

常微分方程数值解法纸质习题

(1) 证明梯形法:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

是对初值稳定的。

(2) 计算下面的改进Euler法（即一种2阶显式R-K格式）：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))]$$

和梯形法的绝对稳定域。

(3) 计算以下Adams显式和隐式两步法的绝对稳定域和相对稳定域(画图表示):

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n),$$

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n).$$

(4) 证明以下隐式两步法:

$$y_{n+2} = \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_n) + \frac{h}{4}(5f_{n+2} - 3f_{n+1} + 4f_n)$$

是 A 稳定的，即其绝对稳定域包含复平面的左半平面。请分析一下该方法是否为 L 稳定格式。

(5) 证明：矩阵 $S = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ 为 $2n$ 阶辛矩阵的充要条件是 $A = (D^T)^{-1}$.

(6) 请给出矩阵 $S = \begin{pmatrix} A & I_n - A \\ A - I_n & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ 为 $2n$ 阶辛矩阵的充要条件.