

第二章（偏微分方程及差分方法基本概念）习题

(1) 将下面方程化成标准形式，并写出相应的特征方程：

(a) $au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0$, 设 $a \neq 0$;

(b) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$;

(c) $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$.

(2) 讨论对流方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0,$$

的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 0$$

的截断误差及稳定性。

(3) 上题中的差分格式改为：

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 0,$$

讨论其截断误差及稳定性。

(4) 讨论扩散方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0,$$

的差分格式

$$\frac{3}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} = a \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}$$

的精度及稳定性。