第四章　电磁波的传播

在这一章我们讨论随时间变化的电磁场。变化的电磁场以波的方式传播，变化的电流是产生电磁波的源。电磁波一经产生就按自身的规律运动。我们课程先讨论电磁波自身运动的问题，即传播问题，再讨论电磁波的激发问题。

变化着的电场和磁场互相激发，形成在空间中传播的电磁波。电磁波已在广播通讯、光学和其他科学技术中得到广泛应用。

本章只介绍关于电磁波传播的最基本的理论。也就是说，只研讨电磁场在电介质、导体以及在边界上的传播特性。

4.1 平面电磁波

一般情况下，电磁场的基本方程是麦克斯韦方程，即

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho & (1) \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & (3) \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

电磁波离开了源，再空间中传播满足的方程是

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 & (5) \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (6) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & (7) \\ \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (8) \end{cases}$$

真空情形

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \nabla \times \vec{B}$$

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \nabla \times \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \qquad \Leftarrow \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\nabla \times \vec{E}$$

$$\begin{aligned}\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} &= -\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) \\ &= -\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \nabla^2\vec{E} \\ &= \nabla^2\vec{E}\end{aligned}$$

得到电场E满足的波动方程

$$\nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

显然，我们也能得到磁场满足的波动方程

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

我们把电场（或磁场）的波动方程作为基本方程，它与横波条件 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ （ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ） 一起决定了电波（磁波）的行为，但电场和磁场的波动方程不是独立的，而是相互决定的。

波动方程是线性齐次方程，在特定坐标系下，我们可以用分离变量法得到一组完备的特解。任意解都可以用这组特解的组合来表示。而特解本身往往有重要的物理意义。

我们将着重讨论直角坐标系下的特解。

我们这里直接给出解的形式

$$\vec{E}(\vec{x}\cdot t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

这里解的形式采用复数形式是为了方便起见（这一点和量子力学中波函数用复数表示不同），物理的电场是解的实部。$\vec{E}_0$ 也是复数矢量，它带有电波振幅三个分量的初相位。

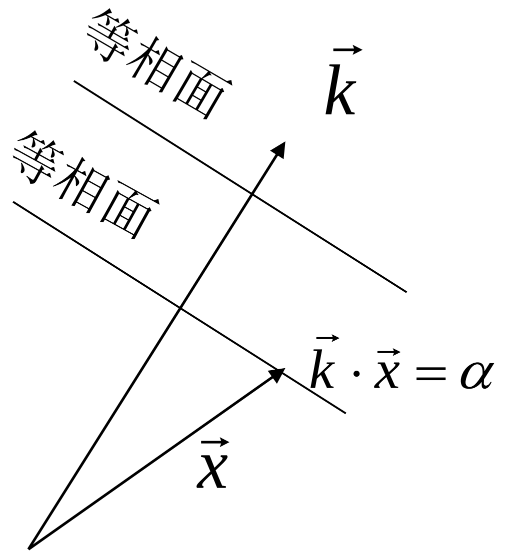
$\vec{k}=(k_x,k_y,k_z)$ 是波矢,ω 是角频率

我们来看一看这个特解的物理性质

1）等相面 $\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t=\mathrm{const}$

是一个平面，

因此这个特解描述的是平面波。



矢量 $\vec{k}$ 的方向是等相面传播的方向

波长为 $\lambda=2\pi/k$

2）频率与相速度

角频率为 ω ，周期 $T = 2\pi / \omega$

等相面的运动速度叫相速度 $v = \omega / k$

由波动方程我们知道 ω 与 k 有关系

$$k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

所以相速度

$$v = \omega / k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$$

我们可以重写 ω 和 k 的关系

$$k = \omega / c$$

由单色平面电磁波的解

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

在微分过程中，注意到：

$$\nabla \to i\vec{k}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$$

平面波特解还要满足横波条件

$$\nabla\cdot\vec{E}=0$$

把电波特解的形式代入

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}=0 \qquad \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$$

这表明，电场振动方向与传播方向互相垂直，由此可见**电波是横波**

电波一旦确定，磁波可有电场和磁场的关系推出

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E}$$

对时间积分后

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} + B_1(x, y, z)$$

其中 B_1 是任意静磁场，和传播无关，以后不写在式子中。
这样的磁波满足横波条件。我们把磁波写成

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

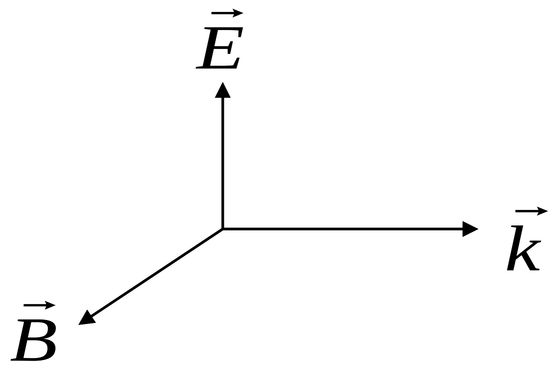
它的参数都由电波的参量决定。两者有同样的波矢 k 和角频率 ω
电波和磁波波幅的关系为

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 = \frac{k}{\omega}\vec{e}(\vec{k}) \times \vec{E}_0 = \frac{1}{c}\vec{e}(\vec{k}) \times \vec{E}_0$$

实际的物理量是它们的实部，上式可写为

$$\mathrm{Re}(\vec{B}) = \frac{1}{c}\vec{e}(\vec{k}) \times \mathrm{Re}(\vec{E})$$

我们可以看到 k ， $\mathrm{Re}(\vec{E})$ 和 $\mathrm{Re}(\vec{B})$ 两两垂直，并构成右手系。

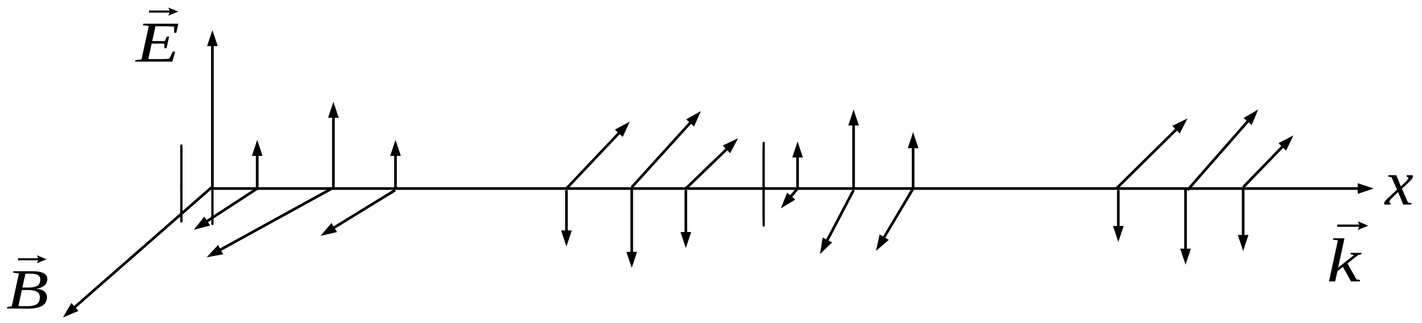


电波和磁波振幅大小满足关系

$$\mathrm{Re}(B) = \frac{1}{c}\mathrm{Re}(E)$$

这里我们需要说明， 和 有不同的量纲，他们的数值大小没有可比性。以后我们会看到电波和磁波的能量密度相同，从这个能量角度看，他们是等强度的。

单色平面电磁波沿传播方向各点上的电场和磁场瞬时值如下图所示：



介质情形

均匀线性介质中的电磁场方程与真空中的方程有相同的形式。差别在于介电常数和磁导率代替为　和　。平面电磁波性质在介质中依然有效。

当以一定角频率　作正弦振荡的电磁波入射于介质内时，介质内的束缚电荷受场作用，亦以同样频率作正弦振荡，可知

$$\vec{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$$

$$\vec{B}(\omega)=\mu(\omega)\vec{H}(\omega)$$

对于不同频率的电磁波，介质的介电常数是不同的，即

$$\varepsilon=\varepsilon(\omega)\,,\qquad \mu=\mu(\omega)$$

ε和μ随频率ω而变化的现象，称为**介质的色散**。

4.2 电磁波的 偏振

我们把波矢 $\vec{k}$ 的方向取为 z 轴方向，这样电磁波写作

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$\vec{E}_0$ 和 $\vec{B}_0$ 都是xy平面上的复矢量，两者的关系为

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c}\vec{e}_z \times \vec{E}_0$$

我们讨论平面电磁波的偏振，即任一点上电磁矢量的振动情况，因为电矢量和磁矢量两者相互确定，所以只需分析其中一个，我们分析电矢量。

从迎着电磁波方向（逆z轴方向）看，电矢量的变化可以用xy平面上的矢端曲线来描写。

$$\mathrm{Re}\,E_x = |E_{0x}|\cos(kz-\omega t+\alpha_x)$$

$$\mathrm{Re}\,E_y = |E_{0y}|\cos(kz-\omega t+\alpha_y)$$

$$\mathrm{Re}\,E_x = |E_{0x}|\cos(kz-\omega t+\alpha_x)$$

$$\mathrm{Re}\,E_y = |E_{0y}|\cos(kz-\omega t+\alpha_y)$$

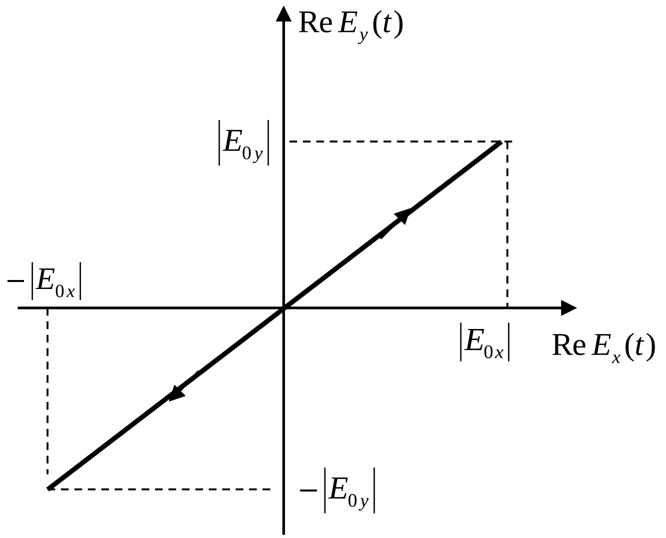
这里α_x 和 α_y 是 $\vec{E}_0$ 中两个复数分量的初相位。我们一般情况下，电矢量的矢端曲线是一个椭圆。

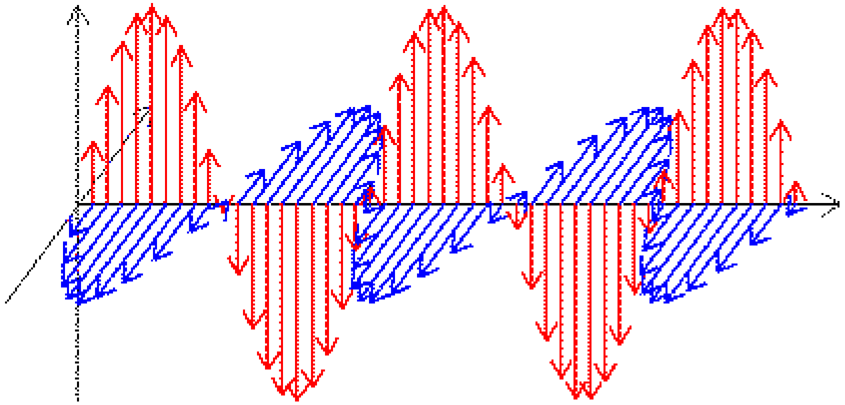
下面我们可以看到，这种椭圆振动可以分解为两种基本振动模式的叠加。 首先看线偏振模式

当 $\alpha_y=\alpha_x$ 或 $\alpha_y=\alpha_x+\pi$ 的情形，这时有

$$\frac{\mathrm{Re}\,E_y(t)}{\mathrm{Re}\,E_x(t)} = \pm\frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|}$$

这样 $\mathrm{Re}\,\vec{E}$ 作直线振动，称为线偏振波。我们可以用沿x轴和y轴的两个基本线偏振模式来定义一组基





定义在xy方向上的线偏振基

$$\varepsilon_{1线}=\vec{e}_x \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}$$

$$\varepsilon_{2线}=\vec{e}_y \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}$$

任意椭圆偏振波都可以用

$$\vec{E}=E_1\varepsilon_1+E_2\varepsilon_2$$

来描述，E_1 ，E_2 是任意复数。这是只有当 E_1 ，E_2 的幅角差为 0 和 π 时（或其中一个为0），才是线偏振波。

下面我们看圆偏振的情形

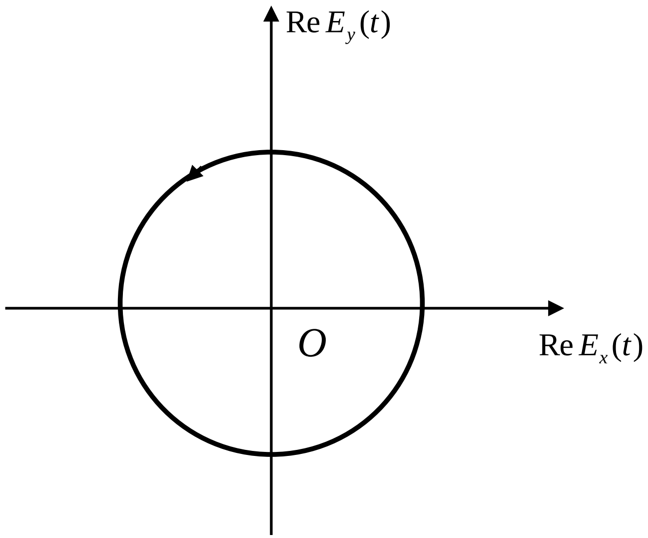
当 $\alpha_y=\alpha_x\pm\pi/2$ ，且 $|E_{0x}|=|E_{0y}|=E_0$ 时，电波可写成

$$\mathrm{Re}\,E_x=E_0\cos(kz-\omega t+\alpha_x)$$
$$\mathrm{Re}\,E_y=\mp E_0\sin(kz-\omega t+\alpha_x)$$

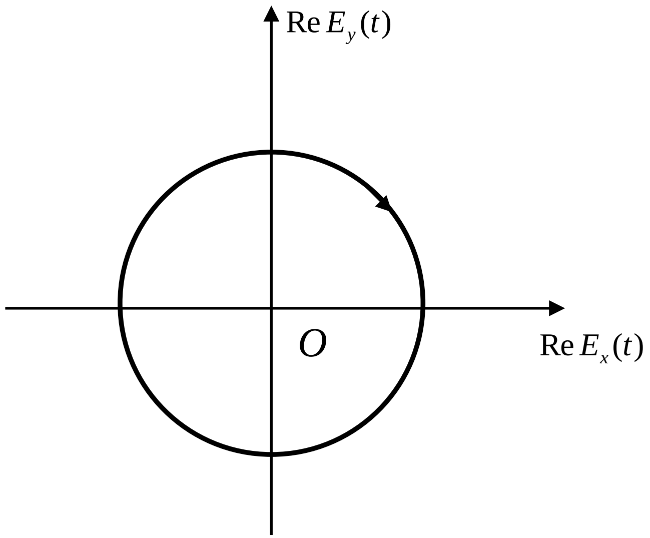
这样的$\mathrm{Re}\,\vec{E}$ 矢端曲线是圆，因此叫做圆偏振波。

当 $\alpha_y=\alpha_x-\pi/2$，迎面看来矢端作顺时针转动，光学上叫右旋波

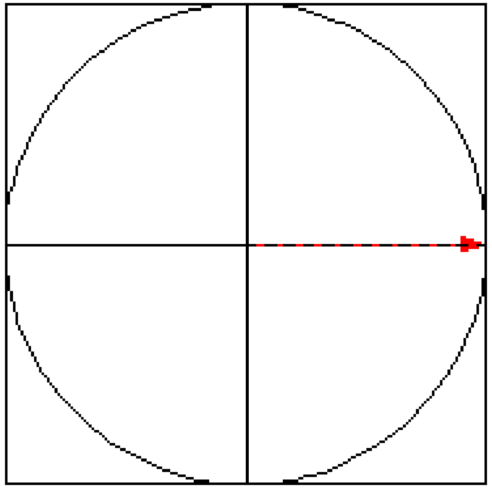
若 $\alpha_y=\alpha_x+\pi/2$ ，则叫左旋波。

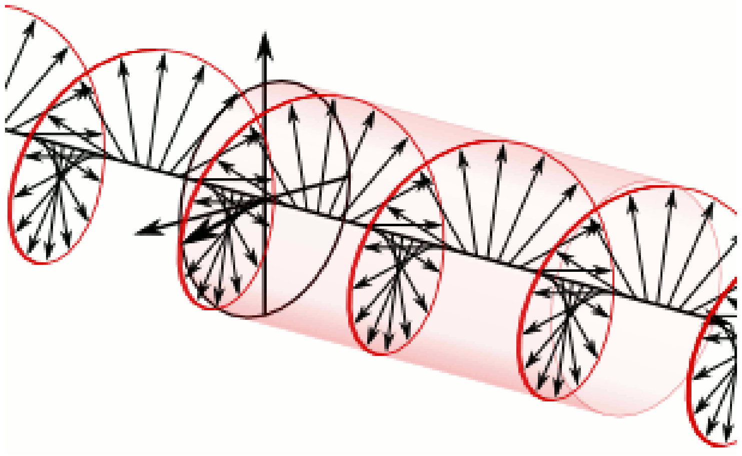


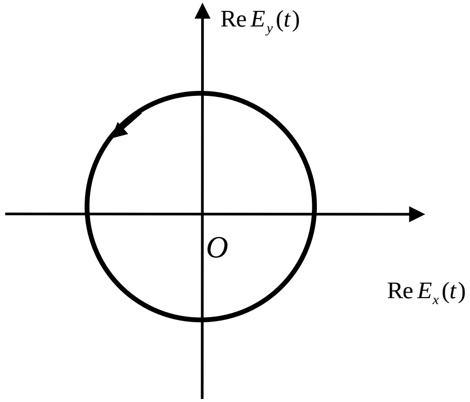
$\alpha_y=\alpha_x+\pi/2$ 左旋波



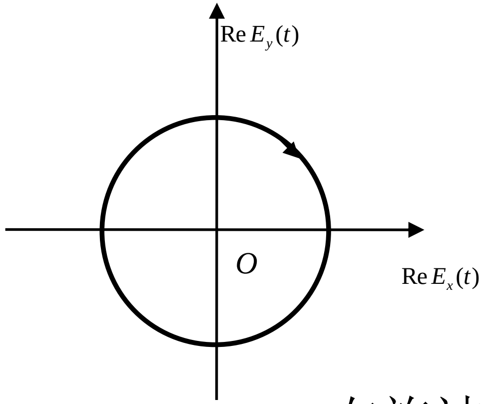
$\alpha_y=\alpha_x-\pi/2$ 右旋波







$\alpha_y = \alpha_x + \pi/2$　左旋波



$\alpha_y = \alpha_x - \pi/2$　右旋波

两种基本圆偏振也构成一组基，这组基写为

$$\varepsilon_{1圆} = \vec{e}_1 e^{i(kz-\omega t)} \qquad \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y) \quad 右旋基$$

$$\varepsilon_{2圆} = \vec{e}_2 e^{i(kz-\omega t)} \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y) \quad 左旋基$$

同样任意椭圆偏振波都可以用这组圆偏振基的线性组合来表示

$$\vec{E} = E_{右}\varepsilon_{1圆} + E_{左}\varepsilon_{2圆}$$

其中 $E_{右}$，$E_{左}$ 是任意复常数，它们代表左右旋部分的振幅和初相位

线偏振描述 $\vec{E} = E_1\varepsilon_1 + E_2\varepsilon_2$

和圆偏振描述 $\vec{E} = E_{右}\varepsilon_{1圆} + E_{左}\varepsilon_{2圆}$

是同一个波的不同描述手段，对任一个波既可采用线偏振描述也可采用圆偏振描述。例如线偏振也可写成圆偏振的叠加。实际问题中采用哪一种基，往往取决于测量的手段。

两种描述之间的关系为

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{左} + E_{右})$$

$$E_2 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(E_{左} - E_{右})$$

4.3 平面电磁波的 能量和能流

a) 电磁波的能量密度

根据电磁场的能量密度

$$w=\frac{1}{2}(\varepsilon\vec{E}^2+\frac{1}{\mu}\vec{B}^2)$$

这公式里的场量E 和B 是物理量，应该是电磁波复场量E 和 B 的实部，公式应为

$$w=\frac{1}{2}(\varepsilon\left|\mathrm{Re}\,\vec{E}\right|^2+\frac{1}{\mu}\left|\mathrm{Re}\,\vec{B}\right|^2)$$

电磁波的振幅之间有关系 $\left|\dfrac{\mathrm{Re}\,\vec{E}}{\mathrm{Re}\,\vec{B}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=v$

$$\varepsilon\left|\mathrm{Re}\,\vec{E}\right|^2=\frac{1}{\mu}\left|\mathrm{Re}\,\vec{B}\right|^2$$

在电磁波中电场和磁场对能量密度的贡献相同

可以把电磁波的能量密度写成

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon \left|\mathrm{Re}\,\vec{E}\right|^2 + \frac{1}{\mu}\left|\mathrm{Re}\,\vec{B}\right|^2) = \varepsilon\left|\mathrm{Re}\,\vec{E}\right|^2 = \frac{1}{\mu}\left|\mathrm{Re}\,\vec{B}\right|^2$$

注意这表达式已经包括了电波，磁波两者的贡献

b) 电磁波的能流密度

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}$$

其中E和B是实数 $\vec{S} = \frac{1}{\mu}\mathrm{Re}\,\vec{E}\times\mathrm{Re}\,\vec{B}$

对于平面电磁波，B和E有关系

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E} = \frac{1}{\omega}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\,\hat{\vec{n}}\times\vec{E}$$

$$= \sqrt{\mu\varepsilon}\,\hat{\vec{n}}\times\vec{E}$$

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu}\mathrm{Re}\,\vec{E}\times\mathrm{Re}\,\vec{B} \qquad \Leftarrow \vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\hat{\vec{n}}\times\vec{E}$$

$$=\frac{1}{\mu}\mathrm{Re}\,\vec{E}\times(\sqrt{\mu\varepsilon}\hat{\vec{n}}\times\mathrm{Re}\,\vec{E})$$

$$=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathrm{Re}\,\vec{E}\times(\hat{\vec{n}}\times\mathrm{Re}\,\vec{E})$$

$$=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[(\mathrm{Re}\,\vec{E}\cdot\mathrm{Re}\,\vec{E})\hat{\vec{n}}-(\hat{\vec{E}}\cdot\hat{\vec{n}})\vec{E}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left|\mathrm{Re}\,\vec{E}\right|^2\hat{\vec{n}} \qquad \text{或者}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\mathrm{Re}\,\vec{B}\right|^2\hat{\vec{n}}$$

也可以看到 $\vec{S}$与w 的关系：

$$\vec{S}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left|\mathrm{Re}\,\vec{E}\right|^2\hat{\vec{n}}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{w}{\varepsilon}\hat{\vec{n}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}w\hat{\vec{n}}=vw\hat{\vec{n}}$$

能流密度$\vec{S}$就是能量密度w以光速v沿传播方向的流动

把能量密度用电波的复数表达式写出

$$w=\varepsilon\left|\mathrm{Re}\,\vec{E}\right|^2=\varepsilon\left|E_{0x}\right|^2\cos^2(kz-\omega t+\alpha_x)$$

$$+\varepsilon\left|E_{0y}\right|^2\cos^2(kz-\omega t+\alpha_y)$$

它说明在任一点上的能量密度都是随时间变化的。考虑到实际电磁波的振动周期很短，所以可用能量密度和能流密度的周期平均来代表实测值。

因为 $\cos^2(\omega t+\alpha)$ 的周期平均值为1/2

$$\langle w\rangle=\left\langle\varepsilon\left|\mathrm{Re}\,\vec{E}\right|^2\right\rangle=\frac{\varepsilon}{2}(\left|E_{0x}\right|^2+\left|E_{0y}\right|^2)=\frac{\varepsilon}{2}\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^{\,*}$$

同样能流密度的周期平均值

$$\langle\vec{S}\rangle=\langle w\rangle v\hat{\vec{n}}=\frac{\varepsilon v}{2}\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^{\,*}\hat{\vec{n}}\quad\text{or}\quad\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_0^{\,*}\times H_0)$$

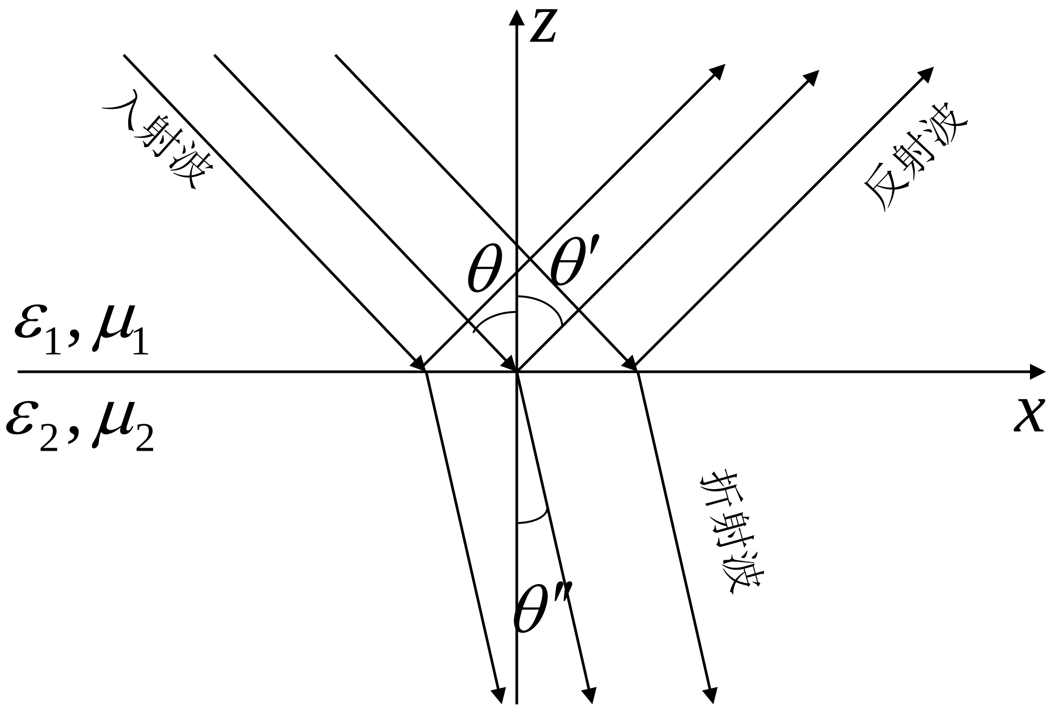
4.4 单色平面电磁波在介质界面上的反射和折射

电磁波入射于介质的分界面上，将发生的反射和折射现象。关于反射和折射的规律包括两个方面：

（1）入射角、反射角和折射角的关系；

（2）入射波、反射波和折射波的振幅比和相对相位。

考虑一单色平面电磁波入射到交界面上，设在$z = 0$ 平面的上、下方的介质不同，如图所示



设反射波和折射波与入射波一样，也是同频率的平面波（下面我们会看到这个假设是正确的）设入射波、反射波和折射波的电场强度为 $\vec{E}$ $\vec{E}'$和$\vec{E}''$，波矢量分别为 $\vec{k}$、$\vec{k}'$和$\vec{k}''$ 。

入射波 $\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

反射波 $\vec{E}'=\vec{E}_0' e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega' t)}$

折射波 $\vec{E}''=\vec{E}_0'' e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega'' t)}$

同时由 $\vec{B}=\dfrac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}$ 可得磁场矢量为

入射波 $\vec{B}=\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}=\dfrac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

反射波 $\vec{B}'=\vec{B}_0' e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega' t)}=\dfrac{1}{\omega'}\vec{k}'\times\vec{E}_0' e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega' t)}$

折射波 $\vec{B}''=\vec{B}_0'' e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega'' t)}=\dfrac{1}{\omega''}\vec{k}''\times\vec{E}_0'' e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega'' t)}$

在 z=0 的平面上有一些边界条件，该平面上的一切点必须永远满足这些边界条件。这个事实意味着：在 z=0 处，所有场的空间和时间变化必须相同。因此，所有的相因子在 z=0 处必须相等，即在边界面上$E_{1t}=E_{2t}$，所以

$$E_{0t}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\Big|_{z=0}+E'_{0t}e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega' t)}\Big|_{z=0}=E''_{0t}e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega'' t)}\Big|_{z=0}$$

要使该式成立，只有

$$\left[E_{0t}+E'_{0t}\right]\Big|_{z=0}=E''_{0t}\Big|_{z=0} \qquad \text{以及}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\Big|_{z=0}=\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega' t\Big|_{z=0}=\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega'' t\Big|_{z=0}$$

因为x、y、t 都是独立变量，必然有

$$k_x x+k_y y-\omega t=k'_x x+k'_y y-\omega' t$$

$$=k''_x x+k''_y y-\omega'' t$$

$$k_x x + k_y y - \omega t = k'_x x + k'_y y - \omega' t$$

$$= k''_x x + k''_y y - \omega'' t$$

由此可见：

$$\omega = \omega' = \omega''$$

$$k_x = k'_x = k''_x$$

$$k_y = k'_y = k''_y$$

a) $\omega = \omega' = \omega''$ ，这说明反射波、折射波的频率与入射波的频率相同。

b) 根据 $k_y = k'_y = k''_y$ ，假若 $k_y = 0$ ，则必有 $k'_y = k''_y = 0$ 。这说明反射波和折射波与入射波在同一平面内，这个面就称为入射面（入射波矢 $\vec{k}$ 与分界面的法线$\hat{n}$ 所组成的平面）。

c) 取入射波矢在xz平面上，即 $k_y = k'_y = k''_y = 0$ ，先看反射波，它和入射波在同一介质中，因此频率和波速相同保证了波长相同，即

$$k = k' = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} \qquad ,(k = |\vec{k}|, k' = |\vec{k}'|)$$

$$k_x = k\sin\theta \quad , \quad k'_x = k'\sin\theta'$$

$$k_x = k'_x , \quad \Rightarrow \quad k\sin\theta = k'\sin\theta'$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{k'}{k} = 1$$

由此得到：$\theta' = \theta$ ，即反射角=入射角。（**反射定律**）

d) 根据 $k_x = k''_x$ ，有 $k\sin\theta = k''\sin\theta''$

其中 $k = |\vec{k}| = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$ ，$k'' = |\vec{k}''| = \omega''\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$

则 $$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{k''}{k} = \frac{\omega''\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

这就是折射定律，其中 n_{21} 为介质2相对于介质1的折射率，一般介质 $\mu \approx \mu_0$（除铁磁质外），故 $\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ 为两介质的相对折射率。

下面我们来分析反射波和折射波的强度。为此我们要用到全部的连接条件。上面的分析已说明，这三个波的相因子必定相等，从而可消去。余下的是复振幅满足的代数方程，

由$E_{//}$连续： $(\vec{E}_0+\vec{E}_0'-\vec{E}_0'')\times n=0,$

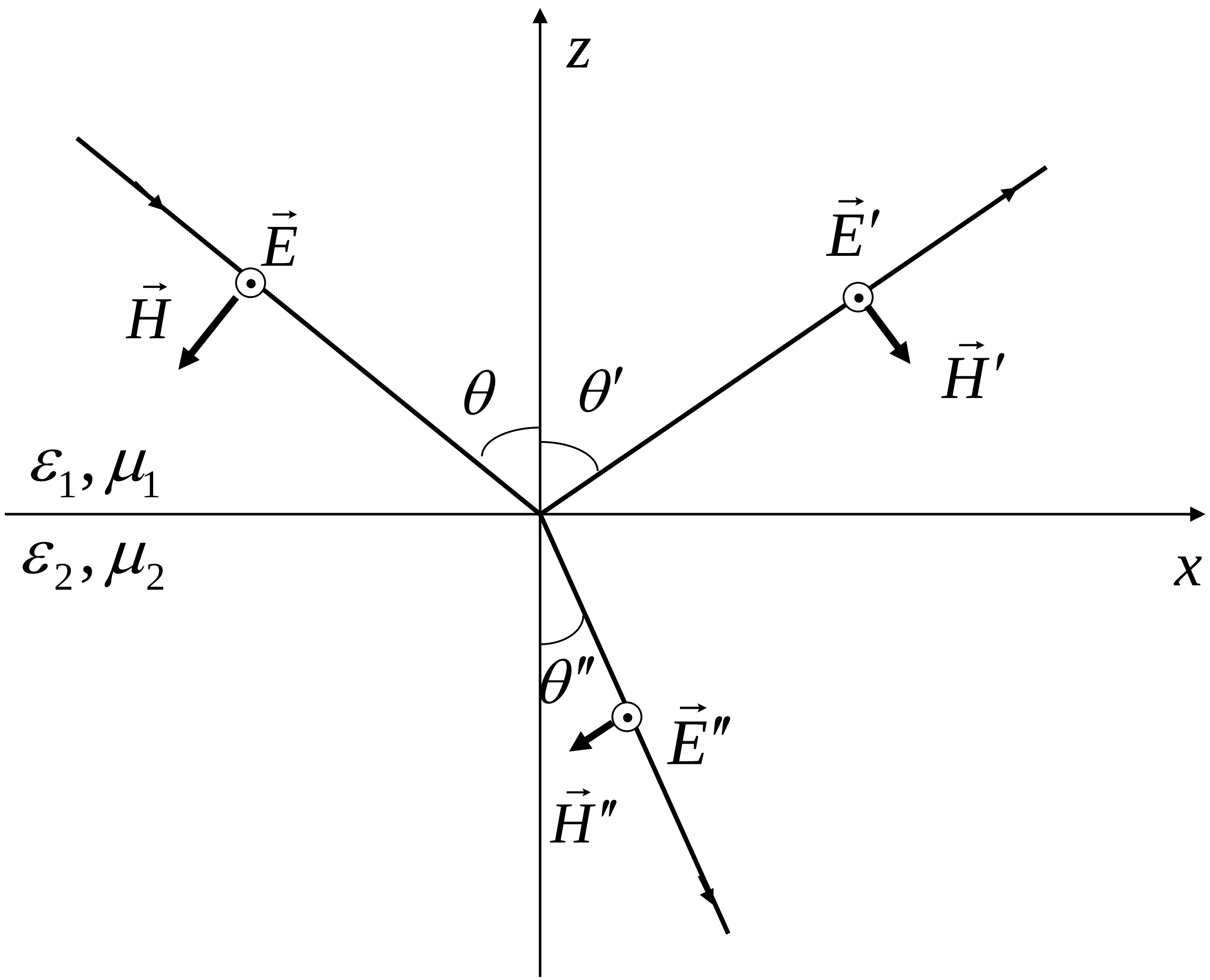
由$D_{\perp}$连续： $(\varepsilon_1\vec{E}_0+\varepsilon_1\vec{E}_0'-\varepsilon_2\vec{E}_0'')\cdot n=0,$

由$B_{\perp}$连续： $(\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}'\times\vec{E}_0'-\vec{k}''\times\vec{E}_0'')\cdot n=0,$

由$H_{//}$连续： $(\frac{1}{\mu_1}\vec{k}\times\vec{E}_0+\frac{1}{\mu_1}\vec{k}'\times\vec{E}_0'-\frac{1}{\mu_2}\vec{k}''\times\vec{E}_0'')\times n=0,$

原则上这组方程足以让我们解出反射波和折射波的复振幅。为了意义清楚，我们分别讨论电场 ⊥入射面和电场∥入射面两种情况

a) $\vec{E}$ 垂直入射面



z
$\vec{E}$
$\vec{H}$
$\vec{E}'$
$\vec{H}'$
θ
θ'
ε_1, μ_1
ε_2, μ_2
x
θ''
$\vec{E}''$
$\vec{H}''$

这时电场只有y分量，并⊥入射面（纸面）指向外面，以⊙表示。因为介质1中有入射波和反射波，介质2中只有折射波，因此根据边界条件（边值关系）：

由 $E_{2t}=E_{1t}$， 有 $E_0+E_0'=E_0''$ ①

由 $H_{2t}=H_{1t}$， 有 $(\frac{1}{\mu_1}\vec{k}\times\vec{E}_0+\frac{1}{\mu_1}\vec{k}'\times\vec{E}_0')_t=(\frac{1}{\mu_2}\vec{k}''\times\vec{E}_0'')_t$

故有

$$\frac{1}{\mu_1}(\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}E_0\cos\theta-\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}E_0'\cos\theta')=\frac{1}{\mu_2}\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}E_0''\cos\theta''$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_0-E_0')\cos\theta=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_0''\cos\theta'' \quad ②$$

联立①、②两式得

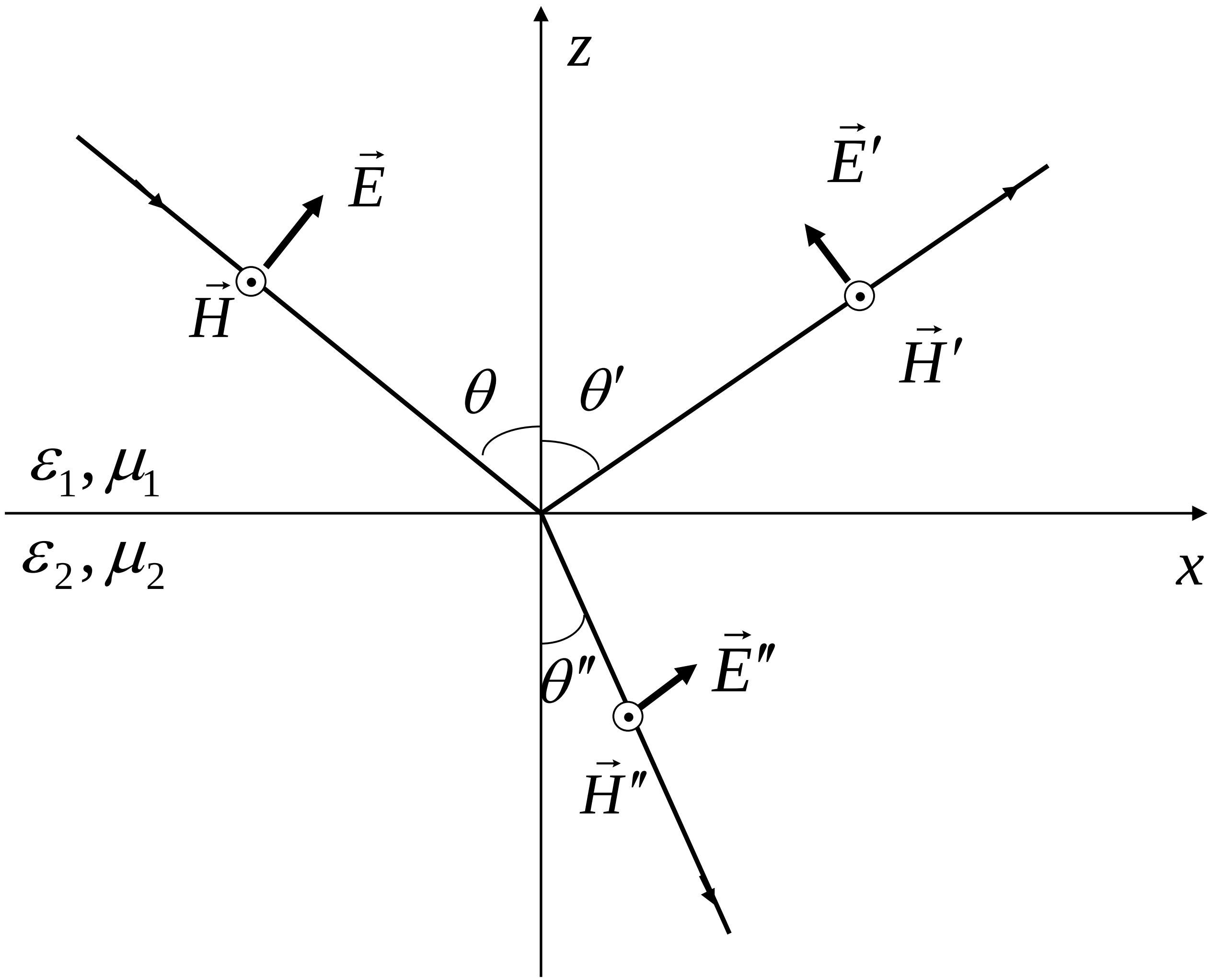
$$\begin{cases} \dfrac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''} \\ \dfrac{E''_{0\perp}}{E_{0\perp}} = \dfrac{2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''} \end{cases}$$

对于光波，$\mu_1 \cong \mu_2 \cong \mu_0$ 即有

$$\frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} = \frac{\cos\theta - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta''}{\cos\theta + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta''} = \frac{\cos\theta - \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta''}{\cos\theta + \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta''} = -\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}$$

$$\frac{E''_{0\perp}}{E_{0\perp}} = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta''} = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}$$

b) $\vec{E}$ 平行入射面



z
$\vec{E}$
$\vec{E}'$
$\vec{H}$
$\vec{H}'$
θ
θ'
ε_1, μ_1
ε_2, μ_2
x
$\vec{E}''$
θ''
$\vec{H}''$

这时磁场只有y分量，并⊥入射面（纸面）指向外面，以⊙表示。由边界条件，即在 z=0 的界面上有：

$$\begin{cases} E_{0X}+E'_{0X}=E''_{0X} \\ H_0+H'_0=H''_0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} E_0\cos\theta-E'_0\cos\theta'=E''_0\cos\theta'' \\ \dfrac{1}{\mu_1}\vec{k}\times\vec{E}_0+\dfrac{1}{\mu_1}\vec{k}'\times\vec{E}'_0=\dfrac{1}{\mu_2}\vec{k}''\times E''_0 \end{cases}$$

同理由 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 的关系，把上式换为

$$\begin{cases} (E_0-E'_0)\cos\theta=E''_0\cos\theta'' \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_0+E'_0)=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E''_0 \end{cases}$$

解得

解得：
$$\begin{cases} \dfrac{E'_{0\|}}{E_{0\|}} = \dfrac{\cos\sqrt{\varepsilon_2\mu_1} - \cos\theta''\sqrt{\varepsilon_1\mu_2}}{\cos\sqrt{\varepsilon_2\mu_1} + \cos\theta''\sqrt{\varepsilon_1\mu_2}} \\ \dfrac{E''_{0\|}}{E_{0\|}} = \dfrac{2\cos\theta\sqrt{\varepsilon_1\mu_2}}{\cos\sqrt{\varepsilon_2\mu_1} + \cos\theta''\sqrt{\varepsilon_1\mu_2}} \end{cases}$$

对于， $\mu_1 \cong \mu_2 \cong \mu_0$ 则有

$$\frac{E'_{0\|}}{E_{0\|}} = \frac{\cos\theta\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} - \cos\theta''}{\cos\theta\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} + \cos\theta''} = \frac{\cos\theta\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta''} - \cos\theta''}{\cos\theta\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta''} + \cos\theta''}$$

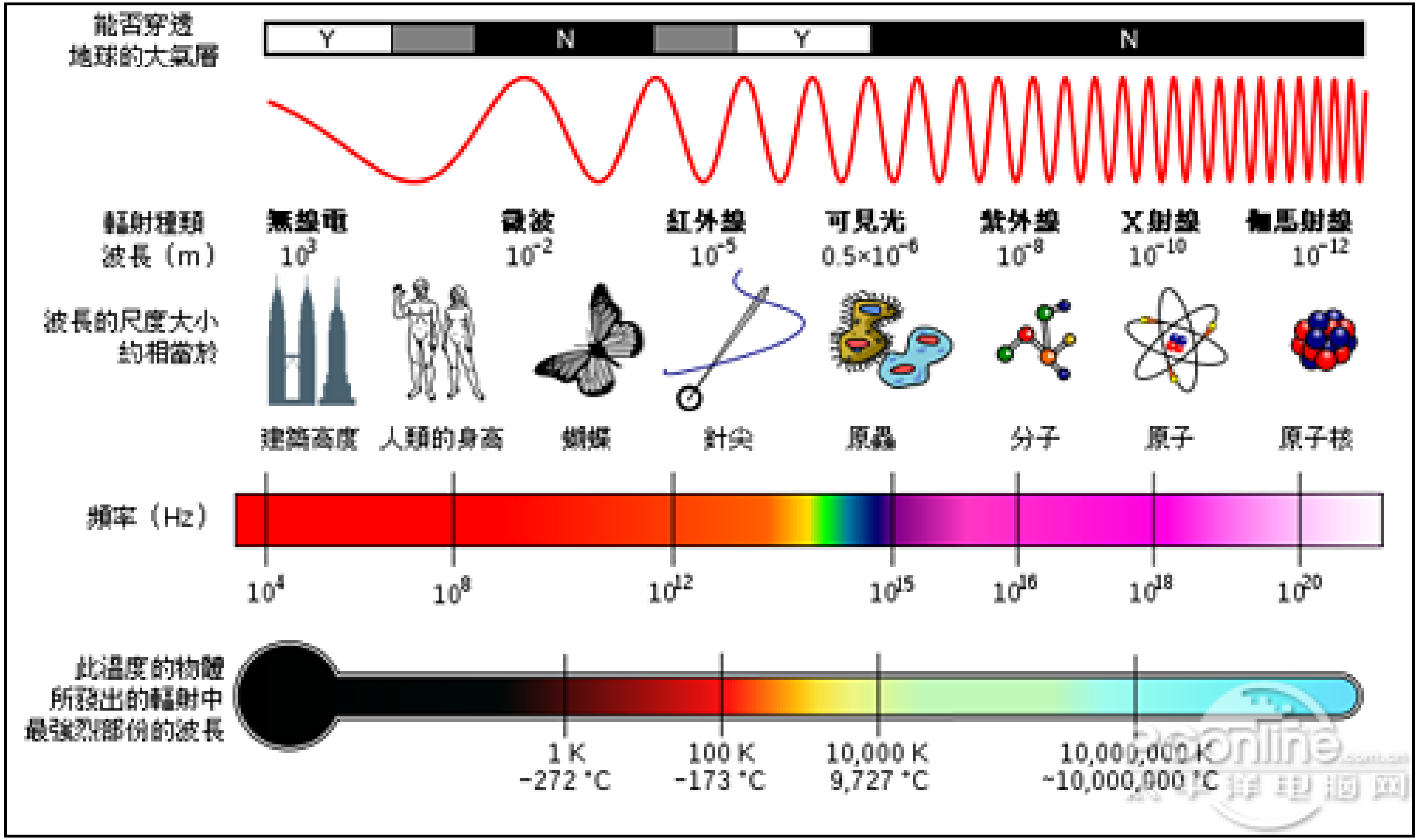
$$= \frac{\sin\theta\cos\theta - \sin\theta''\cos\theta''}{\sin\theta\cos\theta + \sin\theta''\cos\theta''} = \frac{\sin(\theta-\theta'')\cos(\theta+\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}$$

$$= \frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}$$

$$\frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} + \cos\theta''} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta\,\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta''} + \cos\theta''}$$

$$= \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin\theta\cos\theta + \sin\theta''\cos\theta''}$$

综上所述，我们得到的振幅关系就是光学中的菲涅耳公式。因此，这也有力地证示了光是电磁波的理论学说，即光实际上是在一个特殊频段（波长由4000 Å 到8000 Å ）的电磁波。


能否穿透地球的大氣層
Y
N
Y
N
輻射種類
波長（m）
無線電
10^3
微波
10^{-2}
紅外線
10^{-5}
可見光
0.5×10^{-6}
紫外線
10^{-8}
X射線
10^{-10}
伽馬射線
10^{-12}
波長的尺度大小約相當於
建築高度
人類的身高
蝴蝶
針尖
原蟲
分子
原子
原子核
頻率（Hz）
10^4
10^8
10^{12}
10^{15}
10^{16}
10^{18}
10^{20}
此溫度的物體所發出的輻射中最強烈部份的波長
1 K
−272 °C
100 K
−173 °C
10,000 K
9,727 °C
10,000,000 K
~10,000,000 °C

下面我们来讨论几个光学现象

1.反射波的半波损失

当平面波从光疏介质入射到光密介质时（即$n_{21}>1$）。根据折射定律，有 $\sin\theta = n_{21}\sin\theta''$ ，可知 $\theta''<\theta$ ，光线向法线方向偏折。这时从菲涅耳公式可看出：

$$\frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} = -\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')} < 0$$

反射波的垂直分量和入射波的垂直分量反向。即反射波与入射波位相相差 π，好象差个半波长，这种现象称为**半波损失。**

2.平行偏振反射波的消失

看平行偏振波的反射波幅

$$\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}}=\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}$$

对某个特殊的角度 θ_B，它满足$\theta_B+\theta''=\pi/2$，则相应的有

$$E'_{0\parallel}=0$$

这种情况下，反射波消失。这样的入射角 θ_B 称为布儒斯特角Brewster’s angle。

应用折射定律 $\frac{\sin\theta_B}{\sin\theta''}=\frac{\sin\theta_B}{\sin(90°-\theta_B)}=n_{21}$

则

$$\tan\theta_b=1/n_{21}$$

一个任意偏振的波，总可以分为平行和垂直入射面的两个入射波。平面波以布儒斯特角入射时，反射波只有垂直入射面偏振的波，反射波和折射波传播方向互相垂直。

未加偏振片时
拍摄的橱窗

加偏振片时
拍摄的橱窗

(a)

(b)

未加偏振片时
拍摄的橱窗

加了偏振片后
拍摄的橱窗


贴贴
tt.mop.com

3.从光密介质到光疏介质的全反射

当光从光密介质射向光疏介质（即 $n_{21}<1$ ），则 $\theta''>\theta$ 。考虑到折射角的最大值为$\pi/2$，入射角就会有一个上限。它满足

$$\sin\theta_{\max}=n_{21}$$

如果入射角超过这个上限，折射角的定义就失去乐意义。但是折射定律还是成立的

$$\sin\theta=k_x/k=n_{21}k''_x/k''$$

当$\theta>\theta_{\max}$时 $k''_x/k''>1$ 即 $k''_x>k''$ ，而 $k''^2=k''^2_x+k''^2_z$
因此 k''_z 为虚数。令 $k''_z=i\tau$ ，折射波的形式为

$$\vec{E}=\vec{E}_0e^{-\tau z}e^{i(k_x x-\omega t)}$$

该式表明折射波将沿 z 方向衰减，沿 x 方向传播。因此，在全反射时，介质2中的电磁波并不为零。可见电场不仅沿着界面方向传播，而且被限制在表面附近的一个区域内，所以称全反射时的折射波为表面波。

通过对分界面内侧（即折射波）的坡印亭矢量的法向分量对时间平均值的计算，我们得到即使在介质2中有电场存在，显然也没有能量流过分界面。即：

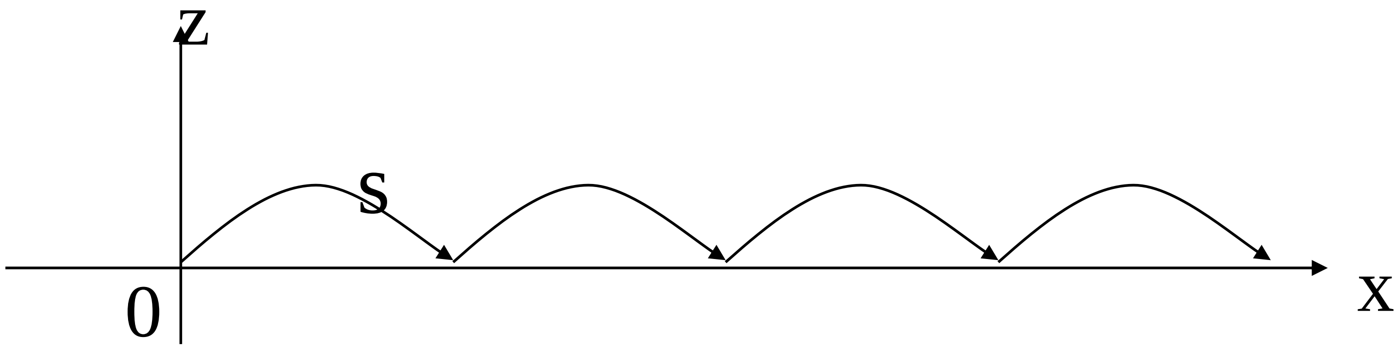
$$\overline{S''_z} = \overline{\vec{S}'' \cdot \hat{\vec{n}}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\hat{\vec{n}} \cdot (\vec{E}''^{*} \times \vec{H}'')\right] \qquad \vec{H}'' = \frac{1}{\mu_2 \omega}\vec{k}'' \times \vec{E}''$$

$$= \frac{1}{2\omega\mu_2}\mathrm{Re}\left[(\hat{\vec{n}} \cdot \vec{k}'')\,|\,E''_0\,|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2\omega\mu_2}\mathrm{Re}\left[(k''_z)\,|\,E''_0\,|^2\right]$$

k''_z 是一个纯虚数因此 $\overline{S''_z} = \overline{\vec{S}'' \cdot \hat{\vec{n}}} = 0$

能流曲线的大致走向如图所示：



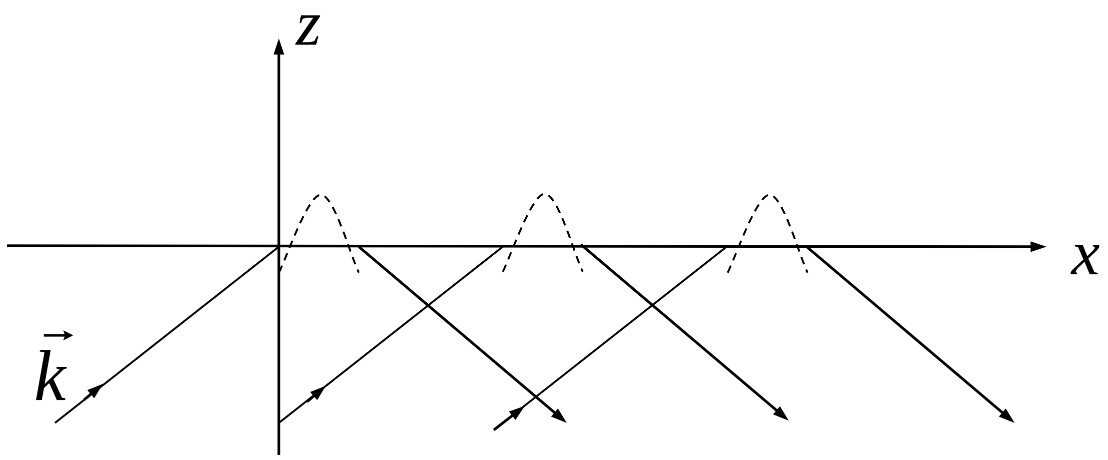
再看这种情况下的反射波。首先反射定律仍成立 $\theta' = \theta$

再有

$$\frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''}$$

$$\frac{E'_{0\|}}{E_{0\|}} = \frac{\cos\sqrt{\varepsilon_2\mu_1} - \cos\theta''\sqrt{\varepsilon_1\mu_2}}{\cos\sqrt{\varepsilon_2\mu_1} + \cos\theta''\sqrt{\varepsilon_1\mu_2}}$$

注意这时 $\cos\theta'' = k''_z / k''$ 为虚数，因此$\left|\vec{E}''_0\right| / \left|\vec{E}_0\right| = 1$，即全反射



z
x
$\vec{k}$

4.5 有导体存在时电磁波的传播

电磁波在导电介质中的传播和不导电介质中的行为很不一样。由于导体内有自由电荷存在，在电磁波的电场作用下，自由电荷运动形成传导电流，而传导电流要产生焦耳热，使电磁波能量有损耗。由此可见，在导体内部的电磁场（波）是一种衰减波，在传播过程中，电磁能量转化为热量。

导体内的自由电荷的分布

在静电情况下，我们知道导体内部不带电，自由电荷只分布在导体表面。在变化的电磁场中是否还有这样的特性？

设导体内部有自由电荷分布 ρ ，那么电荷激发电场 $\vec{E}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon$$

这个电场又引起传导电流 $\vec{J}$ ，由欧姆定律

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

把此式代入上式得

$$\nabla\cdot\vec{J}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

再又电流连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

此方程的解为

$$\rho(t)=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

式中ρ_0 是t=0时的电荷密度。 由此可见，电荷密度ρ随时间指数衰减，衰减的特征时间

$$\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

因此，只要电磁波的频率满足 $\omega<<\tau^{-1}=\frac{\sigma}{\varepsilon}$

即 $$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}>>1$$ （这就是良导体条件）

一般金属：$\tau \sim 10^{-17}$秒，也就是说只要电磁波频率$\omega \ll 10^{17}$Hz时，金属导体可看成良导体，良导体内部没有自由电荷分布，电荷只能分布在导体表面上。

从以上讨论我们还看到：导体中自由电荷衰减是相当快的，并且完全由导体自身性质确定，与在导体中进行何种电磁过程无关，所以在讨论电磁波在导体中的传播问题时，可以认为$\rho = 0$。

导体内的电磁波

导体中的麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \varepsilon\mu \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu\sigma\vec{E} + \varepsilon\mu \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

从中可以推导出波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

和预想的一样这是一个带阻尼的波动方程，阻尼项来自传导电流。方程的特解仍可以写成

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

其中 $\vec{k}$ 和 ω 的关系

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

这是一个复数关系。它说明 $\vec{k}$ 和ω 的分量至少有一个是复数

ω为复数和$\vec{k}$为复数体现了波的两种不同阻尼方式

若t=0时导体内有一个扰动电场 $\vec{E}_0(\vec{x})$ 。对它作傅立叶展开

$$\vec{E}_0(\vec{x}) = \iiint \xi_0(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k$$

其中每一个傅立叶分量的k都是实数。按叠加原理，每一个傅立叶分量都服从波动方程，k和ω 就要满足

$$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

k为实数，ω 就必为复数，且虚部为负。可把ω 写成

$$\omega = \omega_0 - i\omega_1$$

则电场傅立叶分量有

$$\vec{E} = \xi_0 e^{-\omega_1 t} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_0 t)}$$

这说明波幅将随时间而衰减，扰动电场将被阻尼掉，电磁能则转化为焦耳热。

若有电磁波从导体外射入导体，要使界面上时时满足边界条件进入导体的波将保持原来的频率。这个频率是实数，这是波矢$\vec{k}''$至少有一个分量为复数。

设导体表面是z＝0平面，当电磁波从真空中入射到导体表面时，由电场的相位处处相等可知

$$k_x = k_x' = k_x''$$

$$k_y = k_y' = k_y''$$

这样，入射波的k_z''必为复数，可记做 $k_z'' = k_{0z} + i\tau$

导体内入射波有

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{-\tau z} e^{i(k_x x + k_y y + k_{0z} z - \omega t)}$$

这仍然是一个稳态的波，任一点上波幅并不随时间衰减。波的阻尼体现为波幅的空间衰减，波幅随着深入导体而减小。导体内电磁能在不断的转换为焦耳热，导体内波的稳定是靠入射波的能量输入维持的。

为了简单起见，下面的讨论考虑电磁波是垂直导体表面入射的情况，这样 $\vec{k}''$ 只有 k_z'' 分量

$$k''^2 = k_z''^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

$$(k_{0z} + i\tau)^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

得到

$$k_{0z}{}^2 - \tau^2 = \varepsilon\mu\omega^2$$

$$k_{0z}\tau = \frac{1}{2}\mu\sigma\omega$$

我们考虑两种特殊的情形

（1）不良导体情形 $\sigma << \varepsilon\omega$ 这是对应 $\tau << k_{0z}$

可以近似解出

$$k_{0z} = \sqrt{\varepsilon\mu}\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}k$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sigma << \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}k$$

$$k_{0z} = \sqrt{\varepsilon\mu}\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}k$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sigma << \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}k$$

从这个结果看，透入不良导体的波的传播与相应的不导电介质中接近一样；介质的导电率不大，使得透入深度比波长大很多

$$1/\tau >> 1/k$$

（1）良导体情形 $\sigma >> \varepsilon\omega$ 这是对应 $\tau \approx k_{0z}$

$$k_{0z}{}^2 - \tau^2 = \varepsilon\mu\omega^2$$

可以近似解出

$$k_{0z}\tau = \frac{1}{2}\mu\sigma\omega$$

$$k_{0z} = \tau = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} >> \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}k$$

从这个结果看，透入良导体的波的波长比相应的不导电介质中的波长短很多；同时波幅随空间衰减很快，透入深度与导体内传播波长相接近，意味着波在良导体内的透入深度仅是几个波长。在更深的地方，波就几乎消失了。

下面计算反射波和入射波的波幅。

设入射波是垂直导体表面入射的，这时电场和磁场都只有平行表面的分量。有电场和磁场的边界条件给出

$$\begin{cases} E_0 + E_0' = E_0'' \\ H_0 + H_0' = H_0'' \end{cases} \qquad \begin{cases} E_0 + E_0' = E_0'' \\ k(E_0 + E_0') = k'' E_0'' \end{cases}$$

这里用了 $k' = -k$ ，并忽略了 μ 和 μ_0 的差别，从中可得到振幅关系

反射波 $$\frac{E_0'}{E_0}=\frac{k''-k}{k+k''}$$

透射波 $$\frac{E_0''}{E_0}=\frac{2k}{k+k''}$$

由此看出，它们取决于透射波的波矢 $k''=k_{0z}+i\tau$ 与入射波矢之比，我们看一下良导体的情形 $\tau\approx k_{0z}$

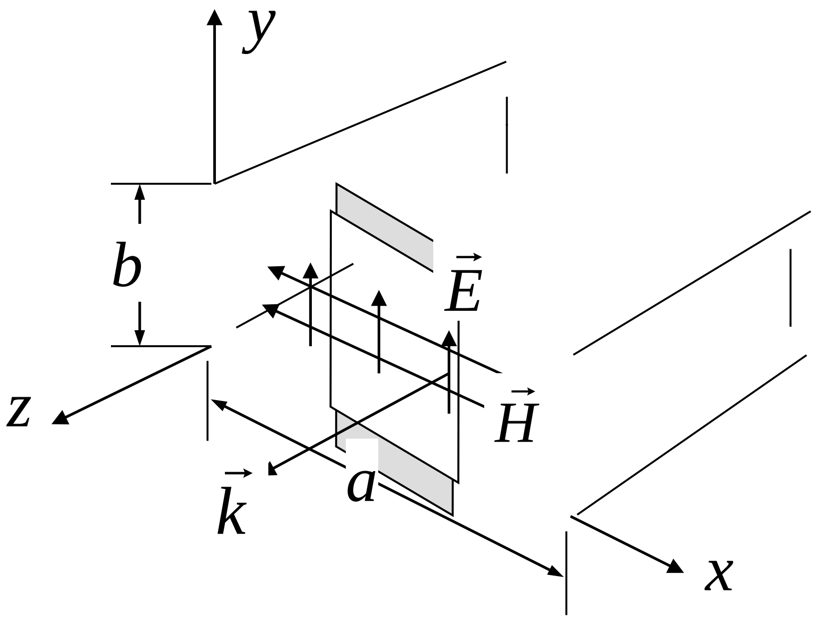
即 $$k''=k_{0z}(1+i)$$

因此 $$\frac{k''}{k}=\sqrt{2}\,\frac{k_{0z}}{k}e^{i\pi/4}=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{\mu\sigma\omega/2}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega}}e^{i\pi/4}=\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varepsilon_0\omega}}e^{i\pi/4}$$

代入波幅关系（并且由 $\sigma>>\varepsilon\omega(\varepsilon_0\omega)$ ）得

反射波 $$\frac{|E_0'|}{|E_0|}\approx 1$$ 透射波 $$\frac{|E_0''|}{|E_0|}\approx 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{\sigma}}<<1$$

4.6 电磁波在波导中的传播



波动方程 $$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

横波条件 $$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

因为波导中电磁波是沿管的轴向，即沿 z 轴方向传播，因而电场强度为：

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)}$$

将此式代入亥姆霍兹方程，得到：

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial y^2}+(k^2-k_z^2)\vec{E}_0=0$$

设$u(x, y)$为电磁场的任一直角分量，它满足上式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(k^2-k_z^2)u=0$$

用分离变量法解这个微分方程：

令 $u(x,y)=X(x)Y(y)$

代入上述式子即有

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=(k_z^2-k^2)X(x)Y(y)$$

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=(k_z^2-k^2)X(x)Y(y)$$

两边同除以 $X(x)\ Y(y)$ 得

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=k_z^2-k^2$$

要使上式成立，必须要求左边每一项等于常数，即

$$\frac{X''}{X}=-k_x^2$$

$$\frac{Y''}{Y}=-k_y^2$$

而且要求：

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2/c^2=k^2$$

从而得到：

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0 \qquad \frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0$$

这就是大家熟知的振动方程，它们一般解为

这就是大家熟知的振动方程，它们一般解为

$$X(x) = A\sin k_x x + B\cos k_x x$$

$$Y(y) = C\sin k_y y + D\cos k_y y$$

这里的*A*、*B*、*C*、*D*、*kx*、*ky*都是待定常数。至此得到沿 *z* 轴方向传播的电磁波电场的三个分量为：

$$\begin{cases} E_x = (A\sin k_x x + B\cos k_x x)(C\sin k_y y + D\cos k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_y = (A'\sin k_x x + B'\cos k_x x)(C'\sin k_y y + D'\cos k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_z = (A''\sin k_x x + B''\cos k_x x)(C''\sin k_y y + D''\cos k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)} \end{cases}$$

由边界条件和其它物理条件来确定。

理想导体 横波条件

$$
\begin{cases}
\hat{\vec{n}} \times \vec{E} = 0 \\
\dfrac{\partial E_n}{\partial n} = 0 \qquad (\nabla \cdot \vec{\mathrm{E}} = 0)
\end{cases}
$$

得到波导中电磁波满足的边界条件

$$
\begin{cases}
\text{当} \quad x = 0,\ a\text{时}, \quad E_y = E_z = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\
\text{当} \quad y = 0,\ b\text{时}, \quad E_x = E_z = \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} E_x = (A\sin k_x x + B\cos k_x x)(C\sin k_y y + D\cos k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_y = (A'\sin k_x x + B'\cos k_x x)(C'\sin k_y y + D'\cos k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_z = (A''\sin k_x x + B''\cos k_x x)(C''\sin k_y y + D''\cos k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)} \end{cases}$$

a) 当 $y = 0$时，$Ex= 0$，即

$$E_x = (A\sin k_x x + B\cos k_x x)\cdot D \cdot e^{i(k_z z-\omega t)} = 0$$

只有$D = 0$，才能满足

当 $x = 0$时，$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$，即

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = Ak_x(C\sin k_y y + D\cos k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)} = 0$$

得到 A＝0

$$E_x = (B\cos k_x x)(C\sin k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)} = A_1\cos k_x x\sin k_y y e^{i(k_z z-\omega t)}$$

同样由y＝0时，$\frac{\partial E_y}{\partial y}=0$ ，和x＝0时, $E_y=0$ 可得

$$E_y = A_2 \cos k_y y \sin k_x x e^{i(k_z z - \omega t)}$$

样由y＝0时，$E_z=0$ ，和x＝0时, $E_z=0$ 可得

$$E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)}$$

在考虑x=a和y=b面上的边界条件 $k_x a$ $k_y b$ 必是π的整数倍

$$\sin k_x a = 0 \qquad \sin k_y b = 0$$

$$k_x a = m\pi. \quad (m = 0,1,2,\cdots) \qquad k_y b = n\pi\ , \quad (n = 0,1,2\cdots)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \qquad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

我们得到波导中的电波

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y = A_2 \cos k_y y \sin k_x x e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \end{cases}$$

当 ω 和m,n选定后，

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \qquad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

k_z 由 $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 / c^2 = k^2$ 确定

并且由横波条件可得到， A_1 A_2 A_3 的关系

$$A_1 k_x + A_2 k_y - i A_3 k_z = 0$$

当 ω 和m,n选定后，还剩下4个实参量，为满足 上式的两个复数

电波确定后，磁波可由电波导出

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = i\omega(B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

$$B_x = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right)$$

$$B_y = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

$$B_z = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right)$$

$$\begin{cases} B_x = -\dfrac{1}{\omega}\left[A_2 k_z + iA_3 k_y\right]\sin k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_y = -\dfrac{1}{\omega}\left[A_1 k_z + iA_3 k_x\right]\cos k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_z = -\dfrac{i}{\omega}\left[A_2 k_x - A_1 k_y\right]\cos k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \end{cases}$$