PDE 数值解第一次作业：

1. 梯形法第一特征多项式：$\rho(\lambda)=\lambda-1$

仅有一个根 $\lambda=1$，故满足根条件，从而是对初值稳定的.

2. 梯形法第二特征多项式 $\sigma(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}$

特征多项式 $(1-\frac{1}{2}\bar{h})\lambda-(\frac{1}{2}\bar{h}+1)$

只有一个根 $\lambda=\dfrac{2+\bar{h}}{2-\bar{h}}$，当 $Re(\bar{h})<0$ 时总有 $|\lambda|<1$

故梯形法的绝对稳定域是整个左半复平面.

对于改进 Euler 法，若取 $f(t,y)=uy$，则由 $Re(u)<0$：

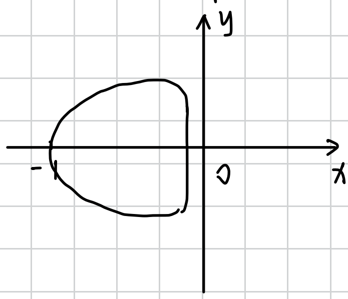
$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(uy_n)+\frac{h}{2}(uy_n+uh\cdot uy_n)=y_n+huy_n+\frac{h^2}{2}u^2y_n$$

故绝对稳定域为 $\{\bar{h}:|1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2}|<1\}$

3. $y_{n+2}=y_{n+1}+\frac{h}{2}(3f_{n+1}-f_n)$ $\quad\rho(\lambda)=\lambda^2-\lambda\quad\sigma(\lambda)=\frac{3}{2}\lambda-\frac{1}{2}$

特征多项式 $\lambda^2-(1+\frac{3}{2}\bar{h})\lambda+\frac{1}{2}\bar{h}$

绝对稳定域在平面中的形状如下图所示：

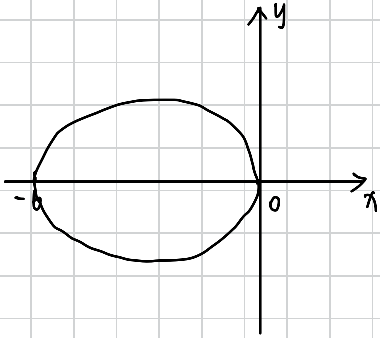


若 $u\in\mathbb{R}$ 情形：则相对稳定域 $(-\frac{2}{3},+\infty)$

$$y_{n+2}=y_{n+1}+\frac{h}{12}(5f_{n+2}+8f_{n+1}-f_n)$$

特征多项式 $(1-\frac{5}{12}\bar{h})\lambda^2-(1+\frac{2}{3}\bar{h})\lambda+\frac{\bar{h}}{12}$

绝对稳定域在复平面的形状如下图所示:



此时相对稳定域在 $u\in\mathbb{R}$ 的情形为 $(-\frac{3}{2},+\infty)$

4\. $\rho(\lambda)=\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}$ $\quad\sigma(\lambda)=\frac{5}{4}\lambda^2-\frac{3}{4}\lambda+1$

特征多项式 $(1-\frac{5}{4}\bar{h})\lambda^2-(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\bar{h})\lambda-(\frac{1}{2}+\bar{h})$

取 $\lambda=\cos\theta+i\sin\theta$，则令特征多项式为0得:

$$(1-\frac{5}{4}\bar{h})(\cos2\theta+i\sin2\theta)-(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\bar{h})(\cos\theta+i\sin\theta)-(\frac{1}{2}+\bar{h})$$

即 $$\bar{h}=\frac{4(\cos2\theta+i\sin2\theta)-2(\cos\theta+i\sin\theta)-2}{5(\cos2\theta+i\sin2\theta)-3(\cos\theta+i\sin\theta)+4}$$

$$=\frac{1}{a}[(4\cos2\theta-2\cos\theta-2)+(4\sin2\theta-2\sin\theta)i]\cdot[(5\cos2\theta-3\cos\theta+4)-(5\sin2\theta-3\sin\theta)i]$$

其中 $a>0$

此时 $\bar{h}$ 的实部与下式同号:

$\mathrm{Re}(\bar{h}) \sim (4\cos 2\theta - 2\cos\theta - 2)(5\cos 2\theta - 3\cos\theta + 4) +$

$(4\sin 2\theta - 2\sin\theta)(5\sin 2\theta - 3\sin\theta)$

$= 18 - 16\cos 2\theta - 2\cos\theta \geq 0$

故由连续性知，$\bar{h}$ 的实部为负时，特征多项式的根 λ 要么恒大于1要么小于1

代入 $\lambda=0$ 知 $\bar{h}=-\frac{1}{2}$，即 $\bar{h}=-\frac{1}{2}$ 时特征多项式有根 $\lambda=0$

故只能是 $\mathrm{Re}(\bar{h})<0 \Rightarrow |\lambda|<1$ 成立，即格式A稳定

在实轴上令 $\bar{h}\to-\infty$，特征多项式的根 λ 既不趋向于0故格式不是L稳定

5. $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 为辛矩阵 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A^t & 0 \\ 0 & D^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -A^tD \\ D^tA & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A^t = D^{-1}$

$\Leftrightarrow A = (D^t)^{-1}$

6. $\begin{pmatrix} A^t & -I_n+A^t \\ -A^t+I_n & A^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & I_n-A \\ A-I_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^t-A & A^t+A-2A^tA-I_n \\ 2A^tA-A^t-A+I_n & A^t-A \end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix} A & I_n-A \\ A-I_n & A \end{pmatrix}$ 是辛矩阵 $\Leftrightarrow A=A^t$ 且 $A=A^2$

即 A 是对称的幂等矩阵