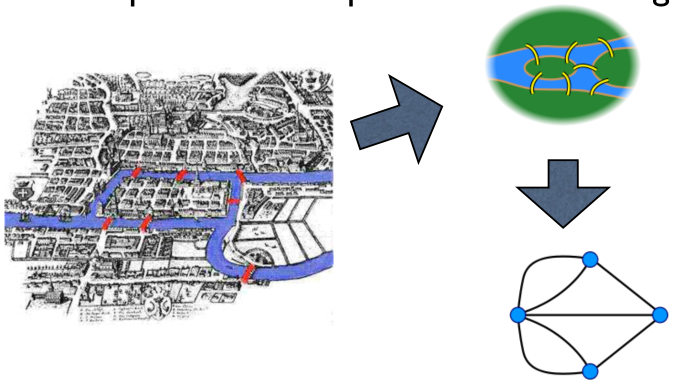
Grafos e Ciclos Eulerianos

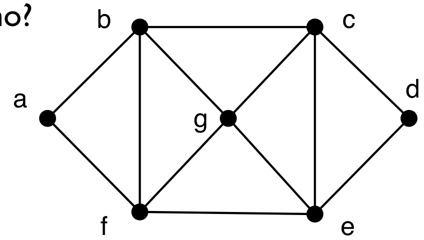
- Histórico: Leonhard Euler (1730), problema das pontes de Könisberg



Grafos e Ciclos Eulerianos

Teorema 5.1:
Seja G um grafo no qual todos os vértices possuem grau par. Então, G pode ser decomposto em ciclos de forma que não haja dois ciclos compartilhando arestas (ciclos disjuntos).

Dado o grafo abaixo, mostre que ele pode ser decomposto em ciclos disjuntos. Como esses ciclos podem ser combinados para formar um ciclo euleriano?



Grafos e Ciclos Eulerianos

Teorema 5.2:
Um grafo conexo é euleriano se e somente se todos os seus vértices possuirem grau par.

Um grafo conexo dirigido é euleriano se e somente se o grau de entrada de cada vértice for igual ao seu grau de saída.

Exercício: pelo teorema acima, determine quais dos grafos a seguir são eulerianos:

1. o grafo completo K8;
2. o grafo bipartido completo k8,8
3. o grafo ciclo C8
4. o grafo cubo Q8

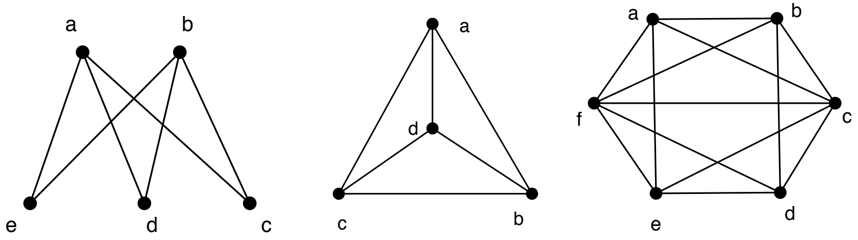
Grafos Semi-eulerianos

Definição:
Um grafo conexo é semi-euleriano se existe um caminho simples aberto que inclua todas as suas arestas. Tal caminho é chamado de caminho semi-euleriano.

Teorema 3.3:
Um grafo conexo é semi-euleriano se e somente se ele tiver exatamente dois vértices de grau ímpar.

Exercícios

Exercício: pelo teorema 3.3, determine quais dos grafos a seguir são semi-eulerianos e escreva o caminho semi-euleriano se possível:



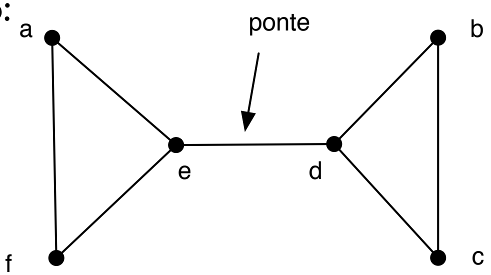
Algoritmo de Fleury

- Dado um grafo euleriano, o algoritmo de Fleury encontra um ciclo euleriano

> Inicie um caminho a partir de um vértice qualquer, e atravesse as arestas seguindo as regras abaixo:
>
> R1. Remova a aresta que acabou de ser percorrida. Se algum vértice ficar isolado, remova-o também;
>
> R2. Atravesse uma “ponte”, somente se não houver outra alternativa.

Pontes

- Uma **Ponte** é uma aresta cuja remoção “quebra” a conexidade do grafo.
- Exemplo:



Algoritmo dos ciclos disjuntos

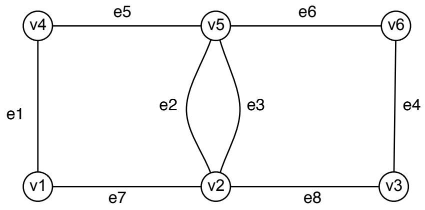
- O algoritmo a seguir encontra ciclos eulerianos em tempo O(E) por um procedimento de formação de ciclos disjuntos, chamados de sub-ciclos eulerianos
- os sub-ciclos são armazenados em listas circulares duplamente encadeadas de arestas e posteriormente são unidos para formar o ciclo euleriano final

Algoritmo: CicloEuleriano(G)

```
ScanQ[1] ← 1;
QSize ← 1;
k ← 1;

enquanto k ≤ QSize faça
    u ← ScanQ[k];

    enquanto Grafo[u] ≠ null faça
        e0 ← Grafo[u];
        v ←o outro vértice da aresta eo;
        remova a aresta eo do grafo;
        e1 ← e0;

        enquanto v ≠ u faça

            se v ∉ ScanQ então
                QSize ← QSize + 1;
                ScanQ[QSize] ← v;
            e2 ← Grafo[v];
            nextEdge⟨e1⟩ ← e2;
            prevEdge⟨e2⟩ ← e1;

            se EulerEdge[v] = null então
                EulerEdge[v] ← e2;
            e1 ← e2;
            v ←o outro vértice da aresta e1;
            remova a aresta e1 do grafo;
        prevEdge⟨e0⟩ ← e1;
        nextEdge⟨e1⟩ ← e0;

        se EulerEdge[u] = null então
            EulerEdge[u] ← e0;
        senão
            e1 ← EulerEdge[u];
            e2 ← prevEdge⟨e1⟩;
            e3 ← prevEdge⟨e0⟩;
            nextEdge⟨e2⟩ ← e0;
            nextEdge⟨e3⟩ ← e1;
    k ← k + 1;
```

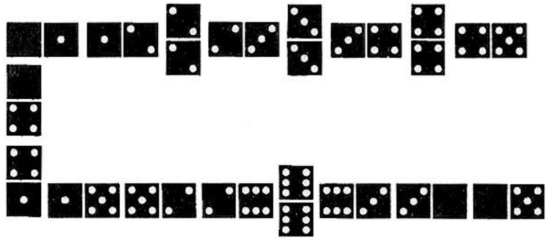
Elementos do algoritmo:

- ScanQ: array de vértices
- QSize: quantidade de vértices em ScanQ
- Grafo[u]: lista de arestas adjacentes ao vértice u
- EulerEdge(v): aresta de Euler do vértice v, usada para fazer a união de dois sub-ciclos eulerianos
- prevEdge(e), nextEdge(e): referências para próxima aresta e aresta anterior na lista duplamente encadeada de arestas que armazena o ciclo euleriano
- e0, e1, e2, e3: referências para arestas



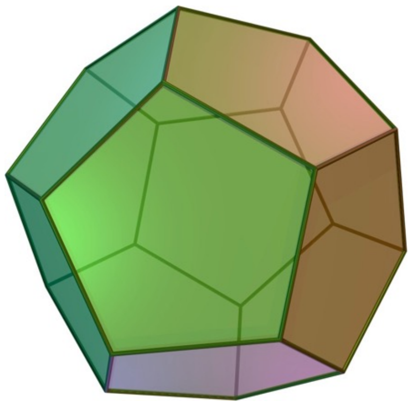
Ciclos eulerianos: caso de estudo

- Um jogo de dominó é composto por "pedras" com valores de 0 a 6.
- É possível conectar todas as pedras e fechar o jogo? Prove utilizando a Teoria dos Gr



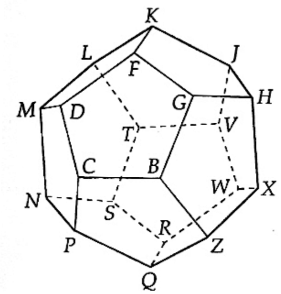
Grafos e Ciclos Hamiltonianos

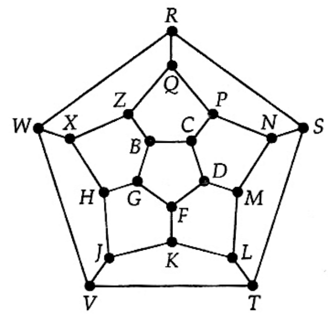
Histórico: Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). O cálculo icosiano consiste em encontrar ciclos hamiltonianos no grafo do dodecaedro regular



Grafos e Ciclos Hamiltonianos

No "Jogo Icosiano" de Hamilton, os vértices do dodecaedro representam cidades no globo terrestre. O desafio é encontrar uma rota que dê a volta ao mundo passando somente uma vez em cada cidade.





Grafos Hamiltonianos

Um grafo conexo é **Hamiltoniano** se contiver um ciclo que inclua cada um dos vértices do grafo. Tal ciclo é chamado de

Como podemos saber se um grafo é hamiltoniano?

1. Podemos tentar correlacionar o grafo com alguma classe de grafos conhecida;
2. Teorema de Ore;
3. Podemos tentar encontrar um ciclo hailtoniano utilizando algum algoritmo.

Grafos Hamiltonianos

Exercícios:

1. Para quais valores de n os grafos completos K_n são hamiltonianos?
2. Para quais valores de r e s ($r \leq s$) os grafos bipartidos completos $K_{r,s}$ são hamiltonianos?
3. Para quais valores de n os grafos ciclo C_n são hamiltonianos?
4. Para quais valores de n os grafos nulos N_n são hamiltonianos?
5. Para quais valores de k os grafos cubo Q_k são hamiltonianos?
6. Quais árvores são hamiltonianas?

Grafos Hamiltonianos

Se tivermos um grafo hamiltoniano e adicionarmos a ele uma nova aresta, obtemos um novo grafo hamiltoniano, visto que continuamos tendo o mesmo ciclo hamiltoniano do grafo inicial.

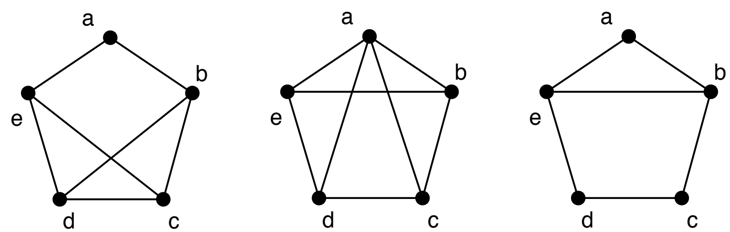
Assim, grafos mais densos têm maior probabilidade de serem hamiltonianos. Partindo desse princípio, Oysten Ore provou o seguinte teorema, em 1960:

Teorema de Ore

Seja G um grafo simples conexo com **n** vértices, onde $n \geq 3$ e **grau(u) + grau(v) ≥ n**, para cada par de vértices não adjacentes u e v. Então G é hamiltoniano.

Exercícios

1. Verifique se os grafos abaixo são hamiltonianos utilizando o Teorema de Ore;

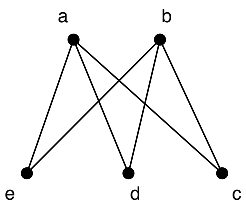


2. Dê um exemplo de grafo hamiltoniano que não satisfaz o Teorema de Ore.

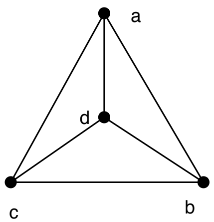
Grafos Semi-hamiltonianos

Definição:
Um grafo conexo é semi-hamiltoniano se existe um caminho simples aberto, mas não um ciclo, que inclua cada um dos seus vértices somente uma vez. Tal caminho é chamado de caminho semi-hamiltoniano.

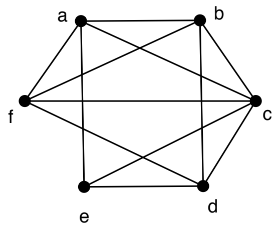
Exercício: determine quais dos grafos a seguir são semi-hamiltonianos e escreva o caminho semi-hamiltoniano se possível:



(A)



(B)

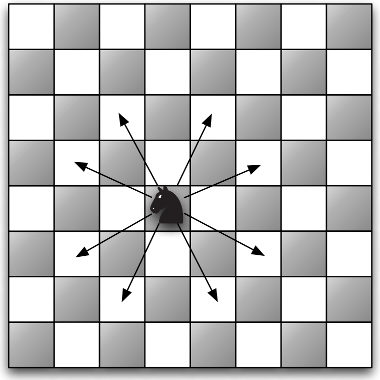


(C)

Ciclos Hamiltonianos: Aplicações

Ciclo do cavalo no tabuleiro de xadrez:

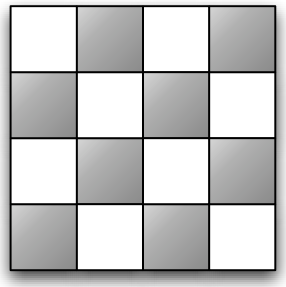
Dado um tabuleiro de xadrez de 8 x 8 casas, é possivel encontrar uma seqüência de movimentos do cavalo que passe em todas as casas somente uma vez e retorne a casa de partida?

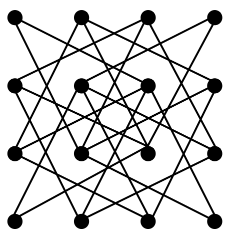


Ciclos Hamiltonianos: Aplicações

Ciclo do cavalo no tabuleiro de xadrez:

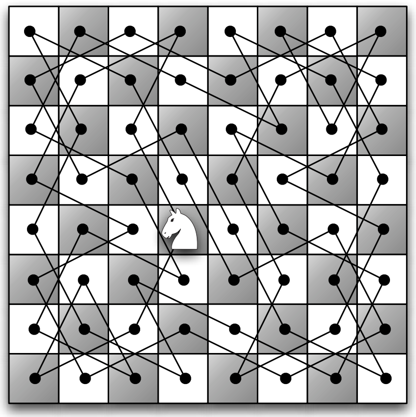
Modelagem: vértices são casas do tabuleiro, e arestas representam pares de casas conectadas pelo movimento do cavalo.





Ciclos Hamiltonianos: Aplicações

Ciclo do cavalo no tabuleiro de xadrez: uma solução!



50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Ciclos Hamiltonianos: Aplicações

Gray Codes:

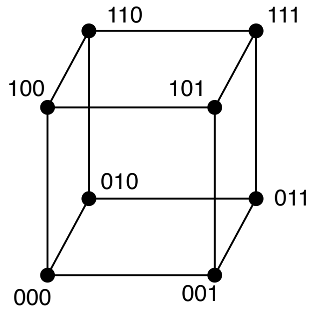
Engenheiros usam dispositivos para representar posições angulares em eixos que giram continuamente. Se dividirmos o círculo em 8 setores, precisamos de uma palavra binária de 3 dígitos para representar os 8 setores.

Para minimizar erros, é conveniente que a seqüência de palavras binárias mude apenas 1 digito de um dado setor para o setor vizinho. Portanto, a conversão convencional de base numérica decimal para binária não funciona.

Como podemos encontrar tal seqüencia de palavras binárias?

Ciclos Hamiltonianos: Aplicações

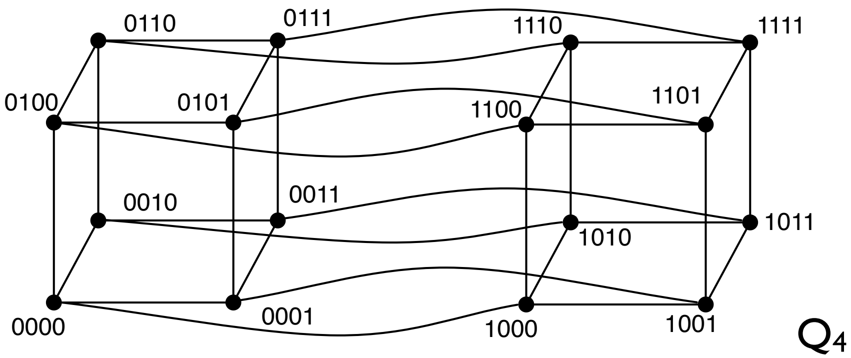
Gray Codes podem ser encontrados através de ciclos hamiltonianos em grafos-cubo. Se precisamos de Gray Codes de 3 dígitos, usamos o grafo Q_3.



Setor	Decimal	Binario	GrayCode
A	0	000	000
B	1	001	001
C	2	010	011
D	3	011	010
E	4	100	110
F	5	101	111
G	6	110	101
H	7	111	100

Ciclos Hamiltonianos: Aplicações

Para formar Gray Codes de n dígitos, basta encontrar um ciclo hamiltoniano no grafo Q_n. Exemplo, Gray Codes de 4 digitos:



Problema do carteiro chinês

Um carteiro precisa percorrer todas as ruas de sua região de trabalho para entregar correspondência.

O problema consiste em encontrar um caminho fechado que passe por todas as arestas com custo total mínimo.

Problema do carteiro chinês

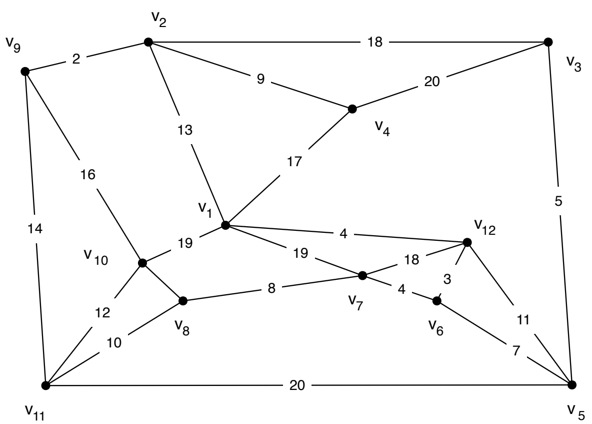
Possíveis cenários:

1. O grafo valorado é euleriano;
2. O grafo valorado não é euleriano.

Algoritmo: carteiro chinês

1. Determine os vértices de grau ímpar
2. Construa a matriz de distâncias mínimas D somente com os vértices de grau ímpar (use Dijkstra ou Floyd-Warshall)
3. Determine na matriz D o par de vértices vi, vj com menor caminho mínimo
4. Construa um caminho artificial de vi para vj com o custo encontrado no passo anterior
5. Elimine da matriz D as linhas e colunas correspondentes a vi e vj
6. Se ainda houver linha e coluna na matriz D, volte para o passo 3
7. Encontre um ciclo euleriano no grafo, considerando todos os caminhos artificiais

Exemplo



Problema do caixeiro viajante

- A formulação clássica do problema do caixeiro viajante consiste em encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo em um grafo completo valorado