Teoria dos Grafos
Unidade 7: Coloração

Prof. Dr. Paulo César Rodacki Gomes
paulo.rodacki@blumenau.ifc.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
CATARINENSE
Câmpus Blumenau

Blibliografia

- Jonathan Gross e Jay Yellen. **Graph Theory and its Applications**. CRC Press. 2000.
- Joan M. Aldous, Robin J. Wilson. **Graphs and Applications**: as introductory approach. Springer. 2001
- Thomas Cormen et al. **Algoritmos**: teoria e prática. Ed. Campus. 2004.

Tópicos

- Motivação
- Introdução/definições
- Algoritmos de coloração
- Determinação do número cromático
- Exercícios

Motivação

Um fabricante de produtos químicos necessita armazenar produtos num depósito. Alguns produtos reagem violentamente quando entram em contato uns com os outros e o fabricante decide dividir o depósito em áreas para separar pares de produtos reagentes. Na tabela abaixo, os produtos estão listados de "a" a "g" e um asterisco indica pares de produtos que devem ficar separados.

Qual é o menor número de áreas necessárias para armazenar todos os produtos com segurança?

	a	b	c	d	e	f	g
a	-	*	*	*	-	-	*
b	*	-	*	*	*	-	*
c	*	*	-	*	-	*	-
d	*	*	*	-	-	*	-
e	-	*	-	-	-	-	-
f	-	-	*	*	-	-	*
g	*	*	-	-	-	*	-

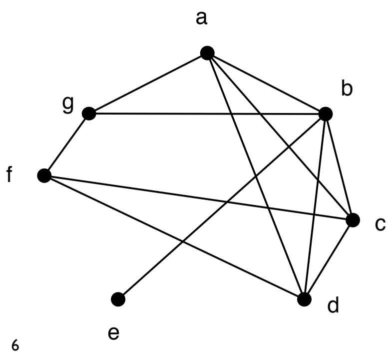
Solução

1. Identificamos o problema como passível de ser resolvido com auxílio da Teoria dos Grafos
2. Modelamos o problema como um grafo
3. Aplicamos algum teorema ou algoritmo para encontrar a solução do problema

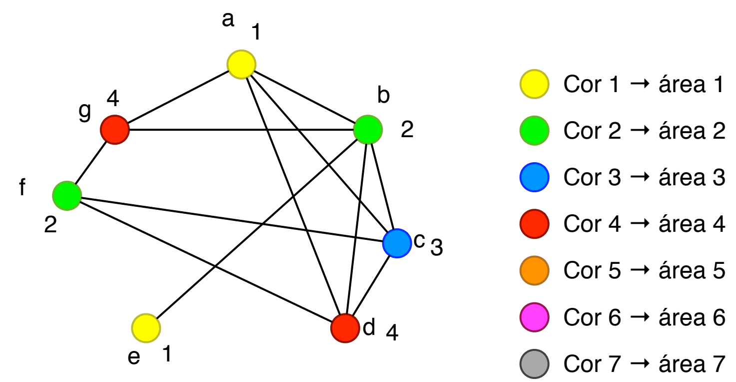
Solução

- Modelagem:
  V = produtos químicos
  E = ligam 2 produtos que reagem entre si

	a	b	c	d	e	f	g
a	-	*	*	*	-	-	*
b	*	-	*	*	*	-	*
c	*	*	-	*	-	*	-
d	*	*	*	-	-	*	-
e	-	*	-	-	-	-	-
f	-	-	*	*	-	-	*
g	*	*	-	-	-	*	-



Solução: coloração de vértices



Resultado: quatro áreas: {a, e}, {b, f}, {c}, {d, g}

Definições

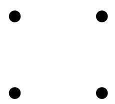
Seja G um grafo simples. Uma **k-coloração** de G é uma atribuição de no máximo k cores aos vértices de G de tal forma que vértices adjacentes recebem cores diferentes.

Se G possui uma K-coloração, então G é dito **k-colorável**.

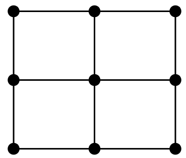
O **número cromático** de G, denotado por χ(G), é o menor número k para o qual G é k-colorável.

Exercícios

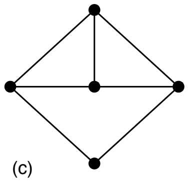
1. Determine χ (G) para cada um dos grafos abaixo:



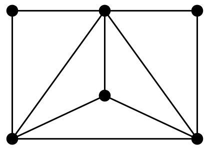
(a)



(b)



(c)



(d)

2. O que você pode afirmar a respeito de grafos com:
   a) χ (G) = 1? b) χ (G)=2?

3. Escreva o número cromático de cada um dos grafos a seguir:

   a) grafo completo K_n;

   b) grafo bipartido completo $K_{r,s}$;

   c) grafo ciclo C_n (com $n \geq 3$);

   d) uma árvore;

4. Verifique se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa para um grafo G. Apresente uma prova ou contra exemplo para justificar sua resposta:

   a) Se G contém um grafo completo K_r como sub-grafo, então χ (G) $\geq$ r.

   b) Se χ (G) $\geq$ r, então G contém o grafo completo K_r como sub-grafo.

Algoritmo de coloração seqüencial

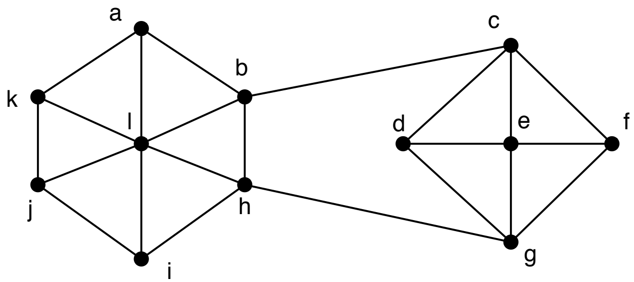
Entrada: Grafo G com lista de vértices $v_1, v_2, \dots v_n$

Saída: uma coloração de vértices $f : V \rightarrow \{1,2,\dots\}$

```
Para i = 1,...., n faça
    f(vi) ← menor índice de cor não usado por
            qualquer dos vizinhos de vi já coloridos;
Fim-para;
Retorne f;
```

Exercício

Utilizando o algoritmo de coloração seqüencial, encontre uma coloração para o grafo abaixo (vá colorindo os vértices em ordem alfabética)



Algoritmo de coloração heurística

Várias heurísticas para coloração são baseadas na noção de que um vértice de grau maior é mais difícil de ser colorido no final do que um vértice de grau menor.

Definições:
Grau não colorido de um vértice v não colorido é igual ao número de vértices adjacentes a v ainda não coloridos.

Grau colorido de um vértice v é o número de **cores** diferentes usadas para colorir vértices adjacentes a v.

Algoritmo de coloração heurística

Entrada: Grafo G com lista de vértices $v_1, v_2, \ldots v_n$

Saída: uma coloração de vértices $f : V \rightarrow \{1,2,\ldots\}$

Enquanto existirem vértices não-coloridos, faça

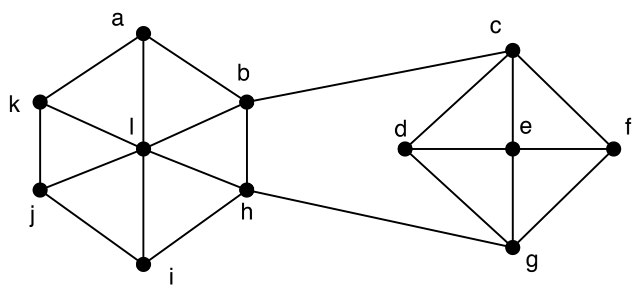
> Dentre os vértices não-coloridos com maior grau, escolha o vértice v com maior grau colorido;
>
> Atribua a menor cor possível k ao vértice v: $f(v) \leftarrow k$;

Fim-enquanto;

Retorne f;

Exercício

Utilizando o algoritmo de coloração **heurística**, encontre uma cloração para o grafo abaixo.



Como determinar χ(G) ?

Para determinar o número cromático de um grafo, devemos procurar limites superior e inferior para esse número.

Se os dois limites forem iguais, então podemos determinar com precisão o número cromático. Caso contrário, o número fica definido no intervalo entre os limites encontrados.

Como determinar χ(G) ?

Teorema 1:
Seja G um grafo simples cujo grau do vértice de maior grau é d, então $\chi(G) \leq d + 1$.

Teorema de Brooks (L. Brooks, 1941)
Seja G um grafo simples conexo cujo grau do vértice de maior grau é d. Se G não for um grafo ciclo com número ímpar de vértices, nem um grafo completo, então $\chi(G) \leq d$.

Como determinar χ(G) ?

Método:
Tente encontrar limite superior e inferior para o número cromático. Se forem iguais, então o número cromático é esse valor em comum.

Possíveis limites superiores para χ(G):

- o número de vértices de G: $\chi(G) \leq n$;
- teorema 1: $\chi(G) \leq d + 1$;
- teorema de brooks: $\chi(G) \leq d$;
- número de cores de uma coloração explícita de G.

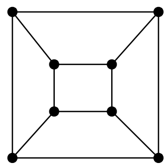
Possível limite inferior para χ(G):

- o número de vértices do maior sub-grafo completo K_r de G: $\chi(G) \geq r$.

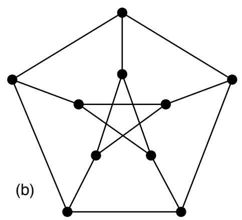
Exercícios

Para cada um dos grafos G abaixo, escreva:

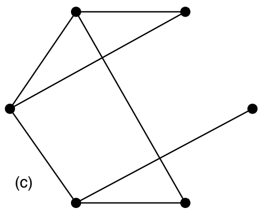
- limite inferior para χ(G);
- limite superior para χ(G) pelo Teorema de Brooks;
- o valor exato de χ(G) e uma coloração utilizando χ(G) cores.



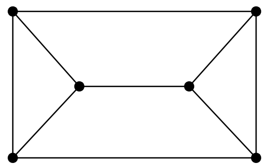
(a)



(b)



(c)



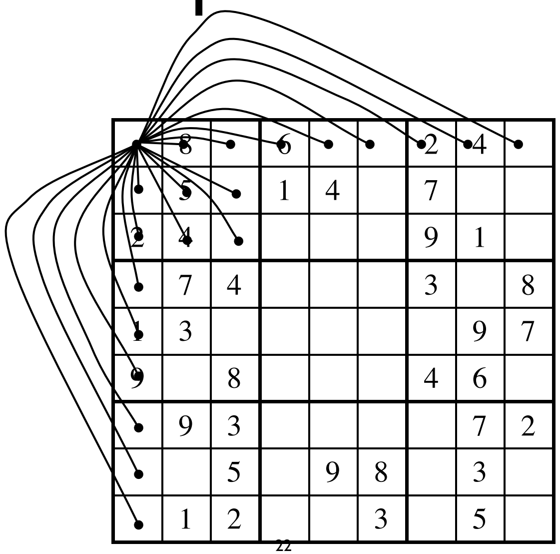
(d)

Exemplo: Sudoku

	8		6			2	4	
	5		1	4		7		
2	4					9	1	
	7	4				3		8
1	3						9	7
9		8				4	6	
	9	3					7	2
		5		9	8		3	
	1	2			3		5	

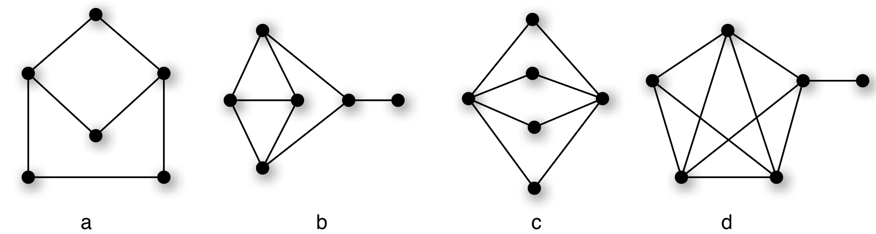
- Vértices são as casas do "tabuleiro"
- Arestas ligam casas que precisam ter valores diferentes (mesma linha, mesma coluna, mesma região)
- números representam cores
- dada uma atribuição inicial de cores, deve-se encontrar a coloração final

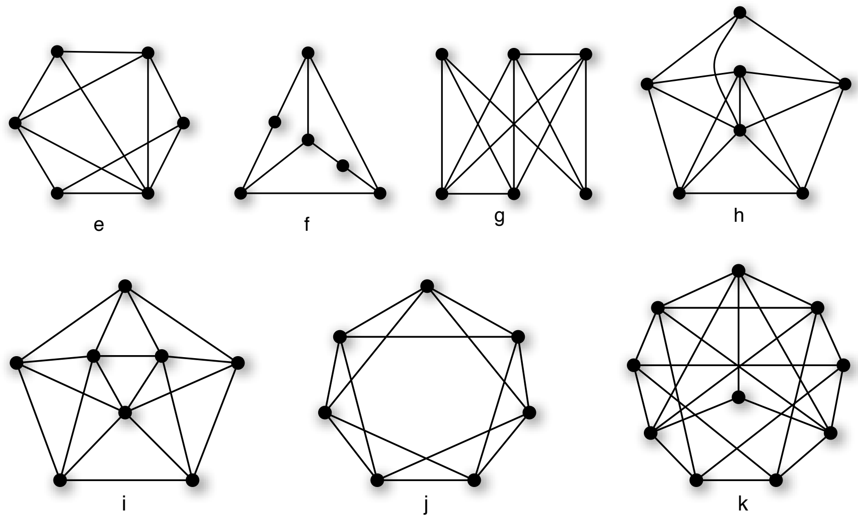
Exemplo: Sudoku



Exercícios

1. Para cada um dos grafos G abaixo, procure determinar com exatidão o número cromático





2. O diretor de um zoológico precisa acomodar oito animais (A, B,...,H) em gaiolas. Por questões de segurança alguns animais não podem ser colocados juntos na mesma gaiola. Na tabela abaixo, os "$\times$" indicam pares de animais que devem ser colocados em gaiolas diferentes. Determine a quantidade mínima de gaoilas para acomodar todos os animais com segurança.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
A	–	×	–	–	×	×	–	×
B	×	–	×	–	–	×	–	×
C	–	×	–	×	–	×	×	×
D	–	–	×	–	×	×	×	–
E	×	–	–	×	–	×	×	–
F	×	×	×	×	×	–	–	–
G	–	–	×	×	–	–	–	×
H	×	×	×	–	–	–	×	–

3. Quando são estabelecidas as freqüências de transmição de estações de rádio em uma determinada região geográfica, alguns pares de transmissores necessitam de freqüências diferentes para evitar interferência mútua em seus sinais. Isto acontece quando seus sinais se sobrepõem em alguma região. A tabela 2 mostra uma configuração onde as letras são as estações e os valores numéricos são as distâncias (em km) entre pares de estações. Sabendo que o alcance do sinal de cada transmissor é 50 km, calcule o número mínimo de diferentes freqüências de rádio necessárias para evitar interferências entre estações com a configuração mostrada.

Tabela 1: Estações de rádio

	B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	55	110	108	60	150	88
B		87	142	133	98	139
C			77	91	85	93
D				75	114	82
E					107	41
F						123

Teoria dos Grafos
Unidade 7: Coloração

Prof. Dr. Paulo César Rodacki Gomes
paulo.rodacki@blumenau.ifc.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
CATARINENSE
Câmpus Blumenau