数值分析作业8: (第5章 2.4.9 11.12.14.18)

谢泽钰 2020012544

2. 由A是对称矩阵: $\mathrm{cond}(A)_2 = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \rho(A)\rho(A^{-1})$

取 $B = \mathrm{diag}\{1,4,1\}$. $B^{-1}AB \sim A$ 且特征值相同.

由Gershgorin定理. 3个圆盘的圆心为 $5.2, 0.4, 4$

半径为: $\frac{0.6\times4}{1} + \frac{2.2}{1} = 4.6$

$\frac{0.6\times1}{4} + \frac{0.5\times1}{4} = 0.375$

$\frac{2.2\times1}{1} + \frac{0.5\times4}{1} = 4.2$

从而3个圆盘所覆盖的区域中, 距原点最远 $5.2+4.6=9.8$

最近 $0.4-0.375=0.025$

故 $\mathrm{cond}(A)_2 = \rho(A)\rho(A^{-1}) = \frac{\max\{|\lambda_i|\}}{\min\{|\lambda_i|\}} \le \frac{9.8}{0.025} = 392$

$\Rightarrow$ 392为一个上界 (相当粗糙的估计)

4. $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

9 $B = A - \alpha I$ 的特征值为 $\lambda_i - \alpha$ $(1\le i\le n)$

选取 α 使得 $\lambda_1-\alpha$ 为B主特征值. 即 $|\lambda_1-\alpha| > |\lambda_k-\alpha|$ $(2\le k\le n)$

证明$\alpha=\frac{\lambda_2+\lambda_n}{2}$收敛速度最快:

$$f(\alpha)=\max\left\{\frac{|\lambda_2-\alpha|}{|\lambda_1-\alpha|},\ \frac{|\lambda_3-\alpha|}{|\lambda_1-\alpha|},\ \cdots\ \frac{|\lambda_n-\alpha|}{|\lambda_1-\alpha|}\right\}$$

$$=\max\left\{\frac{|\lambda_2-\alpha|}{|\lambda_1-\alpha|},\ \frac{|\lambda_n-\alpha|}{|\lambda_1-\alpha|}\right\}$$ 最小.

$$\Rightarrow \frac{|\lambda_2-\alpha|}{|\lambda_1-\alpha|}=\frac{|\lambda_n-\alpha|}{|\lambda_1-\alpha|} \Rightarrow \alpha=\frac{\lambda_2+\lambda_n}{2}$$

11. (1)
$$\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{33}{25} & \frac{68}{75} \\ 0 & 0 & \frac{68}{75} & \frac{149}{75} \end{pmatrix}$$

12. (1) A对称 $\Rightarrow A=A^T \Rightarrow QR=R^TQ^T \Rightarrow R^T=Q^{-1}RQ=QRQ$

$\Rightarrow A_1^T=(RQ)^T=Q^TR^T=Q^TQRQ=RQ=A_1$

(2) $A_1=RQ=RAR^{-1}$，其中R和R^{-1}均为上三角阵

$\Rightarrow RA$为Hessenburg阵 $\Rightarrow (RA)R^{-1}$为上Hessenburg阵

14 没弄懂怎么做的.

18. 取 $J=J(1,3,\theta)$，其中θ满足$b_{pq}=0$，$(p\neq q)$