偏微分方程数值解法

任课教师：黄忠亿

清华大学数学科学系

目录

典型偏微分方程

记 $\nabla \coloneqq \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, $\quad \Delta \coloneqq \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.
其中 $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ 为标准基向量 $(i = 1, \cdots, n)$.

例 2.1 (Laplace 方程: $\Delta u = 0$)

这里 $u(\mathbf{x})$ 称为调和函数，通常用于描述稳定的浓度分布或者 *(无源无汇)* 温度分布等, 或者 *(无源的)* 电势场等等.

例 2.2 (Poisson 方程: $-\Delta u = f(\mathbf{x})$)

即例*2.1*问题有源的情形. 更一般的形式为

$$-\left[\partial_{x_1}\left(k_1(\mathbf{x})\partial_{x_1} u\right) + \cdots + \partial_{x_1}\left(k_1(\mathbf{x})\partial_{x_1} u\right)\right] = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

或者记为 $-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f(\mathbf{x})$.

若 $k_i(\mathbf{x}) \equiv k(\mathbf{x})$, 则可写成 $-\nabla \cdot (k(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$.

典型偏微分方程

例 2.3 (波动方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + F(t, \mathbf{x})$)

u---位移, F---外力.

描述像声波、弹性波、光波等的传播, 或者弦的振动等.

例 2.4 (扩散（热传导）方程)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(k_1(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_1}) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(k_n(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_n})\right] + F(t, \mathbf{x})$$

u — 扩散物质浓度 (或温度场), k_i— 各方向的扩散 (传热) 系数.

若 $k_1 = \cdots = k_n \equiv k(\mathbf{x})$, 各向同性情形: $\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot [k\nabla u] + F$.

如果这里的 u, F 与时间 t 无关, 则回到定常 (例 2.2) 情形.

例 2.5 (对流扩散方程（物质在流场中的扩散）)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{a} \cdot \nabla u = \nabla \cdot [k(\mathbf{x})\nabla u] + F(t, \mathbf{x}).$$

典型偏微分方程

例 2.6 (对流方程（忽略上述扩散过程）)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \overrightarrow{a} \cdot \nabla u = F(t, \mathbf{x}).$$

例 2.7 (双调和方程---描述板、壳)

$$\Delta^2 u = 0, \quad \text{这里} \quad \Delta^2 = \Delta \cdot \Delta \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^4}{\partial x_i^2 x_j^2}.$$

例 2.8 (Navier-Stokes 方程组)

描述三维不可压流体的运动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T \in \mathbb{R}^3$ 为速度场, p— 压力, ρ— 密度, ν— 粘性系数

这是一个非线性方程组.

定解条件（初始、边界条件）与定解问题

对于一个偏微分方程 (组)，我们通常都是研究它在一定特定条件下的解. 这些条件称之为定解条件. 通常包括初始条件 (对于时间发展问题) 和边界条件 (或无穷远处条件).

给定了方程 (组) 与定解条件, 就构成了一个定解问题.

- **初始条件**：对于时间发展问题, 必须考虑到研究对象的特定 “历史”, 即追溯到早先某个 “初始” 时刻的状态, 即初始条件.

  注意, 对于适定问题, 初始条件应当给出整个系统的初始状态, 而不仅仅是系统中个别点的初始状态.

  对于输运问题(扩散、传热过程等), 初始状态指的是研究对象 u 的初始分布(初始浓度、温度等), 即 $u(t, \mathbf{x})|_{t=0} = u_0(\mathbf{x})$.

定解条件（初始、边界条件）与定解问题

对于振动过程(细杆、弦、膜的振动等，声波、弹性波、电磁波等的传播), 不仅要给出“初始位移”:

$$u(t, \mathbf{x})|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}),$$

还要给出“初始速度”:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x})|_{t=0} = v_0(\mathbf{x}).$$

从数学上看，对于输运过程，方程中只出现所研究物理量在时间变量 t 的一阶偏导数, 因而只需要一个初始条件.

而振动过程中出现了关于 t 的二阶偏导数, 是关于时间的二阶偏微分方程, 因而需要两个初始条件.

定解条件（初始、边界条件）与定解问题

- **边界条件**：研究具体的系统，还必须考虑研究对象所处的特定“环境”. 而周围的环境的影响通常体现为边界上的物理状况，即边界条件.

常见的边界条件在数学上分为三类:

1. 第一类边界条件：直接给定所研究物理量 u 在边界 Σ 上的值:
$$u\Big|_{\Sigma} = f(z,t), \quad z \in \Sigma.$$
例如考虑弦的振动, 若两端固定, 则位移为零, 即
$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0.$$
又如考虑传热问题, 若细杆两端保持温度恒定, 则可以为
$$u\Big|_{x=a} = u_1, \quad u\Big|_{x=b} = u_2.$$

定解条件（初始、边界条件）与定解问题

2. 第二类边界条件: 规定了研究物理量在边界上的法向导数值, 即
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Sigma} = f(z,t), \quad z \in \Sigma.$$
例如细杆传热问题, 若细杆两端是绝热情况, 即没有热量流入流出, 则为
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{x=a} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{x=b} = 0.$$
3. 第三类边界条件: 给定了法向导数和函数值的一个线性组合值, 即
$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\Big|_{\Sigma} = f(z,t), \quad z \in \Sigma.$$
这里 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 为给定常数.

定解条件（初始、边界条件）与定解问题

例如对于细杆传热问题, 若细杆一端保持 “自由冷却”, 即其流出的热流强度 $(-k\frac{\partial u}{\partial n})$ 与其跟环境的温度差 $(u|_{x=a}-\theta$, θ 为周围环境的温度) 成正比, 即: $-k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{x=a}=\alpha(u|_{x=a}-\theta)$. 整理一下即为 $\left(\alpha u+k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\Big|_{x=a}=\alpha\theta$.

有些问题会满足更复杂的非线性边界条件 (依物理规律而定).

每一点处边界条件的个数依方程性质而定: 二阶问题每点给一个边界条件; 四阶问题每点给两个边界条件; 一阶问题只能给来流处的边界条件.

无界区域上的问题 (如绕流问题) 必须给定无穷远处的解的约束条件, 否则会解不唯一. 如在无界区域: $\mathbb{R}^3\backslash$ 单位球, $u(\mathbf{x})=1$ 或 $\frac{1}{|\mathbf{x}|}$ 均满足 $\Delta u=0$, 且在单位球面上均为 1.

特征方程、特征线及方程分类

下面想对偏微分方程做一个分类, 将重点研究二阶偏微方程.

考虑如下一般形式的拟线性二阶偏微分方程:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f. \tag{2.1}$$

这里 a_{ij}, b_j, c, f 可以是 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, u 及 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 的函数 (注: 时间变量 t 可以看成这里的某个 x_i, 例如可设 $x_n = t$).

一般设 $a_{ij} = a_{ji}$, $(i,j = 1, \cdots, n)$ 即 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为对称阵.

- 若 A 的所有特征值同号, 则称 (2.1) 为椭圆方程;
- 若 A 的一个特征值为零, 其余同号, 则称 (2.1) 为抛物方程;
- 若 A 的一个特征值与其余 $n-1$ 个异号, 则称 (2.1) 为双曲方程;
- 其他情形一般统称 (2.1) 为超双曲情形.

两变量二阶拟线性方程

下面主要考虑两变量的二阶方程: 设 $u = u(x,y)$, 这里 y 可以是时间变量 t. 记 $\mathbf{p} = (u, u_x, u_y)$, 两变量的二阶拟线性偏微分方程为

(2.2)
$$a(x,y,\mathbf{p})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y,\mathbf{p})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y,\mathbf{p})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,\mathbf{p}) = 0.$$

「如果 a, b, c 均与 $\mathbf{p}$ 无关, 且

$$f(x,y,\mathbf{p}) = d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + r(x,y)u + s(x,y),$$

则称 (2.2) 为线性方程.」这样我们有

- $b^2 - ac < 0$ — 称(2.2)为椭圆方程;
- $b^2 - ac > 0$ — 称(2.2)为双曲方程;
- $b^2 - ac = 0$ — 称(2.2)为抛物方程.

两变量二阶拟线性方程---标准形式

对于线性问题

$$
a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+r(x,y)u+s(x,y)=0. \tag{2.3}
$$

如果做自变量替换

$$
\begin{cases} \xi=\xi(x,y), \\ \eta=\eta(x,y). \end{cases} \tag{2.4}
$$

设 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$ 非奇异.

通过变量替换 (2.4), $u(x,y)$ 变成 (ξ,η) 的函数.

简单计算复合函数求导数, 我们有

两变量二阶拟线性方程---标准形式

$$(2.5)\quad \begin{cases} u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x, \\ u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}. \end{cases}$$

将 (2.5) 代入 (2.3) 就有

$$(2.6)\qquad A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + B_1u_\xi + B_2u_\eta + Cu + F = 0.$$

这些系数 A_{ij}, B_j, C, F 为

两变量二阶拟线性方程---标准形式

$$(2.7)\quad \begin{cases} A_{11} = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \\ A_{12} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y, \\ A_{22} = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2, \\ B_1 = a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy} + d\xi_x + e\xi_y, \\ B_2 = a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + d\eta_x + e\eta_y, \\ C = r, \\ F = s. \end{cases}$$

如果取 $\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big)$ 为偏微分方程

$$(2.8)\qquad aZ_x^2 + 2bZ_xZ_y + cZ_y^2 = 0$$

的两个线性无关的解, 即有 $A_{11} = A_{22} = 0$.

这样方程 (2.6) 便可以形式上简化.

两变量二阶拟线性方程---特征方程

而方程 (2.8) 的求解可以转化为常微分方程来求解.

无妨设 $Z_y \neq 0$, (2.8) 可改写成

$$a\left(-\frac{Z_x}{Z_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{Z_x}{Z_y}\right) + c = 0. \tag{2.9}$$

若把 $Z(x,y) = constant$ 当成定义隐函数 $y = y(x)$ 的方程, 则有 $\frac{dy}{dx} = -\frac{Z_x}{Z_y}$. 这样 (2.9) 即成为

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0. \tag{2.10}$$

上述常微分方程 (2.10) 称为二阶线性方程 (2.3) 的特征方程. 特征方程的通解形式 “$\xi(x,y) = const$” 和 “$\eta(x,y) = const$” 称为特征线.

两变量二阶拟线性方程---特征曲线

上面特征方程 (2.10) 可以分为两个方程 (一元二次方程两个解):

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}, \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}, \end{cases} \tag{2.11}$$

根据方程分类 (即 $b^2 - ac$ 的情况), 我们知道

- 双曲方程在 $x - y$ 平面上有两族特征曲线;
- 抛物方程在 $x - y$ 平面上有一族特征曲线;
- 椭圆方程在 $x - y$ 平面上没有实特征曲线。

也可把 (2.10) 用弧长参数 s 表示 $(x, y) = \big(\phi_1(s), \phi_2(s)\big)$:

$$a\big(\phi_2'(s)\big)^2 - 2b\phi_1'(s)\phi_2'(s) + c\big(\phi_1'(s)\big)^2 = 0. \tag{2.12}$$

两变量双曲方程---特征曲线与标准形式

对于双曲方程, (2.11) 式给出两族实特征线:

$$\xi(x,y) = \text{常数}, \quad \eta(x,y) = \text{常数}$$

这样在变换(2.4)中取 $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$, 则 $A_{11} = A_{22} = 0$, 即方程 (2.6) 变成

$$u_{\xi\eta} = -\frac{1}{2A_{12}}[B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu + F]. \tag{2.13}$$

再做变换 $\begin{cases} \xi = \alpha + \beta \\ \eta = \alpha - \beta \end{cases}$ 或者说 $\begin{cases} \alpha = \frac{\xi+\eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$, 则 (2.13) 式成为

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = -\frac{1}{A_{12}}[(B_1 + B_2)u_\alpha + (B_1 - B_2)u_\beta + 2Cu + 2F]. \tag{2.14}$$

(2.13) 或 (2.14) 式称为双曲方程的标准形式.

两变量双曲方程---特征曲线与标准形式

例如我们前面写的波动方程 (*cf.* 例 2.3) 即为(2.14)式形式:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(t, x).$$

这里无妨设 $a > 0$, 可以得到其特征方程为

$$\frac{dt}{dx} = \pm\frac{1}{a}.$$

即波动方程过 (x, t)-平面每个点有两条特征线, 且其两族特征线为两族直线:

$$\begin{cases} x + at = const, \\ x - at = const. \end{cases} \tag{2.15}$$

两变量抛物方程---特征曲线与标准形式

对于抛物方程，由于 $b^2-ac=0$，(2.11) 式给出同一方程

(2.16) $$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}.$$

这只给出一族实特征线 $\xi(x,y)=$ 常数. 若取 $\xi=\xi(x,y)$，任取 $\eta=\eta(x,y)$ 为与 ξ 无关的函数代入 (2.7) 式有

$$A_{11}=\xi_y^2\left[a\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2+2b\frac{\xi_x}{\xi_y}+c\right]\overset{\xi_x/\xi_y=-b/a}{=\!=}\frac{\xi_y^2}{a}[b^2-2b^2+ac]=0,$$

$$A_{12}=\xi_y\left[a\frac{\xi_x}{\xi_y}\eta_x+b(\frac{\xi_x}{\xi_y}\eta_y+\eta_x)+c\eta_y\right]=\frac{\xi_y\eta_y}{a}[ac-b^2]=0,$$

$$A_{22}=\eta_y^2\left[a\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)_x^2+2b\frac{\eta_x}{\eta_y}+c\right]=\eta_y^2\left[\sqrt{a}\frac{\eta_x}{\eta_y}\pm\sqrt{c}\right]^2,\ \pm\text{与 } b \text{ 符号相同}$$

两变量抛物方程---特征曲线与标准形式

从上面表达式可以看出，只需 $\dfrac{\eta_x}{\eta_y} \neq \mp\sqrt{\dfrac{c}{a}} = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{\xi_x}{\xi_y}$,

即 $\eta(x,y)$ 不满足特征方程 (2.16), 就有 $A_{22} \neq 0$.

这样方程 (2.6) 成为

$$u_{\eta\eta} = -\frac{1}{A_{22}}[B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu + F]. \tag{2.17}$$

这是抛物方程的标准形式. 如一维扩散方程、热传导方程等.

对于形如 $u_t - au_{xx} = F(t,x)$ 的抛物方程, 其特征方程为

$$\frac{dt}{dx} = 0,$$

即特征线为 $t = const.$

两变量椭圆方程---标准形式

对于椭圆方程, (2.11) 式给出两族复的特征线

$$\xi(x,y)=c,\ \ \eta(x,y)=\bar{\xi}\ (\text{共轭}).$$

若取 $\xi=\xi(x,y),\eta=\bar{\xi}$, 就有 $A_{11}=A_{22}=0$, 即方程 (2.6) 成为

$$u_{\xi\eta}=-\frac{1}{2A_{12}}[B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F].$$

因其变量为复数, 一般会再做变换

$$\begin{cases}\xi=\alpha+i\beta\\ \eta=\alpha-i\beta\end{cases}\quad \text{即}\ \begin{cases}\alpha=\frac{\xi+\eta}{2}\\ \beta=\frac{\xi-\eta}{2i}\end{cases}$$

即椭圆方程的标准形式为 (如 Poisson 方程等)

$$(2.18)\quad u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=-\frac{1}{A_{12}}[(B_1+B_2)u_\alpha+i(B_1-B_2)u_\beta+2Cu+2F].$$

注意 $B_1=\bar{B}_2$, 所以上面系数为实数.

一阶方程组

不失一般性，仍只考虑两个自变量情形. 对 $(x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2$, 设 $u=(u_1,\cdots,u_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 每个 $u_i=u_i(x,y)$, $i=1,\cdots,n$. 再设 $F(x,y,u)\in\mathbb{R}^n$, $A(x,y,u)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 称

$$\frac{\partial u}{\partial y}-A(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+F(x,y,u)=0 \tag{2.19}$$

为一阶拟线性方程组. 若 A 与 u 无关, 则称为线性方程组.

对固定的 (x,y,u),

- 若矩阵 $A(x,y,u)$ 没有实的特征向量, 则称为椭圆型方程组;
- 若矩阵 $A(x,y,u)$ 有 n 个线性无关的实特征向量, 则称为双曲型方程组; 此时 $A(x,y,u)$ 有 n 个实特征值 (即A 可对角化). 若 A 有 n 个互异的实特征值, 则称为严格双曲型方程组.

一阶方程组

如果 $x-y$ 平面上的曲线 $(x,y)=\big(\phi_1(s),\phi_2(s)\big)$ 满足

$$\phi_1'(s)+\lambda\big(\phi_1(s),\phi_2(s),u(\phi_1,\phi_2)\big)\phi_2'(s)=0, \tag{2.20}$$

其中 $\lambda(x,y,u)$ 为 $A(x,y,u)$ 的特征值，则称该曲线为 (2.19) 的特征线. (2.20) 称为 (2.19) 的特征方程.

例 2.9 (Cauchy-Riemann 方程)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial u_2}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x}. \end{cases} \quad 令\mathbf{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

可写成 $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}=A\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$. 显然 A 的特征值为 $\pm i$, 即这是椭圆型方程组.

一阶方程组

例 2.10 (一维对流方程)

(2.21)
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

即 $A = (a) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, 这自然为双曲型方程组. 特征方程为

$$dx + adt = 0,$$

有一族实特征曲线 $x + at = const$, 这是一族互相平行的直线.

沿着某一条特征线 $x + at = \xi$, (2.21) 的解 $u(x,t)$ 为常数, 因为

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

即沿着这条特征线, $u(x,t) \equiv u(\xi - at, t) =$ 常数 $= u(\xi, 0)$.

这样，如果给定了初值 $u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x)$, 就可以写出解

$$u(x,t) = u_0(x + at).$$

二阶方程化为一阶方程组

例 2.11 (波动方程)

对于 $u_{tt}-u_{xx}=0$, 如果令 $\begin{cases} v=u_t+u_x \\ w=u_t-u_x \end{cases}$, 就有

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_x = 0$$

显然矩阵 A 具有两个互异的实特征值 ± 1 及相应的特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 该方程组与原二阶方程有同样的特征线方程:

$$dt \pm dx = 0,$$

即有同样的特征曲线

$$x \mp t = const.$$

二阶方程化为一阶方程组

例 2.12 (Laplace 方程)

对于 $u_{xx}+u_{yy}=0$, 如果令 $\begin{cases} v=u_x+u_y \\ w=u_x-u_y \end{cases}$, 就有

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_x = 0$$

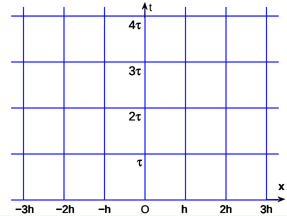
显然矩阵 A 具有两个复特征值 $\pm i$ 及相应的复特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}$.

目录

网格剖分

用有限差分方法来求解偏微分方程 (初) 边值问题, 由于计算机只能处理有限数据, 我们必须要将原连续问题离散化. 这样就必须要对原求解区域进行剖分.

举例来说, 对初边值问题, 求解区域为 $[0,T]\times\Omega$, 其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$. 我们一般用平行于坐标轴的直线 (平面或超平面) 把区域 Ω 分割成一些矩形 (或长方体等) 网格, 其交点称为 "节点", 空间上相邻两点间的距离称为 "空间步长", 时间上的间距称为 "时间步长"。如右图所示: 此为等距剖分, $x_j = jh$, $t_n = n\tau$.

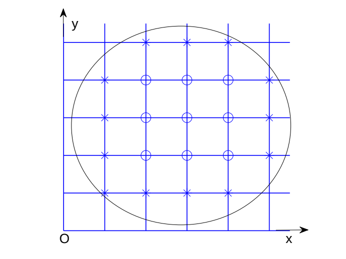


网格剖分

对于定义域为 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 的椭圆问题，我们也可以做类似的剖分 (如右图所示). 我们一般只考虑落在 $\bar{\Omega}$ 内的节点. 若一个节点及其相邻的节点均属于 $\bar{\Omega}$, 则称为内部节点 (内点 "o"). 内点集合记为

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j) \in \bar{\Omega} \,|\, (x_{i\pm1}, y_{j\pm1}) \in \bar{\Omega}\}.$$

反之，如果一个节点至少有一个邻点不在 $\bar{\Omega}$ 上，则称之为边界节点 "x", 边界节点集合记为 Γ_h.



差分格式的构造

用有限差分方法近似求解偏微分方程初边值问题，本质上讲即用差商来近似各种偏导数 (或者说用数值积分公式计算各种积分). 我们有多种构造办法.

（一）Taylor 展开法（较为直观）

例 2.13

考虑以下对流方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.22}$$

利用

$$\frac{u(x_j,t_{n+1})-u(x_j,t_n)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,\xi_n),\ \ \xi_n \in (t_n,t_{n+1})$$

$$\frac{u(x_j,t_n)-u(x_{j-1},t_n)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\eta_j,t_n),\ \ \eta_j \in (x_{j-1},x_j)$$

差分格式的构造

可得 $\dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\dfrac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_j^n+\mathcal{O}(\tau+h).$

这样假如 u 为满足 (2.22) 的光滑解, 那么上式 $=\mathcal{O}(\tau+h)$.

即可以用差分方程

(2.23) $$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0$$

来近似(2.22)中的方程。也可以将上式改写为

(2.24) $$u_j^{n+1}=u_j^n-a\lambda(u_j^n-u_{j-1}^n),\quad n=0,1,\cdots;\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中 $\lambda=\frac{\tau}{h}$ 称为网格比. 将初值离散化

$$u_j^0=g_j\equiv g(x_j),\quad j=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

便可由 (2.24) 计算出 u_j^n. 格式 (2.24) 是一个显式两 (时间) 层格式.

差分格式的构造

我们也可以用以下近似公式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}=\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_j^n+\mathcal{O}(\tau^2),\quad \frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_j^n+\mathcal{O}(h^2)$$

即用 $u_j^{n+1}=u_j^{n-1}-a\lambda(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)$ 来计算.

这是一个三层显式格式.

进一步考虑下面的初边值问题 (设 $a>0$):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0, & 0<x<l,\ t>0, \\ u|_{t=0}=g(x), & 0<x<l, \\ u|_{x=0}=\alpha(t), & t>0. \end{cases} \tag{2.25}$$

假设$\alpha(0)=g(0)$.

若用 $\dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}=\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}\right]_j^{n+1}+\mathcal{O}(\tau),\quad \dfrac{u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{h}=\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_j^{n+1}+\mathcal{O}(h)$

差分格式的构造

得到
$$\begin{cases} (1+a\lambda)u_j^{n+1} - a\lambda u_{j-1}^{n+1} = u_j^n, & n \geq 0,\ 1 \leq j \leq J,\ h = \frac{l}{J}; \\ u_j^0 = g(x_j), \quad 0 \leq j \leq J; & u_0^n = \alpha(t_n), \quad n > 0. \end{cases}$$

引入记号

$$U^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix},\ F^n = \begin{pmatrix} u_1^n + a\lambda u_0^{n+1} \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_J^n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1+a\lambda & & & \\ -a\lambda & 1+a\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -a\lambda & 1+a\lambda \end{pmatrix}$$

即为 $AU^{n+1} = F^n$.

这是一个两层隐式格式. 但是这个隐式格式可以显式求解: 即按照

$$u_0^{n+1} \to u_1^{n+1} \to \cdots \to u_J^{n+1}$$

顺序计算, 不用解线性方程组. 一般隐式格式并不能显式求解.

差分格式的构造

(二) 积分方法

在给定区域上将原偏微分方程积分，然后利用数值积分公式导出差分格式．例如，对于前面的对流方程(2.22)，在 $x-t$ 平面上区域 $D_j^n = \left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_j-\frac{h}{2}\le x\le x_j+\frac{h}{2},\quad t_n\le t\le t_{n+1}\right\}$ 上积分得

$$\iint_{D_j^n}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt + a\iint_{D_j^n}\frac{\partial u}{\partial x}dxdt = 0.$$

即 $\displaystyle\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}[u(x,t_{n+1})-u(x,t_n)]dx + a\int_{t_n}^{t_{n+1}}[u(x_{j+\frac{1}{2}},t)-u(x_{j-\frac{1}{2}},t)]dt=0$

中点积分公式 $\downarrow$　　　　　　$\downarrow$ 左矩积分公式

$$[u_j^{n+1}-u_j^n]h + a[u(x_{j+\frac{1}{2}},t_n)-u(x_{j-\frac{1}{2}},t_n)]\tau = 0.$$

差分格式的构造

再用 $u(x_{j+\frac{1}{2}}, t_n) \approx \frac{1}{2}[u_j^n + u_{j+1}^n]$ 及 $u(x_{j-\frac{1}{2}}, t_n) \approx \frac{1}{2}[u_j^n + u_{j-1}^n]$ 得

(2.26) $$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{a\lambda}{2}[u_{j+1}^n - u_{j-1}^n] = 0, \qquad \text{其中}\lambda = \frac{\tau}{h}.$$

这种构造方法也称为有限体积法.

对于扩散方程 $u_t - au_{xx} = 0$ 也可类似构造:

在 $D_j^n = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_j - \frac{h}{2} \le x \le x_j + \frac{h}{2}, \quad t_n \le t \le t_{n+1}\right\}$ 上积分

$$\iint_{D_j^n} \frac{\partial u}{\partial t} dxdt = a \iint_{D_j^n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dxdt$$

差分格式的构造

即 $\displaystyle\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}[u(x,t_{n+1})-u(x,t_n)]dx=a\int_{t_n}^{t_{n+1}}[u_x(x_{j+\frac{1}{2}},t)-u_x(x_{j-\frac{1}{2}},t)]dt$

中点积分公式 $\downarrow$ $\downarrow$ 左矩积分公式

$$[u_j^{n+1}-u_j^n]h=a[u_x(x_{j+\frac{1}{2}},t_n)-u_x(x_{j-\frac{1}{2}},t_n)]\tau.$$

再用 $u_x(x_{j+\frac{1}{2}},t_n)\approx\frac{1}{h}[u_{j+1}^n-u_j^n]$ 及 $u_x(x_{j-\frac{1}{2}},t_n)\approx\frac{1}{h}[u_j^n-u_{j-1}^n]$ 得

$$[u_j^{n+1}-u_j^n]h=a\frac{\tau}{h}[u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n].$$

即可写成

(2.27) $$u_j^{n+1}=u_j^n+a\widetilde{\lambda}[u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n],$$

其中 $\widetilde{\lambda}=\frac{\tau}{h^2}$ 为扩散问题的网格比.

目录

有限差分格式的截断误差

考虑微分方程为

$$Lu = 0, \qquad \left(\text{如} Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{2.28}$$

设其差分格式为

$$L_h^\tau u_j^n = 0, \qquad \left(\text{如} L_h^\tau u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}\right) \tag{2.29}$$

定义 2.1 (截断误差)

$$E_j^n := L_h^\tau u(x_j, t_n) - Lu(x_j, t_n) \equiv L_h^\tau u(x_j, t_n)$$

称为差分格式 (2.29) 的**截断误差**. 如上面对流方程的差分格式有

$$E_j^n = \mathcal{O}(\tau + h).$$

一般若 $\quad E_j^n = \mathcal{O}(\tau^p + h^q),$

则称该差分格式对时间步长为 p 阶精度, 对空间步长为 q 阶精度.

有限差分格式的截断误差

以后为简便起见，引入以下一些记号：

向前差分：
$$\Delta_+^t v(x,t) = v(x,t+\tau) - v(x,t)$$
$$\Delta_+^x v(x,t) = v(x+h,t) - v(x,t)$$

向后差分：
$$\Delta_-^t v(x,t) = v(x,t) - v(x,t-\tau)$$
$$\Delta_-^x v(x,t) = v(x,t) - v(x-h,t)$$

中心差分：
$$\delta_t v(x,t) = v\left(x, t+\frac{\tau}{2}\right) - v\left(x, t-\frac{\tau}{2}\right)$$
$$\delta_x v(x,t) = v\left(x+\frac{h}{2}, t\right) - v\left(x-\frac{h}{2}, t\right)$$
$$\Delta_0^x v(x,t) = v(x+h,t) - v(x-h,t)$$

二阶中心差分：
$$\delta_x^2 v(x,t) = v(x+h,t) - 2v(x,t) + v(x-h,t)$$

差分格式的相容性

定义 2.2 (差分格式的相容性)

所谓差分格式的相容性，是指时间、空间步长 $\tau, h \to 0$ 时，差分方程应该形式上收敛到原来的微分方程.

这就是说，假如原问题的解 $u(x,t)$ 充分光滑，若 $\tau, h \to 0$，有 $E_j^n \to 0$，则说上面差分格式 (2.29) 与方程 (2.28) 是相容的.

简单说就是差分格式至少是一阶精度的，则称为相容的.

差分格式的收敛性

我们用差分格式来近似求解微分方程初边值问题，最关心的自然是当步长 τ, h 充分小时，近似解是否足够靠近真解？这就是我们关心的差分格式的收敛性问题.

定义 2.3 (差分格式的收敛性)

令 $e_j^n = u(x_j, t_n) - u_j^n$，如果 $\tau, h \to 0$ 时，有 $e_j^n \to 0$，则称差分格式是**收敛**的.

当然这里我们忽略了计算差分方程解 u_j^n 过程中的舍入误差影响.

需要注意的是，差分格式的收敛性与其相容性是两个概念:

- 相容性指的是差分方程收敛到微分方程;
- 收敛性指的是差分格式的解收敛到原问题的真解.

差分格式的收敛性

我们后面会给出很多收敛但只是条件相容的例子.

例 2.14 (相容但不收敛的格式)

考虑一个对流方程初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

无妨设$a > 0$.

如果我们使用如下差分格式计算 (这里 T 为平移算子 $Tu_j = u_{j+1}$)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_{j+1}^n - u_j^n) \equiv [(1 + a\lambda) - a\lambda T]u_j^n. \tag{2.30}$$

显然上面格式是一个 (一阶) 相容格式. 重复使用格式 (2.30) 得到

$$u_j^n = [(1 + a\lambda) - a\lambda T]^n u_j^0 = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1 + a\lambda)^m (-a\lambda)^{n-m} u_0(x_{j+n-m}).$$

差分格式的收敛性

由前面的分析（特征线方程）我们知道

$$u(x_j,t_n)=u_0(x_j-at_n)=u_0(x_j-na\tau)\overset{\lambda=\tau/h}{=}u_0(x_j-na\lambda h).$$

即对真解而言, 改变了 u_0 在 $x_j-na\lambda h$ 点的值, $u(x_j,t_n)$ 的值就变了. 但由上面差分解的表达式知, u_j^n 仅依赖于 u_0 在 $[x_j,x_j+nh]$ 上的值, 即此时 u_j^n 不会变. 这自然说明了格式 (2.30) 是不收敛的.

而若我们使用以下格式:

(2.31) $$u_j^{n+1}=u_j^n-a\lambda(u_j^n-u_{j-1}^n)\equiv[(1+a\lambda)-a\lambda T^{-1}]u_j^n.$$

即 $$u_j^n=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(1+a\lambda)^m(-a\lambda)^{n-m}u_0(x_{j-n+m}).$$

由上面的分析知, 如果 $x_{j-n}\le x_j-na\lambda h\le x_j$, 即 $a\lambda\le 1$, 公式才可能会收敛. 这需要考虑差分格式的另一种性质—稳定性.

差分格式的稳定性

尤其对于时间发展问题，差分格式是逐 (时间) 层计算的, 前一时间层上值的舍入误差会在后面计算过程中传播, 我们必须要控制这些误差的累积, 否则便会带来灾难.

对于偏微分方程的计算, 我们将主要考虑对初值的稳定性 (中间过程的舍入误差的影响由于方程的复杂性不好准确估计).

定义 2.4 (对初值的稳定性)

称差分格式(2.29)是对初值稳定的(简称稳定的)，若 $\exists K > 0$, *s.t.* 对于初值 $\mathbf{u}^0$ 的误差 $\tilde{\mathbf{u}}^0$ 以及由此产生的 $\mathbf{u}^n$ 的误差 $\tilde{\mathbf{u}}^n$ (这里 $\mathbf{u}^m = (\cdots, u^m_{j-1}, u^m_j, u^m_{j+1}, \cdots)$), 如果当 $0 < \tau \le \tau_0$, $n\tau \le T$ 时, 一致地有

$$\|\tilde{\mathbf{u}}^n\| \le K \left\|\tilde{\mathbf{u}}^0\right\|. \tag{2.32}$$

差分格式的稳定性

其中 $\|\cdot\|$ 是某种向量范数, 如

$$\|\mathbf{u}^m\| = \sqrt{h\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(u_j^m)^2} \approx \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t_m)dx\right)^{1/2}.$$

对于线性问题, 若差分格式可以写成

$$\mathbf{u}^{n+1} = C(\tau)\mathbf{u}^n$$

则 (2.32) 等价于

$$\|C^n(\tau)\| \le K. \tag{2.33}$$

这里 $\|\cdot\|$ 为相应矩阵范数.

对于非线性问题只能用 (2.32) 式定义.

Lax 等价定理

我们最终关心的是差分解的收敛性, 但如何验证呢? 形式上看, 相容、稳定性更容易验证. 自然人们关心这三者之间的关系.

考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbb{L}\mathbf{u}, \quad (\mathbf{x}, t) \in D, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{2.34}$$

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbb{L}$ 为微分算子, 如 $\mathbb{L} = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{n} A_\alpha(\mathbf{x}) \dfrac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$. 上述问题解为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = E(t)\mathbf{u}_0(\mathbf{x}).$$

其中 $E(t)$ 称为解算子. 假设问题 (2.34) 是适定问题, 即解算子一致有界: $\|E(t)\| \le K$.

Lax 等价定理

考虑差分格式:

$$\sum_{\beta} B_{1\beta}(\mathbf{x},\tau)T^{\beta}\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta} B_{0\beta}(\mathbf{x},\tau)T^{\beta}\mathbf{u}^{n}(\mathbf{x}). \tag{2.35}$$

这里 $B_{i\beta}(\mathbf{x},\tau) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 为矩阵函数, T 为位移算子. 我们也可以将上面格式 (2.35) 写成

$$\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) = C(x,\tau)\mathbf{u}^{n}(\mathbf{x}).$$

通常我们假设(2.35)是与(2.34)相容的. 我们有以下 Lax 等价定理:

定理 2.1 (Lax 等价定理)

对于适定的线性问题 (2.34), 及给定的与之相容的差分格式 (2.35), 有 (2.35) 是收敛的 $\Longleftrightarrow$ (2.35) 是稳定的.

Lax 等价定理

$\triangleleft$ 证明思路："$\Longrightarrow$" 设 (2.35) 是收敛的：给了 $u_0(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^m)$，是否存在常数 $K(u_0) > 0$, *s.t.*

$$\|C^n(\tau)u_0\| \le K(u_0)\,\|u_0\|\,.$$

这可用反证法证明.

"$\Longleftarrow$" 设 (2.35) 是稳定的：要证明, 当 $\tau_j \to 0$, $n_j\tau_j \to t$, 有

$$\|[C(\tau_j)]^{n_j}u_0 - E(t)u_0\| \to 0.$$

这可以利用

$$\|[C(\tau_j)]^{n_j}u_0 - E(n_j\tau_j)u_0\| + \|E(n_j\tau_j)u_0 - E(t)u_0\| \to 0$$

来证明. $\triangleright$

注意，对非线性问题一般没有此定理结论.

目录

Fourier 方法

Fourier 方法一般仅用于常系数线性方程初值问题.

考虑以下常系数线性偏微分方程 (组) 初值问题:

$$(2.36)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{n} A_\alpha \frac{\partial^\alpha \mathbf{u}}{\partial x^\alpha}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}(x,t)\big|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

这里设 $u \in \mathbb{R}^m$, $A_\alpha \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

由 Fourier 变换的性质:

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial^\alpha \mathbf{u}}{\partial x^\alpha}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\omega} \frac{\partial^\alpha \mathbf{u}}{\partial x^\alpha}(x,t)dx = (i\omega)^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\omega} \mathbf{u}(x,t)dx \\ &\equiv (i\omega)^\alpha \widehat{\mathbf{u}}(\omega,t) \end{aligned}$$

Fourier 方法

对(2.36)中方程做 Fourier 变换得到

$$(2.37)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{n} A_\alpha (i\omega)^\alpha \widehat{\mathbf{u}}(\omega, t), \\ \widehat{\mathbf{u}}(\omega, t)|_{t=0} = \widehat{\mathbf{u}}_0(\omega). \end{cases}$$

由此可以解出

$$\widehat{\mathbf{u}}(\omega, t) = \exp(tP_n(i\omega))\widehat{\mathbf{u}_0}(\omega),$$

其中 $P_n(i\omega) = \sum_{\alpha=0}^{n} A_\alpha (i\omega)^\alpha$ 为一矩阵函数.

通过 Fourier 反变换得到 (2.36) 的解为

$$(2.38)\qquad \mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\omega} \exp(tP_n(i\omega))\widehat{\mathbf{u}_0}(\omega) d\omega.$$

Fourier 方法

我们也可以将上述方法应用于一般形式的差分格式

$$\sum_{\beta=-l_1}^{l_1} B_{1\beta}(\tau)T^{\beta}\mathbf{u}^{n+1}(x) = \sum_{\beta=-l_0}^{l_0} B_{0\beta}(\tau)T^{\beta}\mathbf{u}^{n}(x), \tag{2.39}$$

这里 $B_{i\beta}(\tau)$ 为一些仅依赖于时间步长 τ 的一些矩阵函数.

将 $\mathbf{u}^n(x)$ 的定义域延拓到整个实轴 $\mathbb{R}$ 上:

$$\mathbf{u}^n(x) = u_j^n, \quad 当 \left(j-\frac{1}{2}\right)h \le x < \left(j+\frac{1}{2}\right)h.$$

这样就定义了阶梯函数 (分片常数函数) $\mathbf{u}^n(x)$. 对 $\mathbf{u}^0(x)$ 也做类似先离散再延拓的过程. 这样就可以对(2.39)做 Fourier 变换

$$\sum_{\beta=-l_1}^{l_1} B_{1\beta}(\tau)\widehat{T^{\beta}\mathbf{u}^{n+1}}(x) = \sum_{\beta=-l_0}^{l_0} B_{0\beta}(\tau)\widehat{T^{\beta}\mathbf{u}^{n}}(x),$$

Fourier 方法

$$\widehat{T^\beta \mathbf{u}^n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} T^\beta \mathbf{u}^n(x) e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}^n(x+\beta h) e^{-i\omega x}dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}^n(y) e^{-i\omega(y-\beta h)}dy \equiv e^{i\omega\beta h}\widehat{\mathbf{u}^n}(\omega).$$

从而得到

(2.40) $$B_1(\omega,\tau)\widehat{\mathbf{u}^{n+1}}(\omega) = B_0(\omega,\tau)\widehat{\mathbf{u}^n}(\omega).$$

这里 $B_j(\omega,\tau) = \sum_{\beta=-l_j}^{l_j} B_{j\beta}(\tau)e^{i\omega\beta h}$, $j=0,1$.

若假设 $B_1(\omega,\tau)$ 可逆, 记 $G(\omega,\tau) = B_1^{-1}B_0$, 有

(2.41) $$\widehat{\mathbf{u}^{n+1}}(\omega) = G(\omega,\tau)\widehat{\mathbf{u}^n}(\omega).$$

由此看出 m 阶方阵 $G(\omega,\tau)$ 决定了差分方程 (2.39) 的解之 Fourier 系数的增长性, 故一般称之为增长矩阵. 因其不依赖于 n, 故有

(2.42) $$\widehat{\mathbf{u}^n}(\omega) = [G(\omega,\tau)]^n\widehat{\mathbf{u}^0}(\omega).$$

Fourier 方法

利用 Parserval 等式及稳定性定义, 可以有如下定理

定理 2.2

差分格式 (2.39) 稳定的充要条件是 $\exists \tau_0 > 0$, 及 $K > 0$, *s.t.* 当 $0 < \tau \le \tau_0$ 时, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $n\tau \le T$ 时, 一致地有

$$\|G^n(\omega, \tau)\| \le K. \tag{2.43}$$

这里的矩阵范数是离散 l^2 范数导出的矩阵范数.

$\lhd$ 因为是线性问题, 将差分格式写成如下形式

$$\mathbf{u}^{n+1}(x) = C(\tau)\mathbf{u}^n(x). \tag{2.44}$$

先证充分性 "$\Longleftarrow$": 若(2.43)成立, 欲证格式稳定.

Fourier 方法

$$\text{由}\ \left\|C^n(\tau)\mathbf{u}^0\right\|^2 = \|\mathbf{u}^n\|^2 \overset{\text{Parseval 等式}}{=} \left\|\widehat{\mathbf{u}^n}\right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |G^n(\omega,\tau)\widehat{\mathbf{u}^0}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\Longrightarrow \left\|C^n(\tau)\mathbf{u}^0\right\|^2 \le \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \|G^n(\omega,\tau)\|^2 \left\|\widehat{\mathbf{u}^0}(\omega)\right\|^2 \overset{(2.43)}{\le} K^2 \left\|\widehat{\mathbf{u}^0}(\omega)\right\|^2$$

即稳定性得证.

再证必要性 “$\Longrightarrow$”: 即假设有稳定性, 欲证 (2.43) 式成立.

用反证法. 假设 $\exists \tau_j \le \tau_0$, $n_j\tau_j \le T$, 及 $\omega_j \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\|G^{n_j}(\omega_j,\tau_j)\|^2 > j, \quad \text{对} j = 1, 2, \cdots, \to +\infty$$

由 $G(\omega,\tau)$ 关于 ω 之连续性可知, 存在向量 $\mathbf{b}_j$ 及 ω_j 的邻域 $V_j = \{\omega \,|\, |\omega - \omega_j| < \delta_j\}$, s.t.

$$\text{使得当}\ \omega \in V_j\ \text{时}, \quad \|G^{n_j}(\omega,\tau_j)\mathbf{b}_j\| > \frac{j}{2}\|\mathbf{b}_j\|.$$

Fourier 方法

令函数 $\phi_j(x)$ 满足：其 Fourier 变换为

$$\widehat{\phi}_j(\omega)=\begin{cases}\mathbf{b}_j, & 当|\omega-\omega_j|<\delta_j\ 时\\ 0, & 其它情形.\end{cases}$$

则 $j\to+\infty$ 时，有

$$\|C^{n_j}(\tau_j)\phi_j\|^2=\int_{\mathbb{R}}\left|G^{n_j}(\omega,\tau_j)\widehat{\phi}_j(\omega)\right|^2 d\omega\geq\frac{j^2}{4}\left\|\widehat{\phi}_j\right\|^2=\frac{j^2}{4}\|\phi_j\|^2.$$

这样与稳定性条件 $\|C^n(\tau)\|\leq K$ 矛盾了. ▷

实际分析稳定性时, 由上述推导过程, 可简化 $G(\omega,\tau)$ 的计算: 即令 $\mathbf{u}_j^n=\mathbf{v}^n\cdot e^{ij\omega h}$ 代入 (2.39) 式, 得到

$$\sum_{\beta=-l_1}^{l_1}B_{1\beta}(\tau)e^{i\beta\omega h}\mathbf{v}^{n+1}=\sum_{\beta=-l_0}^{l_0}B_{0\beta}(\tau)e^{i\beta\omega h}\mathbf{v}^n,$$

Fourier 方法

由此可以得到 $\mathbf{v}^{n+1} = G(\omega, \tau)\mathbf{v}^n$.

例 2.15

对于对流方程 $u_t + au_x = 0$, 使用差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad \lambda = \frac{\tau}{h}.$$

令 $u_j^n = v^n \cdot e^{ij\omega h}$ 代入上式有

$$v^{n+1}e^{ij\omega h} = v^n e^{ij\omega h} - \frac{a\lambda}{2}\left(v^n e^{i(j+1)\omega h} - v^n e^{i(j-1)\omega h}\right),$$

$$\Longrightarrow \quad v^{n+1} = \left[1 - \frac{a\lambda}{2}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h})\right] v^n$$

即 $G(\omega, \tau) = 1 - ia\lambda\sin(\omega h)$.

Fourier 方法

利用定理 2.2, 再结合线性代数中的知识, 可以给出判别 (2.39) 稳定性的条件.

记 $\lambda_l(\omega,\tau), l=1,\cdots,m$ 为 m 阶矩阵 $G(\omega,\tau)$ 的特征值, $\mathbf{v}_l$ 为相应特征向量. 其谱半径为 $\rho(G)=\max\limits_{1\le l\le m}|\lambda_l(\omega,\tau)|$. 也就是说 $\exists l_0\in\{1,\cdots,m\}$ *s.t.*

$$\rho(G)=|\lambda_{l_0}|=\frac{|G\cdot\mathbf{v}_{l_0}|}{|\mathbf{v}_{l_0}|}\le\|G(\omega,\tau)\|.$$

另外易见 $\|G^2\|=\max\limits_{\mathbf{v}\ne 0}\dfrac{\|G^2\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\le\max\limits_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\ne 0}\dfrac{\|G\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|}\cdot\dfrac{\|G\mathbf{v}_2\|}{\|\mathbf{v}_2\|}\le\|G\|^2$

即

$$\rho^n(G)=\rho(G^n)\le\|G^n(\omega,\tau)\|\le\|G(\omega,\tau)\|^n. \tag{2.45}$$

Fourier 方法

先给出一个简单引理:

引理 2.1

设 $K > 1$, **则** $\forall x \in [0,1]$, **有** $K^x \leq 1 + (K-1)x$.

$\triangleleft$ 令 $f(x) = K^x = e^{x\ln K}$. 简单计算有 $f''(x) = (\ln K)^2 e^{x \ln K} > 0$, 即 $f(x)$ 为凸函数. 由凸函数的性质 ($f(\lambda x + (1-\lambda y))$ 位于 $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ 这条直线之下), 立刻有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x\cdot 1 + (1-x)\cdot 0) \leq x\cdot f(1) + (1-x)\cdot f(0) \\
&= Kx + 1 - x = 1 + (K-1)x. \qquad \triangleright
\end{aligned}
$$

利用上述引理及线性代数的知识可以给出稳定性的一些充分、必要条件.

Fourier 方法

定理 2.3 (Von Neumann 条件---稳定性的必要条件)

差分格式 (2.44) 稳定的必要条件 (*Von Neumann 条件*) 是:

存在 $\tau_0 > 0$, $M > 0$, 当 $0 < \tau \le \tau_0$ 且 $n\tau \le T$ 时, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ 有

(2.46) $$|\lambda_l\left(G(\omega,\tau)\right)| \le 1 + M\tau, \quad l = 1, 2, \cdots, m.$$

其中 $G(\omega,\tau)$ 为增长矩阵, λ_l 为其特征值.

$\lhd$ 由差分格式稳定性条件知, $0 < \tau \le \tau_0$ 且 $n\tau \le T$ 时, $\exists K > 0$, s.t. $\forall \omega \in \mathbb{R}$ 有 $\|G^n(\omega,\tau)\| \le K$. 由 (2.45) 知: $\rho^n(G) \le \|G^n\| \le K$.

无妨设 $K > 1$ (因为若 $K \le 1$ 自然有(2.46)成立)

这样对 $n\tau \le T$, $\rho(G) \le K^{1/n} \le 1 + \frac{K-1}{n}$.

特别取 $n = \frac{T}{\tau}$, 即有 $\rho(G) \le 1 + \frac{K-1}{T}\tau \equiv 1 + M\tau$. $\rhd$

Fourier 方法

在许多情形, 上述 Von Neumann 条件也是稳定性的充分条件.

引入正规矩阵概念:

定义 2.5 (正规矩阵)

若 $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, 则称 A 为正规矩阵.

A 为正规阵等价于可用酉矩阵对角化, 即 $\rho(A) = \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$. 这样有 $\|A^n\|_2 \leq \|A\|_2^n = \rho^n(A)$. 即有以下定理:

定理 2.4

若 $G(\omega, \tau)$ 为正规阵, 则 $Von\ Neumann$ 条件是稳定性的充要条件.

$\triangleleft$ 只需证充分性: 若 $\rho(G) \leq 1 + M\tau$, 有

$\|G^n\|_2 \leq \|G\|_2^n = \rho^n(G) \leq (1 + M\tau)^n \leq (1 + M\frac{T}{N})^N \leq e^{MT} = K \quad \triangleright$

Fourier 方法

推论 2.1

当 $G(\omega,\tau)$ 为实对称矩阵、$Hermite$ 阵、正交阵、酉矩阵时, $Von\ Neumann$ 条件为稳定性的充要条件.

推论 2.2

当 $m=1$, 即 $G(\omega,\tau)$ 为一个数时, $Von\ Neumann$ 条件为稳定性的充要条件.

类似我们还可以有其他一些充分条件:

定理 2.5

若存在 $\tau_0>0$, $M>0$, 当 $0<\tau\le\tau_0$ 且 $n\tau\le T$ 时, $\forall\omega\in\mathbb{R}$ 有 $\|G(\omega,\tau)\|\le 1+K\tau$, 则差分格式稳定.

Fourier 方法

定理 2.6

如果矩阵 $G^* \cdot G$ 的特征值 $\mu_1, \cdots, \mu_m$ 满足 $|\mu_j| \leq 1 + M\tau$, $1 \leq j \leq m$, $0 < \tau \leq \tau_0$, 则该差分格式稳定.

$\triangleleft$ 只需注意到 $\|G(\omega, \tau)\|_2 = \sqrt{\rho(G^* G)}$ 即可. $\triangleright$

定理 2.7

若 $0 < \tau \leq \tau_0$ 且 $n\tau \leq T$ 时, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ 存在非奇异阵 $S(\omega, \tau)$ s.t.

$$S^{-1}(\omega, \tau) G(\omega, \tau) S(\omega, \tau) = \Lambda(\omega, \tau),$$

其中 $\Lambda(\omega, \tau)$ 为对角阵, 且存在与 τ, ω 无关的常数 $C > 0$ s.t.

$$\|S\|_2 \leq C, \quad \left\|S^{-1}\right\|_2 \leq C,$$

则 *Von Neumann* 条件是差分格式稳定的充要条件.

Fourier 方法

◁ 由定理条件,

$$G(\omega,\tau) = S(\omega,\tau)\Lambda(\omega,\tau)S^{-1}(\omega,\tau),$$

连乘 n 次得到

$$G^n(\omega,\tau) = S(\omega,\tau)\Lambda^n(\omega,\tau)S^{-1}(\omega,\tau).$$

由 Von Neumann 条件,

$$|\lambda_l(\omega,\tau)| \le 1 + M\tau, \quad l = 1,\cdots,m,$$

又 Λ 为对角阵, 因此 $\|\Lambda\|_2 = \rho(\Lambda) \le 1 + M\tau$. 这样有

$$\|G^n\|_2 \le \|S\|_2 \|\Lambda^n\|_2 \left\|S^{-1}\right\|_2 \le C^2(1+M\tau)^n \le C^2 e^{MT}.$$

即差分格式稳定. ▷

我们还可以有以下一些稳定性充分条件:

Fourier 方法

定理 2.8

如果 $\forall \omega \in \mathbb{R}$ 增长矩阵 $G(\omega,\tau)$ 的元素都有界, 且其特征值满足

$$|\lambda_1(G)| \leq 1 + M\tau, \quad |\lambda_j(G)| \leq r < 1,\ j = 2, \cdots, m.$$

则 *Von Neumann* 条件也是稳定性充分条件.

定理 2.9 (记 $\sigma = \omega h$)

若 $G(\omega,\tau) \equiv G(\sigma)$, 且 $\forall \sigma \in \mathbb{R}$ 有下列条件之一成立

1. $G(\sigma)$ 有 m 个不同特征值;
2. $G(\sigma)$ 的 k 阶导数 $G^{(k)}(\sigma) = \gamma_k I$, $k = 0, 1, \cdots, s-1$;
   $G^{(s)}(\sigma)$ 有 m 个不同特征值;
3. $\rho(G) < 1$.

则 $Von\ Neumann$ 条件是差分格式稳定的充要条件.

Fourier 方法

下面我们来看一些例子:

例 2.16 (考虑逼近对流方程 $u_t + au_x = 0$ 的显式格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad \text{的稳定性条件.}$$

解: 将上式变形为 $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$, $\lambda = \frac{\tau}{h}$.

再令 $u_j^n = v^n e^{ij\omega h}$ 代入上式有

$$v^{n+1} = v^n\left(1 - \frac{a\lambda}{2}\left(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}\right)\right) \Longrightarrow G(\omega,\tau) = 1 - ia\lambda\sin\omega h.$$

显然, 只要 $\sin\omega h \neq 0$, 就有

$$|G(\omega,\tau)|^2 = 1 + a^2\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\omega h \not\leq (1+M\tau)^2.$$

即不满足 Von Neumann 条件, 因而此公式不稳定. □

Fourier 方法

例 2.17 (再考虑逼近对流方程 $u_t + au_x = 0$ 的 '顺风' 格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \quad \text{的稳定性条件, 假设} a > 0.$$

解: 将上式变形为 $u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_{j+1}^n - u_j^n)$, $\lambda = \frac{\tau}{h}$.

再令 $u_j^n = v^n e^{ij\omega h}$ 代入上式有

$$v^{n+1} = v^n \left(1 - a\lambda \left(e^{i\omega h} - 1\right)\right)$$

$$\Longrightarrow G(\omega, \tau) = 1 + a\lambda(1 - \cos\omega h) - ia\lambda\sin\omega h$$

$$= 1 + 2a\lambda\sin^2\frac{\omega h}{2} - 2ia\lambda\sin\frac{\omega h}{2}\cos\frac{\omega h}{2}.$$

显然, 只要 $\sin\frac{\omega h}{2} \neq 0$, 就有

$$|G(\omega, \tau)|^2 = 1 + 4a\frac{\tau}{h}(1 + a\lambda)\sin^2\frac{\omega h}{2} \not\leq (1 + M\tau)^2.$$

即不满足 Von Neumann 条件, 因而此公式不稳定. □

Fourier 方法

例 2.18 (再考虑逼近对流方程 $u_t + au_x = 0$ 的 '迎风' 格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$ 的稳定性条件, 假设$a > 0$.

解: 将上式变形为 $u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n)$, $\lambda = \frac{\tau}{h}$.

再令 $u_j^n = v^n e^{ij\omega h}$ 代入上式有

$$v^{n+1} = v^n \left(1 - a\lambda \left(1 - e^{-i\omega h}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow G(\omega, \tau) = 1 - a\lambda(1 - \cos\omega h) - ia\lambda \sin\omega h$$

$$= 1 - 2a\lambda \sin^2\frac{\omega h}{2} - 2ia\lambda \sin\frac{\omega h}{2}\cos\frac{\omega h}{2}.$$

$$\Longrightarrow |G(\omega, \tau)|^2 = 1 - 4a\lambda(1 - a\lambda)\sin^2\frac{\omega h}{2}.$$

即 $a\lambda \leq 1$ 时, $|G(\omega, \tau)|^2 \leq 1$, 满足 Von Neumann 条件, 公式稳定. □

Fourier 方法

例 2.19 (再考虑逼近对流方程 $u_t + au_x = 0$ 的隐式 '迎风' 格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 0$$ 的稳定性条件, 假设$a > 0$.

解: 将上式变形为 $u_j^{n+1} + a\lambda(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n$, $\lambda = \frac{\tau}{h}$.

再令 $u_j^n = v^n e^{ij\omega h}$ 代入上式有

$$v^{n+1}\left(1 + a\lambda\left(1 - e^{-i\omega h}\right)\right) = v^n$$

$$\Longrightarrow G(\omega,\tau) = \frac{1}{1 + a\lambda(1 - \cos\omega h) + ia\lambda\sin\omega h}.$$

$$= \frac{1}{1 + 2a\lambda\sin^2\frac{\omega h}{2} + 2ia\lambda\sin\frac{\omega h}{2}\cos\frac{\omega h}{2}}.$$

$$\Longrightarrow |G(\omega,\tau)|^2 = \frac{1}{1 + 4a\lambda(1 + a\lambda)\sin^2\frac{\omega h}{2}} \le 1.$$

即总满足 Von Neumann 条件, 此公式恒稳定. □

Fourier 方法

例 2.20 (考虑逼近扩散方程 $u_t = au_{xx}$ $(a>0)$ 的隐式差分格式)

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \quad \text{的稳定性条件.}$$

解: 令 $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$, 将上式化成

$$-a\lambda u_{j-1}^{n+1} + (1+2a\lambda)u_j^{n+1} - a\lambda u_{j+1}^{n+1} = u_j^n.$$

令 $u_j^n = v^n e^{ij\omega h}$ 代入上式有

$$v^{n+1}\left(-a\lambda\left(e^{i\omega h}+e^{-i\omega h}\right)+1+2a\lambda\right) = v^n$$

$$\Longrightarrow \quad G(\omega,\tau) = \frac{1}{1+4a\lambda\sin^2\frac{\omega h}{2}}.$$

显然, 总有 $|G(\omega,\tau)| \le 1$ 且 G 为一个数, 因而此公式恒稳定. □

Fourier 方法

例 2.21 (考虑逼近扩散方程 $u_t = au_{xx}$ $(a>0)$ 的 Richadson 格式)

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau} = a\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$ (三层格式) 的稳定性条件.

解: 令 $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$, 将上式化成 $u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + 2a\lambda\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$.

记 $v_j^{n+1} = u_j^n$, 有 $u_j^{n+1} = v_j^n + 2a\lambda\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$.

再令 $\mathbf{U}_j^n = \begin{pmatrix} u_j^n \\ v_j^n \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{U}_j^{n+1} = \begin{pmatrix} 2a\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{U}_{j-1}^n + \mathbf{U}_{j+1}^n) + \begin{pmatrix} -4a\lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{U}_j^n$

令 $\mathbf{U}_j^n = \mathbf{V}^n e^{ij\omega h}$ 代入上式有 $\mathbf{V}^{n+1} = \begin{pmatrix} -8a\lambda\sin^2\frac{\omega h}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{V}^n$.

$G(\omega,\tau)$ 的两个特征值为 $\mu_{1,2} = -4a\lambda\sin^2\frac{\omega h}{2} \pm \sqrt{1+16a\lambda^2\sin^4\frac{\omega h}{2}}$.

显然取负号即有 $|\mu_2| > 1 + 4a\frac{\tau}{h^2}\sin^2\frac{\omega h}{2}$, 即恒不稳定. $\square$

Fourier 方法

例 2.22 (仍考虑逼近扩散方程 $u_t = au_{xx}$ $(a > 0)$ 的两层显式格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$ 的稳定性条件.

解: 令 $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$, 将上式化成 $u_j^{n+1} = u_j^n + a\lambda\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$.

令 $u_j^n = v^n e^{ij\omega h}$ 代入上式有

$$v^{n+1} = \left(1 + a\lambda\left(e^{i\omega h} + e^{-i\omega h}\right) - 2a\lambda\right)v^n$$

即 $G = 1 - 4a\lambda\sin^2\frac{\omega h}{2}$. 要想 $|G| \le 1$, 即要求 $|4a\lambda\sin^2\frac{\omega h}{2}| \le 2$.

这样 $a\lambda \le \frac{1}{2}$ 时, Von Neumann 条件成立. 此时格式稳定. □

总结一下: 例2.16、2.21恒不稳定, 例2.19、2.20恒稳定, 例2.17、2.18、2.22为条件稳定. 一般来说, 隐式格式稳定性较好, 但每一步计算量大; 显式格式为条件稳定, 但每一步计算量小.

Hirt 启示法

该方法的基本思想是，将差分格式做 Taylor 展开，留下最低阶的误差项，略去高阶项，得到所谓的第一微分近似或称修正微分方程. 一般来说若差分格式与原方程是相容的，则只是在原方程基础上增加了一些含小参数的较高阶偏导数项. 如果修正方程是适定的，那么原差分格式就是稳定的. 反之原差分格式就是不稳定的.

例 2.23 (对于对流方程 $u_t = au_x$ (设 $a > 0$), 采用格式:)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

Taylor 展开后有:

$$[u_t]_j^n + \frac{\tau}{2}[u_{tt}]_j^n + \mathcal{O}(\tau^2) = a[u_x]_j^n + \frac{ah^2}{6}[u_{xxx}]_j^n + \mathcal{O}(h^4).$$

利用方程得 $u_{tt} = (u_t)_t = (au_x)_t = a(u_t)_x = a^2 u_{xx}$.

Hirt 启示法

代入上式并保留最低阶项:

$$u_t = au_x - \frac{a^2\tau}{2}u_{xx} + \mathcal{O}(h^2 + \tau^2).$$

显然要让此抛物型方程是适定的，需要 u_{xx} 前面的系数 $-\frac{a^2\tau}{2} > 0$. 而这不可能. 因而此方法是恒不稳定的. (结论与前面一致)

但如果使用隐式格式: $\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}$.

Taylor 展开后有: $[u_t]_j^{n+1} - \frac{\tau}{2}[u_{tt}]_j^{n+1} + \mathcal{O}(\tau^2) = a[u_x]_j^{n+1} + \mathcal{O}(h^2)$.

保留最低阶项:

$$u_t = au_x + \frac{a^2\tau}{2}u_{xx} + \mathcal{O}(h^2 + \tau^2).$$

显然此抛物型方程是适定的，因而此方法是恒稳定的.

Hirt 启示法

如果使用“迎风”格式: $\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}$. Taylor 展开后有:

$$[u_t]_j^n + \frac{\tau}{2}[u_{tt}]_j^n + \mathcal{O}(\tau^2) = a[u_x]_j^n + \frac{ah}{2}[u_{xx}]_j^n + \mathcal{O}(h^2).$$

保留最低阶项:

$$u_t = au_x + \frac{ah - a^2\tau}{2}u_{xx} + \mathcal{O}(h^2 + \tau^2).$$

要让此抛物型方程是适定的, 需要 $ah - a^2\tau > 0$, 即 $a\frac{\tau}{h} < 1$, 此条件下该迎风格式是稳定的.

如果使用“顺风”格式: $\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} = a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}$. Taylor 展开后有:

$$[u_t]_j^n + \frac{\tau}{2}[u_{tt}]_j^n + \mathcal{O}(\tau^2) = a[u_x]_j^n - \frac{ah}{2}[u_{xx}]_j^n + \mathcal{O}(h^2).$$

保留最低阶项: $u_t = au_x - \frac{ah + a^2\tau}{2}u_{xx} + \mathcal{O}(h^2 + \tau^2)$.

因为 $-(ah + a^2\tau) < 0$, 即该方法是恒不稳定的.

Hirt 启示法

Hirt 启示法的最大好处是可以很方便分析非线性问题:

例 2.24 (对双曲守恒律问题 $u_t + f(u)_x = 0$, 采用格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)}{h} = 0.$$ 做 *Taylor* 展开, 利用

$$f(u_{j-1}^n) = f(u_j^n) - hf(u_j^n)_x + \frac{h^2}{2} f(u_j^n)_{xx} + \mathcal{O}(h^3),$$

有
$$u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + f(u)_x - \frac{h}{2} f(u)_{xx} + \mathcal{O}(\tau^2 + h^2) = 0.$$

用方程得: $u_{tt} = (u_t)_t = (-f(u)_x)_t = -\left(f(u)_t\right)_x = -\left(f'(u)u_t\right)_x$

$$= \left(f'(u)f(u)_x\right)_x = 2f'(u)f''(u)(u_x)^2 + \left(f'(u)\right)^2 u_{xx},$$

及
$$f(u)_{xx} = f''(u)\left(u_x\right)^2 + f'(u)u_{xx}.$$

$$\Longrightarrow u_t + f(u)_x = \frac{hf'}{2}(1 - \lambda f'(u))u_{xx} + \left(\frac{h}{2} f''(u) - \tau f'(u)f''(u)\right)(u_x)^2 + \mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$$

Hirt 启示法

要想让上述抛物问题是适定的，我们需要

$$\frac{hf'}{2}(1-\lambda f'(u)) \geq 0.$$

如果 $f'(u) \geq 0$, 需要 $1-\lambda f'(u) \geq 0 \iff \lambda f'(u) \leq 1$.

显然若 $f'(u) < 0$, 上面系数不可能为正.

此时需要用

$$\frac{f(u_{j+1}^n)-f(u_j^n)}{h} \text{ 来替换 } \frac{f(u_j^n)-f(u_{j-1}^n)}{h}.$$

稳定性条件会变成 $\lambda f'(u) \geq -1$.

直接法

基本思想就是直接写出转移矩阵 $\mathbf{U}^{n+1} = A\mathbf{U}^n$.

这里 $\mathbf{U}^n = (\cdots, u_i^n, \cdots)^T$ 为离散点上的函数值组成的向量.

假设 $\widetilde{\mathbf{U}}^n$ 为经过数值求解得到的近似值（包含了舍入误差等），那么令 $\mathbf{Z}^n = \mathbf{U}^n - \widetilde{\mathbf{U}}^n$ 为误差向量, 我们有

$$\mathbf{Z}^{n+1} = A\mathbf{Z}^n \Longrightarrow \mathbf{Z}^n = A^n\mathbf{Z}^0.$$

由 “稳定性” 定义, 我们希望有 $\|\mathbf{Z}^n\| \leq K \left\|\mathbf{Z}^0\right\| \iff \|A^n\| \leq M$

直接法

类似于 Fourier 分析的办法, 可以得到稳定性条件的一些结论:

1. 必要条件为 $\rho(A) \le 1 + M\tau$;
2. 若 A 为正规矩阵, 上述条件也为充分条件.

来看一个例子.

例 2.25

考虑常系数扩散方程初边值问题:

$$\begin{cases} u_t = a u_{xx}, & x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

设 $a > 0$, $u_0(0) = u_0(l) = 0$.

直接法

如果采用显式格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}=a\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2},\quad n>0,\ j=1,\cdots,J-1.$$

初边值条件离散为 $(Jh=l)$

$$u_j^0=u_0(x_j),j=0,\cdots,J;u_0^n=u_J^n=0,\ n>0.$$

令 $\lambda=\frac{\tau}{h^2}$, 将格式改写成

$$u_j^{n+1}=a\lambda u_{j-1}^n+(1-2a\lambda)u_j^n+a\lambda u_{j+1}^n,\quad j=1,\cdots,J-1$$

整理成向量形式

$$\begin{pmatrix}u_1^{n+1}\\ \vdots\\ \vdots\\ u_{J-1}^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2a\lambda & a\lambda & & \\ a\lambda & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a\lambda\\ & & a\lambda & 1-2a\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^n\\ \vdots\\ \vdots\\ u_{J-1}^n\end{pmatrix}+a\lambda\begin{pmatrix}u_0^n\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ u_J^n\end{pmatrix}$$

直接法

一般可写成 $\mathbf{U}^{n+1} = A\mathbf{U}^n$. 当然其他两层显 (隐) 式格式也可以如此表示, 只是矩阵 A 会不同. 令 $\mathbf{e}^n = \mathbf{U}^n - \hat{\mathbf{U}}^n$, 其中 $\hat{\mathbf{U}}^n$ 表示实际计算值 (包含初值误差影响). 有

$$\mathbf{e}^{n+1} = A\mathbf{e}^n = \cdots = A^{n+1}\mathbf{e}^0.$$

稳定性等价于 $\exists K > 0$, *s.t.* $\forall n\tau \le T$, 都有 $\|\mathbf{e}^n\| \le K$.

显然这等价于 $\|A^n\| \le M$ (对于 $n\tau \le T$ 一致有界)

我们希望通过计算 A 的特征值来得到 $\|A\|_2$ 的估计.

令 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(J-1)\times(J-1)}$, 有 $A = (1-2a\lambda)I + a\lambda S$.

直接法

由 S 是实对称矩阵知其特征值为实数. 设 S 的特征值为 $r \in \mathbb{R}$, 相应特征向量为 $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_{J-1})^T \in \mathbb{R}^{J-1}$. 取 $v_0 = v_J = 0$,

$$S\mathbf{v} = r\mathbf{v} \Longrightarrow v_{j-1} - rv_j + v_{j+1} = 0, \quad j = 1, \cdots, J-1.$$

设上述齐次差分方程的解为 $v_j = \mu^j$ 形式, 代入有

$$\mu^2 - r\mu + 1 = 0 \ \Longrightarrow \ \mu = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - 1}$$

由圆盘定理易见 $|r| \le 2$, 即 $\mu = \frac{r}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{r^2}{4}}$. 即有 $|\mu| = 1$.

记 $\mu = e^{\pm i\theta}$, 即 $\cos\theta = \frac{r}{2}$, $\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{4}}$. 有

$$v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}, \quad j = 0, 1, \cdots, J$$

由 $v_0 = v_J = 0 \Longrightarrow c_1 = -c_2, \ c_2 \sin J\theta = 0$. 因 $c_2 \neq 0$ (否则 $v_j \equiv 0$)

故有 $J\theta = k\pi \Longrightarrow \theta_k = \frac{k\pi}{J}, \ r_k = 2\cos\frac{k\pi}{J}, \ k = 1, \cdots, J-1.$

直接法

即 A 的特征值为 (注意到 $h = \frac{l}{J}$)

$$\alpha_k = 1 - 2a\lambda + a\lambda \cdot 2\cos\frac{k\pi h}{l} = 1 - 4a\lambda \sin^2\frac{k\pi h}{2l}, \quad 1 \le k \le J-1$$

显然，当 $a\lambda \le \frac{1}{2}$ 时，$-1 \le \alpha_k \le 1$，即 $\rho(A) < 1$.

因此该方法的稳定性条件即为 $a\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}$.

若采用古典隐式格式 $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = a\dfrac{\delta_x^2 u_j^{n+1}}{h^2}$.

类似地可以将格式写为

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}^n.$$

这里 $\mathbf{B} = (1 + 2a\lambda)I - a\lambda S$.

直接法

利用前面已经得到的 S 的特征值, 可以得到 $\mathbf{B}$ 的特征值为

$$\begin{aligned}\mu_k(\mathbf{B}) &= 1+2a\lambda - a\lambda\mu_k(S)\\ &= 1+2a\lambda\left(1-\cos\frac{kh\pi}{l}\right), \quad k=1,2,\cdots,J-1.\end{aligned}$$

由此易见 $\mu_k(\mathbf{B}) > 1$, 即 $\mu_k(\mathbf{B}^{-1}) < 1$. 又因为 $\mathbf{B}$ 为对称矩阵, 因而 $\mathbf{B}^{-1}$ 也是对称矩阵 (自然是正规阵), 即此隐式格式是无条件稳定的!

但是直接法在实际应用中有许多困难: 因矩阵 A 结构各异, 阶数很大, 不容易求得其特征值, 另外 A 不一定是正规阵 $\cdots$

因此实际计算时不常用直接法来估计稳定性.

能量不等式方法

Fourier 分析法仅适用于常系数线性方程 (组) 的初值问题, 对于一般问题 (变系数、非线性、初边值问题等), 能量不等式方法是分析其稳定性的有力工具.

例 2.26

考虑如下变系数对流方程初值问题

$$\begin{cases} u_t + a(x,t)u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.47}$$

我们先导出一个积分形式, 然后再考虑离散格式的稳定性.

一般设 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow u(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R})$. 即有 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$.

能量不等式方法

将方程(2.47)乘以 $u(x,t)$ 并对 $x \in \mathbb{R}$ 积分得到

$$0 = \int_{\mathbb{R}} u \cdot u_t dx + \int_{\mathbb{R}} a(x,t) u \cdot u_x dx$$

令$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)dx$, 有

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{2} dx = \int_{\mathbb{R}} u \cdot u_t dx = -\int_{\mathbb{R}} a(x,t) u u_x dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} a(x,t) \left(\frac{u^2}{2}\right)_x dx \overset{\text{分部积分}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{2} \frac{\partial a(x,t)}{\partial x} dx\end{aligned}$$

设$\sup\limits_{x,t} \left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| = M < +\infty$, 得

$$\frac{dE}{dt} \le M \cdot E(t) \overset{\text{Gronwall 不等式}}{\Longrightarrow} E(t) \le E(0) e^{Mt}$$

此即问题 (2.47) 的适定性.

能量不等式方法

下面假设 $a(x,t) \geq 0$, 用迎风型差分格式

(2.48) $$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a_j^n\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0$$

来计算, 其中 $a_j^n=a(x_j,t_n)$. 下面分析格式 (2.48) 的稳定性.

令 $\lambda=\frac{\tau}{h}$, 将格式写成

(2.49) $$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda a_j^n(u_j^n-u_{j-1}^n).$$

将 (2.49) 乘以 u_j^{n+1}, 并假设 $\lambda \max\limits_{j,n} a_j^n \leq 1$, 有

$$\begin{aligned}\left(u_j^{n+1}\right)^2 &= (1-\lambda a_j^n)u_j u_j^{n+1}+\lambda a_j^n u_{j-1}^n u_j^{n+1}\\ &\leq \frac{1-\lambda a_j^n}{2}[(u_j^n)^2+(u_j^{n+1})^2]+\frac{\lambda a_j^n}{2}[(u_{j-1}^n)^2+(u_j^{n+1})^2]\\ &= \frac{1}{2}(u_j^{n+1})^2+\frac{1-\lambda a_j^n}{2}(u_j^n)^2+\frac{\lambda a_j^n}{2}(u_{j-1}^n)^2\end{aligned}$$

能量不等式方法

(2.50) $$\Longrightarrow (u_j^{n+1})^2 \le (u_j^n)^2 + \lambda a_j^n[(u_{j-1}^n)^2 - (u_j^n)^2]$$

将 (2.50) 乘以步长 h 且对 j 求和, 记 $\|u^n\|_h^2 = h\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty}(u_j^n)^2$, 有

(2.51) $$\left\|u^{n+1}\right\|_h^2 \le \|u^n\|_h^2 + \lambda h \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{a_{j+1}^n - a_j^n}{h}\right) h(u_j^n)^2$$

如果 $\sup\limits_{x,t}\left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| \le C \Longrightarrow \sup\limits_{x,t}\left|\frac{a(x+h,t)-a(x,t)}{h}\right| \le C$

利用 $\lambda = \frac{\tau}{h}$, 由 (2.51) 得

$$\left\|u^{n+1}\right\|_h^2 \le \|u^n\|_h^2 + C\tau\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(u_j^n)^2 = (1+C\tau)\|u^n\|_h^2$$

$$\Longrightarrow \|u^n\|_h^2 \le (1+C\tau)^n \left\|u^0\right\|_h^2 \le e^{CT}\|u_0\|_h^2, \quad \forall n\tau \le T.$$

能量不等式方法

上面关于 $a(x,t)$ 的条件可以放宽为

(2.52) $a(x,t)$关于x满足 Lipschitz 连续性条件, 且常数不依赖于t.

这样, 若 $a(x,t)$ 满足 (2.52), 且

(2.53) $$\lambda \max_{j,n} a_j^n \le 1,$$

那么格式 (2.48) 是稳定的.

能量不等式方法

例 2.27 (再看一个方程组的例子)

考虑一阶线性双曲方程组

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = A(x,t)\mathbf{u}_x, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \ A \in \mathbb{R}^{m\times m}, \ A^T = A, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x). \end{cases}$$

若使用差分格式

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \sum_{k=-s}^{s} B_k(x_j, t_n; \tau, h) T^k \mathbf{u}_j^n \tag{2.54}$$

来求解. 其中有 *(相容性)*

$$\sum_{k=-s}^{s} B_k = I, \quad \frac{\tau}{h} \sum_{k=-s}^{s} k B_k = A + \mathcal{O}(\tau). \tag{2.55}$$

我们先给出一个引理.

能量不等式方法

引理 2.2

如果 B 为对称非负定矩阵, 则 $|(B\mathbf{u},\mathbf{v})| \le \sqrt{(B\mathbf{u},\mathbf{u})}\sqrt{(B\mathbf{v},\mathbf{v})}$.

$\lhd$ 将 B 对角化: $B = S\Lambda S^T$, 其中 S 为正交阵, Λ 对角阵 (元素非负).

$$\Longrightarrow |(B\mathbf{u},\mathbf{v})| = |(\Lambda(S^T\mathbf{u}), S^T\mathbf{v})| \le \sqrt{(\Lambda(S^T\mathbf{u}),(S^T\mathbf{u}))}\sqrt{(\Lambda S^T\mathbf{v}, S^T\mathbf{v})}$$

$$= \sqrt{(B\mathbf{u},\mathbf{u})}\sqrt{(B\mathbf{v},\mathbf{v})}. \quad \rhd$$

对于差分格式 (2.54) 的稳定性我们有以下定理:

定理 2.10

若格式 (2.54) 中的 B_k 为对称非负定矩阵, 且关于 x 为 *Lipschitz* 连续的, 存在 $\sigma > 0$ *s.t.* $\frac{\tau}{h} \ge \sigma$, 则该格式是稳定的.

$\lhd$ 用向量 $\mathbf{u}_j^{n+1}$ 与 (2.54) 做内积:

能量不等式方法

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}_j^{n+1}, \mathbf{u}_j^{n+1}) &= \sum_{k=-s}^{s} (B_k T^k \mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_j^{n+1}) \\
\leq & \sum_{k=-s}^{s} \sqrt{(B_k T^k \mathbf{u}_j^n, T^k \mathbf{u}_j^n)} \sqrt{(B_k \mathbf{u}_j^{n+1}, \mathbf{u}_j^{n+1})} \\
\leq & \sum_{k=-s}^{s} \frac{1}{2} \left[(B_k T^k \mathbf{u}_j^n, T^k \mathbf{u}_j^n) + (B_k \mathbf{u}_j^{n+1}, \mathbf{u}_j^{n+1}) \right] \\
= & \frac{1}{2} \sum_{k=-s}^{s} \left[(B_k(x_{j+k}) \mathbf{u}_{j+k}^n, \mathbf{u}_{j+k}^n) + ((B_k(x_j) - B_k(x_{j+k})) \mathbf{u}_{j+k}^n, \mathbf{u}_{j+k}^n) \right] \\
& + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_j^{n+1}, \mathbf{u}_j^{n+1}) \qquad \longleftarrow (\text{利用了} \sum_{k=-s}^{s} B_k = I)
\end{aligned}
$$

能量不等式方法

记 $\|\mathbf{u}^n\|_h^2=\sum_j h(\mathbf{u}_j^n,\mathbf{u}_j^n)$, 将上式乘以 h 并对 j 求和得:

$$\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|_h^2\le h\sum_{k,j}\left[\left(B_k(x_{j+k})\mathbf{u}_{j+k}^n,\mathbf{u}_{j+k}^n\right)+\left((B_k(x_j)-B_k(x_{j+k}))\mathbf{u}_{j+k}^n,\mathbf{u}_{j+k}^n\right)\right]$$

B_k 关于 x 满足 Lipschitz 连续性, 有 $\|B_k(x_j)-B_k(x_{j+k})\|\le L|k|h$.

代入上式有

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|_h^2 &\le h\sum_{k,j}\left[\left(B_k(x_j)\mathbf{u}_j^n,\mathbf{u}_j^n\right)+L|k|h\left(\mathbf{u}_j^n,\mathbf{u}_j^n\right)\right]\\ &= \|\mathbf{u}^n\|_h^2\,(1+Ls(s+1)h)\end{aligned}$$

又有 $\dfrac{\tau}{h}\ge\sigma>0\Longrightarrow h\le\dfrac{\tau}{\sigma}$.

令 $M=\dfrac{Ls(s+1)}{\sigma}\Longrightarrow\left\|\mathbf{u}^{n+1}\right\|_h^2\le(1+M\tau)\,\|\mathbf{u}^n\|_h^2$. 证毕. $\triangleright$