第三章　　静磁场

稳恒电流激发静磁场，在稳恒电流的条件下，导体内及其周围空间中，也存在静电场，此时的电场与电流的关系为

$$\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$$

式中σ_c为电导率。但是，静电场和静磁场之间并无直接的关系。

本章所要研究的与静电问题类似，静磁问题中最基本的问题是：在给定电流分布（或给定外场）和介质分布的情况下，如何求解空间中的磁场分布。

1、矢势

稳恒电流磁场的基本方程是

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} \end{cases}$$

由此可看出，磁场的特点和电场不同。静电场是无旋的，即引入标势 φ 来描述。而磁场是有旋的，一般不能引入一个标势来描述整个空间的磁场，但由于磁场是无源的，可以引入一个矢量来描述它。

即若 $\nabla\cdot\vec{B}=0$

则 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

$\vec{A}$称为磁场的矢势。

根据 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ ，可得到

$$\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}=\iint_S(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{s}=\oint_L\vec{A}\cdot d\vec{l}$$

由此可看到矢势 $\vec{A}$ 的物理意义是：

矢势 $\vec{A}$ 沿任一闭合回路的环量代表通过以该回路为界的任一曲面的磁通量。

必须注意：①只有 $\vec{A}$ 的环量才有物理意义，而在每点

上的$\vec{A}(\vec{x})$值没有直接的物理意义。

②矢势$\vec{A}$可确定磁场$\vec{B}$，但由$\vec{B}$并不能唯一地确定$\vec{A}$。例如设有沿Z轴方向的均匀磁场

$$B_x = B_y = 0, B_z = B_0$$

其中 B_0 是常量。由 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0, \qquad \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

不难看出有解

$$A_z = A_y = 0, \qquad A_x = -B_0 y$$

还有另一解

$$A_z = A_x = 0, \qquad A_y = B_0 x$$

除了这两个解，还有其他解。事实上。因为对任意函数 ψ。有

$$\nabla \times (\vec{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \vec{A}$$

即 $\vec{A} + \nabla \psi$ 和 $\vec{A}$ 对应于同一个 $\vec{B}$ ，$\vec{A}$ 的这种任意性是由于 $\vec{A}$ 的环量才有物理意义，而每点上的 $\vec{A}$ 本身没有直接的物理意义。

由于 $\vec{A}$ 的任意性，我们还可以对它加上一定的限制条件，称为规范条件，如库仑规范条件

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

下面推导这个规范条件总是可行的。

设有一个解不满足规范条件，即

$$\nabla \cdot \vec{A} = u \neq 0$$

我们可另取一个解

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi$$

其中 ψ 为泊松方程 $\nabla^2 \psi = -u$ 的一个解。

$\vec{A}'$ 就满足规范条件 $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$

2、矢势微分方程

由于 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$，引入 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$，在均匀线性介质内有 $\vec{B} = \mu \vec{H}$，将这些代入到 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$ 中，即

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\vec{H} &= \nabla\times\frac{\vec{B}}{\mu} = \nabla\frac{1}{\mu}\times\vec{B} + \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{B} \\
&= \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) \\
&= \frac{1}{\mu}\left[\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}\right] \\
&= \vec{j}
\end{aligned}
$$

若 $\vec{A}$ 满足库仑规范条件 $\nabla\cdot\vec{A}=0$，得矢势 $\vec{A}$ 的微分方程

$$
\begin{cases}
\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{j} \\
(\nabla\cdot\vec{A}=0)
\end{cases}
$$

或者直角分量：$\nabla^2 A_i = -\mu j_i$ (i＝1,2,3)

这是大家熟知的Pisson's equation.

由此可见，矢势$\vec{A}$ 和标势φ 在静场时满足同一形式的方程，对此静电势的解。

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

可得到矢量的特解：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

由此即得

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V(\nabla\frac{1}{r})\times\vec{j}(\vec{x}')d\tau'$$

$$=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}d\tau'$$

作变换 $\vec{j}d\tau'\to Id\vec{l}\,'$，即得

$$\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_L\frac{Id\vec{l}\,'\times\vec{r}}{r^3}$$

这就是毕奥——萨伐尔定律。

当全空间中电流 $\vec{j}$给定时，即可计算磁场 $\vec{B}$，对

于电流和磁场互相制约的问题，则必须解微分方程的边值问题。

3、矢势边值关系

在两介质分界面上，磁场的边值关系为

$$\begin{cases} \hat{\vec{n}}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 & (1) \\ \hat{\vec{n}}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_f & (2) \end{cases}$$

对应矢势 $\vec{A}$ 的边值关系为

$$\begin{cases} \hat{\vec{n}}\cdot(\nabla\times\vec{A}_2-\nabla\times\vec{A}_1)=0 & (3) \\ \hat{\vec{n}}\times(\dfrac{1}{\mu_2}\nabla\times\vec{A}_2-\dfrac{1}{\mu_1}\nabla\times\vec{A}_1)=\vec{\alpha}_f & (4) \end{cases}$$

其实，边值关系（3）式也可以用简单的形式代替，即在分界面两侧取一狭长回路，计算 $\vec{A}$ 对此狭长回路的积分。当回路短边长度趋于零时（如同 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ 时）。

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = (A_{2t} - A_{1t})\Delta l$$

另一方面，由于回路面积趋于零，有

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \to 0$$

因此使得

$$(A_{2t} - A_{1t})\Delta l = 0$$

由于 $\Delta l \neq 0$ 只有

$$A_{2t} = A_{1t} \qquad (5)$$

另外，若取 $\nabla\cdot\vec{A}=0$ ，仿照第一章关于法向分量边值关系的推导，可得

$$A_{2n} = A_{1n} \qquad (\nabla\cdot\vec{A}=0) \qquad (6)$$

（5）、（6）两式合算，得到

$$\vec{A}_2\Big|_S = \vec{A}_1\Big|_S \qquad (7)$$

即在两介质分界面上，矢势 $\vec{A}$ 是连续的。

4、静磁场的能量

磁场的总能量为 $W = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}d\tau$

在静磁场中，可以用矢势 $\vec{A}$ 和电流 $\vec{j}$ 表示总能量，即

$$\begin{aligned}\vec{B}\cdot\vec{H} &= (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}\\ &= \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})\\ &= \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \vec{A}\cdot\vec{j}\end{aligned}$$

即有：

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2}\int_{\infty}\left[\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \vec{A}\cdot\vec{j}\right]d\tau\\ &= \frac{1}{2}\oiint_{S}(\vec{A}\times\vec{H})\cdot d\vec{s} + \frac{1}{2}\int_{\infty}\vec{A}\cdot\vec{j}\,d\tau\\ &= \frac{1}{2}\int_{\infty}\vec{A}\cdot\vec{j}\,d\tau\end{aligned}$$

这里不能把$\frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{j}$ 看作为能量密度。因为能量分布于磁场中，而不仅仅存在于电流分布区域内。另外，能量式中的 $\vec{A}$ 是由电流 $\vec{j}$ 激发的。

如果考虑两个独立电流系之间的相互作用能，则设电流系$\vec{j}_e$ 建立矢势为 $\vec{A}_e$，另一电流系$\vec{j}$ 建立矢势为$\vec{A}$，$\vec{j}_e$ 分布于$\vec{x}_1\in V_1$， $\vec{j}$ 分布于$\vec{x}_2\in V_2$ ，若电流分布为

$$\vec{j}_{总}(\vec{x})=\vec{j}_e(\vec{x}_1)+\vec{j}\,(\vec{x}_2)\qquad(\vec{x}\in V_1\bigcup V_2=V).$$

磁场总能量为

$$W_{总}=\frac{1}{2}\int_V\vec{j}_{总}\cdot\vec{A}_{总}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_V(\vec{j}_e+\vec{j})\cdot(\vec{A}_e+\vec{A})d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_{V_1}\vec{j}_e\cdot\vec{A}_e d\tau+\frac{1}{2}\int_{V_2}\vec{j}\cdot\vec{A}d\tau$$

$$+\frac{1}{2}\int_{V_{1or2}}(\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)d\tau$$

由此可见，上式右边第一、二项是电流系 $\vec{j},\vec{j}_e$ 各自的自能，其相互作用能为

$$W_i=\frac{1}{2}\int_{V_{1or2}}(\vec{j}_e\cdot\vec{A}+\vec{j}\cdot\vec{A}_e)d\tau$$

因为其中：

$$\vec{A}(\vec{x}_1)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V_2}\frac{\vec{j}(\vec{x}_2)}{r}d\tau_2$$

$$\vec{A}_e(\vec{x}_2)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V_1}\frac{\vec{j}_e(\vec{x}_1)}{r}d\tau_1$$

$$r=\left|\vec{x}_1-\vec{x}_2\right|=\left|\vec{x}_2-\vec{x}_1\right|$$

所以

$$\int_{V_1}\vec{j}_e\cdot\vec{A}d\tau_1=\int_{V_1}\int_{V_2}\vec{j}_e(\vec{x}_1)\cdot\frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{j}(\vec{x}_2)}{r}d\tau_1 d\tau_2$$

$$\int_{V_2}\vec{j}\cdot\vec{A}_e d\tau_2=\int_{V_1}\int_{V_2}\vec{j}(\vec{x}_2)\cdot\frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{j}_e(\vec{x}_1)}{r}d\tau_1 d\tau_2$$

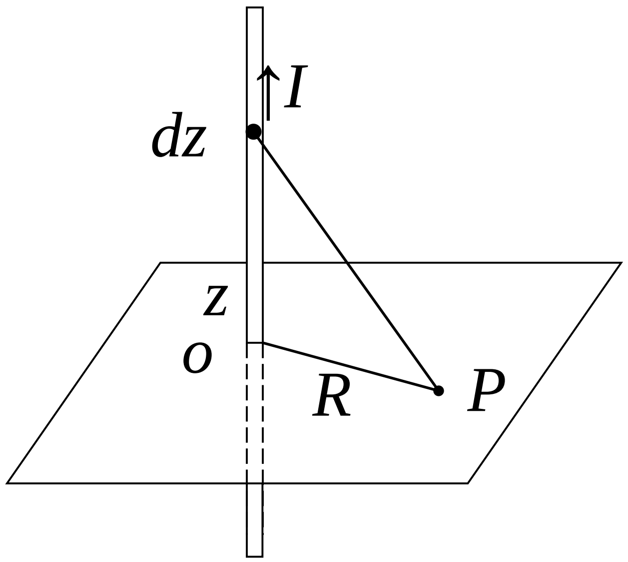
该两式相等，因此电流 $\vec{j}$ 在外场 $\vec{A}_e$ 中的相互作用能量为

$$W_i = \int_V \vec{j} \cdot \vec{A}_e dv$$

5、举例讨论用 $\vec{A}$ 计算

[例1] 无穷长直导线载电流 I，求空间的矢势 $\vec{A}$ 和磁场 $\vec{B}$。

Solution ：



取导线沿 z 轴，设 p 点到导线的垂直距离为 R，电流元 Idz 到 p 点距离为 $\sqrt{R^2 + z^2}$

因此得到

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Idz}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\mu I}{4\pi}\ln(z+\sqrt{z^2+R^2})\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

积分结果是无穷大（发散的）。计算两点的矢势差值可以免除发散，若取R_0点的矢势值为零，则

$$A_z(p)-A_z(p_0) = \lim_{M\to\infty}\frac{\mu I}{4\pi}\ln\frac{z+\sqrt{z^2+R^2}}{z+\sqrt{z^2+R_0^2}}\Bigg|_{-M}^{M}$$

$$= \lim_{M\to\infty}\frac{\mu I}{4\pi}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+R^2/M^2}}{1+\sqrt{1+R_0^2/M^2}}\cdot\frac{-1+\sqrt{1+R_0^2/M^2}}{-1+\sqrt{1+R^2/M^2}}\right]$$

每项相乘后，再二次项展开得

$$
=\lim_{M\to\infty}\frac{\mu I}{4\pi}\ln\left[\frac{R_0^2+\dfrac{1}{4}\dfrac{R_0^2R^2}{M^2}}{R^2+\dfrac{1}{4}\dfrac{R_0^2R^2}{M^2}}\right]
$$

$$
=\frac{\mu I}{4\pi}\ln\frac{R_0^2}{R^2}=\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R_0}{R}=-\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R}{R_0}
$$

亦即

$$
\vec{A}(p)-\vec{A}(p_0)=-\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R}{R_0}\vec{e}_z
$$

0

故

$$
\vec{A}(p)=-\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R}{R_0}\vec{e}_z
$$

取 $\vec{A}$ 的旋度，得到

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\nabla \times \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \vec{e}_z$$

$$= -\frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \underbrace{\nabla \times \vec{e}_z}_{0} - \nabla \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \times \vec{e}_z$$

$$= -\nabla \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \times \vec{e}_z$$

$$= -\nabla \frac{\mu I}{2\pi} (\ln R - \ln R_0) \times \vec{e}_z$$

$$= -\frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{R} \vec{e}_R \times \vec{e}_z = \frac{\mu I}{2\pi R} \vec{e}_z \times \vec{e}_R = \frac{\mu I}{2\pi R} \vec{e}_\theta$$

结果与电磁学求解一致。

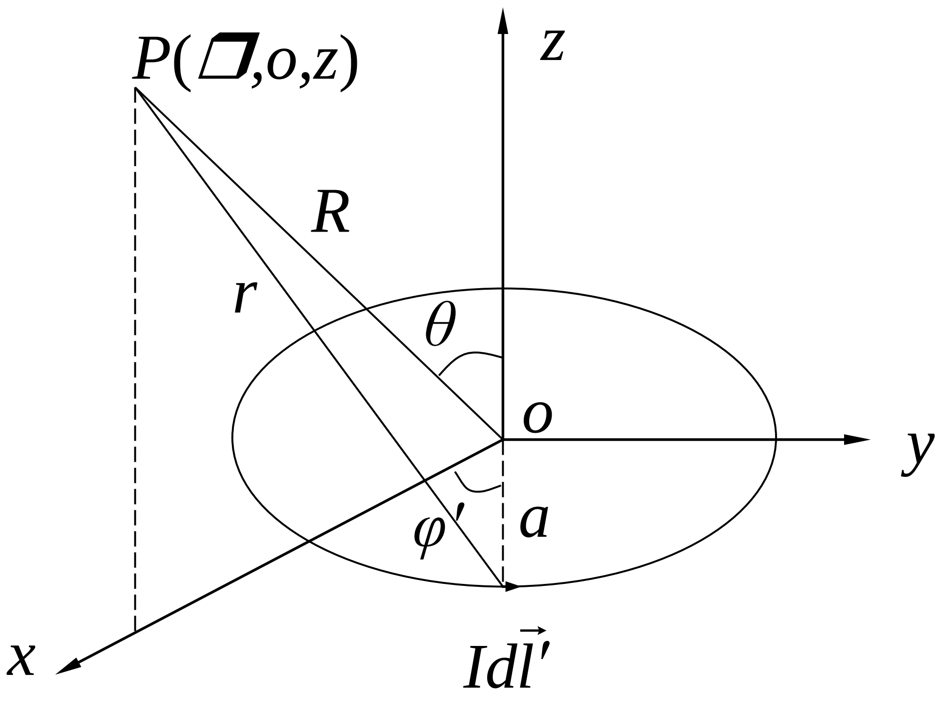
[例2]半径为*a*的导线园环载电流为 *I*，求空间的矢势和磁感应强度。

Solution:

首先求解矢势 $\vec{A}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{Id\vec{l}\,'}{r}$$



由于问题具有轴对称性，可以把观察点选在xz平面上，这样的好处是φ=0，故　只与r，θ有关。

$$\because \quad r^2 = a^2 + R^2 - 2Ra\cos\Phi \qquad (\Phi = \vec{R} \wedge \vec{a})$$

$$d\vec{l}' = \vec{i}\, dl'_x + \vec{j}\, dl'_y$$

其中

$$\begin{cases} l'_x = \cos\phi' a & dl'_x = -a\sin\phi' d\phi' \\ l'_y = \sin\phi' a & dl'_y = a\cos\phi' d\phi' \end{cases}$$

即得

$$A_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\sin\phi' d\phi'}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\Phi}} = 0$$

$$A_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\cos\phi' d\phi'}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\Phi}}$$

又∵　园电流环在*xy*平面上，故 $\theta' = \dfrac{\pi}{2}$ ，于是得到

$$\cos\Phi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$$

$$= \sin\theta\cos\phi' \qquad (其中\theta' = \frac{\pi}{2}, \phi = 0)$$

因此得到：

$$A_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\cos\phi' d\phi'}{\left[R^2 + a^2 - 2Ra\sin\theta\cos\phi'\right]^{1/2}}$$

Y分量代表着ϕ 分量，因此

$$A_\phi = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi' d\phi'}{(a^2 + R^2 - 2Ra\sin\theta\cos\phi')^{1/2}}$$

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi' d\phi'}{(a^2+R^2-2Ra\sin\theta\cos\phi')^{1/2}}$$

当*R>>a*情况下，上式分母展开为：

$$\begin{aligned}&(a^2+R^2-2Ra\sin\theta\cos\phi')^{-1/2}\\ &=(a^2+R^2)^{-1/2}(1-\frac{2Ra\sin\theta\cos\phi'}{a^2+R^2})^{-1/2}\\ &=(a^2+R^2)^{-1/2}(1+\frac{1}{2}\frac{2aR\sin\theta\cos\phi'}{a^2+R^2})\end{aligned}$$

于是得到

$$A_\phi = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi'}{(a^2+R^2)^{1/2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{2aR}{a^2+R^2}\sin\theta\cos\phi'\right]d\phi'$$

$$= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi'}{(a^2+R^2)^{1/2}}d\phi' + \frac{\mu_0 Ia}{8\pi}\frac{2aR}{(a^2+R^2)^{3/2}}\sin\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\phi' d\phi'$$

$$= \frac{Ia^2R\mu_0}{4\pi}\frac{1}{(a^2+R^2)^{3/2}}\sin\theta\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\phi'+1}{2}d\phi'$$

$$= \frac{\mu_0 Ia^2}{4}\frac{R}{(a^2+R^2)^{3/2}}\sin\theta$$

若$R>>a$，且

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I a^2}{4}\frac{1}{R^2}\sin\theta = \frac{\mu_0 IS}{4\pi}\frac{1}{R^2}\sin\theta$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi R^2}\sin\theta$$

于是磁感应强度为

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\vec{e}_r$$

$$+\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi)\right]\vec{e}_\theta$$

$$+\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_\phi$$

$$= \frac{2\mu_0 m \cos\theta}{4\pi R^3}\vec{e}_r + \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi R^3}\vec{e}_\theta$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{m}}{R^3}\right]$$

可见，对于一个园电流环，在远处所激发的磁场，相当于一个磁矩为$\vec{m}$ 的磁偶极子激发的场。

磁标势

本节所研究的问题是避开矢量 $\vec{A}$求磁感应强度 $\vec{B}$ 的不便理由。类比于静电场，引入磁标势 φ_m 。由于磁场是有旋场，一般不能引入标量势，但在一定条件下，我们依然可以定义磁场的标量势，它也是讨论静磁问题的有效手段。

1、磁标势引入的条件

首先从数学角度，回顾一下对某矢量场定义其标量势的条件。它可以表述为如下定理：

在区域V内有矢量场H，若对V内任一闭合曲线C都有

$$\oint_C H \cdot dl = 0$$

则必能引入一个单值的标量函数　　，它与矢量场H的关系是

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

这个定理的证明很简单，任一闭合曲线积分为零表明 $\vec{H} \cdot d\vec{l}$ 的曲线积分与路径无关。因此我们能用矢量场H来定义一个标量函数

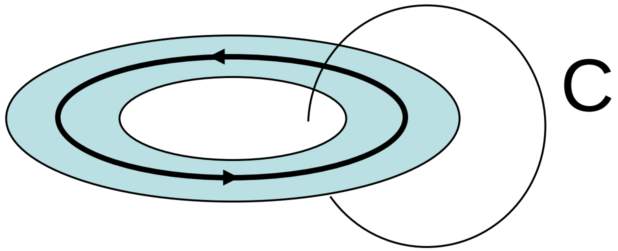
$$\varphi_m(\vec{x}) = \varphi_m(\vec{x}_0) - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

其中 $\vec{x}_0$ 是任选的基准点。由于这积分与路径无关，所以相应的 φ_m 是V内的单值函数。任两点的标势差 $\Delta\varphi_m = -\vec{H} \cdot d\vec{l}$ ，即　$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$　定理得证

现在把它用于静磁问题，对于有传导电流存在的情形，我们可以挖去有电流的部分，剩余的空间V内没有传导电流，即处处满足

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

但是这并不能保证在V内可引入单值的磁标势。如下图所示，若仅挖去电流环附近的环形区。

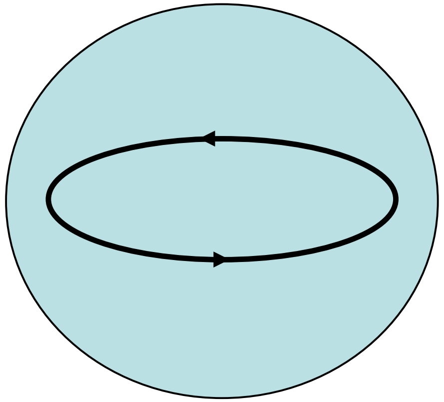


虽然在余下的区域V内处处 $\nabla \times \vec{H} = 0$ ，但是V内有如图曲线C，有

$$\oint_C H \cdot dl = I \neq 0$$

不满足条件

若挖去一个把电流圈完全包在内的球形区，这在余下的区域V内没有积分不为零的环路存在。可以引入单值的磁标势。



这两种挖去电流的差别在于前一种V是复连通区域，后一种V是单连通区域。

因此，定义磁标势要求

（1）所考虑的空间区域没有传导电流

（2）空间应为单连通区域

多选题 1分

设置

定义磁标势要求研究区域满足：

A 所考虑的空间区域没有传导电流

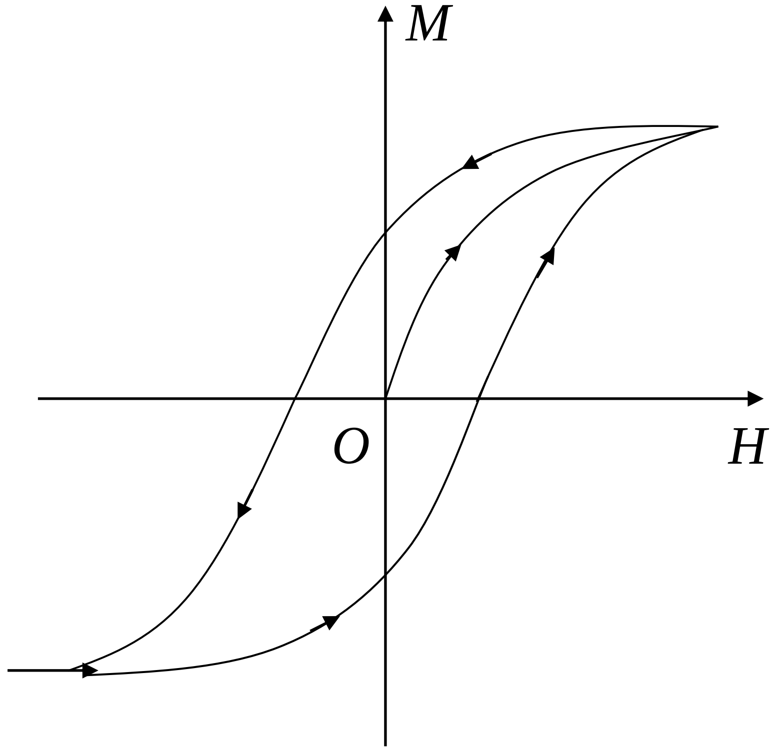
B 所考虑的空间区域没有磁化电流

C 空间区域外边界上没有传导电流

D 空间应为单连通区域

提交

磁标势更多的运用于讨论铁磁体产生的磁场。这种情况下全空间没有传导电流，磁标势在全空间有意义。但是铁磁质的磁化强度M对磁场强度H的依赖关系很复杂，M不仅与H有关还和磁化过程有关



我们一般考虑已知磁化强度M的永久磁铁（硬铁磁质）和磁导率很大的软铁磁质

2、磁标势φ_m的方程

在能引入磁标势的区域内，磁场满足：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = 0 \end{cases}$$

在磁介质中，$\vec{B}$和$\vec{H}$ 的关系是（不论是铁磁质还是非铁磁质）：

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

因为$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，代入上式，则得

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

与电介质中极化电荷密度的表达式 $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ 类比，可以假想磁荷密度为

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$$

于是，得到与电介质中的静电场方程类似的形式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{H} = \rho_m / \mu_0 \\ \nabla \times \vec{H} = 0 \end{cases}$$

将 $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$ 代入上式，即得到

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_m = -\rho_m / \mu_0 \\ \rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} \end{cases}$$

从 $\vec{B}$和 $\vec{H}$ 的边值关系可以求得 φ_m 在交界面上的关系：

由 $\hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0$ ，得到

$$\varphi_{m1}\big|_S=\varphi_{m2}\big|_S$$

由 $\hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$ ，及 $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$ 可得

$$\left.\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}\right|_S-\left.\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}\right|_S=\hat{n}\cdot(\vec{M}_2-\vec{M}_1)$$

对于非铁磁质来说， $\vec{B}=\mu\vec{H}$，故得到

$$\mu_2\left.\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}\right|_S=\mu_1\left.\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}\right|_S$$

由此可见，交界面上的关系和静电介质完全类似。因此，引入磁荷和磁标势的好处在于可以借用静电学中的方法。

3、静磁问题的唯一性定理

当所考虑的区域是单连通的，其中没有传导电流分布时，可引入磁标势 $\vec{H}=-\nabla\varphi_m$ ，通过和静电学问题的唯一性定理同样的推导，可得出静磁问题的唯一性定理：

如果可均匀分区的区域V中没有传导电流分布，只要在边界S上给出下列条件之一，则V内磁场唯一地确定：

a)磁标势之值 $\varphi_m\big|_S$.

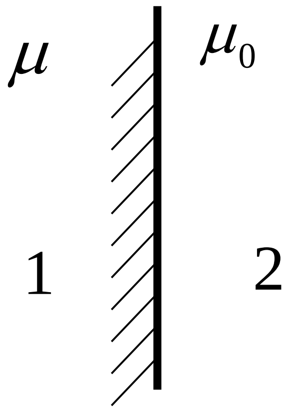
b)磁场强度的法向分量 $H_n\big|_S = -\left.\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial n}\right|_S$.

4、磁标势的应用举例

[例1] 证明$\mu\to\infty$的磁性物质表面为等磁势面。

Solution:

角标1代表磁性物质、角标2为真空



由磁场边界条件：

$$\hat{\vec{n}}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0, \qquad \hat{\vec{n}}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0$$

以及 $$\vec{B}_2=\mu_0\vec{H}_2, \qquad \vec{B}_1=\mu_1\vec{H}_1$$

可得到法向和切向分量为

$$\mu_0 H_{2n}=\mu H_{1n}, \qquad H_{2t}=H_{1t}$$

两式相除，得

$$\frac{H_{2t}}{\mu_0 H_{2n}}=\frac{H_{1t}}{\mu H_{1n}}$$

$$\frac{H_{2t}}{H_{2n}}=\frac{\mu_0 H_{1t}}{\mu H_{1n}}\overset{\mu\to\infty}{\Rightarrow}0$$

因此，在该磁性物质外面，H_2与表面垂直（切向分量与法向分量之比→0)，因而表面为等磁势面。

[例2]求磁化矢量为$\vec{M}_0$的均匀磁化铁球产生的磁场。

Solution:

铁球内外为两均匀区域，在铁球外没有磁荷分布($\rho_{m外}=0$)，在铁球内由于均匀磁化 $\vec{M}_0$，而$\rho_{m内}=-\nabla\cdot\vec{M}_0$ =0，因此磁荷只能分布在铁球表面上，故球内、外磁势都满足Laplace’s equation.

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_{m1}=0 & (r\geq R_0\text{球半径}) \\ \nabla^2\varphi_{m2}=0 & (R_0\geq r)\end{cases}$$

由于轴对称性，极轴沿$\vec{M}_0$方向，上式解的形式为：

$$\varphi_{m1}=\sum_n (a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}) p_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{m2}=\sum_n (c_n r^n + d_n r^{-(n+1)}) p_n(\cos\theta)$$

球外磁标势必随距离r增大而减小，即

$$\varphi_{m1}\big|_{r\to\infty}=0, \qquad \text{即 } a_n=0$$

球内磁标势当r=0时必为有限，即

$$\varphi_{m2}\big|_{r=0}=\text{有限值}, \qquad \text{从而得到 } d_n=0$$

故有：

$$\varphi_{m1}=\sum_n b_n r^{-(n+1)} p_n(\cos\theta) \qquad (r\ge R_0)$$

$$\varphi_{m2}=\sum_n c_n r^n p_n(\cos\theta) \qquad (R_0\ge r)$$

铁球表面边界条件为、

当r=R_0时：

$$B_{1r}\big|_{r=R_0} = B_{2r}\big|_{r=R_0}$$

或者 $$\left.\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n}\right|_{r=R_0} - \left.\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n}\right|_{r=R_0} = \hat{\vec{n}} \cdot \vec{M}_0$$

$$H_{1\theta}\big|_{r=R_0} = H_{2\theta}\big|_{r=R_0}$$

或者 $$\varphi_{m1}\big|_{r=R_0} = \varphi_{m2}\big|_{r=R_0}$$

设球外为真空，则

$$
\begin{aligned}
B_{1r} &= \mu_0 H_{1r} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} \\
&= \mu_0 \sum_n (n+1) b_n r^{-(n+2)} p_n(\cos\theta) \\
B_{2r} &= \mu_0 H_{2r} + \mu_0 M_r \\
&= -\mu_0 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} + \mu_0 M_0 \cos\theta \\
&= -\mu_0 \sum_n n c_n r^{n-1} p_n(\cos\theta) + \mu_0 M_0 \cos\theta
\end{aligned}
$$

由边界条件得：

$$
\sum_n (n+1) b_n R_0^{-(n+2)} P_n(\cos\theta) = -\sum_n n c_n R_0^{n-1} P_n(\cos\theta) + M_0 P_1(\cos\theta)
$$

$$
\sum_n b_n R_0^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) = \sum_n c_n R_0^{n} P_n(\cos\theta)
$$

比较$P_n(\cos\theta)$ 的系数：

当n=1时，有

$$\begin{cases} 2b_1R_0^{-3} = -c_1 + M_0 \\ b_1R_0^{-2} = c_1R_0 \end{cases}$$

所以

$$c_1 = \frac{1}{3}M_0\,, \qquad b_1 = \frac{1}{3}M_0R_0^3$$

当$n \neq 1$ 时，有

$$c_n = b_n = 0$$

从而得到

$$\varphi_{m1}=\frac{1}{3}M_0R_0^3r^{-2}\cos\theta=\frac{M_0R_0^3\cos\theta}{3r^2}=\frac{R_0^3\vec{M}_0\cdot\vec{r}}{3r^3}$$

$$\varphi_{m2}=\frac{1}{3}M_0r\cos\theta=\frac{1}{3}\vec{M}_0\cdot\vec{r}$$

铁球内、外的磁场强度为

$$\vec{H}_1=-\nabla\varphi_{m1}=-(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta)\frac{R_0^3M_0\cos\theta}{3r^3}$$

$$=\frac{2M_0R_0^3\cos\theta}{3r^3}\vec{e}_r+\frac{M_0R_0^3\sin\theta}{3r^3}\vec{e}_\theta$$

$$=\frac{2m\cos\theta}{4\pi r^3}\vec{e}_r+\frac{m\sin\theta}{4\pi r^3}\vec{e}_\theta$$

其中：$m = MV = M_0 \frac{4}{3}\pi R_0^3$ 。由此可见铁球外的磁场相当于一个磁偶极子所激发的场。

$$\vec{H}_2 = -\nabla\varphi_{m2} = -\frac{1}{3}M_0(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$$

$$= -\frac{1}{3}M_0\vec{k}$$

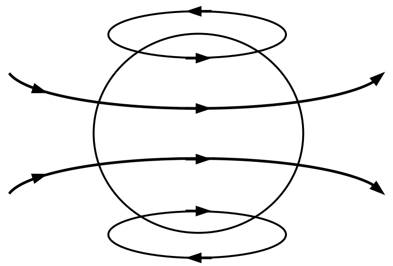
把 $\vec{M}_0$ 取在 $\vec{k}$ 方向上，即有

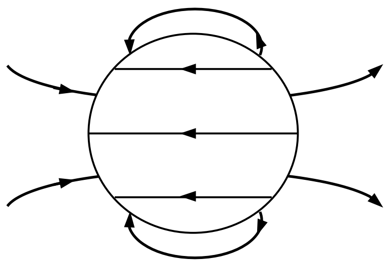
$$\vec{H}_2 = -\frac{1}{3}\vec{M}_0$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0(\vec{H}_2 + \vec{M}_2) = \mu_0(\vec{H}_2 + \vec{M}_0) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0$$

进一步讨论可见：

$\vec{B}$ 线总是闭合的，$\vec{H}$ 线且不然，$\vec{H}$ 线是从右半球面上的正磁荷发出，终止于左半球面的负磁荷上。在铁球内，$\vec{B}$ 与 $\vec{H}$ 反向。说明磁铁内部的 $\vec{B}$ 与 $\vec{H}$ 是有很大差异的。





$\vec{B}$ 线是闭合的　　$\vec{H}$ 线由正磁荷发出到负磁荷止

多选题 1分

设置

均匀带电球面绕直径转动，哪些空间区域可以定义磁标势

A 球内空间和球外空间分别定义磁标势

B 球内空间和球外空间可以统一定义磁标势

C 球面上磁标势连续

D 球面上磁标势不连续

提交

磁多极矩

本节研究空间局部范围内的电流分布所激发的磁场在远处的展开式。与电多极矩（electric multipole moment）对应。引入磁多极矩概念，并讨论这种电流分布在外磁场中的能量问题。

1、矢势 $\vec{A}$ 的多极展开

给定电流分布在空间中激发的磁场矢势为

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r}\,d\tau'$$

如果电流分布集中在一个小区域V中，而场点$\vec{x}$ 又距离该区域比较远，这时可仿照静电情况的电多极矩展开的方法，把矢势$\vec{A}(\vec{x})$ 作多极展开，即把$\dfrac{1}{r}$ 在区域内的某一点展开成$\vec{x}'$ 的幂级数。若展开点取在坐标的原点，则

$$
\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r}\, d\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{x}')\left[\frac{1}{R} - \vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R} + \frac{1}{2!}\vec{x}'\vec{x}':\nabla\nabla\frac{1}{R} + \cdots\right] d\tau' \\
&= \vec{A}^{(0)}(\vec{x}) + \vec{A}^{(1)}(\vec{x}) + \vec{A}^{(2)}(\vec{x}) + \cdots
\end{aligned}
$$

展开式的第一项：

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{x}')\frac{1}{R}d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{x}')\frac{1}{R}ds'dl'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi R}\oint_L Id\vec{l}\,' = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\oint_L d\vec{l}'$$

$$= 0$$

即 $\vec{A}^{(0)}(\vec{x}') = 0$

表示没有与自由电荷对应的自由磁荷存在。

展开式的第二项：

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}d\tau'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{x}')x_i'\nabla_i\frac{1}{R}d\tau'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla_i\frac{1}{R}\int_V \vec{j}(\vec{x}')x_i'd\tau'$$

因为

$$\vec{j}(\vec{x}')x_i' = \frac{1}{2}\left[\vec{j}(\vec{x}')x_i' + j_i(\vec{x}')\vec{x}'\right] + \frac{1}{2}\left[\vec{j}(\vec{x}')x_i' - j_i(\vec{x}')\vec{x}'\right]$$

$$\nabla'\cdot\left[\vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'x_i'\right] = \left[\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{x}')\right]\vec{x}'x_i' + \vec{j}(\vec{x}')\cdot\left[\nabla'\vec{x}'\right]x_i' + (\vec{j}(\vec{x}')\cdot\nabla'x_i')\vec{x}'$$

$$= \vec{j}(\vec{x}')x_i' + j_i(\vec{x}')\vec{x}'$$

这里用到了稳恒电流条件 $\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{x}') = 0$

所以 $\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V \vec{j}(\vec{x}') x_i' d\tau'$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V \frac{1}{2} \left[\vec{j}(\vec{x}') x_i' + j_i(\vec{x}') \vec{x}' \right] d\tau'$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V \frac{1}{2} \left[\vec{j}(\vec{x}') x_i' - j_i(\vec{x}') \vec{x}' \right] d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V \nabla' \cdot \left[\vec{j}(\vec{x}') \vec{x}' x_i' \right] d\tau'$$

$$- \frac{\mu_0}{8\pi} \nabla_i \frac{1}{R} \int_V \left[\vec{j}(\vec{x}') x_i' - j_i(\vec{x}') \vec{x}' \right] d\tau'$$

$$
= -\frac{\mu_0}{8\pi}\nabla_i \frac{1}{R}\oiint_S \left[\vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'x_i'\right] d\vec{s}' \longrightarrow 0
$$

$$
-\frac{\mu_0}{8\pi}\nabla_i \frac{1}{R}\int_V \left[\vec{j}(\vec{x}')x_i' - j_i(\vec{x}')\vec{x}'\right] d\tau'
$$

$$
= -\frac{\mu_0}{8\pi}\nabla_i \frac{1}{R}\int_V \left[\vec{j}(\vec{x}')x_i' - j_i(\vec{x}')\vec{x}'\right] d\tau'
$$

$$
= -\frac{\mu_0}{8\pi}\int_V \left[\vec{j}(\vec{x}')x_i'\nabla_i \frac{1}{R} - \vec{x}'j_i(\vec{x}')\nabla_i \frac{1}{R}\right] d\tau'
$$

$$
= -\frac{\mu_0}{8\pi}\int_V \left[\vec{j}(\vec{x}')\vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} - \vec{x}'\vec{j}\,(\vec{x}') \cdot \nabla \frac{1}{R}\right] d\tau'
$$

其中 $$\left[\vec{j}(\vec{x}')\vec{x}' - \vec{x}'\vec{j}(\vec{x}')\right]\cdot\vec{R} = \left[\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')\right]\times\vec{R}$$

故得到

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\left[\frac{1}{2}\int_V \vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')d\tau'\right]\times\nabla\frac{1}{R}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$$

式中：

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V \vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')d\tau'$$

称此为磁矩。

$\vec{A}^{(1)}(\vec{x})$ 表示把整个电流系的磁矩集中在原点时，一个磁矩对场点所激发的矢势。作为一级近似结果。

展开式的第三项：

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{x}')\frac{1}{2!}\vec{x}'\vec{x}':\nabla\nabla\frac{1}{R}d\tau'$$

将会是更高级的磁矩激发的矢量势。因为比较复杂，一般不去讨论。

综上所述：小区域电流分布所激发的磁场，其矢势可看作一系列在原点的磁多极子对场点激发的矢势的迭加。

2、磁偶极矩的场和磁标势

根据$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ ，即有

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\left[\vec{A}^{(0)}+\vec{A}^{(1)}+\vec{A}^{(2)}+\cdots\right]$$

$$=\vec{B}^{(0)}+\vec{B}^{(1)}+\cdots$$

由此可见

$$\vec{B}^{(0)}=\nabla\times\vec{A}^{(0)}=0$$

$$\vec{B}^{(1)}=\nabla\times\vec{A}^{(1)}=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times(\vec{m}\times\frac{\vec{R}}{R^3})$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[(\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3})\vec{m}-(\vec{m}\cdot\nabla)\frac{\vec{R}}{R^3}\right]$$

因为讨论的是区域V外的场，在$R \neq 0$ 处，有

$$\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla \cdot \nabla \frac{1}{R} = -\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$$

故得到

$$\vec{B}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m} \cdot \nabla)\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla(\vec{m} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3}) \qquad (\vec{m}\text{为常矢})$$

由此可见在电流分布以外的空间中

$$\vec{H}^{(1)} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^{(1)} = -\nabla \varphi_m^{(1)}$$

故得

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\vec{m}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$= \frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{4\pi R^3}$$

3、小区域内电流分布在外磁场中的能量

设外场 $\vec{B}_e$ 的矢势为 $\vec{A}_e$，电流 $\vec{j}(\vec{x}')$分布在外磁场中的能量为：

$$W_i = \int_V \vec{j}(\vec{x}')\cdot\vec{A}_e(\vec{x}')d\tau'$$

对于环形小电流，则有

$$W_i = \int_v \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{A}_e(\vec{x}') ds' dl'$$

$$= I \oint_L \vec{A}_e \cdot d\vec{l}' = I \iint_S (\nabla \times \vec{A}_e) \cdot d\vec{s}'$$

$$= I \iint_S \vec{B}_e \cdot d\vec{s}'$$

当电流环线度很小，$\vec{B}_e$ 变化不大时，取原点在线圈所在区域适当位置上，把 $\vec{B}_e$ 在原点附近展开：

$$\vec{B}_e(\vec{x}') = \vec{B}_e(0) + \vec{x}' \cdot \nabla \vec{B}_e(0) + \cdots$$

所以，得到

$$
\begin{aligned}
W_i &= i\iint_S \left[\vec{B}_e(0) + \vec{x}' \cdot \nabla' \vec{B}_e(0) + \cdots\right] \cdot d\vec{s}' \\
&= W_i^{(1)} + W_i^{(2)} + \cdots
\end{aligned}
$$

可见

$$
\begin{aligned}
W_i^{(1)} &= I\iint_S \vec{B}_e(0) \cdot d\vec{s}' \\
&= I\vec{B}_e(0) \cdot \iint_S d\vec{s}' \\
&= I\vec{B}_e(0) \cdot \vec{S} \\
&= \vec{m} \cdot \vec{B}_e(0)
\end{aligned}
$$

4、磁矩在外磁场中受力和力矩

体积V内的电流受外磁场的作用力为

$$\vec{F} = \int_V \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}_e(\vec{x}') d\tau'$$

而

$$\vec{B}_e(\vec{x}') = \vec{B}_e(0) + \vec{x}' \cdot \nabla' \vec{B}_e(0) + \cdots$$

从而得到

$$\vec{F} = \int_v \vec{j}(\vec{x}') \times \left[\vec{B}_e(0) + \vec{x}' \cdot \nabla' \vec{B}_e(0) + \cdots\right] d\tau'$$

第一项：

$$\vec{F}^{(1)}=\int_V \vec{j}(\vec{x}')\times\vec{B}_e(0)d\tau'$$

$$=-\vec{B}_e(0)\times\int_V \vec{j}(\vec{x}')d\tau'$$

$$=-\vec{b}_e(0)\times I\oint_L d\vec{l}'$$

$$=-\vec{B}_e(0)\times 0$$

$$=0$$

第二项：

$$\vec{F}^{(2)}=\int_V \vec{j}(\vec{x}')\times\left[\vec{x}'\cdot\nabla'\vec{B}_e(0)\right]d\tau'$$

$$=\int_V \vec{j}(\vec{x}')(\vec{x}'\cdot\nabla')\times\vec{B}_e(0)d\tau'$$

$$=(\int_V \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'d\tau'\cdot\nabla')\times\vec{B}_e(0)$$

$$=(\int_V \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'d\tau'\cdot\nabla')\times\vec{B}_e(0)$$

$$=(\frac{1}{2}\int_V (\vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'-\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}'))d\tau'\cdot\nabla')\times\vec{B}_e(0)$$

$$=(\frac{1}{2}\int_V (\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}'))d\tau'\times\nabla')\times\vec{B}_e(0)$$

$$=(\vec{m}\times\nabla')\times\vec{B}_e(0)$$

$$=\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})-\vec{m}(\nabla\cdot\vec{B})$$

$$=\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})$$

这是保守力，因此磁偶极子在外场中平动的势能

$$U=-\vec{m}\cdot\vec{B}$$

同理，考虑一个小区域内的电流在外磁场中受到的力矩为：

$$\vec{L} = \int_V \vec{x}' \times \left[\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}_e(\vec{x}')\right] d\tau'$$

$$= \int_V \vec{x}' \times \left\{\vec{j}(\vec{x}') \times \left[\vec{B}_e(0) + \vec{x}' \cdot \nabla' \vec{B}_e(0) + \cdots\right]\right\} d\tau'$$

展开式的第一项：

$$\vec{L}^{(1)} = \int_V \vec{x}' \times \left[\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}_e(0)\right] d\tau'$$

$$= \int_V \left\{\vec{j}(\vec{x}')\left[\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)\right] - \left[\vec{x}' \cdot \vec{j}(\vec{x}')\right]\vec{B}_e(0)\right\} d\tau'$$

$$= \int_V \vec{j}(\vec{x}')\left[\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)\right] d\tau' - \frac{1}{2}\vec{B}_e(0)\int_V \nabla' \cdot \left[x'^2 \vec{j}(\vec{x}')\right] d\tau'$$

$$= \int_v \vec{j}(\vec{x}')\left[\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)\right] d\tau' - \frac{1}{2}\vec{B}_e(0) \oiint_S x'^2 \vec{j}(\vec{x}') \cdot d\vec{s}'$$

$$= \int_v \vec{j}(\vec{x}')\left[\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)\right] d\tau' \qquad 0$$

$$= \int_v \vec{j}(\vec{x}') x_i' B_{e_i}(0) d\tau'$$

$$= B_{e_i}(0) \int_v \vec{j}(\vec{x}') x_i' d\tau'$$

$$= B_{e_i}(0) \int_v \frac{1}{2}\left[\vec{j}(\vec{x}') x_i' + j_i(\vec{x}')\vec{x}'\right] d\tau'$$

$$+ B_{e_i}(0) \int_v \frac{1}{2}\left[\vec{j}(\vec{x}') x_i' - j_i(\vec{x}')\vec{x}'\right] d\tau'$$

$$= \frac{1}{2} B_{e_i}(0) \int_v \nabla' \cdot \left[\vec{j}(\vec{x}') x_i' \vec{x}'\right] d\tau'$$

$$+ \frac{1}{2} \int_V \left\{\vec{j}(\vec{x}')\left[\vec{x}' \cdot \vec{B}_e(0)\right] - \vec{x}'\left[\vec{B}_e(0) \cdot \vec{j}(\vec{x}')\right]\right\} d\tau'$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \left[\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')\right] d\tau' \times \vec{B}_e(0)$$

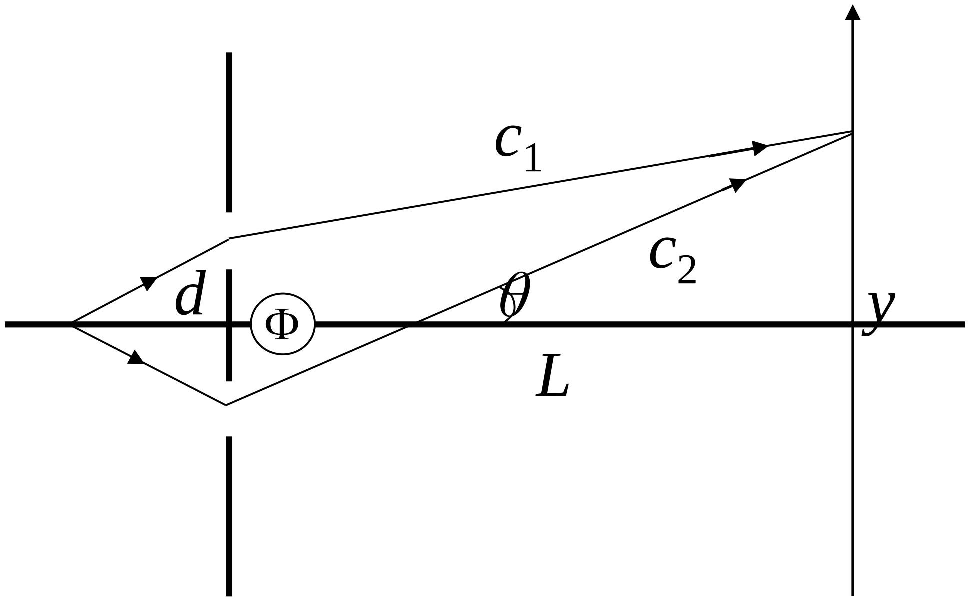
$$= \vec{m} \times \vec{B}_e(0)$$

故得到

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}_e(0)$$

在经典电动力学中，场的基本物理量是电场强度 $\vec{E}$ 和磁感应强度 $\vec{B}$，势 φ和$\vec{A}$是为了数学上的方便而引入的辅助量， φ和 $\vec{A}$不是唯一确定的。为对应一个磁场，可以有无穷多的矢势 $\vec{A}$，所以在经典意义上说，φ 和$\vec{A}$ 不是直接观察意义的物理量。但是，在量子力学中，势φ 和$\vec{A}$ 具有可观测的物理效应。1959年，阿哈罗诺夫(Aharonov)和玻姆(Bohm)提出这一新的效应（以下简称*A-B*效应），并被随后的实验所证明实。

下图为电学双缝衍射实验装置。



一束以电子枪发射出来的电子经双缝分为两束，分别经过路径c_1,c_2到达荧光屏上，两束电子有一定的相位差，在屏上可得到 干涉花纹。若在双缝后面放置一个细长螺线管Φ ，管上加一定电压，以阻止电子进入螺线管，电子只能在管外区域行进。

实验分两步进行：首先在螺线管不通电的情况下进行，这时整个空间 $\vec{B}=0$ ，$\vec{A}=0$ 。屏幕上有一定的干涉条纹。然后给螺线管通电，管外区域 $\vec{B}=0$（可视为无限长螺线管），但管外区域 $\vec{A}\neq 0$，这是因为在包围螺线管的任一闭合路径积分有 $\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}\,'=\Phi$，其中Φ 为管内磁通。实验发现，屏幕上的干涉条纹发生移动。因为电子不会进入管内区域，因而两种情况下的差别仅在于管外区域的矢势 $\vec{A}$ 不同，所以可以认为管外的矢势 $\vec{A}$ 对电子运动产生了作用。

干涉条纹的移动是由于两束电子产生了附加的相位差, 这种现象称为阿哈罗诺夫——玻姆效应(即A-B

效应），这一实验结果说明，磁场的物理效应不能完全用 $\vec{B}$ 来描述，而 $\vec{A}$ 不再是一个没有直接观测意义的物理量，它可以影响电子波束的相位，从而使干涉条纹发生移动。

A-B效应是量子力学现象。现在从量子力学的基本原理出发，对以上实验结果作一简要分析。

当螺线管不通电时，$\vec{A}=0$ 。自由电子波函数由平面波描述，即

$$\psi_0(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}$$

单选题 1分

设置

1959年，Aharonov和Bohm提出一新的效应（简称A-B效应），此效应说明

A 电场强度 $\vec{E}$ 和磁感应强度 $\vec{B}$ 可以完全描述电磁场

B 电磁相互作用不一定是局域的

C 管内的 $\vec{B}$ 直接作用到管外的电子上，从而引起干涉条纹移动

D $\vec{A}$ 具有可观测的物理效应，它可以影响电子波束的相位，从而使干涉条纹发生移动

提交

其中 $\vec{p} = m\vec{v}$ 是电子的动量，$\hbar = h/2\pi$ ，h 为普朗克常数。

两束电子波函数的相位差为

$$\begin{aligned}\nabla\phi_0 &= \frac{1}{\hbar}\int_{c_2}\vec{p}_2\cdot d\vec{l} - \frac{1}{\hbar}\int_{c_1}\vec{p}_1\cdot d\vec{l} \\ &= \frac{1}{\hbar}p\Delta l \\ &= \frac{1}{\hbar}pd\sin\theta = \frac{1}{\hbar}pd\,y/L\end{aligned}$$

其中*d*为双缝宽度（即双缝的间距），*L*为双缝到屏幕的距离，因为*d*>>*L*, *y*<<*L*。故近似有 $\Delta l \approx d\sin\theta$

$$\sin\theta \approx \mathrm{tg}\,\theta = {}^{y}\!/_{L}$$

当螺线管通电时，管外$\vec{A} \neq 0$ ，电子波函数中的正则动量为

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A} = m\vec{v} - e\vec{A}$$

两电子束的相位差为

$$\nabla\phi = \frac{1}{\hbar}\int_{c_2} \vec{p}_2 \cdot d\vec{l} - \frac{1}{\hbar}\int_{c_1} \vec{p}_1 \cdot d\vec{l}$$

$$= \nabla\phi_0 - \frac{e}{\hbar}\oint_{c} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$= \nabla\phi_0 - \frac{e}{\hbar}\Phi$$

式中c为由c_2和-c_1组成的闭合回路，Φ 是通过此回路内的磁通量。由此可见，螺线管通前后电子束的相位差不同。

但由于$\vec{A}$ 引起的附加相位差 $\frac{e}{\hbar}\Phi$ 对屏幕上任一点都是相同的。故干涉条纹的图样不变，只是沿y方向平移了y_0，而y_0可由下式得到：

$$\Delta\phi_0 - \frac{e}{\hbar}\Phi = 0$$

将$\Delta\phi_0 = \frac{1}{\hbar} pdyL$ 代入，即得

$$y_0 = \frac{e\Phi L}{mvd}$$

实验结果与理论预言一致。

A-B效应表明，在量子力学意义上，矢势$\vec{A}$ 是具有可观测的物理效应的，因此在量子意义上磁场仅用 $\vec{B}$来描述是不够的，但是由于规范变换所引起的$\vec{A}$ 的任意性，用 $\vec{A}$ 来描述磁场显然又是过多的。而用 $\vec{B}$及 $\vec{A}$ 的线积分才是恰当的。

单选题 1分

设置

已知矢势 $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$,则下列说法错误的是

A $\vec{A}$ 与 $\vec{A}'$ 对应于同一个磁场 $\vec{B}$

B $\vec{A}$ 和 $\vec{A}'$ 是不可观测量，没有对应的物理效应

C 只有 $\vec{A}$ 的环量才有物理意义，而每点上的 $\vec{A}$ 值没有直接物理意义

D 由磁场 $\vec{B}$ 能唯一地确定矢势 $\vec{A}$

提交