第七章 多项式插值

殷东生
yindongsheng@tsinghua.edu.cn

清华大学数学科学系

2023年秋季学期

多项式逼近

用多项式函数逼近一般的函数是数值计算的一类基本问题。

1. 多项式函数形式简单。计算只需有限次加、减、乘、除就可完成，且多项式的导数和原函数还是 多项式函数，在不考虑舍入误差的时可以在计算机上准确的表达和运算。
2. 当函数 $f(x)$ 在其定义域内某一点 x_0 的邻域内各阶导数都存在时，在x_0 充分小的邻域中，$f(x)$与下面的多项式

$$P_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k,$$

非常接近，即 $|f(x) - P_k(x)|$ 是 $|x - x_0|$ 的高阶无穷小。
这说明对于任何充分光滑的函数，总可以在每一点局部用多项式来近似。

Weierstrass定理

从整体上来说，在函数逼近论中有下面的定理

定理 (Weierstrass定理)

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数。对于 $\forall\epsilon>0$，都存在一个 N 次多项式 $P_N(x)$ (N 与 ϵ 有关)使得

$$\|f(x)-P_N(x)\|_\infty<\epsilon,$$

其中 $\|f\|_\infty=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$。

这个定理表明对于定义在闭区间上的任何连续函数，都可以用一系列多项式来逼近。
用多项式近似一般函数的方法主要有两大类：插值和逼近。

数学家简介 (Weierstrass)

魏尔斯特拉斯*(1815-1897)*，德国数学家，被誉为“现代分析之父”。魏尔斯特拉斯在数学分析领域中的最大贡献，是在柯西、阿贝尔等开创的数学分析的严格化潮流中 以$\epsilon-\delta$语言，系统建立了实分析和复分析的基础，基本上完成了分析的算术化。 他引进了一致收敛的概念，并由此阐明了函数项级数的逐项微分和逐项积分定理。在建立分析基础的过程中，引进了实数轴和n维欧氏空间中一系列的拓扑概念， 并将黎曼积分推广到在一个可数集上的不连续函数之上。*1872*年，魏尔斯特拉斯给出了第一个处处连续但处处不可微函数的例子，使人们意识到连续性与可微性的差异。

学生有：*Cantor*，*Frobenius*，*Gegenbauer*，*Hölder*，*Klein*，*Kovaleskay*，*Lie*，*Minkowski*，*Mittag-Leffler*，*Schwarz*等。

设闭区间 $[a,b]$ 上的函数 f 在 $n+1$ 个不同点 $x_i \in [a,b]$ 处的函数值 $f_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$，要求估算 f 在 (a,b) 中某点的值。

定义 (线性插值-linear interpolation)

设 U 是一个线性空间，$\{u_0, u_1, \cdots, u_n\}$ 是 U 的一组基。线性插值是求 $\psi = \sum_{j=0}^{n} c_j u_j \in U$ 使得

$$\psi(x_i) = \sum_{j=0}^{n} c_j u_j(x_i) = f_i, \qquad i = 0, \cdots, n, \tag{0.1}$$

- f 为被插值函数；
- $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值节点(*interpolation nodes*)；
- ψ 为插值函数(*interpolating function*)；
- $\psi(x_i) = f_i, i = 0, \cdots, n$ 为插值条件。

插值问题的求解

线性插值，其插值函数在插值节点上必须满足插值条件，可以得到一个方程组，亦即

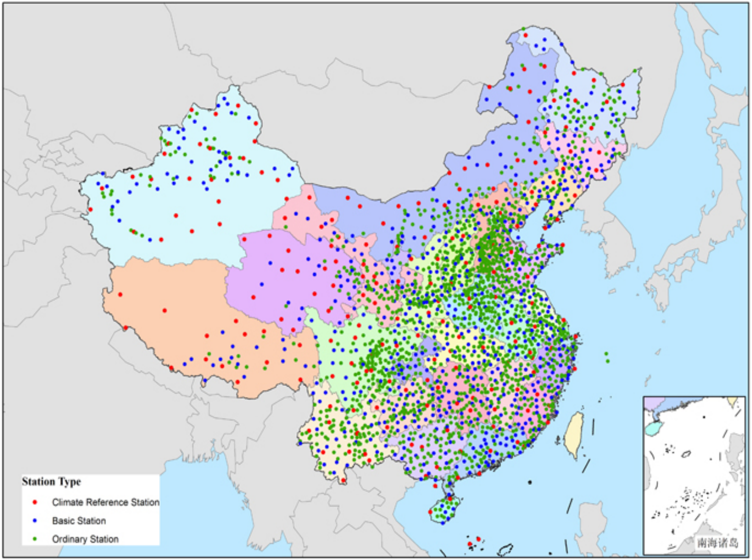
$$f_i = \psi(x_i) = \sum_{j=0}^{n} c_j u_j(x_i), \quad 0 \le i \le n.$$

写成矩阵形式$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}$有

$$\begin{pmatrix} u_0(x_0) & u_1(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_0(x_1) & u_1(x_1) & \cdots & u_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_0(x_n) & u_1(x_n) & \cdots & u_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

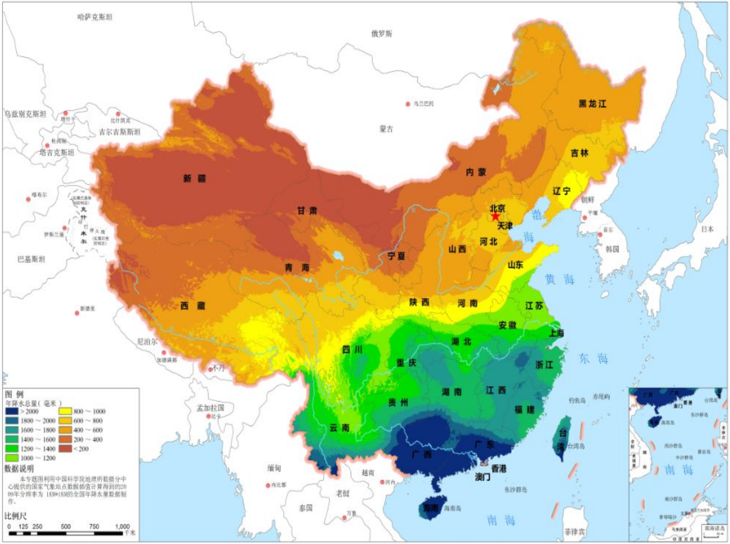
矩阵A称为 插值矩阵。插值问题存在唯一解当且仅当A非奇异。

气象空间插值

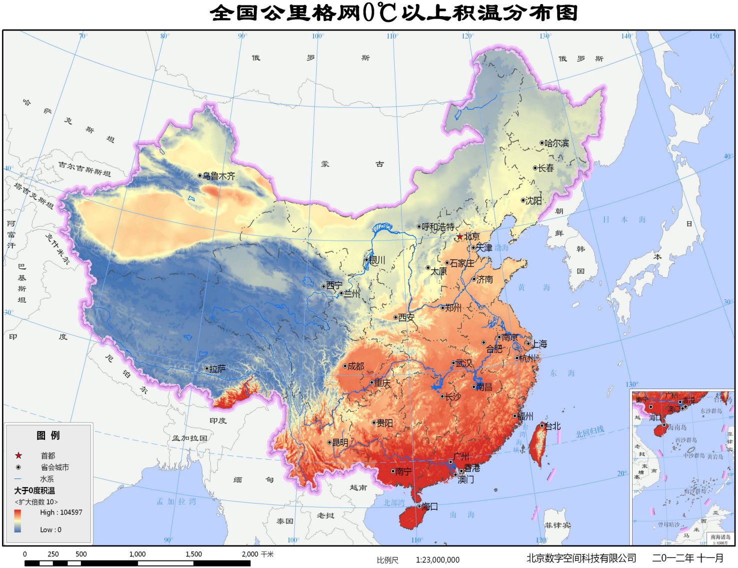

Station Type
Climate Reference Station
Basic Station
Ordinary Station
南海诸岛

降雨量

全国年降水量空间分布

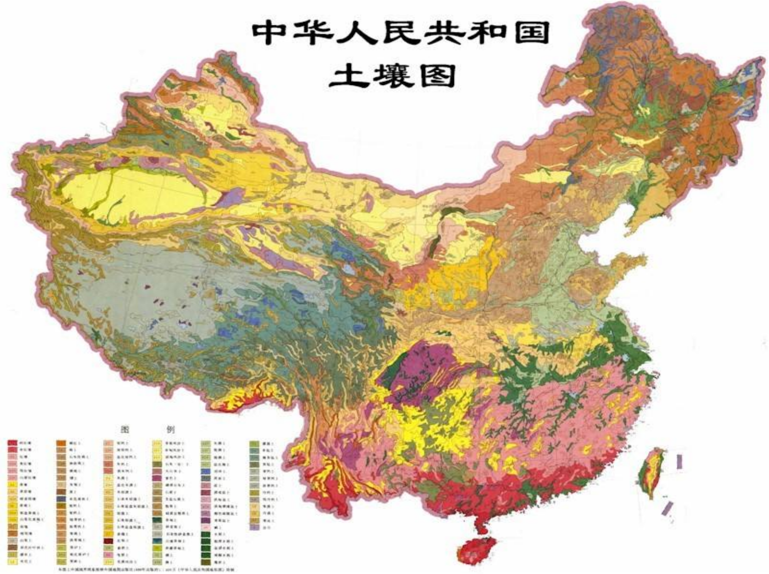


温度

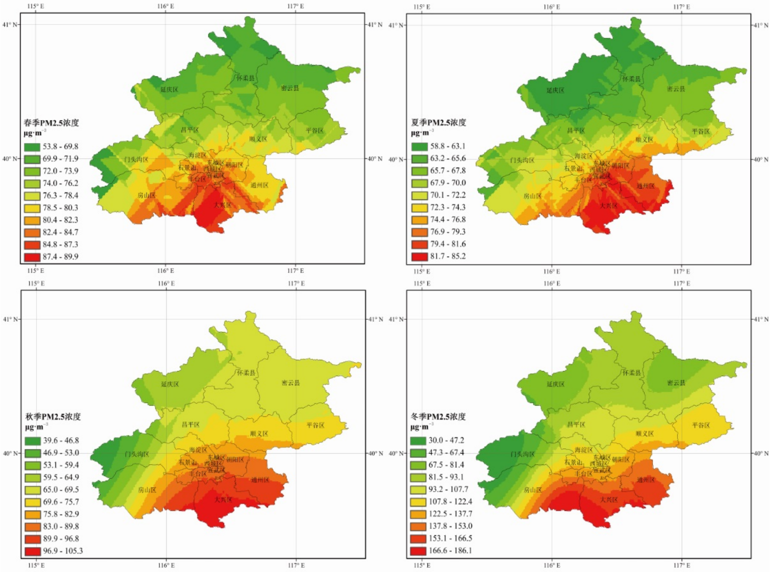


全国公里格网0℃以上积温分布图
图 例
首都
省会城市
水系
大于0度积温
<扩大倍数 10>
High : 104597
Low : 0
0 250 500 1,000 1,500 2,000 千米
比例尺 1:23,000,000
北京数字空间科技有限公司 二〇一二年 十一月

土壤



北京PM2.5



春季PM2.5浓度
μg·m⁻³
53.8 - 69.8
69.9 - 71.9
72.0 - 73.9
74.0 - 76.2
76.3 - 78.4
78.5 - 80.3
80.4 - 82.3
82.4 - 84.7
84.8 - 87.3
87.4 - 89.9
夏季PM2.5浓度
μg·m⁻³
58.8 - 63.1
63.2 - 65.6
65.7 - 67.8
67.9 - 70.0
70.1 - 72.2
72.3 - 74.3
74.4 - 76.8
76.9 - 79.3
79.4 - 81.6
81.7 - 85.2
秋季PM2.5浓度
μg·m⁻³
39.6 - 46.8
46.9 - 53.0
53.1 - 59.4
59.5 - 64.9
65.0 - 69.5
69.6 - 75.7
75.8 - 82.9
83.0 - 89.8
89.9 - 96.8
96.9 - 105.3
冬季PM2.5浓度
μg·m⁻³
30.0 - 47.2
47.3 - 67.4
67.5 - 81.4
81.5 - 93.1
93.2 - 107.7
107.8 - 122.4
122.5 - 137.7
137.8 - 153.0
153.1 - 166.5
166.6 - 186.1
延庆区
怀柔县
密云县
昌平区
平谷区
顺义区
门头沟区
海淀区
朝阳区
石景山
东城区
西城区
丰台区
宣武区
通州区
房山区
大兴区
115° E
116° E
117° E
41° N
40° N

多项式插值是最简单的线性插值，其插值函数为多项式函数。

定义 (多项式插值-polynomial interpolation)

多项式插值用$\psi \in \mathcal{P}_n([a,b])$ 去逼近 f，使得

$$\psi(x_i) = f_i, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{0.2}$$

通常称

- f 为被插值函数；
- $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值节点*(interpolation nodes)*；
- ψ 为插值多项式*(interpolating polynomial)*；
- $\psi(x_i) = f_i, i = 0, \cdots, n$ 为插值条件。

定理

存在唯一 $p(x) \in \mathcal{P}_n([a,b])$ 满足条件(0.2)。

多项式插值矩阵的病态性

在Matlab中输入：

```
v=0:0.5:5;
A=vander(v);
cond(A)
```

计算结果:

ans=4.1488e+10;

```
v=0:0.1:5;
A=vander(v);
cond(A)
```

计算结果:

ans=2.0889e+47;

```
v=0:0.25:5;
A=vander(v);
cond(A)
```

计算结果:

ans=4.5964e+22;

```
v=0:0.05:5;
A=vander(v);
cond(A)
```

计算结果

ans =1.0934e+83;

这说明 Vandermonde矩阵是一个高度病态矩阵。

Lagrange插值法

在线性空间$\mathcal{P}_n$中寻找元素$P(x)$使得它满足插值条件(0.2)。
最简单的情形$n=1$，此时$P(x)$是通过 $(x_0,f_0),(x_1,f_1)$的直线

$$L_1(x)=f_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+f_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

$L_1(x)$ 是下面的两个一次多项式

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

的线性组合，组合系数为f_0,f_1。上面的两个一次多项式满足

$$l_0(x_0)=1,\ l_0(x_1)=0,\ l_1(x_0)=0,\ l_1(x_1)=1.$$

这说明 $\{l_0(x),l_1(x)\}$ 构成线性空间 $\mathcal{P}_1$ 的一组基。

若能选取$\mathcal{P}_n$的基底$\{u_0, u_1, \cdots, u_n\}$满足

$$u_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

则插值矩阵A变为单位矩阵I，插值问题不需要求解方程组，且有

引理

设 $n \geq 0$，则 $\exists l_k \in \mathcal{P}_n$，$0 \leq k \leq n$ 使得

$$l_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \quad \forall 0 \leq i, k \leq n.$$

此时多项式$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x)$是$f(x)$的$n$次插值多项式。

Lagrange 节点基函数有如下表达式：

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

定义 (Lagrange 插值)

- $L_n(x)$ 称为 n 次*Lagrange 插值多项式*，
- 相应的插值方法称为*Lagrange 插值法*，
- $\{l_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 称为*Lagrange 插值基函数*或*节点基函数(nodal basis)*。

注记

$L_n(x)$ 首先被 *Waring* 在*1776*年发现，*Euler*在*1783*年重新给出，而在*1795*年被*Lagrange* 首先发表。

插值余项及误差估计

一般来说$L_n(x)$ 与被插值函数 $f(x)$是有差别的，称

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

为插值多项式的余项(remainder of interpolation)。

定理 (余项估计)

设被插函数 $f(x) \in C^n[a,b]$，而 $f^{(n+1)}$在(a,b)内存在，且插值节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$互不相同，则对 $\forall x \in [a,b]$，都存在 $\xi(x) \in [a,b]$，使得

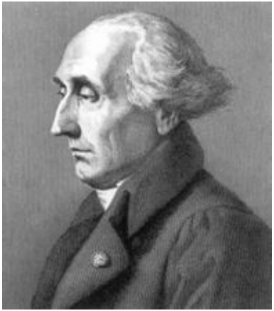
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n). \tag{0.3}$$

Lagrange插值Matlab程序

```
function yh=lagrange(x,y,xh)
n = length(x);
m = length(xh);
x = x(:);%插值节点
y = y(:);%插值数据
xh = xh(:);%求值点
yh = zeros(m,1);
c1 = ones(1,n-1);
c2 = ones(m,1);
for i=1:n,
xp = x([1:i-1 i+1:n]);
yh = yh + y(i) * prod((xh*c1-c2*xp')./(c2*(x(i)*c1-xp')),2);
end
```

数学家简介 (Lagrange)

约瑟夫·拉格朗日（*1736–1813*）法国著名数学家、天文学家、物理学家。拉格朗日在数学、力学和天文学三个学科中都有重大历史性贡献，但他主要是数学家，研究力学和天文学的目的是表明数学分析的威力。他是变分法 的开拓者之一，有*Euler-Lagrange* 方程，*Lagrange* 乘子法等。是分析力学：*Lagrange* 力学的创立者（用变分的观点研究*Newton* 力学，使之成为分析的一个分支）和天体力学的奠基人。拉格朗日是一阶偏微分方程理论的建立者，也是群论的先驱。拿破仑曾称赞他是“一座高耸在数学界的金字塔”，他最突出的贡献是在把数学分析的基础脱离几何与力学方面起了决定性的作用。使数学的独立性更为清楚，而不仅是其他学科的工具。



导师为Euler，学生有Poisson, Fourier等

Newton插值

Lagrange插值公式在插值节点发上变化时，全部插值基函数都要发生变化，在实际计算的时候会带来很大的不便。
给定$n+1$个插值数据$\{x_i, f_i\}$, $0 \le i \le n$，求$N_n(x)$使得

$$N_n(x_i) = f_i,\ \ i = 0, \cdots, n.$$

假定已有n个节点$\{x_0, \cdots, x_{n-1}\}$的插值多项式$N_{n-1}(x)$，如何求$N_n(x)$?

$$\begin{aligned} N_n(x) &= N_{n-1}(x) + q_n(x),\ \ q_n \in \mathcal{P}_n, \\ N_{n-1}(x_i) &= f_i,\ \ 0 \le i \le n-1. \end{aligned}$$

因为

$$q_n(x_i) = N_n(x_i) - N_{n-1}(x_i) = 0,\ \ 0 \le i \le n-1,$$

所以

$$q_n(x) = a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) = a_n \omega_n(x).$$

又

$$N_n(x_n) = f(x_n) \Rightarrow a_n = \frac{f(x_n) - N_{n-1}(x_n)}{\omega_n(x_n)}.$$

定义 (Newton均差–Newton divided difference)

上述的系数a_n被称为n-阶Newton均差。一般记为

$$a_n = f[x_0, x_1, \cdots, x_n].$$

则插值公式变为

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_n(x).$$

令$f(x_0) = f[x_0]$, $\omega_0 = 1$，则可递归定义

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \cdots, x_k]\omega_k(x).$$

定理 (Newton均差)

n-阶Newton均差可如下递归定义

$$f[x_0,\cdots,x_n]=\frac{f[x_1,\cdots,x_n]-f[x_0,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}.$$

1. $f(x)$在节点 $x_0, x_1, \cdots, x_m$上的m阶均差

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_m] = \sum_{i=0}^{m} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{m}(x_i - x_j)};$$

2. 均差的值与所含节点的排列次序无关

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_m] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}],$$

3. 若 $x_m \notin \{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$，则有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k, x_m] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_m] - f[x_0, x_1, \cdots, x_k]}{x_m - x_k}.$$

4. 若$f(x)$的m阶导数存在，则

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!},$$

其中 $\xi \in (\min\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}, \max\{x_0, x_1, \cdots, x_m\})$。

定理 (均差型余项)

设$f(x)$在 $[a,b]$上有定义，$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为$[a,b]$上相异节点，则对于$\forall x\in[a,b]$，且x不是插值节点，$N_n(x)$的余项为

$$R_n(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

Newton插值的优点

Newton插值多项式和Lagrange插值多项式是同一个插值多项式的不同表现形式。

Newton插值有下面的优点:

1. 用均差表示的余项比用导数表示的余项使用范围更广，前者在$f(x)$的导数不存在，甚至$f(x)$不连续 时仍有意义。
2. Newton插值多项式在已知n次插值多项式时，如果再增加一个新的插值节点x_{n+1}，则 $n+1$次的插值多项式$N_{n+1}(x)$只要在$N_n(x)$的基础上增加一项:

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)\cdots(x - x_n).$$

Newton插值的Matlab程序

```
function [f] = interpol (x,y,z)
[m n] = size(y);
for j = 1:m
a (:,1) = y (j,:)’ ;
for i = 2:n
a (i:n,i) = ( a(i:n,i-1)-a(i-1,i-1) )./(x(i:n)-x(i-1))’ ;
end
f(j,:) = a(n,n).*(z-x(n-1)) + a(n-1,n-1);
for i = 2:n-1
f(j,:) = f(j,:).*(z-x(n-i))+a(n-i,n-i);
end
end
```

均差表

实际计算的时候经常利用均差表

x	0阶均差	一阶均差	二阶均差	三阶均差
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]$	
		$f[x_3,x_4]$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]$	
		$f[x_4,x_5]$		
x_5	$f[x_5]$			

例

已知$f(x)$的插值数据为

x	0.00	0.20	0.30	0.50
$f(x)$	0.00000	0.20134	0.30452	0.52110

求它的$Newton$ 插值多项式，并估算$f(0.23)$。

解 首先计算所需的各阶均差：

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
0	0.00	0.00000			
1	0.20	0.20134	1.0067		
2	0.30	0.30452	1.0318	0.08367	
3	0.50	0.52110	1.0829	0.17033	0.17332

则Newton插值多项式为

$$
\begin{aligned}
N_3(x) &= f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\
&\quad +f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
&= 1.0067x+0.08367x(x-0.20)\\
&\quad +0.17332x(x-0.20)(x-0.30).
\end{aligned}
$$

所以$f(0.23)\approx N_3(0.23)\approx 0.23103.$

实际上，Newton插值的基函数可以写成

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= 1 \\
u_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \\
u_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
\cdots & \quad \cdots \\
u_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}
$$

则插值矩阵A的元素$a_{ij} = u_j(x_i)$满足$u_j(x_i) = 0$, $j > i$和$u_k(x_k) = 1$，亦即A是一个单位下三角阵。
而Newton插值形式上为

$$N_n(x) = N_{n-1} + cu_n.$$

例

求$p(x) \in \mathcal{P}_2$使得$p(1) = -1, p'(1) = -1, p(0) = 1$。

例

求$p(x) \in \mathcal{P}_1$使得$p'(0) = 1, p'(1) = -1$。

重节点均差

考虑

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f[x, x_0].$$

定义 (重节点均差–divided difference with multiple nodes)

一阶的重节点均差定义为

$$f[x_0, x_0] = f'(x_0).$$

更一般的如何定义？

考察x_0点的Taylor展开：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots \\ &\quad + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \cdots. \end{aligned}$$

引理

令$x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_l$，则均差满足

$$f[x_0,\cdots,x_n] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1,\cdots,x_n] - f[x_0,\cdots,x_{n-1}]}{x_n - x_0}, & x_n \neq x_0, \\ \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, & x_n = x_0. \end{cases}$$

密切多项式(Osculating polynomials)是Taylor多项式插值和Lagrange多项式插值的推广。

定义 (密切(Osculating polynomials多项式插值)

设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$是$[a,b]$上的互不相同的插值节点，而 m_i是和$x_i, i=0,1,\cdots,n$ 相关的非负整数，若$f \in C^m[a,b]$，$m=\max_{0\le i\le n} m_i$，f的密切多项式$P(x)$是满足下列 条件的多项式

$$\frac{d^kP(x_i)}{dx^k} = \frac{d^kf(x_i)}{dx^k}, \forall i=0,1,\cdots,n, k=0,1,\cdots,m_i. \tag{0.4}$$

注记

当$n=0$时，f的密切多项式就是f在 x_0的m_0阶$Taylor$多项式，$m_i=0$时是n阶$Lagrange$多项式。

当 $m_i=1, i=0,1,\cdots,n$时f的密切多项式就是$Hermite$多项式，相应插值方法叫$Hermite$插值法。

记

$$\{y_0,\cdots,y_{n-1}\}=\{\underbrace{x_0,\cdots,x_0}_{m_0},\underbrace{x_1,\cdots,x_1}_{m_1},\cdots,\underbrace{x_l\cdots,x_l}_{m_l}\}.$$

则插值多项式为

$$N_{n-1}(x)=f[y_0]+\sum_{j=1}^{n-1}f[y_0,y_1,\cdots,y_j]\prod_{k=0}^{j-1}(x-y_k).$$

注记

计算时有重节点，则用重节点均差的定义计算。计算时可不管y_j的编号。

例

求插值多项式使得

$$p(x_0)=f(x_0),\ \ p(x_1)=f(x_1),\ \ p'(x_1)=f'(x_1).$$

Hermite插值

Hermite插值多项式H_{2n+1}可以基于Lagrange插值多项式得到。首先构造两组插值基函数$\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{P}_{2n+1}, i = 0, 1 \cdots, n$满足

$$\begin{cases} \alpha_i(x_j) = \delta_{ij}, & \alpha_i'(x_j) = 0 \\ \beta_i(x_j) = 0 & \beta_i'(x_j) = \delta_{ij} \end{cases}$$

利用α_i, β_i构造多项式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} [f_i \alpha_i(x) + f'(x_i)\beta_i(x)].$$

则$H_{2n+1}(x)$满足Hermite插值的插值条件。

下面来确定$\alpha_i, \beta_i, i = 0, 1, \cdots, n$。因为$\alpha_i(x_j) = \delta_{ij}$，$\alpha_i'(x_j) = 0$，又$n$次Lagrange 插值的基函数为

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right) \in \mathcal{P}_n, i = 0, 1, \cdots, n$$

且$l_i(x_j) = \delta_{ij}$，所以

$$\alpha_i(x) = (ax + b) l_i^2(x) \in \mathcal{P}_{2n+1}, i = 0, 1, \cdots, n$$

由$\alpha_i(x)$满足的条件有

$$\begin{cases} a x_i + b = 1, \\ a + 2 l_i'(x_i) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 l_i'(x_i) \\ b = 1 + 2 x_i l_i'(x_i) \end{cases}$$

对于$\beta_i(x), i=0,1,\cdots,n$满足条件

$$\begin{aligned}
\beta_i(x_j) &= 0 \Longrightarrow \beta_i(x) = K(x)\prod_{j=0}^{n}(x-x_j), \\
\beta_i'(x_j) &= \delta_{ij} \Longrightarrow \beta_i'(x) = G(x)\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x-x_j)
\end{aligned}$$

结合两个条件有

$$\beta_i(x) = (x-x_i)l_i^2(x),\ i=0,1,\cdots,n$$

这样Hermite多项式确定如下

$$H_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n}[f_i\alpha_i(x) + f_i'\beta_i(x)]$$

下面证明唯一性，若还有一个次数$\le 2n+1$的多项式G_{2n+1}满足插值条件(0.4)， 令 $R = H_{2n+1} - G_{2n+1}$，则从插值条件可知

$$R(x_i) = R'(x_i) = 0, i = 0, 1, \cdots, n.$$

R 是一个次数 $\le 2n+1$的多项式，它有 $n+1$个二重根 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，所以 $R = 0$，亦即 $H_{2n+1} = G_{2n+1}$。

定理 (Hermite插值余项估计)

设$f \in C^{2n+2}[a,b], x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$是相异节点，$H_{2n+1}$是$2n+1$次$Hermite$插值多项式。

则$\forall x \in [a,b]$，$\exists \xi(x) \in (a,b)$使得

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x).$$

三次Hermite插值多项式H_3满足插值条件

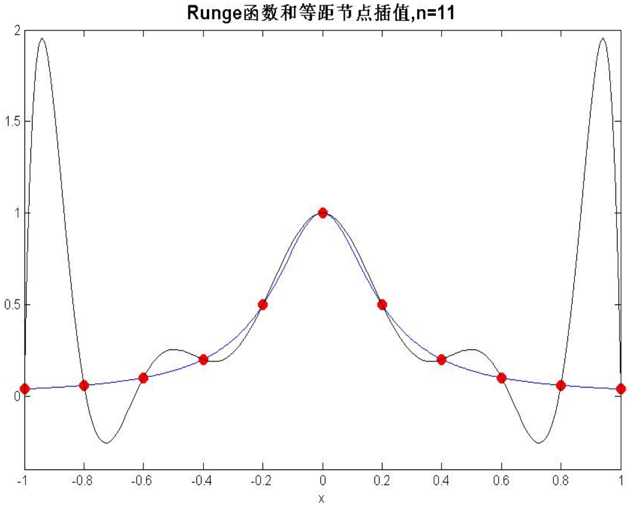
$$
\begin{aligned}
H_3(x_k) = f(x_k), \quad H_3(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) \\
H_3'(x_k) = f'(x_k), \quad H_3'(x_{k+1}) = f'(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

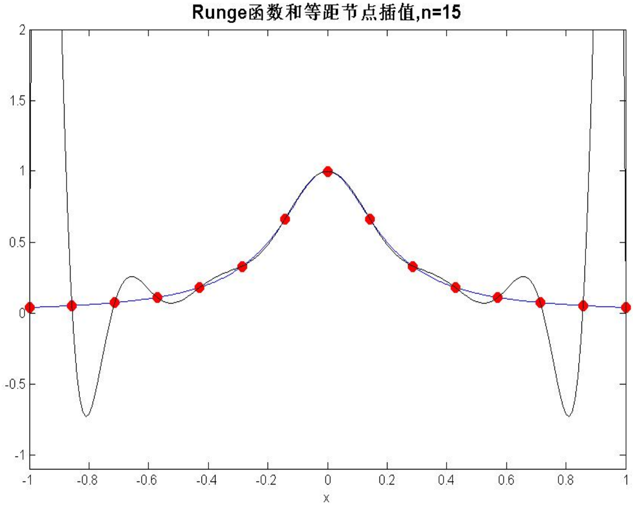
由前面的分析,相应的插值基函数为

$$
\begin{cases}
\alpha_k(x) = \left(1 + 2\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2, \\
\alpha_{k+1}(x) = \left(1 + 2\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)\left(\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\beta_k(x) = (x - x_k)\left(\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \\
\beta_{k+1}(x) = (x - x_{k+1})\left(\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2
\end{cases}
$$

$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$时的Runge现象




Runge函数和等距节点插值,n=15
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

数学家简介 (Runge)

龙格(*1856-1927*)德国数学家、物理学家、光谱学家。在数学方面，主要研究了函数论、代数学、数值和图解计算理论及其应用。他发展了解析函数的逼近理论，曾得到多项重要结果。他给出了代数方程数值解的一般方法。他还得到了微分方程数值积分的*Runge-Kutta* 和其他一些计算方法，发现了*Runge*现象。他的导师是*Weierstrass*，学生有*Max Born*等。月球上的*Runge*环形山以他命名。他的儿子 *Wilhelm Runge*是雷达的早期发明者，他的女儿*Nerina (Nina)* *Runge*是*Courant*的太太，另一个女儿*Iris*也是一个数学家。

数值稳定性

因为插值函数不可避免存在误差，设$\hat{f}_i = f_i + \epsilon$是扰动后的值，而 $\hat{L}_n(x)$ 是 以$\hat{f}_0, \hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_n$ 为插值数据的多项式，则

$$f(x) - \hat{L}_n(x) = f(x) - L_n(x) + [L_n(x) - \hat{L}_n(x)].$$

而

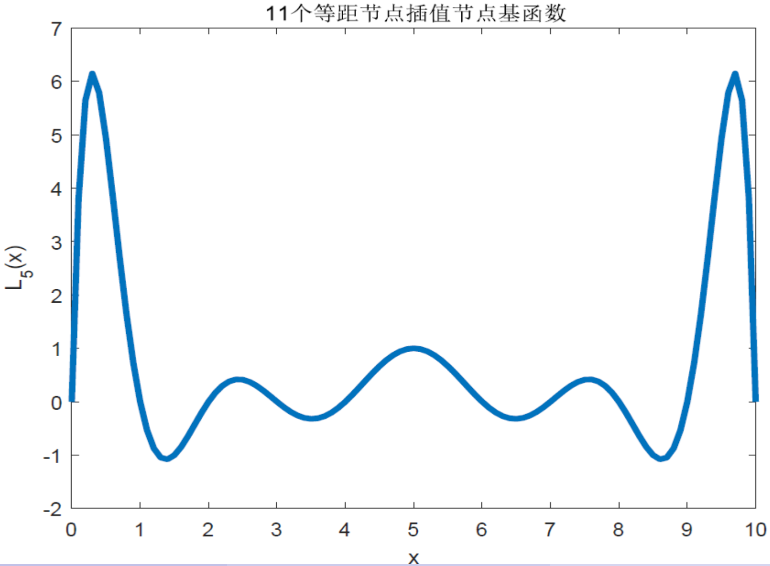
$$L_n(x) - \hat{L}_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \epsilon_j l_j(x).$$

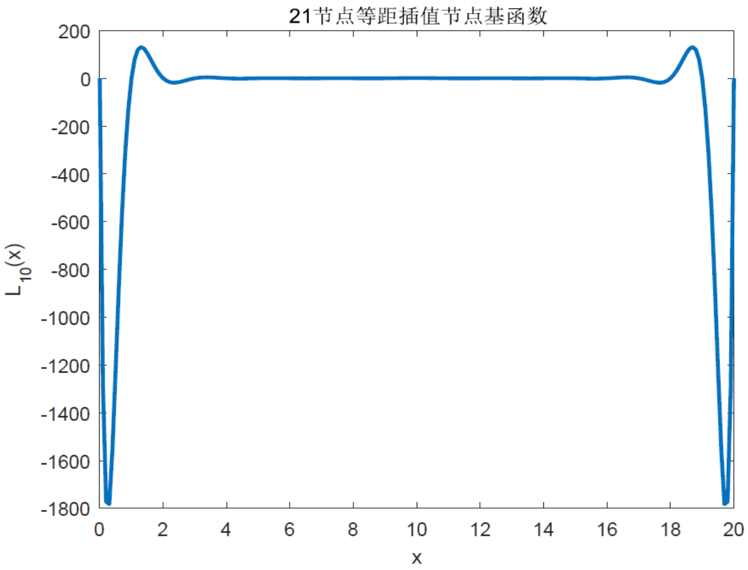
假定$n = 2m + 1$， $\epsilon_m \neq 0$，其他 $\epsilon_j = 0$，则

$$[f(x) - L_n(x)] - [f(x) - \hat{L}_n(x)] = \epsilon_m l_m(x).$$

若$l_m(x)$在某些点x^*很大，那么 $\epsilon_m l_m(x^*)$也变得非常大。这就意味着即使是函数值的微小扰动也将带来插值函数的巨大变化，误差会被过分放大！

高次等距插值节点基函数




21节点等距插值节点基函数
200
0
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
-1400
-1600
-1800
$L_{10}(x)$
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
x

等距节点高次插值数值不稳定。令$n=2m+1$，考察等距插值点列

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m < x_{m+1} \cdots < x_n,$$

此处 $x_{i+1}-x_i = h(i=0,\cdots,n)$，Lagrange插值基函数

$$l_m(x) = \frac{\prod\limits_{j\neq m}(x-x_j)}{\prod\limits_{j\neq m}(x_m-x_j)}$$

取$x^* = x_n - \frac{h}{2}$，则

$$\begin{aligned} |l_m(x^*)| &\approx \frac{2^{2m-1}}{(2m-1)\pi^m} \to \infty, \quad m\to\infty. \\ \Rightarrow \|f(x)-\hat{L}_n(x)\|_\infty &= |\epsilon_m l_m(x^*)| \to \infty. \end{aligned}$$

定义 (分段线性插值–piecewise linear interpolation)

设在区间$[a,b]$上取定$n+1$个节点，并在节点上给定函数值

$$f_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$$

满足下列条件的函数φ称为分段线性插值函数

1. $\varphi \in C[a,b]$;
2. 满足插值条件 $\varphi(x_i) = f_i, i = 0, 1, \cdots, n$;
3. 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \cdots, n-1$上 $\varphi \in \mathcal{P}_1$。

分段线性插值函数的基函数

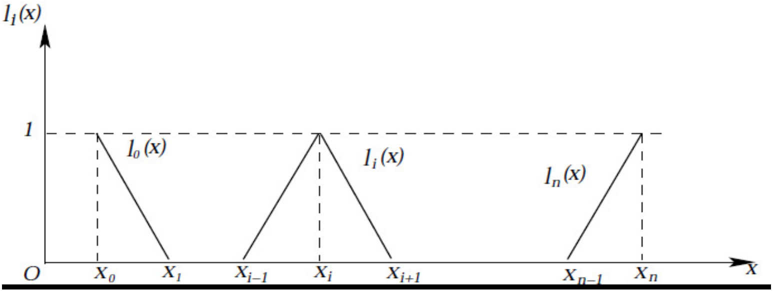
$$\{l_i\}_{i=0}^{n}, \qquad l_i(x_j) = \delta_{ij}$$

其中

$$l_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \notin [x_0, x_1], \end{cases}$$

$$l_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases}$$

$$l_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_{n-1}, x_n], \\ \dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$



则满足条件 (1)–(3)的分段线性插值函数 $\varphi(x)$可写为

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x). \tag{0.5}$$

另外对$f(x) \equiv 1$作分段线性插值有 $\varphi(x) \equiv 1$,则由(0.5)得

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1.$$

定理 (分段线性插值函数的一致收敛性)

设 $f \in C[a,b]$，令 $h = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$，则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$， $s.t$ $h < \delta$ 时，有

$$|\varphi(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall x \in [a,b].$$

定理 (截断误差)

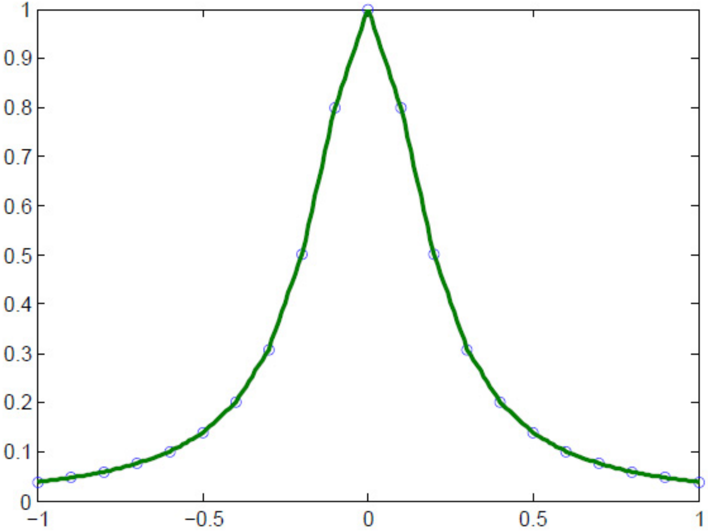
设被插函数 $f(x) \in C^2[a,b]$，则

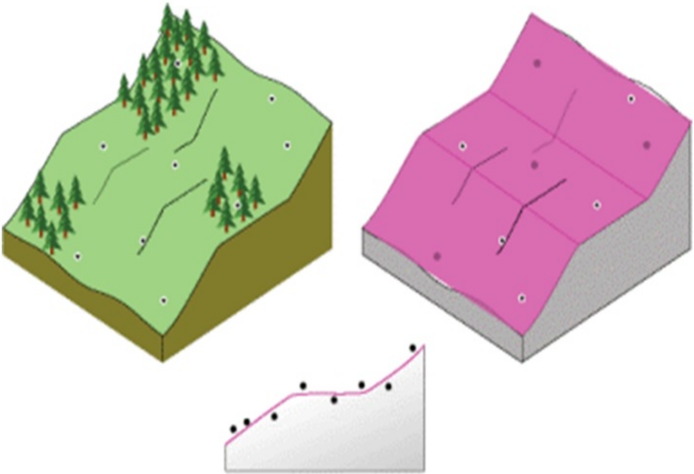
$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{Mh^2}{8}, x \in [a,b],\ \ M = \max_{x\in[a,b]} |f''|$$

问题

分段线性插值是否数值稳定？

分段线性插值函数$\varphi(x)$在插值节点处左右导数不相等。





三次Hermite插值

三次Hermite插值多项式H_3满足插值条件

$$\begin{cases} H_3(x_i)=f_i, & H_3(x_{i+1})=f_{i+1}, \\ H_3'(x_i)=f_i', & H_3'(x_{i+1})=f_{i+1}'. \end{cases}$$

相应的插值基函数为

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2, \\ \tilde{\alpha}_{i+1}(x) = \left(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_i(x) = (x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2, \\ \tilde{\beta}_{i+1}(x) = (x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow H_3(x)=f_i\alpha_i(x)+f_{i+1}\tilde{\alpha}_{i+1}(x)+f_i'\beta_i(x)+f_{i+1}'\tilde{\beta}_{i+1}(x).$$

定义 (分段三次Hermite插值)

设$f \in C^1[a,b]$，在节点$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$上给定函数值和导数值

$$f_i = f(x_i),\ f_i' = f'(x_i),\ i = 0, 1, \cdots, n.$$

如果函数φ满足条件：

1. $\varphi \in C^1[a,b]$
2. 满足插值条件：

$$\varphi(x_i) = f_i,\ \varphi'(x_i) = f_i',\ i = 0, 1, \cdots, n.$$

3. φ是子区间$[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n$上的三次多项式。

则φ称为f的分段三次*Hermite*插值多项式。

分段三次多项式函数$\varphi(x)$可写为

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{n}[f_i h_i(x)+f_i'\hat{h}_i(x)].$$

其中基函数$h_i,\hat{h}$的表达式可由前面定义的$\alpha_i(x)$和$\beta_i(x)$给出：

$$h_0(x) = \begin{cases}\alpha_0(x), & x\in[x_0,x_1],\\ 0, & x\in[x_1,x_n],\end{cases}$$

$$\hat{h}_0(x) = \begin{cases}\beta_0(x), & x\in[x_0,x_1],\\ 0, & x\in[x_1,x_n],\end{cases}$$

$$h_n(x) = \begin{cases}0, & x\in[x_0,x_{n-1}],\\ \tilde{\alpha}_n(x), & x\in[x_{n-1},x_n],\end{cases}$$

$$\hat{h}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{n-1}], \\ \tilde{\beta}_n(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$

$$h_i(x) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i(x), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \alpha_i(x), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases}$$

$$\hat{h}_i(x) = \begin{cases} \tilde{\beta}_i(x), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \beta_i(x), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \quad , i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

定理 (截断误差)

当被插值函数$f(x) \in C^4[a,b]$时，$\varphi(x)$与$f(x)$的误差满足

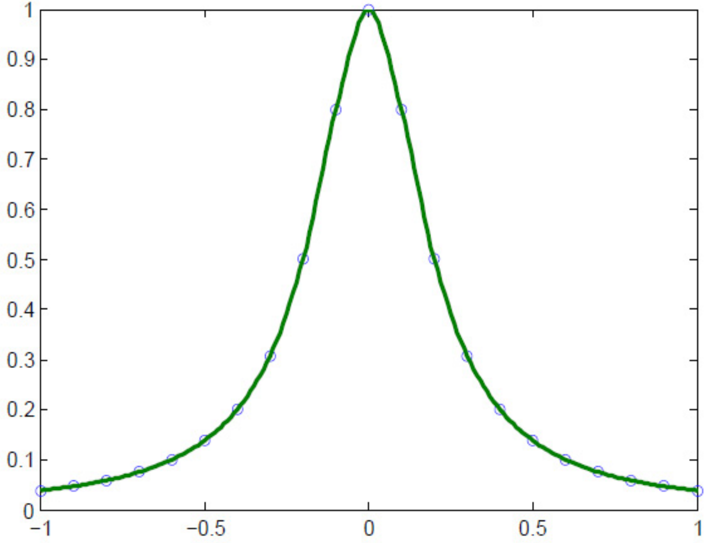
$$\|f(x) - \varphi(x)\|_\infty \le \frac{h^4}{384} M,$$

其中$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, M = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$。

定理

设$f \in C^1[a,b]$，令$\max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$，则有

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_\infty \le \frac{35}{24} h \|f'(x)\|_\infty.$$


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−1
−0.5
0
0.5
1

数学家简介 (Hermite)

埃尔米特（*1822—1901*） 法国数学家，文科毕业生。在函数论、高等代数、微分方程等方面都有重要发现。*1858*年利用椭圆函数首先得出五次方程的解。*1873*年证明了自然对数的底*e*的超越性。以他命名的有*Hermite*多项式、 *Hermite*插值、 *Hermite*正规形式、*Hermitian*算子、*Hermite*矩阵、 三次*Hermite*样条、*Hermite*度量等。 埃尔米特是十九世纪最伟大的代数几何学家，但是他大学入学考试重考了五次，每次失败的原因都是数学考不好。他的大学读到几乎毕不了业，每次考不好都是数学那一科。他大学毕业后考不上任何研 究所，因为考不好的科目还是数学。数学是他一生的至爱，但是数学考试是他一生的恶梦。他说：“数学课本是一滩臭水，是一堆垃圾。数学成绩好的人，都是一些二流头脑的人，因为他们只懂搬垃圾。” 埃尔米特在四十九岁时，巴黎大学才请他去担任教授。此后的二十五年，几乎整个法国的大数学家都出自他的门下。

学生：Poincaré, Padé, Stieltjes等。

好友：Cauchy, Jacobi, Liouville。

样条插值

定义 (k次样条插值)

给定区间$[a,b]$上 $n+1$个互异的插值节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$，以及被插值函数$f(x)$在这些节点上的函数值$f_i = f(x_i)$，求一个函数 S_k，使之满足

1. $S_k(x)$在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$上是不超过k次的多项式；
2. $S_k(x_i) = f_i, i = 0, 1, \cdots, n$；
3. $S_k(x) \in C^{k-1}[a,b]$。

能够保证一阶导数也连续的次数最低的样条插值函数是二次样条(quadratic spline)插值函数，但是在实际的计算中一般不用二次样条插值函数$S_2(x)$。为什么？

二次样条插值函数

令 $S_2\Big|_{[x_i,x_{i+1}]} = S_2^i$，则$S_2(x)$在$n$个子区间上是 二次多项式，它有3个系数，在整个插值区间$[a,b]$上需要确定$3n$个未知数。

- $S_2(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$；　$(n+1)$个！
- $S_2^i(x_{i+1}) = S_2^{i+1}(x_{i+1}), i = 0, 1, \cdots, n-2$；　$(n-1)$个。
- $\frac{dS_2^i}{dx}(x_{i+1}) = \frac{dS_2^{i+1}}{dx}(x_{i+1}), i = 0, 1, \cdots, n-2$；　$n-1$个。

有

$$n + 1 + 2(n-1) = 3n - 1$$

个条件，还有一个系数无法确定。
一般会在两个端点a, b上给定一个条件，如 $S_2'(x_0) = f'(x_0)$。但是怎样加条件 是个问题，这给实际计算带来个困难！
另外三次样条插值有一定的物理意义！

三次样条插值

$S_3(x)$在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$上是三次多项式，一共有4个系数需要确定，在插值区间上 则需要确定$4n$个系数，令$S_3\Big|_{[x_i,x_{i+1}]} = S_3^i$:

$$
\begin{aligned}
S_3(x_i) &= f(x_i), i=0,1,\cdots,n,\ \ n+1\text{个条件;}\\
S_3^i(x_{i+1}) &= S_3^{i+1}(x_{i+1}), i=0,1,\cdots,n-2,\ \ n-1\text{个条件;}\\
\frac{dS_3^i}{dx}(x_{i+1}) &= \frac{dS_3^{i+1}}{dx}(x_{i+1}), i=0,1,\cdots,n-2,\ \ n-1\text{个条件;}\\
\frac{d^2S_3^i}{dx^2}(x_{i+1}) &= \frac{d^2S_3^{i+1}}{dx^2}(x_{i+1}), i=0,1,\cdots,n-2,\ \ n-1\text{个条件。}
\end{aligned}
$$

这样共有$n+1+3(n-1)=4n-2$个条件！

而剩下两个条件由边界条件由给出：

1. 固支边界条件：$S_3'(x_0)=f'(x_0), S_3'(x_n)=f'(x_n)$；
2. 自然边界条件：$S_3''(x_0)=0, S_3''(x_n)=0$；
3. 周期边界条件：

$$S_3(x_0)=S_3(x_n)=f_0, S_3'(x_0)=S_3'(x_n), S_3''(x_0)=S_3''(x_n)$$

令$S_3'(x)=m_i, i=0,1,\cdots,n$，在每个子区间上作$S_3$的三次Hermite插值函数，利用Hermite 插值函数 唯一性，S_3就是Hermite插值函数，从而有

$$S_3(x)=f_i\alpha_i(x)+f_{i+1}\alpha_{i+1}(x)+m_i\beta_i(x)+m_{i+1}\beta_{i+1}(x), \tag{0.6}$$

其中α_i,β_i为三次Hermite插值基函数。式中 m_i是未知的，一旦 m_i确定，那么上面 的公式完全给出了三次样条插值函数。

$$\begin{cases}\alpha_i(x) = \left(1 + 2\dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)\left(\dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2,\\ \alpha_{i+1}(x) = \left(1 + 2\dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)\left(\dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\alpha_i''(x) &= \frac{8(x - x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)^3} + \frac{2}{(x_{i+1} - x_i)^2} + \frac{4(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^3}\\ \alpha_{i+1}''(x) &= \frac{8(x - x_i)}{-(x_{i+1} - x_i)^3} + \frac{2}{(x_{i+1} - x_i)^2} + \frac{4(x - x_{i+1})}{-(x_{i+1} - x_i)^3}\end{aligned}$$

而

$$\begin{cases}\beta_i(x) = (x - x_i)\left(\dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2\\ \beta_{i+1}(x) = (x - x_{i+1})\left(\dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\beta_i''(x) &= \frac{4(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}+\frac{2(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)^2},\\ \beta_{i+1}''(x) &= \frac{4(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)^2}+\frac{2(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}\end{aligned}$$

令 $h_i = x_{i+1}-x_i$，则有

$$\begin{aligned}\alpha_i''(x) &= \frac{6(2x-x_{i+1}-x_i)}{h_i^3}\\ \alpha_{i+1}''(x) &= -\frac{6(2x-x_{i+1}-x_i)}{h_i^3}\\ \beta_i'' &= \frac{6x-4x_{i+1}-2x_i}{h_i^2}\\ \beta_{i+1}'' &= \frac{6x-4x_i-2x_{i+1}}{h_i^2}\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
S_3''(x) \quad = \quad & \frac{6x-2x_i-4x_{i+1}}{h_i^2}m_i+\frac{6x-4x_i-2x_{i+1}}{h_i^2}m_{i+1} \\
& +\frac{6(x_i+x_{i+1}-2x)}{h_i^3}(f_{i+1}-f_i).
\end{aligned}
$$

所以在$[x_i, x_{i+1}]$上令$x \longrightarrow x_i$，则

$$
S_3''(x_{i+0})=-\frac{4}{h_i}m_i-\frac{2}{h_i}m_{i+1}+\frac{6}{h_i^2}(f_{i+1}-f_i).
$$

同样考虑在$[x_{i-1}, x_i]$上考虑S_3的表达式得

$$
S_3''(x_{i-0})=\frac{2}{h_{i-1}}m_{i-1}+\frac{4}{h_{i-1}}m_i-\frac{6}{h_{i-1}^2}(f_i-f_{i-1}).
$$

$S_3 \in C^2[a,b]$，则

$$S_3''(x_{i+0}) = S_3''(x_{i-0}), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

整理可得

$$\frac{1}{h_{i-1}} m_{i-1} + 2\frac{h_{i-1}+h_i}{h_{i-1}h_i} m_i + \frac{1}{h_i} m_{i+1} = 3\Big(\frac{f[x_{i-1}, x_i]}{h_{i-1}} + \frac{f[x_i, x_{i+1}]}{h_i}\Big).$$

亦即

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i, \; i = 1, 2, \cdots, n-1,$$
$$\mu_i = \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}, \quad \lambda_i = 1 - \mu_i,$$
$$d_i = 3(\mu_i f[x_{i-1}, x_i] + \lambda_i f[x_i, x_{i+1}]).$$

要确定三次样条函数，总共有$n+1$个未知数，但只有$n-1$个方程，要利用边界条件使方程封闭。

对固支边界条件有

$$m_0 = f_0', m_n = f_n'.$$

可以把上面的式子写成矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \mu_1 m_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} m_n \end{pmatrix}$$

这是一个严格对角占优的三对角矩阵，所以解存在唯一，而且计算的时候可以用追赶法求解。

自然边界条件$S_3''(x_0)=0, S_3''(x_n)=0$，其中

$$
\begin{aligned}
S_3''(x_0) &= -\frac{4}{h_0}m_0-\frac{2}{h_0}m_1+\frac{6}{h_0}\frac{f_1-f_0}{h_0}=0,\\
S_3''(x_n) &= \frac{2}{h_{n-1}}m_{n-1}+\frac{4}{h_{n-1}}m_n-\frac{6}{h_{n-1}}\frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}}=0.
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{cases} 2m_0+m_1=d_0,\\ m_{n-1}+2m_n=d_n, \end{cases}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
d_0 &= 3f[x_0,x_1],\\
d_n &= 3f[x_{n-1},x_n]
\end{aligned}
$$

对于自然边界条件，可把上面的式子写成矩阵形式

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & & & \\
\mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\
& & & 1 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n
\end{pmatrix}
$$

这是一个严格对角占优的三对角矩阵，所以解存在唯一，而且计算的时候可以用追赶法求解。

对于周期边界条件有

$$
\begin{aligned}
S_3'(x_0) &= S_3'(x_n) \Longrightarrow m_n = m_0, \\
S_3''(x_0) &= S_3''(x_n) \Longrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{4m_0}{h_0} - \frac{2m_1}{h_0} + \frac{6}{h_0}f[x_0, x_1] = \frac{2m_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{4m_n}{h_{n-1}} - \frac{6}{h_{n-1}}f[x_{n-1}, x_n]
$$

有

$$
\begin{cases}
m_n = m_0, \\
\lambda_n m_1 + \mu_n m_{n-1} + 2m_n = d_n
\end{cases}
$$

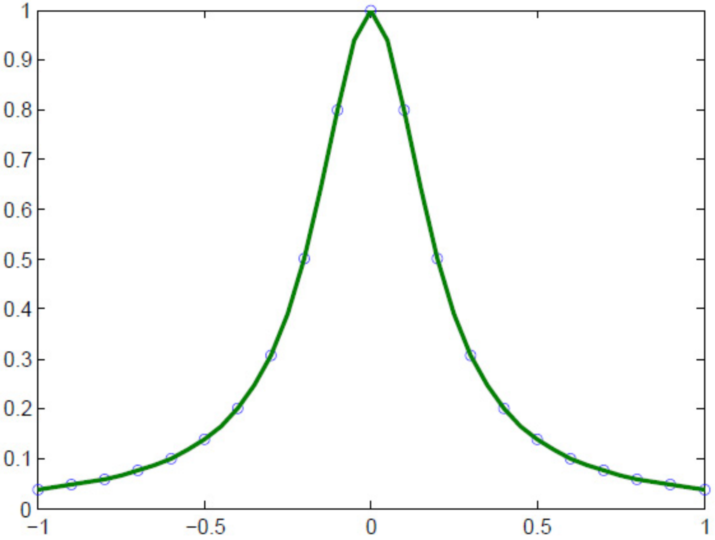
这里

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \mu_n = 1 - \mu_n, \\
d_n &= 3(\lambda_n f[x_0, x_1] + \mu_n f[x_{n-1}, x_n])
\end{aligned}
$$

写成矩阵的形式有

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

这是一个严格对角占优矩阵，所以解存在唯一，而且计算的时候可以用循环三对角方程组的直接求进行求解。


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−1
−0.5
0
0.5
1

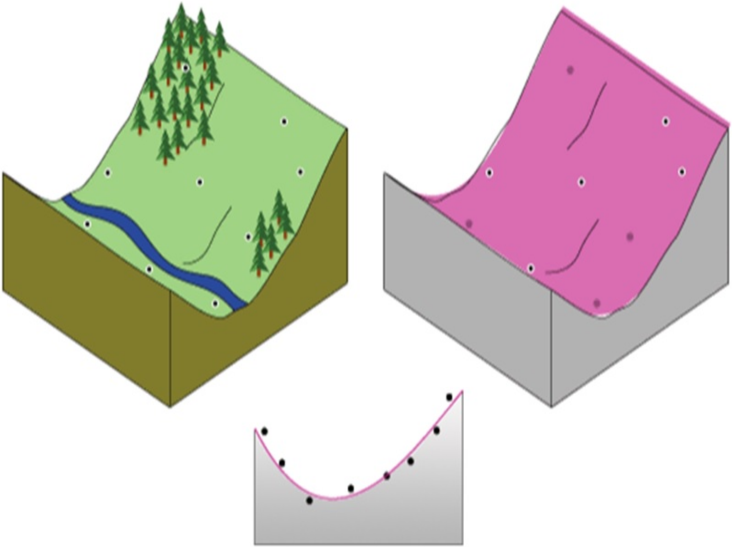
关于三次样条插值函数的截断误差，有下面的定理

定理

设被插函数$f(x) \in C^4[a,b]$，则

$$\|S_3^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \le C_k \|f^{(4)}\|_\infty h^{4-k}, k = 0, 1, 2.$$

其中C_k为常数。



样条函数有鲜明的力学背景，从数学上看它有某种极小性质：

定理

$f(x)$为被插函数，$g(x) \in C^2[a,b]$，满足插值条件$g(x_i) = f(x_i)$，$i = 0, 1 \cdots, n$，则

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [S_3''(x)]^2 dx.$$

其中等号成立当且仅当$g(x) = S_3(x)$。$S_3(x)$是满足自然边界条件的三次样条函数。

注记

从物理意义看：弹性杆的弯曲能

$$E = \int_a^b |\kappa|^2 dx = \int_a^b \frac{(g'')^2}{(1+[g']^2)^3} dx$$

其中κ表示曲率，当$\|g'\| \ll 1$是有

$$\min_g E \approx \min_g \int_a^b (g'')^2 dx$$

从某种意义表明样条函数是弯曲能最低的函数，即自然界本身呈现的就是光滑样条。

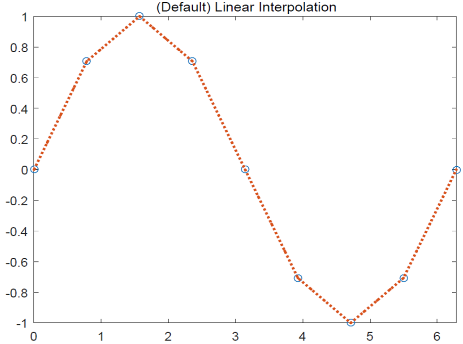
三次样条插值函数的导数和被插函数不一定相等，即便是在被插节点上也可能不相等。一般来说，固支边界条件比自然边界条件给出的样条函数精度要高，因为前者包含有更多 的关于函数本身的信息。

Matlab插值函数–interp1

vq=interp1(x,v,xq) returns interpolated values of a 1-D function at specific query points using linear interpolation.

对sin(x)用默认的分段线性插值：

```
x = 0:pi/4:2*pi;
v = sin(x);
xq = 0:pi/16:2*pi;
figure
vq1 = interp1(x,v,xq);
plot(x,v,'o',xq,vq1,':.');
xlim([0 2*pi]);
title('(Default) Linear Interpolation');
```

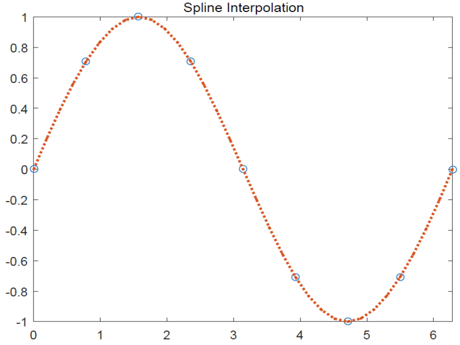


Matlab插值函数–interp1

vq = interp1(x,v,xq,method) *specifies an alternative interpolation method: 'nearest', 'next', 'previous', 'linear','spline','pchip', or 'cubic'. The default method is 'linear'*

对sin(x)用三次样条插值：

```
x = 0:pi/4:2*pi;
v = sin(x);
xq = 0:pi/16:2*pi;
figure
vq2 = interp1(x,v,xq,'spline');
plot(x,v,'o',xq,vq2,':.');
xlim([0 2*pi]);
title('Spline Interpolation');
```

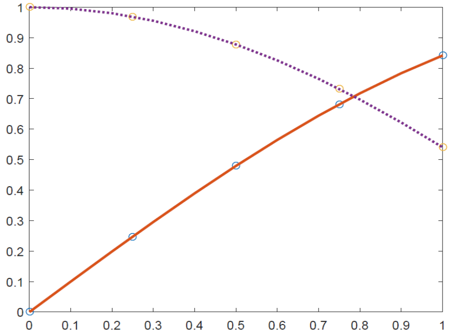


Matlab插值函数–spline

yy = spline(x,Y,xx) *uses a cubic spline interpolation to find yy, the values of the underlying function Y at the values of the interpolant xx. For the interpolation, the independent variable is assumed to be the final dimension of Y with the breakpoints defined by x. The values in x must be distinct.*

用三次样条生成sin和cos的插值：

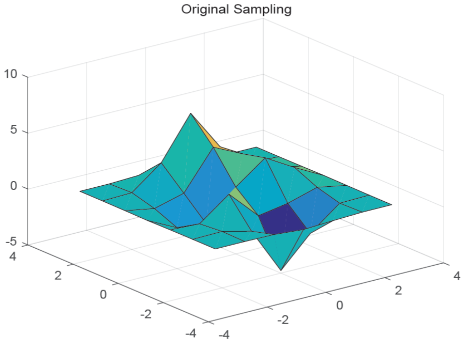
```
x = 0:.25:1;
Y = [sin(x); cos(x)];
xx = 0:.1:1;
YY = spline(x,Y,xx);
plot(x,Y(1,:),'o',xx,YY(1,:),'-')
hold on
plot(x,Y(2,:),'o',xx,YY(2,:),':')
hold off
```



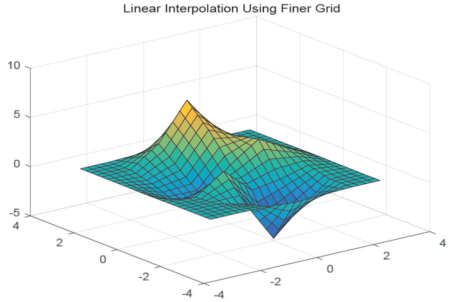
Matlab插值函数–interp2

Vq = interp2(X,Y,V,Xq,Yq) *returns interpolated values of a function of two variables at specific query points using linear interpolation. The results always pass through the original sampling of the function. X and Y contain the coordinates of the sample points. V contains the corresponding function values at each sample point. Xq and Yq contain the coordinates of the query points.*

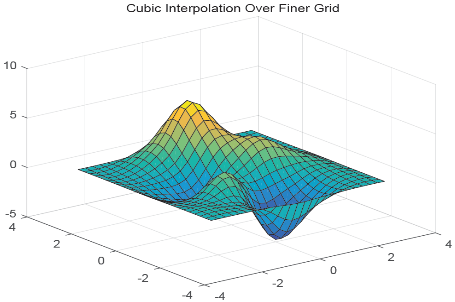
```
[X,Y] = meshgrid(-3:3);
V = peaks(X,Y);
figure
surf(X,Y,V)
title('Original Sampling');
```



```
[Xq,Yq] = meshgrid(-3:0.25:3);
Vq = interp2(X,Y,V,Xq,Yq);
figure
surf(Xq,Yq,Vq);
title('Linear Interpolation Using Finer Grid')
```




```
[Xq,Yq] = meshgrid(-3:0.25:3);
Vq =
interp2(X,Y,V,Xq,Yq,'cubic');
figure
surf(Xq,Yq,Vq);
title('Cubic Interpolation Over Finer Grid');
```



```
load clown
V = single(X(1:124,75:225));
figure
imagesc(V);
colormap gray
axis image
axis off
title('Original Image');
```


```
Vq = interp2(V,5);
figure
imagesc(Vq);
colormap gray
axis image
axis off
title('Linear Interpolation');
```

插值精度与函数的光滑性

插值精度和函数的光滑性息息相关，精度只有在函数有相应的光滑性时才有意义！