6.9 电动力学规律的协变性

相对论的名称来自相对性原理，若相对性原理成立，那么物理学的基本规律应表成四维张量方程的形式。我们将考察物理规律是否符合这要求。宏观物理规律有两方面：一是力学规律，二是电磁规律。

下面我们先讨论电磁规律遵循的电动力学规律，后讨论力学规律。实际上相对性原理对微观物理规律更有作用，但是这不是本课程的内容。

我们已经知道，在引入电磁势 φ 和 $\vec{A}$ 后，电动力学基本规律是

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}$$

这里的电磁势满足洛伦兹规律条件

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{A}=0$$

ρ 和 $\vec{j}$ 作为电磁场的源，它满足电荷守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

现在我们看一看，它们是否满足相对性原理

先形式上引入四维的电流 j_μ 和电磁势 A_μ ，

$$j_\mu = (\vec{j}, \quad \mathrm{i}c\rho)$$

$$A_\mu = (\vec{A}, \quad \mathrm{i}\varphi/\mathrm{c})$$

这样，上面的方程可重写成

$$\Box A_\mu = -\mu_0 j_\mu,$$

$$\partial_\mu A_\mu = 0,$$

$$\partial_\mu j_\mu = 0.$$

从这形式看出，若电动力学规律满足相对性原理的要求，那么 A_μ 和 j_μ 都必定是洛伦兹变换下的4-矢量。

反之，若用实验能证实 A_μ和 j_μ有 4-矢量的变换性质，那么电磁规律就服从相对性原理。

因此电磁规律是否符合相对性原理是一个实践问题，只有实验能给出回答。如今人们接受肯定的回答，这是由于它在各种具体问题的大量理论推论中充分的得到了实践的证实。

当肯定了电磁规律的协变性，我们就能从一个惯性系中的A_μ或 j_μ ，按洛伦兹变换推出另一个惯性系中的相应量。

下面我们讨论一个例子。设S系中有沿着x方向匀速运动的点电荷，我们需要知道它产生的电磁势。

显然这问题从随电荷运动的S’系来处理要容易的多。在S’ 系中，让点电荷处在坐标原点。它作为静止电荷，所产生的是库仑标势，即

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r'}$$

$$\vec{A}' = 0$$

然后我们只须用洛伦兹反变换，即可从S’ 系中的结果来推出S 系中的结果

$$\varphi = \gamma(\varphi' + vA_1') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma e}{r'},$$

$$A_1 = \gamma(A_1' + \frac{v}{c^2}\varphi') = \frac{v}{c^2}\varphi,$$

$$A_2 = A_2' = 0,$$

$$A_3 = A_3' = 0.$$

注意到其中 r' 是S’ 系中场点到源点的三维距离。我们也须把它转换到S 系中。考虑到电荷运动方向上有距离的洛伦兹收缩，而垂直方向上则没有，我们把 r' 分解为平行和垂直两部分。S和S’ 系中相应量的关系为

$$r_\perp' = r_\perp$$

$$r_{//}' = \gamma r_{//}$$

这样，我们就得到了S 系中的结果。它是

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{\sqrt{r_\perp^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) + r_{//}^2}},$$

$$\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi.$$

如果利用推迟势公式也可以算出运动点电荷所产生的电磁势，但处理要复杂的多。

　这个例子告诉我们。如果有一个特殊的惯性系使问题显得简单，那么我们可以先在这个惯性系中求得结果，然后用洛伦兹变换把这个结果转换到我们实际感兴趣的惯性系中去。

6.10电磁场强的变换性质

肯定了电动力学规律的协变性，那么电磁场一定也是张量场。我们已经知道，电磁场强与电磁势的关系是

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi.$$

为此引入一个反对称的二阶张量 $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

可以由定义看出，它的六个独立分量分别与 E 和B 的六个分量相联系，即

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}E_z \\ \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}$$

$F_{\mu\nu}$被称为电磁场张量。

利用电磁场张量，三维形式的麦克斯韦方程可写成四维张量方程的形式

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\mu,$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

其中前一个方程中$\mu = 4$ 或 $\mu = 1,2,3$ 分别相对于

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0,$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}.$$

后一个方程中当 λ, μ, ν 有两个相等时，所得的是恒等式。三者全不同时，它相当于

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

上面我们看到麦克斯韦方程可以写成四维张量的形式，因此它是符合相对性原理要求的。

按张量的定义，电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 有变换性质

$$F'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

若用矩阵表示这关系，这写成

$$\overleftrightarrow{F}' = \overleftrightarrow{L}\overleftrightarrow{F}\overleftrightarrow{L}^{-1}$$

它给出了两个不同惯性系中场场量间的关系。由上式易于算出分量间的关系，用E 和 B 表示为

$$E'_x = E_x, \qquad B'_x = B_x,$$

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \qquad B'_y = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z),$$

$$E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \qquad B'_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y).$$

也可以用三维矢量形式写成

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec{v}}{c}\left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{E}\right),$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec{v}}{c}\left(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{B}\right)$$

6.11电磁场的四维动量能量张量

电荷和电流产生电磁场的规律是满足相对性原理的。那么另一方面，电磁场对电荷和电流的作用规律也应当满足相对性原理。

我们已经知道，若介质某体元中的电荷密度为 ρ ，电流密度为 $\vec{j}$ ，则载电荷所受的力密度由洛伦兹公式决定，

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

这公式是三维的，它不能告诉我们这力在惯性系转换下的性质。

为此引入四维矢量 f_μ

$$f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu$$

这关系式在惯性系转换下是协变的。其中前三个分量就是洛伦兹的电磁力公式。因此 f_μ被称为4-电磁力密度.

我们来看第四分量代表什么。把电磁场张量和4-电流的分量代入，得到

$$f_4 = \frac{i}{c}\vec{E} \cdot j = \frac{i}{c}W$$

这样看出，f_4 是反映的电磁力对载流体的功率密度。于是电磁力4-矢量可表为

$$f_\mu = \left(\vec{f}, \quad \frac{\mathrm{i}}{c} W \right)$$

我们在以前曾讨论过电磁作用下能量和动量的守恒性，写成

$$W = -\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{S}$$

$$\vec{f} = -\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$$

从方程的形状看，其左边构成一个四维矢量，因此这两式能合并成一个四维张量方程。写为

$$f_\nu = -\partial_\mu T_{\mu\nu}$$

其中 称为4-能量动量张量

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{T} & \frac{i}{c}\vec{S} \\ ic\vec{g} & -w \end{pmatrix}$$

到这里，我们看到所有的电动力学基本规律都能表成四维张量方程的形式。这说明，若采用洛伦兹变换代替伽利略变换，那么电磁规律是与相对性原理相洽的。

6.12 相对论性的力学

如果用洛伦兹变换代替伽利略变换，那么牛顿力学将不能在惯性系转换下保持不变。这就成了新的问题。自然的猜想是，牛顿第二定律也是力学规律的低速近似。若这样想，首先须从理论上找出在洛伦兹变换下协变的力学规律，然后给实验检验。

我们从牛顿力学方程出发，来推广得到洛伦兹变换下协变的力学方程。按牛顿第二定律，有

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_0\vec{v})$$

而四维速度应该定义为

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma(\vec{v}, ic)$$

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma(\vec{v}, ic)$$

在低速近似下，$d\tau$与dt的差别可以忽略，它们的前三个分量将就是普通意义下的速度。因此我们猜想，为得到协变的力学规律，牛顿第二定律中的 $\vec{v}$ 应由U_μ代替，t 应由 τ 代替。问题是如何定义四维的力。

各种不同的力在惯性系变换下的行为应当是一样的，因此我们可参考电磁力来分析。上节我们看到，电磁力密度

$$f_\mu = \left(\vec{f}, \quad \frac{\mathrm{i}}{c} W \right)$$

是4-矢量。力密度的体积分是力，但是由于洛伦兹收缩效应，体积dV不是标量。类似用固有时间 $d\tau$代替 dt ，这里引入固有体积dV_0来代替dV 固有体积指体元相对静止的参考系中的体积。考虑到运动方向上的收缩，所以

$$dV_0 = \gamma dx dy dz = \gamma dV$$

这是洛伦兹变换下的标量。于是四维力F_μ可定义为

$$F_\mu = \iiint \gamma f_\mu dV$$

$$F_\mu = \iiint \gamma f_\mu dV$$

它一定是4-矢量。当受力体为质点，γ 由质点的速度决定，而与积分无关，于是四维力 F_μ与三维力 $\vec{F}$ 的关系是

$$F_\mu = \gamma(\vec{F}, \quad \frac{\mathrm{i}}{c}P)$$

其中 P 是功率，这样由牛顿第二定律猜出，满足相对论要求的力学规律是

$$F_\mu = \frac{d}{d\tau}(m_0 U_\mu)$$

m_0 是与质点的惯性有关的4-标量。

至此，我们在理论上推出了力学规律。它符合两个要求

（1）满足相对性原理。

（2）在运动速度很小时，方程的前三个分量回到牛顿第二定律。

这两点是很必要的，但这并不能保证推测的规律的正确性。我们要找出它在高速情形下与牛顿第二定律的差别，并用实验来检验。

$$F_\mu = \frac{d}{d\tau}(m_0 U_\mu)$$

我们把方程写成三维形式，

$$\gamma \vec{F} = \frac{d}{d\tau}(\gamma m_0 \vec{v})$$

$$\gamma P = \frac{d}{d\tau}(\gamma m_0 c^2)$$

注意这不是回到低速情形。而是为了在三维中作实验来检验。

先分析3-矢量方程。利用 $\gamma = dt / d\tau$ 可写为

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\lambda m_0 \vec{v})$$

它和牛顿第二定律的差别仅在一点，用

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

代替原来的 m_0，作为描写质点惯性的物理量。在相对论中把m_0叫静质量，而 叫m动质量。

动质量才是惯性质量。它不完全是质点的固有性质，而也与质点的运动速度有关。m_0 是质点的内禀属性，但它并不代表惯性的大小。仅在低速运动时，静质量才的惯性的量度。显然，这差别仅在质点接近光速运动时才能用实验来检验。

若不断的加速一个亚光速的质点，它的惯性质量将不断的增大。当逼近光速时，惯性质量将变成无穷大，即外力难以再增大它的速度。这样，把亚光速的物体加速成超光速物体是不可能的。

以前说超光速运动的存在会导致破坏因果律，而现在相对论力学说明：把质点的速度提高到超光速是不可能的。以前指出，从运动学上不可能，现在指出，从动力学也不可能。

我们再来看，三维标量方程

$$P=\frac{d}{dt}(\gamma m_0c^2)=\frac{d}{dt}(mc^2)$$

外力$\vec{F}$对质点做功，导致质点能量的增加。因此等式右边应代表能量的变化率。质点的能量E 应定义为

$$E=mc^2=\gamma m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

这是什么能量。按牛顿力学，与质点的速度有关的能量应是动能。让我们注意，能量的定义可以加上一个常数，而常数没有物理意义。也就是说能量零点有任意性。为了自然，在速度为零时，定义动能为零。因此相对论中把动能定义为

$$K = mc^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

在低速近似下， $v << c$ 回到 $K = \frac{1}{2} m_0 v^2$

这样有总能量

$$E = K + m_0 c^2$$

$m_0 c^2$ 被称为质点的静能。质点的总能量是动能和静能之和。

静能有没有物理意义呢？

6.13质能关系

能量的变化部分才有物理意义，m_0c^2 是否确实是能量，首先在于质点的静止质量能否发生变化。若它不可能变化，那么m_0c^2只是一个没有物理意义的叠加常数。若它在某些情况下会发生变化，那么就需要用实验来检验，它的减少（或增加）是否会导致其他能量的增加（或减少），即是否服从能量守恒定律。只有在这两方面都有肯定的回答，才能把m_0c^2叫做质点的静能。

在爱因斯坦建立相对论时，还没有静质量能变化的任何实验证据。但是他意思到了这问题的重要性。在他的关于相对论的第二篇论文“物体的惯性与它的能量有关吗？”中他用一个假想实验论证了，当物体通过电磁辐射而放出能量，那么它的惯性将减小。从而他提出了著名的质能关系。

爱因斯坦的假想实验中惯性质量的变化太小，实际上难以检验。质能关系的最初的实验证据来自核物理实验。后来在粒子物理实验中，静质量的显著变化成了司空见惯的现象。下面借助原子核的质量亏损来讨论有关的概念和现象。

以最简单的复合核一氘核为例。氘核的组分粒子的静质量为

$$m_p = 1.6726 \times 10^{-27}\,\text{kg},$$

$$m_n = 1.6750 \times 10^{-27}\,\text{kg}$$

氘核自身质量的实测值为

$$m_D = 3.3437 \times 10^{-27}\,\text{kg}$$

这里的质量都是静质量。$m_D < m_p + m_n$ 表明质子和中子结合成氘核时有静质量的亏损。亏损值是

$$\Delta m_D = m_p + m_n - m_D = 0.0039 \times 10^{-27}\,\text{kg}$$

核质量的测量表明，任何原子核都有质量亏损存在，即任何核的质量都小于其组元粒子的质量核。这是质点组的静质量能有变化的直接证据。

若 mc^2 代表静能，则氘核形成时的静能亏损为

$$\Delta m_D c^2 = 3.6 \times 10^{-13}\,\text{J} = 2.2\,\text{MeV}$$

而氘核解离时则静能增加同样的量。需要检验的是把静能考虑在内，能量是否维持守恒？

另一方面的事实是，实验发现质子和中子结合成氘核时发出能量B，而把氘核解离成质子和中子时至少提供能量B。这能量B 被称为结合能或解离能。它的测量值时 2.2Mev，与氘核的静能亏损值一致。把这两方面的事实联系起来，表明静能不仅能有变化，而且它与其他形式的能量在转化中是守恒的。这正是质能关系所需要的证据。

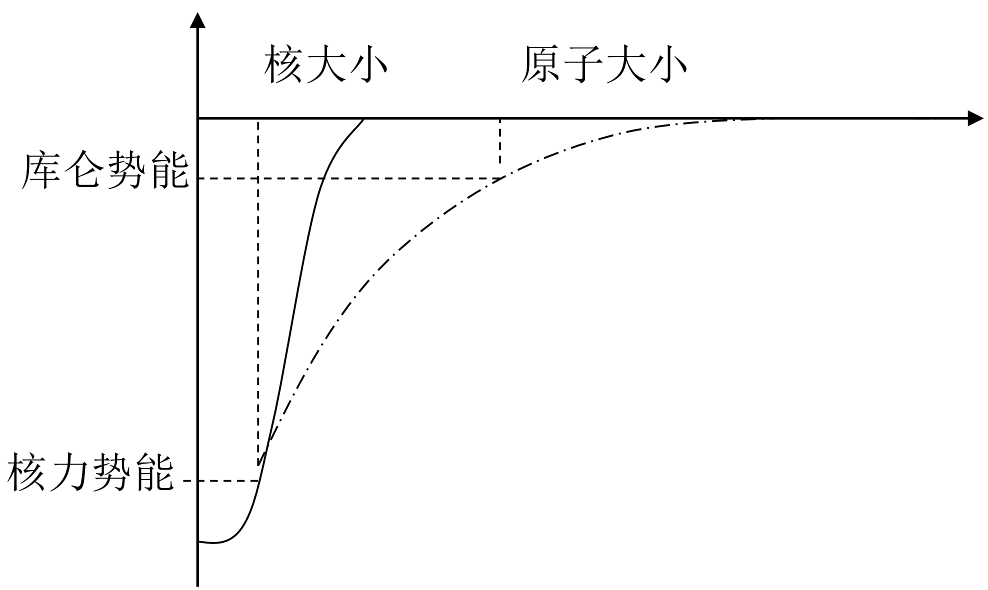
让我们用质能关系来分析任何一种核反应，

$$A + B \rightarrow C + D$$

反应前的静质量 $m_A + m_B$ 与反应后的静质量 $m_C + m_D$ 是不等的。若前者大于后者，它应是一种释放能量的反应。反之，这将是一种吸收能量的反应。质能关系的这些推论也都得到了实验的证实。总之，核物理事实证明了确实是质点能量的一部分，$E = m_0c^2 + K$ 代表了一个自由质点的总能量。

让我们仍以氘核为例，对静能变化的机制作些说明。质子核中子能结合成氘是因为质子和中子间有吸引力，它就是通常讲的核力。这是一种强度很大而力程很短的作用力。核力可用相应的势能V 来描述，在静距离下V<0说明吸引性。当质子和中子在核力作用下构成束缚态，由力学可知，系统的总的机械能必定为负数，即

$$K_p + K_n + V < 0$$



$K_p + K_n + V$ 的反号就是氘的结合能。把合成后的氘看成质点组，它所具有的总能量是

$$E = m_p c^2 + m_n c^2 + K_p + K_n + V$$

$$= m_p c^2 + m_n c^2 - B$$

而把它看成一个质点，它在静止时的能量是

$$E = m_D c^2$$

两者对比可以看清质量亏损和结合能的关系。复合质点的静质量中不仅包含其组分粒子的静质量，还包含它们的机械能的贡献。通常讲的核能，实际上是核子在核内的机械能。核能的释放是核内机械能的减少，相应的表现出系统静质量的减少。

按照质能关系，任何组元粒子构成复合粒子时都有质量亏损。电子和氢核合成氢原子时有13.6MeV的光能放出，相应的就会有质量亏损

$$\Delta m_H = \frac{13.6\mathrm{MeV}}{c^2} = 2.4\times10^{-34}\,\mathrm{kg}$$

这亏损很小，仅是氢原子静质量的 10^{-7} 。在精度要求不高的理论中可以忽略，而在实际测量中通常难以测到。这正是常把质子和电子的质量和当氢原子的质量的原因。

原子的结合能远小于核的结合能，是电磁力远比核力弱的反映。

6.14质点的四维动量及其守恒

对质点引入四维动量

$$p_\mu = m_0 U_\mu = (\vec{p}, \quad iE/c)$$

其中

$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v},$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2.$$

它显然是一个4-矢量。前三个分量是相对论性的三维动量，第四分量代表质点的能量。引入这4-动量，相对论性的动力学方程

$$F_\mu = \frac{d}{d\tau}(m_0 U_\mu)$$

可重写为

$$F_\mu = \frac{dP_\mu}{d\tau}$$

回到三维形式

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$P=\frac{dE}{dt}$$

这样定义的质点4-动量是否具有守恒性？

在牛顿力学中，牛顿第三定律保证了动量守恒。在电磁理论中，考虑了电磁场携带的能动量，整个系统的动量和能量是守恒的。

由一般的物理理论证明，动量和能量的守恒仅是空间和时间均匀性的反映，因此它们是普遍成立的。

相对论性的动量和能量守恒需要在微观粒子过程中来检验。

我们先作一些运动学的准备。

在速度接近光速时，三维速度不是一个好的运动学变量。为此人们常用三维动量p 作为描述运动的基本变量。当这样做，能量E和速度v都当作p的函数。下面导出关系为

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{c}{E}\vec{p} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}$$

不稳定粒子的衰变

二体衰变 $A \rightarrow B + C$

在A的静止系讨论。由动量和能量守恒给出

$$m_A c^2 = \sqrt{m_B^2 c^4 + p_B^2 c^2} + \sqrt{m_C^2 c^4 + p_C^2 c^2},$$

$$0 = p_B - p_C$$

可以解出衰变产物B和C的动量为

$$p_B = p_C = \sqrt{\frac{(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)^2}{4m_A^2} - m_B^2} \cdot c$$

这说明在二体衰变时，不考虑衰变机制的细节，衰变产物的运动状况已被能动量守恒所决定。仅有飞行方向是任意的。

从中可以看出，若粒子A 能衰变成B和C ,则必须有条件

这是能量守恒的直接后果，因此对多体衰变也成立。一般的说，质量大的粒子衰变成质量小的粒子才可能，反之是不可能的。

若轻质量粒子做高速运动，以至能量远超过重粒子的静能，这时，衰变是否可能？答案是否定的。不难证明，这种情况下，能动量守恒是无法兼顾的。其实在随高速运动粒子的惯性系看，很容易判断这是不可能的。衰变可能与否，显然和参考系无关。