

偏微分方程数值解法

任课教师：黄忠亿

清华大学数学科学系



目录 I

1 常微分方程数值解

2 偏微分方程及其差分方法基础知识

3 双曲型问题的差分方法

- 一阶常系数线性方程
- 一阶常系数线性方程组
- 一阶变系数线性方程 (组)
- 双曲守恒律方程
- 双曲守恒律问题的守恒型差分格式
- TVD (Total Variation Diminishing) 格式
- 一阶双曲守恒律方程组初值问题
- 二阶双曲方程
- 初边值条件的处理
- 高维问题
- 拟线性双曲方程的特征线方法



初值问题

我们先考虑以下对流方程初值问题

$$(3.1) \quad \begin{cases} u_t + au_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

这描述物质随流体输运的过程. a ---对流系数.

可以用特征线法获得解的表达式:

$$dx - a dt = 0 \implies x = at + \xi$$

沿着特征线 $x = x(t) = at + \xi$, 我们有

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = u_t + au_x = 0.$$

这说明, 沿着特征线 $u(x(t), t) = \text{const} = u(\xi, 0) = u_0(\xi)$.

即解可写成 $u(x, t) = u_0(x - at)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$.



迎风格式

由上面解的表达式可知, $u(x, t)$ 的值等于 $u_0(x - at)$, 即点 $\xi = x - at$ 为 $u(x, t)$ 的依赖区域, ξ 这一点的影响区域即为过这一点的特征线.

由此我们可以构造思想最为简单的迎风格式: 即用一阶 (单边) 差商来代替偏导数, 得到

$$(3.2) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad \text{当 } a > 0$$

$$(3.3) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad \text{当 } a < 0$$

其中 τ, h 分别为时间、空间步长. 易见此格式为一阶格式.



迎风格式

下面我们用 Fourier 方法来分析其稳定性. 令 $u_j^n = v^n e^{ij\omega h}$ 代入式 (3.2) 得

$$v^{n+1} = v^n [1 - a\lambda(1 - e^{-i\omega h})], \quad \lambda = \frac{\tau}{h}.$$

即 $G(\omega, \tau) = 1 - a\lambda(1 - e^{-i\omega h}) = 1 - a\lambda(1 - \cos \omega h) - ia\lambda \sin \omega h$.

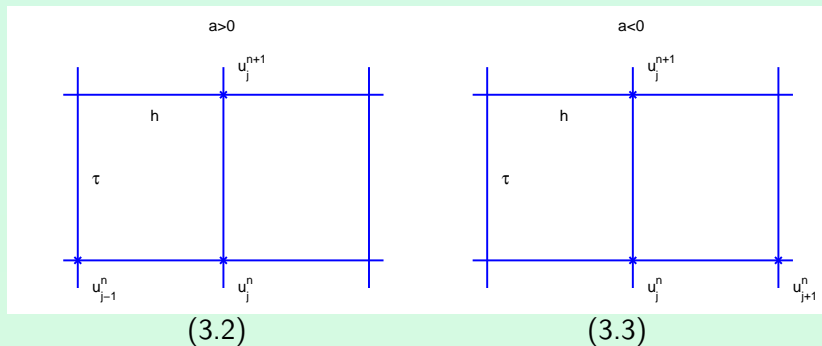
$$\begin{aligned} |G|^2 &= \left(1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2}\right)^2 + \left(2a\lambda \sin \frac{\omega h}{2} \cos \frac{\omega h}{2}\right)^2 \\ &= 1 - 4a\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2} + 4a^2\lambda^2 \sin^4 \frac{\omega h}{2} + 4a^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2} \cos^2 \frac{\omega h}{2} \\ &= 1 - 4a\lambda(1 - a\lambda) \sin^2 \frac{\omega h}{2} \end{aligned}$$

这样当 $0 \leq a\lambda \leq 1$ 时, 有 $|G| \leq 1$. 对 $a < 0$ 情形(3.3)可得类似稳定性条件 $0 \geq a\lambda \geq -1$. 即迎风格式的稳定性条件为 $|a|\lambda \leq 1$.



迎风格式

注意如果用反了格式：即 $a < 0$ 时用(3.2)式, $a > 0$ 时用(3.3)式, 则会是无条件不稳定的!



我们也可以把 (3.2) 和 (3.3) 式写成统一形式

$$(3.4) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \frac{a + |a|}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) - \lambda \frac{a - |a|}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n).$$



Lax-Friedrichs 格式

(Lax 是 Friedrichs 的博士生, 1949 年获得博士学位)

我们在上一章中曾经讨论过对流方程的一种中心差分格式

$$(3.5) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0.$$

上一章中我们已经证明了此格式为无条件不稳定格式.

1954 年, Lax 与 Friedrichs 为了克服上述公式之不稳定性, 提出了(3.5)式的一种修正格式

$$(3.6) \quad \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0.$$

用 Taylor 展开可以得到其截断误差主项为 $\frac{\tau}{2}u_{tt} + \frac{h^2}{2\tau}u_{xx} + a\frac{h^2}{6}u_{xxx}$.

这说明在 $\tau, h \rightarrow 0$ 时, 必须要有 $h^2/\tau \rightarrow 0$ 才能有相容性.



Lax-Friedrichs 格式

我们在计算双曲问题时, 通常取 $\lambda = \tau/h$ 为一个常数, 此时 Lax-Friedrichs 格式即为一阶格式.

我们用 Fourier 分析方法来分析其稳定性. 令 $u_j^n = v^n e^{ij\omega h}$ 代入 (3.6), 得 $v^{n+1} = [\cos \omega h - ia\lambda \sin \omega h]v^n$. 即

$$|G|^2 = \cos^2 \omega h + a^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h = 1 - (1 - a^2 \lambda^2) \sin^2 \omega h \leq 1$$

亦即 $|a|\lambda \leq 1$ 时, 有 $|G| \leq 1$. 即 Lax-Friedrichs 格式与迎风格式稳定性相同. 另一方面, 我们一般取 τ/h 为常数, 所以这两种格式都是一阶格式. 所以说两种格式非常相像. 不过它们还是有些区别的.

不妨设 $a > 0$, 将两种格式改写一下:



Lax-Friedrichs 格式

$$\begin{aligned} \text{迎风:} \quad & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{ah}{2} \cdot \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2}. \\ \text{L-F:} \quad & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{h^2}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2}. \end{aligned}$$

上面两式左端都是对流方程的 $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ 阶逼近, 差别就在右端系数上. 注意到 $\frac{h^2}{2\tau} = \frac{ah}{2} \cdot \frac{h}{a\tau} = \frac{ah}{2} \cdot \frac{1}{a\lambda}$. 如果取 $a\lambda = 1$ 则两式一样. 考虑到稳定性条件为 $a\lambda \leq 1$, 一般取 $a\lambda < 1$, 也就是一般来说 $L-F$ 格式比迎风格式误差更大, 或者说数值粘性更大.



Lax-Wendroff 格式

(Wendroff 是 Lax 的博士生, 1958 年获得博士学位)

前面讨论的迎风格式与 Lax-Friedrichs 格式均为一阶格式. 1960 年, Lax 与 Wendroff 构造了一个二阶两层格式, 该格式在实际计算中很受重视. 此格式的构造用到了方程本身, 将时间偏导数转化成了空间偏导数.

设 $u(x, t)$ 为原初值问题 (3.1) 的光滑解. 将 $u(x_j, t_{n+1})$ 在 (x_j, t_n) 处展开:

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \tau \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^n + \frac{\tau^2}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_j^n + \mathcal{O}(\tau^3).$$

利用方程(3.1), 有 $u_t = -au_x$, $u_{tt} = (-au_x)_t = a^2 u_{xx}$. 代入上式有

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) - a\tau \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n + \frac{a^2 \tau^2}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n + \mathcal{O}(\tau^3).$$



Lax-Wendroff 格式

然后用中心差商代替上述空间偏导数, 有

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_j^n = \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

略去高阶项得到

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a^2\lambda^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

从构造过程可知 Lax-Wendroff 格式的截断误差为 $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$.

类似于之前的办法可以用 Fourier 分析得到其增长矩阵 (因子)

$$\begin{aligned} G(\omega, \tau) &= 1 - 2a^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2} - ia\lambda \sin \omega h. \\ \implies |G|^2 &= 1 - 4a^2\lambda^2 \sin^4 \frac{\omega h}{2} (1 - a^2\lambda^2). \end{aligned}$$

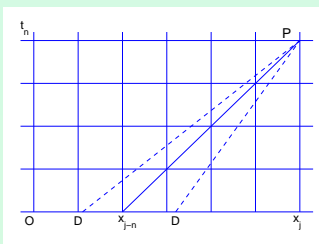
即 $|G| \leq 1 \iff |a|\lambda \leq 1$, 与前面两个格式一样.



Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件

前面我们已经从差分格式解的依赖区域和对流方程初值问题解的依赖区域的关系讨论过差分格式收敛的必要条件. 这通常称为**CFL 条件**.

无妨设 $a > 0$. 以迎风格式为例. 计算 u_j^n 需要 u_{j-1}^n, u_j^n , 依次递推下去, 我们知道需要 u_{j-n}^0, \dots, u_j^0 这 $n+1$ 个值, 如左下图所示.



即需要 $\Delta P x_{j-n} x_j$ 内的点的信息. 或者说, u_j^n 依赖于初值 u_0 在 $[x_{j-n}, x_j]$ 上的网格点的值. 也可以称 $[x_{j-n}, x_j]$ 为差分格式解在 $P(x_j, t_n)$ 点的依赖区域. 而过 P 点的特征线为 $x - at = x_j - at_n$. 设其交 x -轴于 $D = (x_i - an\tau, 0)$.

即对初值问题来说, 解 $u(x, t)$ 在 P 点的依赖区域为 D 点.



Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件

显然, 如果 D 点位于 $[x_{j-n}, x_j]$ 之外, 则迎风格式得到的差分解 u_j^n 与原初值问题的解 $u(x_j, t_n) = u_0(D)$ 没有关系. 这样, 如果我们改变了原初值 $u_0(x)$ 在 D 点的值, 那么初值问题的解 $u(x_j, t_n)$ 随之改变了, 而 u_j^n 并没有变. 这自然不会有 $u_j^n \rightarrow u(x_j, t_n)$.

这说明收敛的一个必要条件是: 初值问题解的依赖区域必须包含在差分解的依赖区域内! 即 $D \in [x_{j-n}, x_j]: (j-n)h \leq jh - an\tau \leq jh \implies a\lambda \leq 1$. 此即迎风格式的 CFL 条件.

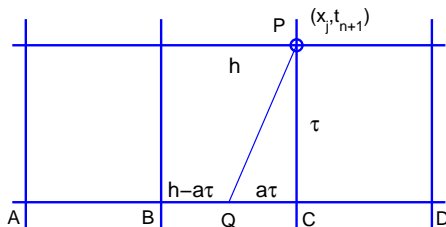
由 Lax 等价定理, 迎风格式相容且 $a\lambda \leq 1$ 时稳定, 故此时确实收敛. 即此时 CFL 条件也是其收敛的充分条件.

但对中心差分格式(3.5), 因为它不稳定, 自然不收敛. 容易得到其 CFL 条件也是 $a\lambda \leq 1$. 因此, **CFL 条件确实只是收敛的必要条件!**



利用特征线来构造差分格式

对于双曲方程, 特征线的概念具有极其重要的作用. 利用双曲方程的解在特征线上不变的事实, 可以构造问题 (3.1) 的各种差分格式. 不妨设 $a > 0$, 过 $P(x_j, t_{n+1})$ 点的特征线为 \overline{PQ} , 易得 $Q = (x_j - a\tau, t_n)$



(如左图所示). 由之前特征线的知识可知 $u(P) = u(Q)$. 下面的问题就是如何求得 $u(Q)$?

利用插值知识可知, 我们可以利用 $u(A), u(B), u(C), u(D)$ 等点的值做插值来得到 $u(Q)$ 的近似值.



利用特征线来构造差分格式

例如用 $u(B), u(C)$ 两点的值做线性插值来近似 $u(Q)$, 即

$$u(P) = u(Q) \approx \frac{a\tau}{h}u(B) + \frac{h - a\tau}{h}u(C) = a\lambda u(B) + (1 - a\lambda)u(C).$$

此即迎风格式: $u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n)$.

如用 $u(B), u(D)$ 两点的值做线性插值来近似 $u(Q)$, 即

$$\begin{aligned} u(P) &= u(Q) \approx \frac{h + a\tau}{2h}u(B) + \frac{h - a\tau}{2h}u(D) \\ &= \frac{1 + a\lambda}{2}u(B) + \frac{1 - a\lambda}{2}u(D). \end{aligned}$$

此即Lax-Friedrichs 格式: $u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{a\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$.

从这里也可以理解为什么通常 L-F 格式误差比迎风格式大.



利用特征线来构造差分格式

如果用 B, C, D 三点的值做二次插值 (用 Newton 插值形式):

$$\begin{aligned}
 u(P) &= u(Q) \approx u(C) + \frac{u(C) - u(B)}{h}(Q - C) + u[C, B, D](Q - C)(Q - B) \\
 &= u(C) + \frac{u(C) - u(B)}{h}(-a\tau) + \frac{\frac{u(D) - u(C)}{h} - \frac{u(C) - u(B)}{h}}{2h}(-a\tau)(h - a\tau) \\
 &= u(C) - a\lambda(u(C) - u(B)) - \frac{a\lambda(1 - a\lambda)}{2}[u(B) - 2u(C) + u(D)].
 \end{aligned}$$

此即 **Lax-Wendroff** 格式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a^2\lambda^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$



利用特征线来构造差分格式

如果用 A, B, C 三点的值做二次插值 (用 Newton 插值形式):

$$\begin{aligned} u(P) &= u(Q) \approx u(C) + \frac{u(C) - u(B)}{h}(Q - C) + u[C, B, A](Q - C)(Q - B) \\ &= u(C) - a\lambda(u(C) - u(B)) - \frac{a\lambda(1 - a\lambda)}{2}[u(C) - 2u(B) + u(A)]. \end{aligned}$$

此格式称为 **Beam-Warming 格式** (二阶迎风, 1976 年提出):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\lambda}{2}(3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) + \frac{a^2\lambda^2}{2}(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n).$$

注: $a < 0$ 时的 Beam-Warming 格式为:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\lambda}{2}(3u_j^n - 4u_{j+1}^n + u_{j+2}^n) + \frac{a^2\lambda^2}{2}(u_j^n - 2u_{j+1}^n + u_{j+2}^n).$$



Beam-Warming 格式的稳定性

用 Fourier 分析方法来分析 B-W 格式的稳定性：易见

$$\begin{aligned}
 G(\omega, \tau) &= 1 - a\lambda(1 - e^{-i\omega h}) - \frac{a\lambda(1 - a\lambda)}{2}[1 - 2e^{-i\omega h} + e^{-2i\omega h}] \\
 \Rightarrow |G|^2 &= 1 - 2a\lambda(1 - \cos \omega h) - a\lambda(1 - a\lambda)[1 - 2\cos \omega h + \cos 2\omega h] \\
 &\quad + 2a^2\lambda^2(1 - \cos \omega h) + a^2\lambda^2(1 - a\lambda)[3 - 4\cos \omega h + \cos 2\omega h] \\
 &\quad + \frac{a^2\lambda^2(1 - a\lambda)^2}{4}[6 - 8\cos \omega h + 2\cos 2\omega h] \\
 &= 1 - 4a\lambda(1 - a\lambda)^2(2 - a\lambda) \sin^4 \frac{\omega h}{2}
 \end{aligned}$$

显然, $|a|\lambda \leq 2$ 时, 有 $|G| \leq 1$. 此时 B-W 格式稳定.

从特征线图可以看出二阶迎风也确实会比其他三种格式稳定性好.



蛙跳格式 (三层格式)

前面考虑的都是两层格式, 下面考虑一种三层格式 (蛙跳格式):

$$(3.7) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0,$$

或写成 $u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - a\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$

这自然需要用别的格式给出 u_j^1 的值. 从计算上看, 该二阶精度格式形式更简单. 再看其稳定性: 令 $v_j^n = u_j^{n-1}$, 及 $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, 有

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \begin{pmatrix} -a\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}_{j+1}^n + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}_j^n + \begin{pmatrix} a\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}_{j-1}^n$$

$$\text{即} \quad G(\omega, \tau) = \begin{pmatrix} -i2a\lambda \sin \omega h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



蛙跳格式 (三层格式)

增长矩阵的特征值为 $\mu_{1,2} = -ia\lambda \sin \omega h \pm \sqrt{1 - a^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h}$.

若 $|a|\lambda \leq 1$, 有 $|\mu_{1,2}| = 1$ (否则会有 $|\mu_{1,2}| > 1$).

当 $|a|\lambda < 1$ 时, $\mu_1 \neq \mu_2$, 故知此时蛙跳格式稳定.

而 $|a|\lambda = 1$ 时, 因 $G^*G \neq GG^*$, 非正规阵, 还需验证一下.

取 $a\lambda = 1$, $\omega h = \frac{\pi}{2}$, 有 $G = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

简单计算有 $G^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$, $G^4 = \begin{pmatrix} 5 & 4i \\ 4i & -3 \end{pmatrix}$, $G^8 = \begin{pmatrix} 9 & 8i \\ 8i & -7 \end{pmatrix}$,

\dots , $G^{2n} = \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 2^n i \\ 2^n i & 1 - 2^n \end{pmatrix}$, 当 $n \geq 2$.

显然有 $\|G^{2n}\| \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$. 即不稳定.



目录 I

1 常微分方程数值解

2 偏微分方程及其差分方法基础知识

3 双曲型问题的差分方法

- 一阶常系数线性方程
- 一阶常系数线性方程组
- 一阶变系数线性方程 (组)
- 双曲守恒律方程
- 双曲守恒律问题的守恒型差分格式
- TVD (Total Variation Diminishing) 格式
- 一阶双曲守恒律方程组初值问题
- 二阶双曲方程
- 初边值条件的处理
- 高维问题
- 拟线性双曲方程的特征线方法



一阶常系数线性方程组

考虑如下常系数线性方程组

$$(3.8) \quad \mathbf{u}_t + A\mathbf{u}_x = 0,$$

$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为常系数矩阵.

根据我们前面的定义, 如果 A 的特征值均为实数, 且 A 可对角化, 即存在可逆矩阵 $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, s.t.

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix},$$

则称 (3.8) 为双曲型方程组. 如果 A 还是对称的, 则称之为对称双曲方程组. 如果 λ_i 为互异实数, 则称 (3.8) 为严格双曲型方程组.

我们先考虑初值问题 $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x)$.



Lax-Friedrichs 格式

前一节的格式可直接推广到方程组情形 (有的略需调整).

考虑如下 Lax-Friedrichs 格式:

$$(3.9) \quad \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_{j-1}^n)}{\tau} + A \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n}{2h} = 0.$$

我们已经知道若取 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 为常数, 这是一个一阶精度格式. 下面看其稳定性分析. 令 $\mathbf{u}_j^n = \mathbf{v}^n e^{ij\omega h}$, 代入 (3.9), 有:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} G(\omega, \tau) &= \frac{1}{2} \left(e^{-i\omega h} + e^{i\omega h} \right) I - \frac{\lambda}{2} \left(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h} \right) A \\ &= \cos \omega h \cdot I - i\lambda \sin \omega h \cdot A \end{aligned}$$

易见 G 的特征值为 $\mu_j(G) = \cos \omega h - i\lambda \sin \omega h \cdot \lambda_j$, $j = 1, \dots, m$ 其中 λ_j 就是 A 的特征值.



Lax-Friedrichs 格式

计算 μ_j 的模:

$$|\mu_j(G)|^2 = \cos^2 \omega h + \lambda^2 \lambda_j^2 \sin^2 \omega h = 1 - (1 - \lambda^2 \lambda_j^2) \sin^2 \omega h.$$

显然当 $\lambda^2 \lambda_j^2 \leq 1$ 时, 有 $|\mu_j(G)| \leq 1 \implies \rho(G) \leq 1$.

另外由 A 可对角化, 我们有

$$S^{-1}GS = \cos \omega h \cdot I - i\lambda \sin \omega h \cdot \Lambda, \text{ 为对角阵.}$$

利用前一章的定理 2.7 可知 Von Neumann 条件是充要条件.

也就是说 Lax-Friedrichs 格式的稳定性条件就是 $\lambda \rho(A) \leq 1$.



Lax-Wendroff 格式

类似于前面标量方程的推导, 我们也可以得到 L-W 格式如下:

$$(3.11) \quad \mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\lambda}{2} A(\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \lambda^2 A^2 (\mathbf{u}_{j+1}^n - 2\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j-1}^n).$$

这是一个时间、空间都为二阶精度的格式.

同样可以得到其增长矩阵为

$$G(\omega, \tau) = I - 2\lambda^2 A^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2} - i\lambda A \sin \omega h.$$

注意 $S^{-1}A^2S = S^{-1}AS \cdot S^{-1}AS = \Lambda^2$, 我们有 G 的特征值为

$$\mu_l(G) = 1 - 2\lambda^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2} \cdot \lambda_l^2 - i\lambda \lambda_l \sin \omega h, \quad l = 1, \dots, m.$$

计算其模为 $|\mu_l|^2 = 1 - 4\lambda^2 \lambda_l^2 \sin^4 \frac{\omega h}{2} (1 - \lambda^2 \lambda_l^2)$.

因此利用 G 可对角化得到 L-W 的稳定性条件就是 $\lambda \rho(A) \leq 1$.



迎风格式

对于方程组形式的迎风格式需要考虑“风向”，因此要重新推导：

由 $\Lambda = S^{-1}AS$, 可以令 $\mathbf{v} = S^{-1}\mathbf{u}$, 由 $\mathbf{u}_t + A\mathbf{u}_x = 0$ 得到

$$\mathbf{v}_t + \Lambda \mathbf{v}_x = 0.$$

这样对 \mathbf{v} 的每个分量 v_l , 可以由 λ_l 的符号来确定风向, 也可参考 (3.4) 式写成统一形式:

$$(3.12) \quad \mathbf{v}_j^{n+1} = \mathbf{v}_j^n - \frac{\lambda}{2} \Lambda (\mathbf{v}_{j+1}^n - \mathbf{v}_{j-1}^n) + \frac{\lambda}{2} |\Lambda| (\mathbf{v}_{j+1}^n - 2\mathbf{v}_j^n + \mathbf{v}_{j-1}^n)$$

写回变量 $\mathbf{u} = S\mathbf{v}$, 即为

$$(3.13) \quad \mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\lambda}{2} A (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n) + \frac{\lambda}{2} |A| (\mathbf{u}_{j+1}^n - 2\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j-1}^n)$$

注意这里 $|A| = S|\Lambda|S^{-1}$. 由 (3.12) 式得其增长矩阵为:



迎风格式

(迎风格式的增长矩阵)

$$G(\omega, \tau) = I - 2\lambda|\Lambda| \sin^2 \frac{\omega h}{2} - i\lambda\Lambda \sin \omega h.$$

其特征值为 $\mu_l(G) = 1 - 2\lambda|\lambda_l| \sin^2 \frac{\omega h}{2} - i\lambda\lambda_l \sin \omega h.$

$$\begin{aligned} \implies |\mu_l|^2 &= \left(1 - 2\lambda|\lambda_l| \sin^2 \frac{\omega h}{2}\right)^2 + 4\lambda^2\lambda_l^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2} \cos^2 \frac{\omega h}{2} \\ &= 1 - 4\lambda|\lambda_l|(1 - \lambda|\lambda_l|) \sin^2 \frac{\omega h}{2}. \end{aligned}$$

因此, 当 $\lambda|\lambda_l| \leq 1$ 即 $\lambda\rho(A) \leq 1$ 时, 有 $|\mu_l| \leq 1.$

又 G 为对角矩阵, 因此 Von Neumann 条件为稳定的充要条件.

其他格式, 如 Beam-Warming 等格式可类似推导.



目录 I

1 常微分方程数值解

2 偏微分方程及其差分方法基础知识

3 双曲型问题的差分方法

- 一阶常系数线性方程
- 一阶常系数线性方程组
- 一阶变系数线性方程 (组)
- 双曲守恒律方程
- 双曲守恒律问题的守恒型差分格式
- TVD (Total Variation Diminishing) 格式
- 一阶双曲守恒律方程组初值问题
- 二阶双曲方程
- 初边值条件的处理
- 高维问题
- 拟线性双曲方程的特征线方法



一阶变系数线性方程

先考虑变系数方程初值问题

$$(3.14) \quad \begin{cases} u_t + a(x, t)u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T] \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

假设 $a(x, t)$ 充分光滑 (例如对 x, t 都为一次可微的).

可与常系数情形类似处理. 其特征线方程为

$$(3.15) \quad \frac{dx}{dt} = a(x, t), \quad x(0) = x_0.$$

显然, 由此得到的特征线 $x = x(t, x_0)$ 会是一条曲线. 但是沿着特征线我们依然有,

$$\frac{du}{dt}(x(t, x_0), t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0.$$

即沿着特征线 $u(x(t), t)$ 仍然是常数.



一阶变系数线性方程: L-F 格式

可将常系数情形的格式推广过来: 如 Lax-Friedrichs 格式 ($\lambda = \frac{\tau}{h}$)

$$\begin{aligned}
 (3.16) \quad u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{2}a_j^n(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\
 &\equiv \frac{1 + \lambda a_j^n}{2}u_{j-1}^n + \frac{1 - \lambda a_j^n}{2}u_{j+1}^n
 \end{aligned}$$

这里 $a_j^n = a(x_j, t_n)$. 简单分析可知, 若取 λ 为常数, 仍为一阶格式.

下面用能量不等式方法来研究其稳定性条件.

在(3.16)式两端同乘以 u_j^{n+1} (并设 $\lambda \max_{j,n} |a_j^n| \leq 1$) 有

$$\begin{aligned}
 (u_j^{n+1})^2 &= \frac{1 + \lambda a_j^n}{2}u_{j-1}^n u_j^{n+1} + \frac{1 - \lambda a_j^n}{2}u_{j+1}^n u_j^{n+1} \\
 &\leq \frac{1 + \lambda a_j^n}{4}[(u_{j-1}^n)^2 + (u_j^{n+1})^2] + \frac{1 - \lambda a_j^n}{4}[(u_{j+1}^n)^2 + (u_j^{n+1})^2]
 \end{aligned}$$



一阶变系数线性方程: L-F 格式

整理可得 $(u_j^{n+1})^2 \leq \frac{1}{2}[(u_{j-1}^n)^2 + (u_{j+1}^n)^2] + \frac{\lambda a_j^n}{2}[(u_{j-1}^n)^2 - (u_{j+1}^n)^2]$.

乘以 h 并对 j 求和, 可得 (记 $\|u^n\|_h^2 = h \sum_j |u_j^n|^2$)

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_h^2 &\leq \|u^n\|_h^2 + \frac{\lambda h}{2} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j^n [(u_{j-1}^n)^2 - (u_{j+1}^n)^2] \\ &= \|u^n\|_h^2 + \frac{\tau}{2} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{a_{j+1}^n - a_{j-1}^n}{h} h (u_j^n)^2 \end{aligned}$$

假设 $a(x, t)$ 关于 x 满足 Lipschitz 条件 $|a(x, t) - a(y, t)| \leq L|x - y|$, 就有 $|a_{j+1}^n - a_{j-1}^n| \leq 2Lh$. 代入上式得到 $\|u^{n+1}\|_h^2 \leq (1 + L\tau) \|u^n\|_h^2$. 这样当 $n\tau \leq T$ 时, 就有 $\|u^n\|_h^2 \leq e^{LT} \|u^0\|_h^2$. 即得格式稳定性.



一阶变系数线性方程: L-F 格式

小结一下, 即:

当 $a(x, t)$ 关于 x 满足 Lipschitz 条件 $|a(x, t) - a(y, t)| \leq L|x - y|$, 且 $\lambda \max_{j,n} |a_j^n| \leq 1$ 时, 就有 Lax-Friedrichs 格式(3.16)是稳定的.

注 3.1 (冻结系数法)

我们也可以用 *Fourier* 分析 + “冻结系数” 法来分析. 即先假设 $a(x, t) \equiv a$, 那么由之前 *Fourier* 分析的结果知 *Lax - Friedrichs* 格式的稳定性条件是 $\lambda|a| \leq 1$. 再换回变系数, 即用 a_j^n 表示, 那么有

$$\lambda \max_{j,n} |a_j^n| \leq 1.$$

便和上面能量不等式方法得到的结果一致.

一阶变系数线性方程：迎风格式

我们也可以构造变系数情形的迎风格式：

$$(3.17) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad \text{当 } a_j^n > 0$$

$$(3.18) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad \text{当 } a_j^n < 0$$

类似于(3.4)和(3.13)我们也可以写成统一形式

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda \frac{a_j^n + |a_j^n|}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) - \lambda \frac{a_j^n - |a_j^n|}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) \\ (3.19) \quad &= u_j^n - \frac{\lambda a_j^n}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda |a_j^n|}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \end{aligned}$$

用“冻结系数法”可以得到其稳定性条件也是 $\max_{j,n} |a_j^n| \lambda \leq 1$.



一阶变系数线性方程：L-W 格式

类似地，我们也可以推导变系数方程的 Lax-Wendroff 格式.

设 $u(x, t)$ 为初值问题 (3.14) 的光滑解. 将 $u(x_j, t_{n+1})$ 在 (x_j, t_n) 处展开:

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \tau [u_t]_j^n + \frac{\tau^2}{2} [u_{tt}]_j^n + \mathcal{O}(\tau^3).$$

利用方程(3.14), 有 $u_t = -au_x$, $u_{tt} = (-au_x)_t = -a_t u_x + a(au_x)_x$. 代入上式有

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) - \tau [au_x]_j^n + \frac{\tau^2}{2} [a(au_x)_x - a_t u_x]_j^n + \mathcal{O}(\tau^3).$$

然后再用中心差商近似空间偏导数可得

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda a_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} a_j^n [a_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta_+^x u_j^n - a_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta_-^x u_j^n]$$

用“冻结系数法”可以得到其稳定性条件也是 $\max_{j,n} |a_j^n| \lambda \leq 1$.



一阶变系数线性方程组

考虑变系数方程组初值问题

$$(3.20) \quad \mathbf{u}_t + A(x, t)\mathbf{u}_x = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x).$$

$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $A = (a_{ij}(x, t)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为光滑矩阵函数.

假设存在 $S = S(x, t)$ 非奇异, s.t.

$$(3.21) \quad S^{-1}AS = \Lambda(x, t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, t) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m(x, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$



一阶变系数方程组: Lax-Friedrichs 格式

易得如下 Lax-Friedrichs 格式:

$$(3.22) \quad \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_{j-1}^n)}{\tau} + A_j^n \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n}{2h} = 0.$$

这里 $A_j^n = A(x_j, t^n)$. 若取 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 为常数, 这是一个一阶精度格式. 用冻结系数法来看其稳定性分析. 令 $\mathbf{u}_j^n = \mathbf{v}^n e^{ij\omega h}$, 代入 (3.22), 有:

$$(3.23) \quad G(\omega, \tau) = \cos \omega h \cdot I - i\lambda \sin \omega h \cdot A_j^n$$

易见 G 的特征值为 $\mu_l(G) = \cos \omega h - i\lambda \sin \omega h \cdot \lambda_l(A_j^n)$, $1 \leq l \leq m$.
也就是说 Lax-Friedrichs 格式的稳定性条件为 $\lambda \max_{j,n} \rho(A_j^n) \leq 1$.



一阶变系数方程组: Lax-Wendroff 格式

类似于推导变系数方程的 Lax-Wendroff 格式, 设 $\mathbf{u}(x, t)$ 为初值问题 (3.20) 的光滑解. 将 $\mathbf{u}(x_j, t_{n+1})$ 在 (x_j, t_n) 处展开:

$$\mathbf{u}(x_j, t_{n+1}) = \mathbf{u}(x_j, t_n) + \tau [\mathbf{u}_t]_j^n + \frac{\tau^2}{2} [\mathbf{u}_{tt}]_j^n + \mathcal{O}(\tau^3).$$

利用方程(3.20), 有 $\mathbf{u}_t = -A\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_{tt} = -A_t\mathbf{u}_x + A(A\mathbf{u}_x)_x$ 代入上式

$$\mathbf{u}(x_j, t_{n+1}) = \mathbf{u}(x_j, t_n) - \tau [A\mathbf{u}_x]_j^n + \frac{\tau^2}{2} [A(A\mathbf{u}_x)_x - A_t\mathbf{u}_x]_j^n + \mathcal{O}(\tau^3).$$

然后再用中心差商近似空间偏导数可得

$$(3.24) \quad \mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\lambda A_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} A_j^n [A_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta_+^x \mathbf{u}_j^n - A_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta_-^x \mathbf{u}_j^n]$$

这是一个时间、空间都为二阶精度的格式.

用“冻结系数法”可以得到其稳定性条件是 $\lambda \max_j \rho(A_j) \leq 1$.



一阶变系数方程组: Richtmyer 格式

用上面 L-W 格式 (3.24) 计算时, 每个网格点上都需要计算多个 $A\mathbf{x}$ 的运算, 当 m 较大时运算量比之前的格式大不少.

为了减少计算量, 下面我们介绍两种 L-W 格式的变形: Richtmyer 格式和 Mac-Cormack 格式 (无妨设 $A = A(x)$).

先将 $\mathbf{u}(x_j, t_{n+1})$ 的 Taylor 展开式改写为

$$\mathbf{u}(x_j, t_{n+1}) = \mathbf{u}(x_j, t_n) + \tau \partial_t \left[\mathbf{u} + \frac{\tau}{2} \mathbf{u}_t \right]_j^n + \mathcal{O}(\tau^3)$$

然后令 $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \frac{\tau}{2} \mathbf{u}_t$. 再利用原方程组 (3.20) $\mathbf{u}_t = -A\mathbf{u}_x$:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \frac{A\tau}{2} \mathbf{u}_x, \quad \partial_t \tilde{\mathbf{u}} = -A\mathbf{u}_x - \frac{A\tau}{2} (-A\mathbf{u}_x)_x = -A\tilde{\mathbf{u}}_x$$

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n + \tau [\partial_t \tilde{\mathbf{u}}]_j^n = \mathbf{u}_j^n - \tau [A\tilde{\mathbf{u}}_x]_j^n + \mathcal{O}(\tau^3)$$



一阶变系数方程组: Richtmyer 格式

这样再用中心差商离散有

$$\tilde{\mathbf{u}}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} - \frac{\lambda}{2} A_{j+\frac{1}{2}}^n (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n)$$

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \tau A_j^n (\tilde{\mathbf{u}}_{j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{\mathbf{u}}_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

此即 Richtmyer 格式.

可以看到每步计算量与之前常系数情形 L-W 的运算量一样.



一阶变系数方程组: Mac-Cormack 格式

也可以将 $\mathbf{u}(x_j, t_{n+1})$ 的 Taylor 展开式改写为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x_j, t_{n+1}) &= \frac{1}{2}\mathbf{u}_j^n + \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \tau\mathbf{u}_t)_j^n + \frac{\tau}{2}\partial_t(\mathbf{u} + \tau\mathbf{u}_t)_j^n + \mathcal{O}(\tau^3) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{u}_j^n + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{u}} + \tau\partial_t\tilde{\mathbf{u}})_j^n + \mathcal{O}(\tau^3)\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \tau\mathbf{u}_t$. 再利用原方程组 (3.20) $\mathbf{u}_t = -A\mathbf{u}_x$ 有:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{u} - A\tau\mathbf{u}_x, \quad \tilde{\mathbf{u}}_t = -A\tilde{\mathbf{u}}_x \\ \mathbf{u}_j^{n+1} &= \frac{1}{2}\mathbf{u}_j^n + \frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{u}} - A\tau\tilde{\mathbf{u}}_x]_j^n + \mathcal{O}(\tau^3)\end{aligned}$$



一阶变系数方程组: Mac-Cormack 格式

再分别用向前和向后差商来离散上述两式中的空间导数有

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_j^n &= \mathbf{u}_j^n - A_j^n \lambda (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n) \\ \mathbf{u}_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_j^n + \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{u}}_j^n - \lambda A_j^n (\tilde{\mathbf{u}}_j - \tilde{\mathbf{u}}_{j-1})]\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_j^n &= \mathbf{u}_j^n - A_j^n \lambda (\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_{j-1}^n) \\ \mathbf{u}_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_j^n + \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{u}}_j^n - \lambda A_j^n (\tilde{\mathbf{u}}_{j+1} - \tilde{\mathbf{u}}_j)]\end{aligned}$$

此即 Mac-Cormack 格式, 它也是二阶精度的.

当 A 为常数矩阵时, 上面三种格式是等价的.



一阶变系数方程组: 迎风格式

我们也可以考虑迎风格式. 利用上面的(3.20)式, 令 $\mathbf{v} = S^{-1}\mathbf{u}$, 即有

$$\mathbf{v}_t + \Lambda(x, t)\mathbf{v}_x = 0.$$

这样, 类似于前面常系数方程组的推导, 可以先写出计算 v_l 的迎风格式, 然后得到类似(3.13)式的迎风公式

$$(3.25) \quad \mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\lambda}{2} A_j^n (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n) + \frac{\lambda}{2} |A_j^n| (\mathbf{u}_{j+1}^n - 2\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j-1}^n)$$

注意这里 $|A_j^n| = S_j^n |\Lambda_j^n| (S_j^n)^{-1}$, 其中 $(S_j^n)^{-1} A_j^n S_j^n = \Lambda_j^n$.

用“冻结系数法”可以得到其稳定性条件是 $\lambda \max_{j,n} \rho(A_j^n) \leq 1$.



目录 I

1 常微分方程数值解

2 偏微分方程及其差分方法基础知识

3 双曲型问题的差分方法

- 一阶常系数线性方程
- 一阶常系数线性方程组
- 一阶变系数线性方程 (组)
- 双曲守恒律方程
 - 双曲守恒律问题的守恒型差分格式
 - TVD (Total Variation Diminishing) 格式
 - 一阶双曲守恒律方程组初值问题
 - 二阶双曲方程
 - 初边值条件的处理
 - 高维问题
 - 拟线性双曲方程的特征线方法



双曲守恒律方程的导出

这里我们考虑一类较特殊的时间发展问题, 具有如下形式

$$(3.26) \quad \mathbf{u}_t(x, t) + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)) = 0,$$

其中 $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为所谓的守恒量 (或称状态变量), 如质量、动量、能量等. 确切的说,

- $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$, u_j 表示第 j 个状态变量的密度函数, 也就是说 $\int_{x_1}^{x_2} u_j(x, t) dx$ 表示 t 时刻在 $[x_1, x_2]$ 区间段上第 j 个状态变量的总量.
- $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 称为通量函数, $f_j(\mathbf{u}(x, t))$ 表示的是第 j 个状态变量在 (x, t) 处的瞬时改变速率.



双曲守恒律方程的导出

对于无界区域上的问题 (3.26), 我们通常假设

$|x| \rightarrow +\infty$ 时, $\mathbf{u}(x, t) \rightarrow \mathbf{c}$ 为常向量.

这样我们将 (3.26) 在 \mathbb{R} 上积分, 有

$$0 = \int_{\mathbb{R}} [\mathbf{u}_t(x, t) + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t))] dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}(x, t) dx + \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)) \Big|_{x=-\infty}^{+\infty}$$

一般来说, 通量函数具有一定的正则性, 因此有 $\mathbf{f}(\mathbf{u}) \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} = 0$.

这样就有

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}(x, t) dx.$$

这表明每一个状态变量的总量不随时间改变 (保持守恒).



双曲守恒律方程的导出

例 3.1 (理想流体流动)

举例来看, 设 $\rho(x, t)$ 表示 t 时刻 x 处的流体线密度, 即

$\int_x^{x+\Delta x} \rho(x, t) dx$ 表示 t 时刻 $[x, x + \Delta x]$ 区间上的流体质量.

显然, $[t, t + \Delta t]$ 时间区间内从两端 “流入的流体” — “流出的流体” 即为这段区间 $[x, x + \Delta x]$ 上流体的改变总量, 也就是说

$$\int_x^{x+\Delta x} [\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)] dx = \int_t^{t+\Delta t} [\rho(x, t)v(x, t) - \rho(x + \Delta x, t)v(x + \Delta x, t)] dt$$

这里 $v(x, t)$ 表示流体速度. 令 $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, 有

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot v(x, t)) = 0.$$

此即所谓的质量守恒方程. 记 $f(\rho) = \rho \cdot v$, 上式回到 (3.26) 形式.

双曲守恒律方程的导出

类似地我们还可以得到动量、能量守恒方程

$$\begin{aligned}(\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= 0, \\ E_t + (v \cdot (E + p))_x &= 0.\end{aligned}$$

其中 p 为压力, E 为能量. \square

二维空间上守恒律方程则为

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x F(\mathbf{u}) + \partial_y G(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}, F, G \in \mathbb{R}^m.$$

此时我们要求 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha F'(\mathbf{u}) + \beta G'(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 均可对角化, 这里 $F'(\mathbf{u}), G'(\mathbf{u})$ 分别为 F, G 的 Jacobi 矩阵.

类似我们可以定义更高维一般情形的双曲守恒律方程.



双曲守恒律方程的导出

例 3.2 (Burgers' 方程)

这是描述冲击波的传播和反射的一个简化模型

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

此即相当于 $f(u) = \frac{u^2}{2}$.

双曲守恒律问题仍然可以用特征线方法来求解. 为简单起见, 仅考虑 $m = 1$ 情形. 令 $a(u) = f'(u)$, 可以将 (3.26) 式改写为

$$(3.27) \quad u_t + a(u)u_x = 0.$$

其特征线方程为 $dx - a(u)dt = 0$, 即 $\frac{dx}{dt} = a(u)$.



双曲守恒律方程---特征线

沿着特征线 $x = x(t)$, 有

$$\frac{du}{dt}(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = u_t + a(u)u_x = 0.$$

即沿着特征线, 仍然有 $u(x(t), t) \equiv \text{const} = u(x(0), 0) = u_0(x(0))$.

这样, 特征线 $x = x(t)$ 的切线斜率 $\frac{dx}{dt} = a(u(x, t))$ 在特征线上每一点都是常数! 这说明特征线是直线! 即特征线方程为

$$x(t) = x(0) + a(u(x, t))t = x(0) + a(u_0(x(0)))t.$$

记 $x(0) = x(t) - a(u_0(x(0)))t = \xi$, 有解 $u(x, t)$ 可写成

$$(3.28) \quad u(x, t) = u_0(x - t \cdot a(u_0(\xi))),$$

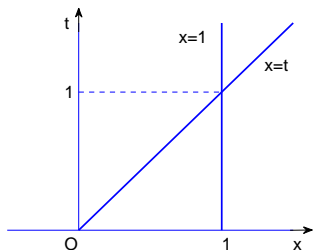
其中 ξ 满足 $\xi = x(t) - a(u_0(\xi))t$, 而 $a(u) = f'(u)$.



双曲守恒律方程---特征线相交

从上面的分析可得, 双曲守恒律方程 (3.26) 过 (x, t) 的特征线就是斜率为 $a(u_0(\xi))$ 的直线. 由于 $u_0(x)$ 不一定为常数, 因而这些特征线不再会是互相平行的直线 (相对于常系数线性问题). 这说明这些特征线 (直线) 可能会相交! 我们称之为爆破 (blow-up)!

例 3.3 (Burgers' 方程)



举例来说, 回到Burgers'方程, $a(u) = u$.

如果取初值 $u_0(x) = 1 - x$. 就会有 $u_0(0) = 1$, $u_0(1) = 0$. 也就是说从 $(0,0), (1,0)$ 出发的两条特征线会相交于 $(1,1)$ (参看左图). 这就给我们带来疑问: $u(1,1)$ 到底该取什么值? 1 还是 0?

双曲守恒律方程---爆破时间

对于一般问题, 我们可以利用特征线计算出最早爆破时间 T_b :

$$\text{令 } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ \xi \end{pmatrix}, \text{ 将 } \begin{cases} u - u_0(\xi) = 0, \\ \xi - [x - a(u_0(\xi))t] = 0, \end{cases} \text{ 记成隐函数 } F(\mathbf{v}, x) = 0.$$

$$\text{那么有 } 0 = \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dx} \implies \frac{d\mathbf{v}}{dx} = - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx} = - \begin{pmatrix} 1 & -u'_0(\xi) \\ 0 & 1 + ta'(u_0(\xi))u'_0(\xi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u'_0(\xi)}{1 + ta'(u_0(\xi))u'_0(\xi)} \\ \frac{1}{1 + ta'(u_0(\xi))u'_0(\xi)} \end{pmatrix}$$

$$\text{所谓爆破之处, 即 } \infty = \frac{du}{dx} = \frac{u'_0(\xi)}{1 + ta'(u_0(\xi))u'_0(\xi)}$$

$$\implies (1 + ta'(u_0(\xi))u'_0(\xi)) \big|_{t=T_b} = 0 \implies T_b = \min_{\xi} \frac{-1}{a'(u_0(\xi))u'_0(\xi)}$$



双曲守恒律方程---弱解

对于 Burgers' 方程, $a(u)=u$, 取 $u_0(x)=1-x$, 立即得到 $T_b = 1$.

这说明 $t = 1$ 时, 已经不能再定义古典解!

这迫使我们引入“弱解”的概念! 也就是说我们需要扩大“解”的定义集, 从更大一些的集合 (即不能仅仅为光滑函数) 中找到“解”.

先引入紧支集的概念:

定义 3.1 (紧支集函数)

称 $\phi(x, t)$ 为紧支集函数, 是指 ϕ 在一个 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的有界集之外恒为零. 即 $\exists M > 0$, s.t.

$$\text{supp } \phi := \overline{\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \phi(x, t) \neq 0\}} \subset [-M, M] \times [-M, M]$$

记 $C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) = \{\varphi(x, t) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \mid \varphi \text{ 为紧支集函数}\}.$



双曲守恒律方程---弱解

$\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, 将 φ 乘在 (3.26) 式 ($u_t(x, t) + \partial_x f(u) = 0$) 两边, 并在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 上积分有:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(u_t + \partial_x f(u))] dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \varphi u \Big|_{t=0}^{+\infty} dx + \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f(u) \Big|_{-\infty}^{+\infty} dt - \int_{\mathbb{R}_+} dt \int_{\mathbb{R}} dx [u \varphi_t + f(u) \varphi_x] \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0) u(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}_+} dt \int_{\mathbb{R}} dx [u \varphi_t + f(u) \varphi_x]
 \end{aligned}$$

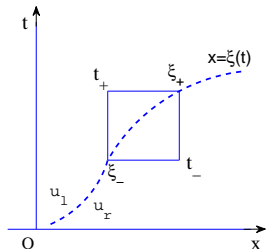
(3.29) 即 $\int_{\mathbb{R}_+} dt \int_{\mathbb{R}} dx [u \varphi_t + f(u) \varphi_x] = - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0) u(x, 0) dx$

定义 3.2 (弱解)

若 $\exists u$ s.t. $\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ 上式成立, 则称 u 为(3.26)的一个**弱解**.

双曲守恒律方程---间断线 (面)

显然, 由上述推导知, 如果 u 是(3.26)的古典解, 那么它必然也是一个弱解. 由弱解的定义可以看出, 显然可以允许弱解有间断. 我们下面利用 (3.26) 式的积分来找出间断面 (线) 需要满足的条件.



设 Γ 为 $x - t$ 平面上的一条光滑曲线, 用 $x = \xi(t)$ 表示. 假设 u 在 Γ 两侧存在跳跃, 即不连续. 令

$$u_l = u(\xi(t)_-, t), \quad u_r = u(\xi(t)_+, t),$$

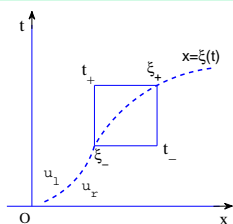
表示 u 在 Γ 两侧的值 (如左图). 取一个

“ $x-t$ ” 平面上的微元 $D = [\xi_-, \xi_+] \times [t_-, t_+]$, 将(3.26)在 D 上积分, 有

$$0 = \iint_D [u_t + f(u)_x] dx dt = \int_{\xi_-}^{\xi_+} [u(t_+) - u(t_-)] dx + \int_{t_-}^{t_+} [f(u(\xi_+)) - f(u(\xi_-))] dt$$



双曲守恒律方程—Rankine-Hugoniot 条件



$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\xi_-}^{\xi_+} [u_l - u_r] dx + \int_{t_-}^{t_+} [f(u_r) - f(u_l)] dt \\
 &= (u_l - u_r) \cdot \Delta \xi + [f(u_r) - f(u_l)] \cdot \Delta t
 \end{aligned}$$

\Rightarrow 间断线传播速度为

$$(3.30) \quad s = \dot{\xi}(t) \equiv \frac{d\xi}{dt} = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} = \frac{[f(u)]_{\Gamma}}{[u]_{\Gamma}}$$

间断线 Γ 上每一点 $(\xi(t), t)$ 都应该满足上面跳跃条件：间断线的传播速度 = 通量函数 $f(u)$ 在间断线两侧的跳跃与 u 的跳跃值之商。

事实上关于弱解的定义和性质我们有以下一个定理：



双曲守恒律方程---弱解定义的等价条件

定理 3.1 (弱解定义的等价条件)

设 $u(x, t)$ 是分片光滑函数, 那么以下三个条件等价:

- ① $u(x, t)$ 在其光滑区域内满足(3.26), 而在它的间断线 $x = \xi(t)$ 上满足跳跃条件 (3.30):
$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} = \frac{[f(u)]_\Gamma}{[u]_\Gamma}.$$

- ② 对于 $t > 0$ 的半平面上与 $u(x, t)$ 的间断线只有有限个交点的任意光滑闭曲线 Γ , 均成立等式 $\oint_\Gamma u dx - f dt = 0$.

- ③ u 是双曲守恒律问题(3.26)的弱解, 即 $\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$,
$$\int_{\mathbb{R}_+} dt \int_{\mathbb{R}} dx [u \varphi_t + f(u) \varphi_x] + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0) u(x, 0) dx = 0.$$



双曲守恒律方程---弱解定义的等价条件

◁ 我们先来证明 $1 \implies 2$: 设 Γ 是 $t > 0$ 的半平面上的任意光滑闭曲线, 如果 $u(x, t)$ 在 Γ 所围的区域 Ω 内连续可微, 那么

$$\oint_{\Gamma} u dx - f dt = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dt = 0,$$

即条件 2 成立. 如果 Γ 所围区域 Ω 仅与 $u(x, t)$ 的一条间断线 $x = \xi(t)$ 相交, 设交点为 $(\xi(t_1), t_1)$ 和 $(\xi(t_2), t_2)$ ($t_1 < t_2$), 假设此时 Ω 被 $x = \xi(t)$ 分成两个子区域 Ω^{\pm} , 记间断线 $x = \xi(t)$ 作为 Ω^{\pm} 的边界线部分为 γ^{\pm} , 那么

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} u dx - f dt &= \left(\int_{\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-} - \int_{\gamma^+ \cup \gamma^-} \right) (u dx - f dt) \\ &= \left(\iint_{\Omega^+} + \iint_{\Omega^-} \right) (u_t + f_x) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \left((u^+ - u^-) \frac{d\xi}{dt} - [f(u^+) - f(u^-)] \right) dt \end{aligned}$$



双曲守恒律方程---弱解定义的等价条件

这样利用间断线的跳跃条件 (3.30) 便知上式右端确实为零. 对于 Γ 与 $u(x, t)$ 的有限条间断线相交的情形可以类似证明. 上面证明过程也可逆即有 $2 \implies 1$.

下面再证明 $1 \implies 3$: 任取 $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, 设其支集为 D . 如果 $u(x, t)$ 在 D 上可微, 那么有 $\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} dt \int_{\mathbb{R}} dx [u\varphi_t + f(u)\varphi_x] + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0)u(x, 0)dx \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial(\varphi u)}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} - \varphi(u_t + f_x) \right) dxdt + \int_{\mathbb{R}} (\varphi u)|_{t=0} dx \\ &= - \int_{\partial D \setminus \{t=0\}} \varphi(udx - fdt) - \iint_D \varphi(u_t + f_x) dxdt = 0 \end{aligned}$$

这里用到了 φ 为紧支集函数及 $u(x, t)$ 在 D 上为古典解.



双曲守恒律方程---弱解定义的等价条件

如果 D 与 $u(x, t)$ 的一条间断线 $x = \xi(t)$ 相交, 交点为 $(\xi(t_1), t_1)$ 和 $(\xi(t_2), t_2)$, 设此时 D 被 $x = \xi(t)$ 分成两个子区域 D^\pm , 记间断线 $x = \xi(t)$ 作为 D^\pm 的边界线部分为 γ^\pm , 那么

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} dt \int_{\mathbb{R}} dx [u \varphi_t + f(u) \varphi_x] + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0) u(x, 0) dx \\ &= - \int_{\partial D^+ \cup \partial D^- \setminus \{t=0\}} \varphi(udx - fdt) = - \int_{\gamma^+ \cup \gamma^-} \varphi(udx - fdt) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \varphi(\xi(t), t) \left((u^+ - u^-) \frac{d\xi}{dt} - [f(u^+) - f(u^-)] \right) dt = 0 \end{aligned}$$

前面我们已经证明过 $3 \implies 1$, 因此定理证明完毕. \triangleright

由于弱解推广了古典解的概念, 允许有间断存在, 这也会导致弱解可能不再唯一! 我们下面先从最简单的初值问题来看该问题.



双曲守恒律方程—Riemann 问题

考虑守恒律方程初值问题, 其中初值条件取成以下形式

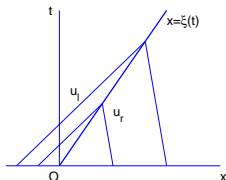
$$(3.31) \quad u|_{t=0} = u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0; \\ u_R, & x > 0. \end{cases}$$

我们称这样的问题为 **Riemann 问题**.

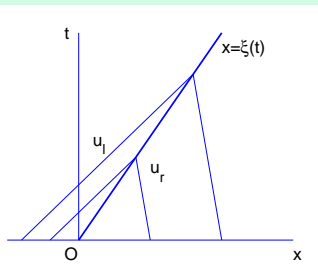
仍以 Burgers' 方程为例, 即考虑 $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$ 及以上初值.

Case 1. $u_L > u_R$:

这种情形画出特征线就可知它们会相交于一条间断线 $x = \xi(t)$. 根据跳跃条件可以计算出 $s = \dot{\xi}(t) = \frac{[f(u)]}{[u]} = (\frac{u_R^2 - u_L^2}{2}) / (u_R - u_L) = \frac{u_R + u_L}{2}$. 即 $x = \xi(t)$ 为一条直线 $x = st$.



双曲守恒律方程—Riemann 问题



(Case 1. $u_L > u_R$.)

这样我们可以写出其弱解为

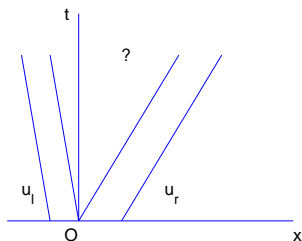
$$(3.32) \quad u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < st; \\ u_R, & x > st. \end{cases}$$

我们称之为“激波 (shock wave)”。

容易验证上面给的解满足弱解的定义(3.29).



双曲守恒律方程—Riemann 问题



Case 2. $u_L < u_R$:

这种情形画出特征线如左图, 可以看到中间有个区域未知. 也就是说那部分区域中的点没有一条特征线会通过它们.

这时我们又可以分成三种情况:

1) 假设仍然有间断, 这样通过跳跃条件仍然有 $s = \frac{u_R + u_L}{2}$.
即解可以写成

$$(3.33) \quad u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < st; \\ u_R, & x > st. \end{cases}$$



双曲守恒律方程—Riemann 问题

2) 对于一般问题, 我们求其自相似解.

$\forall c > 0$, 做自变量变换 $y = cx$, $\tau = ct$, 令 $w(y, \tau) = u(x, t)$,
有 $w_\tau + f(w)_y = 0$.

即自变量做同样伸缩变换后, 方程的形式跟之前一样.

这表明解具有自相似性: $u(x, t) = v(\frac{x}{t}) \equiv v(\eta)$, 这里 $\eta = \frac{x}{t}$.
将这个形式代入方程有

$$\begin{aligned} 0 &= u_t + f(u)_x = u_t + f'(u)u_x = v'(\eta) \frac{d\eta}{dt} + f'(v)v'(\eta) \frac{d\eta}{dx} \\ &= v'(\eta) \left[-\frac{x}{t^2} + f'(v) \frac{1}{t} \right] \implies v'(\eta)[f'(v) - \eta] = 0 \end{aligned}$$

$$v'(\eta) = 0 \implies v(\eta) \equiv C;$$

$$f'(v(\eta)) - \eta = 0 \implies v(\eta) = (f')^{-1}(\eta) \quad (\text{反函数}).$$



双曲守恒律方程—Riemann 问题

这样, 对于 Burgers' 方程, 因为 $f(u) = \frac{u^2}{2}$, $f'(u) = u$.

因此解为 $u\left(\frac{x}{t}\right) = \text{const}$ 或者 $u\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}$.

即解可以写成

$$(3.34) \quad u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < u_L t; \\ u_R, & x > u_R t; \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) \equiv \frac{x}{t}, & u_L t \leq x \leq u_R t. \end{cases}$$

这种情形的解我们称之为“稀疏波 (rarefaction wave)”



双曲守恒律方程—Riemann 问题

3) 我们也可以把弱解取成上述两种解的任意组合形式.

即任取 $u_m \in (u_L, u_R)$, 令 $s_m = \frac{u_L + u_m}{2}$, 定义

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < s_m t; \\ u_m, & s_m t < x < u_m t; \\ \frac{x}{t}, & u_m t \leq x \leq u_R t; \\ u_R, & x > u_R t. \end{cases}$$

可以直接验证上述形式的函数确实为 Riemann 问题的弱解.

由此看出, 即便是 Riemann 问题这么简单的情形, (3.26) 的弱解也可能有无穷多个. 我们知道其中应该只有一个“**物理解**”, 其他都是非物理解. 问题是如何找出唯一的物理解呢?



双曲守恒律方程---熵条件与物理解

从物理上看, 流体流动是受其粘性的影响的. 换句话说, 没有纯粹的对流问题. 所谓对流问题就是对流占优的对流扩散问题的简化, 忽略了慢扩散效应的结果. 所以实际上我们应该“加回”粘性项, 然后再考虑让粘性 $\rightarrow 0$, 得到其极限解. 这就应该是守恒律问题的“物理解”.

$$u_t + f(u)_x = 0 \longrightarrow u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon$$

$u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$ 为守恒律问题之物理解.

但是上述过程从计算上不易实现. 我们期望有更易于检验的条件 (“熵条件”) 来帮助我们判别, 所得到的弱解是否是物理解.



双曲守恒律方程---熵条件与物理解

从前面激波产生的特征线图中可以看出, 应该有特征线‘**走向**’ 激波传播线 $x = \xi(t)$, 即间断线.

如果是特征线“**远离**” 间断线情形, 加上小扰动后可以发现此时是不稳定的. 若加入粘性项可以看到, 此时应该对应为“**稀疏波**”.

这样我们可以得到如下形式的熵条件:

熵条件 (I): 由跳跃条件 (Rankine-Hugoniot 条件) (3.30) 给出的间断线传播速度如果满足

$$(3.35) \quad f'(u_L) > s > f'(u_R),$$

则称此间断满足熵条件.



双曲守恒律方程---熵条件与物理解

注意到, $f'(u) = a(u)$ 就是特征速度 (特征线 $x = x(t)$ 的斜率). 对于凸函数 f (即 $f'' > 0$), (3.30) 定义的激波速度 $s = \frac{[f(u)]}{[u]}$ 显然介于 $f'(u_L)$ 与 $f'(u_R)$ 之间. 因此 (3.35) 式的要求简化为只需 $f'(u_L) > f'(u_R)$. 在凸函数情形, 即为 $u_L > u_R$.

我们来看 $f(u)$ 是凸函数意味着什么:

定义 3.3

设 $\lambda_i(\mathbf{u}), \mathbf{r}_i(\mathbf{u}), (i = 1, \dots, m)$ 分别为 *Jacobi* 矩阵 $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$ 的特征值和特征向量.

如果 $\nabla \lambda_i(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_i(\mathbf{u}) = 0, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, 则称 λ_i 特征场是线性退化的.

如果 $\nabla \lambda_i(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_i(\mathbf{u}) \neq 0, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, 则称 λ_i 特征场是真正非线性的.

双曲守恒律方程---熵条件与物理解

注 3.2

$m = 1$ 情形, 上面定义中 “真正非线性” 情形就对应了 f 为凸函数. 因为此时, $\lambda(u) = f'(u)$, $r(u) = 1$, 该条件成为

$$\frac{d\lambda(u)}{du} \cdot r(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u) \neq 0.$$

所以我们可以不妨设 $f''(u) > 0$. 因为若 $f''(u) < 0$, 我们可以将 (3.26) 改写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(-f(u))}{\partial(-x)} = 0$$

这时有 $-f''(u) > 0$.

对 Burgers' 方程, $\lambda(u) = u$, 因而是真正非线性的.



双曲守恒律方程---熵条件与物理解

对于非凸通量函数 $f(u)$ 也适用的熵条件为 (Oleinik 1959)

熵条件 (II): 称 $u(x, t)$ 为满足熵条件的解, 如果对任意间断都有

$$(3.36) \quad \frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R}, \quad \forall u \in [u_L, u_R] (\text{或} [u_R, u_L]).$$

我们可以看到, f 为凸函数时, (3.36) 式即简化为 (3.35) 式.

Oleinik 还证明了, 满足上述熵条件 (II) 的弱解 $u(x, t)$ 在函数类 \mathfrak{U} 中是唯一的, 这里函数类

$$\mathfrak{U} = \left\{ \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \varphi \text{ 在除了有限条间断线之外连续可微,} \\ \min(u_L^j, u_R^j) \leq \varphi(x, t) \leq \max(u_L^j, u_R^j) \end{array} \right. \right\}$$



双曲守恒律方程---熵条件与物理解

Oleinik 还给出了另一种熵条件形式 (基于 $u(x, t)$ 是增函数时, 特征线会相互远离, 因而是稀疏波而不是激波)

熵条件 (III): 称 $u(x, t)$ 为满足熵条件的解 (熵解), 如果存在常数 $E > 0$ s.t. $\forall \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, t > 0$

$$(3.37) \quad \frac{u(x + \delta, t) - u(x, t)}{\delta} < \frac{E}{t}.$$

对于如果有间断情形 (假设左侧为 u_L , 右侧为 u_R), 由上式必有 $u_R - u_L \leq 0$. 因此可见此式与(3.35)式是相容的.

(3.37)式看起来比前面更复杂, 但它可用来帮助构造好的离散格式. 举例来说, 我们常面临如何判定该格式得到的离散解在步长 $h, \tau \rightarrow 0$ 时会收敛到真解?



双曲守恒律方程---熵条件与物理解

由于离散格式只能得到解在格点上的离散值. 这样, 遇到诸如 $u_j < u_{j+1}$ 时, 我们会问, 这到底是不满足熵条件的伪间断呢? 还是只是光滑解的近似?

现在利用(3.37)我们就可以回答了. 如果加密网格之后, 此函数值的差是 $\mathcal{O}(\Delta x)$ 量级的, 则可以认为这是对解在光滑处的近似, 而不是跳跃.

因为我们可将(3.37)中的 δ 取成 Δx , 即有

$$u_{j+1}(t) - u_j(t) < \frac{E}{t} \Delta x,$$

说明若 $u_{j+1} > u_j$, 必然有 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $u_{j+1}(t) - u_j(t) \rightarrow 0$.

更一般的熵条件我们通过熵函数和熵通量来定义.



双曲守恒律方程---熵条件与物理解

定义 3.4

称**凸函数** $\varphi(u)$ (即 $\varphi'' \geq 0$) 为所谓的**熵函数**, 是指存在**熵通量函数** $\psi(u)$, 满足 $\varphi(u)_t + \psi(u)_x = 0$.

当 u 光滑时, 我们有

$$\varphi'(u)u_t + \psi'(u)u_x = 0.$$

由方程 $u_t + f(u)_x = 0 \implies$

$$(3.38) \quad \psi'(u) = \varphi'(u)f'(u).$$

u 光滑时, 易见 $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) dx = \int_{\mathbb{R}} (-\psi(u)_x) dx = \psi(u) \Big|_{x=-\infty}^{-\infty} = 0$. 即总熵 $\int_{\mathbb{R}} \varphi(u) dx$ 是不变的. 但是 u 不光滑时就未必成立了.



双曲守恒律方程---熵条件与物理解

我们可以加上粘性项再取极限来看.

$$(3.39) \quad u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon.$$

由于 (3.39) 是抛物问题, 其解总是光滑的. 乘以 $\varphi'(u^\varepsilon)$ 得

$$\begin{aligned} \varphi'(u^\varepsilon)u_t^\varepsilon + \varphi'(u^\varepsilon)f(u^\varepsilon)_x &= \varepsilon \varphi'(u^\varepsilon)u_{xx}^\varepsilon = \varepsilon(\varphi'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon)_x - \varepsilon \varphi''(u^\varepsilon)u_x^2 \\ \implies \varphi(u^\varepsilon)_t + \psi(u^\varepsilon)_x &= \varepsilon \left[\frac{d}{dx} \varphi(u^\varepsilon) \right]_x - \varepsilon \varphi''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

在任意一个小区域 $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ 上积分上式得到

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} [\varphi(u^\varepsilon)_t + \psi(u^\varepsilon)_x] dt &= \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \varphi_x(u^\varepsilon) \Big|_{x_1}^{x_2} dt - \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} \varphi''(u^\varepsilon)(u_x^\varepsilon)^2 dt \\ (3.40) \quad (\text{由 } \varphi'' \geq 0) &\leq \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \varphi_x(u^\varepsilon) \Big|_{x_1}^{x_2} dt. \end{aligned}$$



双曲守恒律方程---熵条件与物理解

由于我们假设 u 至多有第一类间断点 (即存在单边极限), 利用 φ 的光滑性我们可得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \varphi_x(u^\varepsilon) \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0.$$

注意我们未必有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} \varphi''(u^\varepsilon) (u_x^\varepsilon)^2 dt = 0.$$

这样我们得到如下第四个形式的熵条件:

熵条件 (IV): 称 $u(x, t)$ 满足熵条件, 如果对任何凸熵函数 $\varphi(u)$ 以及相应的熵通量 $\psi(u)$ (它们满足(3.38)式), 在积分意义下 (即(3.40)式意义下) 有 $\varphi(u)_t + \psi(u)_x \leq 0$ 成立.



双曲守恒律方程---熵条件与物理解

例 3.4 (Burgers' 方程 $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$.)

即 $f(u) = \frac{u^2}{2}$. 考虑其 Riemann 问题的解.

显然可以验证激波解和稀疏波解形式都满足熵条件. 而 $u_L < u_R$ 时前面给出的解 1)、3) 不满足熵条件(IV).

例如取 $\varphi(u) = u^2$, 即由 (3.38) 式 $\psi'(u) = 2u^2 \implies \psi(u) = \frac{2}{3}u^3$.

这样熵条件(IV)为 $(u^2)_t + (\frac{2}{3}u^3)_x \leq 0$.

显然如果 u 光滑, 将Burgers方程乘以 $2u$ 即得

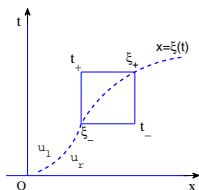
$$(3.41) \quad (u^2)_t + (\frac{2}{3}u^3)_x = 0.$$

但当 $u(x, t)$ 存在间断时, 在任取一个跨过间断的小微元 $[\xi_-, \xi_+] \times [t_-, t_+]$ 上积分 $(u^2)_t + (\frac{2}{3}u^3)_x$, 可得

双曲守恒律方程---熵条件与物理解

$$\begin{aligned}
 & \int_{\xi_-}^{\xi_+} u^2(x, t) \Big|_{t_-}^{t_+} dx + \int_{t_-}^{t_+} \frac{2}{3} u^3(x, t) \Big|_{\xi_-}^{\xi_+} dt \\
 &= \int_{\xi_-}^{\xi_+} [u_L^2 - u_R^2 + \mathcal{O}(\Delta t)] dx + \int_{t_-}^{t_+} \frac{2}{3} [u_R^3 - u_L^3 + \mathcal{O}(\Delta t)] dt \\
 &= s \Delta t [u_L^2 - u_R^2] + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \frac{2}{3} \Delta t [u_R^3 - u_L^3] + \mathcal{O}(\Delta t^2)
 \end{aligned}$$

其中 $s = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{u_L + u_R}{2}$, 令 $\tilde{s} = \frac{[\frac{2}{3}u^3]}{[u^2]} = \frac{2}{3} \frac{[u_R^3 - u_L^3]}{u_R^2 - u_L^2}$ 为 (3.41) 的间断传播速度.



则上式 $= \Delta t (u_L^2 - u_R^2) (s - \tilde{s}) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$

$$= -\frac{1}{6} (u_L - u_R)^3 \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

当 Δt 充分小时, 上式说明仅在 $u_L > u_R$ 时才能满足熵条件 (IV). 这与前面的分析一致.



目录 I

1 常微分方程数值解

2 偏微分方程及其差分方法基础知识

3 双曲型问题的差分方法

- 一阶常系数线性方程
- 一阶常系数线性方程组
- 一阶变系数线性方程 (组)
- 双曲守恒律方程
- 双曲守恒律问题的守恒型差分格式
- TVD (Total Variation Diminishing) 格式
- 一阶双曲守恒律方程组初值问题
- 二阶双曲方程
- 初边值条件的处理
- 高维问题
- 拟线性双曲方程的特征线方法



守恒型差分格式

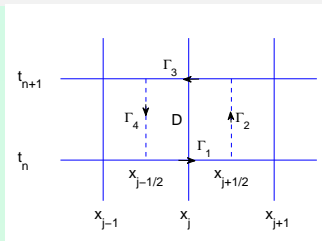
我们考虑单个守恒律方程初值问题

$$(3.42) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \end{cases}$$

在 $x-t$ 平面上取一小区域

$$D = \left\{ (x, t) \left| \begin{array}{l} x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}, \\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \end{array} \right. \right\}. \text{ 将方程在 } D \text{ 上积分得到}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D [u_t + f(u)_x] dx dt \stackrel{\text{Green公式}}{=} \oint_{\partial D} [f(u) dt - u dx] \\ &= \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} f(u) dt - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} u dx \end{aligned}$$



守恒型差分格式

如果采用数值积分近似:

$$\int_{\Gamma_2} f(u) dt \quad \text{左矩公式} \quad \tau f\left(u_{j+\frac{1}{2}}^n\right) \approx \frac{\tau}{2} [f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)]$$

$$\int_{\Gamma_4} f(u) dt \quad \text{左矩公式} \quad -\tau f\left(u_{j-\frac{1}{2}}^n\right) \approx -\frac{\tau}{2} [f(u_j^n) + f(u_{j-1}^n)]$$

$$\int_{\Gamma_1} u dx \quad \text{梯形公式} \quad \frac{h}{2} [u_{j-\frac{1}{2}}^n + u_{j+\frac{1}{2}}^n] \approx \frac{h}{2} [u_{j-1}^n + u_{j+1}^n]$$

$$\int_{\Gamma_3} u dx \quad \text{中点公式} \quad -h u_j^{n+1}$$

代入上式, 再同除以 τh 得到 (Lax-Friedrichs)

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}[u_{j-1}^n + u_{j+1}^n]}{\tau} + \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{2h} = 0.$$



守恒型差分格式

对于上面 Lax-Friedrichs 格式, 通常我们取 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 为常数, 则其为一阶格式.

再来看其稳定性:

若把 $f'(u) = a(u)$ 看成常数, 用冻结系数法可得稳定性条件为:

$$|a(u)|\lambda \leq 1. \text{ 再写回变系数情形即 } \max_{j,n} |a(u_j^n)|\lambda \leq 1.$$

通常会取 $\max_{j,n} |a(u_j^n)|\lambda \leq 1 - \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$ 为一个小数.



守恒型差分格式

一般而言, 记 $\int_{\Gamma_2} f(u)dt = \tau g_{j+\frac{1}{2}}^n$, $\int_{\Gamma_4} f(u)dt = -\tau g_{j-\frac{1}{2}}^n$,

并令 $U_j^n = \frac{1}{h} \int_{\Gamma_1} u dx$, $U_j^{n+1} = -\frac{1}{h} \int_{\Gamma_3} u dx$, 得

$$(3.43) \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right).$$

根据假设, $|x| \rightarrow +\infty$ 时, $u(x, t) \rightarrow \text{const}$, 即 $0 = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$.

而对于上式 (3.43), 易见

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} U_j^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} U_j^n - \lambda \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) = \sum_j U_j^n.$$

即此类型格式(3.43)保持了守恒律.



守恒型差分格式

定义 3.5 (守恒型差分格式)

对于差分格式 (3.43), 若有 $l \in \mathbb{N}$ s.t.

$$(3.44) \quad g_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_{j-l+1}^n, u_{j-l+2}^n, \dots, u_{j+l}^n) \quad \text{——称为数值通量}$$

则称 (3.43) 为守恒型差分格式.

若 $\forall \omega \in \mathbb{R}, g(\omega, \dots, \omega) \equiv f(\omega)$, 则称 (3.43) 与 (3.42) 是相容的.

例如上面得到的 Lax-Friedrichs 格式, 有

$$g_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)] - \frac{1}{2\lambda} (u_{j+1}^n - u_j^n) \equiv g(u_j^n, u_{j+1}^n).$$

显然有 $g(\omega, \omega) = f(\omega)$. 更一般地, 我们可以取 $0 \leq \theta \leq 1$, 令

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left[\theta \left(g_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - g_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) + (1 - \theta) \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right]$$

$\theta = 0$ 时为显式格式, $\theta > 0$ 时为隐式格式.



守恒型差分格式

将网格函数 u_j^n 延拓到整个上半平面:

$$u_h(x, t) = u_j^n, \quad \text{对 } (x, t) \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}) \times [t_n, t_{n+1}).$$

我们有以下 Lax-Wendroff 定理:

定理 3.2 (Lax-Wendroff 定理)

设守恒型差分格式(3.43)-(3.44)与(3.42)相容, 且满足初值条件

$$u_h(x, 0) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_0(y) dy, \quad x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}),$$

的离散解 $u_h(x, t)$ 在 $\tau, h \rightarrow 0$ 时几乎处处有界, 并收敛到函数 u , 则 $u(x, t)$ 是初值问题 (3.42) 的一个弱解.



Lax-Wendroff 定理

◁ 将差分格式(3.43)-(3.44)改写成

$$\frac{1}{\tau} \Delta_+^t u_h(x, t) + \frac{1}{h} \delta_x g_h(x, t) = 0$$

其中 $g_h(x + \frac{h}{2}, t) = g(u_h(x - (l-1)h, t), \dots, u_h(x + lh))$. 任取试验函数 $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, T])$ 乘以上面方程并对 x, t 积分

$$0 = \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t) \left[\frac{u_h(x, t+\tau) - u_h(x, t)}{\tau} + \frac{g_h(x + \frac{h}{2}, t) - g_h(x - \frac{h}{2}, t)}{h} \right] dx.$$

做变量替换 ($t + \tau \rightarrow t$, $x \pm \frac{h}{2} \rightarrow x$) 可以将上式改写为

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tau}^T dt \int_{\mathbb{R}} u_h(x, t) \frac{\varphi(x, t-\tau) - \varphi(x, t)}{\tau} dx - \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t) u_h(x, t) dx \\ &\quad - \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}} g_h(x, t) \frac{\varphi(x + \frac{h}{2}, t) - \varphi(x - \frac{h}{2}, t)}{h} dx \end{aligned}$$



Lax-Wendroff 定理

当 $\tau, h \rightarrow 0$ 时, $u_h(x, t)$ 几乎处处有界并收敛到函数 $u(x, t)$, 而由相容性有, $g_h(x, t)$ 的值收敛到 $g(u, u, \dots, u) = f(u)$, 所以上式在此极限下变成

$$0 = \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0) u_0(x) dx.$$

即说明了 $u(x, t)$ 是初值问题 (3.42) 的一个弱解. \triangleright

当然此定理没有解决守恒型格式**何时收敛**? 以及何时收敛到**物理解**(因为我们知道弱解不唯一)? 也就是说如何加上熵条件 (或者说如何将前面的熵条件离散化)? 我们稍后讨论.

我们先来看一些守恒型差分格式的例子.



守恒型差分格式-例举

例 3.5 (迎风格式)

不妨设 $a(u) = f'(u) \geq 0$, 则可以构造迎风格式

$$u_j^{n+1} - u_j^n - \lambda[f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)].$$

这相当于取 $g_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_j^n)$. 显然它是相容的守恒型差分格式. 其稳定性条件也为 $\lambda \max |a_j^n| \leq 1$.

例 3.6 (Engquist-Osher 格式)

$$\text{令 } \chi(u) = \begin{cases} 1, & \text{若 } f'(u) > 0, \\ 0, & \text{反之.} \end{cases} \quad \text{并定义}$$

$$\left. \begin{aligned} f_+(u) &= \int_0^u \chi(s) f'(s) ds + f(0), \\ f_-(u) &= \int_0^u (1 - \chi(s)) f'(s) ds, \end{aligned} \right\} f_+(u) + f_-(u) = f(u)$$

守恒型差分格式-例举

Engquist-Osher 格式定义为

$$\begin{aligned}u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda [\Delta_+ f_-(u_j^n) + \Delta_- f_+(u_j^n)] \\&= u_j^n - \lambda [f_-(u_{j+1}^n) - f_-(u_j^n) + f_+(u_j^n) - f_+(u_{j-1}^n)]\end{aligned}$$

这表明 $g_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_j^n, u_{j+1}^n) = f_-(u_{j+1}^n) + f_+(u_j^n)$.

因为 $g(\omega, \omega) = f_-(\omega) + f_+(\omega) = f(\omega)$,

即它是相容的守恒型差分格式.

某种程度上它可以看成迎风格式的一种统一形式.



守恒型差分格式-例举

例 3.7 (Local Lax-Friedrichs 格式【局部线性化】)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(g_{j+\frac{1}{2}} - g_{j-\frac{1}{2}}),$$

$$\text{其中 } g_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n) \right] - \frac{1}{2} a_j^n (u_{j+1}^n - u_j^n),$$

$$\text{这里 } a_j^n = \max_{u \in [u_j^n, u_{j+1}^n]} |f'(u)|.$$

显然仍然有 $g(\omega, \omega) = f(\omega)$, 稳定性条件仍为 $\lambda \max_{j,n} a_j^n \leq 1$.

「对比Lax-Friedrichs格式:

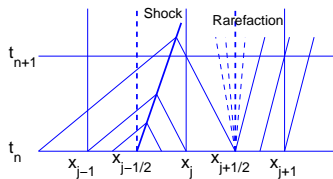
$$g_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)] - \frac{1}{2\lambda} (u_{j+1}^n - u_j^n)$$

考虑到 $\lambda a_j^n \leq 1$, 局部Lax-Friedrichs格式比L-F少了一些数值粘性.



守恒型差分格式：Godunov 格式

例 3.8 (Godunov 格式)



基本思想是用分片常数函数来近似 u , 然后局部求解一系列 Riemann 问题.

假设 u_j^n 已经求出, 定义分片常数函数:

$$v^n(x) = u_j^n, \quad \text{对 } x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}).$$

下面求解初值问题

$$(3.45) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & t \in (t_n, t_{n+1}], \\ u(x, t_n) = v^n(x). \end{cases}$$

对于上面初值问题, 为了求出 u^{n+1} , 希望通过局部求解一系列的 Riemann 问题来实现.

守恒型差分格式: Godunov 格式

回顾一下, Riemann 问题

$$(3.46) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x) \equiv \begin{cases} u_L, & x < 0; \\ u_R, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

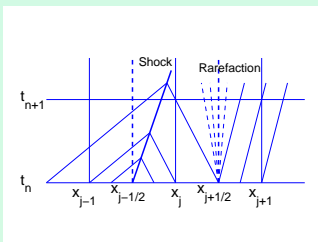
的解可以写成 $u(x, t) \equiv R(\frac{x}{t}; u_L, u_R): (s = \frac{[f(u)]}{[u]})$

$$u_L > u_R \text{ 时, } u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < st; \\ u_R, & x > st. \end{cases}$$

$$u_L \leq u_R \text{ 时, } u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < f'(u_L)t; \\ u_R, & x > f'(u_R)t; \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & f'(u_L)t \leq x \leq f'(u_R)t. \end{cases}$$



守恒型差分格式: Godunov 格式



这样, 在区间 (x_{j-1}, x_j) 上, 问题(3.45)成为

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in (x_{j-1}, x_j), \\ & t \in (t_n, t_{n+1}], \\ u(x, t_n) = \begin{cases} u_{j-1}^n, & x_{j-1} < x < x_{j-\frac{1}{2}}; \\ u_j^n, & x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_j. \end{cases} \end{cases}$$

其解可以写成 $u_{j-\frac{1}{2}}^n(x, t) = R\left(\frac{x - x_{j-\frac{1}{2}}}{t - t_n}; u_{j-1}^n, u_j^n\right)$.

类似地, 在 (x_j, x_{j+1}) 上问题(3.45)的解可以写成

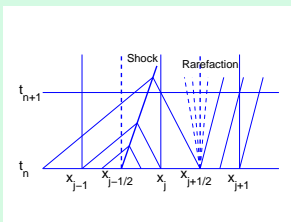
$$u_{j+\frac{1}{2}}^n(x, t) = R\left(\frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{t - t_n}; u_j^n, u_{j+1}^n\right).$$



守恒型差分格式: Godunov 格式

将(3.45)中方程在 $D_j^n = \left\{ (x, t) \mid x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}, t_n \leq t \leq t_{n+1} \right\}$ 上积分得到

$$0 = \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)] dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) \right] dt$$



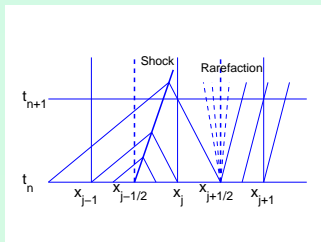
注意到 $u(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = R(0; u_j^n, u_{j+1}^n)$,
 $u(x_{j-\frac{1}{2}}, t) = R(0; u_{j-1}^n, u_j^n)$ 均为常数.

这样 $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) \right] dt \equiv$
 $\tau \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$, 其中

$$(3.47) \quad g_{j+\frac{1}{2}}^n = f \left(R(0; u_j^n, u_{j+1}^n) \right), \quad g_{j-\frac{1}{2}}^n = f \left(R(0; u_{j-1}^n, u_j^n) \right).$$



守恒型差分格式: Godunov 格式



这样 Godunov 格式可以写成

$$(3.48) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right),$$

其中 $g_{j-\frac{1}{2}}^n$, $g_{j+\frac{1}{2}}^n$ 由上面 (3.47) 式给出.

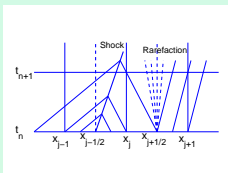
下面只需给出如何计算 $R(0; u_{j-1}^n, u_j^n)$ 和 $R(0; u_j^n, u_{j+1}^n)$ 即可.

由前面 Riemann 问题的求解过程可知:(已说明过不妨设 f 凸)

- 1) 若 $u_L = u_R$, 显然有 $R(0; u_L, u_R) = u_L = u_R$.
- 2) 若 $u_L > u_R$, 这是激波情形, 计算激波速度 $s = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R}$.
 - i) 若 $s > 0$, 则激波向右传播, 因而 $R(0; u_L, u_R) = u_L$;
 - ii) 若 $s < 0$, 则激波向左传播, 因而 $R(0; u_L, u_R) = u_R$.



守恒型差分格式: Godunov 格式



3) 若 $u_L < u_R$, 这是稀疏波情形,

计算所谓声速点 $f'(q_0) = 0$.

- i) 若 $q_0 < u_L < u_R$, 则稀疏波向右传播, 因而 $R(0; u_L, u_R) = u_L$;
- ii) 若 $u_L < u_R < q_0$, 则稀疏波向左传播, 因而 $R(0; u_L, u_R) = u_R$;
- iii) 若 $u_L \leq q_0 \leq u_R$, 则 $R(0; u_L, u_R) = (f')^{-1}(0) = q_0$.

注: 记 $a(u) = f'(u)$, 只要 $\lambda \sup_{j,n} |a(u_{j+\frac{1}{2}}^n)| \leq 1$, 就可以看到计算 $R(0; u_L, u_R)$ 互不影响, 因而每一时间层的 Riemann 问题可独立求解.

Godunov 格式每一步需要精确求解 Riemann 问题, 计算量较大.
如果将之局部线性化便得到 **Roe 格式**.



守恒型差分格式: Roe 格式

例 3.9 (Roe 格式)

将问题(3.45)做如下局部线性化:

$$(3.49) \quad \begin{cases} u_t + a(u_l, u_r)u_x = 0, & x \in (x_{j-1}, x_j), t \in (t_n, t_{n+1}], \\ u(x, t_n) = v^n(x) \equiv \begin{cases} u_l = u_{j-1}^n, & x \in (x_{j-1}, x_{j-\frac{1}{2}}); \\ u_r = u_j^n, & x \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_j). \end{cases} \end{cases}$$

这里取 $a(u_l, u_r)$ s.t. $f(u_l) - f(u_r) = a(u_l, u_r)(u_l - u_r)$.

这样上面 Riemann 问题的解为 (记 $x' = x - x_{j-\frac{1}{2}}$, $t' = t - t_n$):

$$r\left(\frac{x'}{t'}; u_l, u_r\right) = \begin{cases} u_l, & \frac{x'}{t'} < s \equiv a(u_l, u_r), \\ u_r, & \frac{x'}{t'} \geq s \equiv a(u_l, u_r). \end{cases}$$

即 Roe 格式为 $u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$,

其中 $F_{j-\frac{1}{2}}^n = f(r(0; u_{j-1}^n, u_j^n))$, $F_{j+\frac{1}{2}}^n = f(r(0; u_j^n, u_{j+1}^n))$.

守恒型差分格式: Lax-Wendroff 格式

显然 Roe 格式计算量小于 Godunov 格式, 但 Roe 格式可能会出现非物理解.

前面例子都是一阶格式, 若 u 充分光滑, 也可构造二阶格式:

例 3.10 (Lax-Wendroff 格式)

将 $u(x, t + \tau)$ 在 (x, t) 点展开:

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau u_t(x, t) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(x, t) + \mathcal{O}(\tau^3).$$

利用 $u_t = -f(u)_x$, $u_{tt} = -(f(u)_x)_t = -(f(u)_t)_x = (f'(u)f(u)_x)_x$, 代入并用中心差商离散空间偏导数得:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\lambda}{2} [f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)] \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} [a_{j+\frac{1}{2}}^n (f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) - a_{j-\frac{1}{2}}^n (f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n))] \end{aligned}$$

守恒型差分格式: Lax-Wendroff 格式

这里可取 $a_{j\pm\frac{1}{2}}^n = a\left(\frac{u_j^n + u_{j\pm 1}^n}{2}\right) \equiv f'\left(\frac{u_j^n + u_{j\pm 1}^n}{2}\right)$.

若 u 充分光滑, 显然可以验证上述格式为二阶格式. 也可改写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

其中 $g_{j+\frac{1}{2}} = g(u_j^n, u_{j+1}^n) \equiv \frac{1}{2}[f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)] - \frac{\lambda}{2}a_{j+\frac{1}{2}}^n[f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)]$.

显然有 $g(\omega, \omega) = f(\omega)$, 即 Lax-Wendroff 格式也是守恒型差分格式.

从实习题可以看出, 对于不光滑数据, 一阶格式磨光得太厉害; 而二阶格式又会产生伪振荡.

因此需要研究高阶但又不会产生伪振荡的格式—**TVD 格式**.



目录 I

1 常微分方程数值解

2 偏微分方程及其差分方法基础知识

3 双曲型问题的差分方法

- 一阶常系数线性方程
- 一阶常系数线性方程组
- 一阶变系数线性方程 (组)
- 双曲守恒律方程
- 双曲守恒律问题的守恒型差分格式
- **TVD (Total Variation Diminishing) 格式**
- 一阶双曲守恒律方程组初值问题
- 二阶双曲方程
- 初边值条件的处理
- 高维问题
- 拟线性双曲方程的特征线方法



TVD 格式

我们的目标是构造在光滑区域具有高精度、在间断处不会产生伪振荡、满足熵条件且收敛到物理解的离散格式！

1. 单调格式和保持单调性的格式

首先我们来看如何避免伪振荡. 对于如下守恒型差分格式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

若将之改写成

$$(3.50) \quad u_j^{n+1} = G(u_{j-l}^n, u_{j-l+1}^n, \dots, u_{j+l-1}^n, u_{j+l}^n).$$

定义 3.6 (单调格式)

如果 $\forall k \in \{-l, \dots, l\}$ 都有(3.50)中的函数 G 满足 $\frac{\partial G}{\partial u_{j+k}^n} \geq 0$, 则称

(3.50) 为**单调格式 (Monotone Scheme)**.

单调格式

例 3.11 (满足 CFL 条件的 Lax-Friedrichs 格式为单调格式)

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{\lambda}{2}[f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)] \equiv G(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

在满足 CFL 条件 $\lambda \max_{j,n} |a(u_j^n)| \leq 1$ 时, 其中 $a(u) = f'(u)$, 有

$$\frac{\partial G}{\partial u_{j-1}^n} = \frac{1 + \lambda a(u_{j-1}^n)}{2} \geq 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u_j^n} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u_{j+1}^n} = \frac{1 - \lambda a(u_{j+1}^n)}{2} \geq 0.$$

例 3.12 (满足 CFL 条件的迎风格式为单调格式 (设 $a(u) \geq 0$))

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda[f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)] \equiv G(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

在满足 CFL 条件 $\lambda \max_{j,n} |a(u_j^n)| \leq 1$ 时, 有

$$\frac{\partial G}{\partial u_{j-1}^n} = \lambda a(u_{j-1}^n) \geq 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u_j^n} = 1 - \lambda a(u_j^n) \geq 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u_{j+1}^n} = 0.$$

单调格式

类似可证满足 CFL 条件的 Engquist-Osher 和 Godunov 都是单调格式。

例 3.13 (满足 CFL 条件 Lax-Wendroff 格式也不一定为单调格式)

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\lambda}{2}[f_{j+1}^n - f_{j-1}^n] + \frac{\lambda^2}{2}[a_{j+\frac{1}{2}}^n(f_{j+1}^n - f_j^n) - a_{j-\frac{1}{2}}^n(f_j^n - f_{j-1}^n)] \\ &\equiv G(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \end{aligned}$$

其中 $a_{j\pm\frac{1}{2}}^n = f'(\frac{u_j^n + u_{j\pm1}^n}{2})$. 即便满足 CFL 条件 $\lambda \max_u |a(u)| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial u_{j-1}^n} &= \frac{\lambda a_{j-1}^n}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \left[a_{j-\frac{1}{2}}^n a_{j-1}^n - \frac{1}{2} f'' \left(\frac{u_j^n + u_{j\pm1}^n}{2} \right) (f_j^n - f_{j-1}^n) \right] \\ &= \frac{\lambda a_{j-1}^n}{2} \left(1 + \lambda a_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{\lambda^2}{4} f'' \left(\frac{u_j^n + u_{j\pm1}^n}{2} \right) (f_j^n - f_{j-1}^n). \end{aligned}$$

显然 CFL 条件不足以保证上式非负。

单调格式

关于单调格式有以下定理结论:

定理 3.3 (单调格式)

对于标量双曲守恒律方程 ($m = 1$), 相容的单调守恒格式 (3.50) 在固定网格比 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 时, 令 $\tau \rightarrow 0$, 它一定会收敛到原初值问题的物理解。
但是单调格式至多为一阶格式。

注: 这也说明了为什么 Lax-Wendroff 格式不是单调格式。

从这一点看, 要求格式是单调格式似乎太严了. 事实上我们如果仅仅想避免伪振荡, 只需格式是所谓保持单调性 (monotonicity preserving) 格式就可以了。



保持单调性格式

定义 3.7 (保持单调性格式)

称格式(3.50)是**保持单调性的**, 是指如果初始离散 $\{u_j^0\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是单调序列 (即非增或非减的), 经过格式(3.50)计算后得到的 $\{u_j^n\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 仍然是单调的 ($\forall n \geq 0$).

显然单调格式一定是保持单调性的, 但是反之则不然.

保持单调性的格式显然**不会产生伪振荡**! 而且我们后面可以看到, 保持单调性的格式可以有高精度的.

但需要注意的是, 仅有保持单调性还无法保证收敛到物理解.



全变差

2. 全变差稳定格式

我们首先引入全变差 (Total Variation) 概念:

定义 3.8 (全变差)

对于一个函数 $v(x)$, 定义其全变差为

$$(3.51) \quad TV(v) = \sup_{\forall \{\xi_j\}: -\infty \leq \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N \leq +\infty} \sum_{j=1}^N |v(\xi_j) - v(\xi_{j-1})|$$

显然要想 $TV(v)$ 为一个有限数, 就得要求当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $v(x) \rightarrow v_{\pm\infty}$ 为常数. 也可将上式换成以下两式

$$(3.52) \quad TV(v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |v(x) - v(x - \varepsilon)| dx$$

$$(3.53) \quad TV(v) = \int_{\mathbb{R}} |v'(x)| dx \quad (\text{在分布意义下})$$



全变差稳定格式

对于离散函数 $u^n = \{u_j^n\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 显然有 $TV(u^n) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |u_{j+1}^n - u_j^n|$.

这样对于离散格式 (3.50), 我们可以引入全变差稳定的概念:

定义 3.9 (全变差稳定 (TV-Stable))

对格式 (3.50), 若 $\exists R > 0, \tau_0 > 0, \text{ s.t. } \forall 0 < \tau \leq \tau_0, n\tau \leq T$, 都有 $TV(u^n) \leq R$, 则称 (3.50) 是全变差稳定格式.

由此我们也可以得到, 在 $[0, T]$ 上的总变差

$$TV_T(u^n) = \sum_{n=0}^{T/\tau-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [\tau |u_{j+1}^n - u_j^n| + h |u_j^{n+1} - u_j^n|] \quad \text{是有界的.}$$



全变差稳定及全变差减少格式

对于全变差稳定格式我们有以下定理:

定理 3.4

设通量函数 $f(u)$ 关于 u 满足 Lipschitz 条件, $\{u^n\}_{n \geq 0}$ 为由全变差稳定的相容守恒格式计算得到的离散函数, 那么固定网格比, 让 $\tau \rightarrow 0$, $\{u^n\}_{n \geq 0}$ 会收敛到一个弱解.

这样离我们的目标又近了一步.

怎样保证 TV-Stable 呢? 一个简便方法是要求后面计算得到的离散函数全变差总是不超过初值, 即引入以下概念:

定义 3.10 (全变差减少 (TVD) 格式)

对格式(3.50), 若 $\forall n \geq 0$, 都有 $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$, 则称该格式为全变差减少格式.

全变差减少格式

容易检验, 对于标量守恒律问题的弱解都满足 TVD 性质:

$$TV(u(\cdot, t_2)) \leq TV(u(\cdot, t_1)), \quad \forall t_2 > t_1.$$

这也是为什么我们希望我们的离散格式也是 TVD 格式 (自然就是 TV-Stable 格式, 从而会收敛到弱解).

关于 TVD 格式性质还有以下定理:

定理 3.5

TVD格式是保持单调性的格式.

注: 自然 TVD 格式也不会产生伪振荡.



全变差减少格式

将(3.50)改写成如下形式:

$$(3.54) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-\frac{1}{2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) + D_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1}^n - u_j^n),$$

其中系数 $C_{j-\frac{1}{2}}$, $D_{j+\frac{1}{2}}$ 可以是 u^n 的函数. 关于 TVD 格式的判断我们有以下定理:

定理 3.6 (TVD 格式判别定理)

上面 (3.54) 式中的系数如果满足 $C_{j-\frac{1}{2}} \geq 0$, $D_{j+\frac{1}{2}} \geq 0$, 且 $0 \leq C_{j+\frac{1}{2}} + D_{j+\frac{1}{2}} \leq 1$, 则(3.54)是TVD格式.

◁ 由(3.54)式: $u_{j+1}^{n+1} = u_{j+1}^n - C_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1}^n - u_j^n) + D_{j+\frac{3}{2}}(u_{j+2}^n - u_{j+1}^n)$,
与(3.54)相减得



全变差减少格式

$$u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} = (1 - C_{j+\frac{1}{2}} - D_{j+\frac{1}{2}})(u_{j+1}^n - u_j^n) + C_{j-\frac{1}{2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) + D_{j+\frac{3}{2}}(u_{j+2}^n - u_{j+1}^n)$$

计算 u^{n+1} 的全变差 $TV(u^{n+1}) = \sum_j |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}|$ 有

$$TV(u^{n+1}) \leq \sum_j [(1 - C_{j+\frac{1}{2}} - D_{j+\frac{1}{2}})|u_{j+1}^n - u_j^n| + C_{j-\frac{1}{2}}|u_j^n - u_{j-1}^n| + D_{j+\frac{3}{2}}|u_{j+2}^n - u_{j+1}^n|]$$

由假设知上面右端求和式中的三个系数均非负, 做一下下标变换

$$\begin{aligned} TV(u^{n+1}) &\leq \sum_j [(1 - C_{j+\frac{1}{2}} - D_{j+\frac{1}{2}})|u_{j+1}^n - u_j^n| + C_{j+\frac{1}{2}}|u_{j+1}^n - u_j^n| + D_{j+\frac{1}{2}}|u_{j+1}^n - u_j^n|] \\ &= TV(u^n). \quad \triangleright \end{aligned}$$



全变差减少格式

例 3.14

对于 Lax – Friedrichs 格式,

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{\lambda}{2}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) \equiv u_j^n - C_{j-\frac{1}{2}} \delta_x u_{j-\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}} \delta_x u_{j+\frac{1}{2}}^n$$

其中系数 $C_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \lambda \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\delta_x u_{j-\frac{1}{2}}^n} \right)$, $D_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \lambda \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\delta_x u_{j+\frac{1}{2}}^n} \right)$,

中心差分记号 $\delta_x u_{j-\frac{1}{2}}^n = u_j^n - u_{j-1}^n$, $\delta_x u_{j+\frac{1}{2}}^n = u_{j+1}^n - u_j^n$.

在 CFL 条件 ($\lambda \sup_u |f'(u)| \leq 1$) 下, 有 $C_{j-\frac{1}{2}} \geq 0$, $D_{j+\frac{1}{2}} \geq 0$, 且 $C_{j+\frac{1}{2}} + D_{j+\frac{1}{2}} = 1$. 因而是 TVD 格式.

对迎风格式 ($f'(u) \geq 0$): $u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(f_j^n - f_{j-1}^n) \equiv u_j^n - C_{j-\frac{1}{2}} \delta_x u_{j-\frac{1}{2}}^n$.

即 $C_{j-\frac{1}{2}} = \lambda \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\delta_x u_{j-\frac{1}{2}}^n} \geq 0$, $D_{j+\frac{1}{2}} = 0$, 且 $C_{j+\frac{1}{2}} + D_{j+\frac{1}{2}} \leq 1$.

全变差减少格式-离散熵条件

为了保证收敛到物理解, 我们还需要对 TVD 格式加上熵条件:

定义 3.11

对熵函数 φ 与熵通量 ψ (满足 $\psi' = \varphi' f'$), 若 (3.50) 的解 u_j^n 满足

$$(3.55) \quad \frac{\varphi(u_j^{n+1}) - \varphi(u_j^n)}{\tau} + \frac{\Psi_{j+\frac{1}{2}} - \Psi_{j-\frac{1}{2}}}{h} \leq 0$$

其中 $\Psi_{j+\frac{1}{2}}$ 为数值熵通量 $\Psi(u_{j-l+1}^n, \dots, u_{j+l}^n)$ 且 $\Psi(u, \dots, u) = \psi(u)$ (相当于在格式(3.50)中 g 的表达式里 $f \rightarrow \psi$), 则称 (3.50) 满足离散熵条件.

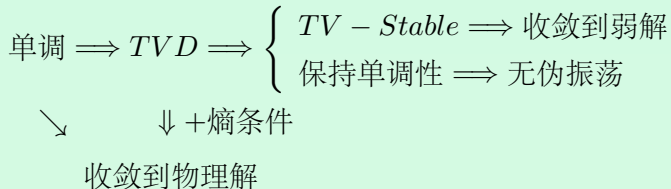
定理 3.7

满足熵条件(3.55)的相容的 TVD 守恒格式计算出的离散解一定收敛到物理解!



守恒型差分格式

总结一下有以下关系图：



下面我们将研究如何构造高阶 TVD 格式.



通量限制器方法

3. TVD 格式-通量限制器方法

前面的例子和实习题可以看到, 高阶精度的格式 (如 Lax-Wendroff 格式) 在光滑区域计算效果很好, 但是在间断处会产生伪振荡. 而低阶格式 (如迎风格式等) 在间断处不会发生振荡, 但是磨光得太厉害.

所谓通量限制器方法就是想结合这两类方法的优点, 构造满足 TVD 性质、在光滑区域具有高精度、间断处过渡区不大的守恒差分格式.

对于守恒型差分格式

$$(3.56) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$



通量限制器方法

称高阶精度格式中的通量函数 $g_{j+\frac{1}{2}}^n$ 为高阶数值通量, 记为 $g_{H,j+\frac{1}{2}}^n$.

称低阶精度格式中的通量函数 $g_{j+\frac{1}{2}}^n$ 为低阶数值通量, 记为 $g_{L,j+\frac{1}{2}}^n$.

当然, 高阶数值通量可以看成低阶数值通量加了一个校正项:

$$g_{H,j+\frac{1}{2}}^n = g_{L,j+\frac{1}{2}}^n + \left(g_{H,j+\frac{1}{2}}^n - g_{L,j+\frac{1}{2}}^n \right).$$

通量限制器的想法就是在上述校正项前面加以限制 (引入参数):

$$(3.57) \quad g_{j+\frac{1}{2}}^n = g_{L,j+\frac{1}{2}}^n + \phi_j^n \left(g_{H,j+\frac{1}{2}}^n - g_{L,j+\frac{1}{2}}^n \right).$$

这里 ϕ_j^n 称为**限制器**, 待定!

我们自然希望在解光滑区域有 $\phi_j^n \rightarrow 1$; 相反在间断处我们希望 $\phi_j^n \rightarrow 0$. 实际计算时 ϕ_j^n 的取值范围可以更广.



通量限制器方法

(一) 常系数对流方程：我们先考虑常系数对流方程情形：

$$(3.58) \quad u_t + au_x = 0, \quad \text{不妨设 } a > 0.$$

把 Lax-Wendroff 格式改写成如下形式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{a\lambda(1-a\lambda)}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

「这里用到 $-\frac{a\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = -a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{a\lambda}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$ 」
数值通量可写成

$$g_{H,j+\frac{1}{2}}^n = au_j^n + \frac{a(1-a\lambda)}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n).$$

显然上面第一项为迎风格式的数值通量，第二项可视为校正项。



通量限制器方法

引入限制器, 即定义数值通量为

$$(3.59) \quad g_{j+\frac{1}{2}}^n = au_j^n + \phi_j^n \frac{a(1-a\lambda)}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n).$$

一般来说, ϕ_j^n 取成函数 $\phi(x)$ 在 θ_j^n 上的取值, θ_j^n 则刻画了解的光滑性, 比如可以取成

$$\theta_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}.$$

当解 $\{u_j^n\}$ 光滑时, h 充分小时有 $\theta_j^n \approx 1$. 而当解有间断时, 会有 θ_j^n 远离 1 (会 $\rightarrow 0$ 或者 ∞).

注意上述描述在靠近 $u^n(x)$ 的极点时可能会有问题: 靠近极点时, 尽管可能是光滑区域, 但是也会有 θ_j^n 远离 1, 因为其分母或者分子会很靠近 0, 而另一项为 $\mathcal{O}(h)$. 因此 (后面还会看到), 在极点处很难构造高阶 TVD 格式.



通量限制器方法

定理 3.8

在(3.59)中, 若 ϕ 为有界函数, 且格式 (3.56) 是相容的, 函数 ϕ 满足 $\phi(1) = 1$, 且 ϕ 在 $\theta = 1$ 处满足 *Lipschitz* 连续条件, 则在解的光滑区域、且 u_x 有界并不为零处, 格式 (3.56) 具有二阶精度.

要让该格式是 TVD 格式, 我们需要它满足前面定理3.6的条件. 注意此时格式为

$$(3.60) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left\{ a(u_j^n - u_{j-1}^n) + \phi_j^n \frac{a(1-a\lambda)}{2} (u_{j+1}^n - u_j^n) - \phi_{j-1}^n \frac{a(1-a\lambda)}{2} (u_j^n - u_{j-1}^n) \right\}$$

对比 (3.54) 式 $u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-\frac{1}{2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) + D_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1}^n - u_j^n)$, 如果简单写成 $C_{j-\frac{1}{2}} = a\lambda \left(1 - \frac{1-a\lambda}{2}\phi_{j-1}^n\right)$, $D_{j+\frac{1}{2}} = -\frac{a\lambda(1-a\lambda)}{2}\phi_j^n$.



通量限制器方法

很显然在 CFL 条件下, 当 ϕ_j^n 靠近 1 时, $D_{j+\frac{1}{2}}$ 会小于零, 不能满足定理条件. 因此我们需要另外改写一下:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{a\lambda(1-a\lambda)}{2} \frac{\phi_j^n(u_{j+1}^n - u_j^n) - \phi_{j-1}^n(u_j^n - u_{j-1}^n)}{u_j^n - u_{j-1}^n} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

即令 $C_{j-\frac{1}{2}} = a\lambda + \frac{a\lambda(1-a\lambda)}{2} \frac{\phi_j^n(u_{j+1}^n - u_j^n) - \phi_{j-1}^n(u_j^n - u_{j-1}^n)}{u_j^n - u_{j-1}^n}$, $D_{j+\frac{1}{2}} = 0$.

只需要 $0 \leq C_{j+\frac{1}{2}} \leq 1$ 就满足定理3.6的条件. 改写一下

$$C_{j+\frac{1}{2}} = a\lambda \left\{ 1 + \frac{1-a\lambda}{2} \left[\frac{\phi(\theta_j^n)}{\theta_j^n} - \phi(\theta_{j-1}^n) \right] \right\}.$$



通量限制器方法

在 CFL 条件下 $a\lambda \leq 1$, 若还有 $\forall \theta_{j-1}^n, \theta_j^n$,

$$(3.61) \quad \left| \frac{\phi(\theta_j^n)}{\theta_j^n} - \phi(\theta_{j-1}^n) \right| \leq 2,$$

那么就有 $0 \leq C_{j+\frac{1}{2}} \leq 1$.

当 $\theta_j^n \leq 0$ 时, 说明该处两边斜率反号, 即出现了一个尖角 (极点), 可以认为此处解 “不太光滑”, 即在极点处取成 $\phi(\theta) = 0$ 比较安全 (为了保证是 TVD 的). 因此再加上以下条件

$$(3.62) \quad 0 \leq \phi(\theta) \leq 2, \quad 0 \leq \frac{\phi(\theta)}{\theta} \leq 2,$$

就有式子 (3.61) 成立, 即保证格式 (3.56) 是 TVD 格式.



通量限制器方法

如下图所示 TVD: $0 \leq \phi(\theta) \leq 2$, $0 \leq \frac{\phi(\theta)}{\theta} \leq 2$

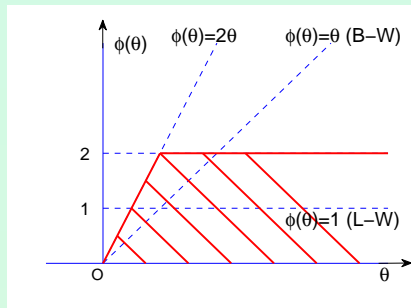
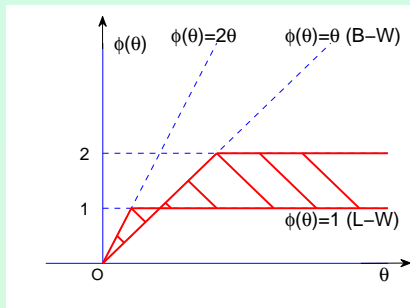


Figure 1: TVD 区域 (左图)



二阶 TVD 区域 (右图)

易见 “ $\phi(\theta) = 1$ ” 为 Lax-Wendroff, “ $\phi(\theta) = \theta$ ” 为 Beam-Warming.
自然二阶 TVD 格式应该取它们的加权平均.



通量限制器方法

也就是说限制器可取成

$$(3.63) \quad \phi(\theta) = (1 - \alpha(\theta))\phi^{LW} + \alpha(\theta)\phi^{BW}, \quad 0 \leq \alpha(\theta) \leq 1.$$

$$\text{即} \quad \phi(\theta) = 1 + \alpha(\theta)(\theta - 1).$$

例如可以取

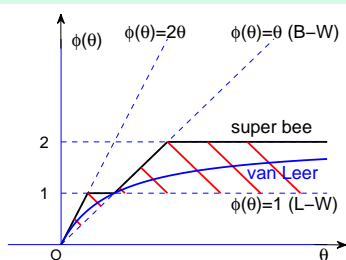
$$\phi(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta)).$$

这通常称为 Super Bee limiter.

也可以取

$$\phi(\theta) = \frac{|\theta| + \theta}{1 + |\theta|}.$$

这称为 van Leer limiter.



通量限制器方法

(二) 可变号对流方程：我们再考虑 a 可变号情形：

注意此时 (对于一般常系数 a) 迎风格式数值通量为

$$g_{L,j+\frac{1}{2}}^n = \frac{a}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{|a|}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n).$$

Lax-Wendroff 格式的数值通量可写成

$$\begin{aligned} g_{H,j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{a}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{a^2\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n) \\ &\equiv g_{L,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{|a| - a^2\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n) \end{aligned}$$

也就是说通量限制器下的数值通量可取成

$$(3.64) \quad g_{j+\frac{1}{2}}^n = g_{L,j+\frac{1}{2}}^n + \phi_j^n \frac{a}{2}(\operatorname{sgn}(a) - a\lambda)(u_{j+1}^n - u_j^n).$$



通量限制器方法

上面限制器还是可以取 $\phi_j^n = \phi(\theta_j^n)$.

但要注意 θ_j^n 应该要取迎风方向的斜率之比.

即要取决于 a 的符号 $\text{sgn}(a)$:

令 $j' = j - \text{sgn}(a) = j \pm 1$, 取

$$(3.65) \quad \theta_j^n = \frac{u_{j'+1}^n - u_{j'}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n} = \begin{cases} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}, & a > 0; \\ \frac{u_{j+2}^n - u_{j+1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}, & a \leq 0; \end{cases}$$



通量限制器方法

(三) 一般守恒律方程: 可以类似构造, 比如用 L-F 与 L-W 组合

$$\begin{aligned}
 g_{L,j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(f_j^n + f_{j+1}^n) - \frac{1}{2\lambda}(u_{j+1}^n - u_j^n) \\
 &\stackrel{\text{记成}}{=} \frac{1}{2}(f_j^n + f_{j+1}^n) - \frac{1}{2\lambda a_{j+\frac{1}{2}}^n}(f_{j+1}^n - f_j^n) \\
 g_{H,j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(f_j^n + f_{j+1}^n) - \frac{\lambda a_{j+\frac{1}{2}}^n}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n)
 \end{aligned}$$

其中取 $a_{j+\frac{1}{2}}^n(u_{j+1}^n - u_j^n) = f_{j+1}^n - f_j^n$. 因此有

$$(3.66) \quad g_{j+\frac{1}{2}}^n = g_{L,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\phi_j^n}{2} \left(\frac{1}{\lambda a_{j+\frac{1}{2}}^n} - \lambda a_{j+\frac{1}{2}}^n \right) (f_{j+1}^n - f_j^n).$$

$\phi_j^n = \phi(\theta_j^n)$, 而 θ_j^n 可以取(3.65)形式.



斜率限制器方法

4. TVD 格式-斜率限制器方法

我们也可以推广 Godunov 格式的想法, 给出一种更几何、直观的想法---斜率限制器方法 (Slope limiter).

我们再回顾一下 Godunov 格式:

- ① 由 $\{u_j^n\}$ 构造出分片插值函数 $u_h(x, t_n)$; (Godunov 为分片常数)
- ② 求解 Riemann 问题得到 $u_h(x, t_{n+1})$; (Godunov 格式中准确求解)
- ③ 计算每个小区间上的单元平均值得到 $\{u_j^{n+1}\}$.

显然 Godunov 格式为一阶精度格式. 要想得到高阶精度的 TVD 格式, 一个自然想法就是在上面的第一步中使用高阶插值来得到 $u_h(x, t_n)$. 比如用线性插值:

$$(3.67) \quad u_h(x, t_n) = u_j^n + \sigma_j^n(x - x_j), \quad \text{当 } x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}].$$



斜率限制器方法

上面 σ_j^n 反映了 u^n 在单元格 $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 上的斜率. 显然无论 σ_j^n 怎么取, $u_h(x, t_n)$ 在 $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 上的平均值都是 u_j^n .

自然, 如果我们在上面第一步中使用了高阶插值 (比如线性插值、二次插值等) 来重构 $u_h(x, t_n)$, 显然我们将无法像 Godunov 格式中求解 Riemann 问题那样来精确求解此问题以得到 $u_h(x, t_{n+1})$. 如何求解这个问题我们稍后详细讲解.

我们先来看如何选取 σ_j^n 使得该格式仍为 TVD 的:

如果简单选取 $\sigma_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}$, 并准确求解第二步, 在常系数对流问题情形就是 Lax-Wendroff 格式. 显然这不是 TVD 格式. 因此我们需要改变斜率选取办法, 尤其是在极点和不光滑处.



斜率限制器方法

假如像 ENO 插值那样选取 $|\sigma_j^n| = \frac{1}{h} \min(|u_j^n - u_{j-1}^n|, |u_{j+1}^n - u_j^n|)$, 那么我们将能保证 TVD 性质:

$$(3.68) \quad TV(u_h(x, t_n)) \leq TV(\{u^n\}).$$

即插值后的函数的全变差小于离散函数的全变差. 这样根据第二步和第三步是 TVD 的, 就有以下定理结论

定理 3.9

如果上面步骤 1 满足(3.68)式, 则该算法对于标量守恒律方程为 TVD 格式.

下面看具体怎么做来保证第一步的 TVD 性质. 仍然先从最简单的对流方程做起.



斜率限制器方法

(一)、常系数对流方程: $u_t + au_x = 0$, 不妨设 $a > 0$.

利用特征线知识我们知道第二步可以精确求解:

$$(3.69) \quad u_h(x, t_{n+1}) = u_h(x - a\tau, t_n).$$

$$\text{因此: } u_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_h(x, t_{n+1}) dx \stackrel{(3.69)}{=} \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{j+\frac{1}{2}} - a\tau} u_h(x, t_n) dx$$

$$\begin{aligned} (\text{设 } a\lambda \leq 1) \stackrel{(3.66)}{=} & \frac{1}{h} \left\{ \int_{x_{j-\frac{1}{2}} - a\tau}^{x_{j-\frac{1}{2}}} (u_{j-1}^n + \sigma_{j-1}^n(x - x_{j-1})) dx \right. \\ & \left. + \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}} - a\tau} (u_j^n + \sigma_j^n(x - x_j)) dx \right\} \end{aligned}$$



斜率限制器方法

积分后可得

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{h} \left\{ a\tau u_{j-1}^n + \frac{\sigma_{j-1}^n}{2} \left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} - a\tau \right)^2 \right] \right. \\ \left. + (h - a\tau) u_j^n + \frac{\sigma_j^n}{2} \left[\left(\frac{h}{2} - a\tau \right)^2 - \frac{h^2}{4} \right] \right\}$$

整理即有

$$(3.70) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda (u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{a\lambda(1-a\lambda)}{2} h [\sigma_j^n - \sigma_{j-1}^n].$$

显然如果此时总取 $\sigma_j^n \equiv 0$, 即分片常数重构, 就得到上式为迎风格式 (这说明 Godunov 在常系数对流方程情形即为迎风).

如果取 $\sigma_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}$, 即得到 Lax-Wendroff.



斜率限制器方法

在上面 (3.70) 式中, 可以看到数值通量为

$$g_{j+\frac{1}{2}}^n = au_j^n + \frac{a(1-a\lambda)}{2} h\sigma_j^n.$$

如果我们取

$$(3.71) \quad \sigma_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \phi_j^n,$$

就得到与通量限制器 (3.59) 一样的格式.

上式也建立了通量限制器与斜率限制器之间的联系.



斜率限制器方法

(二)、可变号对流方程：我们再考虑 a 可变号情形：

类似于之前(3.64)-(3.65)的处理, 这时我们的格式应该取

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= u_j^n - a\lambda(u_{\tilde{j}}^n - u_{\tilde{j}-1}^n) - \frac{a\lambda}{2}(\operatorname{sgn}(a) - a\lambda)h(\sigma_j^n - \sigma_{j-1}^n) \\
 (3.72) \quad &\equiv u_j^n - \lambda \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right),
 \end{aligned}$$

其中 $g_{j+\frac{1}{2}}^n = au_{\tilde{j}}^n + \frac{a}{2}[\operatorname{sgn}(a) - a\lambda]h\sigma_j^n$, $\tilde{j} = \begin{cases} j, & \text{若 } a > 0; \\ j+1, & \text{若 } a < 0; \end{cases}$

如果令 $\sigma_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \phi_j^n$ 就回到了通量限制器情形(3.64)-(3.65).

下面主要看如何选取 σ_j^n 使得 (3.68) 式成立? (即保持 TVD)



斜率限制器方法

一种简单选取办法是所谓的“极小-中值”斜率:

$$(3.73) \quad \sigma_j^n = \frac{1}{h} \min \text{ mod } (u_{j+1}^n - u_j^n, u_j^n - u_{j-1}^n),$$

其中

$$(3.74) \quad \min \text{ mod } (a, b) = \begin{cases} a, & \text{若 } |a| \leq |b|, \text{ 且 } ab > 0; \\ b, & \text{若 } |a| > |b|, \text{ 且 } ab > 0; \\ 0, & \text{若 } ab \leq 0. \end{cases}$$

如果令

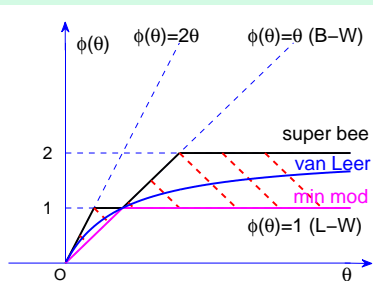
$$(3.75) \quad \phi(\theta) = \max(0, \min(\theta, 1)) = \begin{cases} 0, & \text{若 } \theta \leq 0; \\ \theta, & \text{若 } 0 \leq \theta \leq 1; \\ 1, & \text{若 } 1 \leq \theta. \end{cases}$$

再注意 $\phi_j^n = \phi(\theta_j^n)$ 及 $\theta_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}$, 在 (3.71) 下, $(3.73) \iff (3.75)$.



斜率限制器方法

由此我们可以看到, 任何一种“通量限制器” ϕ_j^n 都可以通过 (3.71) 转化为“斜率限制器”方法中的 σ_j^n .



从前面的分析已经知道, (3.75) 是二阶 TVD 格式. 因而斜率限制器 (3.73)–(3.74) 也是二阶 TVD 格式. (显然 (3.74) 的斜率选取方式保证了 (3.68), 即重构后全变差没增加)

当然我们还可以有其他的选取斜率限制器的方法.



斜率限制器方法

(三)、一般守恒律方程：困难主要在如何求解重构后的问题
先回顾一下 Godunov 格式：求解

$$(3.76) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]; \\ u|_{t=t_n} = v^n(x) \equiv u_j^n, & \text{当 } x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]. \end{cases}$$

我们的是将方程在 $D_j^n = \{x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}\}$ 上积分得到

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

其中 $u_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx, \quad g_{j+\frac{1}{2}}^n = f(R(0; u_j^n, u_{j+1}^n))$

令 $f'(q_0) = 0$, Riemann 问题的解可写成



斜率限制器方法

$$R(0; u_l, u_r) = \begin{cases} u_l, & \begin{cases} u_l \geq u_r, \text{ 且 } s = \frac{[f(u)]}{[u]} \geq 0 \text{ (激波向右)} \\ \text{或者 } q_0 < u_l < u_r, \text{ (稀疏波向右)} \end{cases} \\ u_r, & \begin{cases} u_l > u_r, \text{ 且 } s = \frac{[f(u)]}{[u]} < 0 \text{ (激波向左)} \\ \text{或者 } u_l < u_r < q_0, \text{ (稀疏波向左)} \end{cases} \\ q_0, & u_l \leq q_0 \leq u_r. \end{cases}$$

而线性化后的 Roe 格式则是解

$$(3.77) \quad \begin{cases} u_t + a(u_l, u_r)u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]; \\ u|_{t=t_n} = v^n(x) \equiv u_j^n, & \text{当 } x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]. \end{cases}$$

其中 $a \cdot (u_l - u_r) = f(u_l) - f(u_r)$. 解为 $(x' = x - x_j, \quad t' = t - t_n)$

$$r\left(\frac{x'}{t'}; u_l, u_r\right) = \begin{cases} u_l, & \frac{x'}{t'} < s \equiv a(u_l, u_r), \\ u_r, & \frac{x'}{t'} \geq s \equiv a(u_l, u_r). \end{cases}$$



斜率限制器方法

我们现在是解

$$(3.78) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]; \\ u|_{t=t_n} = u_h(x, t_n) \equiv u_j^n + \sigma_j^n(x - x_j), & \text{当 } x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]. \end{cases}$$

由于 $u_h(x, t_n)$ 现在是分片线性函数, 当 $f(u)$ 为一般非线性函数时, 很难精确求解上述问题得到 $u(x, t_{n+1})$.

因此我们必须要做某种线性化近似 (类似于 Roe 格式做法但又不能完全照搬, 否则会出现非物理解!).



斜率限制器方法

假设 $\lambda \sup |f'(u)| \leq 1$. 斜率限制器 σ_j^n 用 min mod 函数定义.

令 $U_j^\pm = u_j^n \pm \frac{h}{2} \sigma_j^n$. 显然在 min mod 函数定义下, $U_j^-, U_j^+, U_{j+1}^-, U_{j+1}^+$ 应该为单调增 (或减) 的 (否则重构后 TV 会增加!)

我们已说过不妨设 $f'' \geq 0$, 即 $f' \uparrow$ 为单调增的.

这样 $f'(U_j^-), f'(U_j^+), f'(U_{j+1}^-), f'(U_{j+1}^+)$ 也为单调序列.

1) 先设在区间 $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 上, $f'(u_h(x, t_n)) \neq 0$. 令 $g(u)$ 为 $f(u)$ 在 $[U_j^-, U_j^+]$ 和 $[U_{j+1}^-, U_{j+1}^+]$ 上的线性插值函数, 再令

$$(3.79) \quad g'_i = \begin{cases} \frac{f(U_i^+) - f(U_i^-)}{U_i^+ - U_i^-}, & \text{若 } \sigma_i^n \neq 0, \\ f'(U_i^\pm), & \text{若 } \sigma_i^n = 0. \end{cases} \quad \text{对 } i = j, j+1$$

即 g'_i 为 $g(u)$ 在 $[U_i^-, U_i^+]$ 上的斜率.



斜率限制器方法

将 $f(u)$ 用 $g(u)$ 近似之后, $[t_n, t_{n+1}]$ 上的问题成为

$$(3.80) \quad \begin{cases} v_t + g(v)_x = 0, & t \in [t_n, t_{n+1}], \\ v|_{t=t_n} = u_h(x, t_n), & x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \end{cases}$$

由 $g(u)$ 为 $f(u)$ 在 $[U_j^-, U_j^+]$ 和 $[U_{j+1}^-, U_{j+1}^+]$ 上的线性插值函数, 即

$$(3.81) \quad g(v) = \begin{cases} f(U_j^+) + (v - U_j^+)g'_j, & \text{当 } v \in [U_j^-, U_j^+] \\ f(U_{j+1}^-) + (v - U_{j+1}^-)g'_{j+1}, & \text{当 } v \in [U_{j+1}^-, U_{j+1}^+] \end{cases}$$

这样 $g(v)_x = \begin{cases} g'_j v_x, & \text{当 } v \in [U_j^-, U_j^+] \\ g'_{j+1} v_x, & \text{当 } v \in [U_{j+1}^-, U_{j+1}^+] \end{cases}$. 由特征线法知道

$$(3.82) \quad v(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = \begin{cases} u_h(x_{j+\frac{1}{2}} - (t - t_n)g'_j), & \text{若 } g'_j \geq 0 \\ u_h(x_{j+\frac{1}{2}} - (t - t_n)g'_{j+1}), & \text{若 } g'_{j+1} < 0 \end{cases}$$



斜率限制器方法

由于 $|a|\lambda \leq 1$, 且 $u_h(x, t)$ 是线性函数, 因此

$$(3.83) \quad v(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = \begin{cases} U_j^+ - (t - t_n)\sigma_j^n g'_j, & \text{当 } g'_j \geq 0 \\ U_{j+1}^- - (t - t_n)\sigma_{j+1}^n g'_{j+1}, & \text{当 } g'_{j+1} < 0 \end{cases}$$

因而对 $t \in [t_n, t_{n+1}]$, 总有 $v(x_{j+\frac{1}{2}}, t) \in [U_j^-, U_j^+]$ 或者 $[U_{j+1}^-, U_{j+1}^+]$. 利用 $g(v)$ 在 $[U_j^-, U_j^+]$ 及 $[U_{j+1}^-, U_{j+1}^+]$ 上为线性函数知 $g'(v(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) = g'_j$ 或 g'_{j+1} .

这样对问题 (3.80) 用有限体积法求解得到数值通量为

$$(3.84) \quad G_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(v(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt = \begin{cases} f(U_j^+) - \frac{\tau}{2} \sigma_j^n (g'_j)^2, & f' > 0 \\ f(U_{j+1}^-) - \frac{\tau}{2} \sigma_{j+1}^n (g'_{j+1})^2, & f' < 0 \end{cases}$$



斜率限制器方法

令最终格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(G_{j+\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right).$$

可以看到, 如果 $\sigma_j^n \equiv 0$, 即有此格式为线性化的 Roe 格式.

把它与二阶格式 Lax-Wendroff 格式比较:

$$g_{j+\frac{1}{2}}^{LW} = \frac{1}{2} (f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)) - \frac{\tau}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \left[\frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n} \right]^2$$

可以看到在光滑区域有 $G_{j+\frac{1}{2}}^n = g_{j+\frac{1}{2}}^{LW} + \mathcal{O}(h^2)$.

即 (3.84) 为二阶 TVD 格式.



斜率限制器方法

2) 再看若存在 $q_0 \in [U_j^-, U_{j+1}^+]$ s.t. $f'(q_0) = 0$ (音速点).

即这是“跨音速”情形.

$$(3.85) \quad \text{令} \begin{cases} G_j^+ = f(U_j^+) - \frac{\tau}{2} \sigma_j^n (g'_j)^2, \\ G_{j+1}^- = f(U_{j+1}^-) - \frac{\tau}{2} \sigma_{j+1}^n (g'_{j+1})^2, \end{cases}$$

i) 若 g'_j 与 g'_{j+1} 同号:

那么 $q_0 \in [U_j^-, U_j^+]$, 如果 $g'_j \geq 0, g'_{j+1} \geq 0$;

$q_0 \in [U_{j+1}^-, U_{j+1}^+]$, 如果 $g'_j \leq 0, g'_{j+1} \leq 0$;

此时还可以如(3.84)式那样定义数值通量:

$$(3.86) \quad G_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} G_j^+, & \text{如果 } g'_j \geq 0, g'_{j+1} \geq 0 \text{ (特征线向右);} \\ G_{j+1}^-, & \text{如果 } g'_j \leq 0, g'_{j+1} \leq 0 \text{ (特征线向左)} \end{cases}$$



斜率限制器方法

ii) 若 $g'_j < 0$, $g'_{j+1} > 0$: 为跨音速稀疏波

如果 $q_0 \in [U_j^-, U_j^+]$, 那么通量可以取 $f(U_j^+)$;

(相当于取 U_j^+ 为极点, 令 $g'(U_j^+) = 0$, 自然 $v(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = U_j^+$)

如果 $q_0 \in [U_{j+1}^-, U_{j+1}^+]$, 那么通量可以取 $f(U_{j+1}^-)$;

(相当于取 U_{j+1}^- 为极点, 令 $g'(U_{j+1}^-) = 0$, 自然 $v(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = U_{j+1}^-$)

这样令 $v_0 = \min(\max(U_j^+, q_0), U_{j+1}^-)$, 有:

$$(3.87) \quad G_{j+\frac{1}{2}}^n = f(v_0), \quad \text{若 } g'_j < 0, \quad g'_{j+1} > 0$$



斜率限制器方法

iii) 若 $g'_j > 0$, $g'_{j+1} < 0$: 为跨音速激波, 较为复杂.

此时必有 $U_j^- \geq U_j^+ \geq U_{j+1}^- \geq U_{j+1}^+$.

我们此时需要对 $[U_{j+1}^-, U_j^+]$ 上的 v 值也定义 $g(v)$, 我们也取成线性函数, 斜率取成

$$(3.88) \quad g'_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{f(U_{j+1}^-) - f(U_j^+)}{U_{j+1}^- - U_j^+}, & \text{若 } U_{j+1}^- \neq U_j^+ \\ f'(U_{j+1}^-) = f'(U_j^+), & \text{若 } U_{j+1}^- = U_j^+ \end{cases}$$

现在主要看 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处的激波到底向那个方向传播:

a) 如果 $U_j^+ \neq U_{j+1}^-$, 激波传播的方向取决于 $g'_{j+\frac{1}{2}}$ 的符号, 传播速度 $s = \dot{\xi} = g'_{j+\frac{1}{2}}$, 即有



斜率限制器方法

$$(3.89) \quad G_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} G_j^+, & \text{如果 } g'_{j+\frac{1}{2}} > 0 \text{ (向右);} \\ G_{j+1}^-, & \text{如果 } g'_{j+\frac{1}{2}} < 0 \text{ (向左)} \end{cases}$$

若 $g'_{j+\frac{1}{2}} = 0$, 即 $f(U_j^+) = f(U_{j+1}^-)$. 这说明一开始激波没有移动, 但是左右的数值通量不一定一样, 即左右流过来的物质不一样, 那么随后会发生移动. 令

$$(3.90) \quad \begin{aligned} g_- &= f(U_j^+) - (t - t_n)\sigma_j^n(g'_j)^2, && \text{向右的通量} \\ g_+ &= f(U_{j+1}^-) - (t - t_n)\sigma_{j+1}^n(g'_{j+1})^2, && \text{向左的通量} \end{aligned}$$

$$G_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} G_j^+, & \text{若 } \sigma_j^n(g'_j)^2 < \sigma_{j+1}^n(g'_{j+1})^2, \text{ 即 } g_- > g_+ \text{ (左边流来多)} \\ G_{j+1}^-, & \text{若 } \sigma_j^n(g'_j)^2 > \sigma_{j+1}^n(g'_{j+1})^2, \text{ 即 } g_- < g_+ \text{ (右边流来多)} \end{cases}$$



斜率限制器方法

b) 如果 $U_j^+ = U_{j+1}^-$, 情况如上面类似. 此时 $\sigma_j^n = \sigma_{j+1}^n$.

这说明一开始 $u_h(x, t_n)$ 在 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处连续, 即 t_n 时刻无激波. 但是左右的数值通量不一定一样, 即左右流过来的物质不一样, 那么随后会形成激波并发生移动.

此时仍然可以定义

$$(3.91) \quad G_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} G_j^+, & \text{若 } (g'_j)^2 < (g'_{j+1})^2, \text{ 即 } g_- > g_+ \text{ (左边流来多)} \\ G_{j+1}^-, & \text{若 } (g'_j)^2 > (g'_{j+1})^2, \text{ 即 } g_- < g_+ \text{ (右边流来多)} \end{cases}$$



斜率限制器方法

最后总结一下斜率限制器法为: $u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(G_{j+\frac{1}{2}}^n - G_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$.

1) 若 $g'_j > 0$, $g'_{j+1} < 0$, 且 $g'_{j+\frac{1}{2}} \cdot (U_{j+1}^- - U_j^+) = 0$:

$$G_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} G_j^+, & \text{若 } \sigma_j^n (g'_j)^2 < \sigma_{j+1}^n (g'_{j+1})^2, \text{ 即 } g_- > g_+ \text{ (左边流来多)} \\ G_{j+1}^-, & \text{若 } \sigma_j^n (g'_j)^2 > \sigma_{j+1}^n (g'_{j+1})^2, \text{ 即 } g_- < g_+ \text{ (右边流来多)} \end{cases}$$

2) 其他情形

$$G_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} G_j^+, & \text{如果 } g'_j \geq 0, g'_{j+\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ (特征线向右)} \\ G_{j+1}^-, & \text{如果 } g'_{j+\frac{1}{2}} \leq 0, g'_{j+1} \leq 0 \text{ (特征线向左)} \\ f(v_0), & \text{如果 } g'_j < 0, g'_{j+1} > 0 \text{ (跨音速稀疏波)} \end{cases}$$

其中 $v_0 = \min \left(\max(U_j^+, q_0), U_{j+1}^- \right)$, 而 $f'(q_0) = 0$.



目录 I

1 常微分方程数值解

2 偏微分方程及其差分方法基础知识

3 双曲型问题的差分方法

- 一阶常系数线性方程
- 一阶常系数线性方程组
- 一阶变系数线性方程 (组)
- 双曲守恒律方程
- 双曲守恒律问题的守恒型差分格式
- TVD (Total Variation Diminishing) 格式
- 一阶双曲守恒律方程组初值问题
- 二阶双曲方程
- 初边值条件的处理
- 高维问题
- 拟线性双曲方程的特征线方法



线性方程组情形

这一节考虑如下守恒律方程组初值问题:

$$(3.92) \quad \begin{cases} \vec{u}_t + \vec{f}(\vec{u})_x = 0, & \vec{u}, \vec{f} \in \mathbb{R}^m \\ \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x), & \vec{u}_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

我们先考虑线性情形, 即 $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}} = A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为常系数矩阵:

$$(3.93) \quad \vec{u}_t + A \vec{u}_x = 0.$$

我们容易把用于标量守恒律方程的方法推广过来. 例如,

$$\text{Lax-Friedrichs 格式, } \vec{g}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}A(\vec{u}_j^n + \vec{u}_{j+1}^n) - \frac{1}{2\lambda}(\vec{u}_{j+1}^n - \vec{u}_j^n).$$

$$\text{Lax-Wendroff 格式, } \vec{g}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}A(\vec{u}_j^n + \vec{u}_{j+1}^n) - \frac{\lambda A^2}{2}(\vec{u}_{j+1}^n - \vec{u}_j^n).$$

用 Fourier 分析方法易得上述两种格式的稳定性条件为 $\lambda \rho(A) \leq 1$.



迎风格式

要使用迎风格式, 我们需要先将 A 对角化:

$$\text{取 } S \text{ 非奇异, s.t. } S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

令 $\vec{v} = S^{-1} \vec{u}$, 有 $\vec{v}_t + \Lambda \vec{v}_x = 0$. 可得关于 \vec{v} 的迎风格式

$$\vec{v}_j^{n+1} = \vec{v}_j^n - \lambda (\vec{g}_{j+\frac{1}{2}}^n - \vec{g}_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

$$\text{其中 } \vec{g}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \Lambda (\vec{v}_{j+1}^n + \vec{v}_j^n) - \frac{1}{2} |\Lambda| (\vec{v}_{j+1}^n - \vec{v}_j^n).$$

回到变量 \vec{u} (在上面左乘 S): $\vec{u}_j^{n+1} = \vec{u}_j^n - \lambda (\vec{G}_{j+\frac{1}{2}}^n - \vec{G}_{j-\frac{1}{2}}^n)$, 其中

$$\vec{G}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} A (\vec{u}_{j+1}^n + \vec{u}_j^n) - \frac{1}{2} |A| (\vec{u}_{j+1}^n - \vec{u}_j^n), \text{ 这里 } |A| = S |\Lambda| S^{-1}.$$



通量限制器格式

要使用通量限制器, 比如记 $\vec{g}_L = \vec{g}_{j+\frac{1}{2}}^{\text{Upwind}}$, $\vec{g}_H = \vec{g}_{j+\frac{1}{2}}^{\text{LW}}$.

$$\vec{g}_{j+\frac{1}{2}}^n = \vec{g}_L + \Phi(\vec{g}_H - \vec{g}_L),$$

这里 $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$. 下面看如何选取 Φ .

设 $A \vec{r}_i = \lambda_i \vec{r}_i, i = 1, \dots, m$. 令 $S = [\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

取 $\vec{a}_j = S^{-1}(\vec{u}_{j+1}^n - \vec{u}_j^n) \in \mathbb{R}^m = (a_j^1, \dots, a_j^m)^T$.

用特征向量来表示函数增量 $\vec{u}_{j+1}^n - \vec{u}_j^n = S \vec{a}_j = \sum_{i=1}^m a_j^i \vec{r}_i$.

「之前是标量情形, 可以直接定义斜率. 现在是向量情形, 需要先对角化, 这样要把增量投影到每个特征向量上, 然后再定义斜率, 去刻画“光滑性”.」



通量限制器格式

再根据分量定义斜率, 令
$$\begin{cases} \nu_i = \lambda_i \frac{\tau}{h} = \lambda_i \lambda, \\ \theta_j^i = a_{j'}^i / a_j^i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

其中 $j' = j - \text{sgn}(\lambda_i)$ (选取迎风方向). 这样, 由 $|A| = S|\Lambda|S^{-1}$, $A^2 = S\Lambda^2S^{-1}$, 有

$$\vec{g}_H - \vec{g}_L = \frac{1}{2}(|A| - \lambda A^2)(\vec{u}_{j+1}^n - \vec{u}_j^n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [\text{sgn}(\lambda_i) - \nu_i] \lambda_i a_j^i \vec{r}_i.$$

因而可以取数值通量为:

$$\vec{g}_{j+\frac{1}{2}}^n = \vec{g}_L + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \phi(\theta_j^i) [\text{sgn}(\lambda_i) - \nu_i] \lambda_i a_j^i \vec{r}_i.$$

其中的 $\phi(\theta)$ 可以取之前的 van Leer、min mod、Super bee 等.



非线性方程组情形

此时我们需要先局部线性化. 令 $\hat{A}_j \equiv \hat{A}(\vec{u}_j^n, \vec{u}_{j+1}^n)$, s.t.

$$\hat{A}_j(\vec{u}_{j+1}^n - \vec{u}_j^n) = \vec{f}(\vec{u}_{j+1}^n) - \vec{f}(\vec{u}_j^n).$$

类似于上面线性情形, 我们先找到 \hat{A}_j 的特征值与特征向量:

$$\hat{A}_j \hat{r}_j^i = \hat{\lambda}_j^i \hat{r}_j^i, \quad i = 1, \dots, m$$

即可以用 $\hat{S}_j = [\hat{r}_j^1 \cdots \hat{r}_j^m]$ 将 \hat{A}_j 对角化:

$$\hat{S}_j^{-1} \hat{A}_j \hat{S}_j = \hat{\Lambda}_j = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_j^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\lambda}_j^m \end{pmatrix}$$

回顾一下标量 Roe 格式情形 $g_{j+\frac{1}{2}}^n = f(u_j^n) + \min(\hat{a}, 0)(u_{j+1}^n - u_j^n)$.



非线性方程组情形

这样我们用 Roe 方法解现在的 Riemann 问题有

$$\vec{g}_L = \vec{f}(\vec{u}_j^n) + \sum_{i=1}^m \min(\hat{\lambda}_j^i, 0) \hat{\alpha}_j^i \hat{r}_j^i,$$

其中 $\vec{u}_{j+1}^n - \vec{u}_j^n = \sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_j^i \hat{r}_j^i$. 类似于线性情形 (但采用斜率限制器), 令

$$\begin{cases} \nu_i = \hat{\lambda}_i \frac{\tau}{h} = \lambda_i \lambda, \\ \sigma_j^i = \frac{1}{h} \min \text{ mod } (\hat{\alpha}_j^i \hat{r}_j^i, \hat{\alpha}_{j-1}^i \hat{r}_{j-1}^i), \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

这样可以得到斜率限制器方法的数值通量

$$\vec{g}_{j+\frac{1}{2}}^n = \vec{g}_L + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_j^i [\text{sgn}(\hat{\lambda}_i) - \nu_j^i] h \sigma_j^i.$$



目录 I

1 常微分方程数值解

2 偏微分方程及其差分方法基础知识

3 双曲型问题的差分方法

- 一阶常系数线性方程
- 一阶常系数线性方程组
- 一阶变系数线性方程 (组)
- 双曲守恒律方程
- 双曲守恒律问题的守恒型差分格式
- TVD (Total Variation Diminishing) 格式
- 一阶双曲守恒律方程组初值问题
- 二阶双曲方程
- 初边值条件的处理
- 高维问题
- 拟线性双曲方程的特征线方法



波动方程的初值问题

考虑下面二阶声波方程初值问题

$$(3.94) \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t \in (0, T] \\ u|_{t=0} = f(x), u_t|_{t=0} = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

不妨设 $a > 0$. 波动方程的两族特征线为 $x \pm at = \text{const.}$

由 D'Alembert 公式, 有

$$(3.95) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi.$$

从特征线或者说解的表达式 (3.95) 可以看出 $u(x, t)$ 仅依赖于初值函数在 $[x - at, x + at]$ 上的值, 我们也把此区间 $[x - at, x + at]$ 称为 u 在 (x, t) 点的依赖区域.



波动方程的初值问题

我们也可以把 (3.94) 化为一阶双曲方程组: 令 $v = u_t$, $w = au_x$, 得

$$\begin{cases} v_t - aw_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in (0, T] \\ w_t - av_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in (0, T] \\ v|_{t=0} = g(x), w|_{t=0} = af'(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

令 $\vec{u} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, 有

$$(3.96) \quad \begin{cases} \vec{u}_t + A \vec{u}_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in (0, T] \\ \vec{u}|_{t=0} = \begin{pmatrix} g(x) \\ af'(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

可看到 A 为一对称阵, 特征值为 $\pm a$.



二阶波动方程的差分格式

可以直接对 (3.94) 中的偏导数项用中心差商来逼近, 得到

$$(3.97) \quad \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

显然其截断误差为 $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$, 即为二阶格式.

初始条件可以离散为 $u_j^0 = f(x_j)$, $\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = g(x_j)$.

当然上面时间导数项是一阶逼近, 我们可以通过引入虚拟节点的办法得到二阶逼近:

$$\frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2\tau} = g(x_j) \implies u_j^1 - u_j^{-1} = 2\tau g_j.$$

然后利用在 $n = 0$ 处的方程形式

$$u_j^1 - 2u_j^0 + u_j^{-1} = a^2 \lambda^2 (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0).$$



二阶波动方程的差分格式

消去 u_j^{-1} (注意到 $u_j^0 = f(x_j)$):

$$u_j^1 = f_j + \frac{a^2 \lambda^2}{2} (f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) + \tau g_j.$$

有了 u_j^0, u_j^1 , 便可以利用上面的三层格式计算所有的 u_j^n .

下面看其稳定性分析: 显然上面的离散等价于对一阶方程组的如下离散:

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} - a \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} = 0, \\ \frac{w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\tau} - a \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{h} = 0, \end{cases} \quad \text{其中} \begin{cases} v_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau}, \\ w_{j-\frac{1}{2}}^n = a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}, \end{cases}$$

这样可以得到其增长矩阵为 $G(\tau, \xi) = \begin{pmatrix} 1 & ic \\ ic & 1 - c^2 \end{pmatrix}$, 其中 $c = 2a\lambda \sin \frac{\xi h}{2}$.



二阶波动方程的差分格式

G 的特征方程为: $\mu^2 - (2 - c^2)\mu + 1 = 0$.

解之有

$$\mu_{1,2} = 1 - 2a^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} \pm \sqrt{4a^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} \left(a^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} - 1 \right)}.$$

若 $|a|\lambda > 1$ 会有 $|\mu| > 1$, 不稳定.

若 $|a|\lambda \leq 1$, 有

$$\mu_{1,2} = 1 - 2a^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} \pm i\sqrt{4a^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} \left(1 - a^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} \right)}.$$

此时 $|\mu_{1,2}| = 1$. 令 $\sigma = \xi h$, 有

$|a|\lambda < 1$ 时, 如果 $\sigma \neq 2k\pi$, 则 G 有两个不同特征值;



二阶波动方程的差分格式

如果 $\sigma = 2k\pi$, $G = I$,

$$\frac{dG}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k a \lambda i \\ (-1)^k a \lambda i & 0 \end{pmatrix} \text{ 有两个不同特征值 } \pm (-1)^k a \lambda i.$$

综上所述, 因此时 von Neumann 条件为充要条件, 格式稳定.

当 $|a|\lambda = 1$ 时, 可取 $v_j^0 = (-1)^j$, $w_{j+\frac{1}{2}}^0 = 0$.

$\implies v_j^n = (-1)^{n+j}(1-2n)$, $w_{j+\frac{1}{2}}^n = (-1)^{j+n}2n$. 显然不稳定.

因此这个二阶格式的稳定性条件就是 $|a|\lambda < 1$.



二阶波动方程的差分格式— CFL 条件

类似于一阶双曲方程的差分格式中所讨论的, 对于二阶双曲方程及其差分格式, 我们也可以讨论其解的依赖区域之间的关系, 从而可以导出 CFL 条件 (差分格式收敛的必要条件).

对于格式 (3.96) 而言, 容易看出 u_j^n 在 $P(x_j, t_n)$ 点的依赖区域为 $[x_{j-n}, x_{j+n}]$, 即它会依赖于 $[x_{j-n}, x_{j+n}]$ 上的初值情况.

而微分方程的解 $u(x_j, t_n)$ 在 P 点的依赖区域为 $[x_j - at_n, x_j + at_n]$.

显然, 只有 $[x_{j-n}, x_{j+n}] \supset [x_j - at_n, x_j + at_n]$ 才有可能收敛. 此条件即等价于 $x_j + nh \geq x_j |a| n\tau$, 即 CFL 条件为 $|a|\lambda \leq 1$.

因为 $|a|\lambda = 1$ 时格式不稳定, 自然也不可能收敛. 因此说, **CFL 条件只是收敛的必要条件.**



二阶波动方程等价方程组的差分格式

我们也可对等价的一阶方程组(3.96)采用之前的格式, 如 L-F:

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \frac{1}{2}(\bar{u}_{j+1}^n + \bar{u}_{j-1}^n)}{\tau} + A \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n}{2h} = 0$$

这显然是一个显式两层一阶格式 (如果取定 τ/h 为常数). 其稳定性条件为 $\lambda\rho(A) \leq 1$, 而 A 的两个特征值为 $\pm a$, 因此稳定性条件即为 $|a|\lambda \leq 1$.

也可写出其 L-W 格式:

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\lambda A}{2}(\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2 A^2}{2}(\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n)$$

其稳定性条件也是 $|a|\lambda \leq 1$.



隐式格式

如果我们用 $n-1, n, n+1$ 三个时间层上的二阶中心差商的加权平均来逼近二阶空间导数, 则可以得到以下隐式格式:

$$(3.98) \quad \frac{1}{\tau^2} \delta_t^2 u_j^n = \frac{a^2}{h^2} \delta_x^2 [\theta(u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + (1-2\theta)u_j^n],$$

其中 $0 \leq \theta \leq 1$. 如果 $\theta = 0$ 即为上面显式格式. 而当 $\theta \neq 0$ 时, 它为隐式格式.

之所以取上式右端形式的加权平均是为了保证无论 θ 取多少, 上式的截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$. 我们稍后一点再来看如何构造更高阶的格式. 上面最常用的是取 $\theta = \frac{1}{4}$, 下面先看看此格式的稳定性.

因为这是一个三层格式, 我们先把它化成二层方程组形式.



隐式格式

令 $\nu = a\frac{\tau}{h}$, $\theta = \frac{1}{4}$ 时上面格式可写成

$$\delta_t^2 u_j^n = \frac{\nu^2}{4} \delta_x^2 [u_j^{n+1} + 2u_j^n + u_j^{n-1}]$$

令 $v_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau}$, $w_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{a}{2h} \Delta_+^x (u_j^n + u_j^{n-1})$.

则上式化成以下两层方程组形式

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\nu}{2} \Delta_+^x (w_{j-\frac{1}{2}}^n + w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = w_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\nu}{2} \Delta_-^x (v_j^n + v_j^{n+1}) \end{cases}$$

也可改写成

$$\begin{cases} v_j^{n+1} - \frac{\nu}{2} \Delta_+^x w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = v_j^n + \frac{\nu}{2} \Delta_+^x w_{j-\frac{1}{2}}^n \\ w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\nu}{2} \Delta_-^x v_j^{n+1} = w_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\nu}{2} \Delta_-^x v_j^n \end{cases}$$



隐式格式

这样, 令 $\mathbf{U}_j^n = \begin{pmatrix} v_j^n \\ w_{j-\frac{1}{2}}^n \end{pmatrix} = \mathbf{U}^n e^{ij\xi h}$ 代入上式, 可得

$$\begin{pmatrix} 1 & -i\nu \sin \frac{\xi h}{2} \\ -i\nu \sin \frac{\xi h}{2} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & i\nu \sin \frac{\xi h}{2} \\ i\nu \sin \frac{\xi h}{2} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}^n$$

增长矩阵为 $G(\xi, \tau) = \frac{1}{4+c^2} \begin{pmatrix} 4-c^2 & i4c \\ i4c & 4-c^2 \end{pmatrix}$, 其中 $c = 2\nu \sin \frac{\xi h}{2}$.

计算 G 的特征值为 $\mu_{1,2} = (4+c^2)^{-1}[4-c^2 \pm i4c]$, 显然 $|\mu_{1,2}| = 1$.

由于 $G^*G = I$ 即 G 为酉矩阵. 因而 von Neumann 条件为充要条件. 即此格式为无条件稳定. 事实上有 (3.98) 在 $0 \leq \theta < \frac{1}{4}$ 时稳定性条件为 $\nu \leq \frac{1}{\sqrt{1-4\theta}}$; $\frac{1}{4} \leq \theta \leq 1$ 时为无条件稳定.



高阶格式

为了得到更高阶精度的格式, 如四阶格式, 假设 u 充分光滑, 将 $u_j^{n\pm 1}$ 在 (x_j, t_n) 处 Taylor 展开, 得到

$$u_j^{n+1} + u_j^{n-1} = 2u_j^n + \tau^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_j^n + \frac{\tau^4}{12} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right]_j^n + \mathcal{O}(\tau^6).$$

由方程 (3.94) 得到 $\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} = a^{2k} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}$.

因此有 $\delta_t^2 u_j^n = (a\tau)^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n + \frac{(a\tau)^4}{12} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_j^n + \mathcal{O}(\tau^6)$

再由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}(\delta_x^2 - \frac{\delta_x^4}{12})u + \mathcal{O}(h^4) \implies \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} u = \frac{1}{h^4} \delta_x^4 u + \mathcal{O}(h^2)$

得到四阶格式 ($\nu = a\tau/h$): $\delta_t^2 u_j^n = \nu^2 \left[I + \frac{\nu^2 - 1}{12} \delta_x^2 \right] \delta_x^2 u_j^n.$



高阶隐式格式

如果我们在上式两端都作用算子 $[I + \frac{1}{12}(\nu^2 - 1)\delta_x^2]^{-\frac{1}{2}}$, 并展开至 δ_x^4 项 (即四阶精度), 可以得到求解波动方程的如下形式的四阶隐式格式:

$$(3.99) \quad \left(I - \frac{1}{2}D + \frac{3}{4}D^2\right) \delta_t^2 u_j^n = \nu^2 \left(I + \frac{1}{2}D - \frac{1}{4}D^2\right) \delta_x^2 u_j^n,$$

其中 $D = \frac{1}{12}(\nu^2 - 1)\delta_x^2$.

类似地, 如果作用算子 $(I + D)^{-1}$ 然后展开可以得到另一种四阶隐式格式:

$$(3.100) \quad \delta_t^2 u_j^n = \left[\nu^2 \delta_x^2 + \frac{(\nu^2 - 1)}{12} \delta_x^2 \delta_t^2 - \frac{(\nu^2 - 1)^2}{144} \delta_x^4 \delta_t^2 \right] u_j^n.$$



目录 I

1 常微分方程数值解

2 偏微分方程及其差分方法基础知识

3 双曲型问题的差分方法

- 一阶常系数线性方程
- 一阶常系数线性方程组
- 一阶变系数线性方程 (组)
- 双曲守恒律方程
- 双曲守恒律问题的守恒型差分格式
- TVD (Total Variation Diminishing) 格式
- 一阶双曲守恒律方程组初值问题
- 二阶双曲方程
- 初边值条件的处理
- 高维问题
- 拟线性双曲方程的特征线方法



二阶双曲方程初边值问题

在有界域上双曲问题还需考虑边界条件的处理. 我们先考虑较为简单的二阶双曲方程:

$$(3.101) \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (x, t) \in [0, l] \times [0, T], \\ u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = g(x), & x \in [0, l]. \end{cases}$$

显然我们还需加上两个边界条件才能构成适定问题:

- ① 第一类边界条件: $u|_{x=0} = \mu_0(t), u|_{x=l} = \mu_1(t), t \in [0, T]$.
- ② 第三类边界条件:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_0(t)u \right)_{x=0} = \eta_0(t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_1(t)u \right)_{x=l} = \eta_1(t).$$



二阶双曲方程初边值问题

对于第一类边界条件可以直接离散 (设 $Lh = l$)

$$u_0^n = \mu_0(t_n), \quad u_L^n = \mu_1(t_n).$$

对于第三类边界条件可以引入虚拟节点以得到高阶离散

$$\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} + \alpha_0(t_n)u_0^n = \eta_0(t_n), \quad \frac{u_{L+1}^n - u_{L-1}^n}{2h} + \alpha_1(t_n)u_L^n = \eta_1(t_n).$$

$$\implies u_{-1}^n = u_1^n + 2h(\alpha_0^n u_0^n - \eta_0^n), \quad u_{L+1}^n = u_{L-1}^n + 2h(\eta_1^n - \alpha_1^n u_L^n).$$

为了消去 u_{-1}^n 和 u_{L+1}^n , 我们需要利用边界 ($j = 0, L$) 处的差分格式. 假设我们使用显式格式 (3.97):

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + a^2 \lambda^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

代入上面 u_{-1}^n 和 u_{L+1}^n 的表达式得到:



二阶双曲方程初边值问题

$$\begin{aligned}u_0^{n+1} &= 2u_0^n - u_0^{n-1} + a^2\lambda^2(u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n) \\&= 2u_0^n - u_0^{n-1} + 2a^2\lambda^2[u_1^n - u_0^n + h(\alpha_0^n u_0^n - \eta_0^n)]; \\u_L^{n+1} &= 2u_L^n - u_L^{n-1} + a^2\lambda^2(u_{L+1}^n - 2u_L^n + u_{L-1}^n) \\&= 2u_L^n - u_L^{n-1} + 2a^2\lambda^2[u_{L-1}^n - u_L^n + h(\eta_1^n - \alpha_1^n u_L^n)];\end{aligned}$$

如果我们使用隐式格式 (3.98)、(3.99)、(3.100), 在给定了边界条件后, 我们需要求解线性方程组来得到 u_j^{n+1} .

如果使用虚拟节点, 也同样需要利用边界处的差分格式来消去区域外的节点.



一阶双曲方程初边值问题

下面我们考虑有限域上的一阶双曲方程初边值问题:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, & (x, t) \in [0, 1] \times [0, T], \\ u|_{t=0} = g(x), & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

首先看边界条件该怎么给?

设 $a > 0$, 那么由特征线法知道, 应该在 $x = 0$ 处给定边界条件, 而在 $x = 1$ 处不能给边界条件.

即给定 $u|_{x=0} = \phi(t)$, 且一般还有相容性条件: $\phi(0) = g(0)$.

反之, 如果 $a < 0$, 那么就应该在 $x = 1$ 处给定边界条件.



一阶双曲方程组初边值问题

对于一阶双曲方程组 $\vec{u}_t + A \vec{u}_x = 0, x \in [0, 1], t \in [0, T],$
 $A \in \mathbb{R}^{m \times m}.$

设 S 为 A 的特征向量组成的可逆矩阵, s.t.

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^I & & \\ & \Lambda^{II} & \\ & & \Lambda^{III} \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } \Lambda^I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} > 0, \quad \Lambda^{II} = \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{r+s} \end{pmatrix} < 0, \quad \Lambda^{III} = 0.$$

这样我们令 $\vec{v} = S^{-1} \vec{u}$, 就可以对 \vec{v} 来提边界条件:

$$\vec{v}^I|_{x=0} = \phi^I(t), \quad \vec{v}^{II}|_{x=1} = \phi^{II}(t), \quad \text{对 } \vec{v}^{III} \text{ 不能提边界条件.}$$



初边值问题的数值边界条件处理

用差分方法来求解双曲方程 (组) 初边值问题时, 往往还需要额外的数值边界条件. 边界处处理不好会得到不稳定格式.

例 3.15

先考虑一个简单的对流方程初边值问题:

$$\begin{cases} u_t - u_x = 0, & 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u|_{x=1} = \phi(t), & t > 0. \end{cases}$$

假设我们使用蛙跳格式来求解: (设 $h = \frac{1}{J}$)

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^{n-1} + \lambda (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), & j = 1, 2, \dots, J-1; \quad n \geq 1. \\ u_j^0 &= f_j, & 0 \leq j \leq J. & \quad u_j^n = \phi^n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

初边值问题的数值边界条件处理

因为是三层格式, 所以首先需要计算 u_j^1 : (利用 Taylor 展开)

$$\begin{aligned} u(x, t + \tau) &= u(x, t) + \tau u_t(x, t) + \mathcal{O}(\tau^2) \stackrel{\text{方程}}{=} u(x, t) + \tau u_x(x, t) + \mathcal{O}(\tau^2) \\ &\implies u_j^1 = f(x_j) + \tau f'(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, J \end{aligned}$$

可是从蛙跳格式的计算中可以看出, 我们无法得到 u_0^2 , 这样再计算下去就无法得到 $u_1^3 \dots$ 因此还需给出 u_0^n 的计算方法!

如果使用简单外推: $u_0^n = 2u_1^n - u_2^n$. 我们会发现这是不稳定的.

如取 $u_j^1 = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ 0, & j > 1 \end{cases}$, $u_j^0 = 0, j = 1, \dots$, 容易计算得到

$\|u^n\|_h = nK \rightarrow +\infty$, 当 $\tau \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$ 时.

因此我们须小心处理才行.



初边值问题的数值边界条件处理

我们可以采用有限体积法的思想:

将方程 $u_t - u_x = 0$ 在 $[x_0, x_1] \times [t_{n-1}, t_n]$ 上积分得到:

$$\int_{x_0}^{x_1} [u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})] dx - \int_{t_{n-1}}^{t_n} [u(x_1, t) - u(x_0, t)] dt = 0$$

若使用一点积分 \downarrow “左矩”

\downarrow “左矩”

$$h[u_0^n - u_0^{n-1}] - \tau[u_1^{n-1} - u_0^{n-1}] = 0$$

$$\implies u_0^n = u_0^{n-1} + \lambda(u_1^{n-1} - u_0^{n-1}).$$

如果都用梯形公式得到

$$\frac{h}{2}[u_1^n - u_1^{n-1} + u_0^n - u_0^{n-1}] - \frac{\tau}{2}[u_1^n - u_0^n + u_1^{n-1} - u_0^{n-1}] = 0$$

$$\implies (1 + \lambda)u_0^n = (\lambda - 1)u_1^n + (1 - \lambda)u_0^{n-1} + (1 + \lambda)u_1^{n-1}.$$



初边值问题的数值边界条件处理

因为 u_j^1 已经得到, 也可将方程在 $[x_0, x_1] \times [t_{n-1}, t_{n+1}]$ 上积分:

$$\int_{x_0}^{x_1} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_{n-1})] dx - \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} [u(x_1, t) - u(x_0, t)] dt = 0$$

若使用数值积分 \downarrow “左矩” \swarrow “中点” \swarrow “梯形”

$$h[u_0^{n+1} - u_0^{n-1}] - \tau[2u_1^n - (u_0^{n+1} + u_0^{n-1})] = 0$$

$$\implies (1 + \lambda)u_0^{n+1} = u_0^{n-1} + \lambda(2u_1^n - u_0^{n-1}).$$

如果第一个积分也用梯形公式得到

$$\frac{h}{2}[u_1^{n+1} - u_1^{n-1} + u_0^{n+1} - u_0^{n-1}] - \tau[2u_1^n - (u_0^{n+1} + u_0^{n-1})] = 0$$

$$\implies (1 + 2\lambda)u_0^{n+1} = -u_1^{n+1} + 4\lambda u_1^n + (1 - 2\lambda)u_0^{n-1} + u_1^{n-1}.$$

其他情形 (方程组、其他格式) 可以类似处理.



一阶方程组问题的数值边界条件

例 3.16

再看一个一阶双曲方程组初边值问题:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + A\mathbf{u}_x = 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{f}(x), & x > 0; \\ u|_{x=0} = 0, & t > 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{这里 } \mathbf{u} = (u, v)^T \\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

从微分方程初边值问题来说, 我们不能给定 $v(0, t)$, 否则就不适定了. 假设我们使用 *Lax-Wendroff* 格式来求解:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^{n-1} + \frac{\lambda}{2} (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \\ v_j^{n+1} &= v_j^{n-1} + \frac{\lambda}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n), \end{aligned}$$



一阶方程组问题的数值边界条件

从上面 L-W 格式的计算来看, 我们可以计算出 u_j^{n+1}, v_j^{n+1} ($j = 1, \dots$), 而 u_0^{n+1} 可以由边界条件得到, 但没法得到 v_0^{n+1} . 而它在计算 u_1^{n+2}, v_1^{n+2} 中要用到. 因此我们必须补充出 v_0^{n+1} 的计算公式.

与前面类似的做法, 我们可以利用有限体积法、或 Taylor 展开、或特征线法的思想来构造合适的计算公式.

我们先看有限体积法的思想: 将方程 $v_t - u_x = 0$ 在小区域 $\{0 \leq x \leq h, n\tau \leq t \leq (n+1)\tau\}$ 上积分得到:

$$\int_0^h [v(x, t_{n+1}) - v(x, t_n)] dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [u(h, t) - u(0, t)] dt.$$

然后用梯形公式计算上述积分得到

$$v_0^{n+1} = v_1^n + v_0^n - v_1^{n+1} + \lambda[u_1^{n+1} + u_0^{n+1} - u_1^n - u_0^n]$$



一阶方程组问题的数值边界条件

再看 Taylor 展开思想:

由边界条件 $u(0, t) = 0, t > 0 \implies u_t(0, t) = 0,$

结合方程 $u_t - v_x = 0$ 有 $v_x(0, t) = 0.$

再用单边差商近似即得

$$v_0^{n+1} = v_1^{n+1}.$$

也可用 Taylor 展开得到二阶近似公式

$$3v_0^{n+1} - 4v_1^{n+1} + v_2^{n+1} = 0.$$

也可利用方程 $v_t - u_x = 0$ 离散得到

$$v_0^{n+1} = v_0^n + \lambda(u_1^n - u_0^n).$$



一阶方程组问题的数值边界条件

也可以利用把 A 对角化后, 利用特征线法构造:

$$\text{令 } S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = S^{-1}\mathbf{u}, \Lambda = S^{-1}AS, \text{ 即有}$$

$$\mathbf{v}_t + \Lambda \mathbf{v}_x = 0.$$

设 $\mathbf{v} = (\xi, \eta)^T$, 其中 $\xi = u - v$, $\eta = u + v$. 要给出 v_0^{n+1} , 即要给出 η_0^{n+1} . 利用特征线可知 $\eta_0^{n+1} = \eta_Q^n$, Q 为过 $(0, t_{n+1})$ 的特征线与 $t = t_n$ 的交点. 再利用插值得到 (由稳定性要求 $\lambda = \tau/h \leq 1$)

$$\eta_0^{n+1} = \eta_0^n + \lambda(\eta_1^n - \eta_0^n).$$

上面式子也相当于用迎风格式求解 $\eta_t - \eta_x = 0$.



目录 I

1 常微分方程数值解

2 偏微分方程及其差分方法基础知识

3 双曲型问题的差分方法

- 一阶常系数线性方程
- 一阶常系数线性方程组
- 一阶变系数线性方程 (组)
- 双曲守恒律方程
- 双曲守恒律问题的守恒型差分格式
- TVD (Total Variation Diminishing) 格式
- 一阶双曲守恒律方程组初值问题
- 二阶双曲方程
- 初边值条件的处理
- 高维问题
- 拟线性双曲方程的特征线方法



高维问题的处理

原则上讲一维情形的差分格式都可以类推至高维问题, 但是往往存在稳定性条件过于苛刻(对显式格式) 及线性方程组无法快速求解(对隐式格式) 等问题. 因此有些问题还需要仔细考虑.

我们先考虑常系数一阶双曲方程二维问题: (a, b 为常数)

$$(3.102) \quad \begin{cases} u_t + au_x + bu_y = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

由特征线法可得解为 $u(x, y, t) = u_0(x - at, y - bt)$.

例如我们仍考虑用迎风格式来求解 (无妨设 $a > 0, b > 0$)

$$(3.103) \quad \begin{cases} \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} + a \frac{u_{jk}^n - u_{j-1,k}^n}{h} + b \frac{u_{jk}^n - u_{j,k-1}^n}{h} = 0, \\ u_{jk}^0 = u_0(x_j, y_k). \end{cases}$$



一阶双曲方程二维问题

显然迎风格式为一阶精度, 令 $\lambda = \frac{\tau}{h}$, 我们来看其稳定性:

令 $u_{jk}^n = U^n e^{i(j\xi_1 h + k\xi_2 h)}$ 代入上面(3.103):

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+1} &= [1 - \lambda(a + b)]u_{jk}^n + a\lambda u_{j-1,k}^n + b\lambda u_{j,k-1}^n \\ \implies U^{n+1} &= [1 - \lambda(a + b) + a\lambda e^{-i\xi_1 h} + b\lambda e^{-i\xi_2 h}]U^n \end{aligned}$$

即增长因子为

$$\begin{aligned} G(\xi_1, \xi_2, \tau) &= 1 - \lambda[a(1 - \cos \xi_1 h) + b(1 - \cos \xi_2 h)] \\ &\quad - i\lambda[a \sin \xi_1 h + b \sin \xi_2 h]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies |G|^2 &= \{1 - \lambda[a(1 - \cos \xi_1 h) + b(1 - \cos \xi_2 h)]\}^2 \\ &\quad + \lambda^2[a \sin \xi_1 h + b \sin \xi_2 h]^2 \\ &= 1 - 4\lambda(a \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + b \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2}) \\ &\quad + 4\lambda^2[a^2 \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + b^2 \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2} + 2ab \sin \frac{\xi_1 h}{2} \sin \frac{\xi_2 h}{2} \cos \frac{(\xi_1 - \xi_2)h}{2}]. \end{aligned}$$



一阶双曲方程二维问题

(利用 $|\cos \frac{(\xi_1 - \xi_2)h}{2}| \leq 1$, 及 $2xy \leq x^2 + y^2$ 得)

$$|G|^2 \leq 1 - 4\lambda[a \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + b \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2}] + 8\lambda^2[a^2 \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + b^2 \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2}].$$

考虑到 ξ_1, ξ_2 的独立性, 我们需要

$$8a^2\lambda^2 - 4a\lambda \leq 0, \quad 8b^2\lambda^2 - 4b\lambda \leq 0$$

才能保证 $|G|^2 \leq 1$. 即稳定性条件是

$$(3.104) \quad |a|\lambda \leq \frac{1}{2}, \quad \text{且} \quad |b|\lambda \leq \frac{1}{2}.$$

显然比一维情形更苛刻.

为了要放宽此约束, 我们可以考虑算子分裂算法.



算子分裂方法

考虑以下一般形式的时间发展方程初值问题

$$(3.105) \quad \begin{cases} u_t = (\mathcal{A} + \mathcal{B})u, \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases}$$

其中 \mathcal{A}, \mathcal{B} 是两个空间微分算子.

由算子半群理论, 上述初值问题的解可以写成

$$u(x, t) = \exp(t(\mathcal{A} + \mathcal{B}))u_0(x).$$

如果我们用数值解法求解 (3.105), 从 $t_n \rightarrow t_{n+1}$:

$$(3.106) \quad \begin{cases} u_t = (\mathcal{A} + \mathcal{B})u, & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ u|_{t=t_n} = u_n(x). \end{cases} \longrightarrow u(x, t_{n+1}) = e^{\tau(\mathcal{A} + \mathcal{B})}u_n(x)$$



算子分裂方法

我们把 (3.106) 分成以下两个问题来解:

$$(3.107) \quad \begin{cases} \tilde{u}_t = \mathcal{A}\tilde{u}, & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \tilde{u}|_{t=t_n} = u_n(x). \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{u}_t = \mathcal{B}\hat{u}, & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \hat{u}|_{t=t_n} = \tilde{u}(x, t_{n+1}). \end{cases}$$

最后用 $\hat{u}(x, t_{n+1})$ 来近似 $u(x, t_{n+1})$.

显然有 $\hat{u}(x, t_{n+1}) = e^{\tau\mathcal{B}}e^{\tau\mathcal{A}}u_n(x)$, 与 $u(x, t_{n+1})$ 相比有

$$\begin{aligned} u(x, t_{n+1}) - \hat{u}(x, t_{n+1}) &= [e^{\tau(\mathcal{A}+\mathcal{B})} - e^{\tau\mathcal{B}}e^{\tau\mathcal{A}}]u_n(x) \\ &= \frac{\tau^2}{2}(\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}) + \mathcal{O}(\tau^3). \end{aligned}$$

一般来说 $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$, 因此算子分裂算法 (3.107) 的整体截断误差就是 $\mathcal{O}(\tau)$.



算子分裂方法—Strang's Splitting

当然我们可以将上面一阶格式改进为二阶:

Strang's Splitting: 将上面 (3.107) 改成以下三步:

(3.108)

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = \mathcal{A}\tilde{u}, & t \in [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}] \\ \tilde{u}|_{t=t_n} = u_n(x). \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{u}_t = \mathcal{B}\hat{u}, & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \hat{u}|_{t=t_n} = \tilde{u}(x, t_{n+\frac{1}{2}}). \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{u}_t = \mathcal{A}\bar{u}, & t \in [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}] \\ \bar{u}|_{t=t_n} = \hat{u}(x, t_{n+1}). \end{cases}$$

最后用 $\bar{u}(x, t_{n+\frac{1}{2}})$ 来近似 $u(x, t_{n+1})$.

显然有 $\bar{u}(x, t_{n+\frac{1}{2}}) = e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}}e^{\tau\mathcal{B}}e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}}u_n(x)$, 与 $u(x, t_{n+1})$ 相比有

$$\begin{aligned} u(x, t_{n+1}) - \bar{u}(x, t_{n+\frac{1}{2}}) &= [e^{\tau(\mathcal{A}+\mathcal{B})} - e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}}e^{\tau\mathcal{B}}e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}}]u_n(x) \\ &= \frac{\tau^3}{24}(\mathcal{A}^2\mathcal{B} - 2\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B}^2\mathcal{A}) + \mathcal{O}(\tau^4). \end{aligned}$$

即 Stang's 分裂算法 (3.108) 的整体截断误差就是 $\mathcal{O}(\tau^2)$.



算子分裂方法—Strang's Splitting

我们可以看到, 虽然看起来 Strang's Splitting 的计算量比简单算子分裂要大约二分之一, 但是实际计算时我们可以使得其计算量大致差不多:

例如我们要计算到 $u(x, T) = u(x, N\tau) \approx U^N(x)$, 我们有

$$U^N = \left(e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} e^{\tau\mathcal{B}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} \right)^N u_0(x)$$

由于 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 总是可交换的, 因而有 $e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} = e^{\tau\mathcal{A}}$. 这样上式可以合并后写成:

$$U^N = e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} e^{\tau\mathcal{B}} \left(e^{\tau\mathcal{A}} e^{\tau\mathcal{B}} \right)^{N-1} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{A}} u_0(x)$$

这样保证了二阶精度的同时, 计算量却与简单分裂算法几乎一样.

当然如果算子 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 可交换, 则如此分裂并没带来误差.



算子分裂方法求解高维双曲方程

下面看如何使用算子分裂思想构造高维双曲方程的差分格式:

例如使用 Lax-Wendroff 格式来求解二维问题(3.102), 直接推导

$$\begin{aligned}u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^n + \tau \partial_t u_{jk}^n + \frac{\tau^2}{2} \partial_{tt} u_{jk}^n + \mathcal{O}(\tau^3) \\&= u_{jk}^n - \tau(a\partial_x + b\partial_y)u_{jk}^n + \frac{\tau^2}{2}(a^2\partial_{xx} + 2ab\partial_{xy} + b^2\partial_{yy})u_{jk}^n + \mathcal{O}(\tau^3) \\&= \left[I - \frac{\lambda}{2}(a\Delta_0^x + b\Delta_0^y) + \frac{\lambda^2}{2}(a^2\delta_x^2 + \frac{ab}{2}\Delta_0^x\Delta_0^y + b^2\delta_y^2) \right] u_{jk}^n\end{aligned}$$

用 Fourier 分析方法可得其稳定性条件为

$$|a|\lambda \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad |b|\lambda \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

显然比一维苛刻多了.



算子分裂方法求解高维双曲方程

如果使用算子分裂思想, 即将 $a\partial_x$ 与 $b\partial_y$ 分开 (简单分裂即可):

(3.109)

$$\begin{cases} u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = u_{jk}^n - \frac{a\lambda}{2}(u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n) + \frac{a^2\lambda^2}{2}(u_{j+1,k}^n - 2u_{jk}^n + u_{j-1,k}^n) \\ u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{b\lambda}{2}(u_{j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j,k-1}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{b^2\lambda^2}{2}(u_{j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + u_{j,k-1}^{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

显然其增长因子为 $G(\xi_1, \xi_2, \tau) = G_2(\xi_2, \tau)G_1(\xi_1, \tau)$, 其中 G_i 为一维情形增长因子, 即

$$G_1(\xi_1, \tau) = 1 - 2a^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} - ia\lambda \sin \xi_1 h,$$

$$G_2(\xi_2, \tau) = 1 - 2b^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2} - ib\lambda \sin \xi_2 h,$$

显然只需 $|G_1| \leq 1$, $|G_2| \leq 1$ 即可, 即稳定性条件就是 $|a|\lambda \leq 1$, 且 $|b|\lambda \leq 1$. 这与一维情形一样. 显然好于直接推导的二维格式.



二维一阶双曲方程组

下面考虑二维一阶双曲方程组:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0, \quad \text{设 } \alpha A + (1 - \alpha)B \text{ 可对角化}$$

可以类似于上面构造算子分裂格式. 但是要注意通常 $AB \neq BA$, 因此我们要使用 Strang's Splitting 方法才能得到二阶格式.

比如使用简单分裂的 Lax-Friedrichs 格式:(设 $T = N\tau$)

$$n = 0, \dots, N-1 \begin{cases} \mathbf{u}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{u}_{j+1,k}^n + \mathbf{u}_{j-1,k}^n}{2} - \frac{\lambda}{2} A (\mathbf{u}_{j+1,k}^n - \mathbf{u}_{j-1,k}^n) \\ \mathbf{u}_{jk}^{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{u}_{j,k-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\lambda}{2} B (\mathbf{u}_{j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{j,k-1}^{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

若固定 $\frac{\tau}{h}$, 此算法为一阶精度.



二维一阶双曲方程组

可以使用 Strang 分裂形式的 Lax-Wendroff 格式: (设 $T = N\tau$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{jk}^{\frac{1}{4}} = \mathbf{u}_{j,k}^0 - \frac{\lambda A}{4} \Delta_0^x \mathbf{u}_{jk}^0 + \frac{\lambda^2 A^2}{8} \delta_{0,x}^2 \mathbf{u}_{j,k}^0 \\ \mathbf{u}_{jk}^{\frac{4n-1}{4}} = \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4n-3}{4}} - \frac{\lambda B}{2} \Delta_0^y \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4n-3}{4}} + \frac{\lambda^2 B^2}{2} \delta_{0,y}^2 \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4n-3}{4}} \\ \mathbf{u}_{jk}^{\frac{4n+1}{4}} = \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4n-1}{4}} - \frac{\lambda A}{2} \Delta_0^x \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4n-1}{4}} + \frac{\lambda^2 A^2}{2} \delta_{0,x}^2 \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4n-1}{4}} \\ \mathbf{u}_{jk}^{\frac{4N-1}{4}} = \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4N-3}{4}} - \frac{\lambda B}{2} \Delta_0^y \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4N-3}{4}} + \frac{\lambda^2 B^2}{2} \delta_{0,y}^2 \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4N-3}{4}} \\ \mathbf{u}_{jk}^N = \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4N-1}{4}} - \frac{\lambda A}{4} \Delta_0^x \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4N-1}{4}} + \frac{\lambda^2 A^2}{8} \delta_{0,x}^2 \mathbf{u}_{j,k}^{\frac{4N-1}{4}} \end{array} \right\} 1 \leq n \leq N-1$$

即若记 $S_{A/B}(t)$ 为含 A/B 的计算时长为 t 的解算子, 有

$$\mathbf{u}^N = S_A\left(\frac{\tau}{2}\right) S_B(\tau) (S_A(\tau) S_B(\tau))^{N-1} S_A\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathbf{u}^0.$$



二维一阶双曲方程---隐式格式

高维情形我们当然也可以使用隐式格式进一步提高稳定性.

以对流方程为例 $u_t + au_x + bu_y = 0$. 直接推导 Crank-Nicolson 格式为

$$(3.110) \quad \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} + \frac{1}{4h} \left\{ a[u_{j+1,k}^{n+1} - u_{j-1,k}^{n+1} + u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n] \right. \\ \left. + b[u_{j,k+1}^{n+1} - u_{j,k-1}^{n+1} + u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n] \right\} = 0$$

其增长因子为

$$(3.111) \quad G(\xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{1 - i\frac{\lambda}{2}(a \sin \xi_1 h + b \sin \xi_2 h)}{1 + i\frac{\lambda}{2}(a \sin \xi_1 h + b \sin \xi_2 h)},$$

显然有 $|G| = 1$, 即 C-N 格式无条件稳定. 但是其线性方程组带宽为5, 不是三对角矩阵, 不能用追赶法求解.



二维一阶双曲方程---算子分裂 C-N 格式

从上面可知, 在采用隐式格式时也最好使用算子分裂技巧. 例如可以得到如下算子分裂形式的 C-N 格式

$$(3.112) \quad \begin{cases} \frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - u_{jk}^n}{\tau} + \frac{a}{4h} \Delta_0^x [u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + u_{jk}^n] = 0 \\ \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{b}{4h} \Delta_0^y [u_{jk}^{n+1} + u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}] = 0 \end{cases}$$

显然每步都是无条件稳定的, 且为三对角矩阵可用追赶法求解. 整个格式也是二阶精度的.



二维一阶双曲方程—C-N 格式的变形

从原始的 C-N 格式可以推导出不同形式的分裂形式. 将(3.110)改写成

$$\begin{aligned}
 (3.113) \quad & \left(1 + \frac{a\lambda}{4}\Delta_0^x + \frac{b\lambda}{4}\Delta_0^y\right) u_{jk}^{n+1} = \left(1 - \frac{a\lambda}{4}\Delta_0^x - \frac{b\lambda}{4}\Delta_0^y\right) u_{jk}^n \\
 \Rightarrow & \left[\left(1 + \frac{a\lambda}{4}\Delta_0^x\right) \left(1 + \frac{b\lambda}{4}\Delta_0^y\right) - \frac{ab\lambda^2}{16}\Delta_0^x\Delta_0^y \right] u_{jk}^{n+1} \\
 = & \left[\left(1 - \frac{a\lambda}{4}\Delta_0^x\right) \left(1 - \frac{b\lambda}{4}\Delta_0^y\right) - \frac{ab\lambda^2}{16}\Delta_0^x\Delta_0^y \right] u_{jk}^n
 \end{aligned}$$

注意到 $\frac{ab\lambda^2}{16}\Delta_0^x\Delta_0^y(u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n)$ 为 $\mathcal{O}(\tau h^2)$ 阶的项, 故舍去后仍然是二阶格式.



二维一阶双曲方程—C-N 格式的变形

因此我们可以从 (3.113) 式得到如下分裂形式

$$(3.114) \quad \begin{cases} (1 + \frac{a\lambda}{4}\Delta_0^x) u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = [(1 - \frac{a\lambda}{4}\Delta_0^x)(1 - \frac{b\lambda}{4}\Delta_0^y)] u_{jk}^n \\ (1 + \frac{b\lambda}{4}\Delta_0^y) u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

相当于引入了一个中间变量 $u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}$. 这样每一步也都是三对角矩阵, 可以用追赶法求解. 增长因子与前面的格式 (3.112) 一样, 也为

$$G = \frac{(1 - i\frac{a\lambda}{2}\sin\xi_1 h)(1 - i\frac{b\lambda}{2}\sin\xi_2 h)}{(1 + i\frac{a\lambda}{2}\sin\xi_1 h)(1 + i\frac{b\lambda}{2}\sin\xi_2 h)},$$

即 $|G| \equiv 1$ 无条件稳定.

即这这也是一个无条件稳定、可快速求解的二阶格式.



二维一阶双曲方程—C-N 格式的变形

我们也可在(3.113)式两边同减去 $(1 + \frac{a\lambda}{4}\Delta_0^x)(1 + \frac{b\lambda}{4}\Delta_0^y) u_{jk}^n$ 得到 (记 $\Delta u_{jk} = u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n$, 计算出 Δu_{jk} 后, $u_{jk}^{n+1} = \Delta u_{jk} + u_{jk}^n$)

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{a\lambda}{4}\Delta_0^x\right) \left(1 + \frac{b\lambda}{4}\Delta_0^y\right) \Delta u_{jk} \\ = & - \left(\frac{a\lambda}{2}\Delta_0^x + \frac{b\lambda}{2}\Delta_0^y\right) u_{jk}^n + \frac{ab\lambda^2}{16} \Delta_0^x \Delta_0^y \Delta u_{jk} \end{aligned}$$

这样舍去高阶项可以得到如下分裂形式 (有时称为 δ -格式)

$$(3.115) \quad \begin{cases} \left(1 + \frac{a\lambda}{4}\Delta_0^x\right) \Delta u_{jk}^* & = - \left(\frac{a\lambda}{2}\Delta_0^x + \frac{b\lambda}{2}\Delta_0^y\right) u_{jk}^n \\ \left(1 + \frac{b\lambda}{4}\Delta_0^y\right) \Delta u_{jk} & = \Delta u_{jk}^* \end{cases}$$

这也是无条件稳定的二阶格式.



三维问题

但是我们需要注意, 上面的 (3.114), (3.115) 式不能直接推广到更高维情形, 那样得不到无条件稳定的格式.

我们算子分裂的格式 (3.112) 则可以直接推广到更高维情形.

例如考虑三维问题 $u_t + au_x + bu_y + cu_z = 0$, 可用如下格式

$$(3.116) \quad \begin{cases} \frac{u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} - u_{jkl}^n}{\tau} + \frac{a}{4h} \Delta_0^x [u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} + u_{jkl}^n] = 0 \\ \frac{u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} - u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} + \frac{b}{4h} \Delta_0^y [u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} + u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}}] = 0 \\ \frac{u_{jkl}^{n+1} - u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} + \frac{c}{4h} \Delta_0^z [u_{jkl}^{n+1} + u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}}] = 0 \end{cases}$$

这仍然是无条件稳定的二阶格式, 且可快速求解.



三维方程组情形

如果是三维方程组情形 $\mathbf{u}_t + A\mathbf{u}_x + B\mathbf{u}_y + C\mathbf{u}_z = 0$, 考虑到不可交换性, 要想得到二阶格式, 需要使用 Strang's Splitting 的思想. 如果记 $S_{A/B/C}(t)$ 为含 $A/B/C$ 的计算时长为 t 的二阶 C-N 解算子, 可以采用依次分裂做法

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^N &= \left[S_C\left(\frac{\tau}{2}\right) S_{A+B}(\tau) S_C\left(\frac{\tau}{2}\right) \right]^N \mathbf{u}^0 \\
 &= \left[S_C\left(\frac{\tau}{2}\right) S_A\left(\frac{\tau}{2}\right) S_B(\tau) S_A\left(\frac{\tau}{2}\right) S_C\left(\frac{\tau}{2}\right) \right]^N \mathbf{u}^0 \\
 &= S_C\left(\frac{\tau}{2}\right) \left[S_A\left(\frac{\tau}{2}\right) S_B(\tau) S_A\left(\frac{\tau}{2}\right) S_C(\tau) \right]^{N-1} \\
 &\quad S_A\left(\frac{\tau}{2}\right) S_B(\tau) S_A\left(\frac{\tau}{2}\right) S_C(\tau) \mathbf{u}^0
 \end{aligned}$$



高维二阶双曲方程情形

对于高维二阶双曲问题, 如 $u_{tt} = a^2 u_{xx} + b^2 u_{yy}$.

我们当然可以先把它化成一阶双曲方程组的形式, 然后用之前分裂做法. 也可以简单引入 $u_t = v$ 化成一阶时间发展问题即可:

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = a^2 u_{xx} + b^2 u_{yy}. \end{cases}$$

然后再分裂:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = \tilde{v}, \\ \tilde{v}_t = a^2 \tilde{u}_{xx}, \\ \tilde{u}|_{t=t_n} = u(t_n), \\ \tilde{v}|_{t=t_n} = v(t_n). \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{u}_t = 0, \\ \hat{v}_t = b^2 \hat{u}_{xx}, \\ \hat{u}|_{t=t_n} = \tilde{u}(t_{n+1}), \\ \hat{v}|_{t=t_n} = \tilde{v}(t_{n+1}). \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{u}(t_{n+1}) \rightarrow u(t_{n+1}) \\ \hat{v}(t_{n+1}) \rightarrow v(t_{n+1}) \end{cases}$$



高维二阶双曲方程情形

然后我们可以用各种离散格式进行离散, 以得到不同算法.

例如使用 Crank-Nicolson 形式格式离散:

$$n = 0, \dots, N-1 \left\{ \begin{array}{l} u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = u_{jk}^n + \frac{\tau}{2} \left(v_{jk}^n + v_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ v_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = v_{jk}^n + \frac{a^2 \tau}{2h^2} \delta_x^2 \left(u_{jk}^n + u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \right); \\ u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}, \\ v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{b^2 \tau}{2h^2} \delta_y^2 \left(u_{jk}^{n+1} + u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \right). \end{array} \right.$$

实际上第一小步可以消去 $v_{jk}^{n+\frac{1}{2}}$ 而只解一个关于 $u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}$ 的三对角方程组, 而第二小步是可以显式计算的.



目录 I

1 常微分方程数值解

2 偏微分方程及其差分方法基础知识

3 双曲型问题的差分方法

- 一阶常系数线性方程
- 一阶常系数线性方程组
- 一阶变系数线性方程 (组)
- 双曲守恒律方程
- 双曲守恒律问题的守恒型差分格式
- TVD (Total Variation Diminishing) 格式
- 一阶双曲守恒律方程组初值问题
- 二阶双曲方程
- 初边值条件的处理
- 高维问题
- 拟线性双曲方程的特征线方法



特征线方法

前面我们介绍过将特征线法结合插值方法构造差分格式的思想, 尤其是线性常系数问题非常方便, 可以构造出迎风格式, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, Beam-Warming 等格式.

我们也可以完全使用特征线方法来求解拟线性双曲方程 (组). 也就是说, 并不预先在求解区域内剖分好网格, 而是随着时间的推进, 逐步地采用近似特征线来形成网格.

在计算中, 区域的离散和近似解的计算是交替进行的.

所以严格来说, 特征线方法不是差分方法. 但是在流体计算中该方法仍有广泛的应用, 我们简单介绍一下.



一阶拟线性双曲方程

考虑一阶拟线性双曲方程

$$(3.117) \quad au_t + bu_x = c$$

这里 a, b, c 均是 x, t, u 的函数. 我们知道该拟线性双曲方程的特征方程为

$$(3.118) \quad adx - bdt = 0.$$

沿着该特征线, 原偏微方程 (3.117) 可以化为以下常微分方程

$$(3.119) \quad cdt - adu = 0 \quad \text{或} \quad cdx - bdu = 0.$$

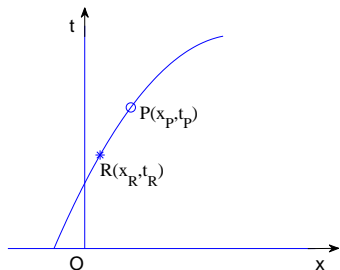
也可将 (3.118)–(3.119) 统一写成

$$(3.120) \quad \frac{dt}{a(x, t, u)} = \frac{dx}{b(x, t, u)} = \frac{du}{c(x, t, u)}.$$



一阶拟线性双曲方程

当然我们无法像线性问题那样通过特征线给出解的显式解析表达式, 我们通常只能通过近似求解的办法给出解的表达式。



假定在 $R(x_R, t_R)$ 点处 $u(x, t)$ 的值已经得到. 设 $P(x_P, t_P)$ 是过 R 点的特征线上的另一点, 并设 $|t_P - t_R|$ 充分小. (如左图所示) 以下用 $x^{(i)}, u^{(i)}$ 分别表示 x, u 的第 i 次的近似值. 这样常微方程 (3.118) 可近似为

$$a_R(x_P^{(1)} - x_R) = b_R(t_P - t_R).$$

这里 $u_R = u(x_R, t_R)$, $a_R = a(x_R, t_R, u_R)$, $b_R = b(x_R, t_R, u_R)$.



一阶拟线性双曲方程

有了 x_P 的一个近似值之后, 可以利用 (3.119) 得到 $u(x_P, t_P)$ 的近似值 $u_P^{(1)}$:

$$a_R(u_P^{(1)} - u_R) = c_R(t_P - t_R),$$

其中 $c_R = c(x_R, t_R, u_R)$. 这样可以依次得到过 (x_P, t_P) 的特征线上每个点的近似值. 不过这只有一阶精度. 可以利用如下格式进行迭代修正: (这里 $\xi^{(i)} = \xi(x_P^{(i)}, t_P, u_P^{(i)})$, $\xi = a, b, c$)

$$(3.121) \quad i = 1, \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_R + a_P^{(i)}}{2} (x_P^{(i+1)} - x_R) = \frac{b_R + b_P^{(i)}}{2} (t_P - t_R), \\ \frac{a_R + a_P^{(i)}}{2} (u_P^{(i+1)} - u_R) = \frac{c_R + c_P^{(i)}}{2} (t_P - t_R), \end{array} \right.$$

可以重复上述过程, 直到满足精度为止.



一阶拟线性双曲方程

例 3.17

试用特征线法求解拟线性方程

$$\sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = -u^2, \quad 0 < x < +\infty.$$

其中 $u(x, 0) = 1, 0 < x < +\infty$.

解: 首先求过 $R(x_R, 0)$ 点的特征线 ($x_R > 0$). 利用

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{u} = \frac{du}{-u^2}$$

即条件 $u(x_R, 0) = 1$, 可以计算出

$$y = \ln \frac{1}{u}, \quad \text{及} \quad \frac{1}{u} = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x_R} + 1.$$



一阶拟线性双曲方程

消去 u 可得特征线方程为 $y = \ln(2\sqrt{x} - 2\sqrt{x_R} + 1)$. 代入可得, 沿着该特征线

$$u = e^{-y} = \frac{1}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{x_R} + 1}.$$

下面我们来看如何计算过 $R(x_R, 0)$ 的特征线上 $P(x_P, y_P)$ 的近似值 $u(x_P, y_P)$. 例如取 $x_R = 1, y_R = 0$, 我们有 $u_R = 1$. 欲计算 $x_P = 1.1, y_P = y$ (还需计算) 处的 $u_P = u(x_P, y_P)$? 从上面表达式当然可以计算出 $y_P = 0.0934\cdots, u_P = 0.9111\cdots$

由特征线方程: $\sqrt{x}dy = udx$ 及 $\sqrt{x}du = -u^2dx$ 可得

$$\sqrt{x_R}(y_P^{(1)} - y_R) = \sqrt{x_R}y_P^{(1)} = u_R(x_P - x_R) = 0.1$$

$$\sqrt{x_R}(u_P^{(1)} - u_R) = \sqrt{x_R}(u_P^{(1)} - 1) = -u_R^2(x_P - x_R) = -0.1$$

即得到 $y_P^{(1)} = 0.1, u_P^{(1)} = 0.9$.



一阶拟线性双曲方程

我们当然还可以做进一步修正: (利用平均值法)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sqrt{x_R} + \sqrt{x_P})(y_P^{(2)} - y_R) &= \frac{1}{2}(u_R + u_P^{(1)})dx \\ \text{及 } \frac{1}{2}(\sqrt{x_R} + \sqrt{x_P})(u_P^{(2)} - u_R) &= -\frac{1}{2}[u_R^2 + (u_P^{(1)})^2]dx \end{aligned}$$

代入已经计算出的 $y_P^{(1)}$ 与 $u_P^{(1)}$ 可得

$$y_P^{(2)} = 0.0927 \dots, \quad u_P^{(2)} = 0.9117 \dots$$

迭代一次显然精度已大为提高. \square

我们也可以把特征线法思想用于二阶拟线性双曲方程及一阶双曲方程组问题的求解.



一阶拟线性双曲方程组

我们考虑下面一阶拟线性双曲方程组初值问题

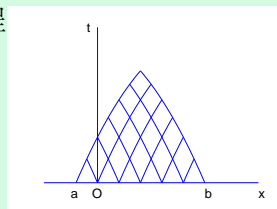
$$(3.122) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_t + A\mathbf{u}_x = 0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{f}(x). \end{cases}$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p)^T \in \mathbb{R}^p$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, 并且每个 a_{ij} 均为 x, t, \mathbf{u} 的函数. 为简单起见, 目前仅考虑 (3.122) 在计算区域内有光滑解. 且不妨设 $p = 2$, 即令 $\mathbf{u} = (u, v)^T$.

这样我们可以写出过每点 (x, t) 的两条特征线方程为

$$(3.123) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1(x, t, u, v), \\ \frac{dx}{dt} = \lambda_2(x, t, u, v). \end{cases}$$

其中 λ_i 为 A 的特征值.



一阶拟线性双曲方程组

设 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 即 $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (P_1, P_2)$ 为相应特征向量. 我们知道 $P^{-1}\mathbf{u}$ 沿着每条特征线不变. 也就是说有

$$(3.124) \quad \begin{cases} \alpha du + \beta dv = 0, & (\text{沿着第一族特征线}) \\ \gamma du + \delta dv = 0, & (\text{沿着第二族特征线}) \end{cases}$$

这样我们如果将 x -轴上的计算区间 $[a, b]$ 进行剖分

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{J+1} = b$$

记 $x_j^0 = x_j$, $t_j^0 = 0$, 从 (x_j^0, t_j^0) 这些点出发的两族特征线的交点记为 (x_j^1, t_j^1) , 利用 (3.124) 便可计算出 $u_j^n = u(x_j^n, t_j^n)$, $v_j^n = v(x_j^n, t_j^n)$ 的近似值. 然后可依次进行下去, 计算出所有函数值.



一阶拟线性双曲方程组

具体来说我们可以采用如下计算步骤:

算法 3.1 (给定 $(x_j^0, t_j^0) = (x_j, 0)$, 对 $n = 0, 1, \dots$)

- ① 利用特征线方程计算第 $n + 1$ 排的节点坐标 (x_j^{n+1}, t_j^{n+1}) ;
- ② 计算函数 u 与 v 的近似值 u_j^{n+1}, v_j^{n+1} ;
- ③ 进行迭代修正, 提高计算精度.

我们下面先看如何确定节点坐标: (与之前单个方程时类似)

假定第 n 排的节点及函数值都已计算出近似值, 第 $n + 1$ 排的节点可以由下面公式决定:

$$(3.125) \quad \frac{x_j^{n+1} - x_j^n}{t_j^{n+1} - t_j^n} = \lambda_{1,j}^n, \quad \frac{x_j^{n+1} - x_{j+1}^n}{t_j^{n+1} - t_{j+1}^n} = \lambda_{2,j+1}^n.$$

其中 $\lambda_{i,k}^n = \lambda_i(x_k^n, t_k^n, u_k^n, v_k^n)$, 对 $i = 1, 2, k = j, j + 1$.



一阶拟线性双曲方程组

求解二元一次方程组(3.125), 解出

$$(3.126) \quad \begin{cases} x_j^{n+1} = x_j^n - \frac{\lambda_{1,j}^n}{\lambda_{2,j+1}^n - \lambda_{1,j}^n} (x_{j+1}^n - x_j^n) + \frac{\lambda_{1,j}^n \lambda_{2,j+1}^n}{\lambda_{2,j+1}^n - \lambda_{1,j}^n} (t_{j+1}^n - t_j^n) \\ t_j^{n+1} = t_j^n - \frac{1}{\lambda_{2,j+1}^n - \lambda_{1,j}^n} (x_{j+1}^n - x_j^n) + \frac{\lambda_{2,j+1}^n}{\lambda_{2,j+1}^n - \lambda_{1,j}^n} (t_{j+1}^n - t_j^n) \end{cases}$$

这样便确定了第 $n+1$ 排的节点. 然后再离散方程组(3.124)得:

$$(3.127) \quad \begin{cases} \alpha_j^n (u_j^{n+1} - u_j^n) + \beta_j^n (v_j^{n+1} - v_j^n) = 0 & (\text{沿第一族特征线}) \\ \gamma_{j+1}^n (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) + \delta_{j+1}^n (v_{j+1}^{n+1} - v_{j+1}^n) = 0 & (\text{沿第二族特征线}) \end{cases}$$

求解上面二元一次方程组得到

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\beta_j^n \gamma_{j+1}^n}{\alpha_j^n \delta_{j+1}^n - \beta_j^n \gamma_{j+1}^n} (u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{\beta_j^n \delta_{j+1}^n}{\alpha_j^n \delta_{j+1}^n - \beta_j^n \gamma_{j+1}^n} (v_{j+1}^n - v_j^n) \\ v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\alpha_j^n \gamma_{j+1}^n}{\alpha_j^n \delta_{j+1}^n - \beta_j^n \gamma_{j+1}^n} (u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{\alpha_j^n \delta_{j+1}^n}{\alpha_j^n \delta_{j+1}^n - \beta_j^n \gamma_{j+1}^n} (v_{j+1}^n - v_j^n) \end{cases}$$



一阶拟线性双曲方程组

我们知道, 上面的格式相当于用向前 Euler 格式, 得到的是一阶精度近似解. 要想提高精度, 我们可以用类似地技巧:

(记 $x_j^{n+1,0} = x_j^{n+1}$, $t_j^{n+1,0} = t_j^{n+1}$, $u_j^{n+1,0} = u_j^{n+1}$, $v_j^{n+1,0} = v_j^{n+1}$)

对 $k = 0, 1, \dots$ 进行以下迭代

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_j^{n+1,k+1} - x_j^n}{t_j^{n+1,k+1} - t_j^n} = \frac{1}{2}(\lambda_{1,j}^n + \lambda_{1,j}^{n+1,k}) \\ \frac{x_j^{n+1,k+1} - x_{j+1}^n}{t_j^{n+1,k+1} - t_{j+1}^n} = \frac{1}{2}(\lambda_{2,j+1}^n + \lambda_{2,j+1}^{n+1,k}) \\ \frac{\alpha_j^n + \alpha_j^{n+1,k}}{2} (u_j^{n+1,k+1} - u_j^n) + \frac{\beta_j^n + \beta_j^{n+1,k}}{2} (v_j^{n+1,k+1} - v_j^n) = 0 \\ \frac{\gamma_{j+1,k}^n + \gamma_{j+1}^{n+1,k}}{2} (u_j^{n+1,k+1} - u_{j+1}^n) + \frac{\delta_{j+1}^n + \delta_{j+1}^{n+1,k}}{2} (v_j^{n+1,k+1} - v_{j+1}^n) = 0 \end{array} \right.$$

这样迭代可以改进到二阶精度.



上机实习题的解析解

考虑以下 Burgers' 方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0.4, 0.6], \\ 0, & x \notin [0.4, 0.6], \end{cases} \end{cases}$$

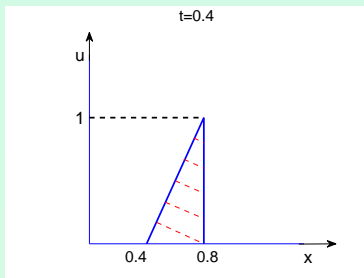
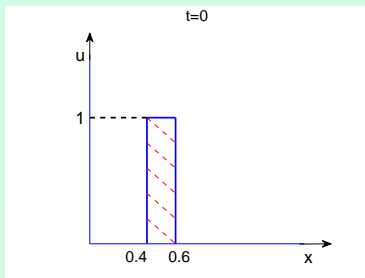
首先由守恒律知 $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u dx = \int_{\mathbb{R}} u_t dx = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) dx = 0$.

这说明面积 $S(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$ 不随时间改变: $S(t) = S(0) = 0.2$.

我们可以利用特征线法来求解此问题.



上机实习题的解析解

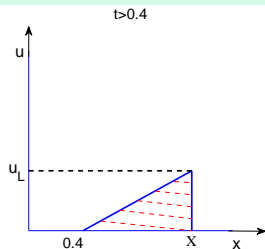


此问题可以先看成左边一个稀疏波、右边一个激波 ($t \leq 0.4$ 时):

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0.4; \\ \frac{x-0.4}{t}, & 0.4 < x < t + 0.4; \\ 1, & t + 0.4 \leq x \leq 0.6 + \frac{t}{2}; \\ 0, & x > 0.6 + \frac{t}{2}. \end{cases} \quad \text{因为激波速度为 } s = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{u_L + u_R}{2} = \frac{1}{2}$$



上机实习题的解析解



我们注意到 $t = 0.4$ 时, 稀疏波 (速度 = 1) 追上了激波 (速度 = $\frac{1}{2}$), 函数图象成了一个三角形. 再往后依然左边为一个稀疏波, 右边为一个激波. 为得到解, 我们只需确定激波位置. 我们设此后激波的位置为 X (如左图所示) 有

$$\dot{X} = \text{激波速度} s = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{u_L - u_R}{2} = \frac{u_L}{2}. \quad (\text{因为 } u_R \equiv 0)$$

而 u_L 就是新的三角形的高 (注意它此后会随时间变化). 利用三角形面积保持不变 (守恒律), 于是有

$$S_{\Delta} \equiv 0.2 = \frac{u_L}{2}(X - 0.4) \stackrel{\dot{X}=u_L/2}{=} \dot{X}(X - 0.4).$$



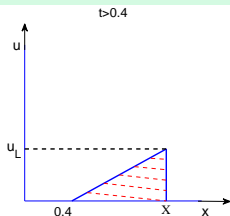
上机实习题的解析解

$$\Rightarrow \frac{dX}{dt} = \frac{0.2}{X - 0.4} \Rightarrow (X - 0.4)dX = 0.2dt$$

从 $t = 0.4$ 积分到 t : (注意 $X(t = 0.4) = 0.8$)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[(X(t) - 0.4)^2 - 0.4^2] = 0.2(t - 0.4)$$

$$\Rightarrow X(t) = 0.4 + \sqrt{0.4t} \Rightarrow u_L = \frac{0.4}{X - 0.4} = \sqrt{\frac{0.4}{t}} \text{ (利用 } S_{\Delta} \text{ 不变)}$$



因而 $t > 0.4$ 之后的解为

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0.4 \\ \frac{x - 0.4}{t}, & 0.4 < x < 0.4 + \sqrt{0.4t} = X(t) \\ 0, & x \geq 0.4 + \sqrt{0.4t} = X(t) \end{cases}$$

