第二章　静电场

1.静电场的标势和微分方程

静电现象满足以下两个条件：即 ①电荷静止不动；②场量不随时间变化。故

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t}(\text{物理量}) = 0$$

把静电条件代入Maxwell's equations中去，即得电场满足的方程

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \end{cases}$$

单选题 1分

设置

以上静电微分方程是否完备?

A 是

B 否

提交

这两方程连同介质的电磁性质方程 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 是解决静电问题的基础。

根据电场方程$\nabla\times\vec{E}=0$ （即$\vec{E}$ 的无旋性），可引入一个标势φ 。

在电磁学中，已知$\varphi(A)-\varphi(B)=-\int_B^A\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 因为相距为$d\vec{l}$两点的电势差为

$$d\varphi=-\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

由于 $d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=\nabla\varphi\cdot d\vec{l}$

所以

$$\vec{E}=-\nabla\varphi$$

又因为在均匀各向同性的介质中，$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 则有

$$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\vec{E})=\nabla\varepsilon\cdot\vec{E}+\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}$$
$$=\rho$$

这里$\nabla\varepsilon=0$ ，故有

$$\nabla\cdot\vec{D}=\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}=\varepsilon\nabla\cdot(-\nabla\varphi)=\rho$$

即

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

此方程称为泊松方程（Poisson equation).

若在无源区域内（$\rho=0$），上式化为

$$\nabla^2\varphi=0$$

此方程称为拉普拉斯方程（Laplace equation)

在各种不同条件下求解Poisson equation或Laplace equation是处理静电问题的基本途径。

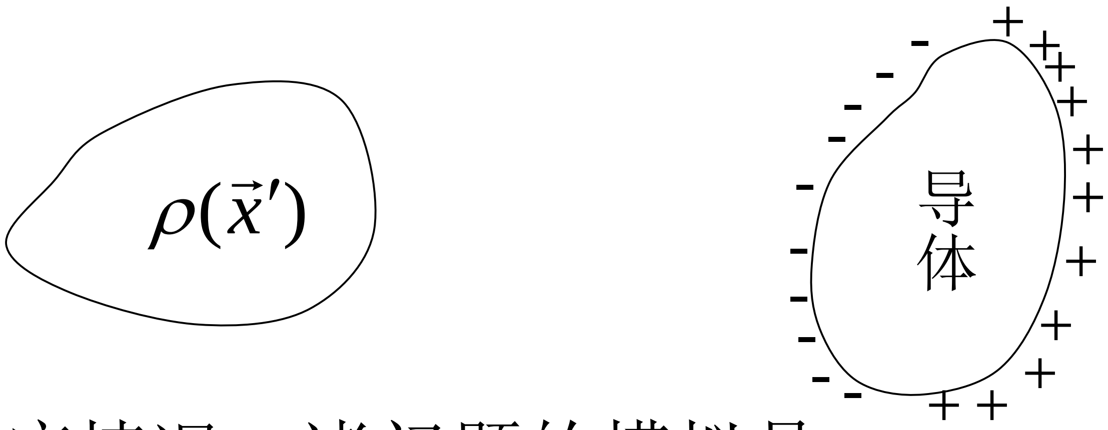
2、静电场的基本问题

如果电荷是连续分布的，则观察点$\vec{x}$处的标势为

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{x}')}{r}d\tau'$$

这个式子只反映了电荷激发电场这一面，而没有反映电场对电荷的作用另一面。

如果空间还有导体存在的活，那么物理机制为



考虑到感应情况，诸问题的模拟是：

给定电荷分布 $\xrightarrow{\text{求空间一点}}$ 电场分布

而场引起导体上

感 应电荷分布

而感应电荷分布反过来引起

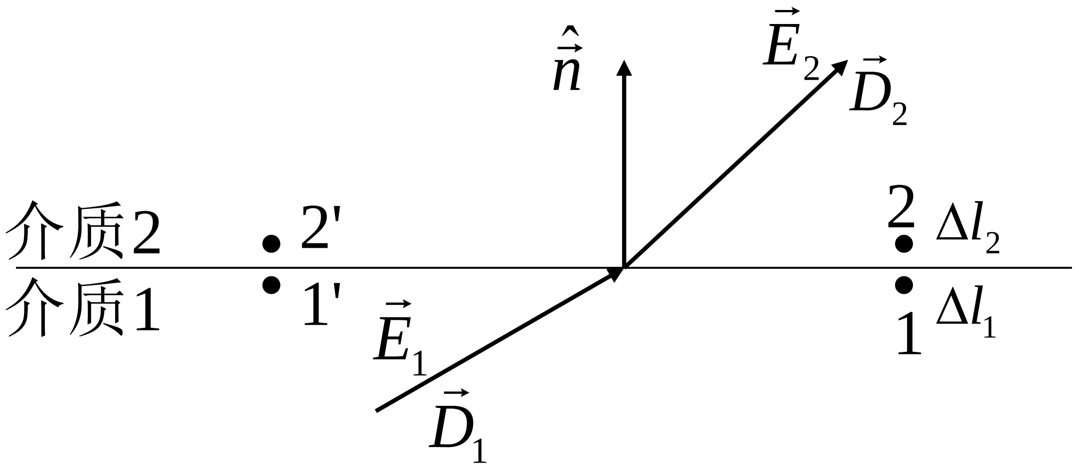
现在，要找出一个电荷对它邻近的电场是怎样作用的，一点上的电场和它邻近的电场又是怎样联

系的，即要找出电荷和电场相互作用规律的微分形式，而在导体表面或其他边界上场和电荷的相互作用关系则由边值关系和边界条件反映出来，称之为边值问题。

（1）在介质的分界面上，电场满足的边值关系为

$$\begin{cases} \hat{\vec{n}}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \\ \hat{\vec{n}}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho \end{cases}$$

何为电势所满足的边值关系：



在介质分界面附近取两点1和2，而$\Delta l_2 \to 0$ 所以

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= -(\vec{E}_1 \cdot \hat{\vec{n}} \Delta l_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{\vec{n}} \Delta l_2)$$

$$= -(E_{1n} \Delta l_1 + E_{2n} \Delta l_2)$$

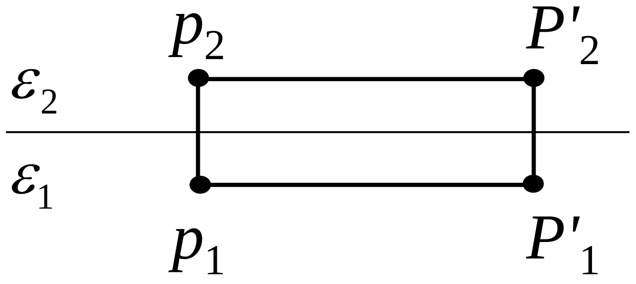
由于$\Delta l_1, \Delta l_2 \to 0$ ，故 $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ，且

$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$. 即在界面上,电势φ是连续的

注意:

$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$ 可代替 $\hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$, 即可代替 $E_{2t} = E_{1t}$

证:



$\because$ $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, $\varphi_1' - \varphi_2' = 0$

可见 $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1' - \varphi_2'$

而 $\varphi_1 - \varphi_1' = -\vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{l}$, $\varphi_2 - \varphi_2' = -\vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{l}$

故有 $-\vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{l} = -\vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{l}$

即得 $E_{1t} = E_{2t}$

另外，由方程$\hat{\vec{n}}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma$ 可得到：

$$\hat{\vec{n}}\cdot(\varepsilon_2\vec{E}_2-\varepsilon_1\vec{E}_1)=\sigma$$

$$-\varepsilon_2\hat{\vec{n}}\cdot\nabla\varphi_2+\varepsilon_1\hat{\vec{n}}\cdot\nabla\varphi_1=\sigma$$

即

$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\bigg|_S-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\bigg|_S=-\sigma$$

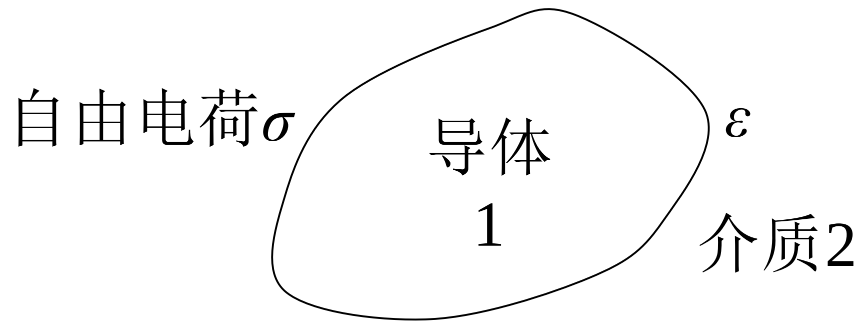
也就是说，在两种不同介质的分界面上，电势φ满足的关系为

$$\begin{cases}\varphi_2\big|_S=\varphi_1\big|_S\\ \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\bigg|_S-\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\bigg|_S=-\sigma\end{cases}$$

（2）在介质与导体的分界面上的情况

由于静电平衡条件，我们知道：

导体内部 $\vec{E}_{内}=0$ ；导体表面上的场强与表面⊥导体是等势体；导体内无电荷分布（ $\rho=0$ ），电荷只分布在导体的表面上（ $\sigma\neq 0$ ）。



因此，在导体与介质的分界面上； $\varphi_1=$常数

$$\because \quad 导体内部\vec{E}_{内}=0, 即\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=0$$

$$\therefore \quad \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\bigg|_S=-\sigma$$

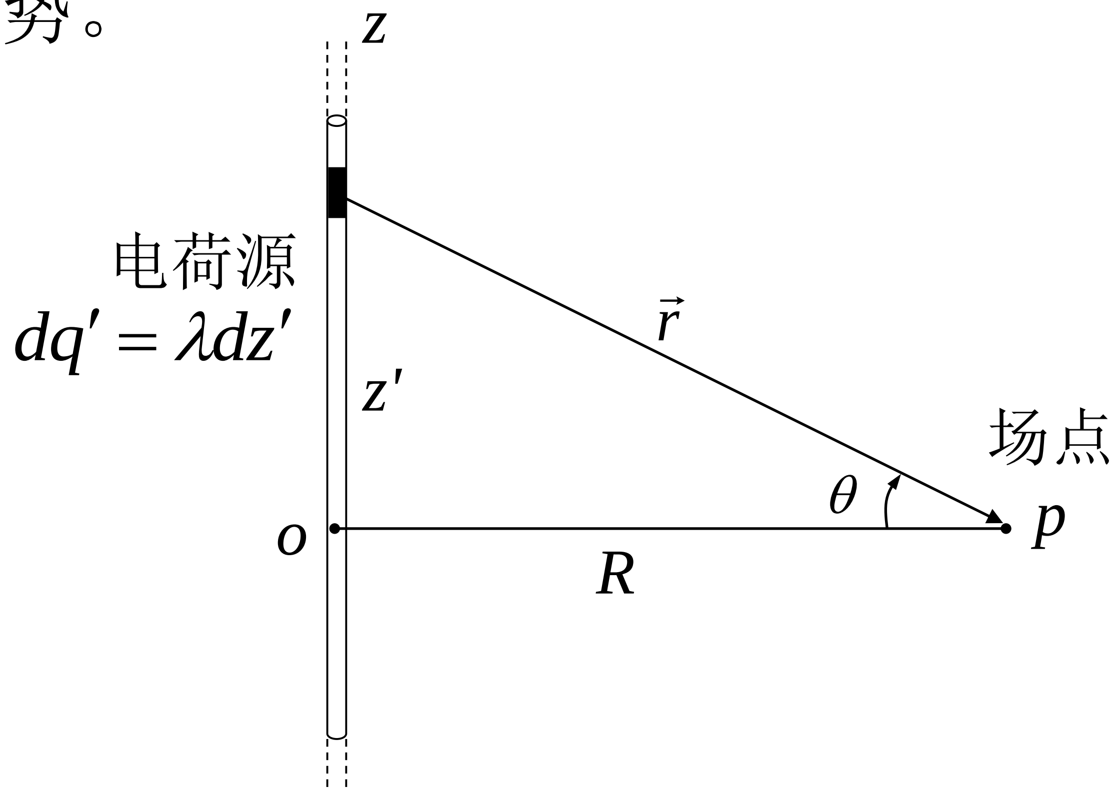
即有

$$\begin{cases}\varphi\big|_S=常数\\ \varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial}\bigg|_S=-\sigma\end{cases}$$

归纳起来，静电场的基本问题是：

求出在每个区域(均匀)内满足泊松方程，在所有分界面上满足边值关系和在所研究的整个区域边界上满足边界条件的电势的解。

[例]均匀带电的无限长直导线的电荷线密度的λ，求空间的电势。



选取柱坐标：源点的坐标为（0, z'），场点的坐标为（R, 0），考虑到导线是无限长，电场强度显然与z无关。

$$\varphi(R)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln(z+\sqrt{z^2+R^2})\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$\varphi(R)-\varphi(R_0)=\lim_{M\to\infty}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z+\sqrt{z^2+R^2}}{z+\sqrt{z^2+R_0{}^2}}\Bigg|_{-M}^{M}$$

$$=\lim_{M\to\infty}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+R^2/M^2}}{1+\sqrt{1+R_0{}^2/M^2}}\cdot\frac{-1+\sqrt{1+R_0{}^2/M^2}}{-1+\sqrt{1+R^2/M^2}}\right]$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_0^2}{R^2}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{R_0}$$

单选题 1分

设置

无穷远处电势为零总是成立的吗?

A 是

B 否，要求无限远处没有电荷分布。

C 否，要求无限远处没有电场

提交

§2.2 唯一性定理

Uniqueness theorem

本节内容将回答两个问题：

（1）要具备什么条件才能求解静电问题

（2）所求的解是否唯一

多选题 1分

设置

哪些条件已知，静电场才唯一确定?

A 研究区域的自由电荷分布

B 研究区域的介电性质

C 研究区域外边界的电势或电场的法向分量(电势的法向导数)

D 导体的电势或导体表面的面电荷分布。

提交

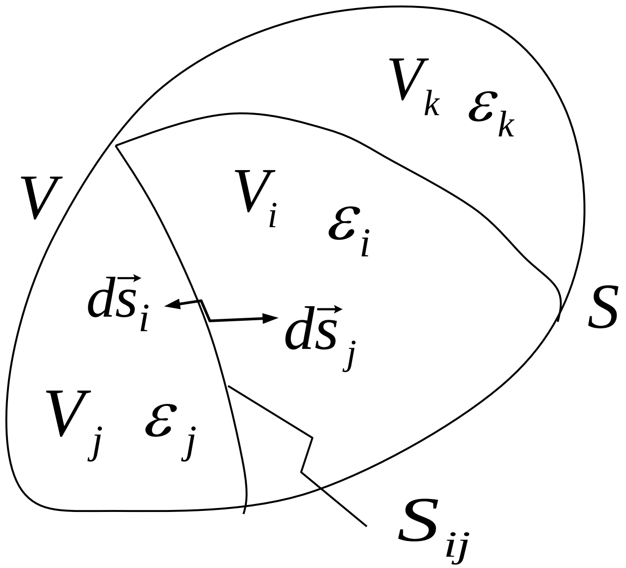
1、静电问题的唯一性定理

（1）有介质存在的情况

把一个区域V找分为许多小区域V_i，每一个小区域内介电常数为ε_i，它是各向同性的。

每一个区域给定电荷分布

$\rho(\vec{x})$， $\vec{x}\in V$



已知：①在每个均匀区域中满足$\nabla^2\varphi_i = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_i}$，即有几个区域就是几个泊松方程。

②在各个均匀区域的交界面上，满足：

$$\varphi_i = \varphi_j\,,\quad \varepsilon_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_i = \varepsilon_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_j$$

至此，不知道边界条件，即不知道区域的边界S上的一些条件。这个问题正是唯一性定理所要解决的，下面讨论之。

唯一性定理：

设区域V内给定自由电荷分布$\rho(\vec{x})$，在V的边界S上给定

（i）电势$\varphi|_S$

或（ii）电势的法向导数$\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S$，则$V$内的电场唯一地被确定。

下面采用的证法：

证明：设有两组不同的解 φ' 和 φ'' 满足唯一性定理的条件，只要让得 $\varphi = \varphi' - \varphi'' =$ 常数　即可。

令　$\varphi = \varphi' - \varphi''$

在均匀区域V_i内有

$$\nabla^2 \varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}, \quad \nabla^2 \varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}, \rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

在两均匀区界面上有

$$\varphi_i' = \varphi_j', \quad \varphi_i'' = \varphi_j'', \quad \rightarrow \quad \varphi_i = \varphi_j$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i'}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j'}{\partial n}, \quad \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i''}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j''}{\partial n} \rightarrow \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}$$

在整个区域V的边界S上有

$$\varphi'\big|_S = \varphi''\big|_S = \varphi_0 \quad \rightarrow \quad \varphi\big|_S = \varphi'\big|_S - \varphi''\big|_S = 0$$

或者

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right|_S - \left.\frac{\partial \varphi''}{\partial n}\right|_S = 0$$

为了处理边界问题，考虑第i个区域V_i的界面S_i上的积分问题，根据格林定理, 对已知的任意两个连续

函数ψ和φ必有：

$$\int_{V_i}\left\{\psi\nabla^2\varphi+(\nabla\varphi)(\nabla\psi)\right\}d\tau=\oiint_{S_i}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

令 $\psi=\varepsilon_i\varphi$

且 $$\int_{V_i}\left\{\varepsilon_i\varphi\nabla^2\varphi+(\nabla\varphi)\varepsilon_i(\nabla\varphi)\right\}d\tau=\oiint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

$\because$ $\nabla^2\varphi=0$

$\therefore$ $$\int_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2d\tau=\oiint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot d\vec{s}$$

对所有区域求和得到

$$\sum_{\mathrm{i}} \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 d\tau = \sum_i \oiint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s}$$

进一步分析：在两个均匀区域V_i和V_j的界面上，由于φ和$\varepsilon\nabla\varphi$ 的法向分量相等，又有$d\vec{s}_i = -d\vec{s}_j$ ，因此内部分界面的积分为

$$\oiint_{S_{ij}} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \oiint_{S_{ij}} \varepsilon_i \varphi_i \nabla \varphi_i \cdot d\vec{s}_i + \oiint_{S_{ji}} \varepsilon_j \varphi_j \nabla \varphi_j \cdot d\vec{s}_j$$

$$= \oiint_{S_{ij}} \varepsilon_i \varphi_i \nabla \varphi_i \cdot d\vec{s}_i - \oiint_{S_{ji}} \varepsilon_j \varphi_j \nabla \varphi_j \cdot d\vec{s}_i$$

$$= \oint\!\!\!\oint_{S_{ij}} \varphi_i \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds_i - \oint\!\!\!\oint_{S_{ji}} \varphi_j \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds_i$$

$$= 0$$

(这里 $D_{in} = D_{jn}$，$\varepsilon_i E_{in} = \varepsilon_j E_{jn}$， $\varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}$ ）

因此 $\sum_i \oint\!\!\!\oint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \oint\!\!\!\oint_{S} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s}$ 故

$$\oint\!\!\!\oint_{S} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 d\tau$$

而在S面上， $\varphi\big|_S = 0$，或$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = 0$ 从而有

$$\sum_i \int_i \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 d\tau = 0$$

由于$\varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 \geq 0$ ，而 $\varepsilon_i \neq 0$ ，只有 $\nabla \varphi = 0$ ， 要使 $\sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 d\tau$ 成立，唯一地是在V内各点上都有

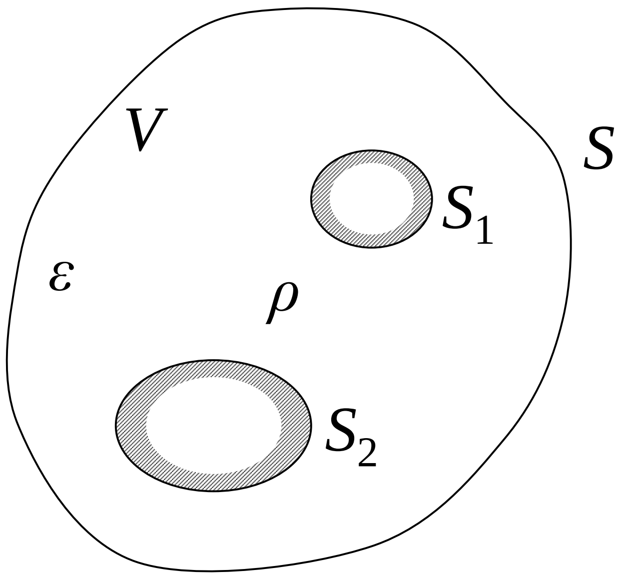
$$\nabla \varphi = 0$$

即在V内任一点上，$\varphi =$ 常数 。

由$\varphi = \varphi' - \varphi''$ 可见，φ' 和 φ'' 至多只能相差一个常数，但电势的附加常数对电场没有影响，这就是说静电场是唯一的。

（2）有导体存在的情况

讨论区域是导体外空间V，即V是由导体外表面S_1，S_2及S包面所围成的空间，当S在无穷远处时，所讨论的区域就是导体外的全空间V。



约定：

在无穷远处，电场为零，即在S面上$\varphi=0$ 或者表示成 $\varphi\big|_{S\infty}=0$

在此基础上，把问题分为两类：

A类问题：已知区域V中电荷分布$\rho(\vec{x})$ ，及所有

体的形状和排列；每个导体的电势都给定。

B类问题：已知区域V中电荷分布 $\rho(\vec{x})$ ，及所有导体的形状和排列；每个导体的总电荷都给定。

因为导体面就是边界面，因此上述导体的电势或者总电荷就是边界条件。

A类问题导体面电势给定，把导体面看作边界面，A类问题就是没有导体的第一类边值问题。

再用反证法证B类问题

也设存在两个解φ' 和 φ''，则有

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad (\varphi = \varphi' - \varphi'')$$

令$\psi = \varphi$ 代入格林公式中，得

$$\int_V \left\{\varphi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi)^2\right\} d\tau = \oiint_{S_\infty} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n} ds + \sum_i \oiint_{S_i} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n} ds$$

$\because \quad \nabla^2\varphi = 0, \quad \varphi\big|_{S_\infty} = 0$, 即得

$$\int_V (\nabla\varphi)^2 d\tau = \sum_i \oiint_{S_i} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds$$

因为在导体表面S_i处，电势并没有给定，但根据电磁学中的知识，导体在静电平衡时为一等势体。虽然

$\varphi'\big|_{S_i}$ 与$\varphi''\big|_{S_i}$ 不一定相等，但对同一导体而言，

$$\varphi'\big|_{S_i} - \varphi''\big|_{S_i} = \varphi_i \qquad \text{(应为一确定值)}$$

故可从积分号内提出来，于是

$$\int_V (\nabla\varphi)^2 d\tau = \sum_i \varphi_i \oiint_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds$$

现在分析： $$\oiint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = ?$$

因为 $\oiint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$ 中，S_i表示电场中第i个导体的表面，导体在静电平衡时，在导体外，紧靠导体表面处的场强方向与导体表面垂直，场强的大小与导体表面对应点的面电荷密度成正比，即

$$E_n = \sigma / \varepsilon, \qquad 而 \quad E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

从而得到

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi'}{\partial n} - \frac{\partial \varphi''}{\partial n} = -\frac{\sigma'}{\varepsilon} - \left(-\frac{\sigma''}{\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(\sigma'' - \sigma')$$

这样就有 $$\oint\!\!\!\oint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{1}{\varepsilon}\left[\oint\!\!\!\oint_{S_i} \sigma'' ds - \oint\!\!\!\oint_{S_i} \sigma' ds\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(Q'' - Q')$$

式中Q''和Q'都表示第i个导体所带的总电荷，又因为它是给定的，即

$$Q'' = Q'$$

故 $$\oint\!\!\!\oint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0$$

对每一个导体表面都有此结论。因此得到

$$\int_V (\nabla \varphi)^2 d\tau = 0$$

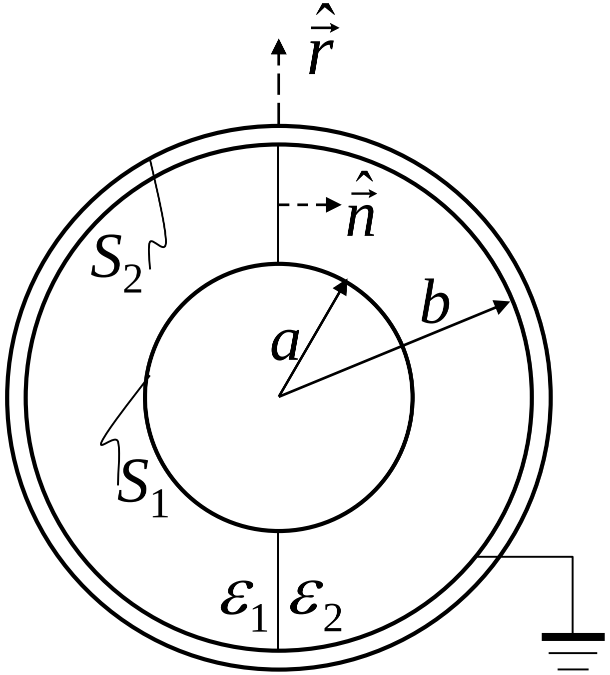
同理，$(\nabla\varphi)^2 \geq 0$ ，要使上式成立，必然是

$$\nabla\varphi = 0$$

即 $$\varphi = \varphi' - \varphi'' = 常数$$

由于$\vec{E} = -\nabla\varphi$ ，此常数对电场无影响，所以此时仍 φ
说 是唯一的。

[例]两同心导体球壳之间充以两种介质，左半球介电常数为 ε_1，右半球介电常数为 ε_2。设内球壳半径为*a*，带电荷为*Q*，外球壳接地，半径为*b*，求电场和球壳上的电荷分布。



单选题 1分

设置

哪项猜测是正确的?

A D具有球对称性

B E具有球对称性

C E和D都有球对称性

D E和D都没有球对称性

提交

Solution :

以唯一性定理为依据来解本题。

a)写出本题中电势 φ 应满足的方程和边值关系以及边界条件

此区域V为导体球与球壳之间的空间，边界面有两个，即S_1和S_2，S_1是导体球表面，S_2是导体球壳内表面, 边界条件为：在S_1上总电量是Q，在S_2上$\varphi=0$ 。

在两种介质中，电势都满足Laplace方程，在介质交界面上，电势φ 连续，电位移矢量的法向分量连续（因为交界面上$\sigma_f=0$ ）。

φ应满足的定解条件为：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_i = 0 & (i=1,2) \\ \text{在交界面上} & \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{cases} \\ \text{在}S_1\text{面上，已知}Q & \\ \text{在}S_2\text{面上，已知}\varphi = 0 & \end{cases}$$

现在不论用什么方法，只要求出的点函数 $\varphi(\vec{x})$能满足上述条件，那么$\varphi(\vec{x})$ 就是本题的唯一解。

b) 根据已知的定解条件，找出电势 φ 的解

由于对称性, 选取球坐标, 原点在球心, 直接积分

可求得解，因为

$$\nabla^2\varphi_i = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\right) = 0$$

不难看出：

$$\varphi_1 = \frac{A}{r} + B \qquad (\text{左半球}\varepsilon_1\text{中电势})$$

$$\varphi_2 = \frac{C}{r} + D \qquad (\text{右半球}\varepsilon_2\text{中电势})$$

在*r*=*b*处：

$$\varphi_1\big|_{r=b} = \frac{A}{b} + B = 0$$

$$\therefore\ B = -\frac{A}{b}$$

从而得到

$$\varphi_1 = A\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

同理，在$r=b$处：

$$\varphi_2\Big|_{r=b} = \frac{C}{b} + D = 0$$

$$\therefore \quad D = -\frac{C}{b}$$

即得

$$\varphi_2 = C\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

在两介质的交界面上：

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

由此得到 $A = C$

又因为在两介质的交界面上，$\hat{n}$与 $\hat{r}\perp$，但 φ_1, φ_2 都只与r有关，所以

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0$$

这样，φ_1, φ_2 也满足了D_n连续的条件。

到此为止，在条件中，除了在S_1面上总电量为Q外，φ也满足了其它全部条件，而 φ 也只剩下一个待定常数A。现在用 φ 必须满足在S_1面上总电量等于Q这个条件来确定A，即

$$\oiint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$$

$$\because \quad \vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 = -\varepsilon_1 \nabla \varphi_1 = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\hat{\vec{e}}_r = \frac{A\varepsilon_1}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 = -\varepsilon_2 \nabla \varphi_2 = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\hat{\vec{e}}_r = \frac{A\varepsilon_2}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\therefore \quad \oiint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \iint_{S_{1左}} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s} + \iint_{S_{1右}} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{A\varepsilon_1}{a^2}\iint_{S_{1左}} \vec{e}_r \cdot d\vec{s} + \frac{A\varepsilon_2}{a^2}\iint_{S_{1右}} \vec{e}_r \cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{A\varepsilon_1}{a^2}\cdot 2\pi a^2 + \frac{A\varepsilon_2}{a^2}\cdot 2\pi a^2$$

$$= Q$$

故

$$A = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

从而得到：

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}) \\ \varphi_2 = \dfrac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}) \end{cases}$$

c) 电场和电荷分布情况

根据电势φ_i 所得到的结果，有

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = -\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\vec{e}_r = \dfrac{Q\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3} \\ \vec{E}_2 = -\nabla\varphi_2 = -\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\vec{e}_r = \dfrac{Q\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3} \end{cases}$$

相应地，有

$$\begin{cases} \vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E}_1 = \dfrac{\varepsilon_1 Q\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3} \\ \vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E}_2 = \dfrac{\varepsilon_2 Q\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3} \end{cases}$$

单选题 1分

设置

哪项电荷分布的说法是正确的?

A 自由电荷分布具有球对称性

B 总电荷分布具有球对称性

C 极化电荷分布具有球对称性

D 任何电荷分布没有球对称性

提交

由此可见

$$|\vec{D}_1| \neq |\vec{D}_2|$$

▲在导体球（*r=a*）表面上：

$$\begin{cases} \sigma_{1f} = \hat{n} \cdot \vec{D}_1 \Big|_{r=a} = D_{1r}\big|_{r=a} = \dfrac{\varepsilon_1 Q}{2\pi a^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \\ \sigma_{2f} = \hat{n} \cdot \vec{D}_2 \Big|_{r=a} = D_{2r}\big|_{r=a} = \dfrac{\varepsilon_2 Q}{2\pi a^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \end{cases}$$

可见 $\sigma_{1f} \neq \sigma_{2f}$

▲在导体球壳内（*r=b*）处：

$$\begin{cases}\sigma_{1壳f}=\hat{\vec{n}}\cdot\vec{D}_1\Big|_{r=b}=-D_{1r}\Big|_{r=b}=-\dfrac{\varepsilon_1 Q}{2\pi b^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\\ \sigma_{2壳f}=\hat{\vec{n}}\cdot\vec{D}_2\Big|_{r=b}=-D_{2r}\Big|_{r=b}=-\dfrac{\varepsilon_2 Q}{2\pi b^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\end{cases}$$

也可看出：$|\ \sigma_{1壳f}\ |\neq|\ \sigma_{2壳f}\ |$

▲还可进一步求出束缚电荷（极化电荷）分布：

已知 $\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}$

所以

$$\begin{cases}\vec{P}_1=\vec{D}_1-\varepsilon_0\vec{E}_1=\dfrac{Q(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3}\\ \vec{P}_2=\vec{D}_2-\varepsilon_0\vec{E}_2=\dfrac{Q(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3}\end{cases}$$

而极化电荷体密度：

$$\begin{cases} \rho_{1p} = -\nabla \cdot \vec{P}_1 = -\left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 P_{1r})\right] = 0 \\ \rho_{2p} = -\nabla \cdot \vec{P}_2 = -\left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 P_{2r})\right] = 0 \end{cases}$$

即在两种介质中，极化电荷体密度都为零。

▲在导体球表面上极化电荷面密度分布：

$$\begin{cases} \sigma_{1p} = -\hat{\vec{n}} \cdot \vec{P}_1\Big|_{r=a} = -P_{1r}\Big|_{r=a} = -\dfrac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \\ \sigma_{2p} = -\hat{\vec{n}} \cdot \vec{P}_2\Big|_{r=a} = -P_{2r}\Big|_{r=a} = -\dfrac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \end{cases}$$

▲故得到导体球表面上的总电荷 分布：

$$\begin{cases}\sigma_1=\sigma_{1f}+\sigma_{1p}=\dfrac{\varepsilon_0 Q}{2\pi a^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\\[2ex]\sigma_2=\sigma_{2f}+\sigma_{2p}=\dfrac{\varepsilon_0 Q}{2\pi a^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\end{cases}$$

可见

$$\sigma_1=\sigma_2$$

▲在两种介质交界面处：

因为$\hat{n}\perp\vec{r}$ 。因而$P_n=0$，所以 $\sigma_p=0$

§2.3　拉普拉斯方程，分离变量法

Laplace's equation,

method of separate variation

本节内容主要是研讨Poisson 方程的求解析方法。

众所周知，电场是带电导体所决定的。自由电荷只能分布在导体的表面上。因此，在没有电荷分布的区域*V*里, Poisson's equation 就转化为 Laplace's equation，即

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \ \rightarrow \ \nabla^2\varphi = 0$$

产生这个电场的电荷都是分布于区域*V*的边界上，它

们的作用通过边界条件反映出来：

① 给定$\varphi|_S$

②给定$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$　或导体总电量$-\varepsilon\oint\!\!\!\oint_S \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}ds = Q$

因此，讨论的问题归结为：

①怎样求解（通解）Laplace's equation.

②怎样利用边界条件及边值关系求出积分常数。

Laplace's equation可以用分离变量法求通解，其求解条件是：

① 方程是齐次的。

②边界应该是简单的几何面。

1、用分离变量法求Laplace's equation的通解

（1）在直角坐标系中

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

设 $\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$

在数学物理方法中，该方程的通解的

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) = &(A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x) \\ &\cdot(B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y) \\ &\cdot(C_1 \cos k_z z + C_2 \sin k_z z)\end{aligned}$$

（A、B、C为待定系数）

或者写成

$$\varphi(x,y,z)=e^{\pm ik_x x}e^{\pm ik_y y}e^{\pm ik_z z}; \qquad (k_z^2=k_x^2+k_y^2)$$

（2）在柱坐标系中

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

设 $$\varphi(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

该方程的通解为

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta,z)=&\left[A_1 J_m(kr)+A_2 N_m(kr)\right]\\ &\cdot\left[B_1\cos(n\theta)+B_2\sin(n\theta)\right]\\ &\cdot\left[C_1\cosh(kz)+C_2\sinh(kz)\right]\end{aligned}$$

其中，J_m为m阶第一类贝塞尔函数，N_m为m阶第二类贝塞尔函数。

$$J_m(kr)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{kr}{2})^{m+2n}}{n!\Gamma(m+n+1)}\qquad(\Gamma\text{为伽马函数})$$

$$N_m(kr)=\frac{\cos(m\pi)J_m(kr)-J_{-m}(kr)}{\sin(m\pi)}$$

如果考虑与z轴无关（k=0）情况，并讨论的区域是

$0\le\theta\le 2\pi$ ，故通解为

$$\varphi(r,\theta)=A_o+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n})\cos(n\theta)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(C_nr^r+D_nr^{-n})\sin(n\theta)$$

这里A，B，C，D为待定系数。

（3）在球坐标系中

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta})$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0$$

设 $\varphi(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi)$

其通解为

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\sum_{n,m}(A_{nm}r^n+\frac{B_{nm}}{r^{n+1}})P_n^m(\cos\theta)\cos(m\phi)$$

$$+\sum_{n,m}(C_{nm}r^n+\frac{D_{nm}}{r^{n+1}})P_n^m(\cos\theta)\sin(m\phi)$$

这里$P_n^m(\cos\theta)$ 为缔合勒让德（Legendre)函数

对于具有轴对称的问题，*m*=0 (取此轴为极轴）

且

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

这里 $P_n(\cos\theta)$ 为勒让德函数，A_n ,B_n 为待定系数

对于球对称的问题，*m*=0， *n*=0。且

$$\varphi(r)=A+\frac{B}{r} \qquad A, B\text{为待定系数}$$

2、利用边界条件定解

说明两点：

第一，如果考虑问题中有i 个区域（均匀分布），必须有i个相应的Laplace's equation .

第二，在每个区域的交界面上，应该满足边值关系：

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_j \\ \varepsilon_i \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \varepsilon_j \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial n} \end{cases} \qquad \text{(在}S_{ij}\text{面上)}$$

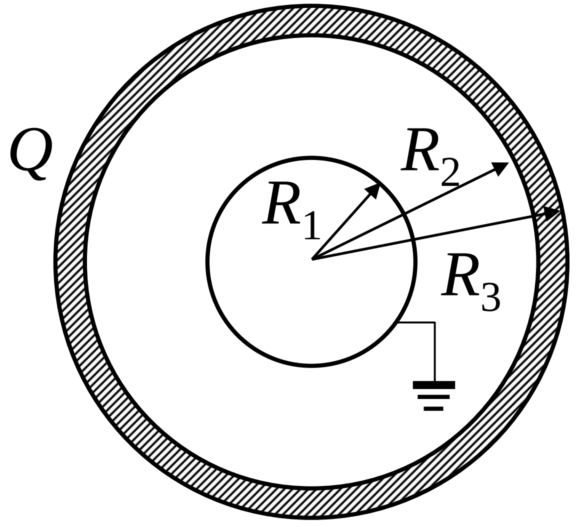
边界条件：

$$\varphi\big|_S \text{或} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\bigg|_S \quad \text{及导体的总电荷} -\varepsilon \oiint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = Q$$

3、举例说明定特解的方法

[例1]一个内径和外径分别为R_2和R_3的导体球壳，带电荷为Q 。同心地包围着一个半径为R_1的导体球（$R_1<R_2$)，使半径R_1的导体球接地，求空间各点的电势和这个导体球的感应电荷。

Solution:



第一步：分析题意，找出定解条件。

根据题意，具有球对称性，电势不依赖于极角 θ 和方位角ϕ ，只与半径r有关。

即 $$\varphi(r,\theta,\phi)\to\varphi(r)$$

故定解条件为：

$$\nabla^2\varphi_1=0. \qquad r>R_3 \tag{1}$$

$$\nabla^2\varphi_2=0. \qquad R_1<r<R_2 \tag{2}$$

边界条件：

(i)因为导体球接地，有

$$\varphi_2\big|_{r=R_1}=\varphi_1\big|_{r\to\infty}=0 \tag{3}$$

(ii)因整个导体球壳为等势体，有

$$\varphi_2\big|_{r=R_2}=\varphi_1\big|_{r\to R_3} \tag{4}$$

(iii)球壳带电量为Q，根据Gauss theorem

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = Q \Big/ \varepsilon_0$$

得到

$$-\iint_{r=R_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} r^2 d\Omega + \iint_{r=R_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} r^2 d\Omega = Q \Big/ \varepsilon_0 \qquad (5)$$

第二步，根据定解条件确定通解和待定常数

由方程式(1)、(2)可看出，电势不依赖于φ，取n=0；不依赖于θ，取 $P_n(\cos\theta)=1$，故得到导体球壳内、外空间的电势：

$$\begin{cases} \varphi_1 = A + \dfrac{B}{r} \quad r > R_3 & (6) \\ \varphi_2 = C + \dfrac{D}{r} \quad R_1 < r < R_2 & (7) \end{cases}$$

由（3）式得

$$当 r \to \infty，\ \varphi_1 = 0. \qquad \therefore\ A = 0 \qquad (8)$$

$$当 r = R_1，\ \varphi_2 = 0. \qquad \therefore\ C = -\frac{D}{R_1} \qquad (9)$$

从而得到

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{B}{r} & (10) \\ \varphi_2 = D(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_1}) & (11) \end{cases}$$

由（4）式得

$$\frac{B}{R_3} = D(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) \qquad (12)$$

由（5）式得

$$B \cdot 4\pi - D \cdot 4\pi = Q/\varepsilon_0$$

即
$$B - D = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (13)$$

将（13）式代入（12）式，即得

$$D = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \Big/ (-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3})$$

令
$$Q_1=-\frac{Q}{R_3(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3})}$$

因此得到：

$$A=0,\quad B=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}+\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$C=-\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1},\quad D=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}$$

将*A*、*B*、*C*、*D*系数代入到（6）、（7）式，即得电势的解：

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{B}{r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > R_3) \\ \varphi_2 = C + \dfrac{D}{r} = -\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} & (R_1 < r < R_2) \end{cases}$$

导体球上的感应电荷为

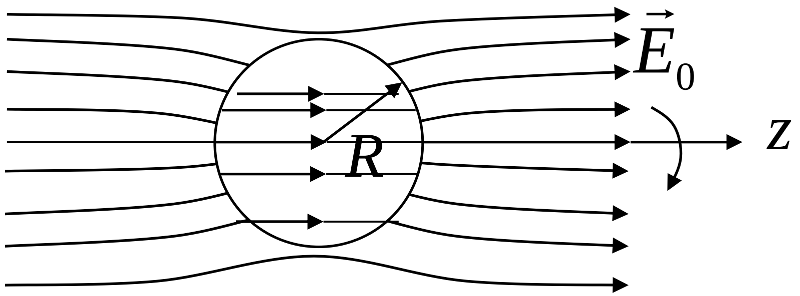
$$-\varepsilon_0 \iint\limits_{r=R_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} r^2 d\Omega = -\varepsilon_0 \iint\limits_{r=R_1} \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)\right] r^2 d\Omega$$

$$= -\varepsilon_0 \iint\limits_{r=R_1} \left[-\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} r^2 d\Omega\right]$$

$$= Q_1$$

[例2]介电常数为ε的均匀介质球，半径为R，被置于均匀外场$\vec{E}_0$中，球外为真空。求电势分布。

Solution:



第一步：根据题意，找出定解条件。

由于这个问题具有轴对称性，取极轴z沿外电$\vec{E}_0$场方向，介质球的存在使空间分为两个均匀区域—球内、球外。两区域内都没有自由电荷。因此电势φ满足Laplace's equation。以φ_1代表球外区域的电势，φ_2代表球内区域的电势，故

$$
(r \ge R)\quad
\begin{cases}
\nabla^2 \varphi_1 = 0 & (1) \\
\varphi_1\big|_{r\to\infty} = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta) & (2) \\
\varphi_1\big|_{r\to R} = \varphi_2\big|_{r\to R} & (3) \\
\varepsilon_0 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n}\bigg|_{r=R} = \varepsilon \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n}\bigg|_{r=R} & (4)
\end{cases}
$$

$$
(r \le R)\quad
\begin{cases}
\nabla^2 \varphi_2 = 0 & (5) \\
\varphi_2\big|_{r\to 0} = \text{有限值} & (6) \\
\varphi_2\big|_{r=R} = \varphi_1\big|_{r=R} & (7) \\
\varepsilon \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n}\bigg|_{r=R} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n}\bigg|_{r=R} & (8)
\end{cases}
$$

第二步：根据定解条件确定通解和待定常数

由于问题具有轴对称性，即 φ_i 与 ϕ 无关，故

$$\begin{cases} \varphi_1 = \sum_n (a_n r^n + \dfrac{b_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) & (r \geq R) \quad (9) \\ \varphi_2 = \sum_n (c_n r^n + \dfrac{d_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) & (r \leq R) \quad (10) \end{cases}$$

由（2）式得

$$\varphi_1\Big|_{r\to\infty} = \left[\sum_n (a_n r^n + b_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta) \right]\Bigg|_{r\to\infty} = -E_0 r P_1(\cos\theta)$$

比较两边系数，得

$$a_1 = -E_0 \qquad a_n = 0. \quad (n \neq 1)$$

由（6）式得

$$\varphi_2\big|_{r\to 0} = \left[\sum_n (c_n r^n + d_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta)\right]\Bigg|_{r\to 0} = \text{有限值}$$

从中可见

$$d_n = 0$$

故有：

$$\begin{cases} \varphi_1 = -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_n b_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) & (11) \\ \varphi_2 = \sum_n c_n r^n P_n(\cos\theta) & (12) \end{cases}$$

再由（3）、（4）式或者（7）、（8）式得到：

$$\begin{cases} -E_0RP_1(\cos\theta)+\sum_n b_n\dfrac{1}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)=\sum_n c_nR^nP_n(\cos\theta) \\ -E_0P_1(\cos\theta)-\sum_n(n+1)b_n\dfrac{1}{R^{n+2}}P_n(\cos\theta)=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sum_n c_nnR^{n-1}P_n(\cos\theta) \end{cases}$$

比较 $P_n(\cos\theta)$ 的系数，得

$$\left.\begin{aligned} -E_0R+\frac{b_1}{R^2}=c_1R \quad (13) \\ -E_0-\frac{2b_1}{R^3}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}c_1 \quad (14) \end{aligned}\right\} n=1$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{b_n}{R^{n+1}}=c_nR^n \qquad (15)\\&-(n+1)\frac{b_n}{R^{n+2}}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}nc_nR^{n-1} \qquad (16)\end{aligned}\right\}\quad n\neq 1$$

由（15）、（16）式给出：

$$b_n=0, \qquad c_n=0. \quad (n\neq 1) \tag{17}$$

由（13）、（14）式给出

$$b_1=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon}E_0R^3 \tag{18}$$

$$c_1=\frac{-3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon}E_0 \tag{19}$$

由此得到电势为

$$\begin{cases} \varphi_1 = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon} R^3 E_0 \dfrac{1}{r^2}\cos\theta & (r \geq R) \\ \varphi_2 = -\dfrac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon} E_0 r\cos\theta & (r \leq R) \end{cases}$$

▲相应地，球内、外的电场强度为

$$\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right)\left(-E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon} R^3 E_0 \frac{1}{r^2}\cos\theta\right)$$

$$= E_0(\cos\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) + \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon} R^3 E_0 \cos\theta \frac{2}{r^3}\vec{e}_r$$

$$+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon}R^3E_0\sin\theta\frac{1}{r^3}\vec{e}_\theta$$

其中

$$(\cos\theta\vec{e}_r-\sin\theta\vec{e}_\theta)=\vec{e}_z$$

第二项和第三项之和实际上是一个等效的放在原点的偶极子在球外产生的电场，其电偶极矩为

$$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon}R^3\vec{E}_0$$

因此，球外区域的电场为：

$$\vec{E}_1=\vec{E}_0+\vec{E}'$$ 而

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot r)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]$$

同理得到

$$\begin{aligned}
\vec{E}_2 &= -\nabla\varphi_2 \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right)\left(-\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon}E_0 r\cos\theta\right) \\
&= \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon}E_0(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) \\
&= \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon}E_0\vec{e}_z \\
&= \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon}\vec{E}_0
\end{aligned}$$

由此可见，球内的场是一个与球外场平行的恒定场。而且球内电场比原则外场$\vec{E}_0$为弱，这是极化电荷造成的。

▲在球内总电场作用下，介质球的极化强度的

$$\vec{P} = x_e \varepsilon_0 \vec{E}_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} 3\varepsilon_0 \vec{E}_0$$

▲介质球的总电偶极矩为

$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_0$$

§2.4 镜象法

Method of images

根据前面的内容讨论知道：在所考虑的区域内没有自由电荷分布时，可用Laplace's equation求解场分布；在所考虑的区域内有自由电荷分布时，且用Poisson's equation 求解场分布。

如果在所考虑的区域内只有一个或者几个点电荷，区域边界是导体或介质界面，这类问题又如何求解？这就是本节主要研究的一个问题。解决这类问题的一种特殊方法— 称为镜象法。

镜象法的理论基础

镜象法的理论基础是唯一性定理。其实质是在所研究的场域外的适当地方，用实际上不存在的“象电荷”来代替真实的导体感应电荷或介质的极化电荷对场点的作用。在代替的时候，必须保证原有的场方程、边界条件不变，而象电荷的大小以及所外的位置由Poisson's equation or Laplace's equation 和边界条件决定。

这里要注意几点：

a) 唯一性定理要求所求电势必须满足原有电荷分

布所满足的Poisson's equation or Laplace's equation。因此，在所研究的场域内不可放置象的电荷，也就是说，象电荷必须放在研究的场域外。

b)由于象电荷代替了真实的感应电荷或极化电荷的作用，因此放置象电荷后，就认为原来的真实的导体或介质界面不存在。也就是把整个空间看成是无界的均匀空间。并且其介电常数应是所研究场域的介电常数。

c)象电荷是虚构的，它只在产生电场方面与真实的感应电荷或极化电荷有等效作用。

d)镜象法所适应的范围是：①场区域的电荷是点电荷，无限长带电直线；②导体或介质的边界面必是简单的规则的几何面（球面、柱面、平面）。

镜象法的具体应用

用镜象法解题大致可按以下步骤进行：

a)正确写出电势应满足的微分方程及给定的边界条件；

b)根据给定的边界条件计算象电荷的电量和所在位置；

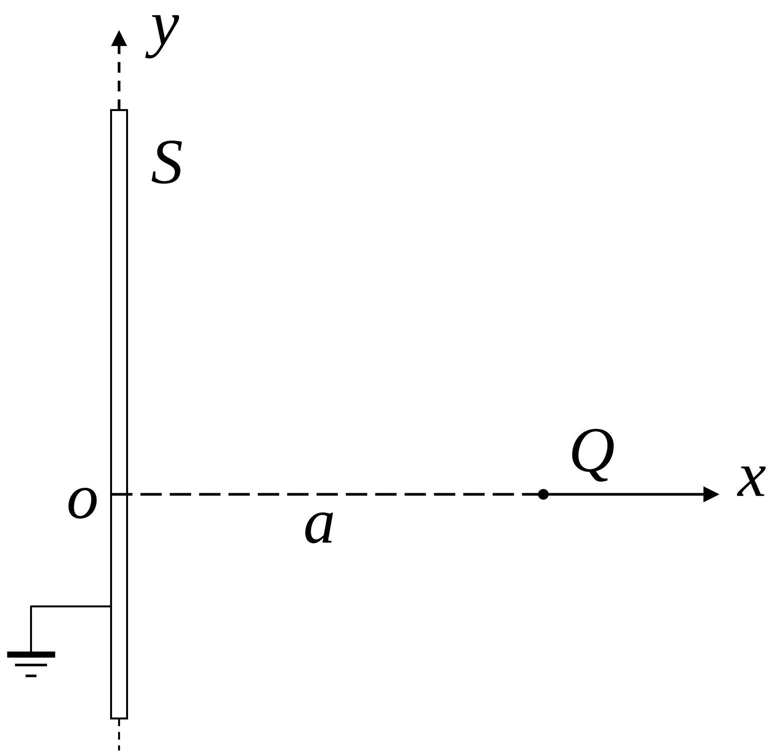
c)由已知电荷及象电荷写出势的解析形式;

d) 根据需要要求出场强、电荷分布以及电场作用力、电容等。

下面按界面形状的不同分类举例讨论:

（1）界面为平面的情况

[例1]接地无限大平面导体板附近有一点电荷，其电量为Q，距板a处，求空间中的势分布。

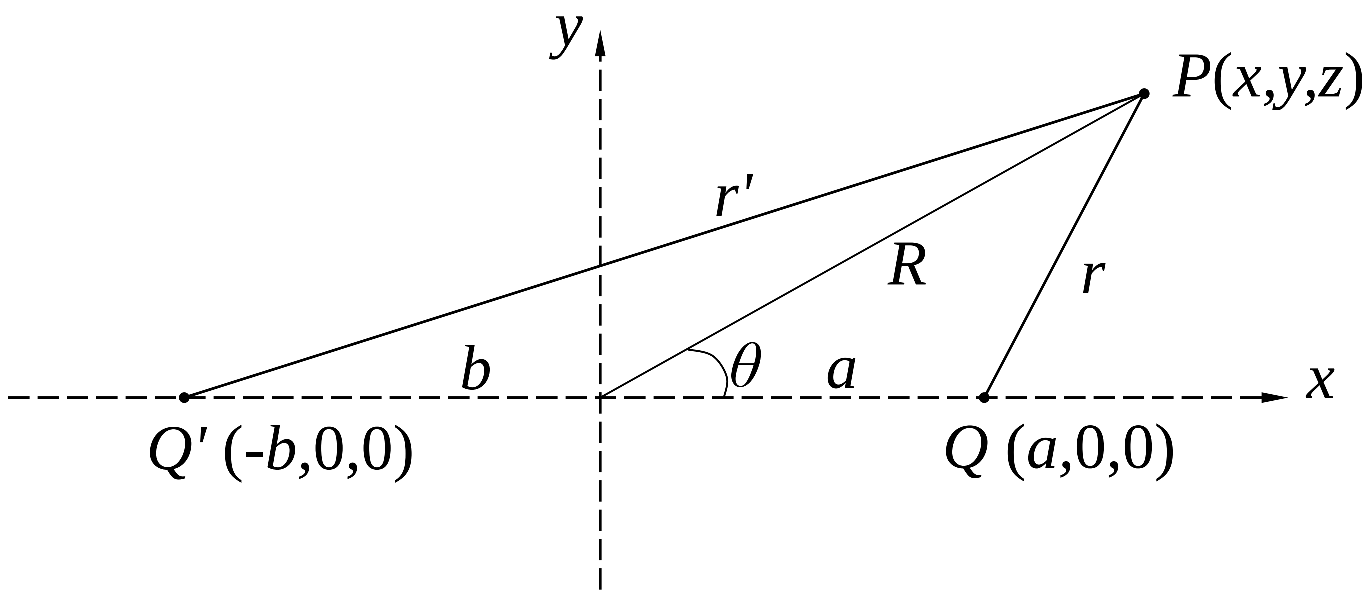


Solution:

根据静电屏蔽可判定接地导体板左半空间没有电场。右半空间的电场是Q及S面上的感应电荷面密度$\sigma_{感}$共同产生的。以假想的点电荷Q'等效地代替感应电荷，右半空间的电势必须满足以下条件：

$$
\begin{cases}
\nabla^2\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon_0} Q\delta(x-a, y-0, z-0) & (1) \\
\varphi\big|_{R\to\infty} = 0 & (2) \\
\varphi\big|_{x=0} = 0 & (3)
\end{cases}
$$

为了满足方程（1），假想的电荷Q'必须在左半空间内，这样才能使原方程不变，由（2）、（3）可求出Q'的位置及大小，等效图为



因此，在右半空间任一点的电势为：

$$\varphi_P = \varphi_Q + \varphi_{Q'}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q}{\left[(x-a)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}} + \frac{Q'}{\left[(x+b)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}}\right\}$$

这里因为：

$$\left[(x-a)^2 + y^2 + z^2\right] = \left[x^2 - 2ax + y^2 + z^2 + a^2\right]$$

$$= \left[R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta\right]$$

故有：

$$\varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q}{(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{1/2}}+\frac{Q'}{(R^2+b^2+2bR\cos\theta)^{1/2}}\right\}$$

由（3）式得到，要使该式成立，只有

$$\begin{cases} Q' = -Q \\ b = a \end{cases}$$

故得到

$$\varphi_p(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{1/2}}-\frac{1}{(R^2+a^2+2Ra\cos\theta)^{1/2}}\right]$$

▲现在求无限大接地导体板平面上的感应电荷分布情况：

根据导体平衡条件，导体面上有

$$E_n = -\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{x=0} = \sigma_{感} / \varepsilon_0$$

所以

$$\sigma_{感} = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{x=0}$$

其中 $$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{(x-a)}{\left[(x-a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}-\frac{(x+a)}{\left[(x+a)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}\Bigg|_{x=0}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

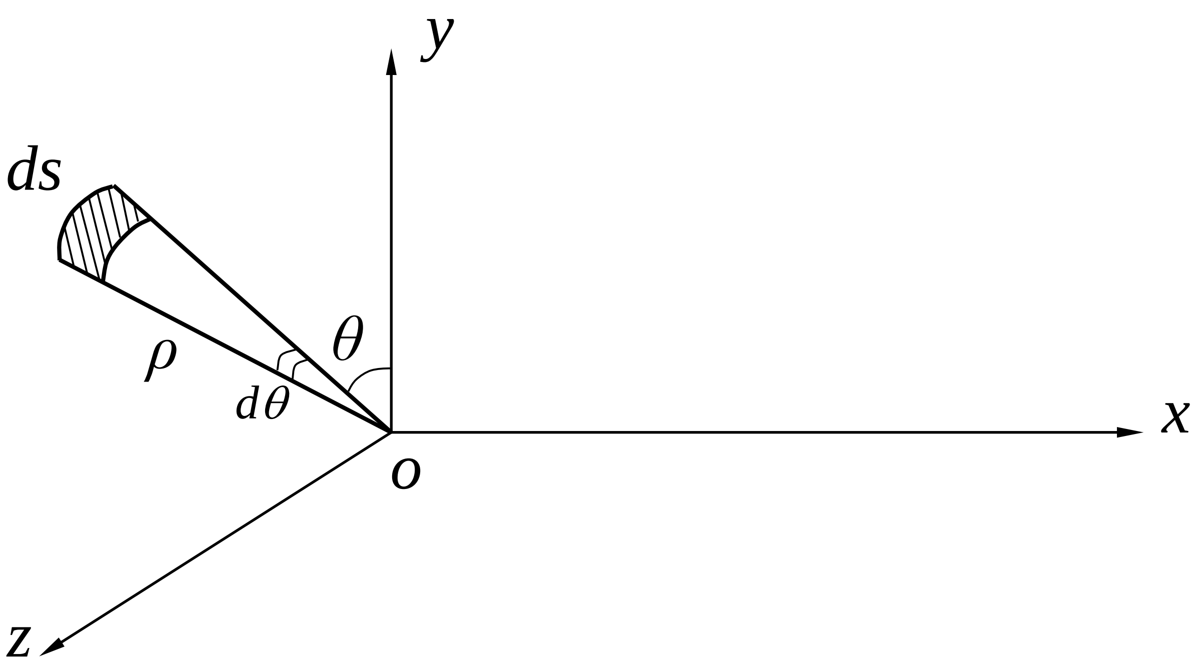
故

$$\sigma_{感} = -\frac{Q}{2\pi}\frac{a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

可见 Q' 与Q异号，这是合理的。

▲进一步求无限大导体面上的总感应电荷$Q_{感}$:

因为 S 板面在y , z平面上，



所以

$$Q_{感} = \iint\limits_{S} \sigma_{感} ds = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \sigma_{感} \rho d\theta d\rho \qquad [\rho^2 = t^2 + z^2]$$

$$= -\frac{aQ}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta d\rho}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}$$

$$= -aQ\left[-\frac{1}{(a^2+\rho^2)^{1/2}}\right]\Bigg|_0^{\infty}$$

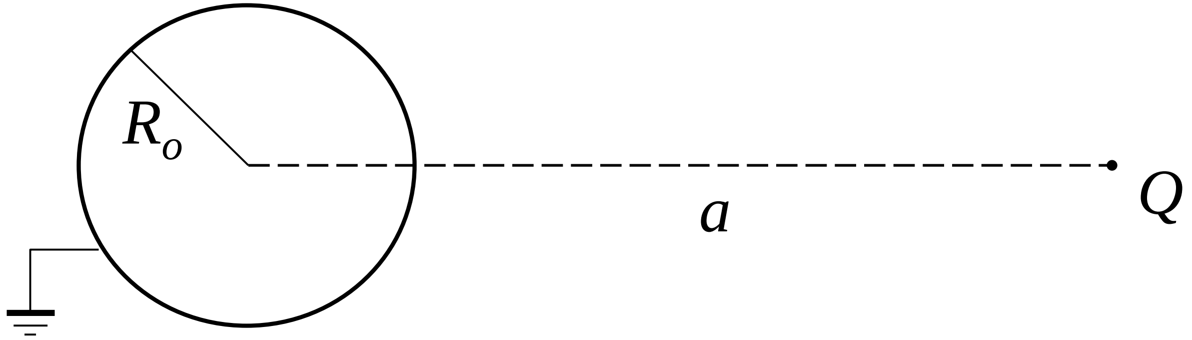
$$= -Q$$

故 $\quad Q_{感} = -Q$

可见，导体板面上总感应电荷$Q_{感}$恰好等于点是荷Q的电量。

（2）界面为球面的情况

[例3]有一半径为R_o的接地导体球，距球心为$a(a>R_o)$处有一点电荷Q，求空间的电势分布。



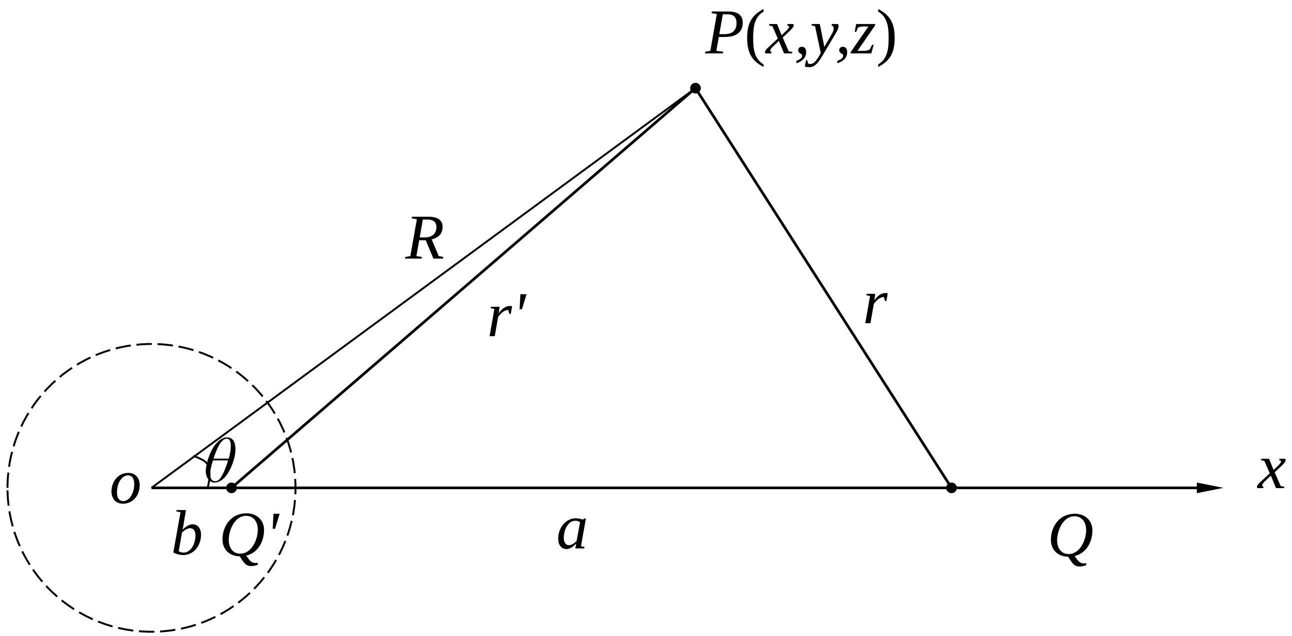
Solution:

取球心为坐标原点，球心到点电荷Q的方向为x轴，设Q的坐标为（a,0,0)。根据静电平衡条件（现象）。球内的电势为零。故只讨论外空间的电势即可。

球外空间的电势由Q及球面上感应电荷共同激发的，其电势所满足的定解条件为：

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon_0} Q\delta(x-a, y, z) & (1) \\ \varphi\big|_{R=R_0} = 0 & (2) \\ \varphi\big|_{R\to\infty} = 0 & (3) \end{cases}$$

用一个象电荷Q'来代替球面上的感应电荷，为了不改变原方程，Q'必须在球内，并距球心为b，故等效为：



球外空间一点的电势为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}+\frac{Q'}{r'}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q}{\left[(x-a)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}+\frac{Q'}{\left[(x-b)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\left[R^2+a^2-2Ra\cos\theta\right]^{1/2}}+\frac{Q'}{\left[R^2+b^2-2Rb\cos\theta\right]^{1/2}}\right]$$

在$b<R_0$的区域，不论Q‘取任何值，其解都满足方程和在无穷远处的边界条件。现在的问题是如何调整Q’和b的数值使得解也满足（2）式。因此，把（2）式用于其解，则

$$\varphi\big|_{R=R_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q}{(R_0^2+a^2-2R_0a\cos\theta)^{1/2}}+\frac{Q'}{(R_0^2+b^2-2R_0b\cos\theta)^{1/2}}\right\}$$

$$=0$$

则有：$Q^2(R_0^2+b^2-2R_0b\cos\theta)=Q'^2(R_0^2+a^2-2R_0a\cos\theta)$

移项得到

$$Q^2(R_0^2+b^2)-Q'^2(R_0^2+a^2)=2R_0\cos\theta(Q^2b-Q'^2a)$$

式中，左边为一常数，右边含有变量θ ，对任何θ 值都要使上式成立，只有使两边都等于零，即

$$\begin{cases} Q^2b=Q'^2a & (4) \\ Q^2(R_0^2+b^2)=Q'^2(R_0^2+a^2) & (5) \end{cases}$$

由（4）式得

$$Q'^2=\frac{b}{a}Q^2 \qquad (6)$$

将（6）式代入（5）式得

$$\frac{b}{a}(a^2+R_0^2)=(R_0^2+b^2)$$

即

$$b^2-\frac{1}{a}(a^2+R_0^2)b+R_0^2=0$$

解此二次方程，得到

$$\begin{cases} b=\dfrac{R_0^2}{a} \\ b=a \end{cases}$$

将此代入（6）式，即有

$$\begin{cases} Q' = \pm Q & (b = a\text{时}) \\ Q' = \pm \dfrac{R_0}{a} Q & (b = \dfrac{R_0^2}{a}\text{时}) \end{cases}$$

分析这里解的形式，可知b=a不符合物理要求，由于此时Q'在球外空间，改变了原方程，故b=a及Q'=±Q应该舍去。又由于（2）式的要求，$Q' = +\dfrac{R_0}{a}Q$ 不符合要求。至此只有解

$$\begin{cases} b = \dfrac{R_0^2}{a} \\ Q' = -\dfrac{R_0}{a} Q \end{cases} \tag{7}$$

才是符合要求的解。

因此，球外空间任一点的电势为

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{1/2}}-\frac{R_0/a}{(R^2+\frac{R_0^4}{a^2}-2R\frac{R_0^2}{a}\cos\theta)^{1/2}}\right] \qquad (8)$$

▲球面上的感应电荷面密度：

$$\sigma_{感}=-\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right|_{R=R_0}=-\frac{Q}{4\pi R_0 a}\frac{(1-\frac{R_0^2}{a^2})}{\left[1+\frac{R_0^2}{a^2}-2\frac{R_0}{a}\cos\theta\right]^{3/2}}$$

▲总感应电荷为

$$Q_{感} = \iint_S \sigma_{感} ds = \iint_S \sigma_{感} R_0^2 \sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{R_0}{a} Q$$

即感应电荷的大小等于象电荷Q'的大小。

▲根据上述例子，作如下几点讨论：

a) 导体球既不接地又不带电

这种情况与**[例3]**的差别仅在于边界条件，这里

$$\varphi\big|_{R=R_0} = \text{常数} \quad (\text{未知})$$

导体球不带电，即要求满足电中性条件

$$-\varepsilon_0 \oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0$$

显然，**[例3]**的解（8）式不满足电中性的条件，如果在

球内再添置一个象电荷 $Q'' = \frac{R_0}{a} Q$ 则满足电中性条

件，为了不破坏导体是等位体的条件，由对称性知道，Q''必须放在球心处，于是

$$\varphi_{外} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2R\cos\theta)^{1/2}} - \frac{R_0/a}{(R^2 + \frac{R_0^4}{a^2} - 2R\frac{R_0^2}{a}\cos\theta)^{1/2}} + \frac{R_0/a}{R} \right\} \qquad (R > R_0)$$

再由 $\quad \varphi_{内}\Big|_{R=R_0} = \varphi_{外}\Big|_{R=R_0}$

得到

$$\varphi_{内} = \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0 R_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

b)导体球不带电其电势的U_0

这种情况与**[例3]**的差别仍然在边界条件，这里

$$\varphi_{内}\Big|_{R=R_0} = U_0$$

U_0 是已知常数，导体球的电势为U_0，相当于在球心处放置了电量为 $4\pi\varepsilon_0 U_0 R_0$ 的点电荷，显然，其解为

$$\varphi_{外}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(R^2+a^2-2R\cos\theta)^{1/2}}-\frac{R_0/a}{(R^2+\frac{R_0^4}{a^2}-2R\frac{R_0^2}{a}\cos\theta)^{1/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{4\pi\varepsilon_0 U_0 R_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\right\}$$

由 $\varphi_{内}\big|_{R=R_0}=\varphi_{外}\big|_{R=R_0}$

得到

$$\varphi_{内}=U_0$$

c)若点电荷Q在导体球壳内距球心a处

这时与**[例3]**的情况相比，仅是源电荷的位置由球

外搬进到球内。此时，接地球壳外无场强，场的区域在球内。故可根据光路可逆性原理来解释：球内的电势等于源电荷Q和球面上的感应电荷（球壳内表面）

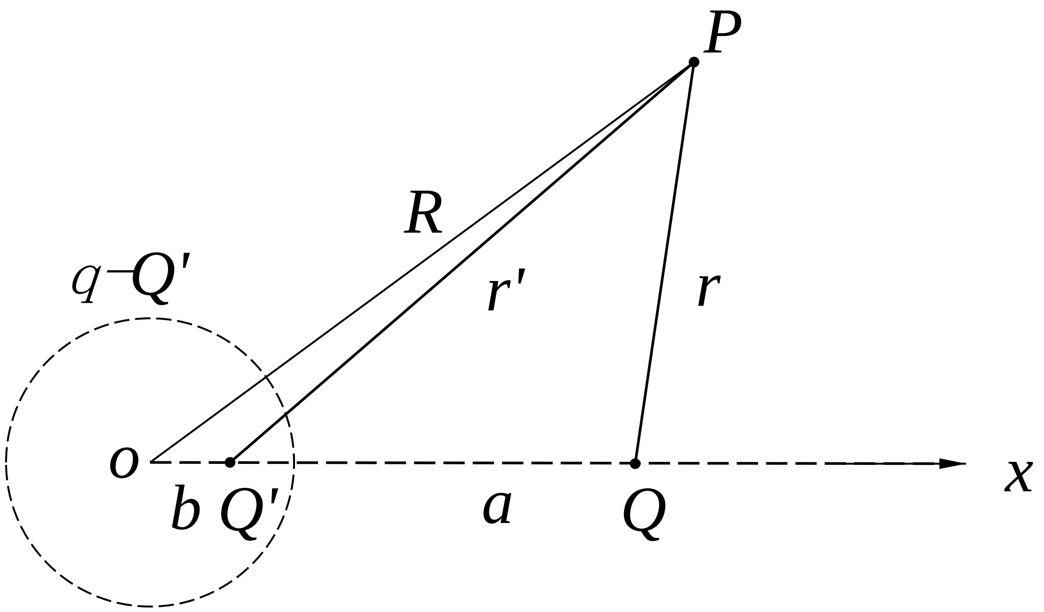
—象电荷Q'（在球外$\dfrac{R_0^2}{a}$ 处）产生的电势：

$$\varphi_{内} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{1/2}} - \frac{R_0/a}{\left(R^2+\frac{R_0^4}{a^2}-2R\frac{R_0^2}{a}\cos\theta\right)^{1/2}}\right\}$$

这里要注意：象电荷的电量Q'大于源电荷的电量Q，球内的电势与导体球是否接地、是否带电无关。

d) 若导体球带电q但不接地

这种情况的物理模型为：



则球心有电荷（$q-Q'$），则P点的电势为

$$\varphi_{外} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q}{(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{1/2}} - \frac{\frac{R_0}{a}Q}{\left(R^2+\frac{R_0^4}{a^2}-2R\frac{R_0^2}{a}\cos\theta\right)^{1/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{q+\frac{R_0}{a}Q}{R}\right\}$$

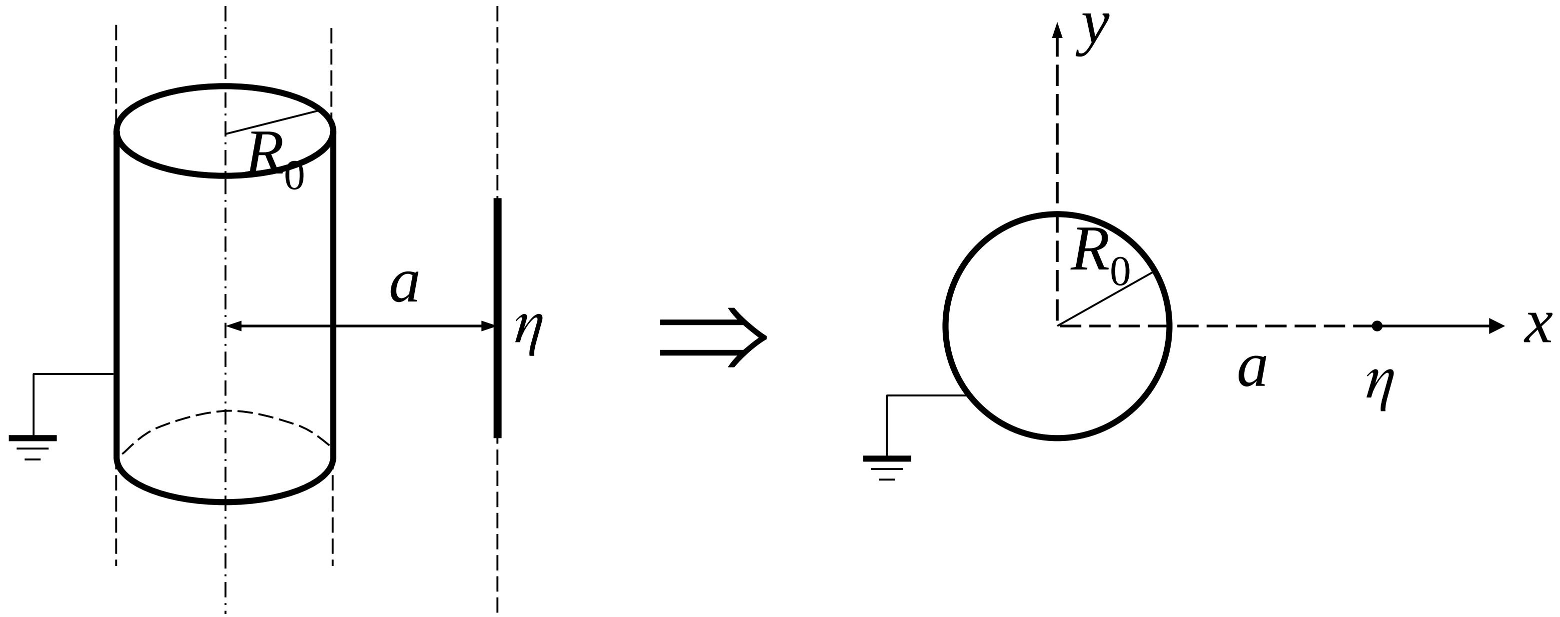
由 $\varphi_{内}\Big|_{R=R_0} = \varphi_{外}\Big|_{R=R_0}$ 得到

$$\varphi_{内} = \frac{Q'+q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} = \frac{q+\frac{R_0}{a}Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}$$

（3）界面为柱面的情况

[例5]有一线电荷要密度为η的无限长带电直线与半径为R_0的接地无限长导体园柱轴线平行。直线与园柱轴

线的距离为$a(a>R_0)$，试求空间的电势分布。



Solution:

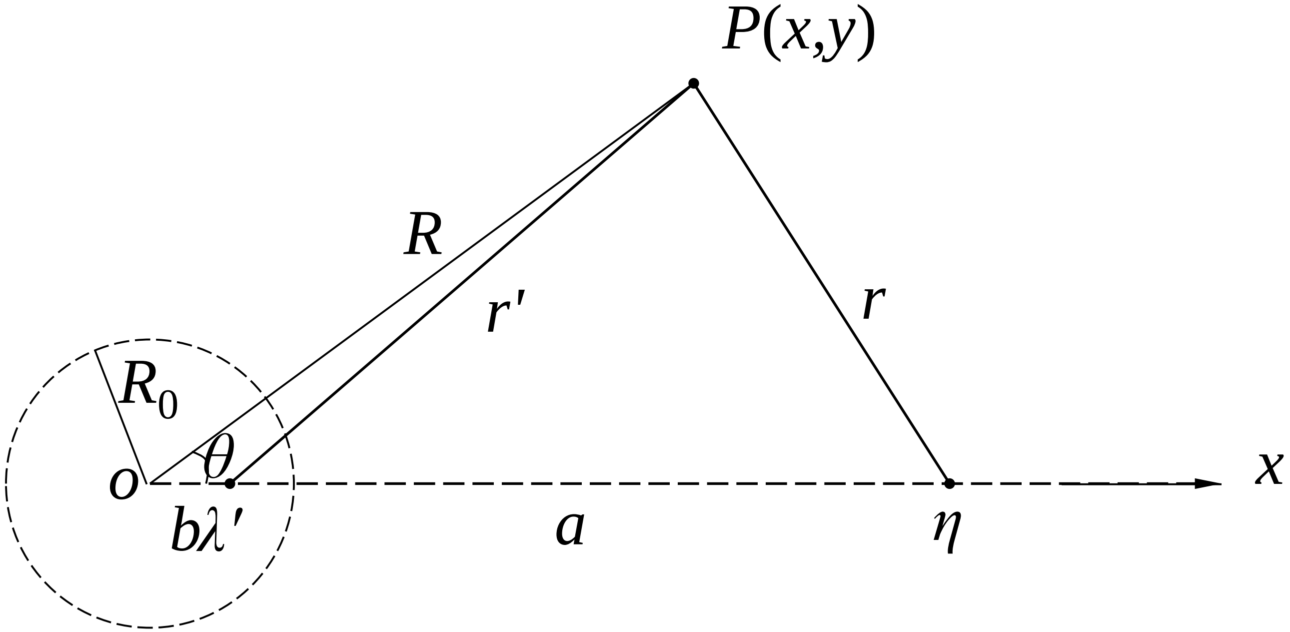
由于导体柱面把整个空间分成柱内、柱外两个区域，而柱内有$\varphi_{内}=0$ ，柱外区域电势满足定解条件：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_{外} = -\dfrac{1}{\varepsilon_0} \eta \delta(x-a, y) & (1) \\ \varphi_{外}\big|_{R=R_0} = 0 & (2) \end{cases}$$

处于带电直线的电场中的导体园柱，其柱面上要出现感应电荷，空间任一点的电势$\varphi_{外}$ 就是带电线和感应电荷分别产生的电势的迭加。

现在，假定导体园柱面的感应电荷密度为λ' ，到轴线的距离为b，由于原带电直线不仅带电（均匀）而且是无限长的，导体园柱也是无限长的，故垂直于柱轴的任何平面上的电势分布是完全相同的，即是一个二维场，因此可取一个垂直于柱轴的平面来讨论

即



若取*oa*连线与圆柱面的交点为电势参考点。则园柱外空间任一点的电势为

$$\varphi = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{a-R_0} - \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r'}{R_0-b}$$

其中

$$r=\left[(x-a)^2+y^2\right]^{1/2}=\left[R^2+a^2-2Ra\cos\theta\right]^{1/2}$$

$$r'=\left[(x-b)^2+y^2\right]^{1/2}=\left[R^2+b^2-2Rb\cos\theta\right]^{1/2}$$

由（2）式得

$$\varphi\Big|_{R=R_0}=-\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(R_0^2+a^2-2R_0a\cos\theta)^{1/2}}{a-R_0}$$

$$-\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(R_0^2+b^2-2R_0b\cos\theta)^{1/2}}{R_0-a}$$

$$=0$$

即

$$\ln\left[\frac{(R_0^2+a^2-2R_0a\cos\theta)^{1/2}}{a-R_0}\right]^{-\eta}=\ln\left[\frac{(R_0^2+b^2-2R_0b\cos\theta)^{1/2}}{R_0-b}\right]^{\lambda'}$$

要使该等式成立，必有

$$\begin{cases}-\eta=\lambda' & (3)\\ \dfrac{(R_0^2+a^2-2R_0a\cos\theta)^{1/2}}{a-R_0}=\dfrac{(R_0^2+b^2-2R_0b\cos\theta)^{1/2}}{R_0-b} & (4)\end{cases}$$

由（4）式，即有

$$(R_0^2+a^2-2R_0a\cos\theta)(R_0-b)^2=(R_0^2+b^2-2R_0b\cos\theta)(a-R_0)^2$$

比较两边系数，即

$$\begin{cases}(R_0^2+a^2)(R_0-b)^2=(R_0^2+b^2)(a-R_0)^2 & (5)\\ -2R_0a\cos\theta(R_0-b)^2=-2R_0b\cos\theta(a-R_0)^2 & (6)\end{cases}$$

由（6）式得

$$\frac{R_0^2}{b}+b=a+\frac{R_0^2}{a} \qquad (7)$$

化简（7）式得到：

$$ab^2-b(a^2+R_0^2)+aR_0^2=0$$

解这下一元二次方程得到

$$b_1=a\,, \qquad b_2=\frac{R_0^2}{a}$$

其中 $b_1=a$不符合物理要求。

故有：

$$\begin{cases} \lambda' = -\eta & \rightarrow \text{相当于平板时电荷情况} \\ b = \dfrac{R_0^2}{a} & \rightarrow \text{相当于球面距离情况} \end{cases}$$

因而柱面外任一点的势为

$$\varphi = -\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{a-R_0} + \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r'}{R_0 - \dfrac{R_0^2}{a}}$$

$$= \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\ln\frac{r}{a-R_0} + \ln\frac{ar'}{R_0(a-R_0)}\right]$$

$$= \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{\dfrac{ar'}{R_0(a-R_0)}}{\dfrac{r}{a-R_0}}\right]$$

$$= \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{ar'}{R_0 r}\right)$$

电多极矩

数学准备

在一元函数*f* (*x*)情况下，在原点*x*=0邻域的泰勒级数为：

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2!}x^2f''(0)+\cdots$$

如果在*x*=*a*邻域展开，泰勒级数是：

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2\frac{1}{2!}f''(a)+\cdots$$

对于三元函数*f* (*x*,*y*,*z*)，在原点*x*=0, *y*=0, *z*=0邻域的泰勒级数是：

$$f(x,y,z)=f(0,0,0)+x\frac{\partial}{\partial x}f(0,0,0)+y\frac{\partial}{\partial y}f(0,0,0)+z\frac{\partial}{\partial z}f(0,0,0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right]^2 f(0,0,0)+\cdots$$

如果在*x*=*a*,*y*=*b*,*z*=*c*点邻域展开，且展开式为

$$f(x,y,z)=f(a,b,c)+\frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}+(z-c)\frac{\partial}{\partial z}\right]f(a,b,c)$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}+(z-c)\frac{\partial}{\partial z}\right]^2 f(a,b,c)+\cdots$$

$$=f(a,b,c)+(x-a)\frac{\partial}{\partial x}f(a,b,c)+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}f(a,b,c)$$

$$+(z-c)\frac{\partial}{\partial z}f(a,b,c)+\frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b,c)\right.$$

$$+(y-b)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b,c)+(z-c)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(a,b,c)$$

$$+2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a,b,c)+2(y-b)(z-c)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}f(a,b,c)$$

$$\left.+2(z-c)(x-a)\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}f(a,b,c)\right]+\cdots$$

有了以上泰勒级数展开式，把$\dfrac{1}{r}$代替$f(x)$，因r是$\vec{x},\vec{x}'$ 的函数，即 $r=\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|$ 。把 $\vec{x}$ 场点固定不变。而让源点$\vec{x}'$变化，并把$\vec{x}'$在原点o附近展开，且有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\bigg|_{\vec{x}'=0} &+ x'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\vec{x}'=0} + y'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\vec{x}'=0} \\
&+ z'\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\vec{x}'=0} + \frac{1}{2!}\Bigg[x'^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\vec{x}'=0} \\
&+ y'^2\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\vec{x}'=0} + z'^2\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\vec{x}'=0} \\
&+ 2x'y'\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\vec{x}'=0} + 2y'z'\frac{\partial^2}{\partial y'\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\vec{x}'=0} \\
&+ 2z'x'\frac{\partial^2}{\partial z'\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\vec{x}'=0}\Bigg] + \cdots
\end{aligned}
$$

因为

$$\nabla' = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x'} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y'} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\vec{x}' = \vec{i}\,x' + \vec{j}y' + \vec{k}z'$$

$$\vec{x}' \cdot \nabla' = x'\frac{\partial}{\partial x'} + y'\frac{\partial}{\partial y'} + z'\frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\vec{x}'\vec{x}' : \nabla'\nabla' = x'^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + y'^2\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + z'^2\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + 2x'y'\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'} + 2y'z'\frac{\partial^2}{\partial y'\partial z'} + 2z'x'\frac{\partial^2}{\partial z'\partial x'}$$

所以

$$\frac{1}{r} = \left.\frac{1}{r}\right|_{\vec{x}'=0} + \vec{x}' \cdot \nabla'\left.\frac{1}{r}\right|_{\vec{x}'=0} + \frac{1}{2!}\vec{x}'\vec{x}' : \nabla'\nabla'\left.\frac{1}{r}\right|_{\vec{x}'=0} + \cdots$$

因为 $\left.\dfrac{1}{r}\right|_{\vec{x}'=0}=\left.\dfrac{1}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{1/2}}\right|_{x'=0,y'=0,z=0}=\dfrac{1}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}=\dfrac{1}{R}$

及

$$\nabla'\left.\frac{1}{r}\right|_{\vec{x}'=0}=-\nabla\left.\frac{1}{r}\right|_{\vec{x}'=0}=-\nabla\frac{1}{R}$$

$$\nabla'\nabla'\left.\frac{1}{r}\right|_{\vec{x}'=0}=\nabla\nabla\left.\frac{1}{r}\right|_{\vec{x}'=0}=\nabla\nabla\frac{1}{R}$$

所以

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}-\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}\vec{x}'\vec{x}':\nabla\nabla\frac{1}{R}+\cdots$$

其中

$$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\vec{x}}{R^3},\qquad \nabla\nabla\frac{1}{R}=\frac{(3\vec{x}\vec{x}-R^2\overleftrightarrow{I})}{R^5}$$

偶极子和四极子

两个电量相等而反号的点电荷对，q在$\vec{x}'_+$处，-q在$\vec{x}'_-$处。则电势为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{|\vec{x}-\vec{x}'_+|}+\frac{-q}{|\vec{x}-\vec{x}'_-|}\right)$$

若我们感兴趣的是它在远处$|x|>>|\vec{x}'_+|,|\vec{x}'_-|$产生的电场。则把第一项在 $\vec{x}'_+=0$ 附近展开，第二项在 $\vec{x}'_-=0$ 附近展开，

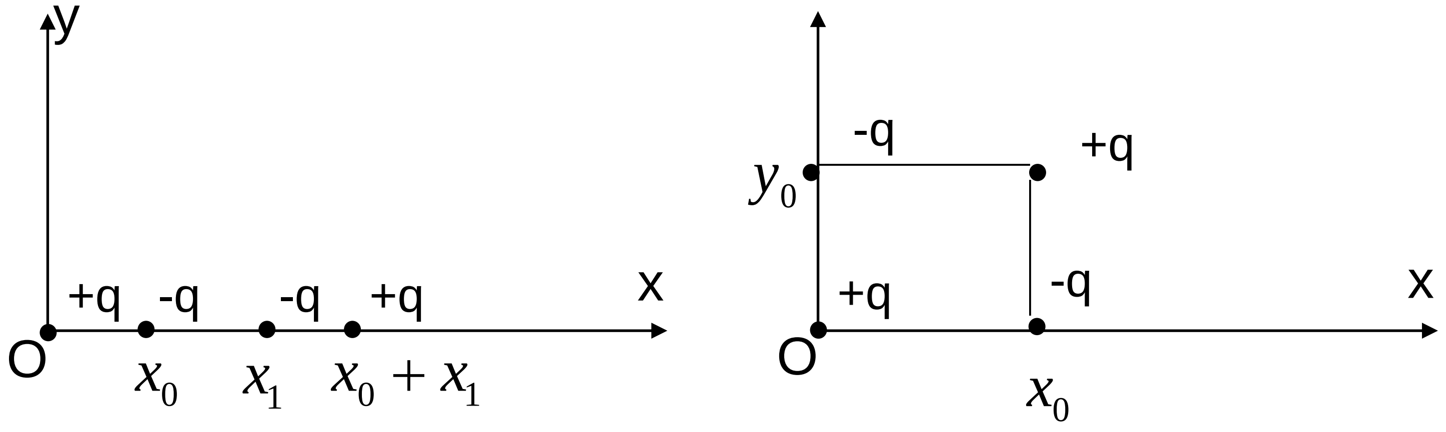
$$\frac{q}{|\vec{x}-\vec{x}'_+|}=\frac{1}{R}+\frac{\vec{x}'_+\cdot\vec{x}}{R^3}$$

$$\frac{-q}{|\vec{x}-\vec{x}'_-|}=-\frac{1}{R}-\frac{\vec{x}'_-\cdot\vec{x}}{R^3}$$

得到电势的非零领头项为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{R^3},\qquad 其中\ \vec{p}=q(\vec{x}'_+-\vec{x}'_-)$$

进一步讨论四极子概念。如图两种四个点电荷构成的系统。求它们在远处的近似场。



(a) (b)

(a)图系统所产生的电场

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{|\vec{x}|}+\frac{-q}{|\vec{x}-\vec{x}_0'|}+\frac{-q}{|\vec{x}-\vec{x}_1'|}+\frac{q}{|\vec{x}-(\vec{x}_0'+\vec{x}_1')|}\right)$$

在 $x_0=x_1=0$ 附近展开

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{|\vec{x}|}+\frac{-q}{|\vec{x}-\vec{x}_0'|}+\frac{-q}{|\vec{x}-\vec{x}_1'|}+\frac{q}{|\vec{x}-(\vec{x}_0'+\vec{x}_1')|}\right)$$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0'|}=\frac{1}{R}+\frac{\vec{x}_0'\cdot\vec{x}}{R^3}+\frac{\vec{x}_0'\vec{x}_0':(3\vec{x}\vec{x}-R^2\overleftrightarrow{I})}{2R^5}+\cdots$$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1'|}=\frac{1}{R}+\frac{\vec{x}_1'\cdot\vec{x}}{R^3}+\frac{\vec{x}_1'\vec{x}_1':(3\vec{x}\vec{x}-R^2\overleftrightarrow{I})}{2R^5}+\cdots$$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0'-\vec{x}_1'|}=\frac{1}{R}+\frac{(\vec{x}_0'+\vec{x}_1')\cdot\vec{x}}{R^3}+\frac{(\vec{x}_0'+\vec{x}_1')(\vec{x}_0'+\vec{x}_1')_0:(3\vec{x}\vec{x}-R^2\overleftrightarrow{I})}{2R^5}+\cdots$$

得到电势的领头项

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{(\vec{x}_0'\vec{x}_1'+\vec{x}_1'\vec{x}_0'):(3\vec{x}\vec{x}-R^2\overleftrightarrow{I})}{2R^5}$$

同理可得（b）图系统的领头项

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{(\vec{x}_0'\vec{y}_0' + \vec{y}_0'\vec{x}_0'):(3\vec{x}\vec{x} - R^2\overleftrightarrow{I})}{2R^5}$$

人们把严格按这种公式描述的电场叫四极场，场源叫四极子。为此我们引入四极矩概念。 $\overleftrightarrow{D}$ 定义为

$$\overleftrightarrow{D} = \sum_n q_n \vec{x}_n \vec{x}_n$$

对于(a)图系统，只有一个非零分量，即

$$D_{xx} = 2qx_0x_1$$

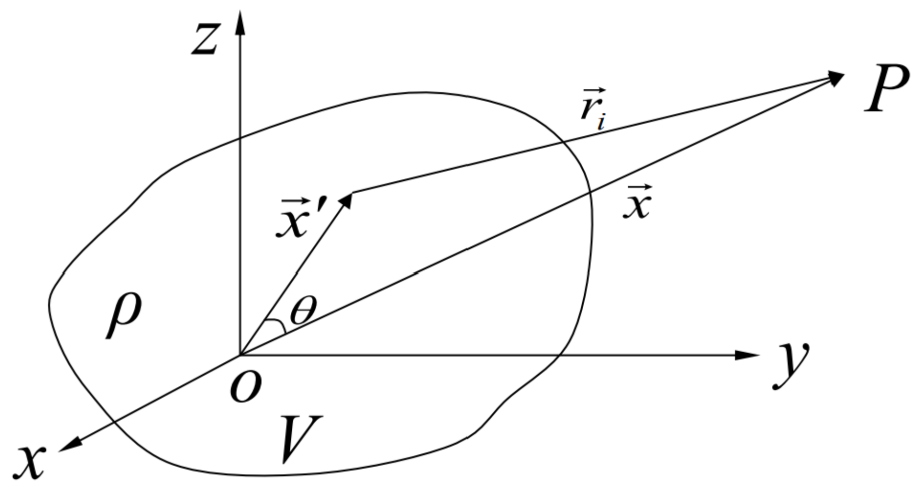
对于(b)图系统，只有两个非零分量，即

$$D_{xy} = D_{yx} = qx_0y_0$$

连续分布电荷体系的多极子展开式

若区域V内电荷是连续分布的，且电势为

$$\varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r} d\tau'$$



由于源点到场点的距离远大于带电区域V的线度，故可将对　在原点附近作泰勒级数展开。

得到

$$\varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\left[\frac{1}{R} - \vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R} + \frac{1}{2!}\vec{x}'\vec{x}':\nabla\nabla\frac{1}{R} + \cdots\right]d\tau'$$

令

$$Q = \int_V \rho(\vec{x}')d\tau'$$

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{x}')\vec{x}'d\tau'$$

$$\overleftrightarrow{D} = \int_V 3\vec{x}'\vec{x}'\rho(\vec{x}')d\tau'$$

故得到 $$\varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R} - \vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R} + \frac{1}{6}\overleftrightarrow{D}:\nabla\nabla\frac{1}{R} + \cdots\right]$$

讨论展开式的每项物理意义：

▲展开式的第一项：

$$\varphi_{(0)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

表示体系总电荷集中于原点的势，它作为小区域带电系在观察点 $\vec{x}$ 的势的零级近似。

▲展开式的第二项：

$$\varphi_{(1)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(-\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3}$$

表示体系总偶极子集中于原点处，对场点产生的势，它作为体系在观察点 $\vec{x}$ 的势的一级近似。

▲展开式的第三项：

$$\varphi_{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D}:\nabla\nabla\frac{1}{R}$$

表示体系总四极矩集中于原点处，对场点产生的势它作为体系在观察点 $\vec{x}$ 的势的二级近似。

综上所述，展开式表明：一个小区域内连续分布的电荷在远处激发的场等于一系列多极子在远处激发的场的迭加。

讨论：

（1）如果带电体系的总电荷为零，计算电势时必须考虑偶极子，只有对原点不对称的电荷分布才有电偶极矩；如果带电体系的总电荷为零，总电偶极矩也为零，计算电势时必须考虑电四极矩。只有对原点不是球对称的电荷分布才有电四极矩。

（2）对电四极矩 $\overleftrightarrow{D}$ 的进一步认识

电偶极矩 $\overleftrightarrow{D}$ 是一个张量，有9个分量，即

$$\overleftrightarrow{D} = \int_V 3\vec{x}'\vec{x}'\rho(\vec{x}')d\tau'$$

也可以写成

$$D_{ij} = \int_V 3x_i'x_j'\rho(\vec{x}')d\tau'$$

其中 *i*, *j*=1,2,3

▲ 下面主要证明电四极矩 $\overleftrightarrow{D}$的9个分量，只有5个分量是独立的：

a） 因为 $D_{12} = D_{21}$ ，$D_{13} = D_{31}$ ，$D_{32} = D_{23}$ 。则 $\overleftrightarrow{D}$ 的9个分量只有6个分量独立。

b) 又因为

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = 0 \qquad (R \neq 0)$$

即

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = \sum_{i \cdot j} \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} \delta_{ij} = \overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla \frac{1}{R} = 0$$

这里的 $\overleftrightarrow{I} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}$ 为单位张量。

现在，选择一个量 $\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_V \rho(\vec{x}')r'^2 d\tau'\right]$ 乘以$\nabla^2\frac{1}{R}$

故有

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_V \rho(\vec{x}')r'^2 d\tau'\nabla^2\frac{1}{R}$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_V \rho(\vec{x}')r'^2 \overleftrightarrow{J}:\nabla\nabla\frac{1}{R}d\tau' = 0$$

将此式加到 $\varphi_{(2)}$ 中去，并不改变 $\varphi_{(2)}$ 的值，即

$$\varphi_{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{6} \int_V (3\vec{x}'\vec{x}')\rho(\vec{x}')d\tau' : \nabla\nabla \frac{1}{R}$$

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{6} \int_V r'^2 \rho(\vec{x}')d\tau' \overleftrightarrow{J} : \nabla\nabla \frac{1}{R}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{6} \int_V (3\vec{x}'\vec{x}' - r'^2 \overleftrightarrow{J})\rho(\vec{x}')d\tau' : \nabla\nabla \frac{1}{R}$$

重新定义：

$$\overleftrightarrow{D} = \int_V (3\vec{x}'\vec{x}' - r'^2 \overleftrightarrow{J})\rho(\vec{x}')d\tau'$$

或者

$$D_{ij} = \int_V (3x_i'x_j' - r'^2 \delta_{ij})\rho(\vec{x}')d\tau'$$

根据$\overleftrightarrow{D}$ 的重新定义式可以看到：

$$
\begin{aligned}
D_{11}+D_{12}+D_{33} &= \int_V (3x'^2-r'^2)\rho(\vec{x}')d\tau' \\
&\quad + \int_V (3y'^2-r'^2)\rho(\vec{x}')d\tau' \\
&\quad + \int_V (3z'^2-r'^2)\rho(\vec{x}')d\tau' \\
&= \int_V 3(x'^2+y'^2+z'^2-r'^2)\rho(\vec{x}')d\tau' \\
&= \int_V 3(r'^2-r'^2)\rho(\vec{x}')d\tau' \\
&= 0
\end{aligned}
$$

由此可见，$\overleftrightarrow{D}$ 张量的9个分量只有5个分量是独立的。

若电荷球对称分布，则显然有 $D_{12}=D_{23}=D_{31}=0,$

$$\int_V x'^2\rho(\vec{x}')d\tau'=\int_V y'^2\rho(\vec{x}')d\tau'=\int_V z'^2\rho(\vec{x}')d\tau'=\frac{1}{3}\int_V r'^2\rho(\vec{x}')d\tau'$$

按照$\overleftrightarrow{D}$ 老的定义，四极矩 $D_{11}=D_{22}=D_{33}\neq 0,$ 而四极场

$$\overleftrightarrow{D}:\nabla\nabla\frac{1}{R}=\overleftrightarrow{D}:\frac{(3\vec{x}\vec{x}-R^2\overleftrightarrow{I})}{R^5}=D_{11}\frac{(3x^2-R^2)}{R^5}+D_{22}\frac{(3y^2-R^2)}{R^5}+D_{33}\frac{(3z^2-R^2)}{R^5}=0$$

按照$\overleftrightarrow{D}$ 老的定义，四极矩

$$D_{11}=D_{22}=D_{33}=0,$$

因此球对称电荷分布没有电四极矩。事实上，球对称电荷分布没有各级多极矩。

（例）均匀带电的长形旋转椭球半长轴为a，半短轴为b，总荷为Q，求它相对于椭球中心的电四极矩以及它在远处的电势。

解 取z轴为旋转轴，椭球方程为：$\dfrac{x^2+y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$

体积为$\dfrac{4}{3}\pi ab^2$ 体系总电荷为Q，其密度为 $\rho=\dfrac{3Q}{4\pi ab^2}$

由于对称性体系的电偶极距为零。因此电四极距是重要的

$$\overleftrightarrow{D}=\int_V(3\vec{x}'\vec{x}'-r'^2\overleftrightarrow{I})\rho(\vec{x}')d\tau'$$

由对称性 $$\int_V xyd\tau' = \int_V yzd\tau' = \int_V zxd\tau' = 0$$

因此 $$D_{12} = D_{23} = D_{31} = 0$$

由对称性 $$\int_V x^2 d\tau' = \int_V y^2 d\tau' = \frac{1}{2}\int_V x^2 + y^2 d\tau'$$

令 $x^2 + y^2 = s^2$

$$\int_V x^2 d\tau' = \int_V y^2 d\tau' = \frac{1}{2}\int_V s^2 dzdxdy = \frac{1}{2}\int_V s^2 dz(sdsd\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} dz \int_0^{b(1-\frac{z^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}} ds \int_0^{2\pi} d\theta s^3 = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} dz \int_0^{b(1-\frac{z^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}} 2\pi s^3 ds$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}dz\int_{0}^{b(1-\frac{z^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}}2\pi s^3 ds$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}dz 2\pi\left.\frac{s^4}{4}\right|_{0}^{b(1-\frac{z^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}dz 2\pi\frac{b^4(1-\frac{z^2}{a^2})^2}{4}$$

$$=\frac{4\pi ab^2}{15}$$

同样可得到 $\int\limits_V z^2 d\tau'=\frac{4\pi a^3 b^2}{15}$

$$D_{33}=\rho\int\limits_V(3z^2-r^2)d\tau'=\rho\int\limits_V(2z^2-2x^2)d\tau'$$

$$=\frac{3Q}{4\pi ab^2}\cdot\left(\frac{8\pi a^3b^2}{15}-\frac{8\pi a\ b^4}{15}\right)=\frac{2}{5}(a^2-b^2)Q$$

$$D_{11}=D_{22}=-\frac{1}{2}D_{33}=-\frac{1}{5}(a^2-b^2)Q$$

电四极距产生的势

$$\frac{1}{24\pi\varepsilon_0}(D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+D_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2})\frac{1}{R}$$

$$=\frac{1}{24\pi\varepsilon_0}D_{33}[-\frac{1}{2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}]\frac{1}{R}$$

$$\because \nabla^2\frac{1}{R}=0,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})\frac{1}{R}=-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{R}$$

$$=\frac{1}{24\pi\varepsilon_0}\frac{3}{2}D_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{R}=\frac{Q}{40\pi\varepsilon_0}(a^2-b^2)\frac{3z^2-R^2}{R^5}$$

$$=\frac{Q}{40\pi\varepsilon_0}(a^2-b^2)\frac{3\cos^2\theta-1}{R^3}$$

电荷体系在外电场中的能量

外场电势为 φ_e，电荷分布为 ρ 的体系在外电场中的能量为

$$W=\int_V \rho(\vec{x})\varphi_e(\vec{x})d\tau$$

假设电荷系ρ分布的区域V是外场中一个小区域，在其中外场的势 φ_e 变化不大，取其中一点为坐标原点，则可对 在原点附近作泰勒级数展开：

$$\varphi_e(\vec{x})=\varphi_e(0)+(\vec{x}\cdot\nabla)\varphi_e(0)+\frac{1}{2!}(\vec{x}\vec{x}:\nabla\nabla)\varphi_e(0)+\cdots$$

则得 $$W=\int_V \rho(\vec{x})\left[\varphi_e(0)+(\vec{x}\cdot\nabla)\varphi_e(0)+\frac{1}{2!}(\vec{x}\vec{x}:\nabla\nabla)\varphi_e(0)+\cdots\right]d\tau$$

$$=W^{(0)}+W^{(1)}+W^{(2)}+\cdots$$

$$W=\int_V \rho(\vec{x})\left[\varphi_e(0)+(\vec{x}\cdot\nabla)\varphi_e(0)+\frac{1}{2!}(\vec{x}\vec{x}:\nabla\nabla)\varphi_e(0)+\cdots\right]d\tau$$
$$=W^{(0)}+W^{(1)}+W^{(2)}+\cdots$$

其中：展开式第一项

$$W^{(0)}=\int_V \rho(\vec{x})\varphi_e^{(0)}d\tau=Q\varphi_e^{(0)}$$

表示把体系电荷集中于原点时，一个点电荷在外场中的能量，作为零级近似的结果。

展开式第二项：

$$W^{(1)}=\int_V \rho(\vec{x})(\vec{x}\cdot\nabla)\varphi_e(0)d\tau=\vec{p}\cdot\nabla\varphi_e=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)$$

表示把体系的电偶极矩集中到原点时，一个电矩在外场中的能量，作为一级近似的结果。

展开式的第三项：

$$W^{(2)}=\int_V \rho(\vec{x})\frac{1}{2!}(\vec{x}\vec{x}:\nabla\nabla)\varphi_e(0)d\tau$$

$$=\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D}:\nabla\nabla\varphi_e(0)=-\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D}:\nabla\vec{E}_e(0)$$

表示把体系的电四极矩集中到原点时，一个电四极矩在外场中的能量，作为二级近似的结果。

综上所述，一个小区域内连续分布的电荷在外场中的能量等于一系列多极子在外场中的能量之和。

电偶极子在外场中所受到的力和力矩

一个电偶极子在外场中的能量为

$$W^{(1)} = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)$$

若电偶极子相对外场有一平移或转动，而偶极矩的大小和外场保持不变，则由平移或转动引起的系统能量的变化也就等于相互作用能的变化，即

$$\Delta W = \Delta W^{(1)}$$

若偶极矩平移 $\delta\vec{r}$ ，则从能量守恒得

$$\vec{F}\cdot\delta\vec{r} = -\delta W_i^{(1)} = \nabla(\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0))\cdot\delta\vec{r}$$

即 $$\vec{F} = \nabla(\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0))$$

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}_e(0))$$

利用 $\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g}) = \vec{f} \times (\nabla \times \vec{g}) + (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} + \vec{g} \times (\nabla \times \vec{f}) + (\vec{g} \cdot \nabla)\vec{f}$

而 $\vec{p}$ 为常矢，$\nabla \times \vec{E} = 0$　即得

$$\vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}_e(0)$$

同理，将偶极矩转动一个$\delta\theta$ ，力矩 $\vec{N}$ 作的功为$\vec{N}\cdot\delta\vec{\theta}$
故

$$\vec{N}\cdot\delta\vec{\theta} = -\delta W^{(1)} = \delta(\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)) = \delta\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)$$

因为 $\vec{p}$ 的大小不变，仅改变方向，故

$$\delta\vec{p} = \delta\vec{\theta}\times\vec{p}$$

这样，且有
$$\vec{N}\cdot\delta\vec{\theta} = (\delta\vec{\theta}\times\vec{p})\cdot\vec{E}_e(0)$$
$$= (\vec{p}\times\vec{E}_e(0))\cdot\delta\vec{\theta}$$

即得到
$$\vec{N} = \vec{p}\times\vec{E}_e(0)$$