第六章　狭义相对论

参考系？

我们在前面介绍的电磁规律都没有说明是在哪个参考系中的，包括电荷位置和运动速度也没有说明是相对什么个参考系。

在不同惯性系中，电磁规律不同？

那么前面介绍的电磁规律是不是在任何惯性系都成立呢？如果假设在不同惯性系中不同，可以导致电磁波的传播速度不同。这种不同是可以测量到的，实验上没有发现。

任何惯性系都相同？（相对性原理）

如果假设电磁规律在任何惯性系都成立，那么电磁波的传播速度在任何惯性系中都是常数。也就是说在有相对速度的两个惯性系中看到的光的速度是一样的。

这将导致时空观的改变

那么，选择牛顿的绝对时空观还是相对性原理？

　　爱因斯坦的狭义相对论是电磁学发展的产物，它论证了电磁规律和力学规律一样，都在一切惯性系中成立。在这个基础上，爱因斯坦假设，任何惯性系（不管静或动）在物理规律上完全一致，不能区分。这个思想被称为相对性原理。

重新认识相对性原理

Galileo与P.R.
1543年　哥白尼　“天体运行论”　 日心说
1632年 《对话》提出P.R. 的最早表述

Newton力学与P.R.
1685年 《自然科学的数学原理》提出力学三定律
牛顿指出力学三定律在绝对参考系成立，并推导出在惯性系也一样成立。不同惯性系有同样的力学规律，自然有同样的力学现象。这结果为伽利略的思想奠定了理论基础。牛顿在推导时，动系和静系的时空关系须为

$$x = X - \upsilon T,$$

$$y = Y$$

$$z = Z$$

$$t = T$$

称为伽利略变换

在伽利略变换中空间距离和时间间隔是绝对的,与参考系无关。这种认为也称绝对时空观。

1865 麦克斯韦电磁理论

什么是麦克斯韦方程得以成立的基本参考系?

设麦克斯韦方程在一个基本参考系中成立，那么有电磁波的波动方程

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\varphi = 0$$

若用伽利略变换把这个波动方程转换到一个速度v的参考系，方程变为

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2}(v\cdot\nabla)\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2}(v\cdot\nabla)(v\cdot\nabla)\right]\varphi = 0$$

这与原来的方程不同，

这说明如果伽利略变换是对的，那么麦克斯韦方程不能对一切惯性系都成立。或者说，伽利略提出的相对性原理对电磁规律是不对的。麦克斯韦方程只对一个特定的惯性系成立。这样，力学现象不能区分的静或动的惯性系可以通过电磁现象来区分。

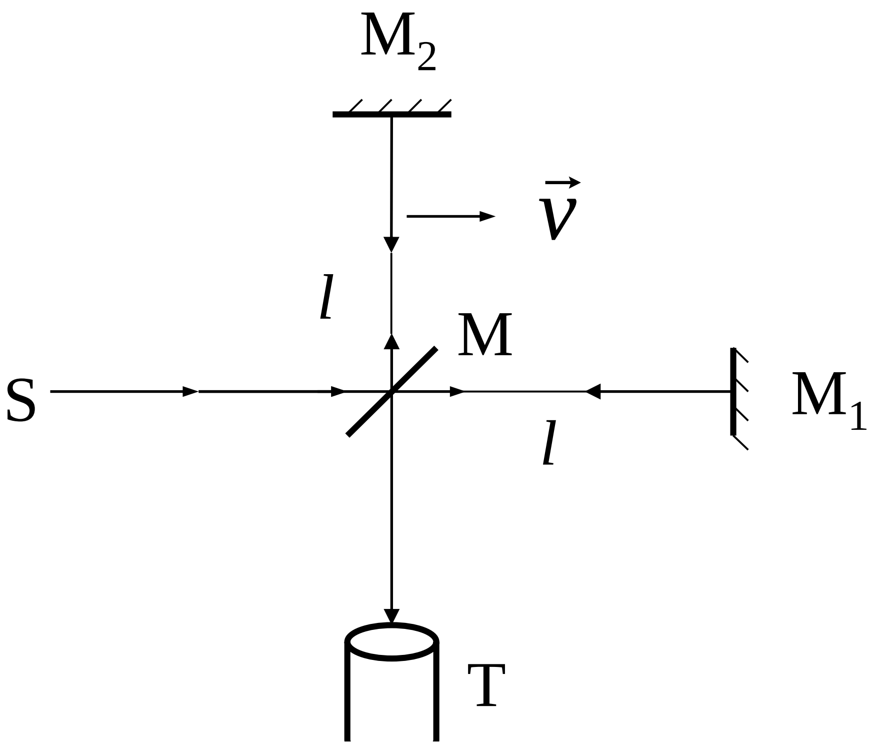
在当时，人们认为电磁波和声波一样是在介质中传播的。动的介质和静的介质中波的行为是不一样的，因此波动方程只对静介质适用。为此人们设想了一种介质叫以太，电磁波是以太中的波。这样，认为麦克斯韦方程只对以太静止的参考系中成立。以太成立绝对空间概念的具体化。

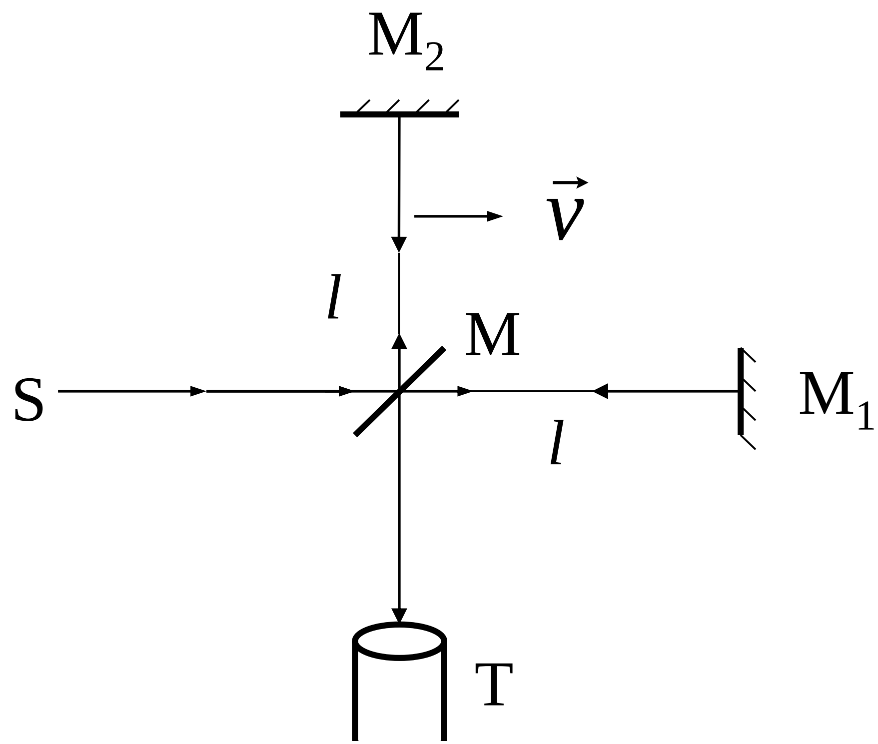
到了19实际末，人们已不会相信地球正好是相对以太静止的特殊星体。这样在地球上，麦克斯韦方程不严格成立。地面上电磁波的速度不是常数c，而应与地球相对以太的速度v（地球的绝对速度）有关。人们自然期望通过地面上的光学实验来确定地球的绝对速度。一来可以证实以太的存在，二来这对在地面上使用电磁规律也是重要的。

按理论分析，地球运动对观测效应的影响是 $(v/c)^2$ 量级，这是一个很小的效应，但当时的干涉实验已经能够测量了。

迈克尔逊—莫雷（Michelson-Morley)实验

迈克尔逊和莫雷于1887年利用灵敏的干涉仪，企图用光学方法测定地球的绝对运动。地球绕太阳的公转速度是30km/s。不管太阳对以太的相对速度是多少，在一年中，地球对以太的相对速度（绝对速度）总有超过30km/s的时候。他们的实验精度可以保证，若地球的绝对速度超过30km/s，就能通过干涉条纹的移动测到它。



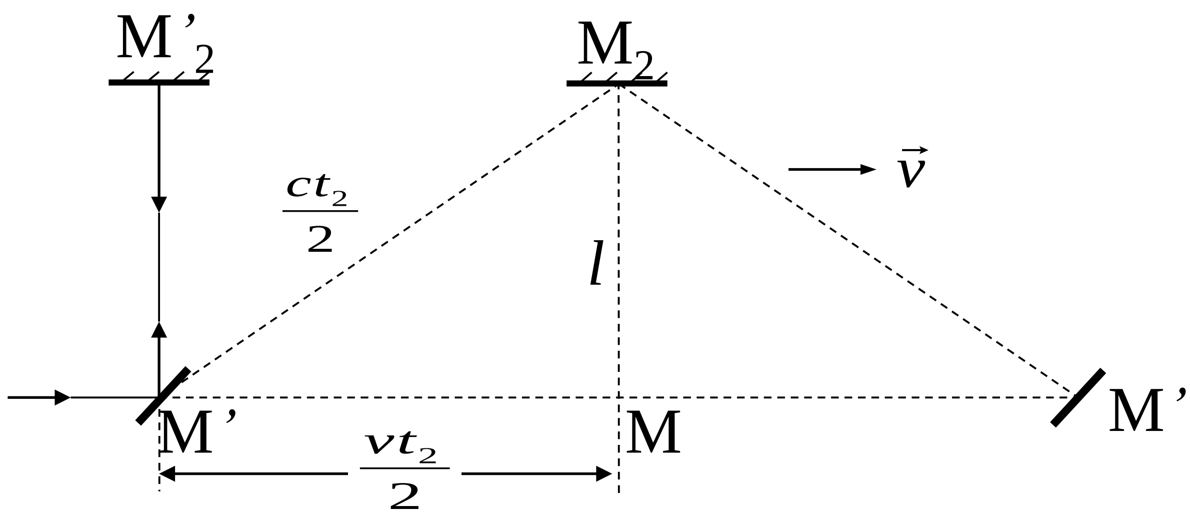


由光源S发出的光线在半反射镜M上分为两束，一束通过M，被M1反射回到M，再被M反射而达到目镜T；另一束被M反射到M2，再反射回M而直达目镜T。

调整两臂长度使有效光程为MM1=MM2=l. 设地球相对于以太的绝对运动速度 $\vec{v}$沿MM1方向，则由于光线MM1M与MM2M的传播时间不同，因而有光程差，在目镜T中将观察到干涉效应。

当地球相对于以太的速度为*v*运动时，可看出光线MM1和M1M间犹为如顺水和逆水行舟，它相对于仪器的速度应各自为(c-v)和(c+v)，如果MM1的长度为*l*时，那么光通过距离MM1+M1M所需的时间为

$$t_1=\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{2cl}{c^2+v^2}=\frac{2l}{c}(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1}$$



光往返于MM2和M2M间犹为横渡流水，在以太系看来光所走路经为M'M2M"，当MM2的长度为*l*时，光通过距离M'M2+M2M"所需的时间是*t*2，即

$$t_2=\frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{2l}{c}(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$$

$$t_1 = \frac{2l}{c}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1}$$

$$t_2 = \frac{2l}{c}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$$

因为 $v^2/c^2 << 1$，故作二项式展开，得

$$t_1 = \frac{2l}{c}(1 + v^2/c^2)$$

$$t_2 = \frac{2l}{c}(1 + \frac{v^2}{2c^2})$$

两束光的光程差（回到M点的时间差）

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{c}(\frac{v}{c})^2$$

把仪器绕竖直轴旋转*π*/2，则MM2变成沿地球运动方向，MM1垂直于地球运动方向。这样沿MM2和MM1进行的光往返各需的时间为：

$$t_1' = \frac{2l}{c}(1+\frac{v^2}{2c^2})$$

$$t_2' = \frac{2l}{c}(1+v^2/c^2)$$

两束光回到M点的时间差为：

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = -\frac{l}{c}(\frac{v}{c})^2$$

有了光程差，在目镜处应该观察到干涉条纹的移动个数。

当时间差的改变量是光波的一个周期*τ*时，就引起一条干涉条纹的移动，所以条纹移动的总数为：

$$\Delta N = \frac{\Delta t - \Delta t'}{\tau} = \frac{2l}{c\tau}(\frac{v}{c})^2 = \frac{2l}{\lambda}(\frac{v}{c})^2$$

式中λ是光波的波长，当l=11米，λ= 5.9×10^{-7}米， $v=3\times10^{4}$米/秒，$c=3\times10^{8}$米 / 秒， 得到

$$\Delta N=\frac{22\times(3\times10^{4})}{5.9\times10^{-7}\times(3\times10^{8})^{2}}\cong 0.4$$

而实验观察到只有小到移动条条纹的1/100（误差），但从来也没有看到过0.4个条纹的移动。

因此，可以得到结论：测不出地球的绝对运动，或者说地球相对于绝对参考系的速度为零。

地球相对以太在动，实验却不测不出。在当时，这是一个难题。按当时的思路，人们只能再赋予以太新的性质，已使地球运动引起的偏差不出现。那时以太被赋予了不少自身难以解释的性质。

1892年，落伦兹和菲茨杰若为此提出，相对以太运动的物体会有长度缩短。缩短因子是 $\sqrt{1-v^{2}/c^{2}}$ 。这样，迈克尔逊—莫雷实验中的条纹移动就不会出现，但是这个收缩的原因却无法解释。

这样解决问题的人为性显然不能让人满意。

爱因斯坦跳出了‘波要在介质中传播’这样的观念，认为以太不是必须的，即电磁波的传播不一点需要介质。地面上光速不变，是麦克斯韦方程在地面这个惯性系仍然成立的迹象。当然，不能认为地面惯性系是特殊优越的参考系。于是自然的想法是认为电磁学和力学一样，它满足相对性原理。

爱因斯坦抛弃了以太概念，重新认识了相对性原理。这样一个朴素的思想可以把人们从越来越复杂的以太迷雾中解脱出来，这无疑是很诱人的。但是，要求麦克斯韦方程服从相对性原理绝不是简单的要求，因为这样就必须否定惯性系之间的伽利略变换。前面我们说了，若伽利略变换成立，电磁规律在不同惯性系中是无法相同的。

那么，要回答几个问题：

1. 伽利略变换能不能否定?
2. 用什么来代替?
3. 在新的变换下，牛顿力学还对不对?

这些都不是好回答的问题，牛顿定律在太阳系范围内得到了很好的证实，它不是简单能修改的。爱因斯坦建立了狭义相对论，克服了这些困难。

狭义相对论指出各惯性系之间的时空关系应当是洛伦兹变换。

（下面我们将推导出洛伦兹变换，它是光速不变原理的推论。光速不变原理可以看作是电磁学满足相对性原理的推论。因此洛伦兹变换是电磁规律满足相对性原理的要求）

伽利略变换仅仅是洛伦兹变换的低速近似。为了要求力学规律也满足相对性原理，牛顿力学也要修改，牛顿定律也只是修改后普遍力学规律的低速近似。

在洛伦兹变换中，我们将看到时间和空间的间隔大小不是固定的，在不同参考系中时间和空间的间隔不同。因此空间和时间都不是绝对的，狭义相对论的建立远不只是重新确立了伽利略的相对性思想，它改变了人们对时空的认识。这是革命性的。

相对论和量子论一起，构成了20世纪物理学大发展的两大基石。

光速不变性和洛伦兹变换

两个相对运动的惯性系对同一时空点有不同的描述，(t,x,y,z) 和 (t',x',y',z')，这两个描述间有变换关系 $t'=f(\vec{x},t)$ $x'=g(\vec{x},t)$

如果麦克斯韦方程在两个相对运动的惯性系中都成立，那么两系中的光速都应该是C。这显然是和伽利略变换冲突的。那么，在这个光速不变原理的基础之上，我们可以得到什么时空变换关系？

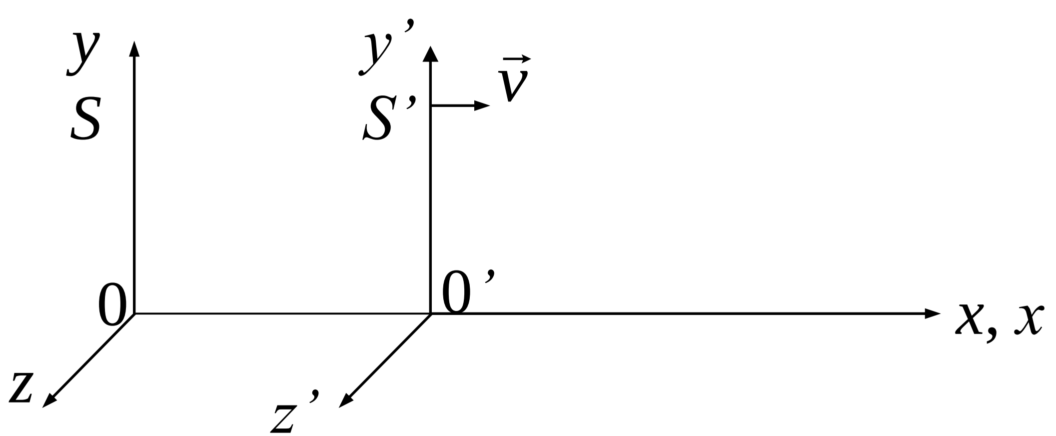
在写出时空变换关系的一般形式前，我们有一个先验的假定，即：
空间是均匀的（平移不变）并各向同性的（旋转不变），
时间是均匀的（时间平移不变性）

有了这个假定，我们可以写出两个相对运动的惯性系 S 和 S' 之间的时空关系的一般形式，它是线性变换。

$$
\begin{aligned}
t' &= a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\
x' &= a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\
y' &= a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\
z' &= a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z
\end{aligned}
$$

这里为了方便，令 $t = t' = 0$ 时，两个坐标架的原点重合。

考虑到空间的均匀性和各向同性，我们总能适当的选取坐标（通过旋转和平移），使得两个匀速相对运动的惯性系的坐标架x轴在相对运动的方向上，两个y轴和两个z轴平行，如图。这样时空变换关系可以简化



时空变换关系简化为

$$t' = \alpha t + \beta x$$
$$x' = \gamma x + \delta t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

这变换式中有四个系数，都应该和相对速度有关。

我们还可以通过运动的相对性来简化系数

S'系对 S 系的速度是　。在S 系看S'系中静止的点，即$dx' = dy' = dz' = 0$
它们对 S 系的速度是v，由上述变换可得到

$$dx' = \gamma dx + \delta dt = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\delta}{\gamma} = v$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\delta}{\gamma}=v$$

由于运动的相对性，S 系对 S'系的速度必为 $-v$。这时看 S系中的静止点，$dx'=dy'=dz'=0$。这种点对 S' 系的速度都是 $-v$，即是

$$t'=\alpha t+\beta x\Rightarrow dt'=\alpha dt+\beta 0$$

$$x'=\gamma x+\delta t\Rightarrow dx'=\gamma 0+\delta dt$$

$$\frac{dx'}{dt'}=\frac{\delta}{\alpha}=-v$$

这样，变换式进一步确定化了。从运动的相对性定出 $\alpha=\gamma$ ，再令 $\beta=-\eta\gamma$ ，时空变换式可重写为

$$t'=\gamma(t-\eta x)$$

$$x'=\gamma(x-vt)$$

$$y'=y$$

$$z'=z$$

$$
\begin{aligned}
t' &= \gamma(t - \eta x) \\
x' &= \gamma(x - vt) \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

这里速率v看作是已知量。这里还留下两个待定参量 和 。

值得注意的是，现在已经没有更多的基本原则来限制变换形式了。如果先验的认为时间和参考系无关，即时间是绝对的。这意味着取

相应导出的就是伽利略变换。由此可见，要否定伽利略时空变换，就要抛弃绝对时间的概念。

光速不变原理

引入相对论的基本假设：光的传播速率与参考系无关。有了这个前提，与伽利略变换不同的新的时空关系就可以完全确定了。

为了利用光速不变原理。考虑在 $t=t'=0$ 时，从 S 系和 S’ 系的共同原点放出一个闪光。在 S 系看到它的传播满足

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$$

而在 S’ 系看来，它的传播则满足

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$$

注意这里讨论的是同一个光波。

看其中的一个特定事件：S 系内t 时，光波到达 $x=ct, y=0, z=0$ 处。同一事件在S’系看来，时间发生在t’，位置是 x', y', z' 。由时空变换式给出

$$t'=\gamma t(1-\eta c)$$

$$x'=\gamma t(c-v)$$

$$y'=y=0$$

$$z'=z=0$$

t', x', y', z' 要满足光速不变性 $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$

$$c-v=c(1-\eta c)$$

这样就把η确定了，它是

$$\eta=v/c^2$$

同理考察S系中t 时光波到达 $x=z=0, y=ct$ 的事件。在S’系看来，这个事件发生在

$$\begin{aligned} t'&=\gamma(t-\eta x) \\ x'&=\gamma(x-vt) \\ y'&=y \\ z'&=z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t'&=\gamma t \\ x'&=-\gamma vt \\ y'&=y=ct \\ z'&=z=0 \end{aligned}$$

同样带入 $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$

得到一个关系

$$\gamma^2 v^2 + c^2 = \gamma^2 c^2$$

由此把γ 确定下来，它是

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

这样，时空变换式中的系数就完全被确定了

在服从时空和运动的一般原则（平移转动不变和运动相对性）的基础上，在加上光速不变性的要求后，得到了一组新的时空变换

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

这个关系式已被习惯的称为洛伦兹变换。

这是因为洛伦兹（1904）在以太理论的基础上为了解释迈克尔逊一莫雷实验而提出了尺度收缩假设，在此解释中人为的运用了这样的变换式。

在一年后，爱因斯坦抛弃了以太观念。同样的变换式在光速不变的原则要求下，被自然的导出。而这时这个变换式的意义已经不同了，它是两个惯性系之间的坐标变换。

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

从洛伦兹变换式中，可以看出，若两个惯性系的相对速率远小于光速，则近似成为伽利略变换。这是非常重要的性质，在相对论提出之前，力学中所涉及的速率都远小于光速。在当时的经验范围内，牛顿力学和伽利略变换关系都是被证明为可靠的。洛伦兹变换在低速近似下为伽利略变换的性质，保证了光速不变假设与过去的经验没有冲突。

一个新理论的重要性和可行性在于：第一，要和以前的实验经验在误差范围内一致，没有矛盾。第二，要有预言性，即要有和原先理论不同的预言，使得新理论和原理论在实验上可区分。

最后，我们来看洛伦兹变换的反变换式。把洛伦兹变换反解，得到

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

这对应的是把S'系看作静止系，S系相对它沿x方向以速度 –v运动的洛伦兹变换。

我们在推导洛伦兹变换时，用到了运动相对性，这就保证了洛伦兹变换的反变换有这样的性质。这是自然的结果。

相对论时空的物理性质

在相对论以前的物理学中，时间是绝对的，它与参考系的运动无关。伽利略变换体现了绝对时间的观念。而洛伦兹变换和绝对时间的概念是冲突的。这样我们的时空观就需要改变。

现在，我们就以洛伦兹变换为出发点，来重新认识时空的性质。可以想到，其中一定有很多出乎意料的性质。

1. 同时的相对性

按照洛伦兹变换，时间是与参考系有关的，而不是绝对的。因此从S系看到同时发生的两个事件，在S'系看来，两者的发生时间会有先后。反之亦然。这就是同时的相对性。

由于我们并不关心事件的具体内容，而只关心事件发生的时间和地点，所以把确定的(t, x, y, z) 称为一个事件，意思是在这个时刻这个地点发生的某件事。假定有两个事件P和Q，从S' 系看来是发生在同时的，即

$$t'_P = t'_Q$$

由洛伦兹变换的反变换可推出它们在S 系中相应的发生时间，

$$t_P = \gamma(t'_P + \frac{v}{c^2} x''_P)$$

$$t_Q = \gamma(t'_Q + \frac{v}{c^2} x''_Q)$$

这里 γ 是 $\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 。

由两式相减，得到在S 系中看到的时间差为

$$t_Q - t_P = \gamma \frac{v}{c^2} (x'_Q - x'_P)$$

由此看出，仅对同地点发生的同时事件，才在另一个惯性系中仍保持同时，若两事件的发生地点不同，则在另一个惯性系不同时。如 $x'_Q > x'_P$ 在S 系看来，事件P 发生在事件 Q 之前。

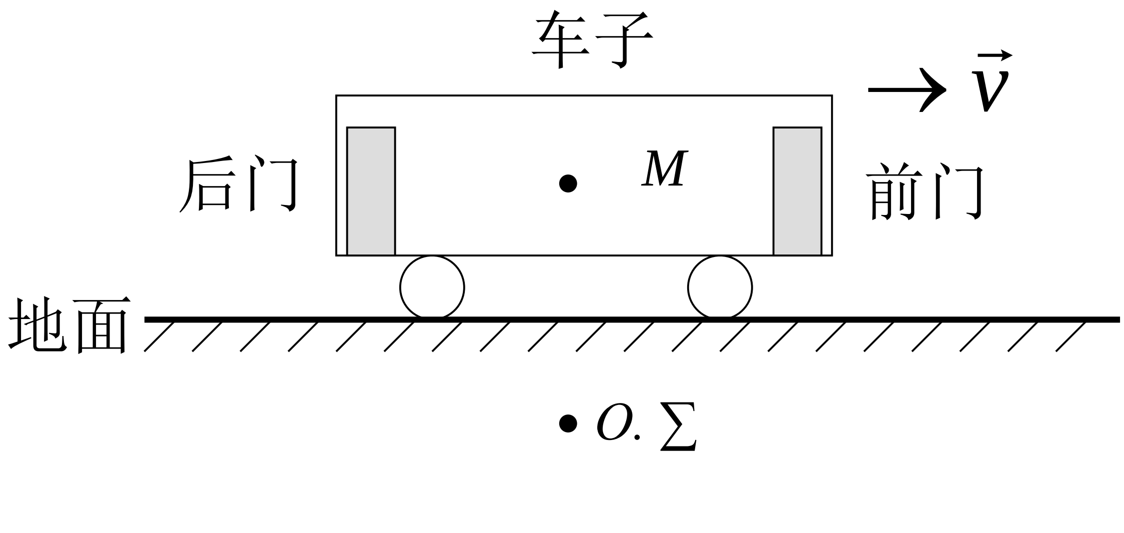
同时的相对性是相对论时空性质的最基本的特征。让我们通过例子来更直观的理解它。

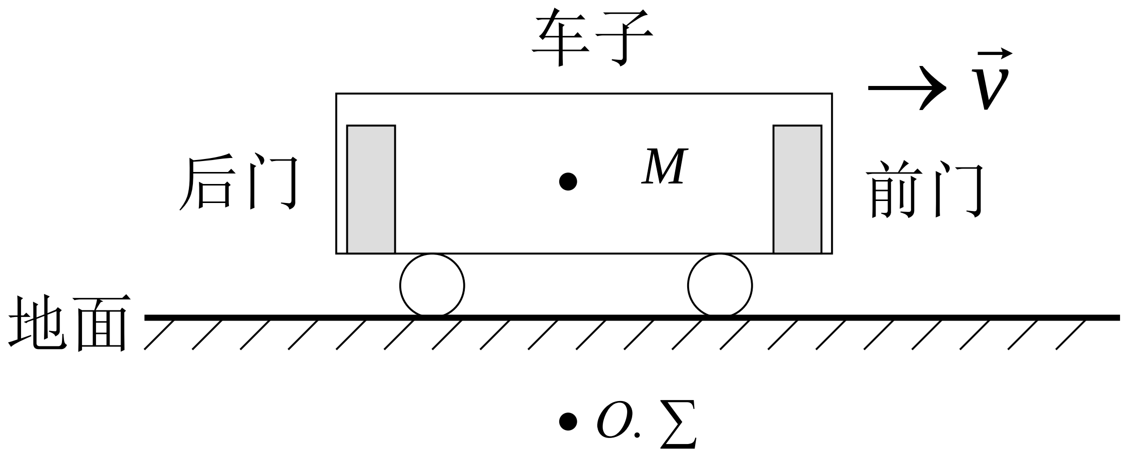
设一辆火车以速度v 在行进，从火车的中点M 处放出一个闪光。以火车为参考系看，光到达车头和车尾当然是同时的。

根据时间变换式

$$t_Q - t_P = \gamma \frac{v}{c^2}(x'_Q - x'_P)$$

从地面上看，光到达车头比到达车尾要晚。 我们来分析原因





以火车为参考系，光源是静止的。光向前和向后的速率都是C，因此到达车头和到达车尾的传播时间都是 $t = l/c$ 。

当以地面为参考系时，为什么由洛伦兹变换推断出光到车头要比到车尾晚，而伽利略变换推断两者依然同时？

首先，由于火车在前进，光从火车中点到车头所走的距离要比到车尾长，这没有疑问。伽利略变换和洛伦兹变换的分歧来自光速，按光速不变性，虽然光源对地面在前进，光向前和向后的传播速率依然都是c，这样自然导致闪光到达车头比到达车尾晚的推论。若按照伽利略变换，由于光源有速度v，闪光向前的传播速率是 c+v ,而向后的速率是c-v，速率的差别弥补了距离的差别，结果推出闪光到达车头和车尾的时间一样。

2. 动尺的缩短

在任何一个参考系中，实验者都要用在本参考系中静止的标准尺来刻度自己系的坐标，而制造标准尺的标准是一样的，不同参考系的标准尺本质上没有区别。一个惯性系中静止的尺子在另一个惯性系中是动尺。下面我们将看到，动的标准尺比静止的标准尺要短。

设一把沿x 方向的标准尺以速度v 相对于S 系运动。我们建立一个S’ 系，使这把尺子在S’ 系中静止。从S’ 系看，这尺子两端的横坐标为 x'_P 和 x'_Q（Q为右端），因此尺子的长度为

$$L_0 = x'_Q - x'_P$$

现在要问，在S 系中作测量，此动尺的长度是多大?

为了测量动尺的长度，必须“同时”记下此尺两端的横坐标，并以这两个坐标之差为长度。设在S 系中记下的坐标为 x_P 和 x_Q ，它们和 x'_P x'_Q 的关系可以由洛伦兹变换得到，为

$$x'_P = \gamma(x_P - vt_P)$$

$$x'_Q = \gamma(x_Q - vt_Q)$$

$$x'_P = \gamma(x_P - vt_P)$$
$$x'_Q = \gamma(x_Q - vt_Q)$$

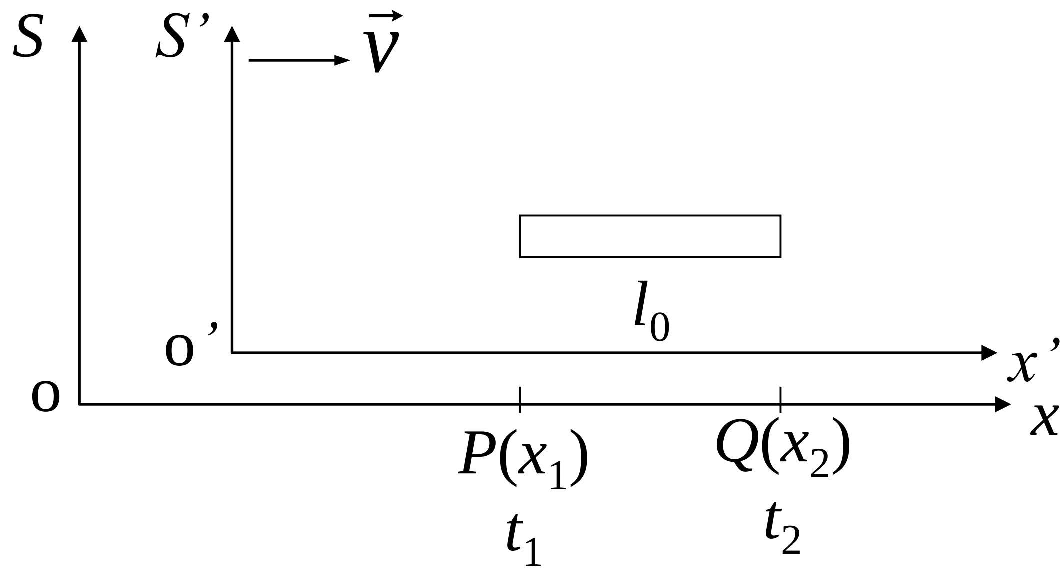
测量两端必须同时，说明 $t_P = t_Q$ 。动尺在S 系的长度

$$\begin{aligned} L &= x_Q - x_P \\ &= (x'_Q/\gamma + vt_Q) - (x'_P\gamma + vt_P) \\ &= x'_Q/\gamma - x'_P\gamma \\ &= L_0/\gamma \end{aligned}$$

注意到 γ 总是大于1，这公式说明运动的尺子的长度缩短了。

这个结果初看不仅是意外的，而且似乎是矛盾的。两系中的标准尺在客观上是一样的，且双方都把对方的静尺看成动尺。那么，到底谁缩短了？其实动尺的缩短是同时的相对性的直接后果。

在S 系中测量动尺的长度时，同时量两端的坐标是必须的。如果读右侧Q 端坐标的时间晚，由于动尺的前进，结果就会错误得到偏大的长度。



正因为“同时”测量是要点，同时的相对性在这里就起了作用了。当从S 系测量，测量者只能按照自己系的标准来同时的测量两端的坐标，而他测两端坐标的时间从S' 系的观察者看一定不是同时的。从随尺子运动的参考系S' 系看来，因为S 系的观察者把Q 端的坐标测早了，所以他认为S‘ 的标准尺缩短了。动尺长度的缩短是同时的相对性的体现。

把这种效应称为动尺的“缩短”带有误导性，因为尺子在运动中并没有发生物理的收缩。双方都认为对方的标准尺有收缩，是因为双方有不同的同时标准。因此，这里没有矛盾。

3. 动钟的变慢

洛伦兹变换的另一个类似的推论是运动时钟要比静钟慢。这里同样要说明，任一惯性系的实验者都用同样的标准来制造标准钟，并用它标度时间。因此，各惯性系的标准钟客观上是一样的。

我们考虑一个运动的标准钟。这个标准钟以速度V 相对S 系沿x 方向运动，而它在S' 系中是一个静钟。当钟显示的时间从 t_1' 到 t_2'，S' 系中的时间过了 $T_0 = t_2' - t_1'$。令此钟显示 t_1' 时S 系中的时间为 t_1，显示 t_2' 时S 系中的时间为 t_2，按洛伦兹变换，有关系式

$$t_1 = \gamma(t_1' + \frac{v}{c^2} x_1')$$

$$t_2 = \gamma(t_2' + \frac{v}{c^2} x_2')$$

$$t_1 = \gamma(t_1' + \frac{v}{c^2} x_1')$$

$$t_2 = \gamma(t_2' + \frac{v}{c^2} x_2')$$

在S’ 系中是静钟，所以 $x_1' = x_2'$ 。因此，在S 系中测到的时间间隔为

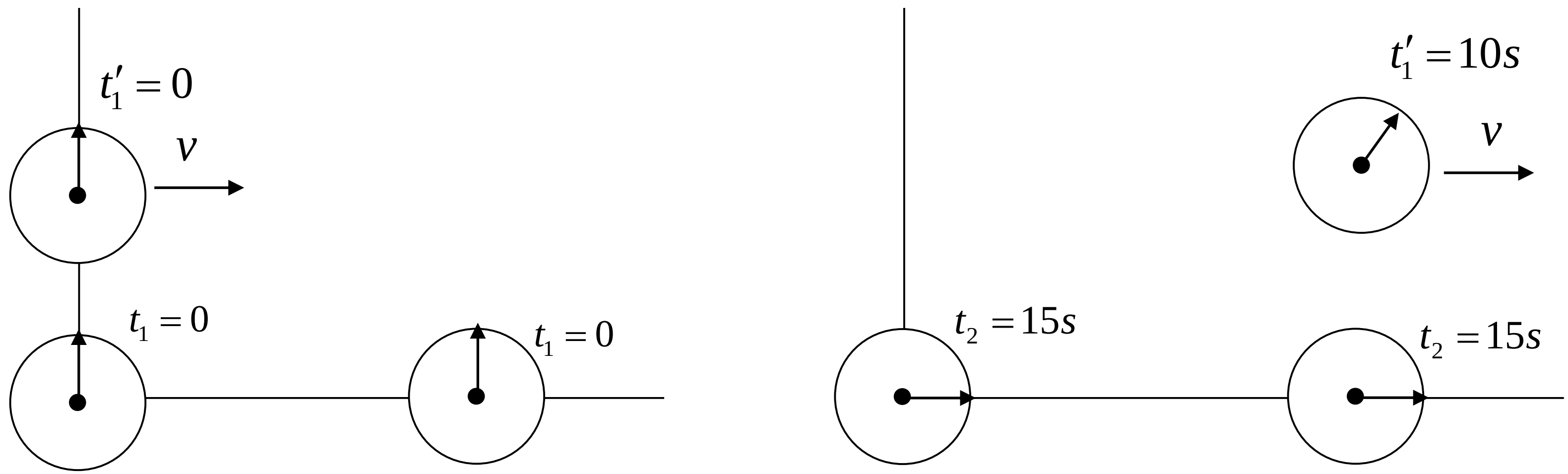
$$T = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma T_0$$

这个式子表明，在S 系中测得的时间间隔T 比动钟所显示的间隔要大，这就是所说的动钟变慢。

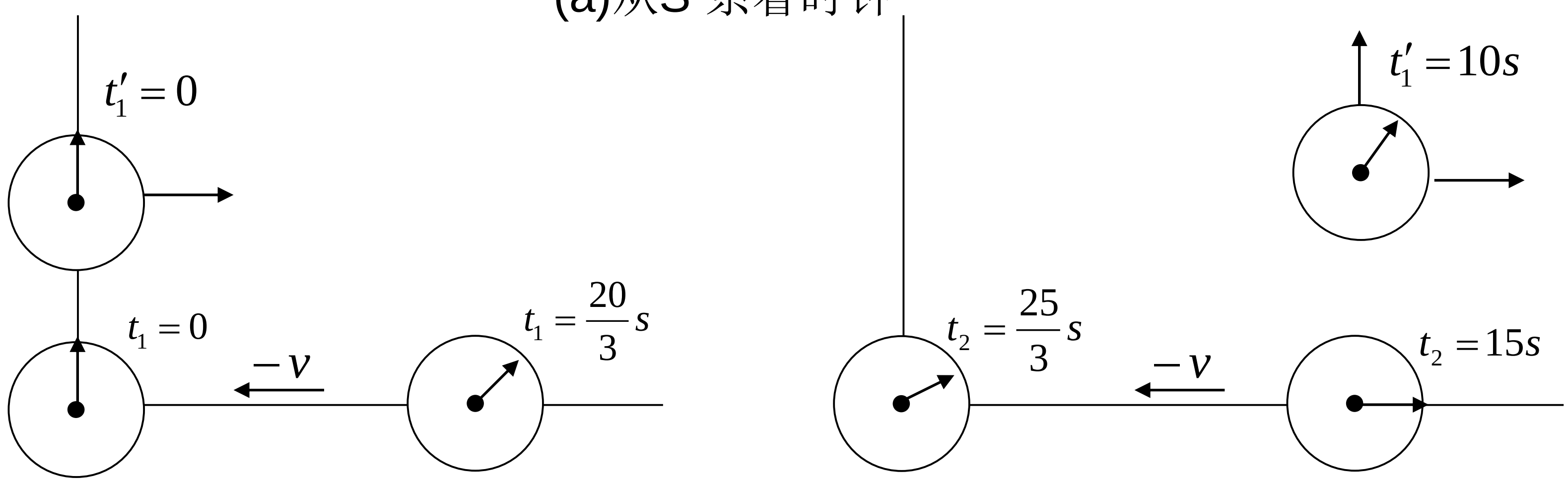
由于有动钟的变慢，因此任一惯性系中不同的地方都只能用当地的静钟来计时。这样就产生一个零点校准的问题，即同一时刻要让不同地点的静钟有同样的读数。于是同时的相对性有起作用了：

从别的参考系看，你的不同地方的计时标准钟没有对准。

我们来直观的分析S 系的动钟变慢。t_1' 时动钟在S 系的x_1处，而 t_2'时它在x_2处。在S 系看来，这两处的钟是对准的。但从随时钟运动的S' 系观测者看，者两处的钟并没有对准，且是在x_2处的标准钟快了。



(a)从S 系看时钟



(b)从S' 系看时钟

动钟变慢的症结在同时的相对性。因此，把这个效应称为动钟的“变慢”并不恰当。时钟在运动钟并没有物理的变化。

在上面的分析中，时钟只是一种显示时间间隔的工具。这效应并不只与时钟有关，而其实对任何一个物理工程都有效。如单摆的周期为 T_0，从另一惯性系看这个运动的单摆周期将是 $T=\gamma T_0$。依此类推，运动中的不稳定粒子的衰变将比静止的慢，运动体内的热扩散比静止的慢，等等。这才是动钟变慢的物理内涵。

对洛伦兹变换的检验

从经验讲。洛伦兹变换预言的动尺缩短和动钟变慢几乎是不可思议的事。这是我们的经验所涉及的速度太低的缘故。无论如何，在高速情况下是否会出现这些效应是需要检验的。

至今人类的技术不能使宏观物体的速度接近光速，可是在高能实验中，把微观粒子加速到接近光速早已不是什么难事了。因此，可以说在粒子实验室，尺缩和钟慢的相对论效应是司空见惯的事。

例如 π^+ 介子的静能量为 $E_0 = 0.14\ \text{GeV}$ 。现代加速器很容易可以把它加速到能量为10 GeV。我们下面章节将论证，这时的速度

$$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = \frac{E}{E_0} = 71$$

由此算出 $v = (1 - 0.000098)c$ 。在如此接近光速的情况下。用速度 v 描述运动并不方便。人们常用 γ 来反映粒子运动的快慢。

当 $\gamma >> 1$ 时，它就是接近光速运动的相对论性粒子。

介子是很快会衰变的不稳定粒子，其粒子数N 的变化规律为

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中τ 被称为粒子的寿命。由实验测定，π^+介子在静止或低速时的寿命为 $\tau = 2.56 \times 10^{-8} s$

动钟变慢将意味着π^+介子在高速飞行时的寿命将延长，当速度为v时寿命变为

$$\tau = \gamma \tau_0$$

在γ 达到71时，寿命将延长到 $\tau = 1.83 \times 10^{-6} s$ ，

实验需要检验 π^+介子寿命的延长，实验方法示意如下：

在加速器某处产生N个 $\gamma = 71$ 的π^+介子，问它们在飞行6米长的管道后，粒子数还剩下几个？

先从地面参考系来分析。π^{+}介子按这个速度飞行6米所用的时间是 $2.0\times10^{-8}s$ 若寿命没有变长，剩下粒子数

$$\frac{N}{N_0}=\exp\left(-\frac{2.0\times10^{-8}}{2.56\times10^{-8}}\right)=46\%$$

按洛伦兹变换预言的寿命，所剩下的粒子数

$$\frac{N}{N_0}=\exp\left(-\frac{2.0\times10^{-8}}{1.83\times10^{-8}}\right)=99\%$$

这两个结果的差别很显著，因而完全可以用实验来鉴别。洛伦兹变换导致的动钟变慢效应被实验所证实。

尺缩和钟慢本质上是同时的相对性的表现。上述例子既是钟慢效应的证据，也可看成是尺缩效应的证据。

为此，我们从随着π^+介子飞行的S’ 参考系来分析。从S’ 系看来，π^+介子是静止的，因而它的寿命为 $\tau = 2.56\times10^{-8}s$ 。

现在6米长的管道以速率v 向 –x 方向飞过。若没有动尺的缩短，管道飞过的时间为 $2.0\times10^{-8}s$ ，因此管道飞过后剩下的粒子为46%.

。

考虑相对论预言的动尺缩短，管道的长度在S’ 系中已缩至

$$L = L_0/\gamma = 0.084m$$

它飞过π^+介子所用的时间相应的缩短为 $t = 2.8\times10^{-10}s$

管道飞过后剩下的粒子百分比为

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{2.8\times10^{-10}}{2.56\times10^{-8}}\right) = 99\%$$

这个结果完全一致。剩下的粒子数是一个可观测的事实，它不会与分析问题时所用的参考系有关。

洛伦兹变换预言的尺缩和钟慢效远远的超出我们的生活经验，但在高能实验中，它们不仅可以检验，而且已经在很高的精度上得到了证实。

因果律对速度的限制

我们用洛伦兹变换来讨论一个异地事件的时间顺序问题。设在S 系中有两个异地事件P（记为t_P, x_P ）和Q （记为 t_Q, x_Q ）令 $t_P < t_Q$ 。表示P是先发生的事件。问题是在另一个惯性系看来，这两个事件的先后次序是否会颠倒?

在设另一惯性系S' 。从S' 系看，这两个事件的发生事件可由洛伦兹变换式

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

推出。相应的时间间隔为

$$t'_Q - t'_P = \gamma(t_Q - t_P) - \gamma\frac{v}{c^2}(x_Q - x_P)$$

由此易于看出，当 $t_P < t_Q$ ，导致 $t'_P > t'_Q$ 是确实可能的。若 $x_Q > x_P$ ，则v 须为正，且满足条件

$$t_Q - t_P < \frac{v}{c^2}(x_Q - x_P)$$

时序可以颠倒蕴含着一个问题：任一过程的“因”必须发生在“果”之前，这样是否会使因果观念在物理学中失去意义？

举例说明，因果关系是不允许颠倒的。例如我必须先发出声音，声波把信号传给你，你才能听到我的声音。你听到的声音内容，强度，频率都是我发声决定的。所以，我说话是因，你听到是果。物理规律的作用正是由因来导出果。若存在一个现实的S’ 系，在这个S’ 系看，你先听到声音，我再发声，那么，物理学的规律就失效了。因此相对论必须回答：

由什么保证有因果关系的两个事件的时序不会颠倒？

下面我们将证明，若因果律不允许违反，那么它的推论是：

任何信号的传播速率都不能大于光速。

若事件P 是事件Q 的因，那么须存在一种信号（传播速率为u），它再事件P 发生时（即 t_P）从当地（即 x_P）发出，在信号传至 x_Q 后才有事件 Q 发生。这就是说，两个事件的时间差须不小于信号的传播时间。即

$$t_Q - t_P \geq \frac{x_Q - x_P}{u}$$

这是P与Q 有因果联系的必要条件。

P与Q 有因果联系的条件是

$$t_Q - t_P \geq \frac{x_Q - x_P}{u}$$

P，Q时序能颠倒的条件是

$$t_Q - t_P < \frac{v}{c^2}(x_Q - x_P)$$

要使能有因果联系的事件P和Q 发生时序颠倒，则信号速率u须满足

$$u > \frac{c^2}{v}$$

注意到洛伦兹变换要求惯性系间的相对速率 v小于c，这结果说明：若存在超光速的信号，那么因果律将被破坏。这结论可发过来讲，即若要求因果律不被破坏，那么光速是任何信号的速率的上限。

这里有两点需要说明：

（1）原则上任何运动的物体都可以用作为信号，因此这结果表明：因果律不能破坏，任何物体的运动速度的上限是光速。这是相对论的重要推论。它与洛伦兹变换要求任何惯性系之间的相对速率小于光速是相洽的。

（2）如果两个事件满足

$$\frac{x_Q - x_P}{t_Q - t_P} > c$$

那么由于光速是信号速率的上限，它们之间原则上不可能有因果联系。对于不会有因果关系的事件P和Q，它们之间的时序是与参考系有关的，可颠倒的。

6.6相对论性的速度合成

在反映时空关系上，速度的合成是一个重要方面。

当船以速度 $\vec{v}$ 对岸运动，而船上的人以速度$\vec{u}'$对船运动，那么该人对岸的速度为 $\vec{u}=\vec{u}'+\vec{v}$ ，这几乎被人们是天经地义的事。伽利略变换就是按这样的观念写出来的。现在我们知道，伽利略变换的实质性前提是时间的绝对性。既然洛伦兹变换否定了这前提，那么上述速度合成公式一定也要改变。

重新写出洛伦兹变换式

$$t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$y'=y$$

$$z'=z$$

对洛伦兹变换式作微分

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} dt$$

$$dt' = d\,\frac{t - vdx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{1 - vu_x / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} dt$$

其中 $u_x = dx / dt$

两式相除得 $$u'_x = dx' / dt'$$

$$= \frac{u_x - v}{1 - vu_x / c^2}$$

同样可以得到 $$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x / c^2)}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_x / c^2)}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - v u_x / c^2}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - v u_x / c^2)}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - v u_x / c^2)}$$

反变换有

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + v u'_x / c^2}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + v u'_x / c^2)}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + v u'_x / c^2)}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - v u_x / c^2}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - v u_x / c^2)}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - v u_x / c^2)}$$

我们来看相对论性的速度合成公式的几个推论

1。 低速极限.

当u 和 v 都远小于光速c，它将回到伽利略变换的结果 $\vec{u}' = \vec{u}' - v$

2。高速极限

若运动速率u＝c，不论它的方向是什么，u’＝c。光速不变是洛伦兹变换的前提，所以推论和前提一致是必然的。

3。若运动物体对S’ 系的速率u’ <c，则它对S系的速率也u<c。

设在S’ 系中物体沿x方向的速度是u’=0.9c， 而该系对S 系的速度 是v=0.9c.按以往的经验，合成速度是1.8c。它显然超过了光速。但在这么高的速度下。伽利略变换的经验是不能用的。这时必须用相对论性的速度合成公式。相应的变换为

$$u=\frac{u'+v}{1+vu'/c^2}=0.95c$$

它在S 系中的运动仍然是压光速的。

我们已经知道，相对论不允许有超光速的运动存在。上述结果说明运动的超光速和亚光速是与惯性系的选择无关的。即通过速度合成使一个惯性系中的亚光速运动转化为另一个惯性系中的超光速运动是不可能的。

6.7 三维空间中的张量

狭义相对论包含两重内容。首先是以光速不变原理为前提，论证了两个惯性系间的时空关系应由洛伦兹变换描述。前面我们论证了它的后果。

相对论的另一重内容是指出，一切惯性系在物理学中是完全平等的，即物理学的任何基本规律应在不同惯性系中有相同的形式，这就是相对性原理。为了用数学形式表述相对性原理，需要引入四维时空和四维时空中张量的概念。这一节为它作准备，先讨论一下三维空间中的张量。

6.7 三维空间中的张量

狭义相对论包含两重内容。首先是以光速不变原理为前提，论证了两个惯性系间的时空关系应由洛伦兹变换描述。前面我们论证了它的后果。

相对论的另一重内容是指出，一切惯性系在物理学中是完全平等的，即物理学的任何基本规律应在不同惯性系中有相同的形式，这就是相对性原理。为了用数学形式表述相对性原理，需要引入四维时空和四维时空中张量的概念。这一节为它作准备，先讨论一下三维空间中的张量。

平坦的三维空间是各向同性的，因此物理规律的数学形式应与空间坐标轴的取向无关。现在先讨论空间坐标轴的转动及它对物理量的影响。

对两种不同取向的坐标轴，空间同一点的两组坐标 x_i 和 x_i' 间的关系是一个线性变换，即

$$x_i' = \sum_j R_{ij} x_j$$

其中的变换矩阵R由两个坐标架的相对方向决定。

几何学要求这变换不改变空间任何两点间的距离，这意味着

$$\sum_i x_i' x_i' = \sum_{i,m,n} R_{im} R_{in} x_m x_n = \sum_n x_n x_n$$

从这个式子看出，由距离不变的要求，推出变换矩阵 R 应满足

$$\sum_i R_{im} R_{in} = \delta_{mn}$$

或用矩阵的形式写成

$$R^T = R^{-1}$$

其中R^T是R的转置矩阵，R^{-1}是 R 的逆矩阵。满足条件的 R矩阵叫正交矩阵。任意正交矩阵描述了刚性坐标架的任意转动。

最简单的特例是把转轴取在z 方向上，而只让x-y 平面转动。这时的变换矩阵是

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

物理量是用一组数描述的。它们的与坐标架的选取有关，理论上讨论坐标轴转动的重要动机是对物理量进行分量：

（1）若物理量仅用一个数描述，且这个物理量的值在坐标架转动下保持不变，即

$$T' = T$$

则称为标量或零阶张量，例如质量，温度等。

（2）若物理量用三个数描述，且这个物理量的值在坐标架转动下与点的坐标变换一样，即满足

$$T_i' = \sum_j R_{ij} T_j$$

则称为矢量或一阶张量，例如速度或电场强度等。

这是矢量的代数定义，它与几何学定义的矢量是一致的。

（3）若物理量用九个数描述，在坐标架转动是，它的值变化满足规律

$$T'_{ij} = \sum_{m,n} R_{im} R_{jm} T_{mn}$$

即每一下标都与坐标一样变换，则称为二阶张量。例如刚体转动的惯性张量或电磁场的动量流张量等。

（4）更高阶的张量的定义可类推。N阶张量有3^n 个分量，记做 $T_{ij\cdots}$。坐标轴转动时，每一下标都按坐标的变换矩阵变化。

有了物理量按坐标架转动下的分类，就可以考虑如何表达物理规律与坐标轴取向无关的问题了。

有了物理量按坐标架转动下的分类，就可以考虑如何表达物理规律与坐标轴取向无关的问题了。例如 牛顿第二定律

$$F_i = ma_i$$

经验表明 F和 a都是矢量。m 是标量，因此它是一阶的张量方程。当坐标架有转动，等式两边将按同样的规律变化，于是变成

$$F_i' = ma_i'$$

它与上式没有区别。这个例子说明，当物理规律具有张量方程的形式，它将保证该规律与坐标架的取向无关。

6.8 相对论原理的四维表述

在爱因斯坦为相对论奠定了物理基础后，闵可夫斯基首先发现，这理论意味着空间和时间是不可分割的整体。他用一个数学上的四维赝欧氏空间来统一描述这整体。后人把它称为闵可夫斯基时空。它是相对论发展中重要的里程碑。

1. 光速不变性和四维距离

考虑两个任意的惯性系S 和s’，仅设 t=t’ =0 时两者的原点重合，而不要求坐标架的轴平行。仍看t =t’ =0 时公共的原点发出的一个闪光。因为两系中光速相等，所以时空坐标满足

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

的事件必满足

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

进一步对于S 系 的任意事件坐标 x, y, x, t ，引入函数S

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

相应的在S' 系中定义

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

由光速不变性决定，当s=0 时， 必有 s'=0 。一般的说，在S 系 和S' 系的时空坐标变换是线性变换。得到 s'^2 仍是 x, y, x, t 的二次函数。又因为要满足光速不变， s=0 时， s'=0 。这个二次函数只能有

$$s'^2 = A(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) = As^2$$

的形式，其中A是与两系的相对速率有关的常数。在考虑到两个惯性系是平等的，运动是相对的，因此这个比例系数一定是1。

这样就是说： 若光速不变为前提，s^2 在惯性系变换下保持不变。反过来也成立，s^2 保持不变这光速不变。

因此人们把 s^2 的不变性作为光速不变原理的数学表示

根据上面的结果，可以用 $x_1 = x, \ x_2 = y, \ x_3 = z, \ x_4 = ict$ 为笛卡儿坐标建立一个四维的欧氏空间。这空间中任一点与原点的距离平方是该点坐标的平方和，即上面定义的 s^2。因为 x_4 轴上的距离平方是负值，所以它在数学上属赝欧氏空间，物理学中称它为闵可夫斯基的四维时空。光速不变假设保证了闵可夫斯基四维时空中距离在时空转动下保持不变。

2.四维时空的转动

上面的分析说明，一个坐标取定的闵可夫斯基时空可看成一个确定的惯性系。把上一节的讨论作数学上的推广，一个四维的正交矩阵刻划了闵可夫斯基时空的一种转动。

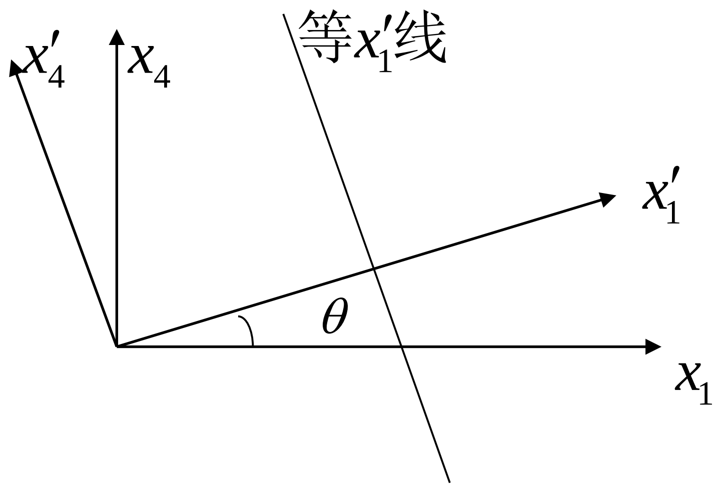
而物理上，它描述的是惯性系间的一种转换。任意的四维正交矩阵有六个独立的参量，它们由惯性系间的相对速度（三个量）和空间坐标架的相对轴向（三个量）决定。

这样任意两个惯性系间的时空变换都可以用四维的正交矩阵表示。

由六个参量的四维转动矩阵的一般情形是比较复杂的。我们只讨论简单而有用的特殊情形。

考虑x_2和 x_3轴保持不变的转动。它相对于空间轴一致且相对沿公共的 x_1轴运动的两个惯性系间的变换。这样，我们应该能几何的导出洛伦兹变换。

从几何的看，这样的转动只能是x_1 - x_4平面转过角度 θ 。



描述这转动的正交矩阵L 于三维转动矩阵类似

$$L=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

这里夹角θ没有观测意义。我们能知道的是两系的相对速率v 。因此必须找出 θ 和v 的联系。S’ 系中的固定点在 S 系中以速度v 运动，可写出

$$\frac{dx_1}{dx_4}=\frac{1}{ic}\frac{dx_1}{dt}=\frac{v}{ic}$$

另一方面按四维时空几何关系，等 x_1' 线的方向在S 系看来有

$$\frac{dx_1}{dx_4}=-\tan\theta$$

因此得出

$$\tan\theta=\frac{iv}{c}$$

即 $\cos\theta=\gamma,\quad \sin\theta=i\gamma v/c$，于是变换矩阵完全由相对速率v 确定了，它是

$$L=\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

它和前面导出的洛伦兹变换完全一致。

通过重新导出洛伦兹变换我们说明了两点：

（1）由于光速不变性保证了闵可夫斯基时空的四维距离不变，因此惯性系间的时空转换可用闵可夫斯基时空的转动来表示（正交变换）

（2）前面讨论的S 和S’ 系的转换是闵可夫斯基空间中 x_1 - x_4平面的转动

3. 洛伦兹变换下的四维张量

洛伦兹变换可以写出四维矩阵形式，现在把S 系 和 S’ 系的变换关系写成

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu, \qquad \mu = 1,2,3,4$$

在相对论中人们约定，当下标在同一项中出现两次，则自动表示对这个下标从1到4求和。这叫做爱因斯坦求和约定。上式中按约定省略了求和号。我们以后也一直这样用这个求和约定。

现在把物理量按洛伦兹变换来分类。

若物理量由一个数描述，且它与惯性系的转换无关，则称为四维标量，即洛伦兹变换下的标量。

四维矢量（一阶张量）由四个数 $T_\mu (\mu = 1,2,3,4)$ 描述，且满足变换

$$T'_\mu = L_{\mu\nu} T_\nu$$

高阶张量的定义类似。N阶张量有 4^n 个分量，且要求 $T_{ij\cdots}$ 中每一个下标与四维时空坐标有同样的变换性质。

四维张量的定义的方式与三维空间中张量的定义完全一样，但是物理含义却有很大不同。三维空间张量是按物理量的转动性质作分类，四维时空的分量不仅有物理量转动性质（四维时空中包含三维空间），还有物理量在惯性系转换下的行为。尤其是我们经常提到的洛伦兹变换矩阵，变换前后两个惯性系的三维空间轴是平行的，即空间轴没有转动。

下面我们讨论对物理量作四维分类的意义。

4. 相对性原理的四维表述

相对论的要点是认为，一切惯性系在物理上等价。问题在于基本物理规律应该有什么数学形式，才表明这个物理规律符合相对论的要求。

上面的理论说明，当把物理量用四维张量表示，且相应的物理规律有四维张量方程的形式，则此物理规律在惯性系转换中必将保持形式不变。例如某规律可以写成

$$F_{\mu}=G_{\mu\nu}A_{\nu}+B_{\mu}$$

且其中的有关量都具有张量的变换性质，那么惯性系转换后，等式两边按同样的规律变换，方程必然变为

$$F'_\mu = G'_{\mu\nu} A'_\nu + B'_\mu$$

的形式，即方程在洛伦兹变换下是协变的。这样我们就知道它是符合相对性原理的要求的。把物理量按洛伦兹变换分类的动机正是在这里。

反过来讲，要求物理规律满足相对性原理，它也必须有张量方程的形式。把物理规律，例如麦克斯韦方程，写出四维张量的形式是我们下面要讨论的相对论的物理学。在这之前，我们看几个四维张量的例子

例1 固有时间

闵可夫斯基空间中的四维（简记为4-）间隔 $\mathrm{d}x_\mu = (\mathrm{d}\vec{r}, \mathrm{i}c\mathrm{d}t)$ 是洛伦兹变换下最基本的4-矢量。时间间隔$\mathrm{d}t$ 是四维间隔的一个分量，而不是4-标量。

设一个质点在$\mathrm{d}t$时间内走过 $\mathrm{d}\vec{r}$ ，我们定义

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{|\mathrm{d}\vec{r}|^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2}\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\mu$$

等式右边显然是4-标量，因此 $\mathrm{d}\tau$ 是4-标量。

我们来看一看$d\tau$这个4-标量的物理意义，我们把参考系转到相对质点静止的S' 系。在S' 系中有 $dx_i' = 0(i = 1,2,3)$，因此 $d\tau = dt'$。这说明 τ 与质点静止系中的时间 t' 相同。形象的说，τ 就是质点所携带的时钟的走时，人们把它叫做固有时。

在以后的张量形的物理理论中要经常用到 τ作为时间变量，因为它是一个4-标量。在不同惯性系中同等。

例2 四维速度

4-速度 U_μ ，定义为

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}, ic\frac{dt}{d\tau}\right)$$

因为dx_μ 是4-矢量，而$d\tau$ 是4-标量，所以 U_μ 是4-矢量。运动学中用三维速度 $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ 描述质点的运动。记得动钟变慢，有 $dt = \gamma d\tau$ 。U_μ 和三维速度 $\vec{v}$ 的关系是

$$U_\mu = \frac{dt}{d\tau}(\vec{v}, ic) = \gamma(\vec{v}, ic)$$

$$U_\mu = \frac{dt}{d\tau}(\vec{v}, ic) = \gamma(\vec{v}, ic)$$

我们可以看到4维速度有性质 $U_\mu U_\mu = \gamma^2(v^2 - c^2) = -c^2$

对质点运动的描述，用U_μ不如用 $\vec{v}$ 直观。 但 U_μ 是洛伦兹变换下的4-矢量。因为物理规律要有张量方程的形式，下面讨论力学规律的时候会用到4-速度。

例3 四维微商算符

在三维空间中有微商算符 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ 。现在相应的定义4-算符，

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\nabla, \ \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

可以证明，它具有4-矢量的性质。设φ 是任一标量场，看 $\partial_\mu \varphi$ 的变换

$$\partial'_\mu \varphi' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu} = (L^{-1})_{\nu\mu}\partial_\nu \varphi = L_{\mu\nu}\partial_\nu \varphi$$

这表明 $\partial_\mu \varphi$ 是4-矢量。推导中用到了洛伦兹矩阵为正交矩阵的性质，即 $L^{-1} = L^T$ 。

同样，可以证明，若F_μ为4-矢量场，则 $\partial_\mu F_\mu$ 是标量，而$\partial_\mu F_\nu$ 是二阶张量。

由4-矢量型的微商算符可引伸出4-标量算符，即

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial_\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$\Box$就是波动方程中的达朗贝尔算符。达朗贝尔算符的四维标量性说明，若有场满足波动方程

$$\Box \varphi = 0$$

那么这个物理规律是符合相对论的要求的，即洛伦兹变换不改变它的形式