

# 偏微分方程数值解法

任课教师：黄忠亿

清华大学数学科学系



# 抛物型方程

这一章我们会先从常系数扩散方程初值问题开始，考虑差分格式的性质和初边值条件的离散。

再进一步讨论变系数问题、对流扩散问题、高维问题以及一些非线性问题的处理。

最后讨论一些复杂的流体问题的计算。



# 目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
  - 常系数扩散方程初值问题
  - 扩散方程初边值问题
  - 变系数扩散方程
  - 对流扩散方程
  - 高维问题
  - 非线性抛物问题



# 常系数扩散方程初值问题

考虑如下常系数扩散方程初值问题:

$$(4.1) \quad \begin{cases} u_t - au_{xx} = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u|_{x=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

前面我们介绍过, 此问题可以描述细杆上的热传导问题等.  $a(> 0)$  表示传导 (扩散) 系数. 设  $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , 即  $\int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx < +\infty$ .

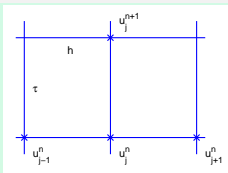
问题(4.1)的解可表示为

$$(4.2) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi.$$

我们可以看到, 即便是最简单情形, 计算此积分也不容易. 因此我们还是寻求离散化方法来求解.



# 常系数扩散方程初值问题--古典格式



我们前面介绍过最简单的显式格式

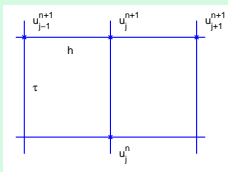
$$(4.3) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0.$$

显然此格式精度为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ .

而由 Fourier 分析方法可以得到增长因子为

$$G(\xi, \tau) = 1 - 4a\lambda \sin^2 \frac{\xi h}{2}, \quad \text{其中 } \lambda = \frac{\tau}{h^2}.$$

这样要想  $|G| \leq 1$ , 我们需要  $a\lambda \leq \frac{1}{2}$ . 这在  $a \gg 1$  时非常苛刻.



要想改善稳定性条件, 当然可以使用古典隐式格式

$$(4.4) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0.$$

增长因子为  $G(\xi, \tau) = \left(1 + 4a\lambda \sin^2 \frac{\xi h}{2}\right)^{-1}$ . 总有  $|G| \leq 1$ .

# 常系数扩散方程初值问题--加权隐式格式

一个很自然地想法就是把上面两个格式进行组合：取  $0 \leq \theta \leq 1$ ,

$$(4.5) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - a \left\{ \theta \frac{\delta_x^2 u_j^{n+1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2} \right\} = 0.$$

其截断误差为 (在  $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})$  处展开):  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2) + a\tau(\frac{1}{2} - \theta) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \tau}$ . 即  $\theta \neq \frac{1}{2}$  时为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ ;  $\theta = \frac{1}{2}$  时为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ .

$$\text{其增长因子为: } G(\xi, \tau) = \frac{1 - 4(1 - \theta)a\lambda \sin^2 \frac{\xi h}{2}}{1 + 4\theta a\lambda \sin^2 \frac{\xi h}{2}}.$$

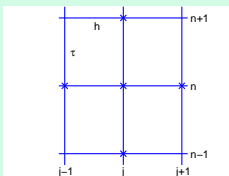
当  $\theta \geq \frac{1}{2}$  时, 总有  $|G| \leq 1$ , 无条件稳定;

当  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  时, 若  $a\lambda \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ , 有  $|G| \leq 1$ .

综上所述,  $\theta = \frac{1}{2}$  时为隐式格式中最佳 — Crank-Nicolson 格式.



# 常系数扩散方程初值问题--三层格式



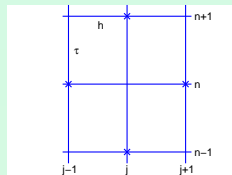
我们可以期望利用多层的组合来提高精度. 最简单的是 Richardson 格式:

$$(4.6) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0.$$

但是第二章时我们已经讨论过, 此格式**绝对不稳定**, 因此不能用.

1953 年 Du Fort 与 Frankel 对之做了修改 (类似于 Lax-Friedrichs 格式的修改):

$$(4.7) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - \left( u_j^{n+1} + u_j^{n-1} \right) + u_{j-1}^n}{h^2} = 0.$$



Du Fort-Frankel

即用  $u_j^{n+1} + u_j^{n-1}$  替代了  $2u_j^n$ . 称为 Du Fort-Frankel 格式.



## Du Fort-Frankel 格式

我们先来分析 Du Fort-Frankel 格式的误差 (在  $(x_j, t_n)$  展开)

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{h^2} \\
 = & [u_t]_j^n + \mathcal{O}(\tau^2) - a \frac{u_{j+1}^n - (2u_j^n + \tau^2[u_{tt}]_j^n + \mathcal{O}(\tau^4)) + u_{j-1}^n}{h^2} \\
 = & [u_t]_j^n + \mathcal{O}(\tau^2) - a[u_{xx}]_j^n + \mathcal{O}(h^2) + a \frac{\tau^2}{h^2} [u_{tt}]_j^n + \mathcal{O}(h^{-2}\tau^4) \\
 = & [u_t - au_{xx}]_j^n + \mathcal{O}(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^4}{h^2}) + a \frac{\tau^2}{h^2} [u_{tt}]_j^n
 \end{aligned}$$

显然这是一个条件相容格式, 即需要  $h, \tau \rightarrow 0$  时有  $\frac{\tau}{h} \rightarrow 0$  才行.

由前面的古典格式的稳定性分析知, 一般取  $\tau \sim h^2$ , 这时 Du Fort - Frankel 格式仍为  $\mathcal{O}(h^2)$  精度.





# Du Fort-Frankel 格式

再来看其稳定性: (令  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ , 先将之化成两层方程组)

$$\begin{cases} (1 + 2a\lambda)u_j^{n+1} &= (1 - 2a\lambda)v_j^n + 2a\lambda(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \\ v_j^{n+1} &= u_j^n \end{cases}$$

再令  $\mathbf{U}_j^n = \begin{pmatrix} u_j^n \\ v_j^n \end{pmatrix} = \mathbf{U}^n e^{ij\xi h}$  代入上面方程组, 可得增长矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 + 2a\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{n+1} = \begin{pmatrix} 4a\lambda \cos \xi h & 1 - 2a\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^n$$

$$\implies G(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha \cos \xi h}{1 + \alpha} & \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \alpha = 2a\lambda > 0.$$



## Du Fort-Frankel 格式

这样其特征方程为 (注意  $\alpha = 2a\lambda > 0$ )

$$\mu^2 - \frac{2\alpha \cos \xi h}{1 + \alpha} \mu - \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = 0$$

易见两个根为:  $\mu_{1,2} = \frac{\alpha \cos \xi h \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \xi h}}{1 + \alpha}$ .

如果  $1 - \alpha^2 \sin^2 \xi h \geq 0$ , 显然有  $|\mu_{1,2}| \leq 1$ ;

如果  $1 - \alpha^2 \sin^2 \xi h < 0$ ,  $|\mu_{1,2}|^2 = \frac{\alpha^2 - 1}{(1 + \alpha)^2} < 1$ .

且当  $\mu_1 = \mu_2$  时, 即  $1 - \alpha^2 \sin^2 \xi h = 0$ , 此时

$$|\alpha \cos \xi h| = \sqrt{\alpha^2 - 1} < 1 + \alpha, \text{ 即也有 } |\mu_{1,2}| < 1.$$

综上所述, Du Fort-Frankel 方法无条件稳定. 当然我们要注意, 它是条件相容、无条件稳定的显式格式.



# 一元二次方程根的判别引理

我们以后会常用到以下关于一元二次方程根的判别引理

## 引理 4.1

实系数一元二次方程  $\mu^2 - b\mu - c = 0$  的根  $|\mu_{1,2}| \leq 1 \iff |b| \leq 1 - c \leq 2$ .

“ $\implies$ ”: 设  $|\mu_{1,2}| \leq 1$ . 由韦达定理:  $\mu_1 + \mu_2 = b$ ,  $\mu_1\mu_2 = -c$ .

显然有  $|c| = |\mu_1\mu_2| \leq 1 \implies -1 \leq \pm c \leq 1 \implies 1 - c \leq 2$ .

视  $b$  的符号 “ $\pm$ ”, (无论  $\mu_i$  为实或复的)  $1 - c - |b| = 1 - c \mp b = 1 + \mu_1\mu_2 \mp (\mu_1 + \mu_2) = (1 \mp \mu_1)(1 \mp \mu_2) \geq 0$

这样总有  $1 - c \geq |b|$ .

“ $\impliedby$ ”: 设  $|b| \leq 1 - c \leq 2$ ,  $\mu_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$ .



# 一元二次方程根的判别引理

若  $b^2 + 4c < 0$ , 立即有  $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = \frac{b^2 + (-b^2 - 4c)}{4} = -c \leq 1$ .

下面设  $\mu_i \in \mathbb{R}$ : 同样, 视  $b$  的符号“ $\pm$ ”有, 若  $b = \mu_1 + \mu_2 \geq 0$ :

$$0 \leq 1 - c - |b| = 1 - c - b = 1 + \mu_1\mu_2 - (\mu_1 + \mu_2) = (1 - \mu_1)(1 - \mu_2)$$

这样  $(1 - \mu_1)$  与  $(1 - \mu_2)$  同号, 而  $|c| = |\mu_1\mu_2| \leq 1 \implies |\mu_1|$  与  $|\mu_2|$  不可能都大于 1. 因此必有  $(1 - \mu_1)$  与  $(1 - \mu_2)$  均非负. 再结合  $\mu_1 + \mu_2 \geq 0$ , 立即有  $|\mu_i| \leq 1$ .

若  $b = \mu_1 + \mu_2 < 0$ :

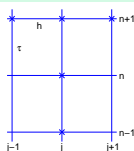
$$0 \leq 1 - c - |b| = 1 - c + b = 1 + \mu_1\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) = (1 + \mu_1)(1 + \mu_2)$$

这样  $(1 + \mu_1)$  与  $(1 + \mu_2)$  同号, 而  $|c| = |\mu_1\mu_2| \leq 1 \implies |\mu_1|$  与  $|\mu_2|$  不可能都大于 1. 因此必有  $(1 + \mu_1)$  与  $(1 + \mu_2)$  均非负. 这样再结合  $\mu_1 + \mu_2 < 0$ , 立即有  $|\mu_i| \leq 1$ .  $\triangleright$



# 单边三层隐式格式

前面看到, 显式三层格式有各种限制. 下面我们看看隐式三层格式是否有所改进.



首先看一个单边三层隐式格式:

$$(4.8) \quad \frac{3}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} = a \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}$$

此即  $(3 + 4a\lambda)u_j^{n+1} - 2a\lambda(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = 4u_j^n - u_j^{n-1}$ , 其中  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ .

这是主对角占优的三对角方程组, 可以用追赶法求解.

在  $(x_j, t_{n+1})$  点处展开, 有  $\frac{3}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} = (u_t)_j^{n+1} + \mathcal{O}(\tau^2)$

即此格式为二阶精度  $\mathcal{O}(h^2 + \tau^2)$ .



# 单边三层隐式格式

再看其稳定性: (令  $v_j^n = u_j^{n-1}$ )

$$\begin{cases} (3 + 4a\lambda)u_j^{n+1} - 2a\lambda(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = 4u_j^n - v_j^n \\ v_j^{n+1} = u_j^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3 + \alpha} & \frac{-1}{3 + \alpha} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \alpha = 8a\lambda \sin^2 \frac{\xi h}{2} \geq 0.$$

这样对照引理 4.1, 因为:  $|b| = \frac{4}{3 + \alpha} \leq 1 - c = \frac{4 + \alpha}{3 + \alpha} < 2$ ,

因此有增长矩阵的特征值  $|\mu_{1,2}| \leq 1$ .

且  $\mu_1 = \mu_2$  时, 为  $|\mu_1| = |\mu_2| = \frac{|b|}{2} = \frac{2}{3 + \alpha} < 1$ .

因此该隐式格式无条件稳定.



# 加权三层隐式格式

我们也可以考虑以下加权形式的三层隐式格式 ( $0 \leq \theta \leq 1$ ):

$$(4.9) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} = \frac{a}{h^2} \left[ \theta \delta_x^2 u_j^{n+1} + (1 - 2\theta) \delta_x^2 u_j^n + \theta \delta_x^2 u_j^{n-1} \right].$$

这相当于用  $\theta \delta_x^2 u_j^{n+1} + (1 - 2\theta) \delta_x^2 u_j^n + \theta \delta_x^2 u_j^{n-1}$  代替了 Richardson 格式中的  $\delta_x^2 u_j^n$ . 在  $(x_j, t_n)$  处展开, 易见其精度为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ .

可将之改写成 (三对角方程组)

$$(1 - 2\theta a \lambda \delta_x^2) u_j^{n+1} = 2a \lambda (1 - 2\theta) \delta_x^2 u_j^n + (1 + 2\theta a \lambda \delta_x^2) u_j^{n-1}.$$

令  $v_j^n = u_j^{n-1}$  有

$$\begin{cases} (1 - 2\theta a \lambda \delta_x^2) u_j^{n+1} &= 2a \lambda (1 - 2\theta) \delta_x^2 u_j^n + (1 + 2\theta a \lambda \delta_x^2) v_j^n \\ v_j^{n+1} &= u_j^n \end{cases}$$



## 加权三层隐式格式

$$\Rightarrow G(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} \frac{(2\theta - 1)\alpha}{1 + \theta\alpha} & \frac{1 - \theta\alpha}{1 + \theta\alpha} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \alpha = 4a\lambda \sin^2 \frac{\xi h}{2}.$$

这样特征方程为  $\mu^2 - \frac{(2\theta - 1)\alpha}{1 + \theta\alpha} \mu - \frac{1 - \theta\alpha}{1 + \theta\alpha} = 0$ .

显然  $1 - c = 1 - \frac{1 - \theta\alpha}{1 + \theta\alpha} = \frac{2\theta\alpha}{1 + \theta\alpha} \leq 2$ , 且

$$|b| = \left| \frac{(2\theta - 1)\alpha}{1 + \theta\alpha} \right| \leq 1 - c \iff \theta \geq \frac{1}{4}.$$

当  $\theta \geq \frac{1}{4}$  时, 若  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $|\mu_1| = |\mu_2| = \frac{|\theta - \frac{1}{2}|\alpha}{1 + \theta\alpha} < 1$ .

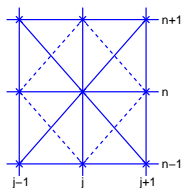
因此只要  $\theta \geq \frac{1}{4}$ , 上面的格式就是无条件稳定的二阶格式.





# 跳点格式

也可将古典显式、古典隐式格式交替使用, 便得到跳点格式.



先把点  $(x_j, t_n)$  按照  $(n+j)$  的奇偶性分成两组 (如右图所示, 分别用实、虚线连接). 计算  $t_n \rightarrow t_{n+1}$  时, 先在  $(n+1+j)$  为偶数的网格点上使用向前 Euler (显式) 格式:

$$(4.10) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0.$$

然后在  $(n+1+j)$  为奇数的网格点上使用向后 Euler (隐式) 格式:

$$(4.11) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0.$$

注意到, 使用上式计算时,  $u_{j\pm 1}^{n+1}$  已经由 (4.10) 得到了, 因此上式其实是显式计算.

# 跳点格式

可以将 (4.10)–(4.11) 改写为 ( $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ )

$$(4.12) \quad u_j^{n+1} = u_j^n + a\lambda(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad \text{当 } n+1+j \text{ 为偶}$$

$$(4.13) \quad u_j^{n+1} = u_j^n + a\lambda(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}), \quad \text{当 } n+1+j \text{ 为奇}$$

实际上由 (4.13) 式, 当  $n+1+j$  为奇时,  $n+2+j$  为偶, 即

$$(4.14) \quad u_j^{n+2} = u_j^{n+1} + a\lambda(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = 2u_j^{n+1} - u_j^n$$

那么对于  $n+1+i$  为偶时,  $n+2+i$  为奇, 即

$$\begin{aligned} u_i^{n+2} &= u_i^{n+1} + a\lambda(u_{i+1}^{n+2} - 2u_i^{n+2} + u_{i-1}^{n+2}) \\ &= u_i^n + a\lambda(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ &\quad + a\lambda(2u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n - 2u_i^{n+2} + 2u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n) \\ &= u_i^n + 2a\lambda[u_{i+1}^{n+1} - (u_i^{n+2} + u_i^n) + u_{i-1}^{n+1}]. \end{aligned}$$



# 跳点格式

上式最后即为 Du Fort-Frankel 格式. 即跳点格式其实精度与稳定性都与 Du Fort-Frankel 格式相当.

也就是说跳点格式也是条件相容 ( $\frac{\tau}{h} \rightarrow 0$ ) 且无条件稳定的.

但是跳点格式可以自己启动, 不用别的格式给出  $u_j^1$ . 且其存贮量也比 Du Fort-Frankel 格式小. 设  $T = N\tau$  且  $N$  为偶数, 那么跳点格式可以按如下顺序计算:

$$u_j^0 \xrightarrow{(4.12)} u_{2j+1}^1 \xrightarrow{(4.13)} u_{2j}^1 \xrightarrow{(4.14)} u_{2j}^2 \xrightarrow{(4.13)} u_{2j+1}^2 \cdots \cdots \xrightarrow{(4.14)} u_{2j}^N \xrightarrow{(4.13)} u_{2j+1}^N$$



# 目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
  - 常系数扩散方程初值问题
  - 扩散方程初边值问题
  - 变系数扩散方程
  - 对流扩散方程
  - 高维问题
  - 非线性抛物问题



# 扩散方程初边值问题

考虑有界区域上的扩散问题

$$(4.15) \quad \begin{cases} u_t - au_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

我们显然还需给定边界条件, 此问题才是适定问题.

## I. 第一类边界条件

$$(4.16) \quad u(0, t) = \varphi(t), \quad u(1, t) = \psi(t), \quad t \geq 0.$$

假设我们有相容性  $\varphi(0) = u_0(0)$ ,  $\psi(0) = u_0(1)$ .

此类初边界条件离散很简单. 设  $h = \frac{1}{J}$ ,  $\tau = \frac{T}{N}$ .

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, J; \quad u_0^n = \varphi(t_n), \quad u_J^n = \psi(t_n), \quad n \geq 0.$$

这样便可以用一般的显式或隐式格式计算了.



# 扩散方程初边值问题

## II. 第三类边界条件

$$(4.17) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(t)u \right)_{x=0} = \varphi(t), \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(t)u \right)_{x=1} = \psi(t), \quad t \geq 0.$$

下面看如何离散.

1) 若对 (4.17) 式中的空间偏导数采用单边差商近似有

$$(4.18) \quad \frac{u_1^n - u_0^n}{h} - \alpha^n u_0^n \approx \varphi^n, \quad \frac{u_J^n - u_{J-1}^n}{h} + \beta^n u_J^n \approx \psi^n, \quad n \geq 0.$$

这样只有一阶精度  $\mathcal{O}(h)$ .

2) 也可仿照以前引入虚拟节点方法, 对 (4.17) 式中的空间偏导数采用中心差商近似

$$(4.19) \quad \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} - \alpha^n u_0^n \approx \varphi^n, \quad \frac{u_{J+1}^n - u_{J-1}^n}{2h} + \beta^n u_J^n \approx \psi^n.$$



# 扩散方程初边值问题

然后我们利用在  $x = 0, 1$  处建立差分格式来消去  $u_{-1}^n$  和  $u_{j+1}^n$ .

比如使用向前差分 (古典显式) 格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n + a\lambda(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

在左边界,  $u_0^{n+1} = u_0^n + a\lambda(u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n)$ , 与 (4.19) 联立消去  $u_{-1}^n$ :

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} &= u_0^n + a\lambda[u_1^n - 2u_0^n + (u_1^n - 2h\alpha^n u_0^n - 2h\varphi^n)] \\ (4.20) \quad &= [1 - 2a\lambda(1 + h\alpha^n)]u_0^n + 2a\lambda u_1^n - 2a\lambda h\varphi^n. \end{aligned}$$

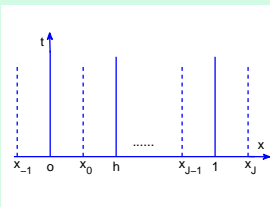
同样在右边界,  $u_J^{n+1} = u_J^n + a\lambda(u_{J+1}^n - 2u_J^n + u_{J-1}^n)$ , 与 (4.19) 联立消去  $u_{J+1}^n$ :

$$\begin{aligned} u_J^{n+1} &= u_J^n + a\lambda[u_{J-1}^n - 2u_J^n + (u_{J-1}^n - 2h\beta^n u_J^n + 2h\psi^n)] \\ (4.21) \quad &= [1 - 2a\lambda(1 + h\beta^n)]u_J^n + 2a\lambda u_{J-1}^n + 2a\lambda h\psi^n. \end{aligned}$$



# 扩散方程初边值问题

3) 还可以错半个网格点进行处理



令  $x_j = (j + \frac{1}{2})h$ ,  $j = -1, 0, \dots, J$ , 其中  $h = \frac{1}{J}$ .

在内部节点  $j = 0, 1, \dots, J-1$ , 利用格式

$$(4.22) \quad u_j^{n+1} = u_j^n + \alpha \lambda (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

在左右边界处, 可用中心差商近似

$$(4.23) \quad \begin{cases} \frac{u_0^n - u_{-1}^n}{h} - \alpha^n \frac{u_0^n + u_{-1}^n}{2} = \varphi^n, \\ \frac{u_J^n - u_{J-1}^n}{h} + \beta^n \frac{u_J^n + u_{J-1}^n}{2} = \psi^n, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{-1}^n = (1 + \frac{h\alpha^n}{2})^{-1} [(1 - \frac{h\alpha^n}{2})u_0^n - h\varphi^n] \\ u_J^n = (1 + \frac{h\beta^n}{2})^{-1} [(1 - \frac{h\beta^n}{2})u_{J-1}^n + h\psi^n] \end{cases}$$

可分别代入 (4.22) 中的  $j = 0, J-1$  进行计算.





# 扩散方程初边值问题---例举

## 例 4.1 (考察一下古典格式的稳定性)

考虑扩散方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

用分离变量方法可以得到此问题的解为  $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ .

我们取  $J = 10$ ,  $h = \frac{1}{10}$ ,  $x_j = jh$  ( $j = 0, \dots, J$ ). 取不同网格比  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$  及加权隐式格式 (不同  $\theta$ ) 计算, 结果如下.



# 扩散方程初边值问题---例举

Table 1: 取不同网格比和不同  $\theta$  计算出的  $u(0.4, 0.4)$  的值

$\lambda$	$\theta = 0$	$\theta = 1$	$\theta = \frac{1}{2}$	解析解
0.25	0.0180544	0.0198705	0.0189519	0.0183519
0.50	0.0171677	0.0207988	0.0189407	
1.00	$0.278773 \times 10^{11}$	0.0226935	0.0188963	
2.00	—	0.0266211	0.0187186	
4.00	—	0.0349321	0.0180093	
8.00	—	0.0527634	0.0152002	

这里也验证了  $\theta = 0$  时稳定性为  $a\lambda \leq \frac{1}{2}$ ;  $\theta \geq \frac{1}{2}$  时格式无条件稳定.  
 $\theta = \frac{1}{2}$  (Crank-Nicolson) 格式为二阶, 其他情形为一阶格式.



# 扩散方程初边值问题---例举

## 例 4.2 (考察一下不同边值离散方法的效果)

考虑扩散方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ (u_x - u)|_{x=0} = 0, & t \geq 0, \\ (u_x + u)|_{x=1} = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

此问题的解析解为  $u(x, t) = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sec \alpha_l}{3 + 4\alpha_l^2} e^{-4\alpha_l^2 t} \cos 2\alpha_l (1 - \frac{1}{2})$ , 其中  $\alpha_l$  为方程  $\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2}$  的根.

我们在内点都使用古典显式格式, 边界条件采用之前的三种不同方式来离散. 计算中统一取  $h = \frac{1}{10}$ ,  $\tau = 0.0025$ , 即  $\lambda = \frac{1}{4}$ .



## 扩散方程初边值问题---例举

对于前两种边值离散方法, 空间网格取成  $x_j = jh$ ,  $0 \leq j \leq 10$ .

内点计算格式为  $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{4}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$ .

我们把用(4.18)式离散的边界条件称为算法 I:

$$u_0^n = \frac{u_1^n}{1+h} = \frac{u_1^n}{1.1}, \quad u_J^n = \frac{u_{J-1}^n}{1.1}$$

把用(4.20)–(4.21)式离散的边界条件称为算法 II:

$$u_0^n = \frac{1}{2}(u_1^n + 0.9u_0^n), \quad u_J^n = \frac{1}{2}(u_{J-1}^n + 0.9u_J^n)$$

再利用对称性, 其实可以只计算  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  即可, 即利用对称性有

$$u_{\frac{J}{2}}^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{\frac{J}{2}+1}^n + 2u_{\frac{J}{2}}^n + u_{\frac{J}{2}-1}^n) = \frac{1}{2}(u_{\frac{J}{2}-1}^n + u_{\frac{J}{2}}^n)$$



## 扩散方程初边值问题---例举

对于第三种离散方法, 我们取  $x_j = (j + \frac{1}{2})h$ ,  $j = -1, \dots, J$ .

在内点依然用古典显式格式  $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{4}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$ .

边界离散采用(4.23)式:

$$\begin{cases} u_{-1}^n = \left(1 + \frac{h}{2}\right)^{-1} \left[\left(1 - \frac{h}{2}\right) u_0^n\right] = \frac{1.9u_0^n}{2.1} \\ u_J^n = \left(1 + \frac{h}{2}\right)^{-1} \left[\left(1 - \frac{h}{2}\right) u_{J-1}^n\right] = \frac{1.9u_{J-1}^n}{2.1} \end{cases}$$

该算法记为算法 III. 计算结果见下表.



# 扩散方程初边值问题---例举

Table 2: 取不同边界条件离散格式计算出的  $u(0.2, t)$  的值

$t$	算法 I	算法 II	算法 III	解析解
0.005	0.9943	1.0000	1.0000	0.9984
0.050	0.8912	0.9126	0.9135	0.9120
0.100	0.8102	0.8345	0.8357	0.8342
0.250	0.6142	0.6452	0.6466	0.6454
0.500	0.3873	0.4205	0.4221	0.4212
1.000	0.1540	0.1786	0.1798	0.1794

可以看到算法 II 与算法 III 精度是相当的, 都比算法 I 要好很多. 时间长之后, 可以看到算法 III 甚至更好 (因为它的虚拟节点离边界更近), 且其计算量要少 (其实只多一个节点).



# 关于边值问题稳定性的附注

我们在第二章就介绍过, 对于边值问题一般采用能量不等式方法来分析其稳定性.

但是实际应用时, 我们仍可以采用 Fourier 分析法来近似分析, 即相当于我们认为边界条件的处理是准确的, 我们只需考虑初值离散带来的误差传递过程. 我们对于一些变系数问题也会采用冻结系数法来近似分析. 这对于许多线性问题是很方便的.

对于一些更复杂的问题我们还会使用能量不等式方法来分析, 以求得到更准确的稳定性条件.



# 半隐式格式 Saul'ev 算法

我们前面看到, 显式格式虽然计算简单, 但是往往稳定性条件较为苛刻. 而隐式格式虽然稳定性好, 但是需要求解方程组, 计算量稍大.

1957 年 Saul'ev 提出了一种半隐式格式. 希望能结合显式和隐式格式的优点. 近年来尤其是在并行计算方面该算法有广泛应用.

我们先看一下该算法的基本思想:

$$\begin{aligned} [u_t]_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \mathcal{O}(\tau^2), \\ [u_{xx}]_j^n &= \frac{1}{h} [u_x|_{j+\frac{1}{2}}^n - u_x|_{j-\frac{1}{2}}^n] + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

由微分中值定理  $u_x|_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - u_x|_{j-\frac{1}{2}}^n = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta} = \mathcal{O}(\tau), 0 \leq \theta \leq 1.$

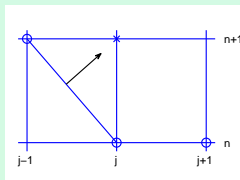




# 半隐式格式 Saul'ev 算法

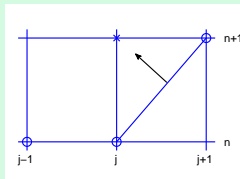
这样由上面三个式子 (并利用方程  $u_t = au_{xx}$ ):

$$\frac{1}{\tau}(u_j^{n+1} - u_j^n) = \frac{a}{h}[u_x|_{j+\frac{1}{2}}^n - u_x|_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}] + \mathcal{O}(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h}).$$



再用中心差商离散空间一阶偏导数得到

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + a\lambda \left( u_{j+1}^n - u_j^n - u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} \right) \Rightarrow \\ (4.24) \quad u_j^{n+1} &= \frac{1-a\lambda}{1+a\lambda} u_j^n + \frac{a\lambda}{1+a\lambda} \left( u_{j+1}^n + u_{j-1}^{n+1} \right) \end{aligned}$$



类似地, 如果将  $u_x|_{j+\frac{1}{2}}^n$  替换成  $u_x|_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}|_{j+\frac{1}{2}}^{n+\theta}$ :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + a\lambda \left( u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} - u_j^n + u_{j-1}^n \right) \Rightarrow \\ (4.25) \quad u_j^{n+1} &= \frac{1-a\lambda}{1+a\lambda} u_j^n + \frac{a\lambda}{1+a\lambda} \left( u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^n \right) \end{aligned}$$



## 半隐式格式 Saul'ev 算法

显然, 上面 (4.24)–(4.25) 式的精度为  $\mathcal{O}(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h})$ , 我们需要  $\frac{\tau}{h} \rightarrow 0$  才能有相容性. 对于一般取  $\tau \sim h^2$ , 此时该格式为一阶格式. 精度上看要差于之前介绍的格式, 且它还是一个隐式格式.

但是我们来看一下其求解边值问题的情形:

当  $u_0^{n+1}$  已知时, (4.24) 式可以显式计算:

$$u_0^{n+1} \rightarrow u_1^{n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow u_J^{n+1}.$$

当  $u_J^{n+1}$  已知时, (4.25) 式可以显式计算:

$$u_J^{n+1} \rightarrow u_{J-1}^{n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow u_0^{n+1}.$$

因此我们一般对奇数层  $n = 2k + 1$ , 使用 (4.24) 式计算; 对于偶数层  $n = 2k$ , 使用 (4.25) 式计算. 此算法称为 Saul'ev 算法.



## 半隐式格式 Saul'ev 算法

我们再来看一下 Saul'ev 算法的稳定性: (仍用 Fourier 分析法)

设  $u_j^n = U^n e^{ij\xi h}$  代入 (4.24) 式, 得

$$G_1(\xi, \tau) = \frac{1 - a\lambda + a\lambda \cos \xi h + ia\lambda \sin \xi h}{1 + a\lambda - a\lambda \cos \xi h + ia\lambda \sin \xi h}$$

类似地, 代入 (4.25) 可得

$$G_2(\xi, \tau) = \frac{1 - a\lambda + a\lambda \cos \xi h - ia\lambda \sin \xi h}{1 + a\lambda - a\lambda \cos \xi h - ia\lambda \sin \xi h}$$

这样, 交替计算的增长因子即为它们相乘:

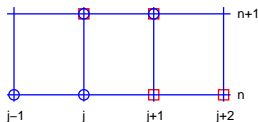
$$G(\xi, \tau) = G_1 \cdot G_2 = \frac{[1 - a\lambda(1 - \cos \xi h)]^2 + [a\lambda \sin \xi h]^2}{[1 + a\lambda(1 - \cos \xi h)]^2 + [a\lambda \sin \xi h]^2}$$

因  $a > 0, \lambda > 0$ , 显然  $0 \leq G(\xi, \tau) \leq 1$ . 即 Saul'ev 算法无条件稳定.



# 半隐式格式 Saul'ev 算法

所以可以看到, Saul'ev 算法性质类似于 Du Fort-Frankel 格式. 虽然精度不如 Du Fort-Frankel 及跳点格式, 但是易于并行计算:



1983 年 Evan 提出以下 GE 算法: 对 “○” 用 (4.25) 式, 对 “□” 用 (4.24) 式, 有

$$\begin{cases} (1 + \alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} = (1 - \alpha)u_j^n + \alpha u_{j-1}^n \\ (1 + \alpha)u_{j+1}^{n+1} - \alpha u_j^{n+1} = (1 - \alpha)u_{j+1}^n + \alpha u_{j+2}^n \end{cases}$$

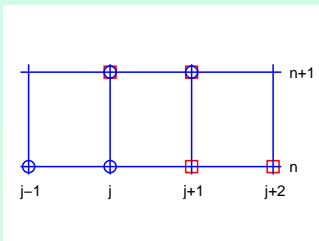
解上述线性方程组得 (将  $n + 1$  层的变量看成未知数)

(4.26)

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = \frac{1}{1 + 2\alpha} [\alpha(1 + \alpha)u_{j-1}^n + (1 - \alpha^2)u_j^n + \alpha(1 - \alpha)u_{j+1}^n + \alpha^2 u_{j+2}^n] \\ u_{j+1}^{n+1} = \frac{1}{1 + 2\alpha} [\alpha^2 u_{j-1}^n + \alpha(1 - \alpha)u_j^n + (1 - \alpha^2)u_{j+1}^n + \alpha(1 + \alpha)u_{j+2}^n] \end{cases}$$



# 半隐式格式 Saul'ev 算法



这样只要两两分组, 便可以由 (4.26) 式独立地显式求解, 极易并行处理. 例如,

将  $\{u_0^n, u_1^n, u_2^n, u_3^n\}$  打包送到一个 CPU, 便可计算  $\{u_1^{n+1}, u_2^{n+1}\}$ .

将  $\{u_2^n, u_3^n, u_4^n, u_5^n\}$  打包送到一个 CPU, 便可计算  $\{u_3^{n+1}, u_4^{n+1}\}$ .

.....

将  $\{u_{j-3}^n, \dots, u_j^n\}$  打包送到一个 CPU, 便可计算  $\{u_{j-2}^{n+1}, u_{j-1}^{n+1}\}$ .

而边界值  $u_0^{n+1}, u_J^{n+1}$  可以由边界条件得到. 这样便可以并行推进!



# 目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
  - 常系数扩散方程初值问题
  - 扩散方程初边值问题
  - 变系数扩散方程
  - 对流扩散方程
  - 高维问题
  - 非线性抛物问题



# Taylor 展开方法

本节考虑将上一节的方法推广到变系数扩散问题.

$$(4.27) \quad \begin{cases} u_t - a(x)u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

设  $a(x) \geq a_0 > 0$ , 并先假设  $a(x)$  充分光滑. 由

$$\frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2} = [u_{xx}]_j^n + \mathcal{O}(h^2) \stackrel{\text{利用方程}}{=} \left[ \frac{1}{a} u_t \right]_j^n + \mathcal{O}(h^2).$$

再用  $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}$  近似  $[u_t]_j^n$  有:

$$(4.28) \quad \frac{1}{a_j} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j^n = 0.$$

此公式精度即为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ .



# Taylor 展开方法

类似地也可以在  $(x_j, t_{n+1})$  展开, 得到隐式格式:

$$(4.29) \quad \frac{1}{a_j} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j^{n+1} = 0.$$

此公式精度也为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ . 当然也可以考虑加权隐式格式

$$(4.30) \quad \frac{1}{a_j} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{\delta_x^2}{h^2} \left\{ \theta u_j^{n+1} + (1 - \theta) u_j^n \right\} = 0.$$

$\theta \neq \frac{1}{2}$  时精度仍是  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ ,  $\theta = \frac{1}{2}$  时为二阶精度.

另外如果用冻结系数法可以得到其稳定性条件为

当  $\theta \geq \frac{1}{2}$  时, 有  $|G| \leq 1$ , 无条件稳定;

当  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  时, 若  $\max_j a_j \lambda \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$ , 有  $|G| \leq 1$ .





# Taylor 展开方法

对于高阶（高于两阶）精度格式的推广我们必须小心，需要考虑到  $a(x)$  的变化，以防止精度丧失.

例如我们考虑如下空间四阶的格式，由 Taylor 展开有

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j &= \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_j + \mathcal{O}(h^4) \\
 (\text{由方程(4.27)}) &= \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_j + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right]_j + \mathcal{O}(h^4) \\
 &= \left[ \frac{1}{a} u_t \right]_j + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{1}{h^2} \delta_x^2 \left( \frac{1}{a} u_t \right) + \mathcal{O}(h^2) \right]_j + \mathcal{O}(h^4) \\
 &= \left[ \frac{1}{a} u_t \right]_j + \frac{1}{12} \left[ \delta_x^2 \left( \frac{1}{a} u_t \right) \right]_j + \mathcal{O}(h^4)
 \end{aligned}$$



# Taylor 展开方法

$$\begin{aligned}\text{即 } \frac{\delta_x^2 u_j}{h^2} &= \left[ \frac{1}{a} u_t \right]_j + \frac{1}{12} \left[ \left( \frac{1}{a} u_t \right)_{j+1} - 2 \left( \frac{1}{a} u_t \right)_j + \left( \frac{1}{a} u_t \right)_{j-1} \right] + \mathcal{O}(h^4) \\ &= \frac{5}{6} \left[ \frac{1}{a} u_t \right]_j + \frac{1}{12} \left[ \left( \frac{1}{a} u_t \right)_{j+1} + \left( \frac{1}{a} u_t \right)_{j-1} \right] + \mathcal{O}(h^4)\end{aligned}$$

这样在  $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})$  处建立公式, 即

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{5}{6} \left[ \frac{1}{a} u_t \right]_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} \left[ \left( \frac{1}{a} u_t \right)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \left( \frac{1}{a} u_t \right)_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right] + \mathcal{O}(h^4) \Rightarrow \\ (4.31) \quad \frac{\delta_x^2 (u_j^{n+1} + u_j^n)}{2h^2} &= \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{12a_{j+1}\tau} + \frac{5}{6} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{a_j\tau} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{12a_{j-1}\tau}\end{aligned}$$

如果  $a \in C^2(\mathbb{R})$ , 有上述格式精度为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^4)$ . 如果不注意到  $a(x)$  的变化则得不到空间四阶精度. 我们也可以用有限体积法来推导格式.



## 有限体积法 (积分 + 插值)

与双曲问题情形一样, 我们也可以考虑在微元上积分后, 再利用数值积分公式 (即插值) 来得到差分格式. 这对于不规则网格/间断系数情形尤其有效.

考虑如下变系数方程

$$(4.32) \quad u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \text{设 } a(x) \geq a_0 > 0.$$

引入中间变量 (通量函数)  $w(x, t) = a(x)u_x(x, t)$ , 这样 (4.32) 变成

$$(4.33) \quad u_t - w_x = 0.$$

将区域均匀剖分  $x_j = jh$ ,  $t_n = n\tau$ , 并令  $x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$ . 在微元

$$D_j^n = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}, \\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \end{array} \right. \right\} \text{ 上积分 (4.33) 式得}$$



# 有限体积法 (积分 + 插值)

(4.34)

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)] dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [w(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - w(x_{j-\frac{1}{2}}, t)] dt$$

然后再用数值积分公式, 例如前面用中点, 后面用“加权梯形”公式

$$(4.35) \quad h[u_j^{n+1} - u_j^n] = \tau \left[ \theta(w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}) + (1 - \theta)(w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n) \right]$$

其中  $\theta \in [0, 1]$ . 再由  $w$  之定义

$$u_x(x, t) = \frac{1}{a(x)} w(x, t)$$

在  $[x_{j-1}, x_j]$  上积分 ( $w$  作为通量函数应该连续)

$$u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{a(x)} w(x, t) dx \approx w_{j-\frac{1}{2}}(t) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{dx}{a(x)}$$



# 有限体积法 (积分 + 插值)

记  $a(x)$  在  $[x_{j-1}, x_j]$  上的调和平均值为

$$(4.36) \quad \bar{a}_j = \frac{h}{\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{dx}{a(x)}}$$

$$(4.37) \quad \text{得} \quad \frac{u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t)}{h} = \frac{1}{\bar{a}_j} w(x_{j-\frac{1}{2}}, t).$$

即  $w(x_{j-\frac{1}{2}}, t) = \frac{\bar{a}_j}{h} \Delta_-^x u(x_j, t) \equiv \frac{\bar{a}_j}{h} [u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t)]$ . 代入(4.35)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left\{ \theta \Delta_+^x w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + (1 - \theta) \Delta_+^x w_{j-\frac{1}{2}}^n \right\}$$



# 有限体积法 (积分 + 插值)

即最终我们得到格式

$$(4.38) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left\{ \theta \Delta_+^x (\bar{a}_j \Delta_-^x u_j^{n+1}) + (1 - \theta) \Delta_+^x (\bar{a}_j \Delta_-^x u_j^n) \right\}$$

注意这里  $\bar{a}_j$  由 (4.36) 式定义,  $\Delta_+^x v_j = v_{j+1} - v_j$ ,  $\Delta_-^x v_j = v_j - v_{j-1}$ .

显然  $\theta = 0$  时 (4.38) 为显式格式;  $\theta \neq 0$  时为隐式格式.

$\theta \neq \frac{1}{2}$  时格式精度为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ ;

$\theta = \frac{1}{2}$  时为 Crank-Nicolson 格式, 精度为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ .

当然对于 (4.34) 式采用其他数值积分公式可以得到其他形式的格式. 例如采用 Simpson 公式可以得到四阶格式, 当然推导也会更为复杂.



# 变系数问题差分格式的稳定性分析

一般而言, 对于变系数问题应该用能量不等式等方法来分析其稳定性. 不过工程师依然喜欢用“冻结系数法”结合 Fourier 分析方法来分析. 即先将系数看成常数, 然后应用 Fourier 分析方法得到稳定性条件, 最后再还原成变系数情形得到近似稳定性条件.

举例来看, 例如对于  $\theta = 0$  情形的 (古典显式) 格式 (4.38),

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda \{ \bar{a}_{j+1}(u_{j+1}^n - u_j^n) - \bar{a}_j(u_j^n - u_{j-1}^n) \}, \quad \text{其中 } \lambda = \frac{\tau}{h^2}.$$

如果把  $\bar{a}_j$  看成常数, 由前面常系数情形分析知稳定性条件为  $a\lambda \leq \frac{1}{2}$ , 因此可得变系数情形的稳定性条件为

$$\max_j \bar{a}_j \lambda \leq \frac{1}{2}.$$



# 变系数问题差分格式的稳定性分析

对于 (4.38) 式的一般情形, 当  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  时, 如果使用冻结系数法, 可以得到增长因子为

$$G(\xi, \tau) = \frac{1 - 4a\lambda(1 - \theta) \sin^2 \frac{\xi h}{2}}{1 + 4a\lambda\theta \sin^2 \frac{\xi h}{2}}.$$

$$|G| \leq 1 \implies \text{稳定性条件为 } \max_j \bar{a}_j \lambda \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}.$$

当  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$  时, 该格式无条件稳定.





# 变系数问题差分格式的稳定性分析

对于前面空间四阶精度的格式 (4.31), 若假设  $a_j$  为常数有

$$(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) + 10(u_j^{n+1} - u_j^n) + (u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n) = 6a\lambda\delta_x^2 (u_j^{n+1} + u_j^n)$$

由 Fourier 分析, 设  $u_j^n = U^n e^{ij\xi h}$  代入上式

$$\begin{aligned} \Rightarrow U^{n+1} \left[ 10 + 2 \cos \xi h + 24a\lambda \sin^2 \frac{\xi h}{2} \right] \\ = U^n \left[ 10 + 2 \cos \xi h - 24a\lambda \sin^2 \frac{\xi h}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{由 } a > 0 \Rightarrow -1 \leq G(\xi, \tau) \equiv \frac{10 + 2 \cos \xi h - 24a\lambda \sin^2 \frac{\xi h}{2}}{10 + 2 \cos \xi h + 24a\lambda \sin^2 \frac{\xi h}{2}} \leq 1.$$

即该隐式格式 (4.31) 无条件稳定。



# 变系数问题差分格式的稳定性分析

当然, 一般来说, 对于变系数问题我们应该使用诸如“**能量不等式方法**”来分析稳定性.

例如, 对于方程 (4.32):  $u_t = (a(x)u_x)_x$ , 假设初值条件为  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ ; 边界条件为  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .

显然, 将方程 (4.32) 乘以  $u(x, t)$  并在  $[0, 1]$  上积分可得

$$\int_0^1 u \cdot u_t dx = \int_0^1 (au_x)_x \cdot u dx = - \int_0^1 a(u_x)^2 dx \leq 0.$$

即如果令  $E(t) = \int_0^1 \frac{u^2}{2} dx$ , 有  $\frac{dE}{dt} \leq 0$ . 即说明

$$E(t) \leq E(0) = \int_0^1 \frac{u_0^2}{2} dx < +\infty.$$



# 变系数问题差分格式的稳定性分析

对于加权隐式格式 (4.38), 设  $h = \frac{1}{J}$ ,  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$  定义离散  $l^2$  范数为

$$(4.39) \quad E_h^n \equiv \|u^n\|_h^2 = h \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n)^2.$$

类似于连续情形做能量估计的办法, 将  $h(u_j^{n+1} + u_j^n)$  乘以 (4.38) 式, 并对  $j$  求和得

$$(4.40) \quad \begin{aligned} & \|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 \\ &= \lambda h \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+1} + u_j^n) \left[ \theta \Delta_+^x (\bar{a}_j \Delta_-^x u_j^{n+1}) + (1 - \theta) \Delta_+^x (\bar{a}_j \Delta_-^x u_j^n) \right] \end{aligned}$$



# 变系数问题差分格式的稳定性分析

类似于连续情形的分部积分, 我们有以下引理

## 引理 4.2

若  $u_0 = u_J = 0$ , 则有  $\sum_{j=1}^{J-1} u_j \Delta_+ v_j = - \sum_{j=1}^J v_j \Delta_- v_j$ .

◁ 由  $u_{j+1}v_{j+1} - u_jv_j = u_{j+1}v_{j+1} - u_jv_{j+1} + u_jv_{j+1} - u_jv_j$   
 $= v_{j+1}\Delta_- u_{j+1} + u_j\Delta_+ v_j$ . 将上式对  $j$  求和, 可得

$$\sum_{j=0}^{J-1} (u_{j+1}v_{j+1} - u_jv_j) = \sum_{j=0}^{J-1} (v_{j+1}\Delta_- u_{j+1} + u_j\Delta_+ v_j)$$

$$(\text{因为 } u_0 = u_J = 0) \implies \sum_{j=1}^{J-1} u_j \Delta_+ v_j = - \sum_{j=1}^J v_j \Delta_- v_j. \quad \triangleright$$



# 变系数问题差分格式的稳定性分析

利用上述引理, 由 (4.40) 式得

$$\begin{aligned}
 (4.41) \quad & \|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 \\
 &= -\lambda h \sum_{j=1}^J \Delta_-^x (u_j^{n+1} + u_j^n) \left[ \theta (\bar{a}_j \Delta_-^x u_j^{n+1}) + (1 - \theta) (\bar{a}_j \Delta_-^x u_j^n) \right] \\
 &= -\lambda h \sum_{j=1}^J \left[ \theta \bar{a}_j (\Delta_-^x u_j^{n+1})^2 + (1 - \theta) \bar{a}_j (\Delta_-^x u_j^n)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \bar{a}_j (\Delta_-^x u_j^{n+1}) (\Delta_-^x u_j^n) \right]
 \end{aligned}$$

参照连续情形结论  $E(t) \leq E_0$ , 我们也能证明离散稳定性估计

$$(4.42) \quad E_h^n = \|u^n\|_h^2 \leq C \|u^0\|_h^2 = C \cdot E_h^0.$$

这里  $C$  不依赖于  $n, h$ . 一般来说不会有  $E_h^n \leq E_h^0$ .



# 变系数问题差分格式的稳定性分析

我们需要引入辅助变量来证明(4.42). 定义

$$W^n = \|u^n\|_h^2 - \alpha\lambda h \sum_{j=1}^J \bar{a}_j (\Delta_- u_j^n)^2, \text{ 其中 } \alpha \text{ 待定.}$$

我们先证明 (适当选取  $\alpha$  之后) 有  $W^{n+1} \leq W^n$ :

$$W^{n+1} - W^n = \|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 - \alpha\lambda h \sum_{j=1}^J \bar{a}_j [(\Delta_- u_j^{n+1})^2 - (\Delta_- u_j^n)^2]$$

$$\begin{aligned} \text{(由(4.41)式)} &= -\lambda h \sum_{j=1}^J \left[ (\theta + \alpha) \bar{a}_j (\Delta_-^x u_j^{n+1})^2 + \bar{a}_j (\Delta_-^x u_j^{n+1}) (\Delta_-^x u_j^n) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \theta - \alpha) \bar{a}_j (\Delta_-^x u_j^n)^2 \right] \end{aligned}$$

如果取  $\alpha + \theta = \frac{1}{2}$ , 即  $\alpha = \frac{1}{2} - \theta$ , 就有  $1 - \theta - \alpha = \frac{1}{2}$ . 上式可以配方.



# 变系数问题差分格式的稳定性分析

此时  $W^n = \|u^n\|_h^2 - (\frac{1}{2} - \theta)\lambda h \sum_{j=1}^J \bar{a}_j (\Delta_- u_j^n)^2$ , 这样有

$$W^{n+1} - W^n = -\frac{\lambda h}{2} \sum_{j=1}^J \bar{a}_j (\Delta_- u_j^n + \Delta_- u_j^{n+1})^2 \leq 0.$$

I) 若  $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ , 有  $\alpha = \frac{1}{2} - \theta > 0$ , 这样  $W^n \leq \|u^n\|_h^2 = E_h^n$ .

设  $a \in L^\infty(0, 1)$ , 即  $\|a\|_\infty = A < +\infty$ . 再利用

$$(\Delta_- u_j^n)^2 = (u_j^n - u_{j-1}^n)^2 \leq 2[(u_j^n)^2 + (u_{j-1}^n)^2], \text{ 有}$$

$$W^n \geq E_h^n - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \lambda h (\max_j \bar{a}_j) \sum_{j=1}^J (\Delta_- u_j^n)^2$$



# 变系数问题差分格式的稳定性分析

$$\begin{aligned}\Rightarrow W^n &\geq E_h^n - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \lambda h (\max_j \bar{a}_j) 2 \sum_{j=1}^J [(u_j^n)^2 + (u_{j-1}^n)^2] \\ &\geq E_h^n \left[ 1 - 2(1 - 2\theta) \lambda h (\max_j \bar{a}_j) \right]\end{aligned}$$

如果  $C \equiv 1 - 2(1 - 2\theta) \lambda \max_j \bar{a}_j > 0$ , 即  $\lambda \max_j \bar{a}_j < \frac{1}{2(1-2\theta)}$ , 那么利用上一页的两个不等式  $W^{n+1} \leq W^n$  及  $W^n \leq E_h^n$  有

$$E_h^n \leq \frac{1}{C} W^n \leq \frac{1}{C} W^{n-1} \leq \dots \leq \frac{1}{C} W^0 \leq \frac{1}{C} E^0.$$

即保证了稳定性.





# 变系数问题差分格式的稳定性分析

II) 若  $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ , 有  $\alpha = \frac{1}{2} - \theta \leq 0$ , 这样  $W^n \geq \|u^n\|_h^2 = E_h^n$ .

$$\begin{aligned} W^n &= E_h^n + \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \lambda h \sum_{j=1}^J \bar{a}_j (\Delta_- u_j^n)^2 \\ &\leq E_h^n + 2 \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \lambda h \sum_{j=1}^J \max_j \bar{a}_j [(u_j^n)^2 + (u_{j-1}^n)^2] \\ &\leq E_h^n \left[ 1 + 4 \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \lambda h \|a\|_\infty \right] \equiv \tilde{C} E_h^n \end{aligned}$$

因而  $E_h^n \leq W^n \leq W^{n-1} \leq \dots \leq W^0 \leq \tilde{C} E_h^0$ . 即无条件稳定.

由此可见与冻结系数法结论基本一致.



# 间断系数问题

实际问题中我们经常会遇到  $a(x)$  或者方程中其他系数有间断情形, 如复合材料、多相流问题等:

$$(4.43) \quad \begin{cases} u_t - (au_x)_x + bu = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases}$$

我们假设  $a(x), b(x)$  在  $x = \xi$  处有间断 (当然也可以考虑有多处间断情况). 一般我们假设为第一类间断点, 即左右极限均存在. 那么在  $x = \xi$  处应该有

$$(4.44) \quad \begin{cases} u(\xi^-, t) = u(\xi^+, t) & \text{---即函数 } u \text{ 连续} \\ a(\xi^-)u_x(\xi^-, t) = a(\xi^+)u_x(\xi^+, t) & \text{---即通量 } au_x \text{ 连续} \end{cases}$$

注意, 间断系数情形不能用 Taylor 展开法, 否则会不收敛.



## 间断系数问题

不妨假设  $x = \xi$  与某个网格线  $x = x_j$  重合. 我们使用有限体积法来推导. 仍引入变量  $w = au_x$ , 有

$$(4.45) \quad u_t - w_x + bu = 0.$$

将上面方程在微元  $D_j^n = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [t_n, t_{n+1}]$  上积分, 有

$$(4.46) \quad \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)] dx = \iint_{D_j^n} (w_x - bu) dx dt.$$

考虑到在  $x = \xi = x_j$  处的间断性, 需小心处理:

$$\begin{aligned} \iint_{D_j^n} w_x dx dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_j} w_x dx + \int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}} w_x dx \right] dt \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} [w(x_j^-, t) - w(x_{j-\frac{1}{2}}, t)] dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [w(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - w(x_j^-, t)] dt \end{aligned}$$



# 间断系数问题

由连接条件  $w(x_j^+, t) = w(x_j^-, t)$  可知

$$\iint_{D_j^n} w_x dx dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [w(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - w(x_{j-\frac{1}{2}}, t)] dt.$$

$$\text{而 } \iint_{D_j^n} b u dx dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_j} b u dx + \int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}} b u dx \right] dt$$

$$\text{(一点积分公式)} \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{h}{2} [b(x_j^-) + b(x_j^+)] u(x_j, t) dt$$

$$\text{(梯形积分公式)} \approx \frac{\tau h}{4} [b(x_j^-) + b(x_j^+)] (u_j^n + u_j^{n+1})$$

类似于前面的推导, 例如对(4.46)再用同样的数值积分公式.



## 间断系数问题

再由  $w$  之连续性

$$u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{a(x)} w(x, t) dx \approx w_{j-\frac{1}{2}}(t) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{dx}{a(x)}$$

同样记  $a(x)$  在  $[x_{j-1}, x_j]$  上的调和平均值为  $\bar{a}_j = \frac{h}{\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{dx}{a(x)}}$ . 即有  $w(x_{j-\frac{1}{2}}, t)$

$\frac{\bar{a}_j}{h} \Delta_-^x u(x_j, t) \equiv \frac{\bar{a}_j}{h} [u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t)]$ . 最后得到

$$(4.47) \quad \begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \frac{1}{h^2} \left[ \theta \Delta_+^x (\bar{a}_j \Delta_-^x u_j^{n+1}) + (1 - \theta) \Delta_+^x (\bar{a}_j \Delta_-^x u_j^n) \right] \\ &- \frac{1}{4} [b(x_j^-) + b(x_j^+)] (u_j^n + u_j^{n+1}) \end{aligned}$$

即相当于在间断  $x = x_j$  处用  $b(x)$  的左右极限平均值来代替  $b(x)$  得到.  
若  $b \equiv 0$  则和 (4.38) 式一样.



## 隐式格式求解对步长的限制

对于隐式格式, 其稳定性条件通常很宽松, 很多时候为无条件稳定. 但是在实际求解时, 为了能用追赶法求解或者为了保证原问题的某些性质, 这些无条件稳定的格式还有区别. 有些格式就往往还需要对步长加以某些限制.

例如用(4.38)式取  $\theta = \frac{1}{2}$  (即 Crank-Nicolson 格式) 求解,

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{a}_j \lambda}{2} u_{j-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\bar{a}_j + \bar{a}_{j+1}}{2} \lambda\right) u_j^{n+1} - \frac{\bar{a}_{j+1} \lambda}{2} u_{j+1}^{n+1} \\ &= \frac{\bar{a}_j \lambda}{2} u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{\bar{a}_j + \bar{a}_{j+1}}{2} \lambda\right) u_j^n + \frac{\bar{a}_{j+1} \lambda}{2} u_{j+1}^n \end{aligned}$$

如果我们令

$$A_j = -\frac{\bar{a}_j \lambda}{2} < 0, \quad B_j = 1 + \frac{\bar{a}_j + \bar{a}_{j+1}}{2} \lambda > 0, \quad C_j = -\frac{\bar{a}_{j+1} \lambda}{2} < 0.$$



## 隐式格式求解对步长的限制

我们有  $|B_1| > |C_1| > 0$ ,  $|B_{J-1}| > |A_{J-1}| > 0$ ,

且  $|B_j| \geq |A_j| + |C_j| > 0$ ,  $j = 2, \dots, J-2$ .

即可以用追赶法求解, 而且系数矩阵为所谓的  $M$ -矩阵, 即满足离散极值原理 (即, 对于齐次方程, 如果初边值条件均为非负, 那么离散解也非负  $u_j^n \geq 0$ ).

但是如果我们用空间四阶精度格式(4.31)来求解:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{12a_{j-1}} - \frac{\lambda}{2} \right) u_{j-1}^{n+1} + \left( \frac{5}{6a_j} + \lambda \right) u_j^{n+1} + \left( \frac{1}{12a_{j+1}} - \frac{\lambda}{2} \right) u_{j+1}^{n+1} \\ &= \left( \frac{1}{12a_{j-1}} + \frac{\lambda}{2} \right) u_{j-1}^n + \left( \frac{5}{6a_j} - \lambda \right) u_j^n + \left( \frac{1}{12a_{j+1}} + \frac{\lambda}{2} \right) u_{j+1}^n \end{aligned}$$

也令  $A_j = \frac{1}{12a_{j-1}} - \frac{\lambda}{2}$ ,  $B_j = \frac{5}{6a_j} + \lambda$ ,  $C_j = \frac{1}{12a_{j+1}} - \frac{\lambda}{2}$ .



# 隐式格式求解对步长的限制

如果需要用追赶法求解, 即  $|B_j| \geq |A_j| + |C_j|$ , 这很容易满足:

无论  $\frac{1}{12a_{j\pm 1}} - \frac{\lambda}{2}$  是正是负, 均容易实现主对角占优性质.

但是如果要想满足  $M$ -矩阵性质, 即  $B_j > 0$ ,  $A_j < 0$ ,  $C_j < 0$ , 则需要

$$a_j \lambda = a_j \frac{\tau}{h^2} > \frac{1}{6}, \quad j = 1, \dots, J-1.$$

即时间步长也不能过小.





# 目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
  - 常系数扩散方程初值问题
  - 扩散方程初边值问题
  - 变系数扩散方程
  - 对流扩散方程
  - 高维问题
  - 非线性抛物问题



# 常系数对流扩散问题

通常来说, 流体运动会既包含对流过程, 也包含扩散效应.

考虑一下常系数对流扩散方程初值问题:

$$(4.48) \quad \begin{cases} u_t + au_x = \nu u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

这里  $a, \nu$  为常数,  $\nu > 0$  称为流体粘性系数.

一般来说, 可以将前面用于对流方程和扩散方程的差分格式结合起来, 用来求解 (4.48). 但是考虑到对流扩散问题本身的特点, 尤其是对流占优情形  $|a| \gg \nu$  时须小心处理.



# 古典显式格式

用向前欧拉格式离散时间导数项, 用中心差商离散空间导数项, 就得到

$$(4.49) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2}$$

显然其截断误差为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ . 但是我们知道, 当  $\nu = 0$  时该方程退化为对流方程. 而对于对流方程, 中心差分格式是**不稳定的**! 下面我们来分析一下  $\nu \neq 0$  时的稳定性条件. 记  $\lambda = a\frac{\tau}{h}$ ,  $\mu = \nu\frac{\tau}{h^2}$ , 上面格式可写成:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \mu(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

用 Fourier 分析方法来分析其增长因子, 令:  $u_j^n = U^n e^{ij\xi h}$  代入上式



# 古典显式格式

得到  $G(\tau, \xi) = 1 - 2\mu(1 - \cos \xi h) - i\lambda \sin \xi h$ . 计算其模有

$$\begin{aligned}|G(\tau, \xi)|^2 &= [1 - 2\mu(1 - \cos \xi h)]^2 + \lambda^2 \sin^2 \xi h \\&= 1 - 4\mu(1 - \cos \xi h) + 4\mu^2(1 - \cos \xi h)^2 + \lambda^2(1 - \cos^2 \xi h) \\&= 1 - (1 - \cos \xi h)[4\mu - 4\mu^2(1 - \cos \xi h) - \lambda^2(1 + \cos \xi h)]\end{aligned}$$

因为  $1 - \cos \xi h \geq 0$ , 所以  $|G| \leq 1$  等价于

$$4\mu - 4\mu^2(1 - \cos \xi h) - \lambda^2(1 + \cos \xi h) \geq 0.$$

改写一下写成  $4\mu - 2\lambda^2 + (2\lambda^2 - 8\mu^2) \sin^2 \frac{\xi h}{2} \geq 0$ .



# 古典显式格式

由于  $\sin^2 \frac{\xi h}{2} \in [0, 1]$ , 令  $A = 4\mu - 2\lambda^2$ ,  $B = 2\lambda^2 - 8\mu^2$ , 即需要

$$A + Bx \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

这样条件即为  $A \geq 0$ , 且  $A + B \geq 0$ . 也就是

$$4\mu - 2\lambda^2 \geq 0, \quad 4\mu - 2\lambda^2 + 2\lambda^2 - 8\mu^2 \geq 0.$$

即  $\lambda^2 \leq 2\mu$ , 及  $2\mu \leq 1$ . 考虑到  $\lambda$  与  $\mu$  的定义即

$$a^2 \frac{\tau^2}{h^2} \leq 2\nu \frac{\tau}{h^2}, \quad 2\nu \frac{\tau}{h^2} \leq 1.$$

化简:  $\tau \leq \frac{2\nu}{a^2}$  (对流效应带来的限制) 及  $\frac{\nu\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$  (扩散问题的限制). 由此也看出  $\nu = 0$  时需  $\tau = 0$ , 即该格式不稳定. 要去除此限制需要引入修正项.



# 修正中心显式格式

我们先来看一下中心显式差分格式 (4.49) 的误差. 由方程可得

$$\begin{aligned} u_{tt} &= (u_t)_t = (\nu u_{xx} - au_x)_t = \nu(u_t)_{xx} - a(u_t)_x \\ &= \nu(\nu u_{xx} - au_x)_{xx} - a(\nu u_{xx} - au_x)_x \end{aligned}$$

$$(4.50) \quad u_{tt} = \nu^2 u_{xxxx} - 2a\nu u_{xxx} + a^2 u_{xx}$$

$$(4.51) \quad u_{ttt} = \nu^3 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - 3a\nu^2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + 3a^2 \nu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

对 (4.49) 进行 Taylor 展开得到

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{\Delta_0^x u_j^n}{2h} - \nu \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2} &= [u_t]_j^n + \frac{\tau}{2} [u_{tt}]_j^n + \frac{\tau^2}{6} [u_{ttt}]_j^n + \mathcal{O}(\tau^3) \\ &+ a[u_x]_j^n + \frac{ah^2}{6} [u_{xxx}]_j^n + \mathcal{O}(h^4) - \nu[u_{xx}]_j^n - \frac{\nu h^2}{12} [u_{xxxx}]_j^n + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$



# 修正中心显式格式

(将 (4.50)–(4.51) 代入上式得到)

$$\begin{aligned}
 &= [u_t + au_x - \nu u_{xx}]_j^n + \frac{\tau}{2} [\nu^2 u_{xxxx} - 2a\nu u_{xxx} + a^2 u_{xx}]_j^n \\
 &+ \frac{\tau^2}{6} \left[ \nu^3 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - 3a\nu^2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + 3a^2 \nu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_j^n \\
 &+ \frac{ah^2}{6} [u_{xxx}]_j^n - \frac{\nu h^2}{12} [u_{xxxx}]_j^n + \mathcal{O}(\tau^3 + h^4) \\
 &= [u_t + au_x - (\nu - \frac{a^2 \tau}{2}) u_{xx}]_j^n + \text{“关于 } x \text{ 的更高阶偏导数项”}
 \end{aligned}$$

略去上面关于  $x$  的高阶偏导数项, 说明中心显示差分格式相当于在求解

$$(4.52) \quad u_t + au_x = (\nu - \frac{a^2 \tau}{2}) u_{xx}.$$



## 修正中心显式格式

因为  $\frac{a^2\tau}{2} > 0$ , 所以说明中心显示差分格式相当于减弱了扩散效应. 当然  $\tau \rightarrow 0$  会收敛到 (4.48). 但是一般  $\tau > 0$ , 所以减弱了扩散效应且要保证适定性的话, 自然需要  $\nu - \frac{a^2\tau}{2} > 0$ , 即  $\tau < \frac{2\nu}{a^2}$ . 为此我们可以修正一下, 即用以下格式来计算:

$$(4.53) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \left( \nu + \frac{a^2\tau}{2} \right) \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2}$$

这相当于把原问题的  $\nu \rightarrow \bar{\nu} = \nu + \frac{a^2\tau}{2}$ . 这样(4.53)的稳定条件为

$$(4.54) \quad \tau \leq \frac{2\bar{\nu}}{a^2}, \quad \frac{\bar{\nu}\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$





## 修正中心显式格式

我们来看 (4.54) 中的第一式:

$$\frac{2\bar{\nu}}{a^2} = \frac{2(\nu + \frac{a^2\tau}{2})}{a^2} = \frac{2\nu}{a^2} + \tau \geq \tau \quad \text{自然成立}$$

因此格式 (4.53) 的稳定条件其实只是  $\frac{\bar{\nu}\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ , 即

$$\nu \frac{\tau}{h^2} + \frac{1}{2} \left( a \frac{\tau}{h} \right)^2 \leq \frac{1}{2}.$$

当  $\nu = 0$  时, 格式 (4.53) 就是解对流方程的 L-W 格式, 所以此时其稳定条件也与 L-W 相同. 当  $a = 0$  时, (4.53) 就是求解扩散问题古典显式格式.

注意此修正中心显式差分格式相当于在原古典中心显式差分格式右端加了一个  $\mathcal{O}(\tau)$  的项, 所以其精度仍为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ .



# 迎风格式

为了改善古典显式格式 (4.49) 的稳定性, 也可以考虑 (对于对流项使用) 迎风格式, 无妨设  $a > 0$ , 我们可以使用

$$(4.55) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \nu \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2}.$$

显然此格式的精度为  $\mathcal{O}(\tau + h)$ . 为了讨论其稳定性, 我们也可以改写成 (4.49) 式的形式:

$$(4.56) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \left( \nu + \frac{ah}{2} \right) \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2}$$

这相当于  $\nu \rightarrow \tilde{\nu} = \nu + \frac{ah}{2}$ . 这样 (4.55) 的稳定条件为

$$(4.57) \quad \tau \leq \frac{2\tilde{\nu}}{a^2}, \quad \frac{\tilde{\nu}\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$



## 迎风格式

把上面(4.57)中的第一式改写成  $\tilde{\nu} \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{2\tilde{\nu}^2}{a^2 h^2}$ . 再由上面第二式  $\frac{\tilde{\nu}\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$  得

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2\tilde{\nu}^2}{a^2 h^2} &= \frac{2(\nu + \frac{ah}{2})^2}{a^2 h^2} = \frac{2(\nu^2 + \nu ah + a^2 h^2/4)}{a^2 h^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2(\nu^2 + \nu ah)}{a^2 h^2} \geq \frac{1}{2} \geq \tilde{\nu} \frac{\tau}{h^2}. \end{aligned}$$

即从(4.57)中第二式可以推出第一式, 因此迎风格式的稳定性条件其实就是第二式

$$\frac{1}{2} \geq \tilde{\nu} \frac{\tau}{h^2} = \left(\nu + \frac{ah}{2}\right) \frac{\tau}{h^2}.$$

当  $\nu = 0$  就退化为对流问题的迎风格式.



## Samarskii 格式

为了改善上面迎风格式的精度, Samarskii 对之进行了修正以达到空间二阶精度. 仍不妨设  $a > 0$ , 由上面 (4.56) 式右端看到, 迎风格式相当于加大了粘性. 这样我们可以先对方程 (4.48) 进行一个扰动 (减少一点粘性):

$$(4.58) \quad u_t + au_x = \frac{\nu}{1+R} u_{xx}.$$

其中  $R = \frac{ah}{2\nu} > 0$ . 这样当  $h \rightarrow 0$  时, (4.58) 会收敛到原方程 (4.48).

然后再对 (4.58) 式用迎风格式:

$$(4.59) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \frac{\nu}{1+R} \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2}.$$

此公式称为 Samarskii 格式.



# Samarskii 格式

将 (4.59) 式也改写成 (4.49) 式的形式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \left( \frac{\nu}{1+R} + \frac{ah}{2} \right) \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2}$$

注意  $\hat{\nu} = \frac{\nu}{1+R} + \frac{ah}{2} = \nu - \frac{R\nu}{1+R} + R\nu = \nu + \frac{\nu R^2}{1+R}$ . 而当  $h \rightarrow 0$  时  $\frac{\nu R^2}{1+R} = \frac{a^2 h^2}{4\nu + 2ah} = \mathcal{O}(h^2)$ . 故 Samarskii 格式的截断误差为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ . 其稳定性条件应该仅为

$$(4.60) \quad \hat{\nu} \frac{\tau}{h^2} \equiv \left( \frac{\nu}{1+R} + \frac{ah}{2} \right) \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

因为由 (4.60) 式可以自然得到  $(\tau \leq 2\hat{\nu}/a^2)$

$$\frac{2\left(\frac{\nu}{1+R} + \frac{ah}{2}\right)^2}{a^2 h^2} = \frac{1}{2} + \frac{2\left(\frac{\nu}{1+R}\right)^2 + 2ah\frac{\nu}{1+R}}{a^2 h^2} \geq \frac{1}{2} \geq \left( \frac{\nu}{1+R} + \frac{ah}{2} \right) \frac{\tau}{h^2}$$



# 指数型差分格式

我们可以将上述三种格式统一起来.

先看定常的对流扩散方程:

$$(4.61) \quad d + a \frac{du}{dx} = \nu \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

解其特征方程  $\nu \lambda^2 - a \lambda = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{a}{\nu}$ .

也就是说齐次方程  $-\nu u'' + au' = 0$  的通解为  $\beta_1 e^{\frac{a}{\nu}x} + \beta_2$ .

而(4.61)的一个特解为  $u(x) = -\frac{d}{a}x$ . 这样 (4.61) 的通解为

$$(4.62) \quad u(x) = \beta_1 e^{\frac{a}{\nu}x} + \beta_2 - \frac{d}{a}x.$$

这里  $\beta_1, \beta_2$  为常数. 我们将利用此表达式构造格式.



# 指数型差分格式

空间进行剖分后, 设  $x_j = jh$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  假设知道了  $u(x_{j-1})$  与  $u(x_{j+1})$ , 即:

$$u(x_{j-1}) = \beta_1 e^{\frac{a}{\nu}(j-1)h} + \beta_2 - \frac{d}{a}(j-1)h,$$

$$u(x_{j+1}) = \beta_1 e^{\frac{a}{\nu}(j+1)h} + \beta_2 - \frac{d}{a}(j+1)h.$$

这样可以解出  $\beta_1, \beta_2$ :

$$\beta_1 = \frac{u_{j+1} - u_{j-1} + \frac{2dh}{a}}{e^{\frac{a}{\nu}(j+1)h} - e^{\frac{a}{\nu}(j-1)h}}, \quad \beta_2 = u_{j-1} - \frac{u_{j+1} - u_{j-1} + \frac{2dh}{a}}{e^{2\frac{a}{\nu}h} - 1} - \frac{d}{a}(j-1)h.$$

这样可以得到

$$u_j = u(x_j) = \frac{u_{j+1} - u_{j-1} + \frac{2dh}{a}}{e^{\frac{a}{\nu}h} - e^{-\frac{a}{\nu}h}} + u_{j-1} - \frac{u_{j+1} - u_{j-1} + \frac{2dh}{a}}{e^{2\frac{a}{\nu}h} - 1} - \frac{d}{a}h$$



# 指数型差分格式

重新整理一下写成

$$\begin{aligned}
 u_j &= \frac{u_{j+1}(e^{\frac{ah}{\nu}} - 1) + u_{j-1}(e^{\frac{2ah}{\nu}} - e^{\frac{ah}{\nu}})}{e^{\frac{2ah}{\nu}} - 1} + \frac{dh}{a} \frac{2e^{\frac{ah}{\nu}} - 1 - e^{\frac{2ah}{\nu}}}{e^{\frac{2ah}{\nu}} - 1} \\
 &= \frac{u_{j+1} + u_{j-1}e^{\frac{ah}{\nu}}}{e^{\frac{ah}{\nu}} - 1} + \frac{dh}{a} \frac{1 - e^{\frac{ah}{\nu}}}{e^{\frac{ah}{\nu}} + 1}
 \end{aligned}$$

这样也可以写成

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{a}{h} \cdot \frac{(e^{\frac{ah}{\nu}} + 1)u_j - [u_{j+1} + u_{j-1}e^{\frac{ah}{\nu}}]}{1 - e^{\frac{ah}{\nu}}} \\
 &= \frac{a}{h} \cdot \frac{-\frac{1-e^{\frac{ah}{\nu}}}{2}(u_{j+1} - u_{j-1}) + \frac{e^{\frac{ah}{\nu}}+1}{2}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})}{1 - e^{\frac{ah}{\nu}}} \\
 &= -a \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \frac{ah}{2} \frac{1 + e^{\frac{ah}{\nu}}}{1 - e^{\frac{ah}{\nu}}} \frac{\delta_x^2 u_j}{h^2}
 \end{aligned}$$





# 指数型差分格式

我们再和 (4.61) 比较, 将  $d$  换回  $u_t$  的差分近似得

$$(4.63) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{ah}{2} \frac{e^{\frac{ah}{\nu}} + 1}{e^{\frac{ah}{\nu}} - 1} \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2}.$$

注意到  $\frac{e^{\frac{ah}{\nu}} + 1}{e^{\frac{ah}{\nu}} - 1} = \frac{e^{\frac{ah}{2\nu}} + e^{-\frac{ah}{2\nu}}}{e^{\frac{ah}{2\nu}} - e^{-\frac{ah}{2\nu}}} = \coth(\frac{ah}{2\nu})$ , 令  $\sigma = \frac{ah}{2\nu} \coth(\frac{ah}{2\nu})$ , 上式就可以写成

$$(4.64) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \sigma \nu \frac{\delta_x^2 u_j^n}{h^2}.$$

这里  $\sigma$  称为指数拟合因子. 上式也称为 (4.48) 的指数型差分格式.



# 指数型差分格式

我们来看一下其误差及稳定性. 先在  $x = 0$  附近展开  $x \coth x$ :

$$x \coth x = 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + \mathcal{O}(x^6).$$

这表明  $h \rightarrow 0$  时,  $\sigma = \frac{ah}{2\nu} \coth(\frac{ah}{2\nu}) = 1 + \frac{1}{3}(\frac{ah}{2\nu})^2 + \mathcal{O}(h^4)$ . 也就是说该格式相当于在原中心显式差分格式右端加了一个  $\mathcal{O}(h^2)$  阶的扰动. 因此易知 (4.64) 式的截断误差为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ .

由前面稳定性分析结果知格式 (4.64) 的稳定条件为

$$\tau \leq \frac{2\nu\sigma}{a^2}, \quad \nu\sigma \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

由上面第二式  $\nu\sigma \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \implies \tau \leq \frac{h^2}{2\nu\sigma} = \frac{2\nu\sigma}{a^2} \cdot \frac{a^2 h^2}{4\nu^2 \sigma^2} = \frac{2\nu\sigma}{a^2} \cdot \left(\frac{ah}{2\nu\sigma}\right)^2$

由于  $\left(\frac{ah}{2\nu\sigma}\right)^2 = \left(\frac{1}{\coth(\frac{ah}{2\nu})}\right)^2 \leq 1$ , 因此自然有第一式成立  $\tau \leq \frac{2\nu\sigma}{a^2}$ .



# 指数型差分格式

这说明 (4.64) 式的稳定性条件就是  $\nu\sigma\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ .

考虑对流占优情形  $\nu \ll |a|$ ,  $\coth(\frac{ah}{2\nu}) \approx 1$ , 此时有  $\sigma \approx \frac{ah}{2\nu}$ . 上面稳定性条件即为  $a\frac{\tau}{h} \leq 1$ —对流方程的稳定性条件.

我们再来看该格式与前面几个格式之间的联系:

- ① 当  $h \ll 1$  时, 若取  $e^{\frac{ah}{\nu}} \approx 1 + \frac{ah}{\nu}$ , 即

$$\nu\sigma \approx \frac{ah}{2} \cdot \frac{2 + \frac{ah}{\nu}}{ah/\nu} = \nu + \frac{ah}{2} \quad \text{---此即迎风格式}$$

- ② 若取  $e^{\frac{ah}{\nu}} \approx 1 + \frac{ah}{\nu} + \frac{1}{2}(\frac{ah}{\nu})^2$ , 即

$$\nu\sigma \approx \frac{ah}{2} \cdot \frac{2 + \frac{ah}{\nu} + \frac{1}{2}(\frac{ah}{\nu})^2}{\frac{ah}{\nu} + \frac{1}{2}(\frac{ah}{\nu})^2} = \frac{\nu}{1 + R} + \frac{ah}{2} \quad \text{---此即 Samarskii}$$



# 隐式格式

要想得到稳定性更好的格式, 可以采用隐式格式. 例如对 (4.48) 可以采用 Crank-Nicolson 型的隐式格式:

$$(4.65) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a}{2} \frac{\Delta_0^x(u_j^n + u_j^{n+1})}{2h} = \frac{\nu}{2h^2} \delta_x^2(u_j^n + u_j^{n+1})$$

显然其精度为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ . 再看其稳定性, 易得其增长因子为

$$G(\xi, \tau) = \frac{1 - \mu(1 - \cos \xi h) - i \frac{\lambda}{2} \sin \xi h}{1 + \mu(1 - \cos \xi h) + i \frac{\lambda}{2} \sin \xi h}, \quad \text{其中 } \lambda = \frac{a\tau}{h}, \quad \mu = \nu \frac{\tau}{h^2}.$$

由于  $\mu > 0$ ,  $1 - \cos \xi h \geq 0$ , 因此

$$|G|^2 = \frac{[1 - \mu(1 - \cos \xi h)]^2 + [\frac{\lambda}{2} \sin \xi h]^2}{[1 + \mu(1 - \cos \xi h)]^2 + [\frac{\lambda}{2} \sin \xi h]^2} \leq 1.$$

即 Crank-Nicolson 格式无条件稳定.



# 隐式格式

我们也可以将 (4.65) 改写成

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{4}\right) u_{j-1}^{n+1} + (1 + \mu) u_j^{n+1} + \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{2}\right) u_{j+1}^{n+1} \\ &= \left(\frac{\mu}{2} + \frac{\lambda}{4}\right) u_{j-1}^n + (1 - \mu) u_j^n + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{4}\right) u_{j+1}^n \end{aligned}$$

如果想要用追赶法求解, 需要对角占优, 即

$$1 + \mu \geq \left|\frac{\mu}{2} + \frac{\lambda}{4}\right| + \left|\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{2}\right|$$

如果  $\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{2} \geq 0$ , 即  $\frac{a\tau}{4h} \geq \frac{\nu\tau}{2h^2} \iff h \geq \frac{2\nu}{a}$ .

此时要想  $1 + \mu \geq \frac{\lambda}{2}$ , 即  $a\frac{\tau}{h} \leq 2 + \frac{2\nu\tau}{h^2} \iff (ah - 2\nu)\tau \leq 2h^2$ .

如果  $\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{2} < 0$ , 即  $h < \frac{2\nu}{a}$ , 此时自然有  $1 + \mu \geq \frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{2} + \frac{\lambda}{4} = \mu$ . 这说明要用追赶法求解三对角方程组, 仍然对步长有限制.



# 隐式格式

我们也可以构造指数型的隐式格式:

$$(4.66) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a}{2} \frac{\Delta_0^x(u_j^n + u_j^{n+1})}{2h} = \frac{\sigma\nu}{2} \frac{\delta_x^2(u_j^n + u_j^{n+1})}{h^2}.$$

注意  $\sigma = \frac{ah}{2\nu} \coth(\frac{ah}{2\nu})$ . 显然这也是二阶精度. 另外参照上面 C-N 格式的稳定性分析知上面格式也是无条件稳定的. 同样改写成 (这里  $\lambda = \frac{a\tau}{h}$ ,  $\mu = \sigma\nu \frac{\tau}{h^2}$ )

$$\begin{aligned} & (-\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{4})u_{j-1}^{n+1} + (1 + \mu)u_j^{n+1} + (\frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{2})u_{j+1}^{n+1} \\ &= (\frac{\mu}{2} + \frac{\lambda}{4})u_{j-1}^n + (1 - \mu)u_j^n + (\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{4})u_{j+1}^n \end{aligned}$$

由于  $\frac{2\sigma\nu}{a} = h \coth(\frac{ah}{2\nu}) \geq h$ , 即自然有  $\frac{\lambda}{4} \leq \frac{\mu}{2}$ , 因而此格式自然满足离散极值原理, 且可用追赶法求解.



# 目录 I

- 1 常微分方程数值解
- 2 偏微分方程及其差分方法基础知识
- 3 双曲型问题的差分方法
- 4 抛物问题的差分方法
  - 常系数扩散方程初值问题
  - 扩散方程初边值问题
  - 变系数扩散方程
  - 对流扩散方程
  - 高维问题
  - 非线性抛物问题



## 二维问题

我们考虑下面一个二维初边值问题:

$$(4.67) \quad \begin{cases} u_t = a\Delta u, & (x, y) \in [0, 1]^2, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x, y), & (x, y) \in [0, 1]^2 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, & t > 0. \end{cases}$$

设区域离散为  $x_j = jh$ ,  $y_k = kh$ ,  $t_n = n\tau$ . 记

$$\delta_x^2 u_{jk} = u_{j+1,k} - 2u_{jk} + u_{j-1,k}, \quad \delta_y^2 u_{jk} = u_{j,k+1} - 2u_{jk} + u_{j,k-1}$$

跟之前高维双曲问题一样, 我们会看到高维抛物问题显式格式的稳定性条件更苛刻了.





# 古典显式格式

例如可以将一维情形的古典显式格式推广到高维：

$$(4.68) \quad \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = \frac{a}{h^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{jk}^n.$$

显然上面格式的截断误差为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ . 记  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ , 再看其稳定性: 将上式改写成  $u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n + a\lambda(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{jk}^n$ .

令  $u_{jk}^n = U^n e^{i(j\xi_1 h + k\xi_2 h)}$  代入上式, 有

$$U^{n+1} = U^n \{1 - 2a\lambda(1 - \cos \xi_1 h) - 2a\lambda(1 - \cos \xi_2 h)\}$$

即增长因子为  $G(\xi, \tau) = 1 - 4a\lambda \left( \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2} \right)$ .

要想  $|G| \leq 1$ , 即需要  $a\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{4}$  才行.

所以显然古典显式格式在高维情形不够好.



# 古典隐式格式

也可以将一维情形的古典隐式格式推广到高维：

$$(4.69) \quad \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{jk}^{n+1}.$$

显然上面格式的截断误差也为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ . 再看其稳定性：

将上式改写成  $u_{jk}^{n+1} - a\lambda(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n$ .

令  $u_{jk}^n = U^n e^{i(j\xi_1 h + k\xi_2 h)}$  代入上式, 有

$$\{1 + 2a\lambda(1 - \cos \xi_1 h) + 2a\lambda(1 - \cos \xi_2 h)\} U^{n+1} = U^n$$

$$\text{即增长因子为 } G(\xi, \tau) = \frac{1}{1 + 4a\lambda \left( \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2} \right)}.$$

自然总有  $|G| \leq 1$ , 即无条件稳定.

但是上面线性方程组带宽  $\geq 5$ , 无法用追赶法快速求解.



## Crank-Nicolson 格式

要想提高精度,也可以考虑 Crank-Nicolson 格式:

$$(4.70) \quad \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = \frac{a}{2h^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)(u_{jk}^{n+1} + u_{jk}^n).$$

显然 C-N 格式的截断误差为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ . 再看其稳定性:

将上式改写成  $(1 - \frac{a\lambda}{2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)) u_{jk}^{n+1} = (1 + \frac{a\lambda}{2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)) u_{jk}^n$ .

令  $u_{jk}^n = U^n e^{i(j\xi_1 h + k\xi_2 h)}$  代入上式, 得到增长因子为

$$G(\xi, \tau) = \frac{1 - 2a\lambda \left( \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2} \right)}{1 + 2a\lambda \left( \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2} \right)}.$$

仍然总有  $|G| \leq 1$ , 即无条件稳定.

但是方程组带宽也  $\geq 5$ , 无法用追赶法快速求解.

因此一般都要考虑用所谓的交替方向隐式格式.



## 交替方向隐式格式 (ADI)

基本想法跟之前处理高维双曲问题类似: “半个时间步长” $x$ -方向隐式, “半个时间步长” $y$ -方向隐式.

$$(4.71) \quad \begin{cases} \frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - u_{jk}^n}{\tau/2} = \frac{a}{h^2} \left( \delta_x^2 u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{jk}^n \right) \\ \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \frac{a}{h^2} \left( \delta_x^2 u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{jk}^{n+1} \right) \end{cases}$$

这是 Peaceman-Rachford 1955 年首先引入的, 因此也称为 P-R 格式.

显然 (4.71) 式由两步组成, 每一步都是三对角形式方程组, 可以用追赶法求解.

下面来看其精度和稳定性. 令  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ , 先消去  $u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}$ .



# 交替方向隐式格式 (ADI)

将上面 ADI 格式改写成

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} &= u_{jk}^n + \frac{a\lambda}{2} \left( \delta_x^2 u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{jk}^n \right), \\ u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{a\lambda}{2} \left( \delta_x^2 u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{jk}^{n+1} \right). \end{aligned}$$

将上面两式分别相加、相减得到

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+1} + u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} &= u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + u_{jk}^n + \frac{a\lambda}{2} \left[ 2\delta_x^2 u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 (u_{jk}^n + u_{jk}^{n+1}) \right], \\ u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} &= u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - u_{jk}^n + \frac{a\lambda}{2} \delta_y^2 (u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n) \\ \implies u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (u_{jk}^{n+1} + u_{jk}^n) - \frac{a\lambda}{4} \delta_y^2 (u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n) \end{aligned}$$

再代入上面第一式

$$u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n + \frac{a\lambda}{2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) (u_{jk}^n + u_{jk}^{n+1}) - \frac{a^2\lambda^2}{4} \delta_x^2 \delta_y^2 (u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n)$$



# 交替方向隐式格式 (ADI)

将上式整理一下写成

$$(4.72) \quad \left(1 + \frac{a^2 \lambda^2}{4} \delta_x^2 \delta_y^2\right) \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = \frac{a}{2h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) (u_{jk}^n + u_{jk}^{n+1})$$

与 Crank-Nicolson 格式(4.70)相比, 只差了下面这一项

$$\frac{a^2 \lambda^2}{4} \delta_x^2 \delta_y^2 \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = \frac{a^2 \tau^2}{4} \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial y^2 \partial t} \bigg|_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\tau^2 h^2 + \tau^4 + h^4),$$

因此 (4.72) 式格式截断误差也为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ .

再看其稳定性. 将 (4.72) 式改写成

$$(4.73) \quad \left(1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_x^2\right) \left(1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_y^2\right) u_{jk}^{n+1} = \left(1 + \frac{a\lambda}{2} \delta_x^2\right) \left(1 + \frac{a\lambda}{2} \delta_y^2\right) u_{jk}^n$$

令  $u_{jk}^n = U^n e^{i(j\xi_1 h + k\xi_2 h)}$  代入上式得到增长因子为



## 交替方向隐式格式 (ADI)

$$G(\xi, \tau) = \frac{(1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2})(1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2})}{(1 + 2a\lambda \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2})(1 + 2a\lambda \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2})}$$

由于扩散系数  $a > 0$ , 因此显然有  $|G| \leq 1$ , 即二维情形 P-R 格式无条件稳定. 后面我们会发现 P-R 格式直接推广到更高维性质不好.

我们从 (4.73) 式出发还可以推导出其他形式的 ADI 格式:

比如令  $u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = (1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2) u_{jk}^{n+1}$ , 可以得到以下 “D'yakonov 格式”:

$$(4.74) \quad \begin{cases} \left(1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2\right) u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2\right) \left(1 + \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2\right) u_{jk}^n \\ \left(1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2\right) u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

显然此格式与 P-R 格式等价, 也为无条件稳定的二阶格式.



## 交替方向隐式格式 (ADI)

也可以将 (4.73) 式改写成

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2\right) \left(1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2\right) (u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n) = a\lambda (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{jk}^n \\ \Rightarrow & \left(1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2\right) \left(1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2\right) \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{jk}^n \end{aligned}$$

再类似地分成两步来做

$$(4.75) \quad \begin{cases} \left(1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2\right) \frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - u_{jk}^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{jk}^n \\ \left(1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2\right) \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - u_{jk}^n}{\tau} \end{cases}$$

此格式也称为 Douglas 格式. 这需要存贮  $u_{jk}^n, u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}, u_{jk}^{n+1}$ , 存贮量大一些. 但是可以推广到高维.





# 预测校正格式

该方法思想即先计算出  $u^{n+\frac{1}{2}}$  的近似值, 再用显式格式计算  $u^{n+1}$ :

(4.76)

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - u_{jk}^n}{\tau/2} = \frac{a}{h^2} \delta_x^2 \tilde{u}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{u}_{jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \frac{a}{h^2} \delta_y^2 u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \implies \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}$$

消去  $\tilde{u}_{jk}^{n+\frac{1}{2}}$  有:  $\left(1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_x^2\right) \left(1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_y^2\right) u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = u_{jk}^n$ .

再代入第二步 (校正步) (利用等距网格时  $\delta_x^2 \delta_y^2 = \delta_y^2 \delta_x^2$ ):

$$\left(1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_x^2\right) \left(1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_y^2\right) \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{jk}^n.$$

即此格式与 Douglas 格式等价. 当然还可构造其他预测校正格式.



# 高维跳点格式

我们也可以将一维的跳点格式推广到高维问题:

$$\text{记 } L_h u_{jk}^n = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{jk}^n.$$

$$\text{这样古典显式格式可写成} \quad u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n + \tau L_h u_{jk}^n,$$

$$\text{古典隐式格式可写成} \quad u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n + \tau L_h u_{jk}^{n+1},$$

同样定义节点的奇偶性, 令

$$\theta_{jk}^n = \begin{cases} 1, & n + j + k \text{ 为奇数} \\ 0, & n + j + k \text{ 为偶数} \end{cases}$$



# 高维跳点格式

这样跳点格式可以写成

$$(4.77) \quad u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n + \theta_{jk}^n \tau L_h u_{jk}^n + (1 - \theta_{jk}^n) \tau L_h u_{jk}^{n+1}.$$

即只需先计算  $n+1+j+k$  为偶数的点 ( $\theta_{jk}^n = 1$  即为显式计算)

然后再计算  $n+1+j+k$  为奇数的点 ( $\theta_{jk}^n = 0$  仍可显式计算)

其精度与稳定性分析与一维时类似：即条件相容、无条件稳定。

跳点格式的计算与存贮都比ADI更简洁方便, 只是精度上要差一些.



## 局部一维格式 (算子分裂法)

更一般地应该用算子分裂法. 首先将原问题写成两步形式

$$(4.78) \quad \begin{cases} u_t^* = au_{xx}^*, & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ u^*(t_n) = u(t_n) \end{cases} \quad \begin{cases} u_t^{**} = au_{yy}^{**}, & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ u^{**}(t_n) = u^*(t_{n+1}) \end{cases}$$

用  $u^{**}(t_{n+1}) \rightarrow u(t_{n+1})$ . 再用二阶格式来离散上述两个子问题:

$$\begin{cases} \frac{u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - u_{jk}^n}{\tau} = \frac{a}{2h^2} \delta_x^2 (u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + u_{jk}^n) \\ \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{a}{2h^2} \delta_y^2 (u_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + u_{jk}^{n+1}) \end{cases}$$

消去  $u_{jk}^{n+\frac{1}{2}}$  (注意等距网格时  $\delta_x^2 \delta_y^2 = \delta_y^2 \delta_x^2$ ):

$$\left(1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_x^2\right) \left(1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_y^2\right) u_{jk}^{n+1} = \left(1 + \frac{a\lambda}{2} \delta_x^2\right) \left(1 + \frac{a\lambda}{2} \delta_y^2\right) u_{jk}^n$$

这与 P-R 格式等价, 但是此想法可以推广到高维情形.



## 三维问题

某些二维情形具有好性质的格式在三维和更高维情形并不再具有那些好性质.

考虑三维扩散方程

$$(4.79) \quad u_t = a(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

因为初边值条件处理可以与前面类似, 故这里只讨论方程的离散.

如果我们将古典格式直接推广过来, 比如古典显式

$$u_{jkl}^{n+1} = u_{jkl}^n + a\lambda (\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) u_{jkl}^n.$$

显然其精度为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ . 且用 Fourier 分析易得增长因子为

$$G(\tau, \xi) = 1 - 4a\lambda \left( \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_3 h}{2} \right).$$

稳定条件即为  $a\lambda \leq \frac{1}{6}$ , 更苛刻了. 一般而言  $n$  维需要  $a\lambda \leq \frac{1}{2n}$ .



# 经典隐式格式

我们也可以将古典隐式格式推广过来,

$$u_{jkl}^{n+1} = u_{jkl}^n + a\lambda (\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) u_{jkl}^{n+1}.$$

其精度仍然为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ . 且用 Fourier 分析易得增长因子为

$$G(\tau, \xi) = \frac{1}{1 + 4a\lambda \left( \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_3 h}{2} \right)}.$$

可以无条件稳定. 不过系数矩阵带宽  $\geq 7$ , 无法用追赶法求解.

如果考虑 Crank-Nicolson 格式,

$$u_{jkl}^{n+1} = u_{jkl}^n + \frac{a\lambda}{2} (\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) (u_{jkl}^{n+1} + u_{jkl}^n).$$

其精度为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ . 且用 Fourier 分析易得增长因子为

$$G(\tau, \xi) = \frac{1 - 2a\lambda \left( \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_3 h}{2} \right)}{1 + 2a\lambda \left( \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_3 h}{2} \right)}.$$

可以无条件稳定. 但系数矩阵也带宽  $\geq 7$ , 无法用追赶法求解.



## P-R (ADI) 格式

如果我们直接把 P-R (即交替方向隐式) 格式用到三维问题: 即 “1/3 个时间步长”  $x$ -方向隐式, “1/3 个时间步长”  $y$ -方向隐式, “1/3 个时间步长”  $z$ -方向隐式:

$$(4.80) \quad \begin{cases} \frac{u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} - u_{jkl}^n}{\tau/3} = \frac{a}{h^2} \left( \delta_x^2 u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} + \delta_y^2 u_{jkl}^n + \delta_z^2 u_{jkl}^n \right) \\ \frac{u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} - u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}}}{\tau/3} = \frac{a}{h^2} \left( \delta_x^2 u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} + \delta_y^2 u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} + \delta_z^2 u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} \right) \\ \frac{u_{jkl}^{n+1} - u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}}}{\tau/3} = \frac{a}{h^2} \left( \delta_x^2 u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} + \delta_y^2 u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} + \delta_z^2 u_{jkl}^{n+1} \right) \end{cases}$$



# P-R (ADI) 格式

也可整理成

$$\begin{cases} (1 - \frac{a\lambda}{3}\delta_x^2)u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} = (1 + \frac{a\lambda}{3}\delta_y^2 + \frac{a\lambda}{3}\delta_z^2)u_{jkl}^n \\ (1 - \frac{a\lambda}{3}\delta_y^2)u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} = (1 + \frac{a\lambda}{3}\delta_x^2 + \frac{a\lambda}{3}\delta_z^2)u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} \\ (1 - \frac{a\lambda}{3}\delta_z^2)u_{jkl}^{n+1} = (1 + \frac{a\lambda}{3}\delta_x^2 + \frac{a\lambda}{3}\delta_y^2)u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} \end{cases}$$

首先看其精度不再是二阶的, 只是  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ . 另外分析其稳定性, 可以看成三步增长因子之积形式:

$$G = \frac{[1 - \frac{4a\lambda}{3}(\sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2})][1 - \frac{4a\lambda}{3}(\sin^2 \frac{\xi_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_3 h}{2})][1 - \frac{4a\lambda}{3}(\sin^2 \frac{\xi_2 h}{2} + \sin^2 \frac{\xi_3 h}{2})]}{[1 + \frac{4a\lambda}{3}\sin^2 \frac{\xi_1 h}{2}][1 + \frac{4a\lambda}{3}\sin^2 \frac{\xi_2 h}{2}][1 + \frac{4a\lambda}{3}\sin^2 \frac{\xi_3 h}{2}]}$$

显然不是无条件稳定的. 因此性质不好.





## 基于 C-N 格式改造的局部一维格式

我们也可参考之前的办法, 将 C-N 格式重组后构造新的格式. 将 C-N 格式改写成 (增加一些二阶误差项)

$$(4.81) \quad (1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2)(1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2)(1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_z^2)u_{jkl}^{n+1} = (1 + \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2)(1 + \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2)(1 + \frac{a\lambda}{2}\delta_z^2)u_{jkl}^n$$

上式仍然是二阶精度格式, 而且可以容易得到其增长因子为

$$G = \frac{[1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2}][1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2}][1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{\xi_3 h}{2}]}{[1 + 2a\lambda \sin^2 \frac{\xi_1 h}{2}][1 + 2a\lambda \sin^2 \frac{\xi_2 h}{2}][1 + 2a\lambda \sin^2 \frac{\xi_3 h}{2}]}$$

可以看到  $|G| \leq 1$  自然成立. 即无条件稳定. 从 (4.81) 式可得

$$\begin{cases} (1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2)u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} = (1 + \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2)(1 + \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2)(1 + \frac{a\lambda}{2}\delta_z^2)u_{jkl}^n \\ (1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2)u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} = u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} \\ (1 - \frac{a\lambda}{2}\delta_z^2)u_{jkl}^{n+1} = u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} \end{cases}$$

显然此格式每次也仅需计算三对角方程组, 且无条件稳定.



## 基于 C-N 格式改造的局部一维格式

也可令  $\Delta u_{jkl} = u_{jkl}^{n+1} - u_{jkl}^n$ , 略去高阶小项  $\frac{a^3 \lambda^3}{4} \delta_x^2 \delta_y^2 \delta_z^2 u_{jkl}^n$ , 将 (4.81) 改写成

$$(1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_x^2)(1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_y^2)(1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_z^2) \Delta u = a\lambda(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) u_{jkl}^n$$

最后可以写成如下的 Douglas-Gunn 格式:

$$\begin{cases} (1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_x^2) \Delta u_{jkl}^* &= a\lambda(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) u_{jkl}^n \\ (1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_y^2) \Delta u_{jkl}^{**} &= \Delta u_{jkl}^* \\ (1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_z^2) \Delta u_{jkl} &= \Delta u_{jkl}^{**} \end{cases}$$

这当然也是无条件稳定的二阶格式. 不过同前面一样, 需要多一点存贮量.



# 算子分裂方法

我们可以用算子分裂思想更方便地构造格式. 先将原问题化为

$$\left. \begin{aligned} u_t^* &= au_{xx}^*, & u^*(t_n) &= u(t_n) \\ u_t^{**} &= au_{yy}^{**}, & u^{**}(t_n) &= u^*(t_{n+1}) \\ u_t^{***} &= au_{zz}^{**}, & u^{***}(t_n) &= u^{**}(t_{n+1}) \end{aligned} \right\} u^{***}(t_{n+1}) \rightarrow u(t_{n+1})$$

这样我们可以灵活使用各种格式来求解上面问题. 如果对上面每个子问题都使用 Crank-Nicolson 格式

$$(4.82) \quad \begin{cases} u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} = u_{jkl}^n + \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2 \left( u_{jkl}^n + u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} \right) \\ u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} = u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2 \left( u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} + u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} \right) \\ u_{jkl}^{n+1} = u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} + \frac{a\lambda}{2}\delta_z^2 \left( u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}} + u_{jkl}^{n+1} \right) \end{cases}$$

可以看到此格式与 (4.81) 等价.



# 目录 I

- ① 常微分方程数值解
- ② 偏微分方程及其差分方法基础知识
- ③ 双曲型问题的差分方法
- ④ 抛物问题的差分方法
  - 常系数扩散方程初值问题
  - 扩散方程初边值问题
  - 变系数扩散方程
  - 对流扩散方程
  - 高维问题
  - 非线性抛物问题



# 非线性抛物问题

随着科学技术的发展, 越来越多的问题需要用非线性模型来描述才能得到更符合实际情况的解. 例如各种辐射扩散问题、粘性流体运动、多相流、多孔介质中的流体问题、流固耦合问题等.

例如考虑如下一般形式的一维问题

$$(4.83) \quad \begin{cases} u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}), & 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u|_{x=0} = \alpha(t), \quad u|_{x=1} = \beta(t), & t > 0. \end{cases}$$

这里设  $\frac{\partial f}{\partial(u_{xx})} \geq a_0 > 0$  以保证为抛物问题.



# 古典显式、隐式格式的局限性

对于上面 (4.83) 式非线性问题, 如果采用古典显式格式求解, 虽然每一步计算简单, 但是我们知道稳定性条件与扩散系数有关, 而这种非线性问题的扩散系数会依赖于解的情况. 因此有时候对时间步长的约束过强. 这样实际计算量依然会很大.

如果使用古典隐式格式求解, 那么每一步又会需要求解大型非线性代数方程组. 尤其是高维情形更是计算量太大!

所以非线性问题我们需要研究一些好的线性化求解方法.



# Richtmyer 线性化方法

我们以下面一个简单形式的非线性抛物问题为例:

$$(4.84) \quad u_t = (u^5)_{xx}.$$

考虑求解上面问题的加权隐式格式: (其中  $0 \leq \theta \leq 1$ )

$$(4.85) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[ \theta \delta_x^2 (u^5)_j^{n+1} + (1 - \theta) \delta_x^2 (u^5)_j^n \right].$$

显然  $\theta > 0$  时需要求解非线性方程组. 为了避免这个计算量大且收敛性很复杂的问题, 我们需要对其做线性化! 做 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} (u^5)_j^{n+1} &= (u^5)_j^n + \tau \frac{\partial}{\partial t} (u^5)_j^n + \mathcal{O}(\tau^2) \\ &= (u^5)_j^n + 5\tau (u^4)_j^n (u_t)_j^n + \mathcal{O}(\tau^2) \\ &= (u^5)_j^n + 5(u^4)_j^n (u_j^{n+1} - u_j^n) + \mathcal{O}(\tau^2) \end{aligned}$$



# Richtmyer 线性化方法

然后再结合 (4.85) 式, 令  $w_j = u_j^{n+1} - u_j^n$ ,  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ , 有

$$w_j - \theta \lambda \delta_x^2 [(u^5)_j^{n+1} - (u^5)_j^n] = \lambda \delta_x^2 (u^5)_j^n$$

(线性化之后)  $\Rightarrow$

$$w_j - 5\theta \lambda [(u^4)_{j+1}^n w_{j+1} - 2(u^4)_j^n w_j + (u^4)_{j-1}^n w_{j-1}] = \lambda \delta_x^2 (u^5)_j^n$$

这样给定边界条件  $w_0 = u_0^{n+1} - u_0^n$  与  $w_J = u_J^{n+1} - u_J^n$  便可以通过求解线性方程组得到  $w_j$ , 最后可以得到  $u_j^{n+1} = u_j^n + w_j$ .

再看其稳定性: (粗略一点, 用冻结系数法)

将方程改写成  $u_t = (5u^4 u_x)_x$ . 先将扩散系数  $5u^4$  看成常数.





# Richtmyer 线性化方法

利用之前加权隐式格式的稳定性条件有:

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta < \frac{1}{2} \text{ 时, } & 5u^4\lambda \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}, \\ \theta \geq \frac{1}{2} \text{ 时, } & \text{无条件稳定} \end{aligned}$$

这样回到非线性问题情形, 即  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  时, 我们需要

$$5 \max_j (u_j^n)^4 \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}.$$

一般来说, 空间步长  $h$  事先给定, 计算过程中可以调整  $\tau$  的大小以满足上式.

当然  $\theta = \frac{1}{2}$  时是最佳的, 既是二阶精度的格式, 同时还是“无条件稳定”.



# 有限体积法

我们也可以借鉴双曲守恒律问题的有限体积法来构造非线性抛物问题的差分格式.

考虑以下散度形式的拟线性问题:

$$(4.86) \quad \begin{cases} u_t = (k(u)u_x)_x, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 1 \leq x \leq 1, \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

我们假设有相容性条件  $u_0(0) = u_0(1) = 0$ , 其中  $k(u) \geq k_0 > 0$  为扩散系数.

将原方程乘以  $u$  并在  $[0, 1]$  上积分有



# 有限体积法

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{u^2}{2} dx &= \int_0^1 (k(u)u_x)_x u dx = k(u)u_x u \Big|_0^1 - \int_0^1 k(u)u_x^2 dx \\ &= - \int_0^1 k(u)u_x^2 dx \leq 0\end{aligned}$$

令  $E(t) = \int_0^1 u^2(x, t) dx$ , 有  $\frac{dE}{dt}(t) \leq 0$ . 此即原问题的稳定性估计.

用有限体积法思想, 我们期望构造满足离散  $l^2$  范数稳定的格式.

令  $U_j = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, \cdot) dx$ , 将方程在  $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$  上积分可得

$$\begin{aligned}(4.87) \quad \partial_t U_j &= \frac{1}{h} [k(u_{j+\frac{1}{2}})(\partial_x u)_{j+\frac{1}{2}} - k(u_{j-\frac{1}{2}})(\partial_x u)_{j-\frac{1}{2}}] \\ (\text{用中心差商}) &= \frac{1}{h} [k_{j+\frac{1}{2}} \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - k_{j-\frac{1}{2}} \frac{u_j - u_{j-1}}{h}] + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$



# 有限体积法

利用  $U_0 = U_J = 0$  可以验证 (即上式乘以  $U_j$  并对  $j$  求和)

$$\frac{1}{2} \sum_j \partial_t U_j^2 = \sum_j \frac{U_j}{h^2} \left[ k_{j+\frac{1}{2}} \frac{U_{j+1} - U_j}{h} - k_{j-\frac{1}{2}} \frac{U_j - U_{j-1}}{h} \right]$$

$$(\text{做下标变换}) = -\frac{1}{h^2} \sum_j k_{j-\frac{1}{2}} (U_j - U_{j-1})^2 \leq 0.$$

这表明格式 (4.87) 保持了性质 (4.86), 能量不会增加.

如果时间上使用显式差分格式, 有:

$$(4.88) \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} [k_{j+\frac{1}{2}}^n (U_{j+1}^n - U_j^n) - k_{j-\frac{1}{2}}^n (U_j^n - U_{j-1}^n)].$$

这是一个时间一阶、空间二阶精度的格式.



# 有限体积法

考虑其稳定性 (用冻结系数法), 此显式格式的稳定性条件为

$$\max_j k(u)_{j+\frac{1}{2}}^n \cdot \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

这样当  $k(u) \gg 1$  时, 稳定性条件就比较苛刻了.

要想改善稳定性条件, 我们可以使用隐式格式:

$$(4.89) \text{ 全隐: } \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[ k_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} (U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) - k_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} (U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}) \right]$$

$$(4.90) \text{ 半隐: } \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[ k_{j+\frac{1}{2}}^n (U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) - k_{j-\frac{1}{2}}^n (U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}) \right]$$

两种形式精度均为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ . 但稳定性比 (4.88) 要好很多. 如果用冻结系数法可知这两种方法均为无条件稳定的.



# 有限体积法

如果使用 (4.89), 则需要迭代求解非线性方程组, 当然每步仍可以使用追赶法 (对  $s = 0, 1, \dots$ )

$$\frac{U_j^{n+1,s+1} - U_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[ k_{j+\frac{1}{2}}^{n+1,s} (U_{j+1}^{n+1,s+1} - U_j^{n+1,s+1}) - k_{j-\frac{1}{2}}^{n+1,s} (U_j^{n+1,s+1} - U_{j-1}^{n+1,s+1}) \right]$$

一般来说此式稳定性比(4.90)更好. 我们也可以用 C-N 型格式:

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = & \frac{1}{2h^2} \left[ k_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} (U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) - k_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} (U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}) \right. \\ & \left. + k_{j+\frac{1}{2}}^n (U_{j+1}^n - U_j^n) - k_{j-\frac{1}{2}}^n (U_j^n - U_{j-1}^n) \right] \end{aligned}$$

精度为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ , 无条件稳定.



## 三层格式

我们也可以考虑构造三层格式来求解. 仍以拟线性扩散问题(4.86)为例, 例如可以考虑如下显式格式:

$$(4.91) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} = \frac{1}{h^2} \delta_x (k_j^n \delta_x u_j^n).$$

此格式为二阶精度. 但是注意到如果  $k(u) \equiv k_0$  为常数时, 该式为 Richardson 格式, 不稳定. 因此我们需要修改. 例如考虑用  $\frac{1}{3}(u_j^{n+1} + u_j^n + u_j^{n-1})$  代替  $u_j^n$  (令  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ ): 先将 (4.91) 改写成

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = 2\lambda [k_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1}^n - u_j^n) - k_{j-\frac{1}{2}}(u_j^n - u_{j-1}^n)]$$

再用  $\frac{1}{3}(u_j^{n+1} + u_j^n + u_j^{n-1})$  代替上面右式中的  $u_j^n$ :



## 三层格式

即得到

$$(4.92) \quad u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = \frac{2\lambda}{3} [k_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} + u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}) \\ - k_{j-\frac{1}{2}}(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} + u_j^n - u_{j-1}^n + u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1})]$$

这是部分隐式格式, 精度为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ . 因为是部分隐式, 可以用追赶法求解线性方程组, 而不用迭代求解非线性方程组.

我们可以看到其系数矩阵自然是 M-矩阵, 满足离散极值原理.





# 预估---校正方法

我们也可以考虑用半隐式方法做预估, 然后用全隐格式校正.

以一个对流扩散拟线性问题为例:

$$\begin{cases} A(x, t, u)u_t + B(x, t, u)u_x = C(x, t, u)u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u|_{x=0} = \alpha(t), \quad u|_{x=1} = \beta(t), & t > 0. \end{cases}$$

这里设  $A(x, t, u) \geq A_0 > 0$ ,  $C(x, t, u) \geq C_0 > 0$ .

如果我们直接使用 Crank-Nicolson 格式离散

$$\begin{aligned} A\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2}\right) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + B\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2}\right) \frac{\Delta_x^0}{4h} [u_j^n + u_j^{n+1}] \\ = \frac{1}{2h^2} C\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2}\right) \delta_x^2 [u_j^n + u_j^{n+1}] \end{aligned}$$

我们看到上面是非线性方程组, 需要迭代求解.



# 预估---校正方法

为了避免这个, 我们考虑使用预估---校正格式:

预估 (计算  $u_j^{n+\frac{1}{2}}$ ):

$$A\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, u_j^n\right) \frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n}{\tau/2} + B\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, u_j^n\right) \frac{\Delta_x^0 u_j^n}{2h} = \frac{C\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, u_j^n\right)}{h^2} \delta_x^2 u_j^{n+\frac{1}{2}}$$

这里仅需求解线性方程组.

校正 (计算  $u_j^{n+1}$ ):

$$\begin{aligned} A\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, u_j^{n+\frac{1}{2}}\right) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + B\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, u_j^{n+\frac{1}{2}}\right) \frac{\Delta_x^0(u_j^n + u_j^{n+1})}{4h} \\ = \frac{C\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, u_j^{n+\frac{1}{2}}\right)}{2h^2} \delta_x^2(u_j^n + u_j^{n+1}) \end{aligned}$$

仍然仅需求解线性方程组, 都可以用追赶法求解.



# 预估---校正方法

虽然上面预估步是一阶精度格式, 但是由于校正步是二阶精度的, 容易得到上面预估--校正格式最终的精度为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ .

当然非线性问题的稳定性分析更为复杂, 一般来说隐式格式具有较好稳定性. 若用冻结系数法可以分析得其为无条件稳定格式.

当然我们也可以把上面的预估---校正格式换成其他任何形式, 且只要预估步的精度最多比校正步低一阶时, 校正后的精度就与校正格式精度相同 (如上式所示).



# 预估---校正方法

把上述预估校正格式用于带黏性的 Burgers' 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

可得如下格式

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n}{\tau/2} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{\nu}{h^2} \delta_x^2 u_j^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + u_j^{n+\frac{1}{2}} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4h} = \frac{\nu}{2h^2} \delta_x^2 (u_j^{n+1} + u_j^n) \end{cases}$$

这样用两次追赶法便可以得到二阶精度的近似解.



# 算子分裂算法

我们也可以把算子分裂思想用于非线性问题求解, 这样很容易构造高效格式.

考虑一下非线性问题:

$$u_t = \partial_x(k(u)u_x) + f(x, t, u, u_x) \equiv A(u) + B(u).$$

用以下分裂算法求解 (从  $t_n$  到  $t_{n+1}$ ):

$$(A) \begin{cases} \tilde{u}_t = \partial_x(k(\tilde{u})\tilde{u}_x), \\ \tilde{u}(t_n) = u(t_n). \end{cases} \quad (B) \begin{cases} \bar{u}_t = f(x, t, \bar{u}, \bar{u}_x), \\ \bar{u}(t_n) = \tilde{u}(t_{n+1}). \end{cases}$$

当然也可以用 Strang's Splitting:  $u(t_{n+1}) = \mathcal{L}_A(\frac{\tau}{2})\mathcal{L}_B(\tau)\mathcal{L}_A(\frac{\tau}{2})u(t_n)$  以得到二阶近似.



# 算子分裂算法

然后我们可以根据需要, 对上面每一步采用合适的算法离散.

例如对于第一步 (扩散问题), 可以采用显式格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[ k_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - k_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \right].$$

也可以采用隐式格式, 如全隐的 Crank-Nicolson 格式:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{2h^2} & \left[ k_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - k_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \right. \\ & \left. + k_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) - k_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} (u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \right]. \end{aligned}$$

可如下迭代求解上面非线性方程组 (每次追赶法解线性方程组):

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1,s+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{2h^2} & \left[ k_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - k_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \right. \\ & \left. + k_{j+\frac{1}{2}}^{n+1,s} (u_{j+1}^{n+1,s+1} - u_j^{n+1,s+1}) - k_{j-\frac{1}{2}}^{n+1,s} (u_j^{n+1,s+1} - u_{j-1}^{n+1,s+1}) \right]. \end{aligned}$$



# 算子分裂算法

第一步也可以用预测---校正格式 ( $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ )

$$\begin{cases} u_j^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n + \frac{\lambda}{2} \left[ k_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_j^{n+\frac{1}{2}}) - k_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) \right] \\ u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\lambda}{2} \left[ k_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} + u_{j+1}^n - u_j^n) \right. \\ \quad \left. - k_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} + u_j^n - u_{j-1}^n) \right] \end{cases}$$

这样每一次都是求解线性方程组, 无需迭代.



# 算子分裂算法

对上面算子分裂算法的第二步（非线性对流问题），可以用如下预测---校正格式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\tau} = f\left(x_j, t_n, u_j^n, \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}\right) \\ \qquad \qquad \qquad \text{--- Lax-Friedrichs 格式} \\ \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = f\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, u_j^{n+\frac{1}{2}}, \frac{u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2h}\right) \\ \qquad \qquad \qquad \text{--- 蛙跳格式} \end{array} \right.$$

总之，运用算子分裂算法，可以灵活搭配每一步的格式，甚至可以根据实际计算情况随时调整。





# 具有粘性的波动方程

下面我们考虑更为复杂的非线性抛物问题的求解.

先考虑如下初值问题 ( $\sigma > 0$ ,  $c$  为常数)

$$(4.93) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = v_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

该模型通常用来描述带弱阻尼现象的波动传播或者说带有小尺度的热传导现象的波动传播问题.

显然上式中如果  $\sigma = 0$  则为波动方程; 而如果  $c = 0$ , 则可化为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \quad (\text{扩散问题})$$



# 具有粘性的波动方程---古典显式格式

我们先看最简单的显式格式:

$$\frac{1}{\tau^2} \delta_t^2 u_j^n - \frac{c^2}{h^2} \delta_x^2 u_j^n - \frac{\sigma}{h^2} \delta_x^2 \left( \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} \right) = 0.$$

显然其精度为  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ . 再看其稳定性.

令  $v_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau}$ ,  $w_j^n = c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}$ , 将上式化为以下方程组形式:

$$\begin{aligned} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} - \frac{c}{h} (w_j^n - w_{j-1}^n) &= \frac{\sigma}{h^2} \delta_x^2 v_j^n \\ \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\tau} - \frac{c}{h} (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

注意: 如果  $\sigma = 0$  会回到以前二阶双曲方程的三层显式差分格式的等价方程组形式.



# 具有粘性的波动方程---古典显式格式

记  $\mathbf{U}_j^n = \begin{pmatrix} v_j^n \\ w_j^n \end{pmatrix}$  代入上面方程组, 并令  $\alpha = \frac{c\tau}{h}$ ,  $\beta = \frac{\sigma\tau}{h^2}$  有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^{n+1} \\ w_j^{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j+1}^{n+1} \\ w_{j+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 1 - 2\beta & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^n \\ w_j^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j+1}^n \\ w_{j+1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j-1}^n \\ w_{j-1}^n \end{pmatrix}$$

令  $\mathbf{U}_j^n = \mathbf{U}^n e^{ij\xi h}$  代入上式.



# 具有粘性的波动方程---古典显式格式

即增长矩阵为

$$G(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} 1 - 4\beta \sin^2 \frac{\xi h}{2} & \alpha(1 - e^{-i\xi h}) \\ \alpha(e^{i\xi h} - 1)(1 - 4\beta \sin^2 \frac{\xi h}{2}) & 1 - 4\alpha^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} \end{pmatrix}$$

写出其特征方程为:

$$\lambda^2 - \lambda \left[ 2 - 4(\alpha^2 + \beta) \sin^2 \frac{\xi h}{2} \right] + 1 - 4\beta \sin^2 \frac{\xi h}{2} = 0.$$

计算可得特征根为

$$\lambda_{1,2} = 1 - 2(\alpha^2 + \beta) \sin^2 \frac{\xi h}{2} \pm 2\sqrt{(\alpha^2 + \beta)^2 \sin^4 \frac{\xi h}{2} - \alpha^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2}}$$



# 具有粘性的波动方程---古典显式格式

如果上面判别式  $\Delta \leq 0$ , 显然有  $|\lambda_{1,2}|^2 = 1 - 4\beta \sin^2 \frac{\xi h}{2} \leq 1$ .

如果  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , 即  $\xi h = 2k\pi$ , 那么令  $\eta = \xi h$ , 有  $\frac{dG}{d\eta}|_{\eta=2k\pi} =$   
 $\begin{pmatrix} 0 & \alpha(1+i) \\ -\alpha(1-i) & 0 \end{pmatrix}$ , 有两个不同特征根.

如果判别式  $\Delta > 0$ , 要想  $|\lambda_{1,2}| \leq 1$ , 我们需要  $(\alpha^2 + 2\beta) \sin^2 \frac{\xi h}{2} \leq 1$ .  
 即稳定性条件为  $\alpha^2 + 2\beta = (c\frac{\tau}{h})^2 + 2\frac{\sigma\tau}{h^2} \leq 1$ .

这样  $c = 0$  时 (扩散问题) 稳定性条件即为  $\sigma\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ .

$\sigma = 0$  时 (双曲问题) 稳定性条件即为  $|c|\frac{\tau}{h} \leq 1$ .



# 具有粘性的波动方程---算子分裂

我们当然可以用算子分裂思想得到更好性质的算法.

如, 令  $u_t = v$ , 可得

$$\begin{cases} v_t = \sigma v_{xx} + c^2 u_{xx}, \\ u_t = v. \end{cases}$$

即, 如果令  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ , 有

$$(4.94) \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \sigma & c^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}.$$



# 具有粘性的波动方程---算子分裂

如果我们把方程分裂为

$$(A) : \begin{cases} v_t = \sigma v_{xx}, \\ u_t = v, \end{cases} \quad (B) : \begin{cases} v_t = c^2 u_{xx}, \\ u_t = 0, \end{cases}$$

可以用如下算法:

$$(A) : \begin{cases} \frac{v_j^{n+\frac{1}{2}} - v_j^n}{\tau} = \frac{\sigma \delta_x^2}{h^2} \frac{v_j^n + v_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \\ \frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n}{\tau} = \frac{v_j^n + v_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \end{cases} \quad (B) : \begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{c^2 \delta_x^2}{h^2} \frac{u_j^{n+1} + u_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = 0 \end{cases}$$

这样容易看出精度为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ . 而且 (A) 步只需解一次三对角矩阵, 得到  $v_j^{n+\frac{1}{2}}$ , 然后代入下面直接得到  $u_j^{n+\frac{1}{2}}$ . (B) 步 (其实  $u$  没变) 可以直接得到  $v_j^{n+1}$ . 而且每步都是 C-N 形式格式无条件稳定. 所以总的来说计算量与显式格式差不多, 但精度和稳定性都大有提高.



# 可压缩流体流动的混合方程组

在可压缩流体的流动中, 若不同区域的温度差异较大, 那么热传导引起的能量传递, 可能对流体运动产生显著影响.

这时候如果考虑两者的综合效应, 便得到一个热传导的抛物方程和流体运动的双曲型方程耦合在一起的混合方程组.

我们先考虑线性化的问题, 即在平衡态附近做摄动: 设压力、比容和单位体积内能分别为  $p_0 + p$ 、 $\nu_0 + \nu$  和  $\varepsilon_0 + \varepsilon$ , 其中  $p_0, \nu_0, \varepsilon_0$  是未经扰动时的值, 且  $p \ll p_0, \nu \ll \nu_0, \varepsilon \ll \varepsilon_0$  (小扰动). 设物质速度为  $u$ , 记  $c = \sqrt{p_0 \nu_0}$  为等温声速. 这里  $u, p, \nu, \varepsilon$  都是  $x, t$  的函数. 我们取状态方程为

$$\varepsilon_0 + \varepsilon = \frac{(p_0 + p)(\nu_0 + \nu)}{\gamma - 1}.$$





# 可压缩流体流动的混合方程组

引入辅助变量  $w = c \frac{\nu}{\nu_0}$ ,  $e = \frac{\varepsilon}{c}$ , 则得到以下线性微分方程组:

$$(4.95) \quad \begin{cases} u_t = c[w - (\gamma - 1)e]_x, \\ w_t = cu_x, \\ e_t = \sigma e_{xx} - cu_x. \end{cases}$$

其中  $\sigma > 0$  为定常体积下导热率与比热之比.

显然上面(4.95)为双曲型与抛物型混合方程组. 最简单地, 可使用古典显式格式形式: ( $\mathcal{O}(\tau + h^2)$  精度,  $\lambda = \frac{\tau}{h}, \mu = \frac{\tau}{h^2}$ )

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n + c\lambda[w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n - (\gamma - 1)(e_{j+\frac{1}{2}}^n - e_{j-\frac{1}{2}}^n)], \\ w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = w_{j+\frac{1}{2}}^n + c\lambda[u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}], \\ e_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = e_{j+\frac{1}{2}}^n + \sigma\mu[e_{j+\frac{3}{2}}^n - 2e_{j+\frac{1}{2}}^n + e_{j-\frac{1}{2}}^n] - c\lambda(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}). \end{cases}$$



# 可压缩流体流动的混合方程组

上面第二步和第三步右端看似对  $u$  使用了隐式离散, 但是从第一式已经求出  $u^{n+1}$ , 所以后面两式都是显式计算. 可以改写成

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c\lambda & 0 & 0 \\ c\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j+1}^{n+1} \\ w_{j+\frac{3}{2}}^{n+1} \\ e_{j+\frac{3}{2}}^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c\lambda & 1 & 0 \\ -c\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j^{n+1} \\ w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ e_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} 1 & c\lambda & c\lambda(1-\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\sigma\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j^n \\ w_{j+\frac{1}{2}}^n \\ e_{j+\frac{1}{2}}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c\lambda & c\lambda(\gamma-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j-1}^n \\ w_{j-\frac{1}{2}}^n \\ e_{j-\frac{1}{2}}^n \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{j+1}^n \\ w_{j+\frac{3}{2}}^n \\ e_{j+\frac{3}{2}}^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



# 可压缩流体流动的混合方程组

这样可以得到增长矩阵为

$$G(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & c\lambda(1 - e^{-i\xi h}) & -c\lambda(\gamma - 1)(1 - e^{-i\xi h}) \\ c\lambda(e^{i\xi h} - 1) & 1 - 4c^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} & 4c^2\lambda^2(\gamma - 1) \sin^2 \frac{\xi h}{2} \\ c\lambda(1 - e^{i\xi h}) & 4c^2\lambda^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} & 1 - 4[\sigma\mu - c^2\lambda^2(\gamma - 1)] \sin^2 \frac{\xi h}{2} \end{pmatrix}$$

可得其特征方程为

$$x^3 - [3 - 4(\sigma\mu - c^2\lambda^2\gamma + 2c^2\lambda^2) \sin^2 \frac{\xi h}{2}]x^2 + [3 - 4(2\sigma\mu - 3c^2\lambda^2\gamma + 4c^2\lambda^2) \sin^2 \frac{\xi h}{2} + 16c^2\lambda^2(\sigma\mu - 2\gamma c^4\lambda^4 + 2c^4\lambda^4) \sin^4 \frac{\xi h}{2}]x - 1 + 4(\sigma\mu - 2\gamma c^2\lambda^2 + 2c^2\lambda^2) \sin^2 \frac{\xi h}{2} = 0.$$

注意到  $\mu \gg \lambda^2$ , 稳定性条件可近似取

$$\sigma \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \text{ 及 } \sqrt{\gamma} c \frac{\tau}{h} \leq 1.$$



# 可压缩流体流动的混合方程组

为了放宽步长约束即提高精度, 我们仍使用算子分裂技术:

$$(A) : \begin{cases} u_t = -c(\gamma - 1)e_x \\ w_t = cu_x \\ e_t = \sigma e_{xx} \end{cases} \quad (B) : \begin{cases} u_t = cw_x \\ w_t = 0 \\ e_t = -cu_x \end{cases}$$

然后再用 Crank-Nicolson 型格式离散. 分别采用如下顺序:

$$(A) : \begin{cases} e_j^{n+\frac{1}{2}} = e_j^n + \frac{\sigma\mu}{2}\delta_x^2(e_j^n + e_j^{n+\frac{1}{2}}) \\ u_j^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n - \frac{c(\gamma-1)\lambda}{4}\Delta_0^x(e_j^n + e_j^{n+\frac{1}{2}}) \\ w_j^{n+\frac{1}{2}} = w_j^n + \frac{c\lambda}{4}\Delta_0^x(u_j^n + u_j^{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

$$(B) : \begin{cases} w_j^{n+1} = w_j^{n+\frac{1}{2}} \\ u_j^{n+1} = u_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{c\lambda}{4}\Delta_0^x(w_j^{n+1} + w_j^{n+\frac{1}{2}}) \\ e_j^{n+1} = e_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{c\lambda}{4}\Delta_0^x(u_j^{n+1} + u_j^{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$



# 可压缩流体流动的混合方程组

显然上面格式为  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$  二阶精度格式.

而且每一步其实只需求解一次三对角方程组 (可用追赶法快速求解).

另外由于每一步都是 Crank-Nicolson 形式格式, 所以易得是无条件稳定的.

从此例也可以看出, 对于本例这种较为复杂的混合型方程组, 使用算子分裂技巧很容易得到高精度、计算量小而且稳定性好的格式.



## 二维可压缩 Navier-Stokes 方程组

这一小节考虑非定常的可压缩 Navier-Stokes 方程组. 这是一个非线性的耦合双曲-抛物型偏微分方程组:

$$(4.96) \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0.$$

分别对应了质量、动量和能量守恒条件, 共四个方程. 其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \sigma_x \\ \rho uv + \tau_{xy} \\ (e + \sigma_x)u + \tau_{yx}v - k\varepsilon_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv + \tau_{yx} \\ \rho v^2 + \sigma_y \\ (e + \sigma_y)v + \tau_{xy}u - k\varepsilon_y \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = P - \lambda(u_x + v_y) - 2\mu u_x, \quad \sigma_y = P - \lambda(u_x + v_y) - 2\mu v_y, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu(u_y + v_x)$$



## 二维可压缩 Navier-Stokes 方程组

这里:  $\rho$ ---密度,  $u, v$ ---分别为  $x, y$  方向的速度,  $\lambda, \mu$ ---粘性系数.

$e, \varepsilon$ ---为单位体积总能量和内能,  $k$ ---热传导系数,  $P$ ---压力.

另外还有关于压力与内能、密度的状态方程:  $P = P(\varepsilon, \rho)$ .

由于其非线性性, 以及是一个双曲-抛物耦合方程组, 数值求解不是太容易.

近些年来仍然有大量的学者在研究这些流体计算问题, 我们这里仅介绍其中一部分研究结果.



# 一维模型问题

我们先来看 Navier-Stokes 方程组的一维模型问题, 这其实就是一个非线性对流扩散问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nu > 0 \text{ 为粘性系数.}$$

如果  $\nu = 0$  就是一个双曲守恒律问题. 所以可以把双曲守恒律的求解方法推广过来. 我们可以构造一些预估校正格式.

例如可以用 Richtmyer 二步法的推广形式

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\tau}{2h}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \nu \frac{\tau}{h^2} \delta_x^2 u_j^n \\ u_j^{n+2} = u_j^{n+1} - \frac{\tau}{h}(f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1}) + \frac{2\nu\tau}{h^2} \delta_x^2 u_j^{n+1} \end{cases}$$

上面第一步是一个 L-F 格式, 第二步是一个三层格式.





# 一维模型问题

我们也可以把 Mac Cormack 二步法推广过来:

$$\begin{cases} \bar{u}_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h}(f_{j+1}^n - f_j^n) + \nu \frac{\tau}{h^2} \delta_x^2 u_j^n \\ u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_j^n + \bar{u}_j^{n+1}) - \frac{\tau}{h}(\bar{f}_{j+1}^{n+1} - \bar{f}_{j-1}^{n+1}) + \frac{\nu\tau}{h^2} \delta_x^2 \bar{u}_j^{n+1} \end{cases}$$

也可以把对流扩散方程的格式直接推广过来 (指数型格式)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a_j^n \tau}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\nu \sigma_j^n}{h^2} \delta_x^2 u_j^n.$$

其中  $a(u) = f'(u)$ ,  $\sigma_j^n = \frac{a_j^n h}{2\nu} \coth(\frac{a_j^n h}{2\nu})$ .

不过上述几个显式格式的稳定性仍然存在一定限制. 要想改善, 可以使用算子分裂思想:

$$1) \quad \bar{u}_t + f(\bar{u})_x = 0, \quad 2) \quad u_t = \nu u_{xx}.$$



# 一维模型问题

对 1) 可以使用双曲守恒律格式, 如迎风、L-F 等, 得到  $\bar{u}_j^{n+1}$ .

对 2) 可用 Crank-Nicolson 格式: 
$$\frac{u_j^{n+1} - \bar{u}_j^{n+1}}{\tau} = \frac{\nu \delta_x^2}{2h} (u_j^{n+1} + \bar{u}_j^{n+1}).$$

这样稳定性可以大大改善, 且也可以用于不光滑情形.

当然由于  $f(u)$  的非线性性, 要想得到时间二阶格式, 我们需要使用 Strang's Splitting 格式:

$$u_j^{n+1} = \mathcal{L}_1\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathcal{L}_2(\tau) \mathcal{L}_1\left(\frac{\tau}{2}\right) u_j^n.$$

上面思想也可以推广到 Navier-Stokes 方程组.



# 显式算子分裂格式

将二维问题(4.96)分裂为以下两步

$$1) \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad 2) \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0.$$

记成  $\mathbf{U}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{L}_1(\tau)\mathbf{U}_{jk}^n, \quad \mathbf{U}_{jk}^{n+1} = \mathcal{L}_2(\tau)\mathbf{U}_{jk}^{n+\frac{1}{2}}.$

要想达到时间二阶精度, 需要使用 Strang's Splitting:

$$\mathbf{U}_{jk}^{n+1} = \mathcal{L}_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathcal{L}_2(\tau)\mathcal{L}_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathbf{U}_{jk}^n.$$

下面看怎么设计每一步的离散.



# 显式算子分裂格式

对于第一步  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0$ , 若用 Mac Cormack 格式, 记之为  $L_x$ : 先

预估:  $\mathbf{U}_{jk}^{(P)} = \mathbf{U}_{jk}^n - \frac{\tau}{h}(\mathbf{F}_{j+1,k}^n - \mathbf{F}_{jk}^n)$ .

对于  $\mathbf{F}_{jk}^n$  等中的一阶空间偏导数  $\phi_x, \phi_y$  ( $\phi$  表示  $u, v$  等):

$$(\phi_x)_{jk}^n = \frac{1}{h}(\phi_{jk}^n - \phi_{j-1,k}^n), \quad (\phi_y)_{jk}^n = \frac{1}{2h}(\phi_{j,k+1}^n - \phi_{j,k-1}^n)$$

然后校正:  $\mathbf{U}_{jk}^{(C)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{jk}^n + \mathbf{U}_{jk}^{(P)}) - \frac{\tau}{2h}(\mathbf{F}_{j+1,k}^{(P)} - \mathbf{F}_{jk}^{(P)})$ .

对于  $\mathbf{F}_{jk}^{(P)}$  中的一阶空间偏导数  $\phi_x, \phi_y$  ( $\phi$  表示  $u, v$  等):

$$(\phi_x)_{jk}^{(P)} = \frac{1}{h}(\phi_{j+1,k}^{(P)} - \phi_{j,k}^{(P)}), \quad (\phi_y)_{jk}^{(P)} = \frac{1}{2h}(\phi_{j,k+1}^{(P)} - \phi_{j,k-1}^{(P)})$$

两步合起来记成  $\mathbf{U}_{jk}^{(C)} = L_x(\tau)\mathbf{U}_{jk}^n$ .



# 显式算子分裂格式

类似第二步  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0$ , 也用 Mac Cormack 格式, 记之为  $L_y$ : 先

预估:  $\tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{(P)} = \mathbf{U}_{jk}^n - \frac{\tau}{h}(\mathbf{G}_{jk}^n - \mathbf{G}_{j,k-1}^n) \cdot \mathbf{G}_{jk}^n$  等中的  $\phi_x, \phi_y$ :

$$(\phi_x)_{jk}^n = \frac{1}{2h}(\phi_{j+1,k}^n - \phi_{j-1,k}^n), \quad (\phi_y)_{jk}^n = \frac{1}{h}(\phi_{j,k+1}^n - \phi_{j,k}^n)$$

然后校正:  $\tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{(C)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{jk}^n + \tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{(P)}) - \frac{\tau}{2h}(\tilde{\mathbf{G}}_{j,k+1}^{(P)} - \tilde{\mathbf{G}}_{jk}^{(P)})$ :

$$(\tilde{\phi}_x)_{jk}^{(P)} = \frac{1}{2h}(\tilde{\phi}_{j+1,k}^{(P)} - \tilde{\phi}_{j-1,k}^{(P)}), \quad (\tilde{\phi}_y)_{jk}^{(P)} = \frac{1}{h}(\tilde{\phi}_{j,k}^{(P)} - \tilde{\phi}_{j,k-1}^{(P)})$$

两步合起来记成  $\tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{(C)} = L_y(\tau)\mathbf{U}_{jk}^n$ .

最后即  $\mathbf{U}_{jk}^{n+1} = L(\tau)\mathbf{U}_{jk}^n$ , 为保证二阶精度:

$$L(\tau) = L_x\left(\frac{\tau}{2}\right)L_y(\tau)L_x\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad \text{或者} \quad L_y\left(\frac{\tau}{2}\right)L_x(\tau)L_y\left(\frac{\tau}{2}\right)$$



# 算子分裂有限体积法

更一般地, 对于  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0$ , 若用有限体积法:

令  $\mathbf{U}_{jk}^n = \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \int_{y_{k-\frac{1}{2}}}^{y_{k+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(x, y, t^n) dy dx$ , 将方程在微元上积分有

$$\partial_t \mathbf{U}_{jk}^n + \frac{1}{h} (\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2},k} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2},k}) = 0$$

而  $\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2},k}$  中的项取成

$$\phi_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{\phi_{j,k} + \phi_{j+1,k}}{2}, \quad (\phi\psi)_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{\phi_{jk}\psi_{jk} + \phi_{j+1,k}\psi_{j+1,k}}{2},$$

$$(\phi_x)_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{\phi_{j+1,k} - \phi_{j,k}}{h}, \quad (\phi_y)_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{\phi_{j,k+1} - \phi_{j,k-1}}{4h} + \frac{\phi_{j+1,k+1} - \phi_{j+1,k-1}}{4h}$$

$\mathbf{F}_{j-\frac{1}{2},k}$  中的项类似处理.



# 算子分裂有限体积法

然后对时间离散, 比如采用预估校正格式 ( $\lambda = \tau/h$ ):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{n+1} &= \mathbf{U}_{jk}^n - \lambda(\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2},k} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2},k}), \\ \mathbf{U}_{jk}^{n+1} &= \mathbf{U}_{jk}^n - \frac{\lambda}{2}(\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2},k} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2},k} + \tilde{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2},k} - \tilde{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2},k}).\end{aligned}$$

第二步也可写成

$$\mathbf{U}_{jk}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{jk}^n + \tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{n+1}) - \frac{\lambda}{2}(\tilde{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2},k} - \tilde{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2},k}) \equiv L_x(\tau)\mathbf{U}_{jk}^n.$$

类似地对  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0$  也可构造  $\mathbf{U}_{jk}^{n+1} = L_y(\tau)\mathbf{U}_{jk}^n$ .

然后用 Strang's Splitting 可以得到二阶精度格式:

$$\mathbf{U}_{jk}^{n+1} = L_x\left(\frac{\tau}{2}\right)L_y(\tau)L_x\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathbf{U}_{jk}^n$$



# 不可压缩 Navier-Stokes 方程组

这一小节考虑非定常的不可压缩 Navier-Stokes 方程组. 所谓不可压缩流体, 是指假设流体在运动过程中, 流体质点的体积 (或者说密度) 在压力差或者温度差的条件下改变很小, 可以忽略. 例如水加压到 100 个大气压下容积缩小仅 0.5%, 温度从  $20^\circ \sim 100^\circ$  容积降低 4%. 此时可以将水近似看成是不可压的.

这时流体密度的随体导数为零, 即

$$0 = \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho.$$

再结合质量守恒 (连续性方程):  $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ . 此即不可压条件, 相当于对速度  $\mathbf{U}$  加了一个约束.





# 速度--压力方程

先来看速度--压力形式的不可压 Navier-Stokes 方程组

$$(4.97) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_t + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla p = \Delta \mathbf{U}, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \\ \mathbf{U}|_{\partial\Omega} = 0, \mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0, p|_{t=0} = p_0. \end{cases}$$

通常来说, 如果速度、压力同时求解会比较复杂. 一般想法都是采用投影法, 分开计算速度和压力.

鄂维南教授和刘建国教授在二十世纪九十年代发展了一套投影算子方法, 就是基于算子分裂思想设计的解法.



# 速度--压力方程

第一步: 
$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \Delta \mathbf{U}, \\ \mathbf{U}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

离散时, 为避免求解非线性方程组, 非线性项采用显式:

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + (\mathbf{U}^n \cdot \nabla) \mathbf{U}^n = \Delta \mathbf{U}_j^{n+\frac{1}{2}}.$$

第二步: 
$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad \text{离散即} \quad \begin{cases} \frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \nabla p^{n+1} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{U}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

考虑到  $\nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1} = 0$ , ‘ $\nabla \cdot$ ’ 作用在第一式得  $\Delta p^{n+1} = \frac{1}{\tau}(\nabla \cdot \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}})$ . 由  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0$  得到压力的边界条件  $\partial_{\mathbf{n}} p^{n+1}|_{\partial\Omega} = 0$ .

最后再对空间离散, 使用 Strang's Splitting 形式便可得到二阶格式.



# 涡流方程

也可采用涡度--流函数方程来描述:

$$(4.98) \quad \begin{cases} \omega_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \omega - \frac{1}{Re} \Delta \omega = 0, \\ \Delta \psi + \omega = 0. \end{cases}$$

这里  $\omega$ --涡度,  $\psi$ --流函数,  $Re$ --雷诺数.

在二维情形,  $\mathbf{U} = (u, v)^T$ ,  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ,  $\omega = -u_y + v_x$ .

边界条件取成  $\psi|_{\partial\Omega} = f$ , 及  $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g$ .

对于对流扩散方程  $\omega_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \omega - \frac{1}{Re} \Delta \omega = 0$ , 可以算子分裂

$$\begin{aligned} \omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} &= \omega_{ij}^n - \frac{\lambda}{4} u_{ij}^n \Delta_0^x (\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \omega_{ij}^n) + \frac{\mu}{2Re} \delta_x^2 (\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \omega_{ij}^n), \\ \omega_{ij}^{n+1} &= \omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{4} v_{ij}^n \Delta_0^y (\omega_{ij}^{n+1} + \omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\mu}{2Re} \delta_y^2 (\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \omega_{ij}^{n+1}), \end{aligned}$$



# 涡流方程

显然可以用追赶法来求解上述三对角方程组. 需重点要考虑的是边界条件如何处理:

我们需要从  $\psi$  的边界条件来得到  $\Omega$  的边界条件, 即: 要由  $\psi|_{\partial\Omega} = f$ ,  $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g$  及  $\omega = -\Delta\psi$  来得到.

例如,  $(\omega)_{0,j} = -(\Delta\psi)_{0,j} = -(\psi_{xx} + \psi_{yy})_{0,j}$ .

切向导数可直接计算  $(\psi_{yy})_{0,j} = (f_{yy})_{0,j}$ . 对于法向导数, 由

$$\begin{aligned} \psi(h, y, t) &= \psi(0, y, t) + h\psi_x(0, y, t) + \frac{h^2}{2}\psi_{xx}(0, y, t) + \mathcal{O}(h^3) \\ \implies (\psi_{xx})_{0,j} &= \frac{2}{h}(\psi_{1,j} - f_{0,j}) + \frac{2}{h}g_{0,j} + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

其他边界值  $\omega_{I,j}, \omega_{i,0}, \omega_{i,J}$  可以类似计算.



# 涡流方程

对于 Poisson 方程  $-\Delta\psi = \omega$ , 由于  $\omega$  已经得到, 故可以用格式

$$-\Delta_h \psi_{ij}^{n+1} \equiv -\frac{\delta_x^2 + \delta_y^2}{h^2} \psi_{ij}^{n+1} = \omega_{ij}^{n+1}.$$

解线性方程组便可以得到  $\psi^{n+1}$ .

这样计算步骤即为:

$$u_{ij}^n, v_{ij}^n, \omega_{ij}^n, \psi_{ij}^n \xrightarrow{\text{解抛物问题}} \omega_{ij}^{n+1} \xrightarrow{\text{解椭圆问题}} \psi_{ij}^{n+1}$$

有了  $\psi^{n+1}$ , 利用  $u = \psi_y$ ,  $v = -\psi_x$  可计算得

$$u_{ij}^{n+1} = \frac{\Delta_y}{2h} \psi_{ij}^{n+1}, \quad v_{ij}^{n+1} = -\frac{\Delta_x}{2h} \psi_{ij}^{n+1}.$$

在大雷诺数情形 (即对流占优情形) 需要用指数型格式来处理.



# 涡流方程---高阶紧凑差分格式

鄂维南教授和刘建国教授在 1996 年 (JCP 上) 给出了一种高阶紧凑差分格式. (之前扩散问题曾构造过空间四阶精度格式(4.31))

引入辅助变量  $\bar{\omega}_{ij}^n$ : 其中

$$\bar{\omega}_{ij}^0 = (1 + \frac{h^2}{12}\Delta_h)\omega_{ij}^n \equiv (1 + \frac{\delta_x^2 + \delta_y^2}{12})\omega_{ij}^n$$

从  $t_n \rightarrow t_{n+1}$  由以下四步构成:

1. 更新辅助变量  $\bar{\omega}_{ij}^{n+1}$  (显式计算):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\omega}_{ij}^{n+1} - \bar{\omega}_{ij}^n}{\tau} + \frac{\Delta_0^x}{2h}(1 + \frac{\delta_y^2}{6})(u_{ij}^n \cdot \omega_{ij}^n) + \frac{\Delta_0^y}{2h}(1 + \frac{\delta_x^2}{6})(v_{ij}^n \cdot \omega_{ij}^n) \\ - \frac{h^2\Delta_h}{12}\frac{1}{2h}(u_{ij}^n\Delta_0^x\omega_{ij}^n + v_{ij}^n\Delta_0^y\omega_{ij}^n) = \frac{1}{Re}(\Delta_h + \frac{\delta_x^2\delta_y^2}{6h^2})\omega_{ij}^n \end{aligned}$$



# 涡流方程---高阶紧凑差分格式

2. 计算流函数  $\psi_{ij}^{n+1}$ : (解线性方程组)

$$-(\Delta_h + \frac{\delta_x^2 \delta_y^2}{6h^2})\psi_{ij}^{n+1} = \bar{\omega}_{ij}^{n+1}$$

$$(\text{边界条件}) \quad \psi_{ij}^{n+1}|_{\partial\Omega} = f_{ij}^{n+1}.$$

3. 求涡度  $\omega_{ij}^{n+1}$ : (解线性方程组)

$$(1 + \frac{h^2}{12}\Delta_h)\omega_{ij}^{n+1} = \bar{\omega}_{ij}^{n+1}$$

(用高阶单边插值给出边界条件, 如)

$$\omega_{0j}^{n+1} = \frac{11}{3h}(\psi_x)_{0j}^{n+1} - \frac{108\psi_{1j}^{n+1} - 27\psi_{2j}^{n+1} + 4\psi_{3j}^{n+1}}{18h^2}.$$



# 涡流方程---高阶紧凑差分格式

4. 更新速度  $u_{ij}^{n+1}, v_{ij}^{n+1}$  (显式计算):

$$\begin{aligned}u_{ij}^{n+1} &= \Delta_0^y \left(1 - \frac{\delta_y^2}{6}\right) \psi_{ij}^{n+1} \\v_{ij}^{n+1} &= -\Delta_0^x \left(1 - \frac{\delta_x^2}{6}\right) \psi_{ij}^{n+1}\end{aligned}$$

这样得到一个时间二阶、空间四阶精度的格式.

当然我们还可以利用高阶 **R-K** 方法得到时间上更高阶的格式.

注意如果雷诺数很大时, 此问题会出现边界层、内层等效应. 我们在随后还会再回到此问题的求解.





# 上机作业简介

考虑以下反应扩散问题 (其中  $0 < \varepsilon \ll 1$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\varepsilon}u(1 - u^2), & (x, y) \in \Omega, \quad t > 0 \\ u|_{\partial\Omega} = -1, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 1, & x \in \tilde{\Omega}, \\ -1, & \Omega \setminus \tilde{\Omega}. \end{cases} \end{cases}$$

这里  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ,  $\tilde{\Omega} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ ,

且  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ 。试构造一种无条件稳定的 (当然稳定性也不依赖于  $\varepsilon$ ) 二阶格式, 并取不同的  $\varepsilon, a, b$  和充分小的步长  $h$  计算, 看看结果有什么不同。



# 上机作业简介

当然我们可以对此非线性问题做算子分裂

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad u_t = \frac{u(1 - u^2)}{\varepsilon}.$$

对于前面二维扩散问题, 可以用算子分裂或者其他交替方向隐式格式计算. 对于非线性常微分方程问题, 积分后可以得到

$$\ln \left| \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \right| = \frac{t}{\varepsilon} + C.$$

即解为 
$$u(t) = \frac{u(0)}{\sqrt{u^2(0) + e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}(1 - u^2(0))}}.$$

