关于求解无粘性 Burgers 方程 Riemann 问题多种数值格式的比较

孙泽轩
信息与计算科学专业
2016301000038

1 Burgers 方程的 Riemann 问题

Burgers 方程的 Riemann 问题具体如下：

$$\begin{cases} u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} u_l & x < 0, \\ u_r & x \geq 0. \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

我们知道方程 1的精确解为

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x < st, \\ u_r & x > st. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $s = (u_l + u_r)/2$.

2 不同的格式

2.1 Lax-Friedrichs 格式

Lax-Friedrichs 方法对于非线性的系统具有如下格式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{\triangle t}{2\triangle x}[f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)]. \tag{3}$$

对于 Burgers 方程我们就有如下格式：

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{\triangle t}{2\triangle x}[\frac{1}{2}(u_{j+1}^n)^2 - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n)^2]. \tag{4}$$

2.2 Lax-Wendroff 格式

对于非线性守恒方程，Lax-Wendroff 格式具有如下格式：

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\triangle t}{2\triangle x}(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)) + \frac{\triangle t^2}{2\triangle x^2} \\ [A_{j+\frac{1}{2}}(f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) - A_{j-\frac{1}{2}}(f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n))] \end{aligned} \tag{5}$$

特别地，对于 Burgers 方程具有如下格式：

$$\begin{aligned} &u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\triangle t}{2\triangle x}(\frac{1}{2}u_{j+1}^n - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n)^2) + \frac{\triangle t^2}{2\triangle x^2} \\ &\quad [(\frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n))(\frac{1}{2}(u_{j+1}^n)^2 - \frac{1}{2}(u_j^n)^2) - (\frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n))(\frac{1}{2}(u_j^n)^2 - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n)^2)]. \end{aligned} \tag{6}$$

2.3 Godunov 格式

对于无粘性的 Burgers 方程，Godunov 格式具有如下简单的守恒律形式：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}[F(u_j^n, u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n, u_j^n)], \tag{7}$$

其中通量 F 的定义为 $F(u,v) = (u^\star)^2/2$，其中 $u^\star$ 的定义如下:
当 $u \geq v$ 时

$$u^\star = \begin{cases} u, & \frac{u+v}{2} > 0, \\ v, & \frac{u+v}{2} \leq 0. \end{cases}$$

当 $u < v$ 时

$$u^\star = \begin{cases} u, & u > 0, \\ v, & v < 0, \\ 0, & u \leq 0 \leq v. \end{cases}$$

2.4 Beam-Warming 格式

对于一般的控制方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

令

$$a(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}, \tag{9}$$

$$\Delta t/\Delta x = \lambda, \tag{10}$$

则 Beam-Warming 格式如下：
对于 $a(u^n) > 0$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2}\left((3f(u_i^n) - 4f(u_{i-1}^n) + f(u_{i-2}^n)\right) + \\ \frac{\lambda^2}{2}\left[a(u_{i-1/2}^n)\left((f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)\right) - a(u_{i-3/2}^n)\left(f(u_{i-1}^n) - f(u_{i-2}^n)\right)\right], \end{aligned} \tag{11}$$

对于 $a(u^n) < 0$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\lambda}{2}\left((3f(u_i^n) - 4f(u_{i+1}^n) + f(u_{i+2}^n)\right) + \\ \frac{\lambda^2}{2}\left[a(u_{i+3/2}^n)\left((f(u_{i+2}^n) - f(u_{i+1}^n)\right) - a(u_{i+1/2}^n)\left(f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)\right)\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

对于 Burgers 方程，令

$$f(u) = \frac{u^2}{2}, \tag{13}$$

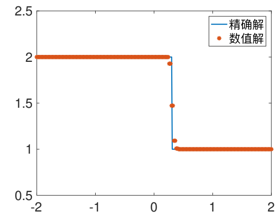
即得到其 Beam-Warming 格式。

3 数值实验

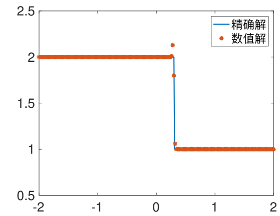
为了更好的比较这四种格式的优劣，对特定初值的 Burgers 方程应用上述格式，比较结果。所有格式解的问题为方程 1，初始条件 $ul = 2, ur = 1$。选取时间步长 dt 为 0.01，空间步长 dx 为 0.04，实验区间为 [-2,2]。

首先画出四种格式在终止时刻为 0.2 秒时的结果与精确解的比较图，结果如图 1。可以看到四种格式在图上看都有不错的结果，在正确的间断处 $x = 0.3$ 附近都形成了间断。但是 Lax-Wendroff 和 Beam- Warming 格式都产生了较为明显的不在精确解的曲线上的数值解的点。

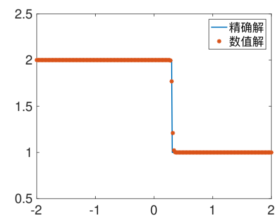
为了更好地比较四种格式的误差，画出四种格式的误差图，结果如图 2。从四种各种误差图的峰值可以看出 Lax-Wendroff 的效果最优，Godunov 和 Beam-Warming 效果差不多，Lax-Friedrichs 的效果最差。



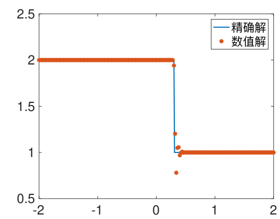
(a) Lax-Friedrichs



(b) Lax-Wendroff

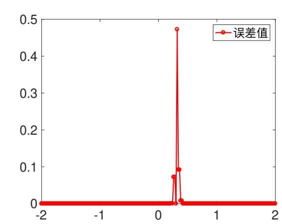


(c) Godunov

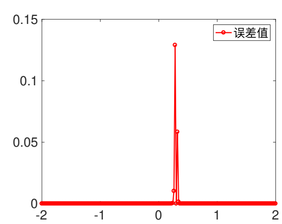


(d) Beam-Warming

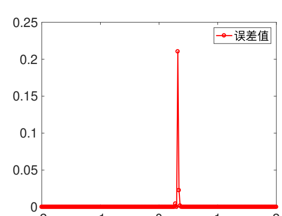
图 1: $t = 0.2s$ 时, 四种格式结果与精确解的比较图



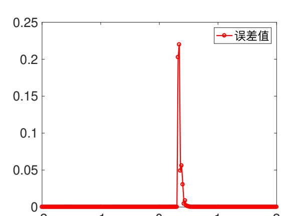
(a) Lax-Friedrichs



(b) Lax-Wendroff



(c) Godunov



(d) Beam-Warming

图 2: $t = 0.2s$ 时, 四种格式的绝对误差图

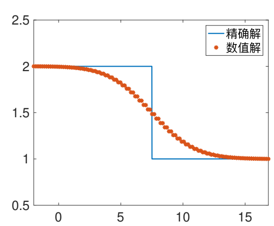
为了更进一步的比较四种格式的数值结果，给出数值解误差的具体参数如下表：

表 1: $t = 0.2s$ 时, 四种格式数值解误差的具体参数

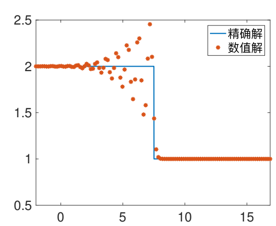
格式	最大误差所在坐标	最大误差值	平均绝对误差
Lax-Friedrichs	0.32	0.4726	0.0041
Lax-Wendroff	0.28	0.129	9.93×10^{-4}
Godunov	0.32	0.2103	0.0012
Beam-Warming	0.34	0.2198	0.0029

从表中可以看出 Lax-Wendroff 的平均绝对误差最小，最大误差值最小，效果最优；Godunov 的平均绝对误差和最大误差值较 Beam-Warming 更小，所以更优；Lax-Friedrichs 的平均绝对误差和最大误差值均为最大，效果最差。可以发现四种格式最大误差所在坐标的最大值都在 $x = 0.3$ 附近，这是为了形成精确地间断造成的，说明四种格式都较好的逼近了精确解的间断处。

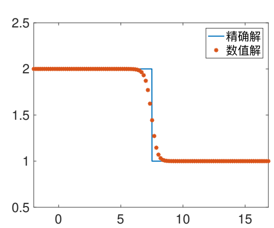
接下来探究 t 较大时各种格式的数值效果，选 $t = 5s$，实验区间为 [-2,17]，此时精确解间断处为 $x = 7.5$。四种格式数值解和精确解的比较图如下：



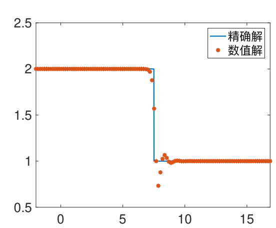
(a) Lax-Friedrichs



(b) Lax-Wendroff



(c) Godunov



(d) Beam-Warming

图 3: $t = 5s$ 时, 四种格式结果与精确解的比较图

可以看到 Lax-Friedrichs 和 Lax-Wendroff 已不能很好的在图像上拟合精确解，但 Godunov 和 Beam-Warming 在图上看还数值解的结果还比较精确。最后给出四种格式在 $t = 5s$ 时的误差各参数如下表：

表 2: $t = 5s$ 时, 四种格式数值解误差的具体参数

格式	最大误差所在坐标	最大误差值	平均绝对误差
Lax-Friedrichs	7.52	0.4849	0.1181
Lax-Wendroff	6.67	0.5205	0.0469
Godunov	7.52	0.4437	0.0166
Beam-Warming	7.52	0.5697	0.0116

可以看到四种格式的误差较 $t = 0.2s$ 时均有增加；Lax-Wendroff 格式最大误差所在坐标已偏离正确的间断点 $x = 7.5$ 较远，说明其已不能较好的拟合间断；而其余三种格式最大误差所在坐标仍在正确的间断附近，但从图像上我们知道 Lax-Friedrichs 已不能较好地拟合间断。四种格式的最大误差值差不多，但从平均绝对误差来看 Godunov 和 Beam-Warming 两种格式要优于 Lax-Friedrichs 和 Lax-Wendroff。

4 实验结论

从数值实验结果可以看出，虽然在时间较小时 Lax-Wendroff 格式最优，但随着时间的累积，Godunov 和 Beam-Warming 两种格式仍保持较高的精度，且能很好地拟合精确解的间断处。而 Lax-Friedrichs 和 Lax-Wendroff 两种格式在时间较大时都不能很好的拟合间断，数值解结果并不令人满意。