第三章（双曲方程的差分方法）习题

(1) 讨论对流方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^n}{\tau}+\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h}+\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0$$

的精度及稳定性。

(2) 讨论求解：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

的Wendroff 隐式差分格式

$$(1+a\lambda)u_{j+1}^{n+1}+(1-a\lambda)u_j^{n+1}-(1-a\lambda)u_{j+1}^n-(1+a\lambda)u_j^n=0$$

的精度及稳定性，其中$\lambda=\frac{\tau}{h}$ 为网格比。设$a>0$, 给出初边值条件并写出计算步骤。

(3) 试构造求解方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}=0,$$

的迎风格式，其中$\mathbf{u}=(u,v)^T$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

(4) 对于Riemann问题: $\begin{cases} u_t+f(u)_x=0, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} u_L, & x<0; \\ u_R, & x>0. \end{cases}\end{cases}$

试利用守恒性(即$u(x,t)$ 关于x 在$\mathbb{R}$ 上的积分不变)来求出激波位置(关于t)的表达式$\xi(t)$, 并证明Rankine-Hugoniot 条件$\dot{\xi}(t)=\dfrac{f(u_L)-f(u_R)}{u_L-u_R}$ 总是成立.

(5) 试证明用于标量方程$u_t+f(u)_x=0$ 的Godunov 格式是TVD 格式.

(6) 讨论求解$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{4h^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2} + \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{4h^2}$$

的稳定性。

(7) 讨论求解

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

的差分格式

$$\begin{aligned} u_{jm}^{n+1} \quad = \quad & u_{jm}^n - \frac{a\lambda}{2}\left(u_{j+1,m}^n - u_{j-1,m}^n\right) + \frac{(a\lambda)^2}{2}\left(u_{j+1,m}^n - 2u_{jm}^n + u_{j-1,m}^n\right) \\ & -\frac{b\lambda}{2}\left(u_{j,m+1}^n - u_{j,m-1}^n\right) + \frac{(b\lambda)^2}{2}\left(u_{j,m+1}^n - 2u_{jm}^n + u_{j,m-1}^n\right) \end{aligned}$$

的截断误差，这里$\lambda = \frac{\tau}{h}$，注意此格式不是Lax-Wendroff 格式。

(8) 试构造求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的一种显式差分格式，并用线性化方法讨论其稳定性。