

偏微分方程数值解法

任课教师：黄忠亿

清华大学数学科学系



目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
- 5 椭圆问题的差分方法**
 - 椭圆问题的差分方法基本概念
 - 一维问题（两点边值问题）
 - 二维椭圆方程差分格式
 - 三角网格剖分差分格式
 - 极值原理
 - 能量不等式估计
 - 双调和问题（四阶椭圆问题）
 - 特征值问题
 - 椭圆问题差分方程的迭代解法



椭圆问题的差分方法基本概念

椭圆型问题可以看成稳态的抛物问题. 因为其与“时间”无关, 所以其差分方法的性质与前面介绍的时间发展问题有较大区别.

考虑如下一个一维椭圆方程边值问题 (即常微分方程两点边值问题)

$$(5.1) \quad \begin{cases} Lu \equiv -u''(x) = f(x), & a < x < b, \\ u(a) = \alpha, & u(b) = \beta. \end{cases}$$

一般我们要求 $f(x) \in L^2(a, b)$. 这样问题(5.1)在函数空间

$$H^1(a, b) = \left\{ v \in L^2(a, b) \mid \int_a^b [v^2(x) + (v'(x))^2] dx < +\infty \right\}$$

中存在唯一解.



一维模型问题

我们来看上面问题(5.1)的差分格式如何构造.

先将区间剖分, 比如 N 等分: 令 $h = \frac{b-a}{N}$, $x_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N$.

最简单地可以用二阶中心差商来近似二阶导数:

$$(5.2) \quad \begin{cases} -\frac{\delta_x^2}{h^2} u_j = f_j, & j = 1, \dots, n-1, \\ u_0 = \alpha, & u_N = \beta. \end{cases}$$

记离散算子 $\mathcal{L}_h = -\frac{1}{h^2} \delta_x^2$. 显然有

$$\mathcal{L}_h u(x_j) = -\left(u''(x_j) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_j)\right) + \mathcal{O}(h^4) \equiv f(x_j) + R_j(u).$$

即截断误差为 $R_j(u) = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_j) + \mathcal{O}(h^4)$.



一维模型问题

由格式 (5.2) 我们最终得到一个线性方程组

$$(5.3) \quad AU = F.$$

我们自然关心的是, 上面方程组(5.3) 是否存在唯一解? 离散解在 $h \rightarrow 0$ 时是否收敛? 如果收敛, 以什么方式收敛到 (5.1) 的解?

对于网格离散函数 $u_h = \{u_j\}_{j=0}^N$, 我们先定义以下几种范数:

$$\|u_h\|_{\infty} \quad \doteq \quad \max_{1 \leq i \leq N-1} |u_i|$$

$$\|u_h\|_0^2 \quad \doteq \quad h \sum_{i=1}^{N-1} u_i^2$$

$$\|u_h\|_1^2 \quad \doteq \quad \|u_h\|_0^2 + |u_h|_1^2$$

$$\text{其中一阶半范 } |u_h|_1^2 \doteq h \sum_{i=1}^N \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right)^2.$$



椭圆问题的差分方法基本概念

记 $R_h(u)$ 为由 $R_j(u) = \mathcal{L}_h u(x_j) - Lu(x_j)$ 定义的网格函数. 可以如下定义差分格式的相容性:

定义 5.1 (相容性)

设 u 充分光滑, 如果有 $\lim_{h \rightarrow 0} \|R_h(u)\| = 0$, 则称差分算子 \mathcal{L}_h 与微分算子 L 相容.

这里的范数 $\|\cdot\|$ 可以取前面任何一种常用范数.

对格式 (5.2), $\|R_h(u)\|_\infty = \|R_h(u)\|_0 = \mathcal{O}(h^2)$, $\|R_h(u)\|_1 = \mathcal{O}(h)$.

定义 5.2 (收敛性)

若 $\exists h_0 > 0$, 当 $h \in (0, h_0]$ 时, 差分方程的解 u_h 存在且有范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\| = 0$, 则称 $u_h(x)$ 收敛到边值问题 (5.1) 的解.

椭圆问题的差分方法基本概念

记误差 $e_j = u(x_j) - u_j$, 令 e_h 为由序列 $\{e_j\}$ 定义的网格函数, 那么

$$(5.4) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_h e_j = R_j(u), & j = 1, 2, \dots, N-1, \\ e_0 = e_N = 0. \end{cases}$$

这样, 收敛性以及收敛速度的估计问题归结为如何通过截断误差 $R_j(u)$ 估计误差函数 e_h 的问题. (5.3) 的可解问题由稳定性得到.

定义 5.3 (稳定性)

称问题 (5.2) 关于右端 f_h 稳定, 是指若存在与网格 \mathcal{T}_h 及 f_h 无关的常数 M 及 h_0 , s.t. 当 $0 < h \leq h_0$ 时, 有以下估计式

$$(5.5) \quad \|u_h\|_A \leq M \|f_h\|_B \quad (\|\cdot\|_A \text{ 和 } \|\cdot\|_B \text{ 可以不同})$$



椭圆问题的差分方法基本概念

由上面稳定性可以保证 $\mathcal{L}_h u_h = 0$ 只有零解, 亦即 $\mathcal{L}_h u_h = f_h$ 存在唯一解.

我们称 (5.5) 式的估计式为关于差分方程解 u_h 的先验估计.

由稳定性条件(5.5)及误差函数满足的方程 (5.4)得

$$\|e_h\|_A \leq M \|R_h(u)\|_B.$$

如果 (5.1) 的解 $u(x)$ 充分光滑, 且离散算子 \mathcal{L}_h 关于范数 $\|\cdot\|_B$ 满足相容性条件, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R_h(u)\|_B = 0,$$

那么就有 $h \rightarrow 0$ 时, $\|e_h\|_A \rightarrow 0$, 即有收敛性成立.



椭圆问题的差分方法基本概念

可总结为以下定理:

定理 5.1

若边值问题 (5.1) 的解 u 充分光滑, 差分方程 (5.2) 按范数 $\|\cdot\|_B$ 满足相容性条件, 且有稳定性条件 (5.5) 成立, 则差分方程 (5.2) 的解 u_h 按范数 $\|\cdot\|_A$ 收敛到边值问题 (5.1) 的解 u , 且有与 $\|R_h(u)\|_B$ 相同的收敛阶, 即

$$\|e_h\|_A \leq M \|R_h(u)\|_B = \mathcal{O}(h^p) \rightarrow 0, \text{ 当 } h \rightarrow 0 \text{ 时.}$$

简单说就是对于线性问题, “相容性 + 稳定性” \implies “收敛性”!



目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
- 5 椭圆问题的差分方法**
 - 椭圆问题的差分方法基本概念
 - 一维问题 (两点边值问题)
 - 二维椭圆方程差分格式
 - 三角网格剖分差分格式
 - 极值原理
 - 能量不等式估计
 - 双调和问题 (四阶椭圆问题)
 - 特征值问题
 - 椭圆问题差分方程的迭代解法



两点边值问题

考虑以下两点边值问题

$$(5.6) \quad \begin{cases} Lu \equiv -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u(x) = f(x), & x \in (a, b) \\ u'(a) - \alpha u(a) = 0, & u'(b) + \beta u(b) = 0. \end{cases}$$

其中 $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $\alpha, \beta \geq 0$.

我们先假设 $p(x) \in C^1[a, b]$, $q(x), f(x) \in C[a, b]$. 我们用 Taylor 展开来构造上面边值问题的差分格式.

先对区间进行剖分: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$,

记 $h_j = x_j - x_{j-1}$, $h = \max_{1 \leq j \leq N} h_j$. 并令 $x_{j-\frac{1}{2}} = \frac{x_{j-1} + x_j}{2}$.

称 $\{x_{j-\frac{1}{2}}\}_{j=1}^N$ 为剖分 $\mathcal{T}_h = \{x_j\}_{j=0}^N$ 的对偶剖分.



Taylor 展开法

首先考虑对通量的逼近:

$$\begin{aligned} p(x_{i-\frac{1}{2}}) \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_i} &= (p \frac{du}{dx})_{i-\frac{1}{2}} + \frac{h_i^2}{24} (p \frac{d^3u}{dx^3})_{i-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h^4) \\ &= (p \frac{du}{dx})_{i-\frac{1}{2}} + \frac{h_i^2}{24} (p \frac{d^3u}{dx^3})_i + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

同样有

$$\begin{aligned} p(x_{i+\frac{1}{2}}) \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i))}{h_{i+1}} &= (p \frac{du}{dx})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h_{i+1}^2}{24} (p \frac{d^3u}{dx^3})_{i+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h^4) \\ &= (p \frac{du}{dx})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h_{i+1}^2}{24} (p \frac{d^3u}{dx^3})_i + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$



Taylor 展开法

将上面两式相减, 再除以 $\frac{h_i+h_{i+1}}{2}$ 得到

$$\begin{aligned} & \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left[p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] \\ &= \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left[\left(p \frac{du}{dx} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(p \frac{du}{dx} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] + \frac{h_{i+1} - h_i}{12} \left(p \frac{d^3u}{dx^3} \right)_i + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) \right]_i + \frac{h_{i+1} - h_i}{4} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(p \frac{du}{dx} \right) \right]_i + \frac{h_{i+1} - h_i}{12} \left(p \frac{d^3u}{dx^3} \right)_i + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

这样, 令 $\mathcal{L}_h u_i = -\frac{2}{h_i+h_{i+1}} \left[p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i-u_{i-1}}{h_i} \right] + q_i u_i$, 就有

$\mathcal{L}_h u(x_i) = f(x_i) + R_i(u)$, 其中

$$R_i(u) = \frac{h_i - h_{i+1}}{4} \left\{ \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(p \frac{du}{dx} \right) \right]_i + \frac{1}{3} \left(p \frac{d^3u}{dx^3} \right)_i \right\} + \mathcal{O}(h^2) = \begin{cases} \mathcal{O}(h^2), & \text{等距} \\ \mathcal{O}(h), & \text{不等距} \end{cases}$$



有限体积法

上面 Taylor 展开的办法对系数的光滑性要求较高, 实际问题可能达不到. 所以我们一般应采取有限体积法思想来离散.

任取一段 $[s, t] \subset [a, b]$, 在上面对方程(5.1)积分可得

$$-\int_s^t \left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu \right] dx = \int_s^t f(x) dx.$$

令 $w(x) = p \frac{du}{dx}$ (热通量 heat flux) 有:

$$(5.7) \quad w(s) - w(t) + \int_s^t qu dx = \int_s^t f(x) dx.$$

这表明了细杆上温度场稳定时, 每小段上的热量守恒形式. 将原方程写成守恒形式的(5.7)式, 首先降低了光滑性要求, 另外我们也会看到构造边界条件的离散时也更方便了.



有限体积法

下面我们就基于物理上的守恒形式来构造差分格式:

取 s, t 为对偶节点 $x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}$, 即有

$$w(x_{j-\frac{1}{2}}) - w(x_{j+\frac{1}{2}}) + \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx = \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x)dx.$$

与之前类似, 由于系数 $p(x), q(x)$ 可能存在间断, 不能随意离散. 注意到热流量 $w(x)$ 的连续性, 我们将之改写成 $\frac{dw}{dx} = \frac{w(x)}{p(x)}$, 在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上积分:

$$u_j - u_{j-1} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{w}{p} dx \stackrel{\text{中矩公式}}{\approx} w_{j-\frac{1}{2}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{p(x)} dx \equiv w_{j-\frac{1}{2}} \frac{h_j}{a_j}.$$

这里 $a_j = \left(\frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{p(x)} dx \right)^{-1}$ 称为 $p(x)$ 的调和平均.



有限体积法

这样就有 $w_{j-\frac{1}{2}} \approx a_j \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}$.

类似地对其他项也用数值积分公式可得 (因 u 连续)

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx \approx \frac{h_j + h_{j+1}}{2} d_j u_j.$$

其中 $d_j = \frac{2}{h_j + h_{j+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} q(x)dx$. 类似令 $\varphi_j = \frac{2}{h_j + h_{j+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x)dx$, 我

们得到如下差分格式

$$- [a_{j+1} \frac{u_{j+1} - u_j}{h_{j+1}} - a_j \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}] + \frac{h_j + h_{j+1}}{2} d_j u_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \varphi_j,$$

(5.8) $j = 1, \dots, N-1.$

当然, 如果系数 $p(x), q(x), f(x)$ 足够光滑, 我们可用数值积分.



有限体积法

比如我们对那些积分用一点格式, 即

$$a_j = \left(\frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{p(x)} dx \right)^{-1} \approx p_{j-\frac{1}{2}},$$

$$d_j = \frac{2}{h_j + h_{j+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} q(x) dx \approx q_j, \quad \varphi_j = \frac{2}{h_j + h_{j+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x) dx \approx f_j.$$

我们就回到前面 Taylor 展开形式. 当然我们也可以用其他数值积分格式, 比如梯形公式

$$a_j \approx \frac{2p_{j-1}p_j}{p_{j-1} + p_j}, \quad d_j = \frac{q_{j-\frac{1}{2}} + q_{j+\frac{1}{2}}}{2}, \quad \varphi_j = \frac{f_{j-\frac{1}{2}} + f_{j+\frac{1}{2}}}{2}$$

但是注意如果 p, q, f 有间断时只能用 (5.8) 的积分形式.



边界条件处理

第一类边界条件很容易处理, 直接赋值即可.

我们主要考虑第 (二) 三类边界条件, 如: $u'(a) = \alpha u(a) + \xi$.

显然, 如果简单地用 $u'(a) \approx \frac{u_1 - u_0}{h_1}$ 则只有一阶精度.

我们仍然可以采用积分形式处理: 乘以 “ $-p(a)$ ” 得

$$-p(a)u'(a) = \bar{\alpha}u(a) + \bar{\beta}, \quad \text{其中 } \bar{\alpha} = -\alpha p(a), \quad \bar{\beta} = -\xi p(a).$$

在前面热流量的守恒形式(5.7)式中取 $s = a, t = x_{\frac{1}{2}}$, 即有

$$w(a) - w(x_{\frac{1}{2}}) + \int_a^{x_{\frac{1}{2}}} qu dx = \int_a^{x_{\frac{1}{2}}} f dx.$$

将 $w(a) = -(\bar{\alpha}u(a) + \bar{\beta})$ 代入

$$\Rightarrow -w(x_{\frac{1}{2}}) + \int_a^{x_{\frac{1}{2}}} qu dx = \bar{\alpha}u_0 + \bar{\beta} + \int_a^{x_{\frac{1}{2}}} f dx$$



边界条件处理

由积分式

$$u_j - u_{j-1} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{w}{p} dx \stackrel{\text{中矩公式}}{\approx} w_{j-\frac{1}{2}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{p(x)} dx \equiv w_{j-\frac{1}{2}} \frac{h_j}{a_j}$$

可以取

$$w_{\frac{1}{2}} \approx a_1 \frac{u_1 - u_0}{h_1}, \quad \int_a^{x_{\frac{1}{2}}} q u dx \approx \frac{h_1}{2} d_0 u_0, \quad \int_a^{x_{\frac{1}{2}}} f dx \approx \frac{h_1}{2} \varphi_0,$$

其中 $d_0 = \frac{2}{h_1} \int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} q(x) dx$, $\varphi_0 = \frac{2}{h_1} \int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} f(x) dx$. 最终得到

$$-a_1 \frac{u_1 - u_0}{h_1} + \left(\frac{h_1}{2} d_0 - \bar{\alpha} \right) u_0 = \bar{\beta} + \frac{h_1}{2} \varphi_0.$$

当网格均匀时上述离散为 $\mathcal{O}(h^2)$ 精度.



目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
- 5 椭圆问题的差分方法**
 - 椭圆问题的差分方法基本概念
 - 一维问题（两点边值问题）
 - 二维椭圆方程差分格式**
 - 三角网格剖分差分格式
 - 极值原理
 - 能量不等式估计
 - 双调和问题（四阶椭圆问题）
 - 特征值问题
 - 椭圆问题差分方程的迭代解法



二维 Poisson 方程

考虑二维 Poisson 方程边值问题:

$$(5.9) \quad \begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \\ u|_{\partial D} = g, & \text{或者} (\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + ku)|_{\partial D} = \gamma. \end{cases}$$

其中 D 为 \mathbb{R}^2 中有界区域, ∂D 为分片光滑曲线组成. 关于无界区域上的问题我们随后再考虑.

一维和高维问题的本质差别在于网格剖分方面的处理. 在高维, 由于求解区域的几何形状复杂, 如何将剖分与边界条件的离散协同处理会显得非常重要.

我们先假设 ∂D 为一矩形, 随后再考虑其为一般区域情形.



矩形网格剖分

现在先设 $D = [a, b] \times [c, d]$. 为简单起见, 这里仅考虑等距剖分情形. 令 $x_j = a + jh_1$, $y_k = c + kh_2$, 其中 $h_1 = \frac{b-a}{N}$, $h_2 = \frac{d-c}{M}$, $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$. 称

$D_h = \{(x_j, y_k) \mid 1 \leq j \leq N-1, \quad 1 \leq k \leq M-1\}$ 为内点集;

$\partial D_h = \left\{ (x_j, y_k) \mid \begin{array}{l} j = 0, N \text{ 且 } 0 \leq k \leq M; \\ k = 0, M \text{ 且 } 0 \leq j \leq N \end{array} \right\}$ 为边界点集.

如果 (x_j, y_k) 的四个邻点 $(x_{j\pm 1}, y_{k\pm 1}) \in D_h \cup \partial D_h$, 我们称之为“正则内点”.

对于矩形区域 D , 现在内点集 D_h 中的点都是正则内点.

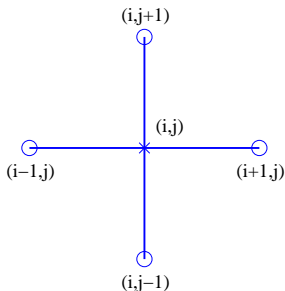


五点差分格式

对于正则内点 (x_i, y_j) , 用二阶中心差商近似二阶偏导数得

$$(5.10) \quad \Delta_h u_{ij} \equiv \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = f_{ij}.$$

如果是第一类边界条件: $u_{ij} = g_{ij}$, 对 $(x_i, y_j) \in \partial D_h$.



由 Taylor 展开可得

$$(5.11) \quad \begin{aligned} R_{ij}(u) &= \Delta_h u(x_i, y_j) - \Delta u(x_i, y_j) \\ &= \frac{1}{12} [h_1^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + h_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}]_{ij} + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

即格式 (5.10) 为二阶格式.



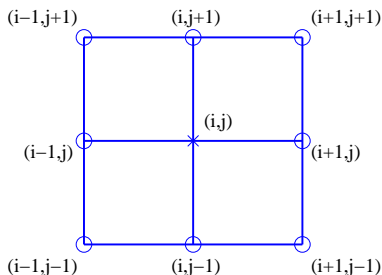
九点差分格式

为了提高精度, 可以考虑九点差分格式. 即把五点差分格式中的截断误差首项 ((5.11) 中的第一项) $\frac{1}{12}[h_1^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + h_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}]_{ij}$ 进一步离散后放进差分格式里, 可得到更高阶格式:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{12} \left[h_1^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + h_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right]_{ij} \\
 = & \frac{1}{12} \left[h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ij} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 \text{利用方程} \quad & \frac{1}{12} \left[h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] f_{ij} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ij} \\
 = & \frac{1}{12} (\delta_x^2 + \delta_y^2) f_{ij} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12 h_1^2 h_2^2} \delta_x^2 \delta_y^2 u_{ij} + \mathcal{O}(h^4)
 \end{aligned}$$



九点差分格式



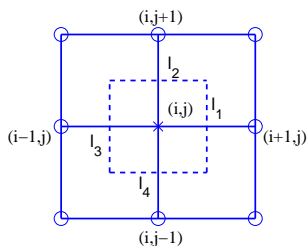
将上式代入 (5.10) 式中, 得到以下九点格式:

$$(5.12) \quad \Delta_h u_{ij} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12h_1^2 h_2^2} \delta_x^2 \delta_y^2 u_{ij} \\ = f_{ij} + \frac{1}{12} (\delta_x^2 + \delta_y^2) f_{ij}.$$

这是一个四阶精度的格式.



有限体积法推导五点差分格式



我们也可以用有限体积法来推导五点格式:(这种方法更易于推广到不规则网格)

取对偶网格如左图, 令

$$D_{ij} = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}} \\ y_{j-\frac{1}{2}} \leq y \leq y_{j+\frac{1}{2}} \end{array} \right. \right\}$$

在 D_{ij} 上积分方程 (5.9) 即得

$$(5.13) \quad \iint_{D_{ij}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{ij}} \Delta u(x, y) dx dy = \int_{\partial D_{ij}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds$$



有限体积法推导五点差分格式

然后我们再用数值积分公式, 例如

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_{ij}} f(x, y) dx dy &\stackrel{\text{一点积分}}{\approx} f_{ij} h_1 h_2, \\
 \int_{\partial D_{ij}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds &= \sum_{k=1}^4 \int_{l_k} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \\
 &\stackrel{\text{一点积分}}{\approx} h_2 \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h_1} + h_1 \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_2} \\
 &\quad + h_2 \frac{u_{i-1,j} - u_{ij}}{h_1} + h_1 \frac{u_{i,j-1} - u_{ij}}{h_2} \\
 &= h_1 h_2 \left[\frac{\delta_y^2 u_{ij}}{h_2^2} + \frac{\delta_x^2 u_{ij}}{h_1^2} \right]
 \end{aligned}$$

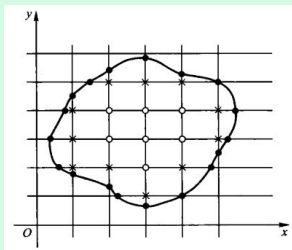
代入 (5.13) 即得到五点差分格式 (5.10).



边界条件处理

对于矩形区域可以很容易处理, 或者直接赋值 (第一类边界条件), 或者可以引入虚拟节点得到高阶近似 (对于第三类边界条件).

下面主要看不规则区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 如何处理. 我们定义:



$\Gamma_h = \{\text{直线 } x = x_i, y = y_j \text{ 与 } \partial\Omega \text{ 的交点}\}$

称为边界点集, 记为 ‘•’.

$\Omega_h = \{(x_i, y_j) \subset \overset{\circ}{\Omega}\}$, 称为内点集

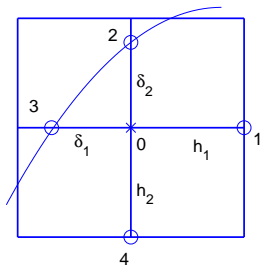
记为 ‘o’ (正则内点) 和 ‘x’ (非正则内点).

正则内点: (x_i, y_j) 的四个邻点均在 Ω_h 中.

非正则内点: (x_i, y_j) 至少有一个邻点不在 Ω_h 中.



边界条件处理



对于正则内点, 当然可以像 (5.10) 式那样建立格式.

对于非正则内点 (相当于不等距网格), 如左图所示. 我们可以在 “O” 点按如下方式建立差分格式:

$$\frac{2}{h_1 + \delta_1} \left(\frac{u_1 - u_0}{h_1} - \frac{u_0 - u_3}{\delta_1} \right) + \frac{2}{h_2 + \delta_2} \left(\frac{u_2 - u_0}{\delta_2} - \frac{u_0 - u_4}{h_2} \right) = f_0$$

对于第一类边界条件, $u|_{\partial\Omega} = g$, 可以直接赋值:

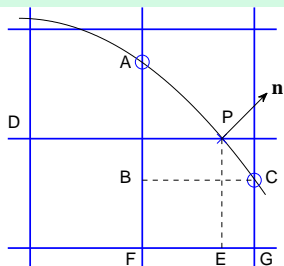
$$\text{对 } (x_i, y_j) \in \Gamma_h, \quad u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j).$$



边界条件处理

下面主要看第三类边界条件如何处理 $(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + ku)_{\Gamma} = \gamma$.

如下图所示, 取一个曲边三角形 ΔABC .



在上面积分方程 $\Delta u = f$, 得

$$\int_{\partial \Delta ABC} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{\Delta ABC} f dv$$

$$\approx f(P) \cdot S_{\Delta ABC}.$$

$$\text{而 } \int_{\partial \Delta ABC} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{\widehat{CA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BC}}$$



边界条件处理

在 $\partial\Delta ABC$ 上的线积分可以用如下数值积分公式:

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{CA}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds &= \int_{\widehat{CA}} (\gamma - ku) ds \approx (\gamma - ku)(P) \cdot |\widehat{CA}|. \\ \int_{\overline{AB}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds &\approx \frac{u_D - u_P}{|\overline{DP}|} \cdot |\overline{AB}|, \\ \int_{\overline{BC}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds &\approx \frac{u_E - u_P}{|\overline{EP}|} \cdot |\overline{BC}|.\end{aligned}$$

而 u_E 可以用 u_F 与 u_G 插值得到.

以上处理一般为一阶精度. 要想达到二阶精度, 采用更一般的三角剖分会较为容易实现.



极坐标形式下的差分格式

当二维区域为圆形、圆环或者扇形时, 使用极坐标更方便 (类似地在三维情形可采用球坐标、柱坐标等).

此时 Poisson 方程成为

$$(5.14) \quad \Delta_{r\theta} u \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = f(r, \theta).$$

这里 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.

这样 xy -平面 $\longleftrightarrow (r, \theta)$ 平面中半无界带状区域 $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\}$ 形式

上 $r = 0$ 成为边界且该处方程有奇性, 我们需要补充条件, 如

$$(5.15) \quad \lim_{r \rightarrow 0+} r \frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$



极坐标形式下的差分格式

在极坐标下离散 Poisson 方程, 考虑到 $r = 0$ 处的“奇性”, 我们一般采用如下网格

$$\begin{aligned} \text{给定 } \Delta r &= \frac{R}{N}, & r_i &= (i + \frac{1}{2})\Delta r, & i &= 0, 1, \dots, N, \\ \text{给定 } \Delta \theta &= \frac{2\pi}{J}, & \theta_j &= j\Delta \theta, & j &= 0, 1, \dots, J-1. \end{aligned}$$

(注意在 θ 方向有周期性: $u(r, \theta_0) = u(r, \theta_J)$)

这样在任意内部点 (r_i, θ_j) ($0 < i < N$), 可用中心差商近似

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]_{ij} &\approx \frac{r_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1,j} - (r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}}) u_{ij} + r_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1,j}}{r_i (\Delta r)^2} \\ \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]_{ij} &\approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{r_i^2 (\Delta \theta)^2} \end{aligned}$$



极坐标形式下的差分格式

这样可以得到如下格式 ($0 < i < N, 0 \leq j \leq J-1$, 注意有周期性

$$u_{i,-1} = u_{i,J-1}, u_{i,0} = u_{i,J})$$

(5.16)

$$\frac{r_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1,j} - (r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}})u_{ij} + r_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1,j}}{r_i(\Delta r)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{r_i(\Delta r)^2} = f_{ij}$$

对于 $j = N$ (即外边界处) 可以像以前一样或者直接赋值, 或者用虚拟节点办法 (注意 $R = N\Delta r, r_N = (N + \frac{1}{2})\Delta r$):

$$(5.17) \quad \begin{cases} \frac{u_{N-1,j} + u_{N,j}}{2} = g(R, \theta_j) & \text{— 第一类边界条件} \\ \frac{u_{N,j} - u_{N-1,j}}{\Delta r} = \gamma(R, \theta_j) & \text{— 第二类边界条件} \end{cases}$$



极坐标形式下的差分格式

重点看一下 $r = 0$ 处的离散: 用 r 乘以方程并在区域 $(0 < \varepsilon \ll 1)$

$D_\varepsilon^j = \{(r, \theta) \mid \varepsilon \leq r \leq \Delta r, \quad \theta_{j-\frac{1}{2}} \leq \theta \leq \theta_{j+\frac{1}{2}}\}$ 上积分得

$$\int_{\theta_{j-\frac{1}{2}}}^{\theta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\varepsilon}^{\Delta r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] dr d\theta = \int_{\theta_{j-\frac{1}{2}}}^{\theta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\varepsilon}^{\Delta r} f(r, \theta) r dr d\theta.$$

$$\text{上式左边} = \int_{\theta_{j-\frac{1}{2}}}^{\theta_{j+\frac{1}{2}}} \left[r \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{\varepsilon}^{\Delta r} d\theta + \int_{\varepsilon}^{\Delta r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]_{\theta_{j-\frac{1}{2}}}^{\theta_{j+\frac{1}{2}}} dr$$

$$\stackrel{\text{利用(5.15)}}{=} \int_{\theta_{j-\frac{1}{2}}}^{\theta_{j+\frac{1}{2}}} \Delta r \frac{\partial u}{\partial r}(\Delta r, \theta) d\theta + \int_{\varepsilon}^{\Delta r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]_{\theta_{j-\frac{1}{2}}}^{\theta_{j+\frac{1}{2}}} dr.$$

然后再对上述三个积分采用数值积分 (例如中点公式) 可得



极坐标形式下的差分格式

$$\text{右边积分} \approx \Delta r \Delta \theta f_{0,j} \frac{\Delta r}{2} = \frac{(\Delta r)^2 \Delta \theta}{2} f_{0,j}.$$

$$\text{左边积分} \approx \Delta r \Delta \theta \frac{\partial u}{\partial r}(\Delta r, \theta_j) + \Delta r \frac{1}{\frac{\Delta r}{2}} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta}(\frac{\Delta r}{2}, \theta_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial u}{\partial \theta}(\frac{\Delta r}{2}, \theta_{j-\frac{1}{2}}) \right]$$

$$(\text{进一步离散}) \approx \Delta r \Delta \theta \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{\Delta r} + 2 \left[\frac{u_{0,j+1} - u_{0,j}}{\Delta \theta} - \frac{u_{0,j} - u_{0,j-1}}{\Delta \theta} \right]$$

这样同时除以 $\frac{(\Delta r)^2 \Delta \theta}{2}$ 得

(5.18)

$$\frac{2}{(\Delta r)^2} (u_{1,j} - u_{0,j}) + \frac{4}{(\Delta r \Delta \theta)^2} (u_{0,j+1} - 2u_{0,j} + u_{0,j-1}) = f_{0,j}, \quad 0 \leq j \leq J-1$$

这样 (5.16)–(5.18) 构成了最终要求解的方程组.



目录 I

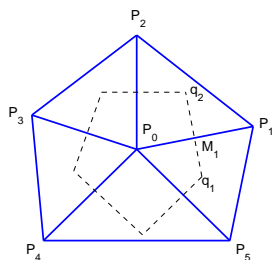
- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
- 5 椭圆问题的差分方法**
 - 椭圆问题的差分方法基本概念
 - 一维问题（两点边值问题）
 - 二维椭圆方程差分格式
 - 三角网格剖分差分格式**
 - 极值原理
 - 能量不等式估计
 - 双调和问题（四阶椭圆问题）
 - 特征值问题
 - 椭圆问题差分方程的迭代解法



不规则区域上的三角网格剖分

考虑一个二维区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上的 Poisson 方程边值问题

$$(5.19) \quad \begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g, & \text{或者 } (\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + ku)|_{\partial\Omega} = \gamma. \end{cases}$$

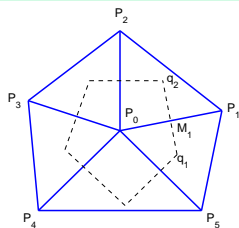


为了更好的处理边界条件及设计高精度的格式, 我们对区域 Ω 采取三角网格剖分. 用折线来逼近 $\partial\Omega$. 再连接有一个公共顶点的所有三角形的外心 (即每条边中垂线的交点), 形成围绕该公共顶点的一个封闭多边形. (参见左图) 称之为

对偶单元 (或控制体积). 这些对偶单元构成了 Ω 的一个对偶剖分.



三角网格剖分---内点差分格式



设 $P_0 \in \overset{\circ}{\Omega}$ 是一个内点, 围绕在 P_0 周围的以 P_0 为公共顶点的三角形围成一个多边形 Ω_0 (参见左图). 考虑其对偶剖分 (虚线围成的区域) 记为 D_0 , 其顶点分别为 q_1, \dots, q_N . 在 D_0 上积分方程有

$$\iint_{D_0} \Delta u dx dy = \iint_{D_0} f dx dy.$$

由 Green 公式得到

$$\begin{aligned}
 (5.20) \quad \iint_{D_0} \Delta u dx dy &= \int_{\partial D_0} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \sum_{i=1}^N \int_{\overline{q_i q_{i+1}}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{u_{P_i} - u_{P_0}}{|\overline{P_i P_0}|} \cdot |\overline{q_i q_{i+1}}| + R_{D_0}(u) \cdot \text{meas}(D_0)
 \end{aligned}$$



三角网格剖分---内点差分格式

这里 $\overline{q_i q_{i+1}}$ 上的外法向导数可以用 $\frac{u_{P_i} - u_{P_0}}{|P_i P_0|}$ 来近似.

其中 $\text{meas}(D_0)$ 表示 D_0 的面积, $R_{D_0}(u)$ 表示截断误差.

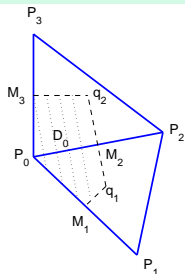
设 $u \in C^4(\bar{\Omega})$, 简单计算可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{\overline{q_i q_{i+1}}} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \frac{u_{P_i} - u_{P_0}}{|P_i P_0|} \right) ds &= \sum_{i=1}^N \int_{\overline{q_i q_{i+1}}} \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_i) + \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n} \partial \tau}(M_i)(s - M_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^3 u(M_i)}{\partial \mathbf{n} \partial \tau^2} \frac{(s - M_i)^2}{2} + \frac{\partial^4 u(M_i)}{\partial \mathbf{n} \partial \tau^3} \frac{(s - M_i)^3}{6} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M_i) - \frac{\partial^3 u}{\partial \mathbf{n}^3}(M_i) \frac{|P_0 M_i|^2}{6} + \mathcal{O}(h^4) \right] ds \\ (\text{由 Green 公式}) &= \iint_{D_0} \Delta^2 u dV \cdot \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(h^4) \equiv R_{D_0}(u) \cdot \mathcal{O}(h^2) \implies R_{D_0}(u) = \mathcal{O}(h^2) \\ \text{令 } F_0 &= \frac{1}{\text{meas}(D_0)} \iint_{D_0} f dx dy, \text{ 代入 (5.20) 得到二阶精度的格式} \\ (5.21) \quad &\sum_{i=1}^N \frac{u_{P_i} - u_{P_0}}{|P_i P_0|} \cdot |\overline{q_i q_{i+1}}| = \text{meas}(D_0) F_0. \end{aligned}$$



三角网格剖分---边界条件处理

我们再来看边界条件的处理. 第一类边界条件直接赋值即可.



前面在使用矩形网格剖分时, 对于第三类边界条件处理时很难达到高阶精度. 假设我们要离散第三类边界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + ku \right) \Big|_{\partial \Omega} = \gamma.$$

如左图所示, 设 P_0 为边界点.

在对偶剖分 (阴影部分 D_0) 上积分原方程可得

$$(5.22) \quad \text{meas}(D_0)F_0 = \left(\int_{P_0 M_1} + \int_{M_1 q_1} + \int_{q_1 q_2} + \int_{q_2 M_3} + \int_{M_3 P_0} \right) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds$$

其中 F_0 定义如前 = $\frac{1}{\text{meas}(D_0)} \iint_{D_0} f dV.$



三角网格剖分---边界条件处理

由边界条件 $\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + ku\right) \Big|_{\partial\Omega} = \gamma$, 有

$$\begin{aligned} \int_{\overline{P_0M_1}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds &= \int_{\overline{P_0M_1}} (\gamma - ku) ds \\ &\approx |\overline{P_0M_1}| \cdot \left[\gamma(M_1) - k(M_1) \frac{u(P_0) + u(P_1)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{类似的 } \int_{\overline{M_3P_0}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = |\overline{P_0M_3}| \cdot \left[\gamma(M_3) - k(M_3) \frac{u(P_0) + u(P_3)}{2} \right]$$

其他的几段线积分与之前类似:

$$\int_{\overline{M_1q_1}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \approx \frac{|\overline{M_1q_1}|}{|\overline{P_0P_1}|} (u_{P_1} - u_{P_0}), \quad \int_{\overline{q_1q_2}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \approx \frac{|\overline{q_1q_2}|}{|\overline{P_0P_2}|} (u_{P_2} - u_{P_0})$$

将上述几式代入 (5.22) 便得到边界点方程. 最终得到二阶精度离散方程组

$$AU = F.$$



三角网格剖分

我们可以看到, 三角网格剖分的最大好处在于边界处理和内点一样, 而且很容易选取适当的数值积分公式使得精度达到二阶.

对于 Poisson 方程来说, 得到的方程组系数矩阵是对角占优的, 很容易用迭代法求解.

哪怕对于变系数问题 (假设系数均为分片光滑函数):

$$-\nabla \cdot (k(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

也可以类似处理得到

$$-\sum_i \int_{q_i q_{i+1}} \left(k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds + \iint_{D_0} c u dv = \iint_{D_0} f dv.$$

然后我们可以用数值积分公式得到最终的方程组.



目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
- 5 椭圆问题的差分方法**
 - 椭圆问题的差分方法基本概念
 - 一维问题（两点边值问题）
 - 二维椭圆方程差分格式
 - 三角网格剖分差分格式
 - 极值原理**
 - 能量不等式估计
 - 双调和问题（四阶椭圆问题）
 - 特征值问题
 - 椭圆问题差分方程的迭代解法



连续问题的极值原理

为了讨论椭圆问题差分方法的先验估计, 以得到差分方程的稳定性估计 (解的存在唯一性) 和解的收敛性、收敛速度估计等, 常用的方法为极值原理. 以 Laplace 问题为例, 我们先回顾一下平均值不等式定理和极值原理. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\partial\Omega$ 为 C^1 光滑曲面.

定理 5.2 (平均值不等式)

设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, 且在 Ω 中满足

$$(5.23) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{或者 } \geq 0, \leq 0)$$

则任取一个球 $B_R(\mathbf{y}) \subset \Omega$, 有

$$(5.24) \quad u(\mathbf{y}) = (\text{或 } \leq, \geq) \frac{1}{S_{\partial B}} \int_{\partial B} u ds,$$

$$(5.25) \quad u(\mathbf{y}) = (\text{或 } \leq, \geq) \frac{1}{V_B} \iint_B u dV.$$

平均值不等式定理

◁ 任取 $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域 (边界光滑), 并设 $u \in C^2(\Omega_0) \cap C^1(\bar{\Omega}_0)$, 有

$$\iint_{\Omega_0} \Delta u dV = \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds.$$

因此, 若令 $\rho \in (0, R)$, 有 $B_\rho(\mathbf{y}) (\subset B_R(\mathbf{y})) \subset\subset \Omega$, 这样 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{B_\rho(\mathbf{y})})$. 将上式中 Ω_0 取成 $B_\rho(\mathbf{y})$, 有

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_{B_\rho} \Delta u dV = (\text{或 } \geq, \leq) 0.$$

令 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $\omega = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{r}$. 记 $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y} + r\omega)$, 有



平均值不等式定理

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds &= \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{y} + r\omega) \Big|_{r=\rho} ds = \rho^{n-1} \int_{|\omega|=1} \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{y} + r\omega) \Big|_{r=\rho} ds_\omega \\ &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|\omega|=1} u(\mathbf{y} + \rho\omega) ds_\omega = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u ds] = (\text{或 } \geq, \leq) 0\end{aligned}$$

这说明, $\forall \rho \in (0, R)$,

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u ds = (\leq, \geq) R^{1-n} \int_{\partial B_R} u ds$$

因为 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u ds \right) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1-n} S_{\partial B_\rho} u(\mathbf{y}) = \omega_n u(\mathbf{y})$, 其中 ω_n 为单位球面积, 这样便得 (5.24) 式.



平均值不等式定理

再把 (5.24) 式改写成

$$S_{\partial B_\rho} \cdot u(\mathbf{y}) = (\leq, \geq) \int_{\partial B_\rho} u ds,$$

再对 ρ 从 0 到 R 积分即可得到 (5.25) 式。▷

利用上述平均值定理, 可立即得到以下极值原理.

定理 5.3 (极值原理)

设连通开集 Ω 中 $\Delta u \geq (\leq) 0$, 并设 $\exists \mathbf{y} \in \Omega$ (内部) 使得

$$(5.26) \quad u(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \quad (\text{或} \quad \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x})),$$

则 $u(\mathbf{x})$ 为常数.



极值原理

◁ 设 Ω 上 $\Delta u \geq 0$, 记 $M = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x})$, 并令 $\Omega_M = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid u(\mathbf{x}) = M\}$. 由假

设知 $\Omega_M \neq \emptyset$. 且由 u 连续知, Ω_M 在 Ω 中相对于 Ω 为闭集.

$\forall \mathbf{z} \in \Omega_M$, 取 $R > 0$ s.t. $B_R(\mathbf{z}) \subset\subset \Omega$, 对函数 $u(\mathbf{x}) - M$ 使用平均不等式 (5.25):

$$0 = u(\mathbf{z}) - M \leq \frac{1}{V_{B_R}} \iint_{B_R} (u(\mathbf{x}) - M) d\mathbf{x} \leq 0.$$

这说明在 $B_R(\mathbf{z})$ 中均有 $u(\mathbf{x}) = M \implies B_R(\mathbf{z}) \subset \Omega_M$.

即 Ω_M 在 Ω 中也是相对开集. 因此 $\Omega_M \neq \emptyset \implies \Omega_M = \Omega$.

对于 $\Delta u \leq 0$ 情形用 $-u$ 代替 u 重复上面过程即可. ▷



一般情形极值原理

记 $Lu \equiv -\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$ 为一椭圆算子.

定理 5.4 (一般情形极值原理)

设算子 L 在 \mathbb{R}^n 上有界区域 Ω 上为椭圆算子, 且在 Ω 上 $c(\mathbf{x}) \geq 0$. 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. 如果在 Ω 上 $Lu \leq (\geq) 0$, 则有

$$(5.27) \quad \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \left(\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \geq \sup_{\partial\Omega} u^- \right)$$

其中 $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \min(u, 0)$. 若在 Ω 上 $Lu \equiv 0$, 则有

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

简单说, 在 Ω 上 $Lu \leq 0 \implies u$ 的正极大值一定在边界上达到;

$Lu \geq 0 \implies u$ 的负极小值一定在边界上达到.



离散情形极值原理

下面以一个二维问题为例, 讨论一下离散极值原理.

$$(5.28) \quad \begin{cases} -(Au_x)_x - (Bu_y)_y + Cu_x + Du_y + Eu = F, & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$$

设 Ω 为一个连通有界区域, $A, B \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $E, D, E, F \in C^0(\bar{\Omega})$, $g \in C^0(\partial\Omega)$. 并且 $A(x, y) \geq A_0 > 0$, $B(x, y) \geq B_0 > 0$, $E(x, y) \geq 0$, 即保证上面是非退化椭圆问题.

为简单起见, 这里考虑矩形网格剖分, 三角网格类似.

设 h_1, h_2 分别为 x, y 方向步长, Ω_h 为内点集合, Γ_h 为边界点集合. 记 $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$.

假设 Ω_h 为连通的, 即其中任两点可以由内部格点折线相连.



离散情形极值原理

(一) 对于正则内点, 使用五点差分格式

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{h_1^2}\Delta_x^+[A_{i-\frac{1}{2},j}\Delta_x^-]u_{ij} - \frac{1}{h_2^2}\Delta_y^+[B_{i,j-\frac{1}{2}}\Delta_y^-]u_{ij} + \frac{C_{ij}}{2h_1}\Delta_x^0u_{ij} \\
 + \frac{D_{ij}}{2h_2}\Delta_y^0u_{ij} + E_{ij}u_{ij} = F_{ij}
 \end{aligned}$$

这里 $\Delta_x^+v_{ij} = v_{i+1,j} - v_{ij}$, $\Delta_x^-v_{ij} = v_{ij} - v_{i-1,j}$, $\Delta_x^0v_{ij} = v_{i+1,j} - v_{i-1,j}$, 其他 y -方向算子类似. 可以把上式写成

(5.29)

$$-[a_{i-1,j}u_{i-1,j} + a_{i,j-1}u_{i,j-1} + a_{i+1,j}u_{i+1,j} + a_{i,j+1}u_{i,j+1}] + a_{ij}u_{ij} = F_{ij},$$



离散情形极值原理

这里

$$\begin{cases} a_{i-1,j} = \frac{1}{h_1^2}(A_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{h_1}{2}C_{ij}), & a_{i+1,j} = \frac{1}{h_1^2}(A_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{h_1}{2}C_{ij}), \\ a_{i,j-1} = \frac{1}{h_2^2}(B_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{h_2}{2}D_{ij}), & a_{i,j+1} = \frac{1}{h_2^2}(B_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{h_2}{2}D_{ij}), \\ a_{ij} = \frac{1}{h_1^2}(A_{i-\frac{1}{2},j} + A_{i+\frac{1}{2},j}) + \frac{1}{h_2^2}(B_{i,j-\frac{1}{2}} + B_{i,j+\frac{1}{2}}) + E_{ij} \end{cases}$$

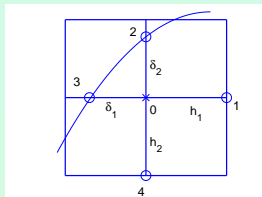
由 A, B, E 的非负性条件可知, 只要步长 h_1, h_2 充分小, 就有上述系数 a_{kl} 均为正数, 且满足对角占优性质

$$a_{i-1,j} + a_{i,j-1} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1} = a_{ij} - E_{ij} \leq a_{ij}.$$



离散情形极值原理

(二) 对于非正则内点, 使用不等距五点差分格式 (参见左下图)



$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{h_1 + \delta_1} \left[\frac{A_1 + A_0}{2} \frac{u_1 - u_0}{h_1} - \frac{A_3 + A_0}{2} \frac{u_0 - u_3}{\delta_1} \right] \\
 & -\frac{2}{h_2 + \delta_2} \left[\frac{B_2 + B_0}{2} \frac{u_2 - u_0}{\delta_2} - \frac{B_3 + B_0}{2} \frac{u_0 - u_4}{h_2} \right] \\
 & + C_0 \frac{u_1 - u_3}{h_1 + \delta_1} + D_0 \frac{u_2 - u_4}{h_2 + \delta_2} + E_0 u_0 = F_0
 \end{aligned}$$

可以写成类似形式 $-[a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4] + a_0 u_0 = F_0$. 其中

$$a_0 = \frac{A_1 + A_0}{h_1(h_1 + \delta_1)} + \frac{A_3 + A_0}{\delta_1(h_1 + \delta_1)} + \frac{B_2 + B_0}{\delta_2(h_2 + \delta_2)} + \frac{B_3 + B_0}{h_2(h_2 + \delta_2)} + E_0$$

$$a_1 = \frac{A_1 + A_0}{h_1(h_1 + \delta_1)} - \frac{C_0}{h_1 + \delta_1},$$

$$a_3 = \frac{A_3 + A_0}{\delta_1(h_1 + \delta_1)} + \frac{C_0}{h_1 + \delta_1}$$

$$a_2 = \frac{B_2 + B_0}{\delta_2(h_2 + \delta_2)} - \frac{C_0}{h_2 + \delta_2},$$

$$a_4 = \frac{B_3 + B_0}{h_2(h_2 + \delta_2)} + \frac{C_0}{h_2 + \delta_2}$$



离散情形极值原理

同样只要 h_1, h_2 充分小, 就有上面的系数 a_i 都大于零, 且有对角占优性质 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_0 - E_0 \leq a_0$.

这样最后形成的代数方程组 $AU = F$ 有以下性质:

- ① A 为“五”对角稀疏矩阵 (每行最多五个元素非零);
- ② A 对角元为正, 非对角元为负, 且对角占优; 当对应非正则内点时, 至少有一个边界点, 这一行会是严格对角占优的. 即 A 此时为所谓的 M -矩阵;
- ③ 若 $C = D \equiv 0$ 即 L 为自伴算子, 如果非正则内点采取对称处理 (或者用三角网格), 那么 A 为对称正定矩阵.

对此矩阵我们有以下离散极值原理



离散情形极值原理

定理 5.5 (离散极值原理)

设 $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$ 为连通的, 在 $\bar{\Omega}_h$ 上, 假设算子 \mathcal{L}_h 满足以上条件 1 – 3, 设 $\{u_{ij}\}$ 为定义在 $\bar{\Omega}_h$ 上的网格函数:

- 若 $\forall (i, j) \in \Omega_h, \mathcal{L}_h u_{ij} \leq 0$, 则 $\{u_{ij}\}$ 不能在内点取到正的极大值, 除非 $u_{ij} \equiv C$;
- 若 $\forall (i, j) \in \Omega_h, \mathcal{L}_h u_{ij} \geq 0$, 则 $\{u_{ij}\}$ 不能在内点取到负的极小值, 除非 $u_{ij} \equiv C$.

◁ 如果 $u_{ij} \equiv C$, 这是平凡情形.

所以下面假设 $u_{ij} \not\equiv C$, 及 $\mathcal{L}_h u_{ij} \leq 0, \forall (i, j) \in \Omega_h$. 用反证法, 假设 u_{ij} 在内点 $(x_{i_0}, y_{j_0}) \in \Omega_h$ 处达到正的极大值 $M > 0$.



离散情形极值原理

由于 Ω_h 连通, 以及 $u_{ij} \not\equiv C$, 因此我们总可以找到先找到一个点 $(x_k, y_l) \in \bar{\Omega}_h$ s.t. $u_{kl} < M = u_{i_0, j_0}$, 及找到一条用 Ω_h 中的点相连的一条折线段连接 (k, l) 与 (i_0, j_0) . 这样这段折线段的两个端点处 u 的取值不同, 因此从 (i_0, j_0) 依次搜索到 (k, l) , 我们必然可以找到一个点 (不妨仍记作) (i_0, j_0) , 使得 $u_{i_0, j_0} = M$, 但其至少有一个邻点取值小于 M , 不妨设 $u_{i_0-1, j_0} < M$. 这样, 如果 (i_0-1, j_0) 为边界点, 因其已知, 则相当于 $a_{i_0-1, j_0} = 0$, 即

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_h u_{i_0, j_0} &= a_{i_0, j_0} M - a_{i_0, j_0-1} u_{i_0, j_0-1} - a_{i_0+1, j_0} u_{i_0+1, j_0} - a_{i_0, j_0+1} u_{i_0, j_0+1} \\ &\geq (a_{i_0, j_0} - a_{i_0, j_0-1} - a_{i_0+1, j_0} - a_{i_0, j_0+1}) M > 0\end{aligned}$$

与 $\mathcal{L}_h u_{ij} \leq 0$ 矛盾!



离散情形极值原理

如果 $(i_0 - 1, j_0)$ 为内点, 因 $u_{i_0-1, j_0} < M$, 即有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_h u_{i_0, j_0} &= a_{i_0, j_0} M - a_{i_0-1, j_0} u_{i_0-1, j_0} - a_{i_0, j_0-1} u_{i_0, j_0-1} \\ &\quad - a_{i_0+1, j_0} u_{i_0+1, j_0} - a_{i_0, j_0+1} u_{i_0, j_0+1} \\ &> (a_{i_0, j_0} - a_{i_0-1, j_0} - a_{i_0, j_0-1} - a_{i_0+1, j_0} - a_{i_0, j_0+1}) M \geq 0\end{aligned}$$

仍然与 $\mathcal{L}_h u_{ij} \leq 0$ 矛盾!

即若 $\mathcal{L}_h u_{ij} \leq 0$, 则 $\{u_{ij}\}$ 在边界点取到正的极大, 除非 $u_{ij} \equiv C$;

若 $\mathcal{L}_h u_{ij} \geq 0$, 则 $\{u_{ij}\}$ 在边界点取到负的极小, 除非 $u_{ij} \equiv C$. \triangleright



离散情形极值原理---离散解的存在唯一性

由上述离散极值原理立即可以得到差分方程解的存在唯一性:

推论 5.1

满足上面条件的差分方程 $\mathcal{L}_h u_{ij} = F_{ij}$ 存在唯一解.

◁ 只需证明边值取零值时, $\mathcal{L}_h u_{ij} = 0$ 仅有零解. 因为 $u_{ij}|_{\Gamma_h} = 0$, 由于 u_{ij} 只能在边界点上取正的极大和负的极小, 因此 $|u_{ij}|$ 在边界点上取最大值 $0 \implies u_{ij} \equiv 0$. ▷

推论 5.2

设 $\mathcal{L}_h u_{ij} \geq (\leq) 0$, 且 $u_{ij}|_{\Gamma_h} \geq (\leq) 0 \implies u_{ij} \geq (\leq) 0, \forall (i, j) \in \Omega_h$.

◁ 因 $\mathcal{L}_h u_{ij} \geq 0 \implies u_{ij}$ 不能在内点达到负的极小, 而 $u_{ij}|_{\Gamma_h} \geq 0$, 因而所有点上都有 $u_{ij} \geq 0$. 另一种情形完全类似. ▷



离散情形极值原理---比较原理

推论 5.3 (比较原理)

设网格函数 u_{ij}, v_{ij} 满足条件 $\forall (i, j) \in \Omega_h, |\mathcal{L}_h u_{ij}| \leq \mathcal{L}_h v_{ij}$, 且在 Γ_h 上, $|u_{ij}| \leq v_{ij}$. 那么在 Ω_h 上都有 $|u_{ij}| \leq v_{ij}$.

◁ 令 $\omega_{ij}^{\pm} = v_{ij} \pm u_{ij}$, 那么由已知条件, 在 Ω_h 上,
 $|\mathcal{L}_h u_{ij}| \leq \mathcal{L}_h v_{ij} \implies \mathcal{L}_h \omega_{ij}^{\pm} = \mathcal{L}_h v_{ij} \pm \mathcal{L}_h u_{ij} \geq 0$,
又在 Γ_h 上, $|u_{ij}| \leq v_{ij} \implies \omega_{ij}^{\pm} \geq 0$,
由上一个推论立即有, 在 Ω_h 上都有 $\omega_{ij}^{\pm} \geq 0$. ▷

下面我们利用比较原理可以得到差分格式的收敛速度估计.



离散极值原理---差分格式收敛速度估计

看一个简单情形, 以 Poisson 方程边值问题为例:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \alpha. \end{cases}$$

考虑其五点差分格式

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h u_{ij} = F_{ij}, & \text{in } \Omega_h, \\ u_{ij}|_{\Gamma_h} = \alpha_{ij}. \end{cases}$$

这也相当于前面例子中, $A = B = 1, C = D = E = 0$.

定义误差函数 $e_{ij} = u(x_i, y_j) - u_{ij}$, 并设 $u \in C^{(4)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.



离散极值原理---差分格式收敛速度估计

在忽略舍入误差下有

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h e_{ij} = R_{ij}(u), & \text{in } \Omega_h, \\ e_{ij}|_{\Gamma_h} = 0. \end{cases}$$

而对于截断误差 $R_{ij}(u)$, 有

$$R_{ij}(u) = \begin{cases} \mathcal{O}(h_1^2 + h_2^2), & \text{当 } (x_i, y_j) \text{ 为正则内点;} \\ \mathcal{O}(h_1 + h_2), & \text{当 } (x_i, y_j) \text{ 为非正则内点.} \end{cases}$$

令 $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, 我们有, 存在常数 $K > 0$ 与 h 无关, s.t.

$$|R_{ij}(u)| \leq Kh.$$

下面我们希望利用极值原理来估计 e_{ij} 的大小 (即收敛速度).



离散极值原理---差分格式收敛速度估计

取 $R > 0$ 足够大, s.t.

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \text{有} \sqrt{x^2 + y^2} \leq R.$$

在 $\bar{\Omega}_h$ 上定义网格函数

$$E_{ij} = \frac{Kh}{4}(R^2 - x_i^2 - y_j^2).$$

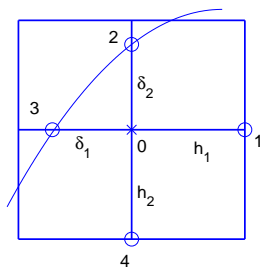
显然在 $\bar{\Omega}_h$ 上, 均有 $E_{ij} \geq 0$.

如果 (x_i, y_j) 为正则内点, 那么

$$\mathcal{L}_h E_{ij} = -\frac{\delta_x^2}{h_1^2} E_{ij} - \frac{\delta_y^2}{h_2^2} E_{ij} = \frac{Kh}{4} \cdot 4 = Kh.$$



离散极值原理---差分格式收敛速度估计



而对于非正则内点 $(x_i, y_j) \equiv \mathbf{x}_0$ (如右图所示), 令 $\tilde{h}_1 = \frac{h_1 + \delta_1}{2}$, $\tilde{h}_2 = \frac{h_2 + \delta_2}{2}$, 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h E_{ij} = & -\frac{1}{\tilde{h}_1} \left(\frac{E_1 - E_0}{h_1} - \frac{E_0 - E_3}{\delta_1} \right) \\ & -\frac{1}{\tilde{h}_2} \left(\frac{E_2 - E_0}{\delta_2} - \frac{E_0 - E_4}{h_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & -\frac{1}{\tilde{h}_1} \frac{Kh}{4} \left[\frac{x_0^2 - x_1^2}{h_1} - \frac{x_3^2 - x_0^2}{\delta_1} \right] - \frac{1}{\tilde{h}_2} \frac{Kh}{4} \left[\frac{y_0^2 - y_2^2}{\delta_2} - \frac{y_4^2 - y_0^2}{h_2} \right] \\ = & \frac{Kh}{4} \left\{ \frac{1}{\tilde{h}_1} [(x_0 + x_1) - (x_3 + x_0)] + \frac{1}{\tilde{h}_2} [(y_0 + y_2) - (y_4 + y_0)] \right\} \\ = & \frac{Kh}{4} [2 + 2] = Kh. \end{aligned}$$



离散极值原理---差分格式收敛速度估计

这样, 由定义及上面式子可知 E_{ij} 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h E_{ij} = Kh, & \text{in } \Omega_h, \\ E_{ij}|_{\Gamma_h} \geq 0. \end{cases}$$

与 e_{ij} 满足的方程作比较可得,

$$\begin{cases} |\mathcal{L}_h e_{ij}| = |R_{ij}(u)| \leq Kh = \mathcal{L}_h E_{ij}, & \text{in } \Omega_h, \\ |e_{ij}| = 0 \leq E_{ij}, & \text{on } \Gamma_h. \end{cases}$$

因此利用离散比较原理有, 在 $\bar{\Omega}_h$ 上, 均有

$$|e_{ij}| \leq E_{ij} = \frac{Kh}{4}(R^2 - x_i^2 - y_j^2).$$

即 $\max_{ij} |e_{ij}| \leq (KR^2h)/4.$



离散极值原理---差分格式收敛速度估计

这说明, 当 $u \in C^{(4)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 时, $u_h \rightrightarrows u$, 当 $h \rightarrow 0$ 时. 且收敛阶为 1 阶. 如果区域为矩形区域, 用等距网格可以得到二阶收敛.

注 5.1

如果使用三角形网格剖分, 注意到没有所谓正则和非正则内点之分, 在内点的离散均有 $R_{ij} = \mathcal{O}(h^2)$. 因此可以令

$$E_{ij} = \frac{Kh^2}{4}(R^2 - x_i^2 - y_j^2).$$

那么有

$$\mathcal{L}_h E_{P_0} = - \sum_i \frac{E_{P_i} - E_{P_0}}{|\overline{P_i P_0}|} |\overline{q_i q_{i+1}}| = -\Delta E_{P_0} = Kh^2.$$

因此类似使用比较定理可得 $|e_{ij}| \leq \frac{KR^2}{4}h^2$.



目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
- 5 椭圆问题的差分方法**
 - 椭圆问题的差分方法基本概念
 - 一维问题（两点边值问题）
 - 二维椭圆方程差分格式
 - 三角网格剖分差分格式
 - 极值原理
 - **能量不等式估计**
 - 双调和问题（四阶椭圆问题）
 - 特征值问题
 - 椭圆问题差分方程的迭代解法



两点边值问题

考虑以下两点边值问题

$$(5.30) \quad \begin{cases} Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x), & x \in (a, b) \\ u(a) = \alpha, & u(b) = \beta. \end{cases}$$

其中 $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, 设 $p \in C^1[a, b]$, $q, f \in C[a, b]$.

我们可不妨设 $\alpha = \beta = 0$, 因为不然可以令

$$v(x) = u(x) - \alpha \frac{b-x}{b-a} - \beta \frac{x-a}{b-a}, \text{ 有 } v(a) = v(b) = 0, \text{ 且}$$

$$\begin{aligned} Lv &= -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dv}{dx}\right) + qv \\ &= f(x) + p'(x)\frac{\beta - \alpha}{b-a} - \frac{q(x)}{b-a}[\alpha(b-x) - \beta(x-a)] \equiv \bar{f}(x). \end{aligned}$$



两点边值问题---能量估计

因此将上式乘以 v 并在 (a, b) 上积分可得

$$\begin{aligned}
 (5.31) \quad & \int_a^b v L v dx = - \int_a^b v (p v')' dx + \int_a^b q v^2 dx \\
 & = -v(p' v) \Big|_a^b + \int_a^b [p(v')^2 + q v^2] dx = \int_a^b [p(v')^2 + q v^2] dx \\
 & = \int_a^b \bar{f} v dx \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz 不等式}}{\leq} \frac{1}{2\lambda} \int_a^b \bar{f}^2(x) dx + \frac{\lambda}{2} \int_a^b v^2(x) dx
 \end{aligned}$$

最后不等式 $\forall \lambda > 0$ 都成立.

我们要想得到一个能量不等式, 需要用到以下 Poincaré 引理:



两点边值问题—Poincaré 引理

引理 5.1 (Poincaré 引理)

设 $v \in C_0^1[a, b] = \{v \in C^1[a, b] \mid v(a) = v(b) = 0\}$, 那么有

$$(5.32) \quad \|v\|_0^2 \equiv \int_a^b |v(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} |v|_1^2 \equiv \frac{(b-a)^2}{4} \int_a^b |v'(x)|^2 dx$$

◁ $\forall x \in [a, b]$, 我们有

$$\begin{aligned} v(x) &= v(a) + \int_a^x v'(y) dy = \int_a^x 1 \cdot v'(y) dy \\ &\leq \left(\int_a^x 1^2 dy \cdot \int_a^x |v'(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x-a} \left(\int_a^x |v'(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{类似地, } v(x) = v(b) + \int_b^x v'(y) dy \leq \sqrt{b-x} \left(\int_x^b |v'(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}$$



两点边值问题—Poincaré 引理

由上面两式有 $v^2(x) \leq (x-a) \int_a^x |v'(y)|^2 dy$;

及 $v^2(x) \leq (b-x) \int_x^b |v'(y)|^2 dy$.

将上面第一式 $\times(b-x)$ + 上面第二式 $\times(x-a)$ 得到

$$(b-a)v^2(x) \leq (x-a)(b-x) \int_a^b |v'(y)|^2 dy \leq \frac{(b-a)^2}{4} |v|_1^2$$

$$\implies v^2(x) \leq \frac{(b-a)}{4} |v|_1^2.$$

$$\implies \|v\|_2^2 = \int_a^b v^2(x) dx \leq \int_a^b \frac{(b-a)}{4} |v|_1^2 dx = \frac{(b-a)^2}{4} |v|_1^2. \triangleright$$



两点边值问题---连续情形能量估计

这样在 (5.31) 中取 $\lambda = \frac{4p_0}{(b-a)^2}$, 由 $q(x) \geq 0$, $p(x) \geq p_0 > 0$ 有

$$p_0 |v|_1^2 \leq \int_a^b [p(v')^2 + qv^2] dx \leq \frac{(b-a)^2}{8p_0} \|f\|_0^2 + \frac{2p_0}{(b-a)^2} \|v\|_0^2$$

利用 Poincaré 引理, $\frac{2p_0}{(b-a)^2} \|v\|_0^2 \leq \frac{2p_0}{(b-a)^2} \frac{(b-a)^2}{4} |v|_1^2 = \frac{p_0}{2} |v|_1^2$.

$$\implies \frac{p_0}{2} |v|_1^2 \leq \frac{(b-a)^2}{8p_0} \|f\|_0^2 \implies |v|_1^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4p_0^2} \|f\|_0^2$$

$$\text{再用 Poincaré 引理, } \|v\|_0^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4} |v|_1^2 \leq \frac{(b-a)^4}{16p_0^2} \|f\|_0^2$$

这样结合 $v(x)$ 的定义, 最后得到

$$(5.33) \quad \|u\|_1 \equiv \sqrt{\|u\|_0^2 + |u|_1^2} \leq C(\|f\|_0 + |\alpha| + |\beta|)$$

其中正常数 C 仅依赖于 a, b, p_0 , 此即问题 (5.30) 的稳定性估计.



两点边值问题---离散情形能量估计

下面我们先建立问题 (5.30) 的差分格式, 然后用能量不等式办法建立先验估计.

设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, 记 $h_i = x_i - x_{i-1}$, $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$.

记 $\Delta_+ u_j = u_{j+1} - u_j$, $\Delta_- u_j = u_j - u_{j-1}$, 用有限体积法可得

$$(5.34) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_h u_i \equiv -\frac{2}{h_i + h_{i+1}} \Delta_+ (p_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta_- u_i}{h_i}) + q_i u_i = f_i, & 1 \leq i \leq N-1 \\ u_0 = \alpha, & u_N = \beta. \end{cases}$$

为方便起见, 令 $h_0 = h_{N+1} = 0$, $\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$, $i = 0, 1, \cdots, N$. 我们知道

(5.34) 的截断误差为

$$R_i(u) = \mathcal{L}_h u_i - Lu(x_i) = (h_i - h_{i+1}) \left[\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \left(p \frac{du}{dx} \right)_i + \frac{1}{12} \left(p \frac{d^3 u}{dx^3} \right)_i \right] + \mathcal{O}(h^2)$$

在等距网格下为二阶, 非等距网格下为一阶.



两点边值问题---离散情形能量估计

对离散函数 $v_h = \{v_i\}_{i=0}^N$ 我们先引入以下一些常用范数:

$$\|v_h\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq N} |v_i|,$$

$$\|v_h\|_0^2 = \sum_{i=0}^N |v_i|^2 \bar{h}_i = \sum_{i=0}^N \frac{h_i + h_{i+1}}{2} |v_i|^2,$$

$$|v_h|_1^2 = \sum_{i=1}^N h_i \left| \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \right|^2,$$

$$\|v_h\|_1^2 = \|v_h\|_0^2 + |v_h|_1^2$$



两点边值问题---离散情形能量估计

对格式 (5.34) 乘以 $\bar{h}_i u_i$, 并对下标 ‘ i ’ 从 0 到 N 求和得

$$(5.35) \quad - \sum_{i=0}^N u_i \Delta_+ \left(p_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta_- u_i}{h_i} \right) + \sum_{i=0}^N q_i \bar{h}_i u_i^2 = \sum_{i=0}^N \bar{h}_i f_i u_i.$$

1. 先设 $\alpha = \beta = 0$, 即 $u_0 = u_N = 0$.

对上式利用之前证明过的公式

$$\sum_{j=1}^{N-1} u_j \Delta_+ v_j = - \sum_{j=1}^N v_j \Delta_- u_j,$$

得到

$$(5.36) \quad \sum_{i=1}^N \left(p_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta_- u_i}{h_i} \right) \Delta_- u_i + \sum_{i=0}^N q_i \bar{h}_i u_i^2 = \sum_{i=0}^N \bar{h}_i f_i u_i.$$



两点边值问题---离散情形能量估计

由 Cauchy-Schwartz 不等式,

$$\left| \sum_{i=0}^N a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=0}^N a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^N b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow (5.36) \text{式右端} \leq \left(\sum_{i=0}^N (\sqrt{h_i} f_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^N (\sqrt{h_i} u_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|f_h\|_0 \|u_h\|_0$$

再利用 $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$,

$$\Rightarrow (5.36) \text{式左端} \geq p_0 \sum_{i=1}^N h_i \left(\frac{\Delta_- u_i}{h_i} \right)^2 = p_0 |u_h|_1^2.$$

即得到如下估计

$$(5.37) \quad p_0 |u_h|_1^2 \leq \|f_h\|_0 \cdot \|u_h\|_0.$$

再利用以下离散形式的 Poincaré 引理得到最终估计式.



两点边值问题---离散情形能量估计

引理 5.2 (离散形式的 Poincaré 引理)

设 $v_h = \{v_i\}_{i=0}^N$ 为 (a, b) 上的网格函数, $v_0 = v_N = 0$, 则有

$$\|v_h\|_0^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4} |v_h|_1^2.$$

$$\triangleleft \text{ 由 } v_k = \sum_{i=1}^k (v_i - v_{i-1}) = \sum_{i=1}^k \sqrt{h_i} \left(\sqrt{h_i} \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \right)$$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^k (\sqrt{h_i})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^k h_i \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$(5.38) \quad v_k^2 \leq (x_k - a) \sum_{i=1}^k h_i \left(\frac{\Delta_- v_i}{h_i} \right)^2$$



两点边值问题---离散情形能量估计

$$\text{类似由 } v_k = \sum_{i=k+1}^N (v_{i-1} - v_i) = \sum_{i=k+1}^N \sqrt{h_i} \left(\frac{\sqrt{h_i} v_{i-1} - v_i}{h_i} \right) \Rightarrow$$

$$(5.39) \quad v_k^2 \leq (b - x_k) \sum_{i=k+1}^N h_i \left(\frac{\Delta_- v_i}{h_i} \right)^2$$

将 (5.38) $\times (b - x_k) + (5.39) \times (x_k - a) \Rightarrow$

$$(b - a) v_k^2 \leq (b - x_k)(x_k - a) |v_h|_1^2 \leq \frac{(b - a)^2}{4} |v_h|_1^2.$$

将上式乘以 \bar{h}_k 并对 k 从 0 到 N 求和得到

$$\|v_h\|_0^2 \leq \frac{(b - a)^2}{4} |v_h|_1^2. \quad \triangleright$$



两点边值问题---齐次边界条件情形

由 (5.37) 式并结合上述引理 \Rightarrow

$$\begin{aligned}
 p_0 \frac{4}{(b-a)^2} \|u_h\|_0^2 &\leq p_0 |u_h|_1^2 \leq \|f_h\|_0 \|u_h\|_0 \leq \|f_h\|_0 \frac{b-a}{2} |u_h|_1 \\
 &\Rightarrow \|u_h\|_0 \leq \frac{(b-a)^2}{4p_0} \|f_h\|_0 \\
 \text{以及 } |u_h|_1 &\leq \frac{b-a}{2p_0} \|f_h\|_0 \\
 &\Rightarrow \|u_h\|_1 \leq \frac{b-a}{2p_0} \left(1 + \frac{(b-a)^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \|f_h\|_0
 \end{aligned}$$

此即差分格式 (5.34) 在其次边界条件时的先验估计.



两点边值问题---非齐次边界条件情形

2. 再看 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 情形, 即 $u_0 \neq 0, u_N \neq 0$. 令

$$(5.40) \quad u_i = U_i + W_i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

其中 U_i 满足“齐次方程”+“非齐次边界条件”:

$$(5.41) \quad \Delta_+ \frac{\Delta_- U_i}{h_i} = 0, \quad U_0 = u_0, \quad U_N = u_N,$$

W_i 满足“非齐次方程”+“齐次边界条件”:

$$(5.42) \quad \mathcal{L}_h W_i = f_i - \mathcal{L}_h U_i, \quad W_0 = 0, \quad W_N = 0,$$



两点边值问题---非齐次边界条件情形

1) 先看 W_i 的估计: 类似于前面 1 中齐次边界条件的做法, 对 W_i 的方程 (5.42) 乘以 $\bar{h}_i W_i$ 并对 i 求和

$$\begin{aligned}
 (5.43) \quad & -\sum_{i=0}^N W_i \Delta_+ \left(p_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta_- W_i}{h_i} \right) + \sum_{i=0}^N q_i \bar{h}_i W_i^2 \\
 & = \sum_{i=0}^N \bar{h}_i f_i W_i - \left[-\sum_{i=0}^N W_i \Delta_+ \left(p_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta_- U_i}{h_i} \right) + \sum_{i=0}^N q_i \bar{h}_i W_i U_i \right]
 \end{aligned}$$

利用第四章的引理 4.2 及 $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, 可以得到上面 (5.43)

$$\text{式的左端} = \sum_{i=1}^N p_{i-\frac{1}{2}} h_i \left(\frac{\Delta_- W_i}{h_i} \right)^2 + \sum_{i=0}^N q_i \bar{h}_i W_i^2 \geq p_0 |W_h|_1^2.$$



两点边值问题---非齐次边界条件情形

利用 Cauchy-Schwartz 不等式以及引理 4.2 可以得到 (5.43) 式

$$\text{右端} \leq \|f_h\|_0 \cdot \|W_h\|_0 - \sum_{i=1}^N p_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta_- U_i}{\sqrt{h_i}} \frac{\Delta_- W_i}{\sqrt{h_i}} - \sum_{i=0}^N q_i \sqrt{h_i} U_i \sqrt{h_i} W_i$$

(再利用 $0 \leq p(x) \leq P$, $0 \leq q(x) \leq Q$, 及 Cauchy-Schwartz 不等式)

$$\leq \|f_h\|_0 \cdot \|W_h\|_0 + P|U_h|_1 \cdot |W_h|_1 + Q \|U_h\|_0 \cdot \|W_h\|_0$$

$$(\text{对 } W_h \text{ 再用引理5.2}) \leq \left[\frac{b-a}{2} \|f_h\|_0 + P|U_h|_1 + Q \frac{b-a}{2} \|U_h\|_0 \right] |W_h|_1$$

这样就有

$$(5.44) \quad |W_h|_1 \leq \frac{1}{p_0} \left[\frac{b-a}{2} \|f_h\|_0 + P|U_h|_1 + \frac{b-a}{2} Q \|U_h\|_0 \right].$$



两点边值问题---非齐次边界条件情形

2) 再做 U_h 的估计. 可以显式写出其表达式 (它为线性函数):

$$U_i = u_0 + \frac{u_N - u_0}{b - a}(x_i - a), \quad i = 0, \dots, N.$$

由上面 U_h 的表达式显然有

(5.45)

$$\begin{aligned} \|U_h\|_0 &= \left(\sum_{i=0}^N \bar{h}_i U_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_i |U_i| \sqrt{b-a} \leq \max(|u_0|, |u_N|) \sqrt{b-a} \\ |U_h|_1^2 &= \sum_{i=1}^N h_i \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{h_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N h_i \left(\frac{u_N - u_0}{b-a} \right)^2 = \frac{(u_N - u_0)^2}{b-a} \end{aligned}$$

$$(5.46) \quad \Rightarrow |U_h|_1 = \frac{|u_N - u_0|}{\sqrt{b-a}} \leq \frac{|u_N| + |u_0|}{\sqrt{b-a}} \leq \frac{2 \max(|u_N|, |u_0|)}{\sqrt{b-a}}$$



两点边值问题---非齐次边界条件情形

结合 (5.44)–(5.46) 就得到

$$(5.47) \quad |W_h|_1 \leq \frac{b-a}{2p_0} \|f_h\|_0 + \left(\frac{2P}{p_0 \sqrt{b-a}} + \frac{Q(b-a)^{\frac{3}{2}}}{p_0} \right) \max(|\alpha|, |\beta|)$$

再由 (5.40) 以及引理 5.2, 得

$$(5.48) \quad \|u_h\|_1 \leq \|U_h\|_1 + \|W_h\|_1 \leq C[\|f_h\|_0 + \max(|\alpha|, |\beta|)]$$

即得到了差分格式(5.34)的稳定性估计. 自然也得到了差分方程解的存在唯一性.



收敛性估计

令 $e_i = u(x_i) - u_i$, 有

$$(5.49) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_h e_i = -R_i(u) \\ e_0 = e_N = 0 \end{cases}$$

其中 $R_i(u) = \begin{cases} \mathcal{O}(h), & \text{非等距剖分;} \\ \mathcal{O}(h^2), & \text{等距剖分;} \end{cases}$ 即 $\|R_h(u)\|_0 = \begin{cases} \mathcal{O}(h) \\ \mathcal{O}(h^2) \end{cases}$

这样由 (5.48) 式得到

$$\|e_h\|_1 = \begin{cases} \mathcal{O}(h), & \text{非等距剖分;} \\ \mathcal{O}(h^2), & \text{等距剖分.} \end{cases}$$

总之有 $u_h \rightrightarrows u(x)$, 当 $h \rightarrow 0$.



目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
- 5 椭圆问题的差分方法**
 - 椭圆问题的差分方法基本概念
 - 一维问题 (两点边值问题)
 - 二维椭圆方程差分格式
 - 三角网格剖分差分格式
 - 极值原理
 - 能量不等式估计
 - 双调和问题 (四阶椭圆问题)
 - 特征值问题
 - 椭圆问题差分方程的迭代解法



双调和问题 (四阶椭圆问题)

板、壳、梁等力学问题中常常出现四阶椭圆问题，最简单的模型为

$$(5.50) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u|_{\partial\Omega} = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$$

不妨设 $\Omega = [0, 1]^2$, 用矩形网格剖分 $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{N} = h$:

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j) \mid x_i = ih, y_j = jh, 0 < i, j < N\}$$

$$\Gamma_h = \{(x_i, y_j) \mid x_i = 0, \text{ 或 } x_i = 1, \text{ 或 } y_j = 0, \text{ 或 } y_j = 1\}$$

可以直接离散如下

$$\frac{\delta_x^2}{h^2} \left(\frac{\delta_x^2}{h^2} u_{ij} \right) + \frac{2\delta_x^2}{h^2} \left(\frac{\delta_y^2}{h^2} u_{ij} \right) + \frac{\delta_y^2}{h^2} \left(\frac{\delta_y^2}{h^2} u_{ij} \right) = 0$$



双调和问题 (四阶椭圆问题)

把上式展开即为

$$\begin{aligned} & 20u_{ij} - 8(u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}) \\ & + 2(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}) \\ & + u_{i+2,j} + u_{i,j+2} + u_{i-2,j} + u_{i,j-2} = 0 \end{aligned}$$

这是一个 13 点差分格式, 靠近边界时需要利用边界条件 + 虚拟节点办法处理: 比如对于 $(x_{N-1}, y_{N-1}) = (1-h, 1-h)$ 这点, 上式中会出现 $u_{N+1,j}$, $u_{i,N+1}$ 这样的点, 我们需要利用虚拟节点技术消掉.

边界上的值可以直接计算: $u_{N,j} = f(x_N, y_j)$, $u_{i,N} = f(x_i, y_N)$.



双调和问题 (四阶椭圆问题)

对于区域外的点, 利用 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g$:

$$\frac{u_{N+1,j} - u_{N-1,j}}{2h} \approx \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{Nj} = g_{Nj}, \quad \frac{u_{i,N+1} - u_{i,N-1}}{2h} \approx \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{iN} = g_{iN},$$

消去后得到

$$22u_{N-1,N-1} - 8(u_{N-2,N-1} + u_{N-1,N-2}) + 2u_{N-2,N-2} + u_{N-3,N-1} + u_{N-1,N-3} \\ = 8(f_{N,N-1} + f_{N-1,N}) - 2(f_{N,N} + f_{N-2,N} + f_{N,N-2}) - 2h(g_{N-1,N} + g_{N,N-1})$$

我们看到内部差分方程既不是对角占优, 也不是 M -矩阵, 没有保持极值原理!

稍后我们会再回到四阶问题的求解.



目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
- 5 椭圆问题的差分方法**
 - 椭圆问题的差分方法基本概念
 - 一维问题（两点边值问题）
 - 二维椭圆方程差分格式
 - 三角网格剖分差分格式
 - 极值原理
 - 能量不等式估计
 - 双调和问题（四阶椭圆问题）
 - 特征值问题
 - 椭圆问题差分方程的迭代解法



特征值问题

许多科学与工程计算领域都需要求解以下形式的特征值问题

$$(5.51) \quad \begin{cases} Lu(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{或者 } \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

其中 L 为一椭圆算子, 如下面二阶算子形式

$$Lu(\mathbf{x}) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\mathbf{x})u$$

如果 L 为线性算子, 显然 u 是 (5.51) 的解 $\implies Cu$ 也是其解. 因此一般我们还须加一个约束

$$(5.52) \quad \|u\|_1 = 1.$$



特征值问题

我们来看最简单情形 $L = -\Delta$, 考虑二维情形, 设 $\Omega = [0, 1]^2$:

$$(5.53) \quad \begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega = [0, 1]^2 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

对于此特殊情形, 用分离变量方法很容易得到 (5.53) 有无穷多组解 (λ_{kl}, u_{kl}) .

$$(5.54) \quad \begin{cases} \lambda_{kl} = (k^2 + l^2)\pi^2 \\ u_{kl}(x, y) = \sin k\pi x \sin l\pi y \end{cases} \quad k, l = 1, 2, \dots$$

如果我们使用五点差分格式来求解 (5.53), 假设使用等距网格,

$$(5.55) \quad \begin{cases} -\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{ij}}{h^2} = \lambda u_{ij}, & (x_i, y_j) \in \Omega_h \\ u|_{ij} = 0, & (x_i, y_j) \in \Gamma_h \end{cases}$$



特征值问题

同样, 我们也需要对 u_h 再增加一个约束条件, 如 $\|u_h\|_{l^2} = 1$, 即 $\sum_{i,j} u_{ij}^2 = 1$, 最终我们要求解带约束的代数特征值问题:

$$AU = \lambda U.$$

设步长 $h = \frac{1}{N}$, 对于此简单情形我们可以得到数值解 $(\bar{\lambda}_{kl}, U_{kl})$.

$$(5.56) \quad \begin{cases} \bar{\lambda}_{kl} = \frac{4}{h^2} (\sin^2 \frac{k\pi}{2N} + \sin^2 \frac{l\pi}{2N}) \equiv 4N^2 (\sin^2 \frac{k\pi}{2N} + \sin^2 \frac{l\pi}{2N}) \\ U_{kl}(x_i, y_j) = \sin \frac{k\pi i}{N} \sin \frac{l\pi j}{N} \end{cases}$$

$$k, l = 1, \dots, N-1.$$

显然, 对于 $N \gg 1$, 且 $k, l \ll N$ 时, 由 Taylor 展开有

$$(5.57) \quad \bar{\lambda}_{kl} = \lambda_{kl} + \mathcal{O}(h^2),$$

这说明对于模较小的特征值计算出的近似解还是较准确的.



特征值问题

不过对比上面表达式 (5.54) 和 (5.56) 可以看出, 对于模较大的特征值近似效果很差. 当然, 一般来说, 模较小 (尤其是最小的) 特征值是最为关心的.

我们有以下定理:

定理 5.6

设 λ_{kl} , $\bar{\lambda}_{kl}$ 分别为 (5.53) 和 (5.55) 两个问题的相应特征值, 存在常数 $C > 0$ 与 $h_0 > 0$ (当然它们可能会依赖于 k, l) s.t.

$$\bar{\lambda}_{kl} \leq \lambda_{kl} \leq \bar{\lambda}_{kl} + Ch^2, \quad 0 < h \leq h_0 \text{ 时.}$$

对特征函数也有类似结论.

不过即便对于模最小特征值和特征函数的计算, 想得到有效位较多的近似解也还需进一步研究.



目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
- 5 椭圆问题的差分方法**
 - 椭圆问题的差分方法基本概念
 - 一维问题（两点边值问题）
 - 二维椭圆方程差分格式
 - 三角网格剖分差分格式
 - 极值原理
 - 能量不等式估计
 - 双调和问题（四阶椭圆问题）
 - 特征值问题
 - 椭圆问题差分方程的迭代解法



椭圆问题差分方程的迭代解法

椭圆型问题的差分方法 (有限元方法) 最终都归结为代数方程组的求解问题:

$$AU = F.$$

这里的系数矩阵 A 一般都是一个大规模稀疏矩阵, 且具有一定的带状结构, 比如是三对角或者块对角矩阵, 有时候还是对角占优、对称正定的.

一般来说都只能用迭代法来求解, 因为用直接法计算量、存储量都要求太大! 针对其结构, 可使用 Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, 共轭梯度法等迭代法. 这些方法在数值分析课程中已经介绍, 这里不再讲述.



交替方向迭代法

我们前面对于高维抛物问题讲过交替方向隐式格式, 对于椭圆问题的差分格式, 我们也可以采用交替方向迭代法来求解.

我们先以一个五点差分格式为例, 介绍一下交替方向迭代法:

设 $\mathbf{u} = \{u_{ij}\}$ 为解向量, 定义算子

$$(5.58) \quad (L_1 \mathbf{u})_{ij} = -\frac{\delta_x^2}{h^2} u_{ij}, \quad (L_2 \mathbf{u})_{ij} = -\frac{\delta_y^2}{h^2} u_{ij},$$

$$(5.59) \quad (L_h \mathbf{u})_{ij} = (L_1 \mathbf{u})_{ij} + (L_2 \mathbf{u})_{ij}.$$

我们要求解 $L_h \mathbf{u} = L_1 \mathbf{u} + L_2 \mathbf{u} = F$, 可以使用如下交替方向迭代:

$$(5.60) \quad \mathbf{u}^{(k+1/2)} = \mathbf{u}^{(k)} - \tau_k (L_1 \mathbf{u}^{(k+1/2)} + L_2 \mathbf{u}^{(k)} - F),$$

$$(5.61) \quad \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k+1/2)} - \tau_k (L_1 \mathbf{u}^{(k+1/2)} + L_2 \mathbf{u}^{(k+1)} - F),$$



交替方向迭代法

整理一下有

$$\begin{aligned}(I + \tau_k L_1) \mathbf{u}^{(k+1/2)} &= (I - \tau_k L_2) \mathbf{u}^{(k)} + \tau_k F, \\ (I + \tau_k L_2) \mathbf{u}^{(k+1)} &= (I - \tau_k L_1) \mathbf{u}^{(k+1/2)} + \tau_k F.\end{aligned}$$

这样每步只需解三对角方程组, 可以用追赶法求解. 下面主要看参数 τ_k 的选取. 记 $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}$, 那么有 $\mathbf{e}^{(k)}$ 满足齐次方程

$$\begin{aligned}(I + \tau_k L_1) \mathbf{e}^{(k+1/2)} &= (I - \tau_k L_2) \mathbf{e}^{(k)}, \\ (I + \tau_k L_2) \mathbf{e}^{(k+1)} &= (I - \tau_k L_1) \mathbf{e}^{(k+1/2)}.\end{aligned}$$

取 $\tau_k > 0$ 易见上面左端矩阵有逆. 因此消去中间层变量有

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = T_k \mathbf{e}^{(k)} = \cdots = T_k T_{k-1} \cdots T_0 \mathbf{e}^{(0)},$$

其中 $T_k = (I + \tau_k L_2)^{-1} (I - \tau_k L_1) (I + \tau_k L_1)^{-1} (I - \tau_k L_2)$.



交替方向迭代法

由 L_1, L_2 的结构可知它们有相同特征向量 $\mathbf{v}^{(l,m)} = \{v_{ij}^{(l,m)}\}$:

$$v_{ij}^{(l,m)} = \sin il\pi h \sin jm\pi h, \quad i, j, l, m = 1, \dots, N-1.$$

相应的特征值为 $\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{l\pi h}{2}, \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{m\pi h}{2}$.

由 L_1, L_2 乘积可交换次序可知 T_k 为对称矩阵, 其特征值为

$$\lambda_{lm}^{(k)} = \frac{(1 - 4\tau_k h^{-2} \sin^2 \frac{l\pi h}{2})(1 - 4\tau_k h^{-2} \sin^2 \frac{m\pi h}{2})}{(1 + 4\tau_k h^{-2} \sin^2 \frac{l\pi h}{2})(1 + 4\tau_k h^{-2} \sin^2 \frac{m\pi h}{2})}.$$

因而有如下估计式

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\| \leq \|T_k T_{k-1} \cdots T_0\| \|\mathbf{e}^{(0)}\| = \max_{l,m} \prod_{j=0}^k |\lambda_{lm}^{(j)}| \|\mathbf{e}^{(0)}\|.$$

我们当然希望选取 τ_k 使得上式右端取极小. 一般来说精确求 τ_k 是几乎不可能的, 只能近似求解.



交替方向迭代法

- ① 单参数情形, 即 $\tau_k = \tau$. 令 $\mu = 4\tau/h^2$, 选 μ 使得

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| \frac{1 - \mu x}{1 + \mu x} \right| = \min,$$

其中 $a = \sin^2 \frac{\pi h}{2}$, $b = \cos^2 \frac{\pi h}{2}$. 因为 $\frac{1 - \mu x}{1 + \mu x}$ 为 x, μ 的递减函数, 因此应该取 μ 使得其在区间端点反号达到极小, 从而可以得到 $\tau_{opt} = \frac{h^2}{2 \sin \pi h}$. 此时 $\max_{l,m} |\lambda_{lm}| = \frac{1 - \sin \pi h}{1 + \sin \pi h}$, 交替方向迭代法的收敛速度 ($R(T) = \ln \frac{1}{\rho(T)} \sim 2\pi h$) 与 SOR 相当.

- ② p 个参数情形, 此时交替方向迭代法的收敛速度 ($R(T) \sim \mathcal{O}(\frac{1}{\ln \frac{1}{h}})$) 比 SOR 有明显改进.



交替方向迭代法

对于三维情形, 可以用 Douglas 迭代法:

$$(1 + \tau_k L_1) \mathbf{u}^{(k+1/3)} = (I + \tau_k L_1 - 2\tau_k L_h) \mathbf{u}^{(k)} + 2\tau_k F,$$

$$(1 + \tau_k L_2) \mathbf{u}^{(k+2/3)} = \mathbf{u}^{(k+1/3)} + \tau_k L_2 \mathbf{u}^{(k)},$$

$$(1 + \tau_k L_3) \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k+2/3)} + \tau_k L_3 \mathbf{u}^{(k)}.$$

此时可以得到与二维类似结论.



多重网格方法

前面介绍的简单迭代方法一般都需要迭代多次才能得到好的近似解, 且迭代步数往往会随着步长的减少而增加!

我们下面重点介绍一下多重网格方法 (Multi-grid method), 其收敛速度可以达到所谓最优---迭代次数不会随着网格加密而增加.

我们下面以一个两点边值问题介绍一下**两网格算法**:

$$(5.62) \quad \begin{cases} Lu \equiv -u''(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

将区域等分为 $M+1$ 份, 即 $h = \frac{1}{M+1}$, $x_j = jh$, $j = 0, \dots, M+1$.



多重网格方法

问题 (5.62) 的最简单三点格式为

$$(5.63) \quad \mathcal{L}_h u_j = -\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} = f_j, \quad j = 1, \dots, M$$

边界条件为 $u_0 = u_{M+1} = 0$. 最终要求解代数方程组 $AU = F$, 其中

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}$$



多重网格方法

假设我们使用阻尼 Jacobi 迭代法 ($0 \leq \omega \leq 1$ 为松弛因子),

$$(5.64) \quad \begin{cases} \tilde{u}_j^{(m+1)} = \frac{h^2}{2} f_j + \frac{1}{2}[u_{j+1}^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}], \\ u_j^{(m+1)} = \omega \tilde{u}_j^{(m+1)} + (1 - \omega)u_j^{(m)}, \end{cases}$$

其中 $u_0^{(m)} = u_{M+1}^{(m)} = 0$ ($\omega = 1$ 即为最简单 Jacobi 迭代)

记 $\mathbf{e}^{(m+1)} = U - U^{(m+1)}$ 为问题 (5.63) 的解和 (5.64) 第 $m+1$ 次的迭代解之间的迭代误差, 显然有 $\mathbf{e}^{(m+1)} = G\mathbf{e}^{(m)}$, 其中 G 为阻尼 Jacobi 迭代矩阵

$$G = \begin{pmatrix} 1 - \omega & \frac{\omega}{2} & & & \\ \frac{\omega}{2} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{\omega}{2} \\ & & & \frac{\omega}{2} & 1 - \omega \end{pmatrix}$$



多重网格方法

由特征值问题的结果, 易得矩阵 G 的特征值和特征向量为

$$(5.65) \quad \lambda_k = 1 - 2\omega \sin^2 \frac{kh\pi}{2}, \quad 1 \leq k \leq M,$$

$$(5.66) \quad \mathbf{v}_k = (\sin kh\pi, \sin 2kh\pi, \dots, \sin Mkh\pi)^T \in \mathbb{R}^M$$

k 越大, 说明频率越高, 特征函数振荡越厉害. $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M\}$ 显然线性无关, 组成了 \mathbb{R}^M 中一组基, 初始误差 $\mathbf{e}^{(0)}$ 可以写成其线性组合

$$\mathbf{e}^{(0)} = \sum_{k=1}^M \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

由迭代方程可得

$$\mathbf{e}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^M \alpha_k \lambda_k^m \mathbf{v}_k$$



多重网格方法

从上面可以看到, $0 < \omega \leq 1$ 时, 阻尼 Jacobi 迭代矩阵的谱半径 $\rho(G) < 1$, 即迭代收敛.

如果我们对误差向量按频率分类: $kh \leq \frac{1}{2}$ 的称为**低频分量**, $kh > \frac{1}{2}$ 的称为**高频分量**.

由 λ_k 的定义式 (5.65) 可知, 无论松弛因子 ω 怎么取, 对于误差低频分量 ($kh \leq \frac{1}{2}$), 其衰减速度 (即为 λ_k) 要慢于高频分量:

$k = 1$ 时 $\lambda_1 = 1 - 2\omega \sin^2 \frac{h\pi}{2} \approx 1 - 2\omega \frac{h^2\pi^2}{4}$ 最接近于 1 ($M \gg 1$).

对于 $kh > \frac{1}{2}$ 的分量, 因为 $1 \geq \sin^2 \frac{kh\pi}{2} > \frac{1}{2}$, 故比如取 $\omega = \frac{2}{3}$ 就可以让 $|\lambda_k| < \frac{1}{3}$.



多重网格方法

由此可以看到，低频误差分量衰减慢是 Jacobi 迭代收敛慢的主要原因。

高频误差分量随着迭代衰减是很快的。

这也说明随着迭代进行，误差分量的光滑性是逐步改善的。

这一现象在其他迭代方法中也是同样存在的。

由误差分量的表示式可以看出，频率的高低也依赖于网格步长，其高频、低频的区分是相对的。

即细网格上的低频分量可以是粗网格上的高频分量。



多重网格方法

这样便产生了两网格迭代思想：取两套网格：(设 $M_2 = \frac{M_1-1}{2}$)

$$h = \frac{1}{M_1+1}, \quad x_j = jh, \quad j = 0, \dots, M_1 + 1;$$

$$H = \frac{1}{M_2+1}, \quad X_j = jH, \quad j = 0, \dots, M_2 + 1.$$

设 $H = 2h$. 两网格算法可描述为

算法 5.1

- ① 在细网格上求解 $\mathcal{L}_h u_j = f_j$, 迭代几步;
- ② 将细网格上函数转移到粗网格上, 通常是加权平均的形式, 解 $\mathcal{L}_H u_j = f_j$, 迭代几步;
- ③ 再将粗网格上函数插值到细网格上, 解 $\mathcal{L}_h u_j = f_j$, 迭代几步进行磨光.



多重网格方法

具体来说, 算法可以描述为

(1) 在细网格 Ω_h 上用迭代法求解下面离散问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h u_{h,j} = f_{h,j}, & 1 \leq j \leq M_1, \\ u_{h,0} = u_{h,M_1+1} = 0. \end{cases}$$

假设迭代了 n 步, 对应的近似解记为 $v_{h,j} = u_{h,j}^{[n]}$, 计算相应残量

$$r_{h,j} = f_{h,j} - \mathcal{L}_h v_{h,j}.$$

显然迭代了 n 步的近似解的误差 $e_{h,j}^{[n]} = u_{h,j} - u_{h,j}^{[n]}$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h e_{h,j}^{[n]} = f_{h,j} - \mathcal{L}_h v_{h,j} = r_{h,j}, & 1 \leq j \leq M_1, \\ e_{h,0}^{[n]} = e_{h,M_1+1}^{[n]} = 0. \end{cases}$$

这表明细网格上的迭代误差由相应的残向量 r_h 唯一确定.



多重网格方法

(2) 将细网格上的误差转移到粗网格 Ω_H 上, 即将残量 $r_{h,j}$ 限制到 Ω_H 上, 通常的办法是对残向量 $r_{h,j}$ 进行加权, 如

$$r_{H,j} = \frac{1}{4} (r_{h,2j-1} + r_{h,2j} + r_{h,2j+1}), \quad 1 \leq j \leq M_2.$$

(3) 然后在粗网格上求解离散问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}_H e_{H,j} = r_{H,j}, & 1 \leq j \leq M_2, \\ e_{H,0} = e_{H,M_2+1} = 0. \end{cases}$$

这里可以用迭代法, 也可以用直接法求解. 此外算子 \mathcal{L}_H 与 \mathcal{L}_h 可以形式不同.



多重网格方法

(4) 将粗网格上的误差插值回细网格 Ω_h 上, 如

$$\tilde{e}_{h,2j} = e_{H,j}, \quad \tilde{e}_{h,2j-1} = \frac{1}{2} (e_{H,j-1} + e_{H,j}), \quad 1 \leq j \leq M_2.$$

(5) 然后在细网格上对近似解做修正

$$v_{h,j} = v_{h,j} + \tilde{e}_{h,j}, \quad 1 \leq j \leq M_1.$$

并以 $v_{h,j}$ 作为初值, 在细网格上用迭代法求解离散问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h u_{h,j} = f_{h,j}, & 1 \leq j \leq M_1, \\ u_{h,0} = u_{h,M_1+1} = 0. \end{cases}$$

迭代几次后再回到第 (1) 步, 开始下一个循环.

上面算法称为 “V”-循环, 再重复一次可构成 “W”-循环.



多重网格方法

注 5.2

上述两重网格算法可以自然地延拓到高维情形, 只是从细网格到粗网格上的限制算子和从细网格到粗网格上的插值延拓算子需做适当改变即可.

注 5.3

上述两重网格算法也可以自然地延拓到多重网格情形, 即如果给定了嵌套的多重网格:

$$\Omega_{h_1}, \dots, \Omega_{h_N}, \text{ 步长满足 } h_1 > h_2 > \dots > h_N.$$



多重网格方法

多重网格算法可描述为

算法 5.2

- ① 在细网格 Ω_{h_1} 上求解 $\mathcal{L}_{h_1} u_j = f_{h_1,j}$, 迭代几步;
- ② 将细网格上函数依次转移到粗网格上, 通常是加权平均的形式, 每一层上解 $\mathcal{L}_{h_k} u_{h_k,j} = f_{h_k,j}$, 迭代几步;
- ③ 再将粗网格上误差函数依次插值到细网格上, 解 $\mathcal{L}_{h_k} u_{h_k,j} = f_{h_k,j}$, 迭代几步进行磨光.



多重网格方法

上面算法称为“V”-循环, 再重复一次可构成“W”-循环.

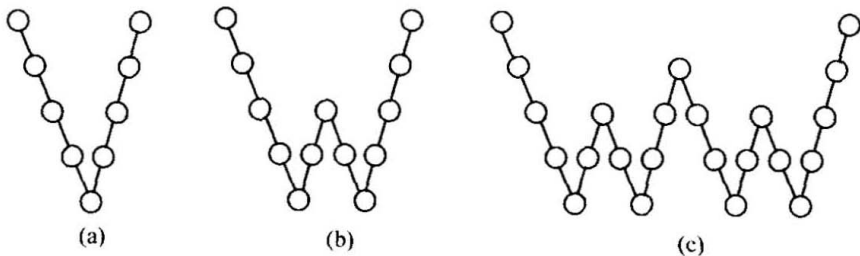


Figure 1: (a) V 循环, (b)/(c)W 循环

