

第五章 电磁波的辐射

本章所研究的问题是电磁波的辐射。方法和稳恒场情况一样，当考虑由电荷、电流分布激发电磁场的问题时，引入势的概念来描述电磁场比较方便。本章首先把势的概念推广到一般变化电磁场情况，然后通过势来解辐射问题。

§ 5.1 电磁场的矢势和标势

1、用势 \vec{A} , φ 描述电磁场

为简单起见，只讨论真空中的电磁场。由Maxwell's equations出发

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

大家知道，齐次方程 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，显然 \vec{B} 的散度为零意味着 \vec{B} 是某个矢量的旋度，即

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

\vec{A} 的物理意义可由下式看出：

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

即在任一时刻，矢量 \vec{A} 沿任一闭合回路 L 的线积分等于该时刻通过以 L 为边线的曲面 S 的磁通量。

在非稳恒情况下, $\nabla \times \vec{E} \neq 0$ 。因而不能象在静电场时那样引入电势 φ 来描述电场 \vec{E} ($\vec{E} = -\nabla \varphi$)。

一般情况下, 电场 \vec{E} 一方面受到电荷的激发, 另一方面也受到变化磁场的激发。因此, \vec{E} 是有源和有旋的场, \vec{E} 的等式中必然包含矢量 \vec{A} , 从而由 **Faraday** 电磁感应定律可得:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A})$$

因为时间和空间皆为独立变量, 故 ∇ 与 $\frac{\partial}{\partial t}$

可交换位置。

于是

$$\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

故

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$ 可以看成是一个矢量

矢量 $(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$ 的旋度为零，意味着它可表示为某个标量函

数的梯度，因此

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

这里，仍用 φ 来表示这个标量函数，并且右边采用“负号”

以便 \vec{A} 与时间无关时仍回到静电场情形中去，即电场为

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

至此，我们既可以直接用场量 \vec{E} 、 \vec{B} 来描述电磁场，也可以用矢量 \vec{A} 和标势 φ 一起来描述电磁场，而两种描述方式的等价性的桥梁就是

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

应当注意几点：

a) 当 \vec{A} 与时间无关，即 $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ 时，且 $\vec{E} = -\nabla \varphi$

这时 φ 就直接归结为电势；

b) 绝对不要把 $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 中的标势 φ

与电势 $\varphi(\vec{E} = -\nabla \varphi)$ 混为一谈。因为在非稳恒情况下， \vec{E} 不再是保守力场，不存在势能的概念，这就是说现在的 φ ，在数值上不等于把单位正电荷从空间一点移到无穷远处电场力所做的功。为了区别于静电场的电势，把这里的 φ 称为**标势**

c) 在时变场中，磁场和电场是相互作用着的整体，必须把矢势

\vec{A} 和标势 φ 作为一个整体来描述电磁场。

2、规范变换和规范不变性

虽然 \vec{E} 和 \vec{B} , 以及 \vec{A} 和 φ 是描述电磁场的两种等价的方式, 但由于 \vec{E} 、 \vec{B} 和 \vec{A} 、 φ 之间是微分方程的关系, 所以它们之间的关系不是一一对应的, 这是因为矢势 \vec{A} 可以加上一个任意标量函数的梯度, 结果不影响 \vec{B} , 而这个任意标量函数

的梯度在 $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 中对 \vec{E} 要发生影响, 但

将 $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 中的 φ 与此融合也作相应的变换, 则仍可

使 \vec{E} 保持不变。

现在来研究，唯一地决定场的势可以确定到什么程度。

设 ψ 为任意的标量函数，即 $\psi = \psi(\vec{x}, t)$ ，作下述变换式：

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \\ \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$$

于是我们得到了一组新的 \vec{A}' 、 φ' ，很容易证明：

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A}' &= \nabla \times (\vec{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \psi) \\ &= \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\nabla\varphi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} &= -\nabla(\varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \nabla\psi) \\
&= -\nabla\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi) - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi) \\
&= -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E}
\end{aligned}$$

由此可见, (\vec{A}', φ') 和 (\vec{A}, φ) 描述同一电磁场, 换句话说, 对于同一电磁场 \vec{E} 和 \vec{B} , 其势 (\vec{A}, φ) 的选择并不是唯一的, 通过变换式可以找到无穷组 (\vec{A}, φ) 对应同一个场。从变换式可以看出, 矢势 仅仅确定到一个任意函数的梯度; 标势 仅仅确定到同一任意函数的时间导数。因为势 \vec{A} 和 φ 缺乏唯一性, 我们可以按照一定的附加条件去挑选我们所需要的一组势, 这些附加条件通常是势之间的关系, 称为 **规范条件(Gauge condition)**, 不同的场合可以选择不同的规范条件。

从物理观点来看，物理上可测量的量一定是规范不变的，因此描述涉及电磁现象的物理规律——方程形式都应当在规范变换下保持不变，这就称为**规范不变性(Gauge invariance)**。而变换式称为**规范变换(Gauge transformation)**。

a) 库仑规范(Coulomb gauge)

库仑规范条件为 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ，即规定 \vec{A} 是一个有旋无源场（横场）。这个规范的特点是 \vec{E} 的纵场部分完全由 φ 描述

（即 $-\nabla\varphi$ 具有无旋性），横场部分由 \vec{A} 描述（即 $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 具有无源性）。由

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

可见， $-\nabla\varphi$ 项对应库仑场 $\vec{E}_{\text{库}}$ ， $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 对应着感应场 $\vec{E}_{\text{感}}$ 。

b) 洛仑兹规范(Lorentz gauge)

洛仑兹规范条件为 $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ ，即规定 \vec{A} 是一个

有旋有源场（即 \vec{A} 包含横场和纵场两部分），这个规范的特点是把势的基本方程化为特别简单的对称形式。

3、达朗贝尔(d' Alembert)方程

从Maxwell's equations

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

出发推导矢势 \vec{A} 和标势 φ 所满足的方程，得到：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \nabla \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ &= \left(-\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} \right) = \rho / \varepsilon_0\end{aligned}$$

即

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

再由

$$\boxed{\begin{cases} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \vec{B}$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

$$= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla \varphi) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

即

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\mu_0 \vec{j}$$

应用 $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ ，并将上述两个结论式公式整

理，且得到

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j} \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

这两个方程是互相关联的， \vec{A} 、 φ 混杂在同一个方程中，而且两个方程的形式也不对称。

a) 采用库仑规范 ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$)

上述方程化为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) = -\mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j} \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

b) 采用洛伦兹规范($\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$)

上述方程化为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

这就是所谓达朗贝尔 (d' Alembert) 方程。

举例讨论

试求单色平面电磁波的势

Solution:

单色平面电磁波在没有电荷，电流分布的自由空间中传播，因而势方程（达朗贝尔方程）变为波动方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

其解的形式为：

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \end{cases}$$

由Lorentz规范条件 $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, 即得

$$i\vec{k} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} (-i\omega\varphi) = 0$$

$$\varphi = \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \cdot \vec{A}$$

这表明，只要给定了 \vec{A} ，就可以确定单色平面电磁波，这是因为：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} = i\vec{k} \times (\vec{A}_{\text{横}} + \vec{A}_{\text{纵}})$$

$$= i\vec{k} \times \vec{A}_{\text{横}} + i\vec{k} \times \vec{A}_{\text{纵}}$$

$$= i\vec{k} \times \vec{A}_{\text{横}} \quad \text{0 (对于单色平面波而言)}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i\vec{k} \varphi + i\omega \vec{A} \\
&= i\vec{k} \left(\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \cdot \vec{A} \right) + i\omega \vec{A} \\
&= -i \frac{c^2}{\omega} \left[\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{A}) - k^2 \vec{A} \right] \\
&= -i \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{A}) \\
&= -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{B} \\
&= -c \hat{n} \times \vec{B}
\end{aligned}$$

如果取 $\vec{A} = \vec{A}_{\text{横}}$ ，即只取 \vec{A} 具有横向分量，那么有

从而得到：

$$\vec{k} \cdot \vec{A} = \vec{k} \cdot \vec{A}_{\text{横}} = 0$$

从而得到：

$$\varphi = \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \cdot \vec{A} = 0$$

因此有：

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}_{\text{横}} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega \vec{A} = i\omega \vec{A}_{\text{横}} \end{cases}$$

其中：($\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$)

如果采用**库仑规范条件**，势方程在自由空间中变为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = 0 \end{cases}$$

当全空间没有电荷分布时，库仑场的标势 $\varphi = 0$ ，则只有

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

其解的形式为

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

由库仑规范条件得到

$$\nabla \cdot \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$$

即保证了 \vec{A} 只有横向分量，即 $\vec{A} = \vec{A}_{\text{横}}$ ，从而得到

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}_{\text{横}} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega \vec{A} = i\omega \vec{A}_{\text{横}} \end{cases} \quad (\nabla \cdot \vec{A} = 0)$$

通过例子可看到：

库仑规范的优点是：它的标势 φ 描述库仑作用，可直接由电荷分布 ρ 求出，它的矢势 \vec{A} 只有横向分量，恰好足够描述辐射电磁波的两种独立偏振。

洛仑兹规范的优点是：它的标势 φ 和矢势 \vec{A} 构成的势方程具有对称性。它的矢势 \vec{A} 的纵向部分和标势 φ 的选择还可以有任意性，即存在多余的自由度。尽管如此，它在相对论中显示出协变性。因此，以后都采用洛仑兹规范。

§ 5.2 推迟势

1、达朗贝尔方程的解

不管是矢势 \vec{A} 还是标势 φ ，在Lorentz规范条件下都满足同样的达朗贝尔方程。而达朗贝尔方程式是线性的，它反映了电磁场的叠加性，故交变电磁场中的矢势 \vec{A} 和标势 φ 均满足叠加原理。因此，对于场源分布在有限体积内的势，可先求出场源中某一体积元所激发的势，然后对场源区域积分，即得出总的势。又因矢势 \vec{A} 的方程与标势 φ 的方程在形式上相同，故只需求出 φ 的方程的解即可。

根据标势 φ 所满足的方程：

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

设坐标原点处有一假想变化电荷 $Q(t)$ ，其电荷体密度为 $\rho(\vec{x}, t) = Q(t)\delta(\vec{x})$ ，此时电荷辐射的势的达朗贝尔方程为

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q(t)\delta(\vec{x})$$

除在原点以外的空间 $\rho = 0$ ，因而得到

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

因为点电荷的场分布是球对称的，若以 r 表示源点到场点的距离，则 φ 不依赖于角变量，只依赖于 r 和 t 。也就是说， φ 与 θ 和 φ 无关，仅是 r 和 t 的函数，即

$$\varphi = \varphi(r, t)$$

而且除原点外, φ 满足波动方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (r \neq 0)$$

上式的解是球面波, 考虑到 r 增大时势 φ 减弱,

所以作如下代换

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} u(r, t)$$

将此代入上式即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

这个方程式是一维空间的齐次波动方程, 其通解为

$$u(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

式中的 f 和 g 是两个任意函数，故有

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \left[f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \right]$$

此解的第一项表示由场源向外辐射的球面波，第二项则表示向场源会聚的球面波。式中 f 和 g 是

$\left(t - \frac{r}{c}\right)$ 和 $\left(t + \frac{r}{c}\right)$ 的任意函数。其具体形式由场源

条件而定。当我们研究辐射时，电磁场是由原点处的电荷发出的，它必然是向外发射的波。因此在辐射问题中应取 $g=0$ ，而函数 f 的形式应由原点处的电荷变化形式决定。

因此在交变电磁场中应有相似的解，即

$$f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

故交变场源 $Q\left(t - \frac{r}{c}\right)$ 所激发的势为

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} Q\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

如果点电荷不在原点处，而是在 \vec{x}' 点上，令 r 为 \vec{x}' 点到场点 \vec{x} 的距离，有

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{Q(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{4\pi\epsilon_0 r}$$

如果场源电荷分布在有限体积 V 内, 对于一般变化电荷分布 $\rho(\vec{x}', t)$, 它所激发的标势为:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d\tau'$$

因矢势 \vec{A} 的微分方程与标势 φ 的微分方程相似, 故其解也相似, 所以一般变化电流分布 $\vec{j}(\vec{x}', t)$ 所激发的矢势为:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d\tau'$$

2、推迟势 (Retarded Potential)

达朗贝尔方程的解为:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d\tau'$$

它给出了分布在有限体积内的变化电荷与变化电流在空间任意点所激发的标势 φ 的矢势 \vec{A} 。必须强调指出, 该式中的 \vec{x} 表示场点坐标, \vec{x}' 表示源点坐标。

$\varphi(\vec{x}, t)$ 和 $\vec{A}(\vec{x}, t)$ 分别表示 t 时刻在 \vec{x} 点处的标势 φ 和矢势 \vec{A} 的值, $\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})$ 和 $\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})$ 分别表示 $t' = t - \frac{r}{c}$ 时刻在 \vec{x}' 处的 ρ 和 \vec{j} 的值。

值得注意的是：电荷密度 $\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})$ 和电流密度 $\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})$ 中的时刻是 t' 而不是 t 。这说明： t' 时刻在 \vec{x}' 处电荷或电流产生的场并不能在同一时刻 t' 就到达 \vec{x} 点，而是要一个传输时间 Δt ，而且 $\Delta t = t - t' = \frac{r}{c}$ ，由于 $t > t'$ ，故 t 时刻的势 φ 和 \vec{A} 是晚于场源辐射的时刻 t' ，因此将此时的 φ 和 \vec{A} 称为推迟势。

综上所述，推迟势的重要性在于说明了电磁作用是以有限速度 $v = c$ 向外传播的，它不是瞬时超距作用。换句话说：电荷、电流辐射电磁波，而电磁波以速度

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

脱离电荷、电流向外传播。这就是推迟势所描写的物理过程。

3、推迟势满足Lorentz规范条件

利用电荷守恒定律，我们可以验证推迟势满足Lorentz规范条件。

已知电磁场的势为

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}', t')}{r} d\tau'$$

式中

$$t' = t - \frac{r}{c}, \quad r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}$$

则有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{j}(\vec{x}', t')}{r} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) d\tau' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{j}(\vec{x}', t')}{r} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) d\tau'\end{aligned}$$

其中

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') = \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') \Big|_{t'=\text{常数}} + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') \Big|_{\vec{x}'=\text{常数}}$$

||

0 这是因为微分只对 \vec{x} 进行的

则

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') = \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') \Big|_{\vec{x}'=\text{常数}}$$

而

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') \Big|_{\vec{x}' = \text{常数}} &= \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \\&= \frac{\partial j_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} \\&= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial j_x}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \\&= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \cdot \nabla r\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(-\frac{1}{cr} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \cdot \nabla r + \vec{j} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) d\tau' \\&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{cr} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \cdot \nabla' r - \vec{j} \cdot \nabla' \frac{1}{r} \right) d\tau'\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
 \nabla' \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') &= \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} + \nabla' \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') \Big|_{\vec{x}'=\text{常数}} \\
 &= \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} + \frac{\partial j_{x'}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x'} + \frac{\partial j_{y'}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y'} + \frac{\partial j_{z'}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z'} \\
 &= \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial j_{x'}}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial x'} + \frac{\partial j_{y'}}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial y'} + \frac{\partial j_{z'}}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial z'} \right) \\
 &= \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \cdot \nabla' r
 \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \cdot \nabla' r = \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} - \nabla' \cdot \vec{j}$$

于是

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} - \left(\frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \nabla' \frac{1}{r} \right) \right] d\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} - \nabla' \cdot \frac{\vec{j}}{r} \right] d\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{j}}{r} \cdot d\vec{s}' \quad \searrow 0 \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} d\tau'
\end{aligned}$$

另外：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} d\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial t'} d\tau'
\end{aligned}$$

由此得到：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常}} d\tau' + \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial t'} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \left(\nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常}} + \frac{\partial \rho}{\partial t'} \right) d\tau' = 0\end{aligned}$$

要使上式保持成立（恒等），只有

$$\nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常}} + \frac{\partial \rho}{\partial t'} = 0$$

即得 \vec{A} 和 φ 的解满足 Lorentz 条件。

§ 5.3 电偶极辐射

电磁波是以交变运动的电荷系统辐射出来的，在宏观情形电磁波由载有交变电流的天线辐射出来；在微观情形，变速运动的带电粒子导致电磁波的辐射。

本节研究宏观电荷系统在其线度远小于波长情形下的辐射问题。

1、计算辐射场的一般公式

当电流分布 $\vec{j}(\vec{x}', t')$ 给定时，计算辐射场的基础是 \vec{A} 的推迟势：

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}', t')}{r} d\tau'$$

若电流 $\vec{j}(\vec{x}', t')$ 是一定频率 ω 的交变电流，有

$$\vec{j}(\vec{x}', t') = \vec{j}(\vec{x}') e^{-i\omega t'}$$

因此

$$\vec{j}(\vec{x}', t') = \vec{j}(\vec{x}') e^{-i\omega t'}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{-i\omega t'}}{r} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{-i(kr - \omega t)}}{r} d\tau'\end{aligned}$$

式中 $k = \omega/c$ 为波数

如果令 $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$ 且有

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{ikr}}{r} d\tau'$$

式中因子 e^{ikr} 是推迟作用因子，它表示电磁波传到场点时有相位滞后 kr 。

根据Lorentz条件，可求出标势 φ ：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \nabla \cdot \vec{A}$$

由此可见，由矢势 \vec{A} 的公式完全确定了电磁场。

另外，根据电荷守恒定律 $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 且有

$\nabla \cdot \vec{j} = i\omega\rho$ ，只要给定电流 \vec{j} ，则电荷分布 ρ 也自然确定了。

从而标势 φ 也就随之而确定了，因而在这种情况下，有

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{ikr}}{r} d\tau' \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \nabla \cdot \vec{A} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array} \right.$$

在电荷分布区域外面, $\vec{j}=0$, 所以

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2} \vec{E}$$

故得

$$\vec{E} = \frac{i\omega}{k} \nabla \times \vec{B}$$

2、矢势 \vec{A} 的展开式

对于矢势

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{ikr}}{r} d\tau'$$

注意到其中三个线度问题：

第一，电荷分布区域的线度 l ，它决定积分区域内 $|\vec{x}'|$ 的大小；

第二，波长 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ 的线度；

第三，电荷到场点的距离 r 。

而本节研究分布于一个小区域内的电流所产生的辐射。所谓小区域是指：

$$l \ll \lambda \qquad l \ll r$$

对于 r 和 λ 的关系，可分为三种情况：

a) 近区（似稳区） $r \ll \lambda$ ，但仍满足 $r \gg l$

且有 $kr \ll 1$ ，推迟因子 $e^{ikr} \sim 1$ ，因而场保持稳恒场的主要特点，即电场具有静电场的纵向形式，磁场也和稳恒场相似。

b) 感应区（过渡区）， $r \sim \lambda$ ，但满足 $r \gg l$ 。

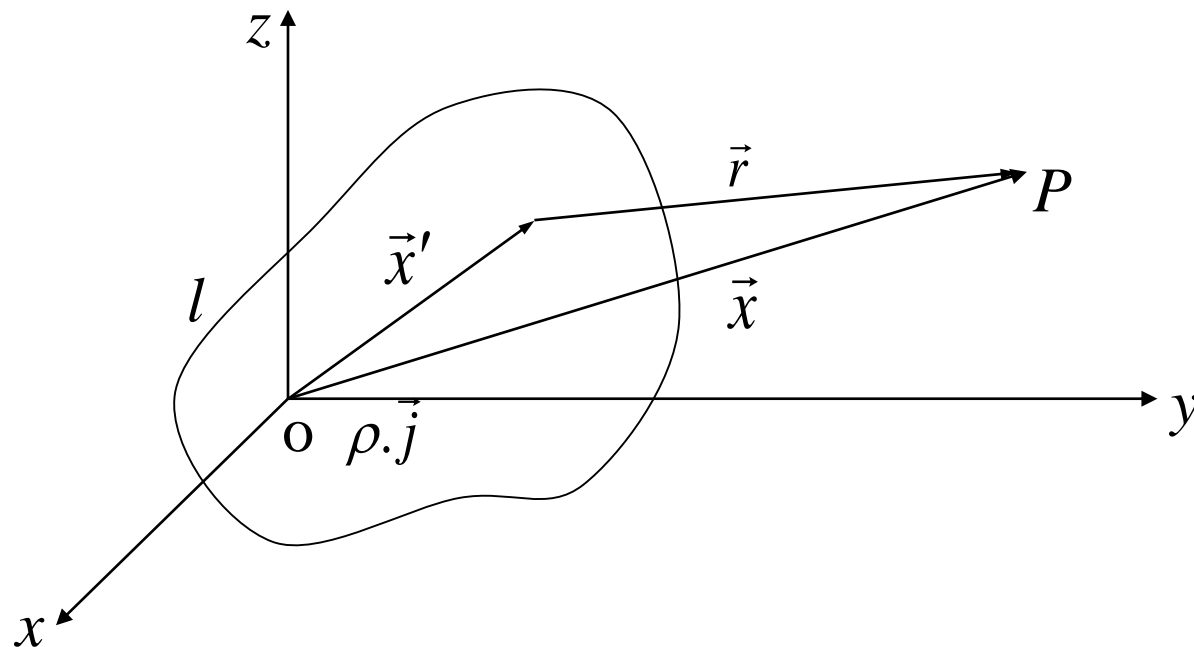
这个区域是一个过渡区域。它介于似稳区和辐射区的过渡区域中。

c) 远区（辐射区） $r \gg \lambda$ ，而且也保证 $r \gg l$ 。

在此区域中场强 \vec{E} 和 \vec{B} 均可略去 $\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{x}'|}$ 的

高次项，该区域内的场主要是横向电磁场。

现在主要讨论电流分布于小区域而激发的远区场。



选坐标原点在电流分布区域内，则 $|\vec{x}'|$ 与 l 同数量级， $R = |\vec{x}|$ ， $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$ 。由图可知：

$$\begin{aligned} r^2 &= \vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{x}|^2 + |\vec{x}'|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' \\ &= R^2 + x'^2 - 2R\hat{n} \cdot \vec{x}' \end{aligned}$$

$$r = R \left(1 + \frac{x'^2}{R^2} - \frac{2\hat{n} \cdot \vec{x}'}{R} \right)^{1/2}$$

由二项式展开得到（略去 $\frac{x'^2}{R^2}$ 等高次项）：

$$r \approx R - \hat{n} \cdot \vec{x}'$$

由此得到

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{ik(R - \hat{n} \cdot \vec{x}')}}{R - \hat{n} \cdot \vec{x}'} d\tau'$$

根据小区域的意义，则

$$l \sim |\vec{x}'| \ll \lambda, \quad l \sim |\vec{x}'| \ll r.$$

因此，在计算辐射场时只须保留 $\frac{1}{R}$ 的最低次项。

而 $R > r, \quad r \gg |\vec{x}'|.$

所以分母中可以去掉 $\hat{n} \cdot \vec{x}'$ 项。但分子不能去掉 $\hat{n} \cdot \vec{x}'$ 项，这是因为这项贡献一个相因子：

$$e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'} = e^{-i2\pi\hat{n} \cdot \vec{x}'/\lambda}$$

所以涉及的是小参数 \vec{x}'/λ 而不是 \vec{x}'/R ，相位差 $2\pi\hat{n} \cdot \vec{x}'/\lambda$ 一般是不能忽略的，因此 \vec{x}'/λ 要保留，这样得到：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{ik(R - \hat{n} \cdot \vec{x}')}}{R} d\tau'$$

把相因子对 $k\hat{n} \cdot \vec{x}'$ 展开，得

$$e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'} = 1 - ik\hat{n} \cdot \vec{x}' + \frac{1}{2!} (ik\hat{n} \cdot \vec{x}')^2 + \dots$$

从而得到矢势 \vec{A} 的展开式为：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \left[1 - ik\hat{n} \cdot \vec{x}' + \frac{1}{2!} (ik\hat{n} \cdot \vec{x}')^2 + \dots \right] d\tau'$$

展开式的各项对应于各级电磁多极辐射。

3、偶极辐射

研究展开式的第一项：

$$\vec{A}_{(1)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \vec{j}(\vec{x}') d\tau'$$

由于

$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}} &= \int_V \rho \vec{x}' d\tau' = - \int_V (\nabla' \cdot \vec{j}) \Big|_{t'=\text{常数}} \vec{x}' d\tau' \\ &= - \int_V \nabla' \cdot (\vec{j} \vec{x}') d\tau' + \int_V (\vec{j} \cdot \nabla') \vec{x}' d\tau' \\ &= - \oint_S \vec{j} \vec{x}' \cdot d\vec{s}' + \int_V \vec{j} \cdot \vec{I} d\tau'\end{aligned}$$

由于积分区域包含了全部电荷、电流存在的空间，

因而在包围该区域的边界面上不可能有电流出去，即 S 面 $\vec{j}=0$ ，从而有

$$\dot{\vec{P}} = \int_V \vec{j} \cdot \vec{I} d\tau' = \int_V \vec{j} d\tau'$$

故得

$$\vec{A}_{(1)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\vec{P}}$$

现在讨论计算辐射场的技巧问题：

在计算辐射场时，需要对 \vec{A} 作用算符 ∇ 和 $\frac{\partial}{\partial t}$

由于讨论远区场时，只保留 $\frac{1}{R}$ 的最低次项，因而 ∇ 算符

不需作用到分母上，而仅需作用到相因子 e^{ikR} 上即可达到要求，作用结果相当于代换：

$$\nabla \rightarrow ik\hat{n}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega.$$

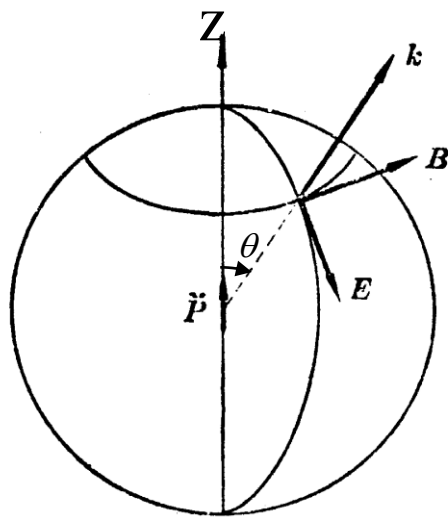
由此得到，辐射场为

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = ik\hat{n} \times \vec{A} \\&= \frac{i\mu_0 k}{4\pi R} e^{ikR} \hat{n} \times \dot{\vec{p}} \\&= \frac{i\mu_0 \frac{\omega}{c}}{4\pi R} e^{ikR} \hat{n} \times \dot{\vec{p}} \\&= \frac{i \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\omega}{c}}{4\pi R} e^{ikR} \hat{n} \times \dot{\vec{p}} \\&= \frac{1}{4\pi R c^3 \epsilon_0} e^{ikR} i\omega \hat{n} \times \dot{\vec{p}} \\&= \frac{1}{4\pi R c^3 \epsilon_0} e^{ikR} \ddot{\vec{p}} \times \hat{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B} = \frac{ic}{k} ik\hat{n} \times \vec{B} \\
 &= c\vec{B} \times \hat{n} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 Rc^2} e^{ikR} (\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}) \times \hat{n}
 \end{aligned}$$

如果取球坐标，原点在电荷电流分布区域内，并以 \vec{p} 方向为极轴，则由上式得到：

\vec{B} 沿纬线上振荡， \vec{E} 沿经线上振荡。



故得到：

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} e^{ikR} |\ddot{\vec{p}}| \sin(\theta) \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} e^{ikR} |\ddot{\vec{p}}| \sin(\theta) \vec{e}_\theta$$

该式表明：

磁力线是围绕极轴的园周， \vec{B} 总是横向的；电力线是经面上的闭合曲线，由于在空间中 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ， \vec{E} 线必须闭

合。因此 \vec{E} 不可能完全横向，只有当略去 $\frac{1}{R}$ 的高次项后，才

能近似地为横向。由此得到一个结论：**电偶极辐射是空间中的横磁波（TMW）。**

4、辐射性能的几个重要参数

衡量一个带电系统辐射性能的几个重要参数，是它的辐射功率和辐射角分布，这些问题都可以通过能流密度求得答案。

a) 辐射场的能流密度

在波动区域中，电磁场能流密度的平均值为

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= \bar{\vec{S}} = \frac{1}{2\mu_0} R_e (\vec{E}^* \times \vec{B}) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} R_e [c(\vec{B} \times \hat{n})^* \times \vec{B}] \\ &= \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{n} \\ &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta_{\hat{n}}\end{aligned}$$

b) 辐射场的角分布

所谓辐射场的角分布，就是讨论辐射的方向性，在平均能流密度 \vec{S} 中， $\sin^2 \theta$ 因子表示电偶极辐射的角分布。

辐射角分布(Angular distribution of radiation)定义为：在方向单位立体角内平均辐射能流，即

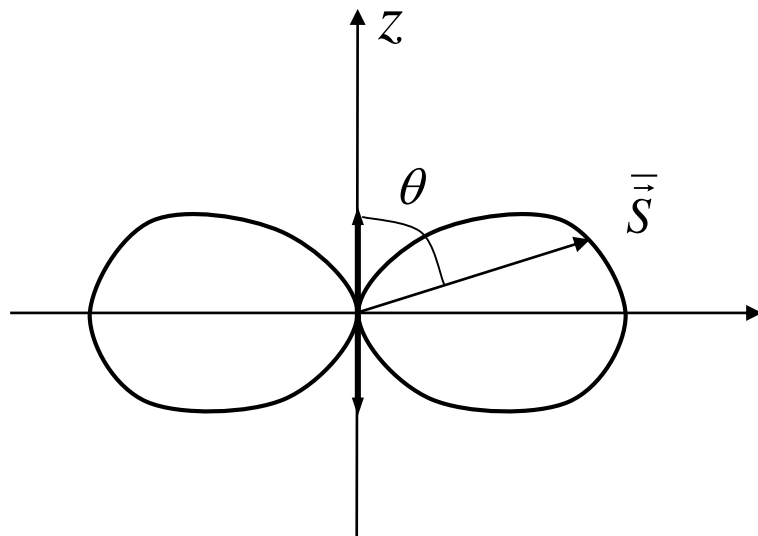
$$\overline{f(\theta \cdot \varphi)} = \frac{\vec{S} \cdot d\vec{s}}{d\Omega}$$

当 R 一定时， $\vec{S} \propto \sin^2 \theta$. 显然

$$\begin{aligned}\overline{f(\theta \cdot \varphi)} &= \frac{\vec{S} \cdot R^2 d\Omega \hat{n}}{d\Omega} \\ &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \sin^2 \theta\end{aligned}$$

由此可见

$$\begin{cases} \text{当 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, 辐射最强} \\ \text{当 } \theta = 0 \text{ 或 } \pi \text{ 时, 辐射为0} \end{cases}$$



c) 辐射功率

单位时间内通过半径为 R 的球面向外辐射的平均能量，称为辐射功率（**Radiation power**）。

把 \vec{S} 对球面积分即得总辐射功率，即

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \oiint_S |\vec{S}| \cdot d\mathbf{s} = \oiint_S |\vec{S}| R^2 d\Omega \\&= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \oiint_S \sin^2 \theta d\Omega \\&= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\&= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} 2\pi \cdot \frac{4}{3} \\&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}\end{aligned}$$

如果偶极子作简谐振动，角频率为 ω ，且有

$$\vec{p}(\vec{x}, t) = \vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

则

$$\dot{\vec{p}} = -i\omega\vec{p} = -i\omega\vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{p}} &= -i\omega\dot{\vec{p}} = -i\omega(-i\omega)\vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t} \\ &= -\omega^2\vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

从而得到

$$|\ddot{\vec{p}}|^2 = p_0^2\omega^4$$

故

$$\bar{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2\omega^4}{3c^3}$$

若保持电偶极矩的振幅 $\vec{p}_0(\vec{x})$ 不变，则辐射功率正比于频率 ω 的四次方，即频率变化时，辐射功率迅速变化。

通过上面的处理我们把结论归纳为几点：

1. 只要源的尺度 $d \ll \lambda$ ，它的辐射主要是电偶极辐射。
这是辐射不与源电流的全部细节有关，而只取决于其偶极距的振幅。
2. 偶极距的方向特性是 $\sin^2 \theta$ ，在偶极距方向（或反方向）的小锥区几乎没有辐射，在垂直偶极距方向上辐射最强，大部分方向上辐射强度差别不尖锐。
3. 偶极距的辐射总功率与频率的四次方成正比。若源的振荡频率很低，它的辐射不显著。
4. 若振荡源的电偶极距为零，则需要考虑远处失势的第二项。就是磁偶极和电四极辐射。

5.4 磁偶极辐射和电四极辐射

1、矢势 \vec{A} 的展开式第二项的物理内容

已知矢势 \vec{A} 的展开式为：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \left[1 - ik\hat{n} \cdot \vec{x}' + \dots \right] d\tau'$$

该式的第一项，属于电偶极辐射，那么第二项到底属于什么的辐射呢？为了弄清这个问题，我们把被积函数写为：

$$\vec{j}(\vec{x}') [\hat{n} \cdot \vec{x}'] = [\hat{n} \cdot \vec{x}'] \vec{j}(\vec{x}') = \hat{n} \cdot \hat{x}' \vec{j}(\vec{x}')$$

标量 → 数

而 $\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}')$ 是一个张量，我们把它分解为对称部分和反对称部分：

$$\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') = \frac{1}{2}[\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') + \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'] + \frac{1}{2}[\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') - \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}']$$

因而 $\vec{A}(\vec{x})$ 的展开式的第二项为:

$$\begin{aligned}\vec{A}_{(2)}(\vec{x}) &= -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik \int_V \vec{j}(\vec{x}') [\hat{n} \cdot \vec{x}'] d\tau' \\ &= -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik \int_V \left\{ \hat{n} \cdot \frac{1}{2} [\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') + \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'] \right. \\ &\quad \left. + \hat{n} \cdot \frac{1}{2} [\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') - \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'] \right\} d\tau'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{ik\mu_0}{4\pi R} e^{ikR} \int_V \frac{1}{2} \left[(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') + (\hat{n} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \vec{x}' \right] d\tau' \\
&\quad - \frac{ik\mu_0}{4\pi R} e^{ikR} \int_V \frac{1}{2} \left[(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') - (\hat{n} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \vec{x}' \right] d\tau'
\end{aligned}$$

先看第二项：由于

$$(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') - (\hat{n} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \vec{x}' = -\hat{n} \times (\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}'))$$

因此第二项积分部分为：

$$-\hat{n} \times \int_V \frac{1}{2} \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') d\tau' = -\hat{n} \times \vec{m}$$

\downarrow
 磁偶极矩

可见第二项导致的辐射是磁偶极辐射。

再看第一项:

把它看成对所有带电粒子求和, 则得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V [(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') + (\hat{n} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \vec{x}'] d\tau' \\ &= \frac{1}{2} \sum e [(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{v}(\vec{x}') + (\hat{n} \cdot \vec{v}(\vec{x}')) \vec{x}'] \end{aligned}$$

因为 $\vec{v}(\vec{x}') = \frac{d\vec{x}'}{dt}$, 所以上式可写为:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum e (\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{x}' &= \hat{n} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \sum e \vec{x}' \vec{x}' \right] \\ &= \frac{1}{6} \hat{n} \cdot \frac{d}{dt} \vec{D} \\ &= \frac{1}{6} \hat{n} \cdot \dot{\vec{D}} \end{aligned}$$

式中 $\vec{D} = \sum 3e \vec{x}' \vec{x}'$ 是点电荷系的电四极矩。

由此可见**第一项导致的辐射是电四极矩的辐射。**

至此， $\vec{A}(\vec{x})$ 的展开式第二项的物理内容为：

$$\vec{A}_{(2)}(\vec{x}) = -\frac{ik\mu_0}{4\pi R} e^{ikR} \left[-\hat{n} \times \vec{m} + \frac{1}{6} \hat{n} \cdot \dot{\vec{D}} \right]$$

即磁偶极辐射和电四极辐射是在 $\vec{A}(\vec{x})$ 的展开式中同一级项中出现。

2、磁偶极辐射

为了清楚起见，先计算磁偶极辐射项：

$$\vec{A}_{(2)}^m(\vec{x}) = \frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \hat{n} \times \vec{m}$$

在辐射区域中，

$$\vec{m} = \vec{m}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

由此可见

$$\begin{aligned}\vec{A}_{(2)}^m(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik\hat{n} \times \vec{m} \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \nabla \times \vec{m}\end{aligned}$$

辐射区的电磁场为：

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = ik \times \vec{A} \\ &= \frac{\mu_0 k^2}{4\pi R} e^{ikR} (\hat{n} \times \vec{m}) \times \hat{n}\end{aligned}$$

而又因为 $\dot{\vec{m}} = -i\omega\vec{m}$, $\ddot{\vec{m}} = -\omega^2\vec{m}$. $k^2 = \omega^2/c^2$

从而得到

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c^2} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) \times \hat{n}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= c\vec{B} \times \hat{n} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c} \left[(\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) \times \hat{n} \right] \times \hat{n} \\
 &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c} \left\{ \underbrace{\hat{n} \cdot (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) \times \hat{n}}_0 - \underbrace{(\vec{n} \cdot \hat{n})(\ddot{\vec{m}} \times \hat{n})}_1 \right\} \\
 &= -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n})
 \end{aligned}$$

将电偶极辐射场和磁偶极辐射场比较，即

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{\text{电偶极}} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 Rc^2} (\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}) \times \hat{n} \\ \vec{B}_{\text{磁偶极}} &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi Rc^2} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) \times \hat{n} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{B}_{\text{电偶极}} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 Rc^3} (\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}) \\ \vec{E}_{\text{磁偶极}} &= \frac{-\mu_0 e^{ikR}}{4\pi Rc} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) \end{aligned} \right\}$$

通过以上比较，有

$$\vec{p}_{\text{电偶极}} \rightarrow \frac{\vec{m}_{\text{磁偶极}}}{c}$$

$$\vec{E}_{\text{电偶极}} \rightarrow c\vec{B}_{\text{磁偶极}}$$

$$c\vec{B}_{\text{电偶极}} \rightarrow -\vec{E}_{\text{磁偶极}}$$

由此可见，磁偶极辐射的能流密度为：

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{B}) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}[(\vec{E}^* \times \hat{n}) \times \vec{B}] \\ &= \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{n}\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\vec{B}_{\text{磁偶极}} &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c^2} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) \times \hat{n} \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c^2} |\ddot{\vec{m}}| \sin \theta \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 |\ddot{\vec{m}}|^2}{16\pi^2 R^2 c^4} \sin^2 \theta \hat{n} \\ &= \frac{\mu_0 (\omega^4 |\vec{m}|^2)}{32\pi^2 R^2 c^3} \sin^2 \theta \hat{n}\end{aligned}$$

其中 $\ddot{\vec{m}} = -\omega^2 \vec{m}$, $|\ddot{\vec{m}}|^2 = \omega^4 |\vec{m}|^2$. $|\vec{m}|^2$ 为磁矩的振幅, θ 为极角 (以 \vec{m} 方向为极轴), 其辐射图形如电偶极辐射相同。

磁偶极辐射的总辐射功率：

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \oint\oint_S \vec{s} \cdot d\vec{s} = \oint\oint_S |\vec{s}| \cdot ds = \oint\oint_S |\vec{s}| R^2 d\Omega \\&= \oint\oint_S \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{32\pi^2 R^2 c^3} \sin^2 \theta R^2 d\Omega \\&= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{32\pi^2 c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\&= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{32\pi^2 c^3} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \\&= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{12\pi c^3}\end{aligned}$$

3、电四极辐射

这里由 $\vec{A}(\vec{x})$ 的展开式第二项计算电四极辐射项：

$$\vec{A}_{(2)}^e(\vec{x}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R} \hat{n} \cdot \dot{\vec{D}}$$

为方便计，定义一个矢量 $\vec{D}(\hat{n})$ ：

$$\vec{D}(\hat{n}) = \hat{n} \cdot \vec{D}$$

则矢势为：

$$\begin{aligned}\vec{A}_{(2)}^e(\vec{x}) &= -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R} \dot{\vec{D}} = -\frac{i\frac{\omega}{c}\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R} \dot{\vec{D}} \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{24\pi c R} \ddot{\vec{D}} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 R c^3} \ddot{\vec{D}}\end{aligned}$$

辐射区域的电磁场为

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = ik\hat{n} \times \vec{A} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 Rc^4} \ddot{\vec{D}} \times \hat{n}$$

$$\vec{E} = c\vec{B} \times \hat{n} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 Rc^3} (\ddot{\vec{D}} \times \hat{n}) \times \hat{n}$$

相应地辐射平均能流密度为：

$$\begin{aligned}\bar{\vec{s}} &= \frac{1}{2} R_e(\vec{E}^* \times \vec{B}) = \frac{1}{2} R_e[(c\vec{B}^* \times \hat{n}) \times \vec{B}] \\ &= \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{n} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{288\pi c^5 R^2} |\ddot{\vec{D}} \times \hat{n}|^2\end{aligned}$$

例1: 一电流线圈半径为 a , 激发电流振幅为 I_0 , 角频率为 ω , 求辐射功率。

电流线圈的磁矩为 $m_0 = I_0 \pi a^2$, 即

$$\vec{m}(\vec{x} \cdot t) = \vec{m}_0(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

然而

$$\dot{\vec{m}} = -i\omega \vec{m}$$

$$\ddot{\vec{m}} = -i\omega \dot{\vec{m}} = (-i\omega)(-i\omega)\vec{m} = -\omega^2 \vec{m}$$

根据磁偶极辐射的辐射功率

$$\bar{p} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{12\pi c^3}$$

得到

$$\bar{p} = \frac{\mu_0 \omega^4 I_0^2 (\pi a^2)}{12\pi c^3}$$

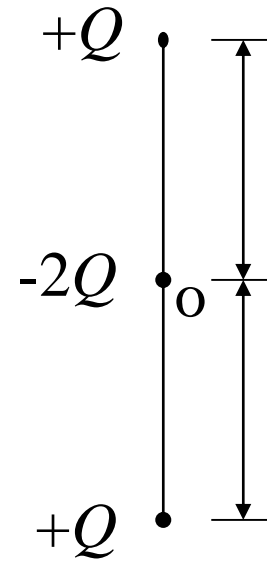
因为

$$\omega = kc = \frac{2\pi}{\lambda} c, \quad \omega^4 = \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4} c^4$$

因此得到

$$\bar{p} = \frac{4\pi^5}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4 I_0^2$$

例2：求如图所示的电四极子以频率 ω 振幅时的辐射功率和角分布。



该体系的电四极矩张量为：

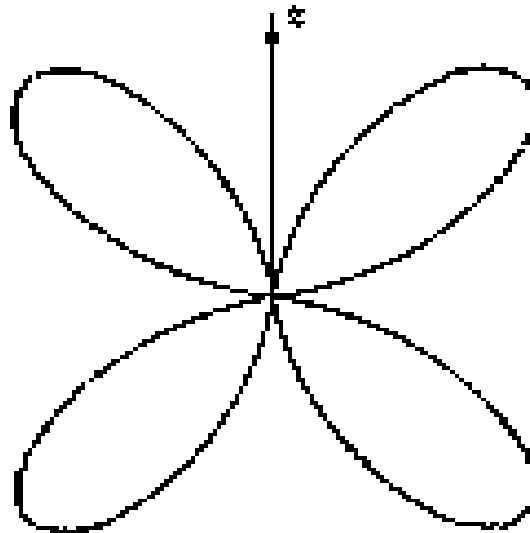
$$\begin{aligned}\vec{D} &= \sum 3e\vec{x}'\vec{x}' \\ &= 3Q\vec{e}_z\vec{e}_zl^2 + 0 + 3Q(-\vec{e}_z)(-\vec{e}_z)l^2 \\ &= 6Ql^2\vec{e}_z\vec{e}_z\end{aligned}$$

$$\vec{D} = \hat{n} \cdot \vec{D} = 6Ql^2 \hat{n} \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z = 6Ql^2 \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{D} \times \hat{n} = 6Ql^2 \cos \theta \vec{e}_z \times \hat{n} = 6Ql^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_\phi$$

$$|\ddot{\vec{D}} \times \hat{n}|^2 = 36Q^2 l^4 \omega^6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

由此可见，辐射角分布由因子 $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$ 确定，如图所示。



辐射功率为:

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \oiint_S \vec{s} \cdot d\vec{s} = \oiint_S |\vec{s}| ds = \oiint_S |\vec{s}| R^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{288\pi c^5} 36Q^2 l^4 \omega^6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^3 \theta d\theta\end{aligned}$$

因为 $\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin \theta d\theta$

$$= -\int_0^\pi \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta$$

$$= -\int_0^\pi \cos^2 \theta d \cos \theta + \int_0^\pi \cos^4 \theta d \cos \theta$$

$$= \frac{4}{15}$$

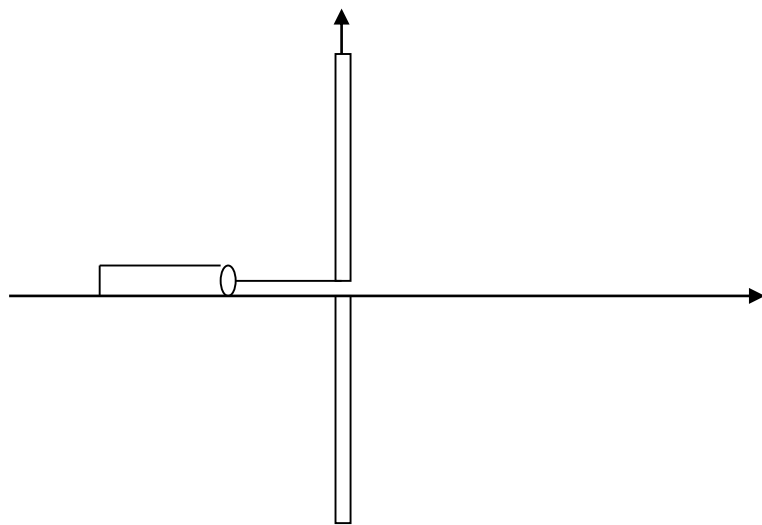
故

$$\bar{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{288\pi c^5} 36Q^2 l^4 \omega^6 \cdot \frac{4}{15} = \frac{Q^2 l^4 \omega^6}{60\pi\epsilon_0 c^5}$$

§ 5.5 中心馈电的直天线

以上讨论的辐射问题都是电流区域小于波长的情况。实际问题中有的辐射是借助天线来产生辐射的，往往天线的长度并不远小于波长。下面我们就来考虑中心馈电的直天线问题。

实际的天线辐射问题是一个边值问题。天线是导体，表面外部的电磁波与内部的电流由边界连接条件相互制约。现在我们把它简化为内部电流为已知的问题。具体地设天线长度为 d ，放置在垂直地面的 z 方向上。把它的中间断开，信号由振荡器发生后从中间馈入，如图所示。



电流在天线上形成驻波，两端为零。天线上的电流密度为

$$\vec{j}(x', t) = I_0 \sin k\left(\frac{d}{2} - |z'|\right) \delta(x') \delta(y') e^{-i\omega t} \vec{e}_z$$

天线上电流产生的矢势

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-d/2}^{d/2} \sin k\left(\frac{d}{2} - |z'|\right) e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{x}'} dz' \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-d/2}^{d/2} \sin k\left(\frac{d}{2} - |z'|\right) e^{-ikz' \cos \theta} dz' \vec{e}_z \end{aligned}$$

积分得

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k} \frac{e^{ikR}}{R} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kd}{2}}{\sin^2 \theta} \right]$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k} \frac{e^{ikR}}{R} \left[\frac{\cos(\frac{kd}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kd}{2}}{\sin^2 \theta} \right]$$

推出电磁场

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = ik\hat{n} \times \vec{A}$$

$$= -i \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \left[\frac{\cos(\frac{kd}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kd}{2}}{\sin \theta} \right] \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B} = \frac{ic}{k} ik\hat{n} \times \vec{B} = c\vec{B} \times \hat{n}$$

$$= -i \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \left[\frac{\cos(\frac{kd}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kd}{2}}{\sin \theta} \right] \vec{e}_\theta$$

辐射能流密度

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= \vec{\bar{S}} = \frac{1}{2\mu_0} R_e(\vec{E}^* \times \vec{B}) \\ &= \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{n} \\ &= \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 R^2} \left[\frac{\cos(\frac{kd}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kd}{2}}{\sin \theta} \right]^2\end{aligned}$$

我们分别讨论短天线和半波天线的情形

短天线是指天线长度远小于波长，即 $kd \ll 1$

对余弦函数作泰勒展开

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{S} \rangle &= \frac{\mu_0 c I^2_0}{8\pi^2 R^2} \left[\frac{\cos(\frac{kd}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kd}{2}}{\sin \theta} \right]^2 \\
 &= \frac{\mu_0 c I^2_0}{8\pi^2 R^2} \left[\frac{1 + \frac{1}{2} (\frac{kd}{2} \cos \theta)^2 + \dots - (1 + \frac{1}{2} \frac{kd}{2} + \dots)}{\sin \theta} \right]^2 \\
 &= \frac{\mu_0 I^2_0}{128\pi^2 c^3 R^2} \omega^4 d^4 \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

这是电偶极辐射的形式。辐射功率与频率的四次方成正比，也与天线长度成正比。对于短天线，加大天线长度或电流频率对提高功率有利。

当 $d = \lambda/2$ 即 $kd = \pi$ 。这就是半波天线。
此时

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 R^2} \left[\frac{\cos(\frac{kd}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kd}{2}}{\sin \theta} \right]^2 \\ &= \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 R^2} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta}\end{aligned}$$

它的辐射方向性与短天线情形很接近，也是向上为零，向前为主
对方向积分后得到辐射总功率

$$P = 1.22 \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi}$$

可以看到对于同样的电流强度，半波天线的辐射能力强。

§ 5.6 电磁场的动量

电磁场和带电体之间有相互作用力。场对带电粒子施以作用力，粒子受力后，它的动量发生变化，同时电磁场本身的状态亦发生相应的改变。因此，电磁场也和其他物体一样具有动量。

1、电磁场的动量密度和动量流密度

考虑空间某一区域，某内有一定电荷分布，区域内的场和电荷之间由于相互作用而发生动量转移。另一方面，区域内的场和区域外的场也通过界面发生动量转移，由于动量守恒，单位时间从区域外通过界面 S 传入区域内（ V ）的动量应等于 V 内电荷的动量变化率加上 V 内电磁场的动量变化率。故由 **Maxwell's equations** 和 **Lorentz** 力公式可导出电磁场和电荷体系的动量守恒定律。

场对带电体的作用为 **Lorentz force**，在 **Lorentz force** 作用下带电体的机械动量变化为

$$\frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} = \int_V \vec{f} d\tau = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) d\tau$$

下面利用真空中的场方程把等式中的电荷 ρ 和电流 \vec{j} 消去，把 Lorentz force density 改写为：

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \\ &= \varepsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \times \vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \\ &= \varepsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \times \vec{B}\end{aligned}$$

因为

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

把上式写为对称形式

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \varepsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \times \vec{B} \\ &\quad + \varepsilon_0 (\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \times \vec{E}\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned}& (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} \\&= (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + \left[-\frac{1}{2} \nabla(\vec{E} \cdot \vec{E}) + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} \right] \\&= \nabla \cdot (\vec{E}\vec{E}) - \frac{1}{2} \nabla(\vec{E} \cdot \vec{E}) \\&= \nabla \cdot (\vec{E}\vec{E}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (E^2 \vec{I}) \\&= \nabla \cdot \left(\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \vec{I} \right)\end{aligned}$$

同理得到：

$$\begin{aligned} & (\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \\ &= \nabla \cdot (\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{I}) \end{aligned}$$

另外有

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) \\ &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

这样，则有

$$\vec{f} = \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_0 \left[\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \vec{I} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{I} \right] \right\} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t}$$

或者写为

$$\vec{f} = -\nabla \cdot \vec{T} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t}$$

其中

$$\vec{T} = -\varepsilon_0 \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} + \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) \vec{I}$$

至此，可以把电荷机械动量的变化率写成

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} &= -\int_V \nabla \cdot \vec{T} d\tau - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau \\ &= -\oiint_S \vec{T} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau \end{aligned}$$

a) 若积分区域 V 为全空间，则面积分项为零，则

$$\frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\infty} \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau$$

根据动量守恒定律，带电体的机械动量的增加等于电磁场的动量的减少，因此称

$$\vec{G}_{\text{电磁}} = \int_{\infty} \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau = \int_{\infty} \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau$$

为电磁动量，而把

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{s} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

称为**电磁场动量密度**(electromagnetic field momentum density)，从而得到

$$\frac{d}{dt} \vec{G}_{\text{机}} = -\frac{d}{dt} \vec{G}_{\text{电磁}}$$

或者

$$\frac{d}{dt}(\vec{G}_{\text{机}} + \vec{G}_{\text{电磁}}) = 0$$

即

$$\vec{G}_{\text{机}} + \vec{G}_{\text{电磁}} = \text{constant}$$

这说明，若把带电体和电磁场看作一个封闭的力学体系，则体系的机械动量和电磁动量之和是守恒的。

对于平面电磁波，有

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{n} \times \vec{E}$$

这里的 \hat{n} 是电磁波的传播方向单位矢量，根据电磁动量密度公式

$$\vec{g} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

即可得到一定频率的电磁波的平均动量密度

$$\begin{aligned} \bar{\vec{g}} &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 R_e (\vec{E}^* \times \vec{B}) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2c} |E|^2 \hat{n} \\ &= \frac{1}{c} w \hat{n} \end{aligned}$$

这里的 w 是电磁场能量密度

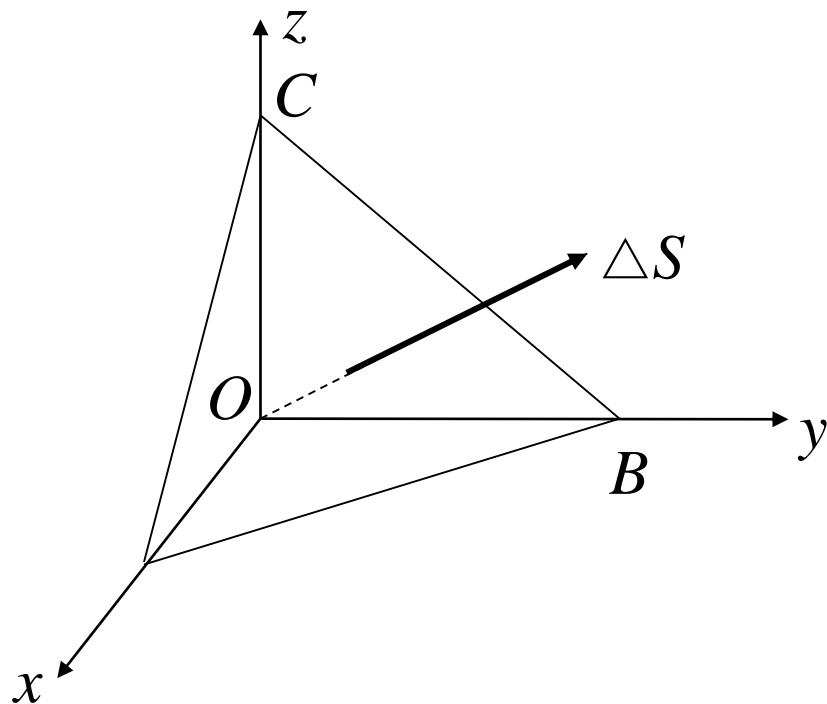
b) 若积分区域 V 为有限空间，则面积分项不为零，即

$$\frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} = -\oiint_S \vec{T} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V \vec{g} d\tau$$

机械动量 动量流 电磁动量

因为等式左边项表示机械动量，右边第二项代表了电磁动量，因此右边第一项也必然具有动量的意义，而它是面积分，所以把它解释为穿过区域 V 的边界面 S 流入体内的动量流。故称 \vec{T} 为**电磁场动量流密度**

下面再看动量流密度 \vec{T} 的物理意义
其分量的具体解释为：



设 ABC 为一面元，这面元的三个分量为三角形 OBC 、 OCA 和 OAB 的面积， $OABC$ 是一个体积元 ΔV ，通过界面 OBC 单位面积流入体内的动量三个分量为：

$$T_{11}、T_{12}、T_{13}；$$

通过界面 OCA 单位面积流入体内的动量三个分量为：

$$T_{21}、T_{22}、T_{23}；$$

通过界面 OAB 单位面积流入体内的动量三个分量为:

$$T_{31}、T_{32}、T_{33}；$$

当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时, 通过这三个面流入体内的动量等于从面元 ABC 流出的动量。因此, 通过 ABC 面流出的动量各分量为:

$$\Delta p_1 = \Delta S_1 T_{11} + \Delta S_2 T_{21} + \Delta S_3 T_{31}$$

$$\Delta p_2 = \Delta S_1 T_{12} + \Delta S_2 T_{22} + \Delta S_3 T_{32}$$

$$\Delta p_3 = \Delta S_1 T_{13} + \Delta S_2 T_{23} + \Delta S_3 T_{33}$$

写成矢量式:

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{S} \cdot \vec{T}$$

这就是通过面元 $\Delta \vec{S}$ 流出的动量。因此, 通过闭合曲面流出的总动量为

$$\oiint_S \vec{T} \cdot d\vec{S}$$

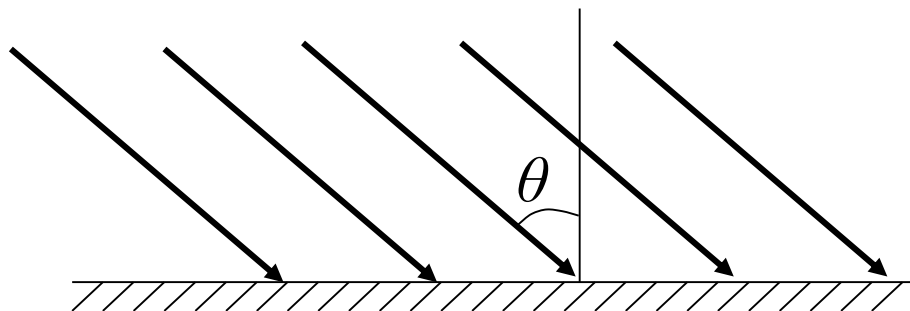
张量 \vec{T} 的分量 T_{ij} 的意义是通过垂直于 i 轴的单位面积流过的动量 j 分量。

3、辐射压力(Radiation pressure)

电磁场作为物质在流动（辐射）时，一旦遇到其他物体，就会发生相互作用力，由电磁场引起的对其他物体的压力称为**辐射压力**。如果是可见光引起的辐射压力，通常称之为光的压力。

由电磁场动量密度式和动量守恒定律可以算出辐射压力。

假有一平面电磁波的以 θ 角入射于理想导体表面上而被全部反射，试求此导体表面所受到的辐射压力。



导体表面对空间电磁波所施加的作用为，等于单位表面上电磁动量在单位时间内所发生的变化。由于作用力与反作用力大小相等，它的量值就等于电磁波对物体单位表面所施加的压力。由于电磁波的传播速度为 c ，在单位时间内射到单位横截面的电磁动量为：

$$\bar{g} \cdot (c \cdot 1) = \frac{\bar{s}}{c} = \bar{w}$$

设电磁波的入射角为 θ ，则单位时间内射到单位表面积上的电磁动量为

$$f_1 = \bar{g} c \cos \theta = \bar{w} \cos \theta$$

同样，在单位时间内被物体单位表面反射的电磁动量为

$$f_2 = R \bar{g} c \cos \theta = R \bar{w} \cos \theta$$

这里的 R 为反射系数。因此，单位时间内动量在法向的变化为：

$$\begin{aligned} P &= f_1 \cos \theta + f_2 \cos \theta \\ &= (1 + R) \bar{g} c \cos^2 \theta = (1 + R) \bar{w} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

即介质表面受到电磁波作用产生的压强，若电磁波在各方向都以同样强度辐射（例如空腔内的黑体辐射），它的总平均辐射能量密度为 \bar{w} ，那么投影到方向在 θ 到 $\theta+d\theta$ 之间的能量密度为：

$$d\bar{w} = \frac{\bar{w}}{4\pi} \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{\bar{w}}{2} \sin \theta d\theta$$

于是介质表面受到各个方向射来的电磁波作用产生的总压力为

$$P = (1 + R) \frac{\bar{w}}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1 + R}{6} \bar{w}$$

在理想导体表面，电磁波发生全反射，这时反射系数 $R=1$ ，此时即有

$$P = \frac{1}{3} \overline{w}$$

地球表面由于太阳光辐射而受到的总辐射压力约为 $7 \times 10^8 \text{ N}$ ，而受到太阳的万有引力为 $3 \times 10^{22} \text{ N}$ ，因此一般可以忽略辐射压力。