Teoria dos Grafos - Lista de Exercícios

Prof. Dr. Paulo César Rodacki Gomes
IFC - Campus Blumenau - TADS
paulo.gomes@ifc.edu.br

4 de dezembro de 2017

Lista 4 - Árvores, coloração e planaridade

1. Sabendo que uma árvore é um tipo particular de grafo, escreva pelo menos cinco definições diferentes para árvores.

2. Desenhe um exemplo de uma árvore com sete vértices e...

   a) exatamente dois vértices de grau 1;

   b) exatamente quatro vértices de grau 1;

   c) exatamente seis vértices de grau 1.

3. Utilize o "lema do aperto de mão" (*handshaking lemma*) para provar que qualquer árvore com n vértices, onde $n \geq 2$, possui pelo menos dois vértices de grau 1.

4. Uma **floresta** é um grafo (não necessariamente conexo), onde cada uma de suas componentes conexas é uma árvore.

   a) Seja G uma floresta com n vértices e k componentes conexas. Quantas arestas existem em G?

   b) Construa (e desenhe) uma floresta com 12 vértices e 9 arestas.

   c) É verdade que qualquer floresta com k componentes possui pelo menos $2k$ vértices de grau 1?

5. Para cada um dos ítens abaixo, tente desenhar um grafo que atenda a descrição dada, ou então explique porque tal grafo não existe.

   a) Um grafo simples com 6 vértices, 2 componentes conexas e 11 arestas.

   b) Um grafo simples com 7 vértices, 3 componentes conexas e 10 arestas.

   c) Um grafo simples com 8 vértices, 2 componentes conexas, 9 arestas e exatamente 3 ciclos.

   d) Um grafo simples com 8 vértices, 2 componentes conexas, 10 arestas e exatamente 3 ciclos.

   e) Um grafo simples com 9 vértices, 2 componentes conexas, 10 arestas e exatamente 2 ciclos.

   f) Um grafo simples conexo com 9 vértices, 12 arestas e exatamente 2 ciclos.

   g) Um grafo simples conexo com 9 vértices, 12 arestas e exatamente 3 ciclos.

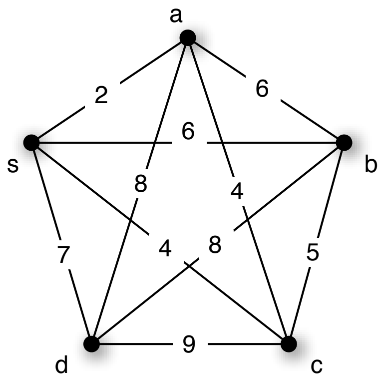
h) Uma floresta com 10 vértices, 2 componentes conexas e 9 arestas.

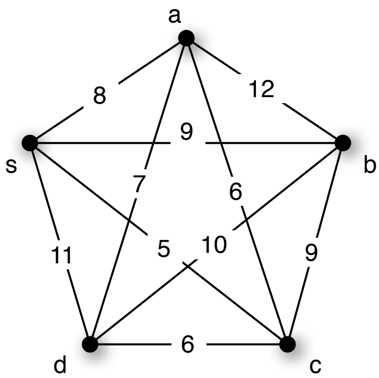
i) Uma floresta com 10 vértices, 3 componentes conexas e 9 arestas.

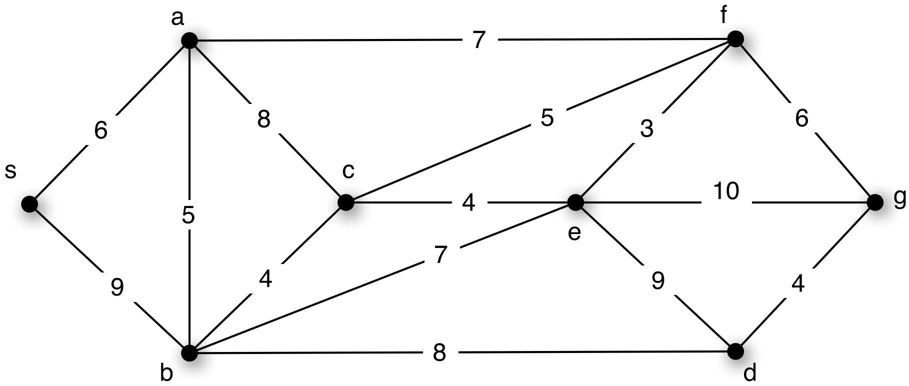
j) Um grafo simples conexo com 11 vértices, 14 arestas e 5 ciclos disjuntos (ciclos que não compartilham arestas).

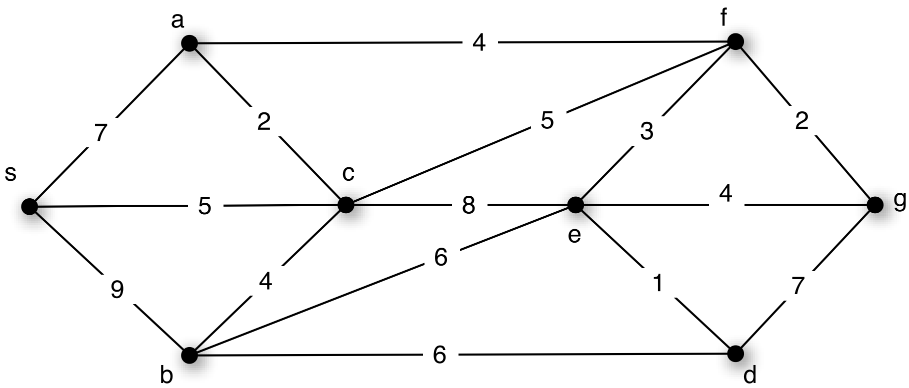
6. Prove que a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Qualquer grafo simples conexo com n vértices e n arestas deve conter exatamente 1 ciclo".

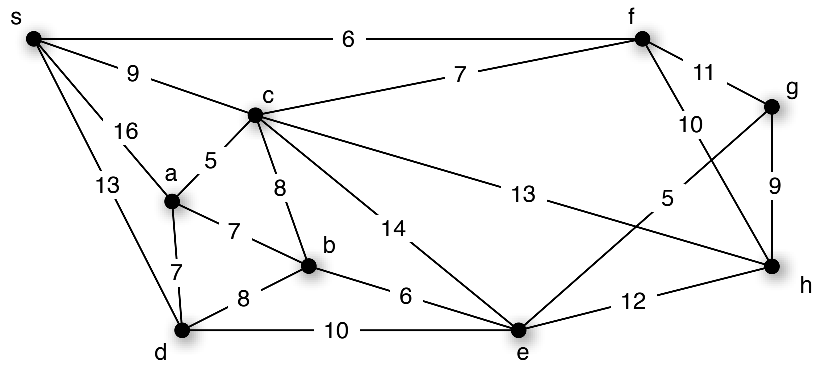
7. Dados os grafos abaixo, encontre suas respectivas árvores geradoras de custo mínimo utilizando o algoritmo de Prim. Mostre passo a passo a solução de acordo com os passos de execução do algoritmo, mostrando os valores de $chave(v)$ e $\pi(v)$ para todos os vértices. Utilize o vértice s como vértice inicial e resolva empates dando preferência para os vértices em ordem alfabética. Desenhe as árvores resultantes e calcule seus custos.

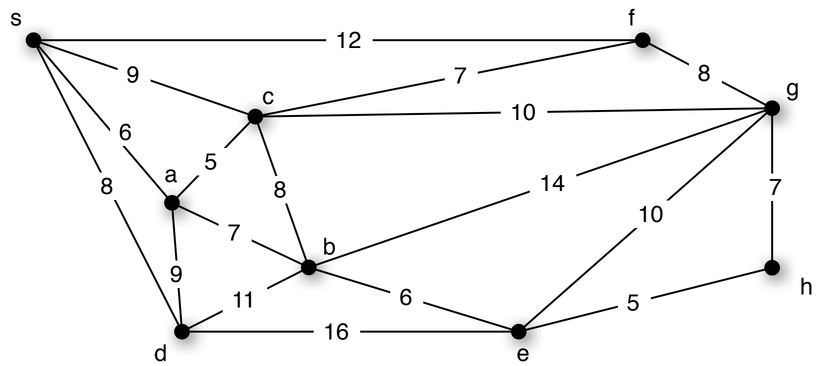












8. Encontre as respectivas árvores geradoras de custo mínimo dos grafos da questão anterior utilizando o algoritmo de Kruskal. Escreva a lista de arestas em ordem crescente de custo. Escreva a lista de conjuntos de vértices em cada passo do algoritmo, indicando a ocorrência de operações $UNION(u, v)$. Desenhe as árvores resultantes e calcule seus custos.

9. Adapte os algoritmos de Prim e Kruskal para encontrar árvores geradoras de custo **máximo** de grafos valorados.

10. Implemente o algoritmo de prim.

11. Implemente o algoritmo de Kruskal.

12. Sendo $\chi(G)$ o número cromático de um grafo G, o que você pode afirmar a respeito de grafos com:

    a) $\chi(G) = 1$? Justifique sua resposta.

    b) $\chi(G) = 2$? Justifique sua resposta.

13. Escreva o número cromático de cada um dos grafos abaixo:

    a) o grafo completo K_n;

    b) o grafo bibpartido completo $K_{r,s}$;

    c) o grafo ciclo C_n $(n \geq 3)$;

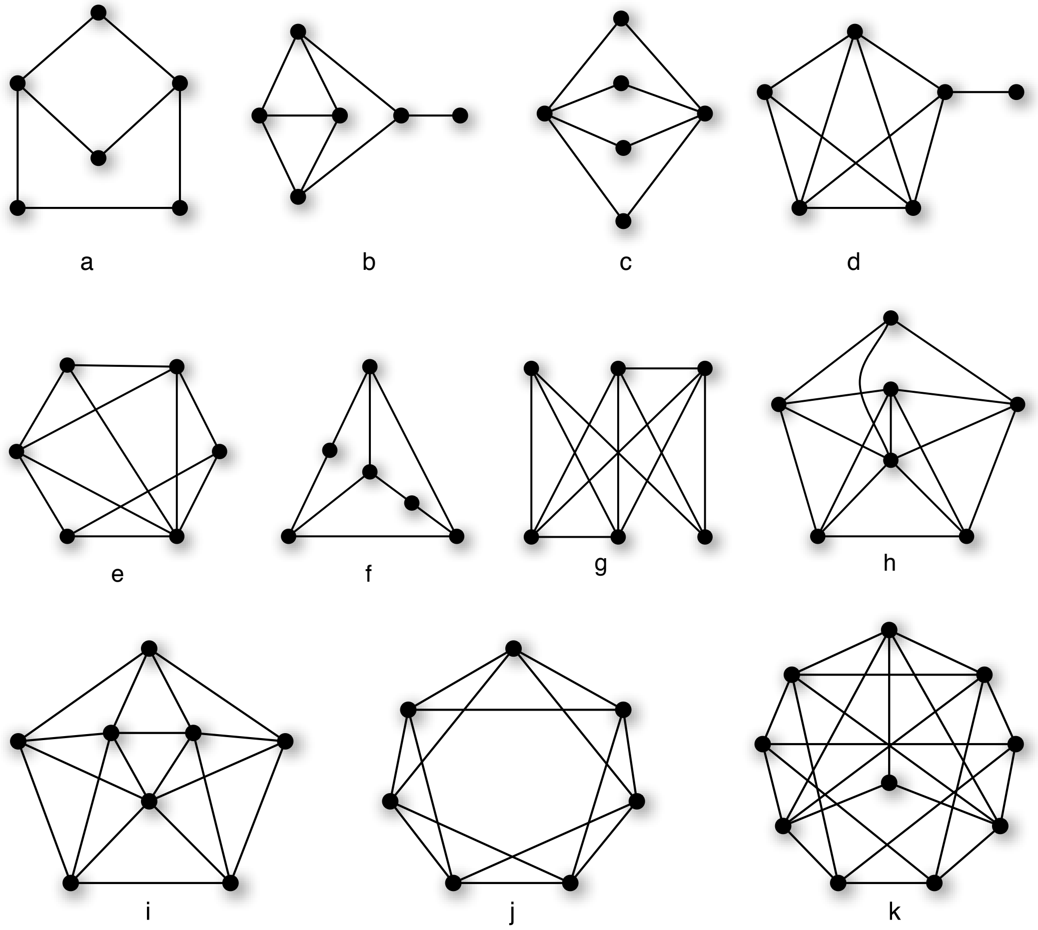
    d) uma árvore.

14. Decida se cada uma das afirmações sobre um grafo G abaixo é verdadeira ou falsa, e apresente uma prova ou contra-exemplo.

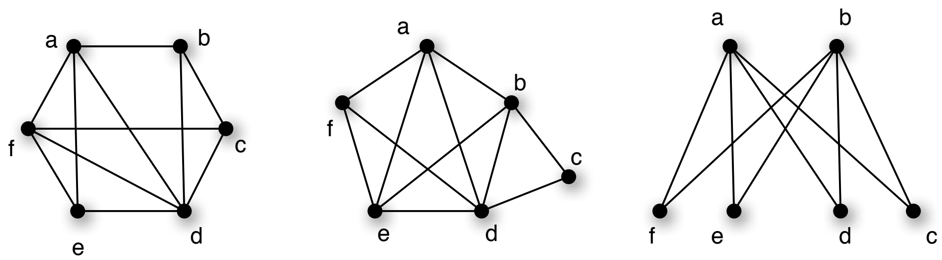
    a) Se G contém como sub-grafo o grafo completo K_r, então $\chi(G) \geq r$.

b) Se $\chi(G) \geq r$, então G contém o grafo completo K_r como sub-grafo.

15. Para cada um dos grafos G abaixo, procure determinar com exatidão o número cromático $\chi(G)$. Para isso, faça estimativas de limites superiores e inferiores para $\chi(G)$.



16. Mostre que os grafos abaixo são planares, faça isso encontrando representações planares para cada grafo.



17. Demonstre que os grafos $K_{3,3}$ e K_5 não são planares.

18. Para cada uma das afirmações abaixo, indique se ela é verdadeira ou falsa, e dê uma justificativa apresentando uma prova ou contra-exemplo.

a) Qualquer sub-grafo de um grafo planar é planar;

b) Qualquer sub-grafo de um grafo não-planar é não-planar;

c) Qualquer grafo que contém um sub-grafo planar é planar;

d) Qualquer grafo que contém um sub-grafo não-planar é não-planar.

19. Quais árvores são planares?

20. Para quais valores de n os grafos ciclo C_n são planares?

21. Para quais valores de n os grafos completos K_n são planares?

22. Para quais valores de s os grafos bipartidos completos $K_{1,s}$ e $K_{2,s}$ são planares?

23. Para quais valores de r e s (com $r \leq s$) os grafos bipartidos completos $K_{r,s}$ são planares?

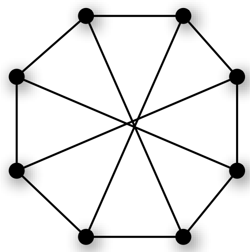
24. Para quais valores de k os grafos cubo Q_k (na k-ésima dimensão) são planares?

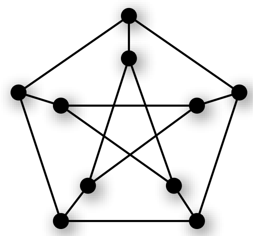
25. Para cada um dos ítens abaixo, tente desenhar um grafo planar que atenda a descrição dada, ou então prove que tal grafo não existe.

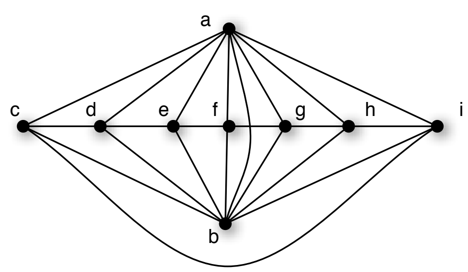
    a) Um grafo simples com 6 vértices e 13 arestas;
    b) Um grafo não-simples (multigrafo) com 6 vértices e 13 arestas;
    c) Um grafo bipartido simples com 7 vértices e 11 arestas;
    d) Um grafo bipartido não-simples (multigrafo) com 7 vértices e 11 arestas.

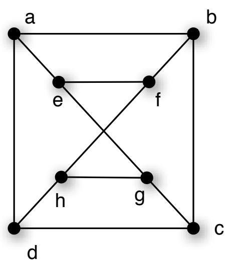
26. Desenhe um grafo bipartido G não planar com 15 vértices e 18 arestas que satisfaça a seguinte fórmula: $n \leq (2 \times e) - 4$ (onde e é o número de arestas).

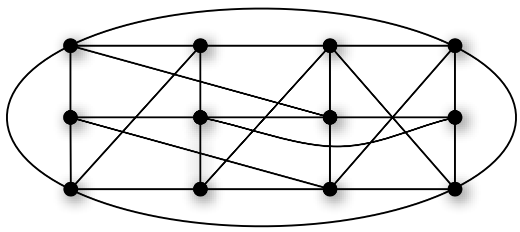
27. Use o Teorema de Kuratowsky para provar que cada um dos grafos abaixo não é planar (procure encontrar sub-divisões de $K_{3,3}$ ou K_5 como sub-grafos).

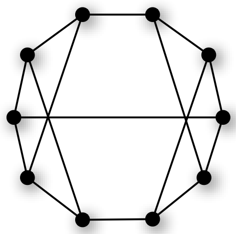


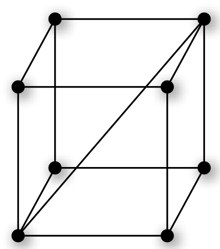
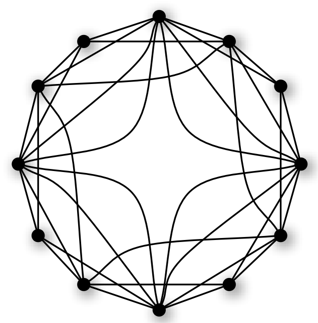










28. O diretor de um zoológico precisa acomodar oito animais (A, B,...,H) em gaiolas. Por questões de segurança alguns animais não podem ser colocados juntos na mesma gaiola. Na tabela abaixo, os “$\times$” indicam pares de animais que devem ser colocados em gaiolas diferentes.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	$-$	$\times$	$-$	$-$	$\times$	$\times$	$-$	$\times$
B	$\times$	$-$	$\times$	$-$	$-$	$\times$	$-$	$\times$
C	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$\times$	$\times$
D	$-$	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$\times$	$\times$	$-$
E	$\times$	$-$	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$\times$	$-$
F	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$-$	$-$	$-$
G	$-$	$-$	$\times$	$\times$	$-$	$-$	$-$	$\times$
H	$\times$	$\times$	$\times$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$-$

29. Deseja-se supervisionar as redes de comunicação de dados de um conjunto de empresas. Cada empresa tem sua própria rede, que é independente das redes das outras empresas e é constituída de ramos de fibra óptica. Cada ramo conecta duas filiais distintas (ponto-a-ponto) da empresa. Há, no máximo, um ramo de fibra interligando diretamente um mesmo par de filiais. A comunicação entre duas filiais pode ser feita diretamente por um ramo de fibra que as interliga, se este existir, ou, indiretamente, por meio de uma seqüência de ramos e filiais. A rede de cada empresa permite a comunicação entre todas as suas filiais. A tabela 1 apresenta algumas informações acerca das redes dessas empresas.

Tabela 1: Empresas

empresa	n.^{o} de filiais	n.^{o} de ramos de fibra entre filiais
E1	9	18
E2	10	45
E3	14	13
E4	8	24

Com relação à situação apresentada acima, é correto deduzir que (responda V ou F):

a) no caso da empresa E1, a falha de um ramo da rede certamente fará que, ao menos, uma filial não possa mais comunicar-se diretamente com todas as outras filias da empresa;

b) na rede da empresa E2, a introdução de um novo ramo de rede certamente violará a informação de que há somente um par de fibras entre duas filiais;

c) no caso da empresa E3, a falha de um único ramo de rede certamente fará que, ao menos, uma filial não possa mais comunicar-se direta ou indiretamente com todas as outras filias da empresa;

d) na rede da empresa E4, todas as filiais da empresa comunicam-se entre si diretamente.

30. Quando são estabelecidas as freqüências de transmição de estações de rádio em uma determinada região geográfica, alguns pares de transmissores necessitam de freqüências diferentes para evitar interferência mútua em seus sinais. Isto acontece quando seus sinais se sobrepõem em alguma região. A tabela 2 mostra uma configuração onde as letras são as estações e os valores numéricos são as distâncias (em km) entre pares de estações. Sabendo que o alcance do sinal de cada transmissor é 50 km, calcule o número mínimo de diferentes freqüências de rádio necessárias para evitar interferências entre estações com a configuração mostrada.

Tabela 2: Estações de rádio

	B	C	D	E	F	G
A	55	110	108	60	150	88
B		87	142	133	98	139
C			77	91	85	93
D				75	114	82
E					107	41
F						123