. $a \cdot (-1) = -a$
2. $a \cdot 0 = 0$

3.2. Até que enfim Espaço

Definição 3.4. Um espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto munido de duas operações, $\oplus$ e $\odot$. Sendo $\oplus : V \times V \to V$ e $\odot : \mathbb{K} \times V \to V$

Sendo que estas possuem algumas propriedades, para $v, u, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos:

1. Associativa em $\oplus$ e $\odot$

   $v \oplus (u \oplus w) = (v \oplus u) \oplus w$

   $\alpha \odot (\beta \odot v) = \beta \odot (\alpha \odot v) = (\alpha \cdot \beta) \odot v$

2. Comutativa em $\oplus$

   $v \oplus u = u \oplus v$

3. Elemento neutro

   $\exists e \in V \mid \forall v \in V, v \oplus e = e \oplus v = v$, usualmente denotamos esse elemento como 0.

   $1 \odot v = v$, sendo 1 o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{K}$.

4. Inverso

   $\forall v \in V, \exists v' \in V \mid v \oplus v' = e$ usualmente denotamos v' por $-v$

5. Distributiva

   $(\alpha + \beta) \odot v = \alpha \odot v \oplus \beta \odot v$

   $\alpha \odot (v \oplus u) = \alpha \odot v + \alpha \odot u$

Vale observar, que como em corpos, também é usual simplificarmos um pouco a notação, usando o mesmo símbolo para soma (+) e o produto por escalar é usualmente denotado apenas pela justaposição dos elementos do corpo e do espaço (αv), ainda no produto vale ressaltar que só está definido αv, logo sempre que estiver escrito $v\alpha$, queremos dizer αv.

Em resumo, tudo que der pra escrever menos, nós vamos escrever menos.

São bons exercícios mostrar que:

1. $0v = 0$
2. $(-1)v = -v$

Definição 3.5. Chamamos o espaço vetorial V' de um subespaço de V se:

1. V' esta definido sobre o mesmo corpo.
2. $\forall v \in V', v \in V$
3. As operações de V' são as operações de V com o domínio e contradomínio restritos à V'.

3.2.1. Coisas relacionadas com base

As definições a seguir podem parecer um pouco desconexas separadas, contudo após elas todas estarem claras, o motivo da existência de cada uma fica mais claro também.

Definição 3.6. Falamos que o vetor u é uma combinação linear entre os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, quando quando existe $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Definição 3.7. Chamamos os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de linearmente independentes quando nenhum deles podem ser escritos como uma combinação linear dos outros vetores.

Corolário 3.8. *$v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI (linaermente independes)* $\iff \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definição 3.9. Um espaço V' gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de V é o menor subespaço de V que contém $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Obs.: "Menor"significa que não existe nenhum subespaço que contenha esses vetores e esteja contido em V', tirando o próprio V'.

Lema 3.10. *O espaço gerados pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é o conjunto de todas as possíveis combinações lineares entre eles.*

Demonstração. Como V' é um subespaço, ele é fechado na operação, com isso temos que $\alpha v_i \in V'$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, e como se $v, u \in V'$ então $v + u \in V'$ temos que os vetores da forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ tem que estar em V', como isso configura um espaço pois satisfaz todas as propriedades, como por exemplo ter 0 e ter inverso, e como todo subespaço que contém $v_1, v_2, \ldots, v_n$ contém as combinações lineares deles, V' é necessariamente o menor. □

Vale observar que se eu adicionar ao conjunto de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ algum vetor u tal que u é uma combinação linear entre os v's temos que o espaço gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n, u$ é o mesmo pois adicionamos alguém que já estava lá. Com isso temos:

Definição 3.11. Chamamos de base de V qualquer conjuntos de vetores LI de V tal que o espaço gerado por esse conjunto é V.

Lema 3.12. *Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é uma base de V então $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, v_2, \ldots, v_n$ também é uma base de V se $\alpha_1 \neq 0$*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes:

Suponha que existem $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tal que $\beta_1 \cdot (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) + \beta_2 \cdot v_2 + \cdots + \beta_n \cdot v_n = 0$, ou seja $(\beta_1 \cdot \alpha_1) \cdot v_1 + (\beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2) \cdot v_2 + \cdots (\beta_1 \cdot \alpha_n + \beta_n) \cdot v_n = 0$, como $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes temos que $\beta_1 \cdot \alpha_1 = \beta_1 \cdot \alpha_2 + \beta_2 = \cdots = \beta_1 \cdot \alpha_n + \beta_n = 0$, como $\alpha_1 \neq 0$ temos que $\beta_1 = 0$ o que implica $\beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_n = 0$, e assim temos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes.

Agora vamos mostrar que esses vetores $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, v_2, \ldots, v_n$ geram o espaço inteiro:

Queremos mostrar que para todo vetor u em V, u é gerado pelos vetores, ou seja, existe $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ elementos do corpo $\mathbb{K}$, tal que $u = \gamma_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n$, arrumando a equação temos $u = (\gamma_1 \cdot \alpha_1) v_1 + (\gamma_1 \cdot \alpha_2 + \gamma_2) v_2 + (\gamma_1 \cdot \alpha_3 + \gamma_3) v_3 + \cdots + (\gamma_1 \cdot \alpha_n + \gamma_n) v_n$, contudo como $v_1, v_2, \cdots, v_n$ é uma base temos que existe $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tal que $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n = u$, com isso temos que $\gamma_1 = \beta_1 \cdot \alpha_1^{-1}$ e $\gamma_i = \beta_i - \beta_1 \cdot \alpha_1^{-1} \cdot \alpha_i$ para $i > 1$.

Como $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, v_2, \ldots, v_n$ geram o espaço todo e além disso são linearmente independentes, temos que eles formam uma base. □

Teorema 3.13. *Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$, todas as suas bases possuem o mesmo número de vetores.*

Demonstração. Suponha que existem duas bases com tamanhos distintos, seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a menor base de V e $u_1, u_2, \ldots, u_m$ outra base de V, com isso $m > n$. Como $v_1 \in \mathbb{K}$, temos que existe $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tal que $v_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$. Como v_1 é não nulo, temos que para algum i, α_i é diferente de 0, sem perda de generalidade suponha $\alpha_1 \neq 0$ pelo lema 3.12, temos que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n, u_2, \ldots, u_m$ é uma base, ou seja, $v_1, u_2, \ldots, u_m$ é uma base.

Como $v_2 \in V$ temos que existem $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tal que $\beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n v_n = v_2$. Se $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ forem todos nulos, então temos que $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são linearmente dependentes. Isso é um absurdo pois eles formariam uma base, logo existe $i > 1$ com $\beta_i \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\beta_2 \neq 0$. Pelo lema 3.12, temos que $v_1, \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n v_n, u_3 \ldots, u_m$ é uma base, ou seja $v_1, v_2, u_3 \ldots, u_m$ é uma base.

Podemos continuar esse processo indutivamente assim obtemos que $v_1, v_2, \ldots, v_n, u_{n+1}, \ldots, u_m$ é uma base, contudo como $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é uma base, temos que eles geram u_m, com isso $v_1, v_2, \ldots, v_n, u_{n+1}, \ldots, u_m$ são linearmente dependentes. Com isso temos um absurdo pois eles formam uma base, logo temos que as bases não podem ter tamanhos diferentes. □

4. Reta Projetiva

4.1. Definição

Definição 4.1 (Reta Projetiva)**.** A *reta projetiva real* $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ é o conjunto das retas do $\mathbb{R}^2$ que passam pela origem. Elementos da reta projetiva real são chamados de *pontos projetivos*.

Como um abuso de notação, chamaremos a reta projetiva real somente de reta projetiva. Quando o significado estiver claro, podemos chamar a reta projetiva de reta, e o ponto projetivo de ponto.

Em termos de Álgebra Linear, os pontos da reta projetiva são os subespaços do $\mathbb{R}^2$ com dimensão 1.

Podemos inferir uma representação dos pontos projetivos da reta projetiva a partir dos vetores do $\mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{v} \neq (0,0)$, vamos chamar de $[\mathbf{v}]$ a única reta que passa pela origem e por $\mathbf{v}$. Lembre-se que uma reta no $\mathbb{R}^2$ é definida por dois pontos distintos; portanto, a reta $[\mathbf{v}]$ está bem definida.

De modo mais preciso, podemos concluir que $[\mathbf{v}]$ é o conjunto dos múltiplos reais de $\mathbf{v}$, isto é, é o conjunto $\{\lambda\mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Porém, essa representação não é única. Por exemplo, $[(1,2)]$, $[(2,4)]$ e $[(-1,-2)]$ representam o mesmo ponto projetivo, isto é, a mesma reta. De modo geral, se $\lambda \neq 0$, os pontos projetivos $[\mathbf{v}]$ e $[\lambda\mathbf{v}]$ são os mesmos.

Apesar da representação não ser única, temos que $[\mathbf{v}] = [\mathbf{u}]$ se, e somente se, $\mathbf{u}$ é um múltiplo real de $\mathbf{u}$. Em outras palavras, $[\mathbf{v}] = [\mathbf{u}]$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.

Portanto, o sistema de coordenadas da reta projetiva é um pouco diferente do sistema que estamos acostumados, mas continua sendo útil mesmo assim. Chamamos sistemas como esse, em que múltiplicar por um escalar não muda o ponto, de *sistema de coordenadas homogêneas*.

Exemplo 4.1. Os pontos projetivos $[1,0]$, $[0,1]$, $[1,1]$ e $[2,1]$ correspondem respectivamente ao eixo x, ao eixo y, à reta $y = x$ e à reta $y = \frac{1}{2}x$ do $\mathbb{R}^2$.

Mas por que chamamos a reta projetiva de "reta"? Uma maneira de responder essa pergunta é, dada uma base do $\mathbb{R}^2$, considerar a reta $y = 1$. Com isso, podemos tomar como representante para cada ponto projetivo o vetor que leva da origem até sua interseção com a reta $y = 1$.

(inserir imagem)

Contudo, vemos que exatamente um dos pontos projetivos, a reta $y = 0$, não intersecta a reta $y = 1$. Para essa reta, vamos escolher o representante $[(1, 0)]$. Portanto,

$$\mathbb{P}^1\mathbb{R} = \{[(x, 1)] : x \in \mathbb{R}\} \cup \{[(1, 0)]\},$$

ou seja, podemos interpretar reta projetiva real como uma reta real com um ponto extra.

4.2. Mudança de Base

No $\mathbb{R}^2$, temos liberdade para escolher dois vetores (linearmente independentes) $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ e chamá-los de $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente. Feito isso, todos os outros vetores do $\mathbb{R}^2$ estão unicamente definidos.

Na reta projetiva, podemos fazer algo parecido. Dados dois pontos projetivos $A = [\mathbf{v_1}]$ e $B = [\mathbf{v_2}]$, podemos escolher uma base para o $\mathbb{R}^2$ de modo que $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ são representados por $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente. Desse modo, $A = [(1, 0)]$ e $B = [(0, 1)]$.

Porém, se tivéssemos escolhido a base do $\mathbb{R}^2$ para serem os vetores $3\mathbf{v_1}$ e $5\mathbf{v_2}$; também concluiríamos que $A = [(1, 0)]$ e $B = [(0, 1)]$. Parece que temos mais liberdade na reta projetiva do que em $\mathbb{R}^2$. Com isso, estamos prontos para o primeiro teorema sobre a reta projetiva.

Teorema 4.2. *Dados três pontos projetivos distintos A, B e C, podemos escolher uma base apropriada do $\mathbb{R}^2$ para a qual $A = [(1, 0)]$, $B = [(0, 1)]$ e $C = [(1, 1)]$.*

Demonstração. Existem vetores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$ no $\mathbb{R}^2$ para os quais $A = [\mathbf{v_1}]$, $B = [\mathbf{v_2}]$ e $C = [\mathbf{v_3}]$.

Considere a base $\beta = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ do $\mathbb{R}^2$. Nessa base, $A = [(1, 0)]$, $B = [(0, 1)]$ e $C = [(\lambda, 1)]$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Considere a base $\gamma = \{\lambda\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ do $\mathbb{R}^2$. Nessa segunda base, $A = [(1, 0)]$, $B = [(0, 1)]$ e $C = [(1, 1)]$, como desejado. $\square$

4.3. Razão Cruzada

Nessa seção, vamos deixar o Teorema 4.2 um pouco mais forte: se adicionarmos um quarto ponto projetivo D, a representação dele em coordenadas estará unicamente definida (ignorando multiplicação por escalar).

Como abuso de notação, escreveremos $[a, b]$ para querer dizer $[(a, b)]$. É importante lembrar que essa representação depende da base escolhida para $\mathbb{R}^2$.

Teorema 4.3. *Dados quatro pontos projetivos distintos A, B, C e D, existe um único $d \in \mathbb{R}$ tal que, se β é uma base do $\mathbb{R}^2$ satisfazendo $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$ e $C = [1, 1]$, então $D = [d, 1]$.*

Demonstração. Suponha que $\beta = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ e $\gamma = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ são bases de $\mathbb{R}$ satisfazendo as condições, isto é, tais que

$$\begin{aligned} A &= [\mathbf{v_1}] = [\mathbf{u_1}], \\ B &= [\mathbf{v_2}] = [\mathbf{u_2}], \\ C &= [\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}] = [\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}]. \end{aligned}$$

Isso implica que existem constantes reais a, b, c tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{u_1} &= a\mathbf{v_1}, \\ \mathbf{u_2} &= b\mathbf{v_2}, \\ \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} &= c\left(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}\right). \end{aligned}$$

Note que $(a - c)\mathbf{v_1} + (b - c)\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$ e, consequentemente, $a = b = c$.

Finalmente, se $D = [d\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}]$, concluímos que $D = [a\left(d\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}\right)] = [d\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}]$. Portanto, $D = [d, 1]$ em ambas as bases β e γ; ou seja, independentemente da base, d está unicamente definido. $\square$

Definição 4.4 (Razão Cruzada)**.** Dados quatro pontos projetivos A, B, C e D, a *razão cruzada dos pontos A, B, C e D*, denotada por $(A, B; C, D)$ é definida pelo número real d achado no Teorema 4.3.

Exercício 4.1. *Dada uma base β do $\mathbb{R}^2$, considere os pontos projetivos $A = [x_A, y_A]$, $B = [x_B, y_B]$, $C = [x_C, y_C]$, $D = [x_D, y_D]$. Calcule $(A, B; C, D)$.*

Solução. Para calcular a razão cruzada, precisamos construir uma base do $\mathbb{R}^2$ de tal modo que o vetor (x_A, y_A) vá num múltiplo do vetor $(1, 0)$, o vetor (x_B, y_B) vá num múltiplo do vetor $(0, 1)$ e o vetor (x_C, y_C) vá num múltiplo do vetor $(1, 1)$. Portanto, queremos achar constantes reais α, β e γ, e uma matriz de mudança de base M, tais que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Equações 4.1 e 4.2 implicam que

$$M \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} x_A & \frac{1}{\beta} x_B \\ \frac{1}{\alpha} y_A & \frac{1}{\beta} y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Portanto, usando 4.3, temos que

$$M \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} x_A & \frac{1}{\beta} x_B \\ \frac{1}{\alpha} y_A & \frac{1}{\beta} y_B \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Como M é uma matriz de mudança de base, concluímos que

$$\begin{pmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma/\alpha \\ \gamma/\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} x_A & \frac{1}{\beta} x_B \\ \frac{1}{\alpha} y_A & \frac{1}{\beta} y_B \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Resolvendo o sistema (por exemplo, usando a regra de Cramer), concluímos que

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{x_C y_B - x_B y_C}{x_A y_B - x_B y_A} \text{ e } \frac{\gamma}{\beta} = \frac{x_A y_C - x_C y_A}{x_A y_B - x_B y_A}. \tag{4.7}$$

Com isso para simplificar a notação tome $\Delta PQ = x_P y_Q - x_Q y_P$, com isso,

$$\alpha = \gamma \frac{\Delta AB}{\Delta CB} \text{ e } \beta = \gamma \frac{\Delta AB}{\Delta AC}. \tag{4.8}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} x_A & \frac{1}{\beta} x_B \\ \frac{1}{\alpha} y_A & \frac{1}{\beta} y_B \end{pmatrix}^{-1} && \text{usando 4.4} \\ &= \gamma \Delta AB \cdot \begin{pmatrix} \Delta CB \cdot x_A & \Delta AC \cdot x_B \\ \Delta CB \cdot y_A & \Delta AC \cdot y_B \end{pmatrix}^{-1} && \text{usando 4.8} \\ &= \frac{\gamma}{\Delta CB \Delta AC} \cdot \begin{pmatrix} \Delta AC \cdot y_B & -\Delta AC \cdot x_B \\ -\Delta CB \cdot y_A & \Delta CB \cdot x_A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Consequentemente, podemos calcular as coordenadas do vetor (x_D, y_D) na nova base.

$$M \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix} = \frac{\gamma}{\Delta CB \Delta AC} \cdot \begin{pmatrix} \Delta AC \cdot \Delta DB \\ \Delta CB \cdot \Delta AD \end{pmatrix}$$

Com isso temos que o ponto projetivo D, na nova base, tem coordenadas

$$\begin{bmatrix} \Delta AC \cdot \Delta DB \\ \Delta CB \cdot \Delta AD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta AC \cdot \Delta DB / \Delta CB \cdot \Delta AD \\ 1 \end{bmatrix},$$

e, portanto, a razão cruzada é

$$(A, B; C, D) = \frac{\Delta AC}{\Delta AD} \Big/ \frac{\Delta BC}{\Delta BD} .$$

Corolário 4.5. *Dada uma base β do $\mathbb{R}^2$, considere os pontos projetivos $A = [x_A, 1]$, $B = [x_B, 1]$, $C = [x_C, 1]$, $D = [x_D, 1]$. Então,*

$$(A, B; C, D) = \frac{(x_A - x_C)}{(x_A - x_D)} \Big/ \frac{(x_B - x_C)}{(x_B - x_D)} .$$

5. Plano Projetivo

6. Projeções e Projetividades

7. Cônicas e Polaridades

Bibliografia

[1] Luciano Guimarães Monteiro de Castro. "Introdução à Geometria Projetiva". Em: *Eureka!* 8 (2000), pp. 16–27. URL: https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka8.pdf.