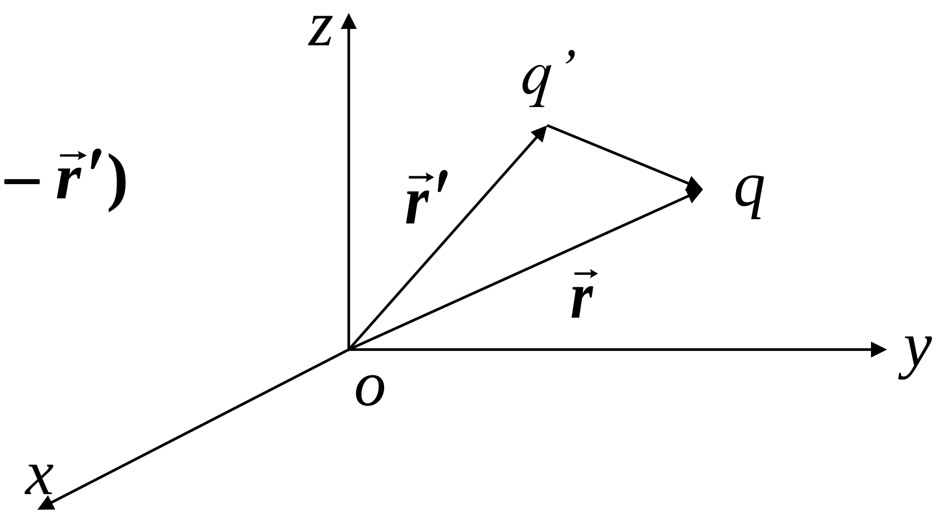
第一章　经典电动力学基础
（电磁现象的普遍规律）

1.1 静电场的方程式

库仑定律（Coulomb's law)

Coulomb's law是描写真空中两个静止的点电荷q'和q之间相互作用力的定律。其数学表达式为

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}e(\vec{r}-\vec{r}')$$



库仑定律有哪些性质

A 反平方律

B 力沿径向

C 适用于任何带电体

D 原子核内不适用

提交

叠加原理（principle of superposition)

若空间存在n个电荷$q1, q2\cdots qn$，这时任意一个电荷qj，受到其它所有电荷对它的作用力为

$$\vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_j q_i}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|^2} e\left(\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|\right)$$

电场强度（electric field）

电场强度$\boldsymbol{E}$被定义为电位电荷在场中所受的力。若电荷$\boldsymbol{q_0}$在场中某处$\boldsymbol{r}$ 受力F，则该处的电场强度为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}/q_0$$

库仑定律告诉我们，一个点电荷$\boldsymbol{q}$ 周围的电场分布为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}e(r)$$

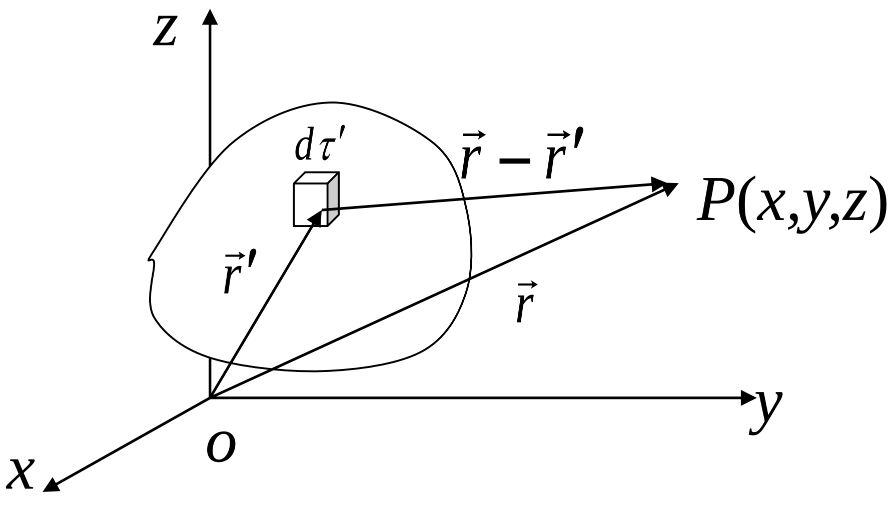
电场的叠加原理

多个电荷同时产生的电场 $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + \cdots$ 即

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i e(\vec{r}-\vec{r}_i')}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|^2}$$

一般地，引入电荷密度 ρ 来描写源的电量分布，它产生电场为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')e(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^r}d\tau'$$



在源电荷为点状分布时，电荷密度用δ 函数表示

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

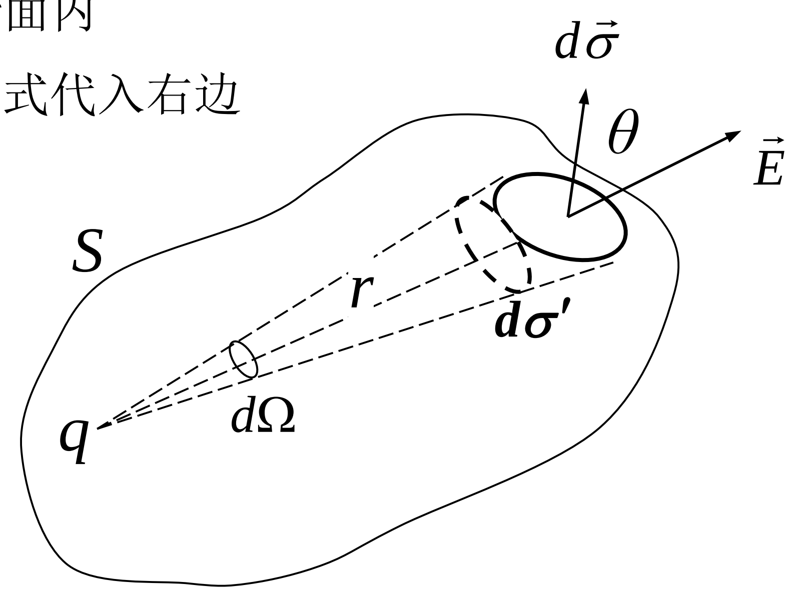
静电场所满足的微分方程

按高斯定理，有 $$\iiint \nabla \cdot \vec{E} \mathrm{d}\tau = \oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$$

Gauss' theorem主要是讨论电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的面积分，在点电荷场中，设s表示包围着点电荷q的一个闭合面,$d\vec{\sigma}$ 为s上的定向面元，以外法线方向为正。

a) 如果点电荷q在s面内

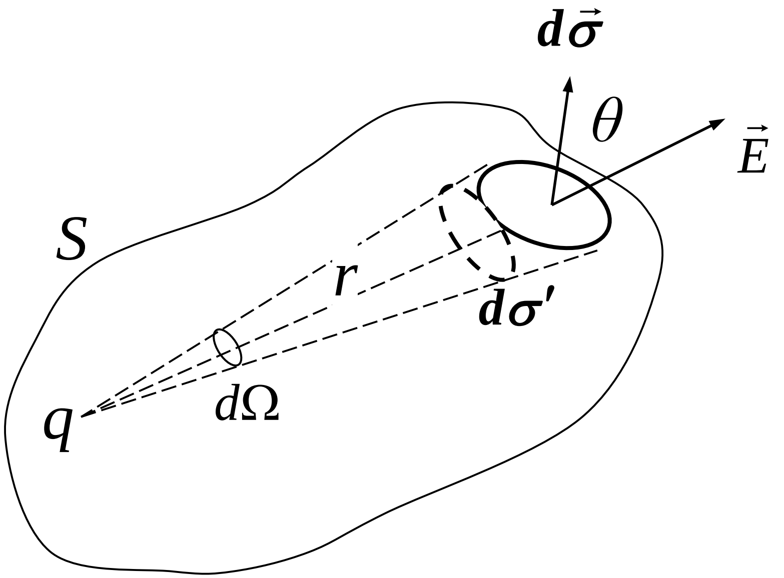
把单个电荷的电场公式代入右边



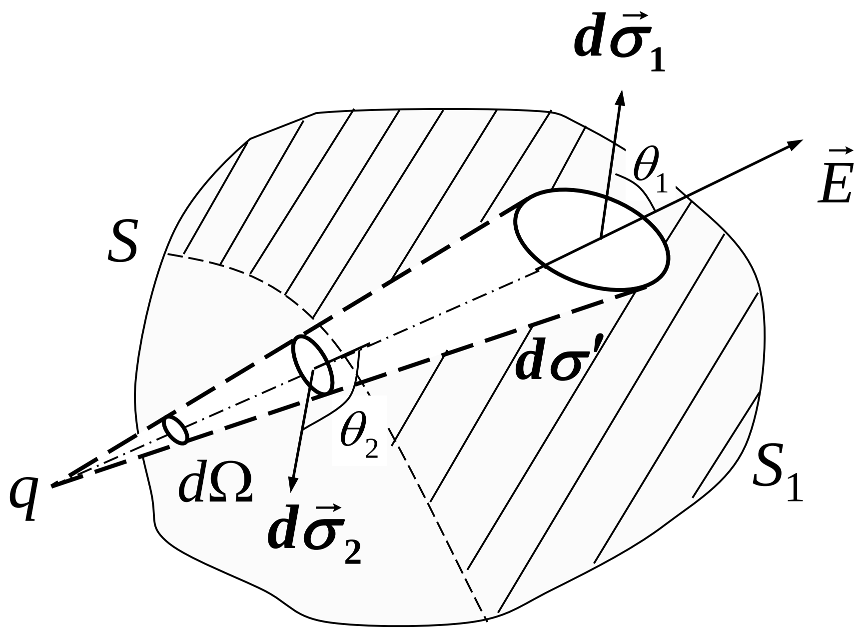
$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{\sigma} = \oiint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{\sigma} = \oiint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr\cos\theta d\sigma}{r^3}$$

$$= \oiint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cos\theta d\sigma}{r^2} = \oiint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd\sigma'}{r^2}$$

$$= \oiint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qd\Omega = q/\varepsilon_0$$



b) 如果点电荷q在S面外，把S面分成两部分，照明部分$S2$和阴影部分$S1$



$$\therefore \qquad \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\iint_{S_2} d\Omega + \iint_{S_1} d\Omega\right] = 0$$

由此可得到结论：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{\sigma}=\begin{cases} q/\varepsilon_0 & q在S面内 \\ 0 & q在S面外 \end{cases}$$

根据叠加原理，在点电荷系场中，则存在着如下形式：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{\sigma}=\iint_S(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_k+\cdots+\vec{E}_n)\cdot d\vec{\sigma}$$

设$q1,q2,\cdots qk$在S内，$qk+1,qk+2,\cdots qn$在S外，则有

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{\sigma}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{k}q_i=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

这里q仅仅是封闭曲面S内的总电荷

对于连续分布的电荷体系来说，则有

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho d\tau$$

因此，得到

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho d\tau$$

因为，体积分是任意取的，所以两边被积函数必须相等

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

作为偏微分方程，只有此式不构成完备的方程组

多选题 1分

设置

静电场满足高斯定理有那些性质决定

A 静电场满足叠加原理

B 库仑力的反平方律

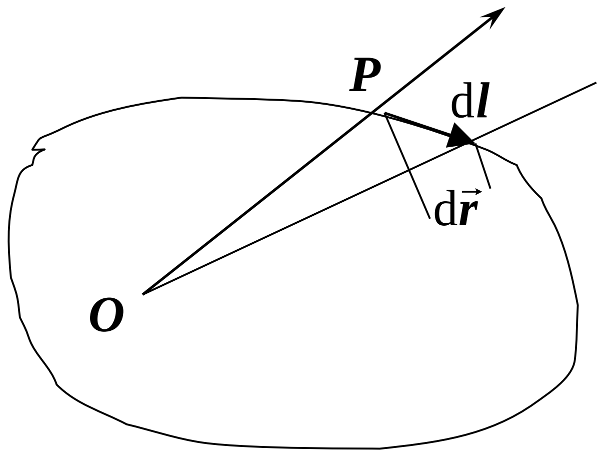
C 库仑力沿径向

D 只有闭合曲面内的电荷对曲面电场有贡献

提交

因此，我们计算电场强度的旋度。由斯托克斯定理知

$$\iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{\sigma} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



最后，我们根据以下两个方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r}) \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$

多选题 1分

设置

静电场无旋有那些性质决定

A 静电场满足叠加原理

B 库仑力的反平方律

C 库仑力沿径向

D 只有闭合曲面内的电荷对曲面电场有贡献

提交

1.2 静磁场的方程式

电流密度（Current density)

$$\vec{j} = \rho\vec{v}$$

电流强度(Current intensity)

单位时间内垂直穿过导线横截面的电量称为电流强度，用***I***表示，显然*I*与 j 的关系为

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

电荷守恒(Conservation of Charge)

对于封闭系统，总电荷保持不变。实验表明电荷是守恒的。即一处电荷增加了，另一处的电荷必然减少，而且增加和减少的量值相等。

若在通有电流的导体内部，任意找出一个小体积*V*，包围这个体积的闭合曲面为*S*，并且假定电流从体积*V*的一面流入，从另一面流出。单位时间内穿过*S*曲面流出去的电量为

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

单选题 1分

设置

电流密度取决于带点粒子速度和电荷密度

A 是

B 否

提交

而流出去的电量应该等于封闭曲面S内总电荷在单位时间内的减少量，即

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau = -\oint\!\!\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{\sigma}$$

根据Gauss' theorem，有

$$\int_V (\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t})d\tau = 0$$

由于曲面S是任意选取的，所以被积函数恒为零，即

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

这就是电荷守恒定律的数学表达式,也称连续性方程。

在稳定电流的情况下，由于 $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ ，所以稳定电流条件为

$$\nabla\cdot\vec{j} = 0$$

单选题 1分

设置

电荷守恒是

A 局域守恒

B 总体守恒

提交

单选题 1分

设置

稳恒电流场必然是

A 有源有旋场

B 有源无旋场

C 无源有旋场

D 无源无旋场

提交

磁场（magnetic field)

稳定电流周围有静磁场，同时磁场对电流有作用力。与静磁场有关的规律有三点

（1）$\boldsymbol{r}'$ 处的电流元 $\vec{j}(\boldsymbol{r}')d\tau'$ 在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 为

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(\vec{r}')\times e(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}d\tau'$$

（2）满足叠加原理

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')\times e(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}d\tau'$$

毕奥——萨伐尔定律（Biot-Savart’s law)

（3）磁场对电流的力密度为

$$\vec{f} = \vec{j}\times\vec{B}$$

洛伦兹力公式

磁场的散度和旋度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')\times e(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}d\tau'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{x}')\times\nabla\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\times\vec{j}(\vec{x}')d\tau'$$

式中∇ 是对场点$\vec{r}$ 微分，与源点$\vec{r}'$无关，运用公式 $\nabla\times(\varphi\vec{f}) = \nabla\varphi\times\vec{f} + \varphi\nabla\times\vec{f}$

从而得到 $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\times\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d\tau'$$

因为积分是对$\vec{r}'$而言的，所以∇ 可以提到积分号外，故

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$ 其中 $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d\tau'$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

这是磁感应强度满足的一个微分方程

磁场的旋度

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \left[\nabla \times \vec{A}\right] = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

先看右边第一项

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

运用公式

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{f}) = \nabla \varphi \cdot \vec{f} + \varphi \nabla \cdot \vec{f}$$

得到

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \vec{j}(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}')\right] d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \vec{j}(\vec{r}') d\tau'$$

因为 $$\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=-\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V(-\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})\cdot\vec{j}(\vec{r}')d\tau'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\nabla'\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau'-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}')\right]d\tau'$$

对于稳恒电流， $\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}')=0$ 故有

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r})=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla'\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot d\vec{S}'$$

由于电流应全部包含在积分区域内，因而在边界面上电流密度的法向分量应为零，即得到

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

再看第二项

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla^2 \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau'$$

利用 $$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')$$

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\left[-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')\right]\boldsymbol{d}\tau'$$

$$= -\mu_0\int_V \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')\boldsymbol{d}\tau'$$

$$= -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

最后得到 $$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}$$

$$= \mu_0\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

至此，我们得到了静磁场的两个基本方程：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0\\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}=\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}\end{cases}$$

1.3 电磁感应定律

变化磁场产生电场

闭合线圈中的感应电动势与通过该线圈内部的磁通量变化率成正比

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\frac{d}{dt}\iint_S\vec{B}\cdot d\vec{\sigma}$$

又由于感应电场的存在，则 $\varepsilon=\oint_L\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$

所以 $$\oint_L\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

即

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{E}_{感} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{s} = 0$$

由于S曲面是任意的，要使上式成立，除非是

$$\nabla \times \vec{E}_{感} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \dfrac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = -\dfrac{\partial \vec{B}(\vec{x})}{\partial t} \end{cases}$$

1.4麦克斯韦方程

已有的电磁场方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0 \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j} \end{cases}$$

分别在一定的条件下成立

同时有电荷守恒方程

$$\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

与上面第四式矛盾

对第四式求散度

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})=\mu_0\nabla\cdot\vec{j}=0$$

一般情况下不成立

为了与电荷守恒方程兼容，应该修改第四式（磁场还有其他来源），修改为

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_{\mathrm{d}})$$

$\vec{j}_{\mathrm{d}}$ **位移电流（displacement current)**

为了不和电荷守恒矛盾，应当有

$$\nabla \cdot \vec{j}_d = -\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \nabla \cdot (\frac{\partial E}{\partial t})$$

因此，麦克斯韦把位移电流定义为

$$\vec{j}_d == \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

修改以后得到方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

这就是真空中的

Maxwall' s equations

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

电荷守恒方程

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

洛伦兹力

1.5电磁作用下的能量守恒定理

在既有电荷和电流，又有电磁和磁场的空间内取一个任意的封闭区域V。

$$\iiint_V W d\tau = -\frac{d}{dt}\iiint_V w d\tau - \oiint \vec{S}\cdot d\sigma$$

W是电磁力的功率密度，w是电磁场的能量密度，$\vec{S}$是能流密度

利用高斯定理后，可改成微分形式

$$W = -\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla\cdot\vec{S}$$

这是电磁作用下，能量守恒应该有的数学形式，下面我们证明此形式
首先，有洛伦兹力公式导出电磁力的功率密度。磁力不做功

$$W = \vec{E}\cdot\vec{j}$$

由麦克斯韦第四方程

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

得

$$W=\vec{E}\cdot\vec{j}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{B}-\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

看右边第一项，按 $\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot\nabla\times A-A\cdot\nabla\times B$

$$\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{B}=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})+\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E}$$

$$=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})-\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

代回上式

$$W=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)$$

电磁场的能量密度 $$w=\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)$$

电磁场的能流密度

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

1.6电磁作用下的动量守恒定理（略）

1.7介质的电磁性质

我们知道，无论什么介质，从微观上看都是由带正负电的粒子组成的集合，介质的存在相当于真空中存在着大量的带电粒子，因此从这个角度看介质的存在本质上没有什么特殊的地方。宏观电动力学不是考察个别粒子产生的微观电磁场，而是考察它们的宏观平均值。由于介质在宏观电磁场的作用下，将导致极化和磁化，即出现宏观的电荷和电流，这些附加的电荷和电流也要激发电磁场，使原来的宏观电磁场有所改变。所以在介质的极化和磁化过程中，电荷和电场、电流和磁场是互相制约的，介质的内部宏观电磁现象就是这些电荷、电流分布和电磁场之间相互作用的结果。

介质的极化（**polarization of dielectric)**

介质的极化说明介质对电场的反映，在有电场的情况下，介质中的正负电荷分别受到方向相反的作用力，因此正负电荷间的距离拉开了。另外，那些有极分子在电场作用下按一定方向有序排列，从宏观上来看这两种行为都相当于产生了一个电偶极矩。

在电磁学中，曾引进了极化强度矢量：

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta\tau}$$

其中$\vec{p}_i$是第 i 个分子的电偶极矩，即 $\vec{p}_i = q_i \vec{l}_i$ ，求和是对$\Delta\tau$ 体积中所有分子进行的。

极化强度P和电磁强度E的关系取决于介质的组分和热力学状态，难以有普遍适用的规律。经验表明，在一般介质中，它们满足简单的线性关系，即

$$\vec{p} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

χ_e 叫极化率，$\vec{E}$是介质中受极化影响后的场强

介质的磁化（magnetization of dielectric)

原子和分子的磁性来自它的磁矩，磁矩则来自组分粒子的轨道运动和自旋，我们等效看作微观环形电流，这种环形电流相当于一个磁偶极子。在没有外磁场时，这些磁矩取向是无规则的，不呈现宏观电流效应，一旦在外磁场作用下，环形电流出现有规则取向，形成宏观电流效应，这就是磁化现象。

在电磁学中，引入了磁化强度矢量$\vec{M}$，其定义为单位体积内的磁偶极子数，即

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta\tau}$$

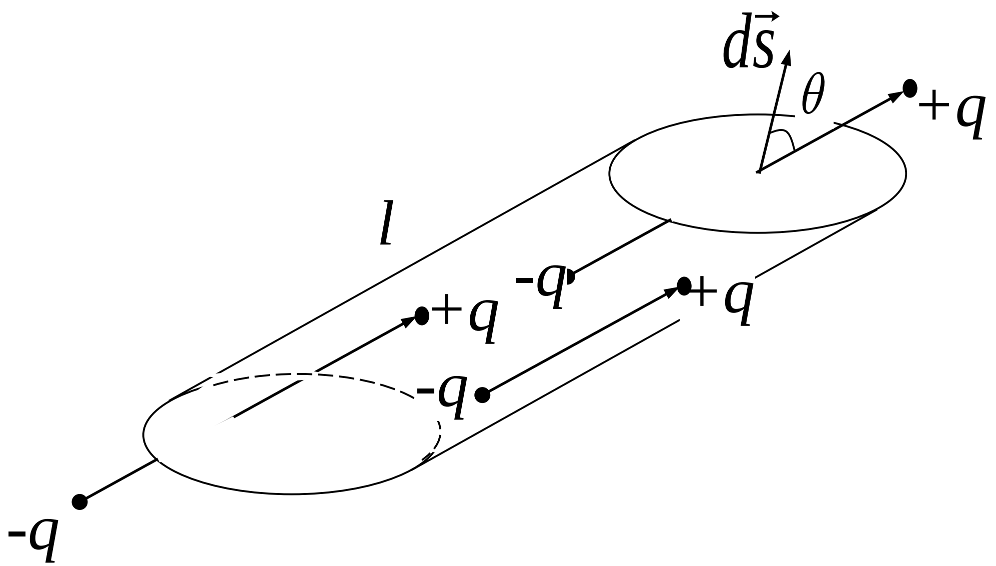
在一般介质中，满足简单的线性关系 $$\vec{M} = \frac{\lambda_m}{\mu_0}\vec{B}$$

1.8介质中的麦克斯韦方程

电磁场可以极化和磁化介质，极化和磁化的介质也将影响电磁场。按照麦克斯韦方程，带电系统对电磁场的影响是通过电荷和电流实现的。因此我们先分析极化和磁化引起的电荷分布和电流分布。

a) 极化电荷体密度与极化强度的关系

若极化时正负电荷拉开的位移为 $\vec{l}$ ，设介质分子密度为*n*，则通过 $d\vec{s}$ 面跑出去的正电荷数目为 $nd\vec{s}\cdot\vec{l}$



从 $d\vec{s}$ 面跑出去的电荷 $dQ = qn\vec{l}\cdot d\vec{s} = \vec{p}\cdot d\vec{s}$,于是通过任一封闭曲面跑出去的总电荷为

$$Q = \oint\!\!\!\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{s}$$

由于介质是电中性的，$\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{s}$ 也等于V内净余的负电荷，即 $Q_p = -Q = -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{s}$

因为 $Q_p = \int_V \rho_p d\tau$ 式中V是S所包围的体积，所以

$$\int_V \rho_p d\tau = -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{s} = -\int_V \nabla\cdot\vec{P} d\tau$$

即

$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P}$$

b) 极化电流密度与极化强度的关系

当电场随时间改变时，极化过程中正负电荷的相对位移也将随时间改变，由此产生的电流称为极化电流。极化电流和极化电荷也满足连续性方程：

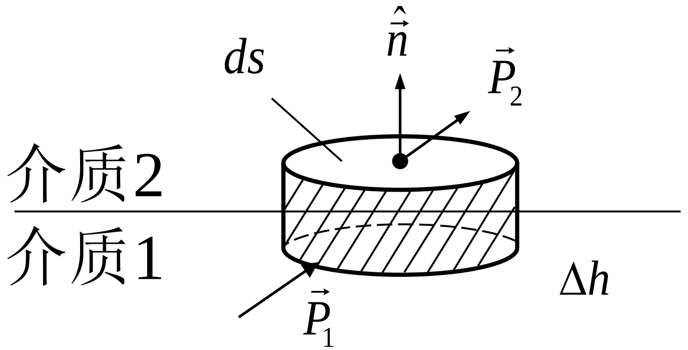
$$\nabla\cdot\vec{j}_p + \frac{\partial\rho_p}{\partial t} = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{j}_p = -\frac{\partial\rho_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{P} = \nabla\cdot\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

$\vec{j}_p = \dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ 称为极化电流密度

c) 极化电荷面密度与极化强度的关系

因为在非均匀介质内部，极化后一般出现极化电荷。在均匀介质中，极化电荷只出现在介质界面上。在介质1和介质2分界面上取一个面元为 ，在分界面两侧取一定厚度的薄层，使分界面包围在薄层内。



通过薄层进入介质2的正电荷为$\vec{P}_2 \cdot d\vec{s}$，由介质1通过薄层下侧面进入薄层的正电荷为 $\vec{P}_1 \cdot d\vec{s}$ 因此薄层出现的净余电荷为

$$dQ_p = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot d\vec{s}$$

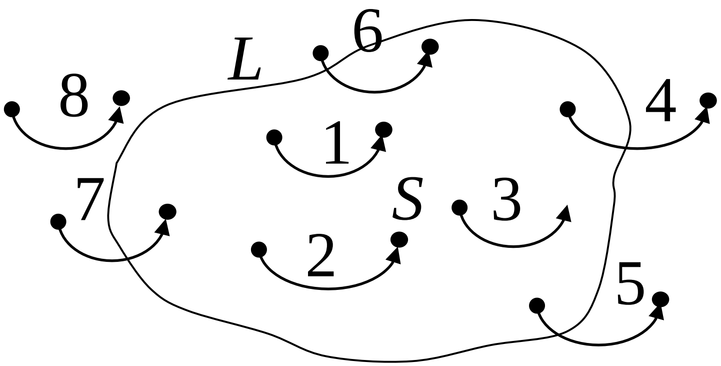
以σ_p 为极化电荷面密度，则有 $\sigma_p ds = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot d\vec{s} = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \hat{\vec{n}} ds$

得到

$$\sigma_p = -\hat{\vec{n}} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

a) 磁化电流密度与磁化强度的关系

由于磁化，引起介质内部环形电流有规则取向，呈现宏观电流效应，这种由磁化引起的电流称为磁化电流。



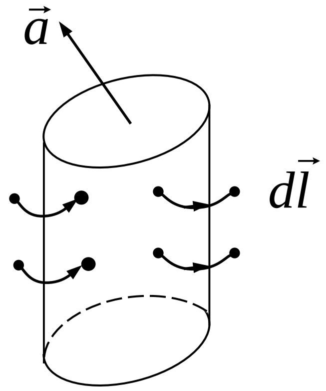
设*S*为介质内部的一个曲面，其边界线为*L*，环形电流通过*S*面有两种情况:

一种是在*S*面中间通过两次的环形电流，为1、2、3，这种电流环对总电流没有贡献；而另一种是在*S*面中间通过一次的环流，如4、5、7，这种电流环对总电流有贡献，但这种情形只能发生在边界上。当然，在*S*面外的电流环8，对总电流同样无贡献。

每一个环形电流贡献为*i* 或-*i*，在*S*面上一共有多少这种电流呢？

在边界线*L*上取一线元 $d\vec{l}$，设环形电流圈 的面积为$\vec{a}$ ，则

由图可见，若分子中心位于体积元 $\vec{a}\cdot d\vec{l}$ 的柱体内，则该环形电流就被 $d\vec{l}$ 所穿过。因此，若单位体积



内分子数为n，则被边界线L穿过的环形电流数目为 $\oint_L n\vec{a}\cdot d\vec{l}$

此数目乘上每个环形电流i，即得从S背面流向前面的总磁化电流：

$$I_m = \oint_L in\vec{a}\cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

以 $\vec{j}_m$表示磁化电流密度，有

$$\iint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$= \iint_S (\nabla\times\vec{M})\cdot d\vec{s}$$

所以

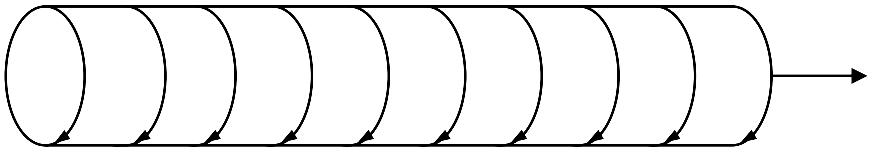
$$\iint_S (\vec{j}_m - \nabla\times\vec{M})\cdot d\vec{S} = 0$$

故得

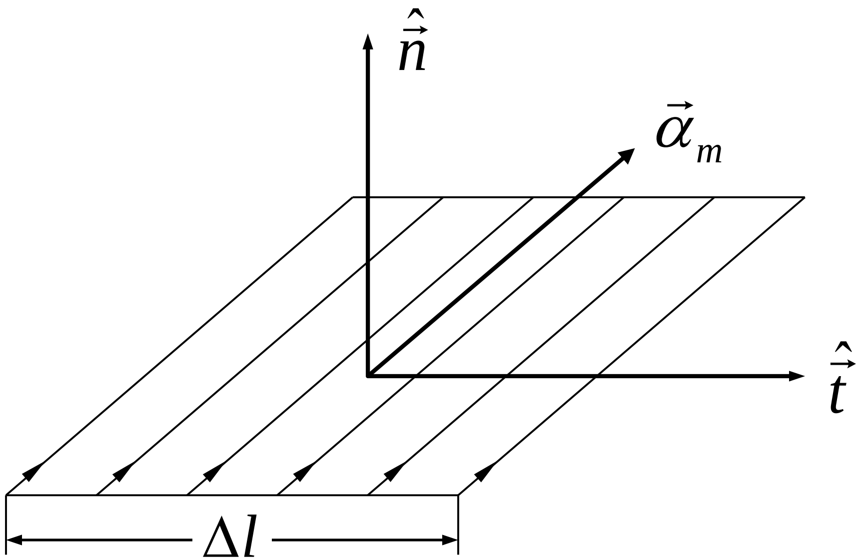
$$\vec{j}_m = \nabla\times\vec{M}$$

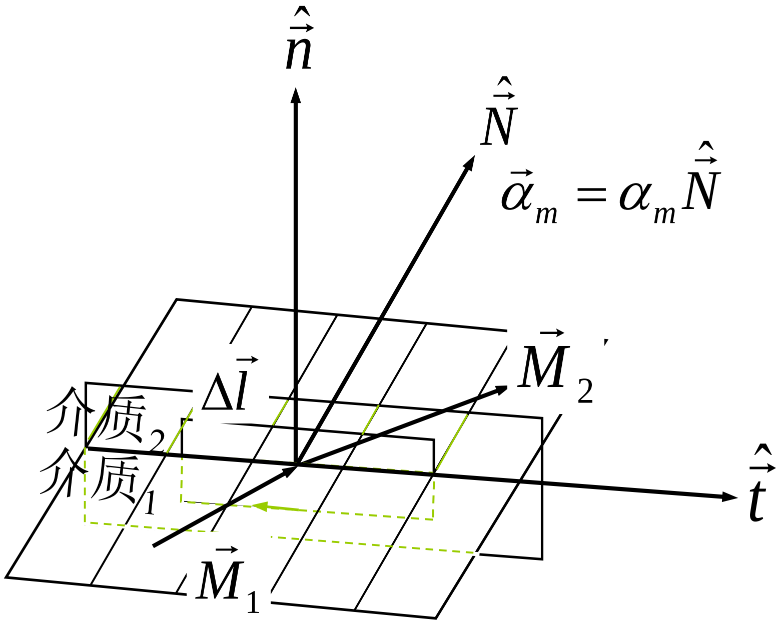
b) 磁化电流面密度与磁化强度的关系

对于均匀介质，磁化后介质内部的$\vec{M}$为一常矢量。可见 $\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M} = 0$ ，即介质内部 $\vec{j}_m = 0$ 。但表面上却有电流分布。



为此，要引入面电流密度的概念。面电流实际上是靠近表面的相当多分子层内的平均宏观效应，对于宏观来说薄层的厚度趋于零，则通过电流的横截面变为横截线。面电流密度（或叫线电流密度）的大小定义为垂直通过单位横截面（现在为线）的电流,它们方向即为该点电流的方向。





现在来看两介质交界面上的磁化电流分布情况。如图所示的回路中，有

$$\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} = I_m$$

$$\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)\cdot \Delta l\hat{\vec{t}} \qquad I_m = \vec{\alpha}_m \cdot \Delta l \hat{\vec{N}}$$

$$= \vec{\alpha}_m \cdot \Delta l(\hat{\vec{n}}\times\hat{\vec{t}})$$

即 $$\vec{\alpha}_m \cdot (\hat{\vec{n}} \times \hat{\vec{t}}) = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \cdot \hat{\vec{t}}$$

根据矢量分析

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

则得到

$$\hat{\vec{t}} \cdot (\vec{\alpha}_m \times \hat{\vec{n}}) = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \cdot \hat{\vec{t}}$$

即

$$\vec{\alpha}_m \times \hat{\vec{n}} = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

又因为

$$\hat{\vec{n}} \times (\vec{\alpha}_m \times \hat{\vec{n}}) = (\hat{\vec{n}} \cdot \hat{\vec{n}}) \vec{\alpha}_m - \hat{\vec{n}} (\hat{\vec{n}} \cdot \vec{\alpha}_m)$$

$$= \vec{\alpha}_m$$

故得到

$$\vec{\alpha}_m = \hat{\vec{n}} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

由上述讨论可知，介质存在时空间电荷包括自由电荷和极化电荷，即

$$\rho = \rho_f + \rho_p = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}$$

介质中出现的电流有传导电流、极化电流、磁化电流。

即 $$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_p + \vec{j}_m = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}$$

因此，在介质存在的情况下，Maxwell’s equations 应修改为：

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) \\
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_f + \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}) + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{cases}
$$

若令

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

则得到

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

1.9介质界面上的电磁规律

大家知道, 由于在外场作用下，介质分界面上一般出现一层束缚电荷和电流分布，这些电荷、电流的存在又使得界面两侧场量发生跃变，这种场量跃变是面电荷、面电流激发附加的电磁场产生的，描述在两介质分界面上，两侧场量与界面上电荷、电流的关系，是本节的主要讨论内容。

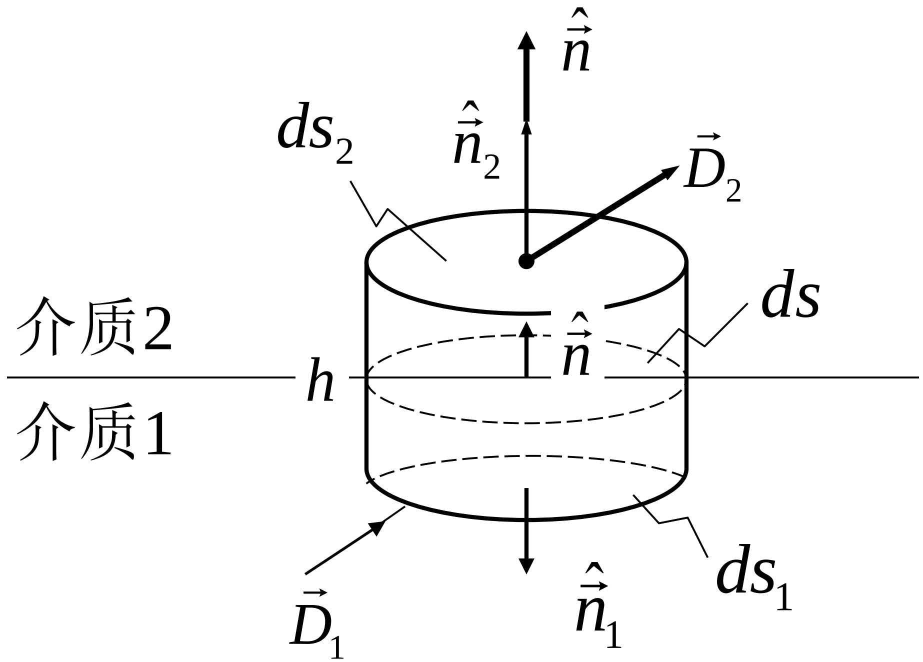
然而，微分形式的Maxwell’s equations不能应用到两介质的界面上, 这是因为Maxwell’s equations对场量而言, 是连续、可微的。只有积分形式的Maxwell’s equations才能应用到两介质的分界面上，这是因为积分形式的Maxwell’s equations对任意不连续的场量适合。因此研究边值关系的基础是积分形式的Maxwell’s equations：

$$
\begin{cases}
\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\iint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{s} \\
\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f + \dfrac{d}{dt}\iint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{s} \\
\oiint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_f \\
\oiint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0
\end{cases}
$$

1、法向分量的跃变（discontinuity of normal component)

如图所示，在分界面处作一个小扁平匣，匣的上下底面 ds_1, ds_2 分别位于界面的两侧，且 ds_1, ds_2 ,ds

三个面元平行，大小相等，ds为界面上被截出的面元，匣的高度$h\to 0$，用 $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}=Q_f$ 求矢量$\vec{D}$通过匣表面的通量。



由于匣的高度$h\to 0$，所以通过侧面的$\vec{D}$的通量也可以忽略不计，因此

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \iint_{S侧} \vec{D} \cdot d\vec{s}_{侧}$$

$$0$$

$$= (\vec{D}_1 \cdot \hat{\vec{n}}_1 + \vec{D}_2 \cdot \hat{\vec{n}}_2)ds$$

由于 $\hat{\vec{n}}_1 = -\hat{\vec{n}}$，$\hat{\vec{n}}_2 = \hat{\vec{n}}$ ，即得

$$(\vec{D}_1 \cdot \hat{\vec{n}}_1 + \vec{D}_2 \cdot \hat{\vec{n}}_2)ds = \sigma_f ds$$

$$\hat{\vec{n}} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$$

或者 $$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$

其中σ_f 是界面上的自由电荷 面密度，D_{1n} 及D_{2n} 分别为

界面两侧的电位移矢量$\vec{D}$ 在面法线上的分量，$\hat{n}$ 的方向由介质1指向介质2。

根据$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ 的关系，不难得到

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma_f$$

讨论：a) 对于两种电介质的分界面$\sigma_f = 0$ ，则得

$$D_{2m} = D_{1m} \to \text{连续, 无跃变}$$

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \to \text{不连续, 有跃变}$$

b) 只有导体与介质交界面上，存在 $\sigma_f \neq 0$ 。这时$\vec{D}$ 、$\vec{E}$ 在法线上都不连续，有跃变。

c) 对于磁场 $\vec{B}$，把 $\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}=0$ 应用到边界上的扁平匣区域上，同理得到

$$\hat{\vec{n}}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$

即 $$B_{2n}=B_{1n}\rightarrow \text{连续，无跃变}$$

由于 $\vec{B}=\mu\vec{H}$，不难找到：

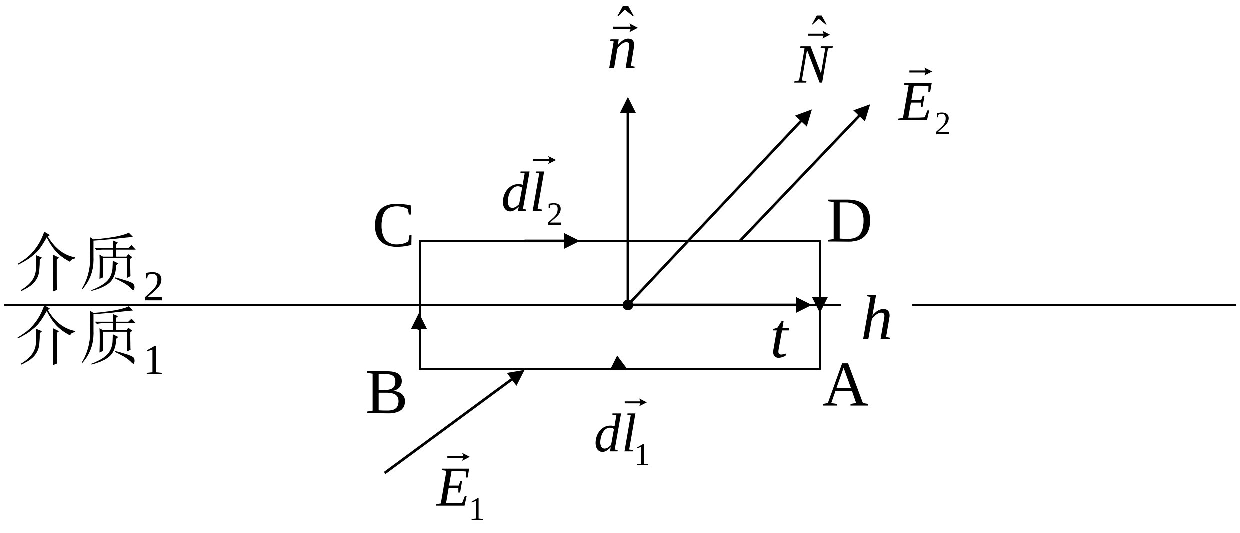
$$\mu_2 H_{2n}=\mu_1 H_{1n}$$

$$\frac{H_{2n}}{H_{1n}}=\frac{\mu_1}{\mu_2}\quad\rightarrow \text{不连续,有跃变}$$

这就说明：在分界面上，$\vec{B}$的法线分量是连续的，$\vec{H}$的法线分量是不连续的，除非 $\mu_1=\mu_2$ 。

2、切向分量的跃变(discontinuity of tangential component)

平行边界作一小扁回路，并令此回路与分界面正交且其长边与界面平行。由于回路短边$h\to 0$，所以 $\vec{E}$ 对回路的环流为：



$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \vec{E}_1\cdot\Delta\vec{l}_1 + \vec{E}_2\cdot\Delta\vec{l}_2$$

$$= (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\hat{\vec{t}}\,\Delta l$$

而

$$-\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{\vec{N}}\Delta lh$$

故得

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\hat{\vec{t}}\,\Delta l = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{\vec{N}}\Delta lh$$

可见

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\hat{\vec{t}} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{\vec{N}}h$$

这里 $\hat{\vec{t}} = \hat{\vec{N}}\times\hat{\vec{n}}$ ，则

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot(\hat{\vec{N}} \times \hat{\vec{n}}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \hat{\vec{N}} h$$

根据矢量分析：

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$\hat{\vec{N}}\cdot\left[\hat{\vec{n}}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \hat{\vec{N}} h$$

即

$$\hat{\vec{n}}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} h$$

由于$h\to 0$，而 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 为有限值，故得到

$$\hat{\vec{n}}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

亦即　　　　$E_{2t}=E_{1t}$.　$\rightarrow$连续，无跃变.

但根据 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ ，有

$$\varepsilon_1 D_{2t}=\varepsilon_2 D_{1t}$$

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$　$\rightarrow$不连续，有跃变.

这说明：在分界面上，$\vec{E}$ 的切线分量是连续的，$\vec{D}$ 切线分量不连续。

　　对于磁场$\vec{H}$ ，则根据 $\oint_L \vec{H}\cdot dl = I_f + \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}$

则

$$\oint_L \vec{H}\cdot dl=\vec{H}_1\cdot\hat{\vec{t}}_1\Delta l+\vec{H}_2\cdot\hat{\vec{t}}_2\Delta l=(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\cdot\hat{\vec{t}}\Delta l$$

而 $I_f = j_f S = j_f h\Delta l = \alpha_f \Delta l$

$$\frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{s} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \Delta l h \hat{\vec{N}}$$

由于S→0，而$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 为有限值，则

$$\frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = 0$$

所以

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\cdot \hat{\vec{t}}\Delta l = \alpha_f \Delta l$$

即

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\cdot \hat{\vec{t}} = \alpha_f$$

或者

$$H_{2t} - H_{1t} = \alpha_f$$

又由于$\Delta\vec{l}=\Delta l\hat{\vec{t}}$ 为界面上的任一矢量，因此

$$(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\cdot\hat{\vec{t}}=(\vec{\alpha}_f\times\hat{\vec{n}})\cdot\hat{\vec{t}}$$

$$(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_f\times\hat{\vec{n}}$$

因为 $$\hat{\vec{n}}\times(\vec{\alpha}_f\times\hat{\vec{n}})=(\hat{\vec{n}}\cdot\hat{\vec{n}})\vec{\alpha}_f-(\hat{\vec{n}}\cdot\vec{\alpha}_f)\hat{\vec{n}}=\vec{\alpha}_f$$

故得 $$\hat{\vec{n}}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_f$$

强调一点，只有在理想导体表面上，$\vec{\alpha}_f$ 才不为零。因而除了出现理想导体界面的情况外，在介质界面上$\vec{H}$ 矢量的切向分量是连续的。

综上所述，电磁场的边值关系为

$$
\begin{cases}
\hat{\vec{n}}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \\
\hat{\vec{n}}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_f \\
\hat{\vec{n}}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f \\
\hat{\vec{n}}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0
\end{cases}
$$

由此可见，边值关系表示界面两侧的场与界面上电荷之间的制约关系，实质上，边值关系是边界上的场方程。由于实际问题往往含有几种介质以及导体等，因此，边值关系是十分重要的。