第七章 带电粒子和电磁场的相互作用

7.1 任意运动带电粒子产生的电磁场

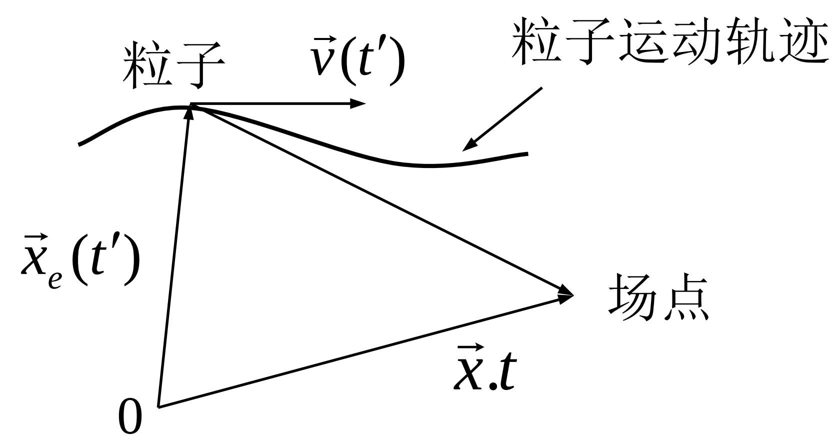
带电粒子e在外力作用下，以任意速度 $\vec{v}(t')$ ，沿特定轨道运动，粒子的位置矢量为 $\vec{x}_e(t')$ 。我们要计算运动粒子激发的电磁势。如图，在场点x，时刻t的势是粒子在较早时刻 t' 激发的，该时刻粒子处在 $\vec{x}_e(t')$ 运动速度是 $\vec{v}(t')$，粒子与场点距离是

$$r = \left|\vec{x} - \vec{x}_e(t')\right| = c(t - t')$$

由第五章，我们知道推迟势的一般形式

$$\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}d\tau'$$



$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}d\tau'$$

对带电粒子来说，$\vec{J}=\rho\vec{v}$，可以看出，势只依赖于速度，不依赖于加速度，因此，我们可以选择相对粒子静止的参考系，叫 $\tilde{\Sigma}$ 在 $\tilde{\Sigma}$ 系中的势就是静止电荷的势，即

$$\tilde{\varphi}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\tilde{r}}\ . \qquad \tilde{A}=0$$

$\tilde{r}$ 是 $\tilde{\Sigma}$ 中的距离，为 $\tilde{r}=c(\tilde{t}-\tilde{t}')$

现在，变回原来的参考系 Σ，运用洛伦兹变换

$$
\begin{cases}
A_x = \dfrac{\tilde{A}_x + \dfrac{v}{c^2}\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\dfrac{v}{c^2}\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\
A_y = \tilde{A}_y = 0 \\
A_z = \tilde{A}_z = 0 \\
\varphi = \dfrac{\tilde{\varphi} + v\tilde{A}_x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\vec{A} = \dfrac{\dfrac{\vec{v}}{c^2}\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\
\varphi == \dfrac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \vec{A} = \dfrac{\vec{v}\tilde{\varphi}}{c^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{e\vec{v}}{c^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}4\pi\varepsilon_0\tilde{r}} \\ \varphi == \dfrac{e}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}4\pi\varepsilon_0\tilde{r}} \end{cases}$$

$\tilde{r}$ 是 $\tilde{\Sigma}$ 中的距离，为 $\tilde{r} = c(\tilde{t} - \tilde{t}')$ ，变换为

$$\tilde{r} = c(\tilde{t} - \tilde{t}') = c\frac{(t-t') - \dfrac{\vec{v}}{c}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_e)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{r - \dfrac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$
\begin{cases}
\vec{A} = \dfrac{e\vec{v}}{c^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\,4\pi\varepsilon_0\tilde{r}} = \dfrac{e\vec{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2(r-\dfrac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r})} \\
\varphi == \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0(r-\dfrac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r})}
\end{cases}
$$

或者写成：

$$
\vec{A} = \frac{\mu_0 e\vec{v}}{4\pi(r-\dfrac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r})}
$$

$$
\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0(r-\dfrac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r})}
$$

这就是任意运动的带电粒子的李纳一维谢尔势。

其中 $\vec{v} = \vec{v}(t')$ ， $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_e(t') = \vec{r}(t')$ 都是t'的函数。

有了电磁势，就可以对场点时空坐标x 和t 求导数得电磁场强。
但是电磁势公式中速度和距离都是t'的函数。$\vec{v}=\vec{v}(t')$ ， $\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_e(t')=\vec{r}(t')$

由

$$t'=t-\frac{r}{c}=t-\frac{\sqrt{\left[\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right]^2}}{c}$$

t' 是x 和t 的隐函数，可求出

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(t-\frac{r}{c})=1-\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$=1-\frac{1}{c}\frac{\partial r(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

其中

$$\frac{\partial r(t')}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t'}\sqrt{\left[\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right]\cdot\left[\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right]}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r(t')}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t'}\sqrt{\left[\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right]\cdot\left[\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right]} \\
&= \frac{\partial}{\partial t'}\sqrt{x^2 + x^2{}_e(t') - 2\vec{x}\cdot\vec{x}_e(t')} \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2 + x^2{}_e(t') - 2\vec{x}\cdot\vec{x}_e(t')\right]^{-1/2}\left[2x_e(t')\frac{\partial x_e(t')}{\partial t'} - 2\vec{x}\cdot\frac{\partial \vec{x}_e(t')}{\partial t'}\right] \\
&= -\frac{1}{r}\left[\vec{x}\cdot\frac{\partial \vec{x}_e(t')}{\partial t'} - \vec{x}_e(t')\cdot\frac{\partial \vec{x}_e(t')}{\partial t'}\right] \\
&= -\frac{1}{r}\left\{\left[\vec{x}-\vec{x}_e(t')\right]\cdot\frac{\partial \vec{x}_e(t')}{\partial t'}\right\} \\
&= -\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{v}(t')
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\left[-\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{v}(t') \right] \frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$= 1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{cr} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

由此可见 $$\frac{\partial t'}{\partial t}\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{cr}\right) = 1$$

故有 $$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{cr}} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{\vec{n}}}{c}}$$

式中 $\hat{n}$为$\vec{r}$ 的单位矢量（方向）

$$t' = t - \frac{r}{c} = t - \frac{\sqrt{\left[\vec{x} - \vec{x}_e(t')\right]^2}}{c}$$

$$\nabla t' = \nabla(t - \frac{r}{c}) = \nabla t - \frac{1}{c}\nabla r = -\frac{1}{c}\nabla r$$

$$= -\frac{1}{c}\nabla r\Big|_{t'=常数} - \frac{1}{c}\frac{\partial r(t')}{\partial t'}\nabla t'$$

$$= -\frac{1}{c}\cdot -\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}\nabla t'$$

得到 $$\nabla t'(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}) = -\frac{\vec{r}}{cr}$$

$$\nabla t' = \frac{-\frac{\vec{r}}{cr}}{1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}} = -\frac{\hat{\vec{n}}}{c(1 - \frac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c})}$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0 e\vec{v}}{4\pi(r-\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r})}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{cr}}=\frac{1}{1-\frac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c}}$$

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0(r-\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{r})}$$

$$\nabla t'=-\frac{\hat{\vec{n}}}{c(1-\frac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c})}$$

有了以上公式，可以求出电磁场，我们先看低速情况。$v<<c$

低速近似下 $\frac{\partial t'}{\partial t}=1$ $\nabla t'=-\frac{\hat{\vec{n}}}{c}$ $\vec{A}=\frac{\mu_0 e\vec{v}(t')}{4\pi r}$ $\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\vec{A}\Big|_{t'\text{不变}}+\nabla t'\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}$$

右边第一项为 $\frac{e\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}$ 与距离平方成反比

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}\Big|_{t'\text{不变}} + \nabla t' \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 e\vec{v}(t')}{4\pi r} \qquad \nabla t' = -\frac{\hat{\vec{n}}}{c}$$

右边第二项

$$\vec{B} = -\frac{\hat{\vec{n}}}{c} \times \frac{e\dot{\vec{v}}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} = \frac{e\dot{\vec{v}} \times \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}$$

与距离成反比

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} - \nabla\varphi\Big|_{t'=\text{常数}} - \nabla t' \frac{\partial \varphi}{\partial t'}$$

$$= -\frac{e\dot{\vec{v}}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} + \frac{e\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{\hat{\vec{n}}}{c}\frac{e\dot{\vec{v}} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 c r^2}$$

$$= \frac{e\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{v}})$$

在远处，可略去库仑场，得辐射场

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \dot{\vec{v}})$$

$$\vec{B} == \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\dot{\vec{v}} \times \hat{\vec{n}}$$

令 $\vec{p} = e\vec{x}_e$ 为带电粒子的点偶极距，则 $\ddot{\vec{p}} = e\dot{\vec{v}}$ ，这和第五章的电偶极辐射公式一致。

上面讨论了低速近似情形下的电磁场的形式。电磁场分为两个部分。一部分是库仑场，另一部分是和加速度有关的辐射场。对它作洛伦兹变化，可以得到任意运动速度下的带电粒子激发的电磁场。这电磁场同样分为两部分，一部分是库仑场变换而得，这部分的性质，我们在相对论一章中讨论过。另一部分是加速度有关的辐射场。也可以用李纳一维谢尔势直接计算加速度有关的辐射场。我们这里直接给出辐射场为

$$\begin{cases} \vec{E}_{辐} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \dfrac{\hat{\vec{n}} \times \left[(\hat{\vec{n}} - \dfrac{\vec{v}}{c}) \times \dot{\vec{v}} \right]}{(1 - \dfrac{\vec{v} \cdot \hat{\vec{n}}}{c})^3} \\ \vec{B}_{辐} = \dfrac{1}{c} \hat{\vec{n}} \times \vec{E}_{辐} \end{cases}$$

瞬时辐射场能流为 $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0} \vec{E}_{辐} \times \vec{B}_{辐} = \varepsilon_0 c E_{辐}^2 \hat{\vec{n}}$

辐射功率角分布为

$$\frac{dp(t')}{d\Omega}=f(\theta.\varphi)=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\left|\hat{\vec{n}}\times\left[(\hat{\vec{n}}-\frac{\vec{v}}{c})\times\dot{\vec{v}}\right]\right|^2}{(1-\frac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c})^5}$$

以上所有结果在低速 运动情况下（即 $\vec{v}$ 很小，$v<<c$，并且 $\dot{\vec{v}}=0$ ），与第五章的结果一致。

3、韧致辐射（ $\vec{v}\,//\,\dot{\vec{v}}$ ）

所谓韧致辐射是指 $\vec{v}\,//\,\dot{\vec{v}}$ 情况时的辐射，如直线加速器中的辐射。

a) 场分布情况

把条件 $\vec{v}\,//\,\dot{\vec{v}}$ 代入到任意运动粒子的电磁场中，得到

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \dfrac{\left[\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \cdot \dot{\vec{v}})\right]}{(1 - \dfrac{\dot{\vec{v}} \cdot \hat{\vec{n}}}{c})^3} \\ \vec{B} = \dfrac{1}{c} \hat{\vec{n}} \times \vec{E} = -\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \dfrac{\hat{\vec{n}} \times \dot{\vec{v}}}{(1 - \dfrac{\dot{\vec{v}} \cdot \hat{\vec{n}}}{c})^3} \end{cases}$$

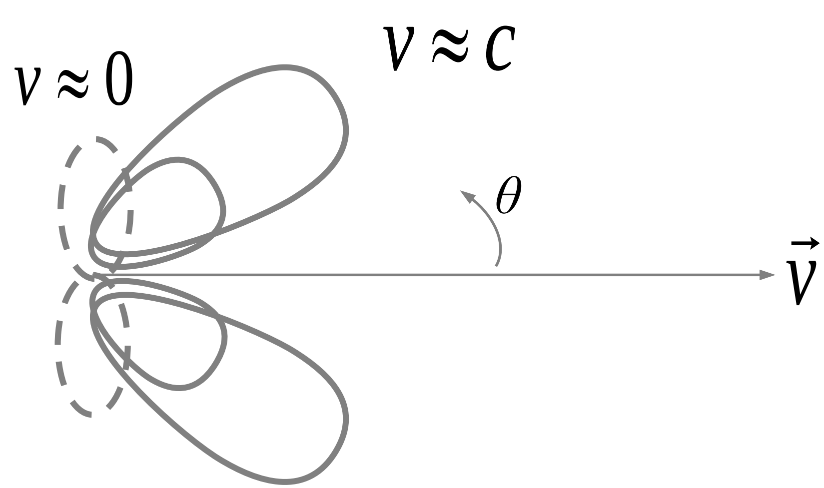
辐射能流

$$\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{e^2 \dot{\vec{v}}^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \frac{\sin^2 \theta \hat{\vec{n}}}{(1 - \frac{v}{c} \cos\theta)^6}$$

θ 为 $\hat{\vec{n}}$ 与 $\vec{v}$的夹角

辐射角分布

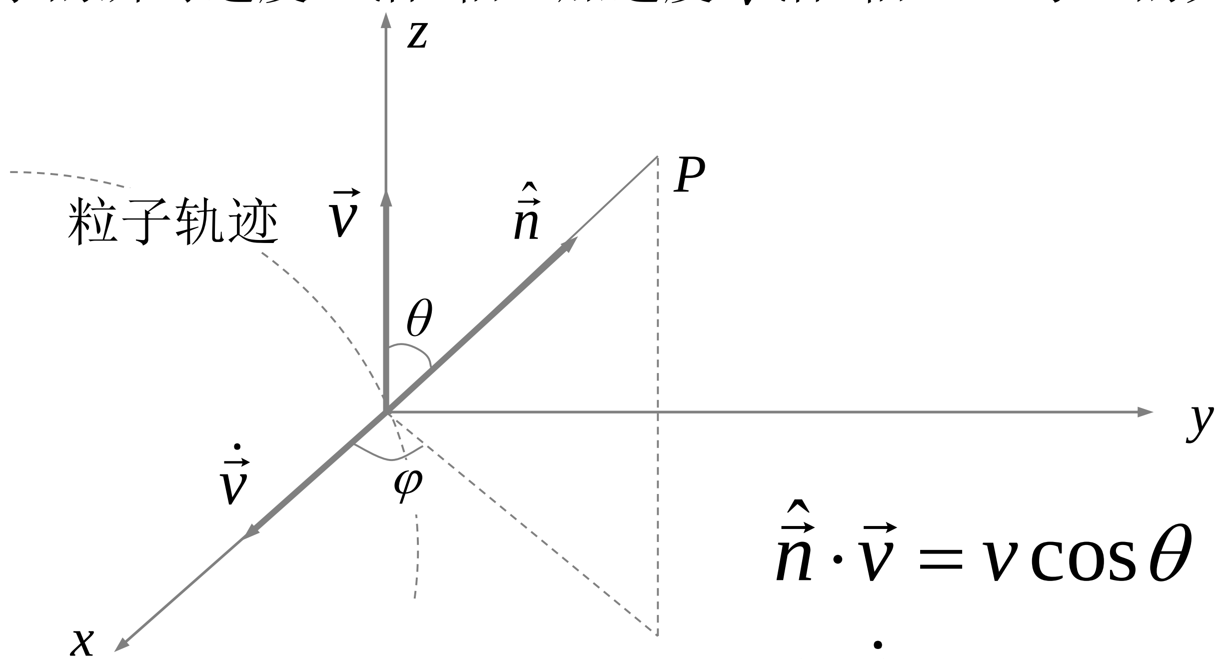
$$\frac{dp(t')}{d\Omega} = r^2 \vec{s} \cdot \hat{\vec{n}} \frac{dt}{dt'} = \frac{e^2 \dot{\vec{v}}^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 (1 - \frac{v}{c}\cos\theta)^5}$$



同步加速辐射 ($\vec{v}\perp\dot{\vec{v}}$)

带电粒子作园周运动时速度与加速度总是互相垂直，此时粒子发出的辐射称为同步加速辐射。

设在t'时刻粒子的瞬时速度 $\vec{v}$ 沿z轴，加速度 $\dot{\vec{v}}$ 沿x轴，$\hat{\vec{n}}$ 与 $\vec{v}$ 的夹角为θ。



$$\hat{\vec{n}}\cdot\vec{v} = v\cos\theta$$

$$\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = 0$$

由图可看出

$$\hat{\vec{n}}\cdot\dot{\vec{v}} = \dot{v}\sin\theta\cos\phi$$

因而

$$\hat{\vec{n}}\times\left[(\hat{\vec{n}}-\frac{\vec{v}}{c})\times\dot{\vec{v}}\right]=(\hat{\vec{n}}\cdot\dot{\vec{v}})(\hat{\vec{n}}-\frac{\vec{v}}{c})-(1-\frac{\vec{v}\cdot\hat{\vec{n}}}{c})\dot{\vec{v}}$$

$$=\dot{v}\sin\theta\cos\phi(\hat{\vec{n}}-\frac{\vec{v}}{c})-(1-\frac{v}{c}\cos\theta)\dot{\vec{v}}$$

$$\left|\hat{\vec{n}}\times\left[(\hat{\vec{n}}-\frac{\vec{v}}{c})\times\dot{\vec{v}}\right]\right|^2=\dot{v}^2\left[(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^2--(1-\frac{v^2}{c^2})\sin^2\theta\cos^2\phi\right]$$

a) 场分布

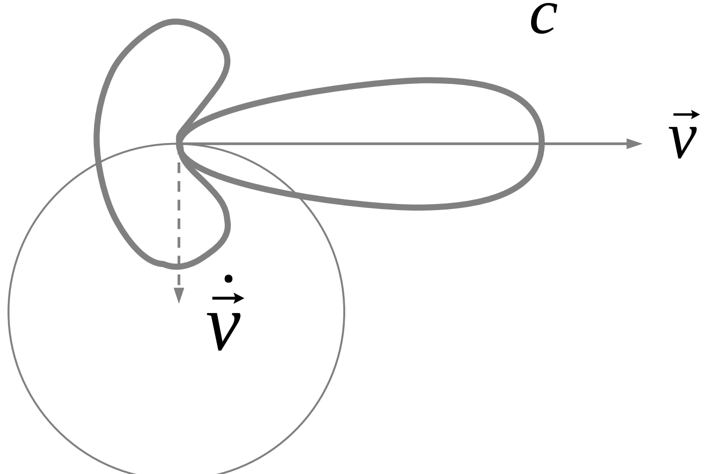
$$\begin{cases}\vec{E}=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\dfrac{\left[\dot{v}\sin\theta\cos\phi(\hat{\vec{n}}-\frac{\vec{v}}{c})-(1-\frac{v}{c}\cos\theta)\dot{\vec{v}}\right]}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^3}\\[2ex]\vec{B}=\dfrac{1}{c}\hat{\vec{n}}\times\vec{E}\end{cases}$$

b) 辐射能流

$$\vec{S} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2} \frac{\left\{\dot{v}^2\left[(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^2 - (1-\frac{v^2}{c^2})\sin^2\theta\cos^2\phi\right]\right\}\hat{\vec{n}}}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^6}$$

c)辐射功率角分布

$$\frac{dp(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \frac{\dot{v}^2\left[(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^2 - (1-\frac{v^2}{c^2})\sin^2\theta\cos^2\phi\right]}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^5}$$



7.2　带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用

带电粒子自己产生的场，对粒子自己的作用包含两个效果：一方面使带电粒子的惯性增大，即有效质量增加；另一方是当带电粒子运动的加速度不是常数时，使带电粒子受到一个力，这个力表示带电粒子在辐射电磁波时所受到的阻尼力。

1、电磁质量

在电动力学中，粒子自己的场对自己的作用力不为零，这是因为场不只是某种描述粒子各部分之间互相作用的一种手段，它本身就是一种客观存在，因此说粒子自己的场对粒子本身产生了一个作用力。

我们知道，任意运动的带电粒子的电磁场包括两部分，一部分场量与 r^2 成反比，其能量主要分布于粒子附近，另一部分与 r 成反比，其能量可以辐射到任意远处，称此为粒子加速时激发的辐射场。

现在，为了求出粒子的电磁质量，我们从自有场对粒子的反作用出发。

因为自有场总是和粒子不可分割地联系在一起的，它的能量不能从粒子运动能量中分离出去。因此，测出一个带电粒子的总能量和总质量，总是包含粒子自有场的能量和质量在内。带电粒子的质量m是其非电磁起源的那部分质量m_0与其自有场质量m_{em}之和，即

$$m = m_0 + m_{em}$$

为了方便求出带电粒子的电磁质量m_{em}，我们作如下约定：

i）假定带电粒子的电量e是一个球状对称的电荷分布，其半径为r_e；

ii）粒子的速度远小于c；

iii）选择一个参考系，使带电粒子的某一电荷元dq对该系是静止的。

在粒子静止的参考系上，粒子的自有场只有库仑场，即为

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

库仑场的能量为

$$W=\int_{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dc$$

$$=\int_{r_e}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 r^4}r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

$$=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_e}$$

由相对论质能关系，可以得粒子的电磁质量

$$m_{em}=\frac{W}{c^2}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2 r_e}$$

对于电子而言，e即为电子电荷量，如果假设电子的非 电磁起源的那部分质量 $m_0 \approx m_{em}$ ，则电子的质量为

$$m_e = 2m_{em} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_e}$$

从而可估算电子的经典半径

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \approx 2.817938 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

但是，目前没有发现电子有尺度，直到 $10^{-18}\,\mathrm{m}$ 的范围，电子的电磁性质仍表现为电电荷。

辐射阻尼(radiative reaction force)

因为一个带电粒子作加速运动时可发射辐射波其辐射功率为

$$p(t') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}|\dot{\vec{v}}|^2 \qquad (v << c)$$

这表示粒子在单位时间内辐射出去的能量：

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}|\dot{\vec{v}}|^2$$

可见在$t1 \to t2$时间内辐射出去的能量为

$$W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2}\frac{2e^2}{3c^3}|\dot{\vec{v}}|^2 dt$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2}\frac{2e^2}{3c^3}|\dot{\vec{v}}| d\vec{v}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}\Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2}\vec{v}\cdot d\dot{\vec{v}}$$

如果粒子作准周期运动，则在一周期内($t1 \to t2$恰好为一周期），或者在$t=t1$和 $t=t2$时 。

则在$t1 \to t2$时间内，粒子辐射出去的能量为：

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\vec{v}} \cdot d\dot{\vec{v}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\vec{v}} \cdot \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\vec{v}} \cdot \ddot{\vec{v}} dt$$

由于辐射，粒子损失了能量和动量，因而粒子作阻尼运动，也就是说，粒子受到了阻尼力的作用，由能量守恒定律可知，辐射出去的能量等于辐射阻尼力作的功，即

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_s \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\vec{v}} \cdot \ddot{\vec{v}} dt$$

由此可见，辐射阻尼力为

$$\vec{F}_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\vec{v}}$$

辐射阻尼力也称为Lorentz摩擦力，它是以某种近似的对时间取平均的方法得到的。因此不能代表瞬时值，而是一种时间平均效应。

7.3 电磁波的散射和吸收

1、自由电子对电磁波的散射

当一定频率的外来电磁波投射到电子上时，电磁波的振荡电场作用到电子上，迫使电子以相同的频率用振动。振动着的电子向外辐射出电磁波，把原来入射波的部分能量辐射出去。这咱现象称为电磁波的散射。

散射情况可分为两种：自由电子对电磁波的散射和束缚电子对电磁波散射。

这里先讨论自由电子对电磁波的散射。

我们先考虑一个自由电子对电磁波的散射，假定入射波是平面波，即

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

并设自由电子在入射波作用下，运动速度*v*<<*c*，则可略去磁力作用，还可认为电子只是在坐标原点作振动。于是电子的运动方程为：

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dddot{\vec{x}}$$

$$\ddot{\vec{x}}-\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}\dddot{\vec{x}}=\frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

令 $\vec{x}=\vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ 代入上式，即有

$$-\omega^3\vec{x}_0-\frac{ie^2\omega^3}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}\vec{x}_0=\frac{e}{m}\vec{E}_0$$

即 $$\vec{x}_0=\frac{e\vec{E}_0}{m(-\omega^2-\frac{ie^2\omega^3}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m})}=-\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2+i\omega\alpha)}$$

其中 $$\alpha=\frac{e^2\omega^3}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}$$

$$\alpha = \frac{e^2\omega^3}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{e^2\omega}{6\pi\varepsilon_0 c^2 m}$$

$$= \frac{4\pi\omega}{3\lambda}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = \frac{4\pi\omega}{3\lambda} r_e \ . \qquad (\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\mathrm{c}})$$

对于一般电磁波来说，入射波长λ远大于电子经典半径r_e，即$\lambda >> r_e$，故

$$\frac{r_e}{\lambda} = \frac{3\alpha}{4\pi\omega} << 1$$

因此可以略去阻尼力项，在这种情况下有

$$\vec{x}_0 = -\frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2}$$

因而电子作强迫振动为

$$\vec{x} = -\frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t}$$

由此可得电子的加速度$\ddot{\vec{x}}$，进而可求得电子辐射场—即散射波的电磁场以及平均散射能流 $\vec{S}$和平均散射功率P。

根据低速运动粒子当有加速度$\dot{\vec{v}}$时激发的辐射电磁场，我们得到电子振动时所辐射的电场强度：

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \ddot{\vec{x}})$$

以β表示 $\hat{\vec{n}}$与入射场强 $\vec{E}_0$的夹角，得到散射波的电场强度。

$$E = \frac{e\ddot{x}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\beta = \frac{e^2 E_0}{4\pi\varepsilon_0 m c^2 r}\sin\beta$$

平均散射能流为

$$\bar{s}=\frac{e^4E_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0c^3m^2r^2}\sin^2\beta=\frac{\varepsilon_0cE_0^2r_e^2}{2r^2}\sin^2\beta$$

散射波总平均功率为

$$P=\oint\bar{s}r^2d\Omega=\frac{8\pi}{3}r_e^2\frac{\varepsilon_0c}{2}E_0^2$$

入射波强度*I*0定义为平均入射能流

$$I_0=\bar{s}_0=\frac{\varepsilon_0c}{2}E_0^2$$

故有

$$\bar{s}=\bar{s}_0\frac{r_e^2}{r^2}\sin^2\beta=I_0\frac{r_e^2}{r^2}\sin^2\beta$$

从而有

$$P=\frac{8\pi}{3}r_e^2I_0$$

则定义汤姆逊(Thomson)散射截面为：

$$\sigma = \frac{\text{散射功率}}{\text{单位面积入射功率}} = \frac{p}{I_0} = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

汤姆逊散射微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}(1+\cos^2\theta)$$

这里θ为入射波矢 $\vec{k}_{入}$与散射波矢 $\vec{k}_{散}$的夹角

2、束缚电子对电磁波的散射

对于原子内的束缚电子，可看作固有频率为ω0的谐振子，当入射波电场为 $\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$，振子运动方程为

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}\dddot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = \frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

即

$$\ddot{\vec{x}} + \alpha\dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = \frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

将$\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$代入,得到

$$\vec{x} = \frac{e}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\alpha)}\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{e}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2}}\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \delta)}$$

其中 $\mathrm{tg}\,\delta = \dfrac{\omega\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}$

由此可求向振子的加速度 $\ddot{\vec{x}}$ 及散射波的场强，进而可求得平均散射功率。

散射波电场强度为

$$E = \frac{e\ddot{x}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\beta$$

β为散射方向与入射波电场 $\vec{E}_0$ 的夹角。

平均散射能流为

$$\bar{s} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 m^2 r^2}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\alpha^2}\sin^2\beta$$

平均散射功率为

$$P = \oint \vec{s} r^2 d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\alpha^2} I_0$$

散射截面为

$$\sigma = \frac{P}{I_0} == \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\alpha^2} I_0$$

当ω<<ω0，称为瑞利(Rayleiqh)散射；当ω=ω0。即出现共振；当ω>>ω0，过渡到自由电子散射。

3、电磁波的吸收

当具有连续谱的电磁波投射到原子中的束缚电子上时，频率为ω=ω0的入射波引起振子“共振”。这个频率成份的入射波能量被振子吸收，振幅增大，直到振子散射出去的能量等于其吸收的能量，振幅才达到稳定值。

现在计算电子所吸收的入射波能量。设入射波单位频率间隔入射于单位面积的能量为I0(ω)，故振子辐射的总能量为

$$W=\int p d\omega=\frac{8\pi}{3}r_e^2\int_0^{\infty}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\alpha^2}I_0(\omega)d\omega$$

这里主要贡献来自 $\omega=\omega_0$ 处，即 $I_0(\omega)\to I_0(\omega_0)$ 被积函数中：除ω0—ω之外，其余ω都换为ω0即得

$$W=\frac{8\pi}{3}r_e^2\frac{\omega_0^2\pi}{2\alpha}I_0(\omega_0)$$

$$=2\pi^2 r_e c I(\omega_0)$$

共振现象是能量吸收和再辐射过程。