抛物型偏微分方程差分方法数值实验报告

孙泽轩

信息与计算科学专业

2016301000038

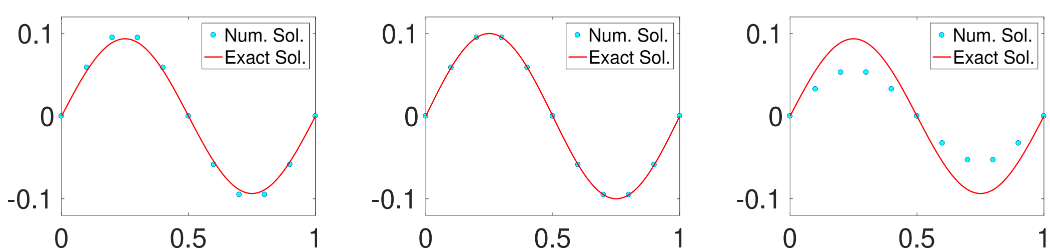
1 算例 1 Dirichlet 边界条件

数值求解热传导问题

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & x \in (0,1), t > 0, \\ v(x,0) = sin2\pi x, & x \in [0,1], \\ v(0,x) = v(1,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

到模拟时间 $t = 0.06, 0.1, 0.9, 50.0$ 测试不同时间步长对格式的影响。
PS：精确解为 $v(x,t) = exp(-(2*\pi)^2 t)sin2\pi x.$

我们利用有限差分的方法近似时间和空间导数，再利用 Matlab 实现算法的格式。我们编写了 FDM_eg1 函数, 使用方法为 FDM_eg1(DT,TEND), 其中 DT 为时间步长,TEDN 为终止时刻。我们取网格的宽度为区间长度的 1/10, 即计算 11 个点的值。利用该函数我们得到 $t = 0.06$ 时在时间步长为 $0.01/36, 0.01/6, 0.01$ 下的结果下:

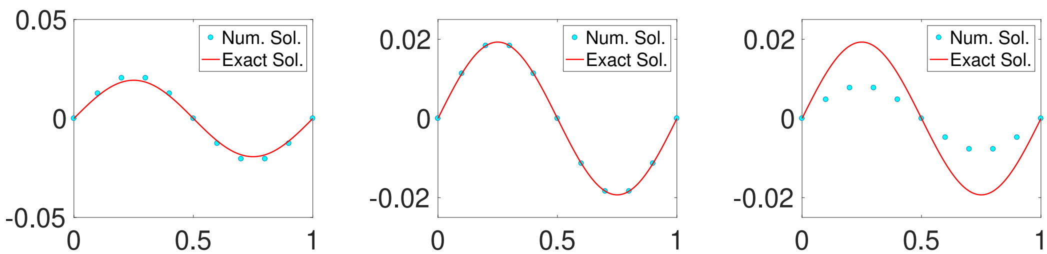


(a) 时间步长为 0.01/36 (b) 时间步长为 0.01/6 (c) 时间步长为 0.01

Figure 1: $t = 0.06$ 时, 不同时间步长下的差分结果。其中蓝色的圆圈代表 11 个点处的数值差分结果，红色的曲线为精确解。

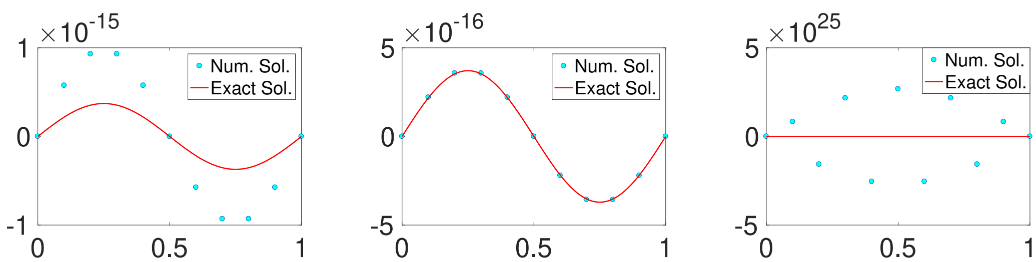
我们可以看到时间步长为 $0.01/6$ 时差分结果最好。当我们把时间步长缩短为原来的 $1/6$ 或扩大 6 倍时, 我们可以看到精度有所下降, 步长增大时下降更为明显。由此我们可以看到应选择合适的步长才能保证精度，过大过小都不合适。

类似对 $t = 0.1, 0.9, 50.0$, 我们得到如下结果:



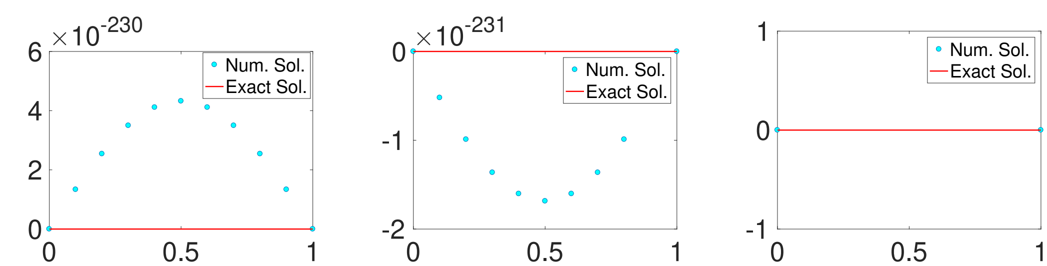
(a) 时间步长为 $0.01/36$ (b) 时间步长为 $0.01/6$ (c) 时间步长为 0.01

Figure 2: $t = 0.1$ 时, 不同时间步长下的差分结果。



(a) 时间步长为 $0.01/36$ (b) 时间步长为 $0.01/6$ (c) 时间步长为 0.01

Figure 3: $t = 0.9$ 时, 不同时间步长下的差分结果。



(a) 时间步长为 $0.01/36$ (b) 时间步长为 $0.01/6$ (c) 时间步长为 0.01

Figure 4: $t = 50.0$ 时, 不同时间步长下的差分结果。

我们可以看到 $t = 0.1, 0.9$ 时的结果跟 $t = 0.06$ 时类似。从图像上可以看出在步长为 $0.01/6$ 时两个时间下差分结果在图形上看都具有较高的精度，然而随

着时间的增长，当步长减小或增大时，精度变得越来越低。在 $t = 0.9$ 时，步长为 0.01 情形下差分结果已经不具有三角函数的形状了。当 $t = 50.0$ 时，三种步长下都具有相当大的误差，尤其是步长为 0.01 的时候。

2 算例 2 Neumann 边界条件

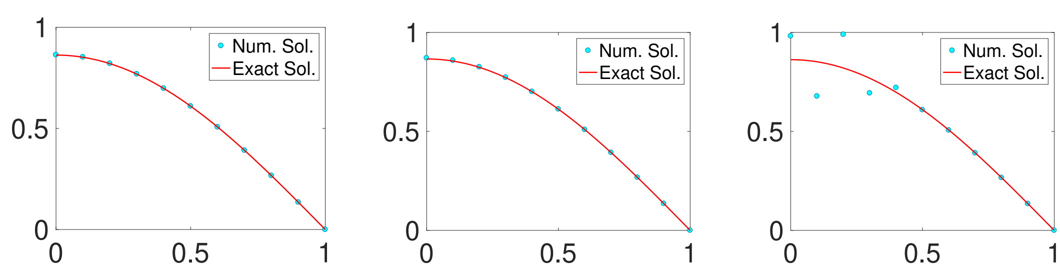
数值求解热传导问题

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & x \in (0,1), t > 0, \\ v(x,0) = cos\frac{\pi x}{2}, & x \in [0,1], \\ \partial_x v(0,x) = v(1,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

到模拟时间 $t = 0.06, 0.1, 0.9, 50.0$ 测试不同时间步长对格式的影响。
PS：精确解为 $v(x,t) = exp(-(\frac{\pi}{2})^2 t) cos\frac{\pi x}{2}$. 同样我们用有限差分来近似求解, 对于边界条件 $\partial_x v(0,x) = 0$, 我们采用中心差分来并设置一个 ghost point 来近似以得到 2 阶精度。具体做法如下为: 设置 ghost point 值 $u_{-1}^n = u_1^n$ 后, 令

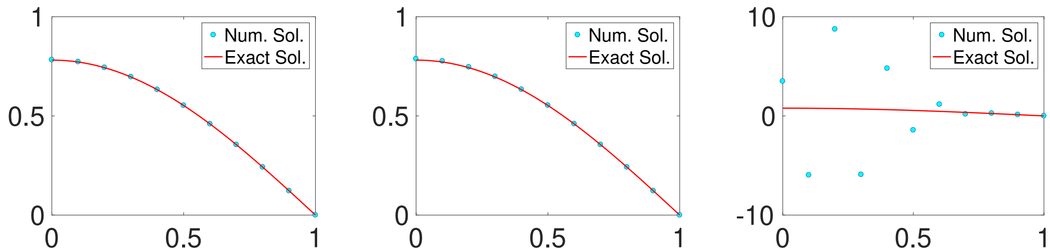
$$u_0^{n+1} = u_0^n + \frac{\triangle t}{\triangle x^2}(u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n).$$

根据这样的格式, 我们用 Matlab 编写了 FDM_eg2 函数, 使用方法同 FDM_eg1 函数。我们选取与算例 1 相同的网格宽度及步长, 在 $t = 0.06, 0.1, 0.9, 50.0$ 四种情形下得到如下结果:



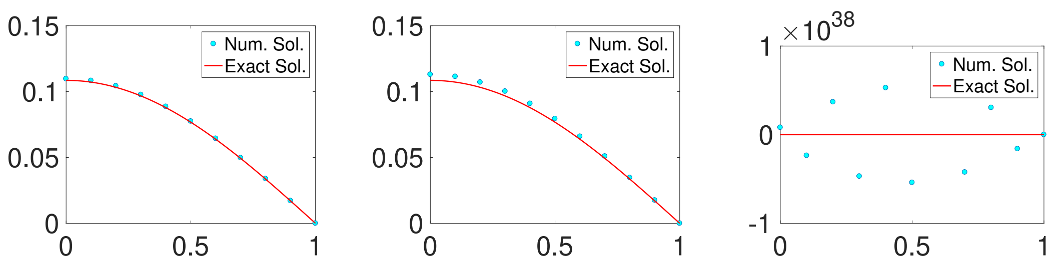
(a) 时间步长为 0.01/36　(b) 时间步长为 0.01/6　(c) 时间步长为 0.01

Figure 5: $t = 0.06$ 时, 不同时间步长下的差分结果。



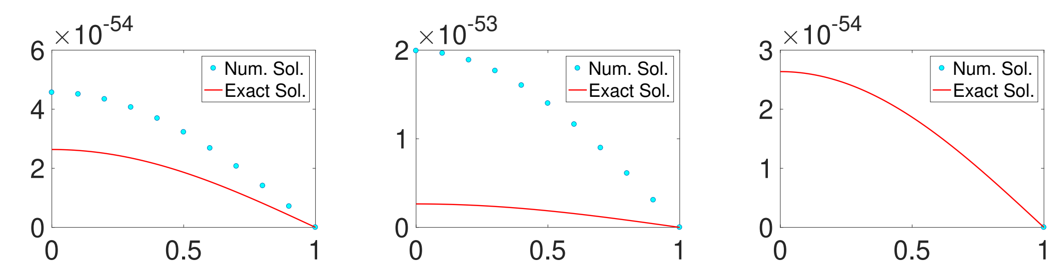
(a) 时间步长为 $0.01/36$ (b) 时间步长为 $0.01/6$ (c) 时间步长为 0.01

Figure 6: $t = 0.1$ 时, 不同时间步长下的差分结果。



(a) 时间步长为 $0.01/36$ (b) 时间步长为 $0.01/6$ (c) 时间步长为 0.01

Figure 7: $t = 0.9$ 时, 不同时间步长下的差分结果。



(a) 时间步长为 $0.01/36$ (b) 时间步长为 $0.01/6$ (c) 时间步长为 0.01

Figure 8: $t = 50.0$ 时, 不同时间步长下的差分结果。

从图我们可以看出当时间步长变小时并没有出现像算例 1 一样精度变小的结果, 精度反而随步长减小而增大。而随着时间增大相同时间步长下精度不断减小, 当 $t = 50.0$ 时, 最小的步长也不能得到较为精确的解。

3 总结分析

从上述两个算例我们可以看出, 对于 Dirichlet 边界条件选取合适的步长才能让我们得到较为精确的解, 而对于 Neumann 边界条件步长越小精度越高 (至少从数值实验上看是这样)。对于两种边界条件,t 越大误差越大, 可以看到计算误差的确随着时间而不断累积, 当 t 较大时我们很难通过差分近似来得到较为精确的解。