数值分析作业2

谢泽钰 2020012544

8. (1) $f, g \in C[a,b]$，故 f, g 为$[a,b]$上的一致连续函数且有界

$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx$ 即 $(f,g)=(g,f)$

$(cf,g) = \int_a^b cf(x)g(x)dx = (f,cg) = c(f,g)$

$(f,f)(g,g) = \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx \geq (\int_a^b f(x)g(x)dx)^2$

$\Rightarrow (f,f)(g,g) \geq (f,g)^2$

故 (f,g) 构成内积

(2) 同上知 $f(x_i), g(x_i)$ 有界 $(0\leq i\leq m)$

故下式也为内积

11 (1) $\|A\|_1 = \max\{1+3, 2+4\} = 6$

$\|A\|_2 = \sqrt{\max\{\lambda_i(A^TA)\}} = \sqrt{15+\sqrt{221}}$

$\|A\|_F = \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30}$

$\rho(A) = \max|\lambda_i| = \max\{|\frac{5-\sqrt{33}}{2}|, |\frac{5+\sqrt{33}}{2}|\} = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$

(2) $\|A\|_1 = \max\{3,4,3\} = 4$

$\|A\|_2 = \sqrt{\max\{\lambda_i(A^TA)\}} = \sqrt{\max\{6-4\sqrt{2}, 6+4\sqrt{2}, 4\}} =$

$\|A\|_F = \sqrt{4+1+1+4+1+1+4} = 4$

$\rho(A) = \max|\lambda_i| = \max\{2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}\} = 2+\sqrt{2}$

12 (1) $\|x\|_\infty = \sup\limits_{1\le k\le n} |x_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| = \|x\|_1$

$\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \le n\cdot \sup\limits_{1\le k\le n} |x_k| = n\|x\|_\infty$

(2) $\|x\|_\infty^2 = (\sup\limits_{1\le k\le n} |x_k|)^2 = \sup\limits_{1\le k\le n} |x_k|^2 \le \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}{n} = \|x\|_2^2$

$\Rightarrow \|x\|_\infty \le \|x\|_2$

$\|x\|_\infty^2 \cdot n = n \sup\limits_{1\le k\le n} |x_k|^2 = \sup\limits_{1\le k\le n} (\sqrt{n}\,|x_k|)^2 \le \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (\sqrt{n}\,|x_k|)^2}{n} = (\sqrt{n}\,\|x\|_2)^2$

$\Rightarrow \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$

(3) 设A的奇异值为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$

则 $\|A\|_2 = (\max\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\})^{\frac{1}{2}}$
$\|A\|_F = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)^{\frac{1}{2}}$
$n\|A\|_2 = (n\max\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\})^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \|A\|_2 \le \|A\|_F \le \|A\|_2 \cdot n$

15. A正定 $\Rightarrow$ $(Ax, x) \ge 0$ 且当且仅当 $x=0$ 时 $(Ax, x) = 0$
A对称 $\Rightarrow$ $(Ax, x) = (x, Ax)$

$\|x\|_A + \|y\|_A = \sqrt{(Ax, x)} + \sqrt{(Ay, y)}$

$\|x+y\|_A = \sqrt{(A(x+y), x+y)} = \sqrt{(Ax, x) + (Ay, y) + 2(Ax, y)}$

$\le \sqrt{(Ax, x) + (Ay, y) + 2\sqrt{(Ax, x)(Ay, y)}}$

$= \sqrt{(Ax, x)} + \sqrt{(Ay, y)}$

$\Rightarrow \|x\|_A + \|y\|_A \geq \|x+y\|_A$

$\|cx\|_A = \sqrt{(cAx, cx)} = c\sqrt{(Ax, x)} = c\|x\|_A$

综合①.②.③知 $\|x\|_A$为$\mathbb{R}^n$上的向量范数

17. $(QA)^T QA = A^T Q^T QA = A^T A$，故 $\|QA\|_2 = \|A\|_2$
由对称性 $\|AQ\|_2 = \|QA\|_2 = \|A\|_2$

设A的奇异值为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$. 则 $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \quad + \sigma_n^2}$
因 $(QA)^T QA = A^T A$. 故QA的奇异值也为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$
$\Rightarrow \|QA\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2} = \|A\|_F$
由对称性知 $\|AQ\|_F = \|QA\|_F = \|A\|_F$

19. (1) 设 A.B为下三角阵，即对 $\forall i>j$, $a_{ij}=0$, $b_{ij}=0$

$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{n\times n}$，当 $i>j$ 时. 必有 $i>k$ 或 $k>j$.
此时 $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$

故AB为下三角阵
(2) 考虑对 A和 I_n 左乘A^{-1}. 即进行相同的初等行变换.

得到的 $A^{-1}A$为 I_n 下三角阵. 故 $A^{-1} = A^{-1}I_n$ 也为下三角阵

因 $|A^{-1}||A| = |I_n| = 1$ 故 $|A^{-1}| = |A| = 1$ 为单位阵