机器学习中的优化算法作业4　8.16　8.19 (a)(b)(c)

8.16 先求该问题的Lagrange函数：

引入乘子Λ作用在约束、$L+S=M$上

$$L_\rho(L,S,\Lambda)=\|L\|_*+\lambda\|S\|_1+\langle\Lambda, L+S-M\rangle+\frac{\rho}{2}\|L+S-M\|_F^2$$

在第$(k+1)$步，交替方向乘子法分别求解关于L和S的子问题更新

L^{k+1}和S^{k+1}

对于L子问题 $L^{k+1}=\arg\min\limits_L L_\rho(L,S^k,\Lambda^k)$

$$=\arg\min_L\left\{\|L\|_*+\frac{\rho}{2}\|L+S^k-M+\frac{1}{\rho}\Lambda^k\|_F^2\right\}$$

$$=\arg\min_L\left\{\frac{1}{\rho}\|L\|_*+\frac{1}{2}\|L+S^k-M+\frac{1}{\rho}\Lambda^k\|_F^2\right\}$$

$$=U\mathrm{Diag}(\mathrm{prox}_{\frac{1}{\rho}\|\cdot\|_1}(\sigma(A)))V^T$$

其中$A=M-S^k-\frac{1}{\rho}\Lambda^k$，$\sigma(A)$为$A$的所有非奇异值构成的向量

并且$U\mathrm{Diag}(\sigma(A))V^T$是$A$的奇异值分解.

对于S子问题 $S^{k+1}=\arg\min\limits_S L_\rho(L^{k+1},S^k,U^k)$

$$=\arg\min_S\left\{\lambda\|S\|_1+\frac{\rho}{2}\|S+L^{k+1}-M+\frac{1}{\rho}\Lambda^k\|_F^2\right\}$$

$$=\mathrm{prox}_{\frac{\lambda}{\rho}\|\cdot\|_1}(M-L^{k+1}-\frac{1}{\rho}\Lambda^k)$$

此处 $Z = \mathrm{prox}_{\frac{\lambda}{\rho}\|\cdot\|_1}(Y)$ 满足

$$Z_{ij} = \mathrm{sign}(Y_{ij}) \max\{|Y_{ij}| - \frac{\lambda}{\rho}, 0\}$$

对于乘子 Λ，有常规更新

$$\Lambda^{k+1} = \Lambda^k + \tau\rho(L^{k+1} + S^{k+1} - M)$$

因此对于 L 子问题和 S 子问题都有显式解.

8.19 (a)(b)(c) 的算法实现见附件

机器学习中的优化算法作业 - 4

（8.16 题见上文手写部分）

姓名：谢泽钰

学号：2020012544

LASSO 问题描述

LASSO 是一种用于线性回归和统计建模的正则化方法。

它通过在损失函数中添加一个 L_1 正则项，强制使一些模型参数变为零，从而实现特征选择和模型稀疏性。

LASSO问题可以通过以下优化问题来描述：

$min\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\sum_{j=1}^{p}x_{ij}\beta_j)^2+\lambda\sum_{j=1}^{p}|\beta_j|$

其中：

- n 是样本数量。
- p 是特征的数量。
- y_i 是观测值。
- x_{ij} 是第 i 个样本的第 j 个特征的值。
- β_0 是截距项。
- β_j 是第 j 个特征的系数。
- λ 是控制正则化程度的超参数。

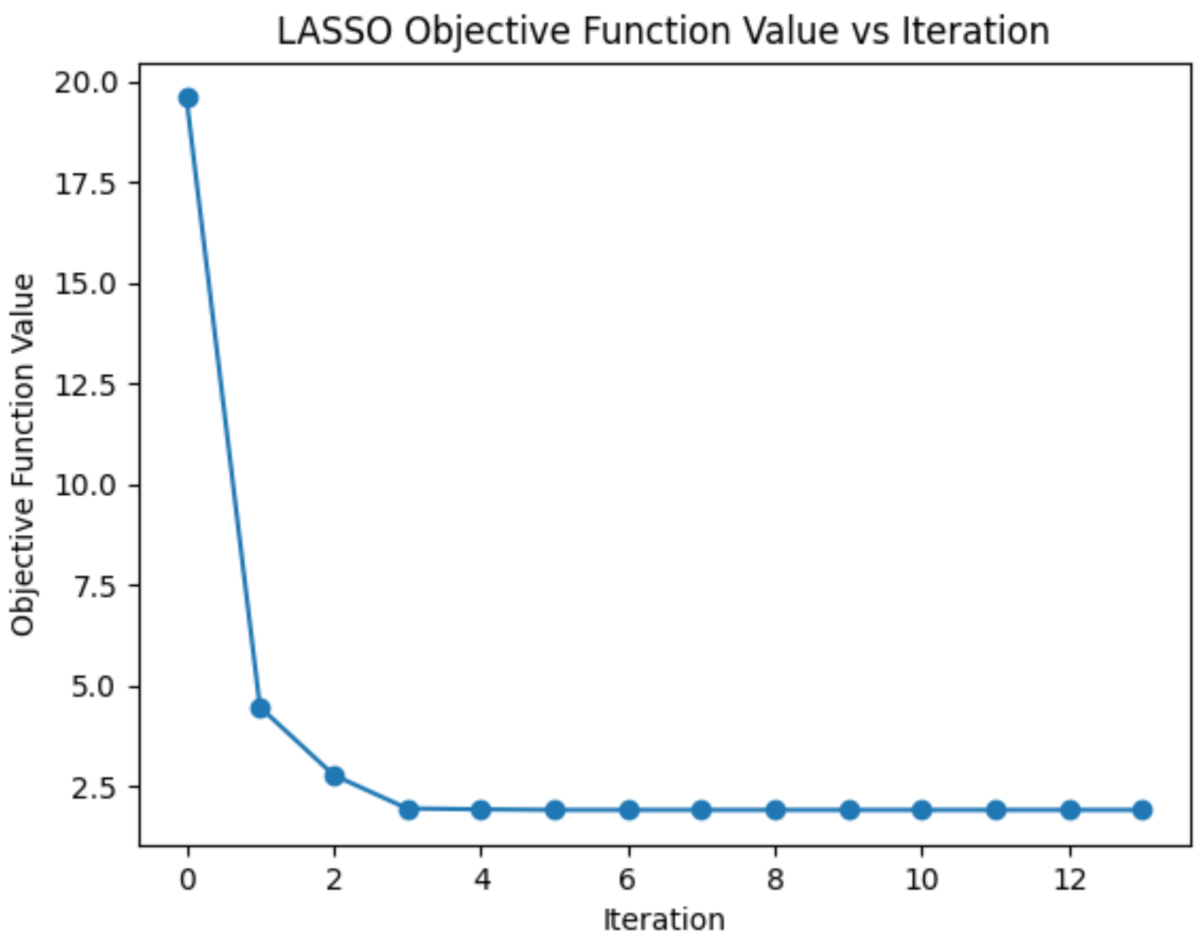
近似点梯度算法

代码实现

```
import numpy as np
from scipy.optimize import minimize
import matplotlib.pyplot as plt

# 生成模拟数据
np.random.seed(42)
n = 100
p = 20

X = np.random.randn(n, p)
true_beta = np.random.randn(p)
noise = 0.1 * np.random.randn(n)
y = np.dot(X, true_beta) + noise

# 定义 LASSO 目标函数
def lasso_objective(beta, X, y, lambda_):
    n = len(y)
```

```
    residuals = y - np.dot(X, beta)
    lasso_term = lambda_ * np.sum(np.abs(beta))
    objective = 0.5 * np.sum(residuals**2) + lasso_term
    return objective

def lasso_gradient(beta, X, y, lambda_):
    n = len(y)
    residuals = y - np.dot(X, beta)
    sign = np.sign(beta)
    gradient = -np.dot(X.T, residuals) + lambda_ * sign
    return gradient

# 记录
def callback_function(beta):
    obj_value = lasso_objective(beta, X, y, lambda_)
    objective_values.append(obj_value)

# 运行
initial_beta = np.zeros(p)
lambda_ = 0.1
objective_values = []

result = minimize(
    fun=lasso_objective,
    x0=initial_beta,
    args=(X, y, lambda_),
    jac=lasso_gradient,
    method='L-BFGS-B',
    callback=callback_function
)

print(objective_values)

# 绘制
plt.plot(objective_values[1:], marker='o')
plt.title('LASSO Objective Function Value vs Iteration')
plt.xlabel('Iteration')
plt.ylabel('Objective Function Value')
plt.show()
```

输出结果



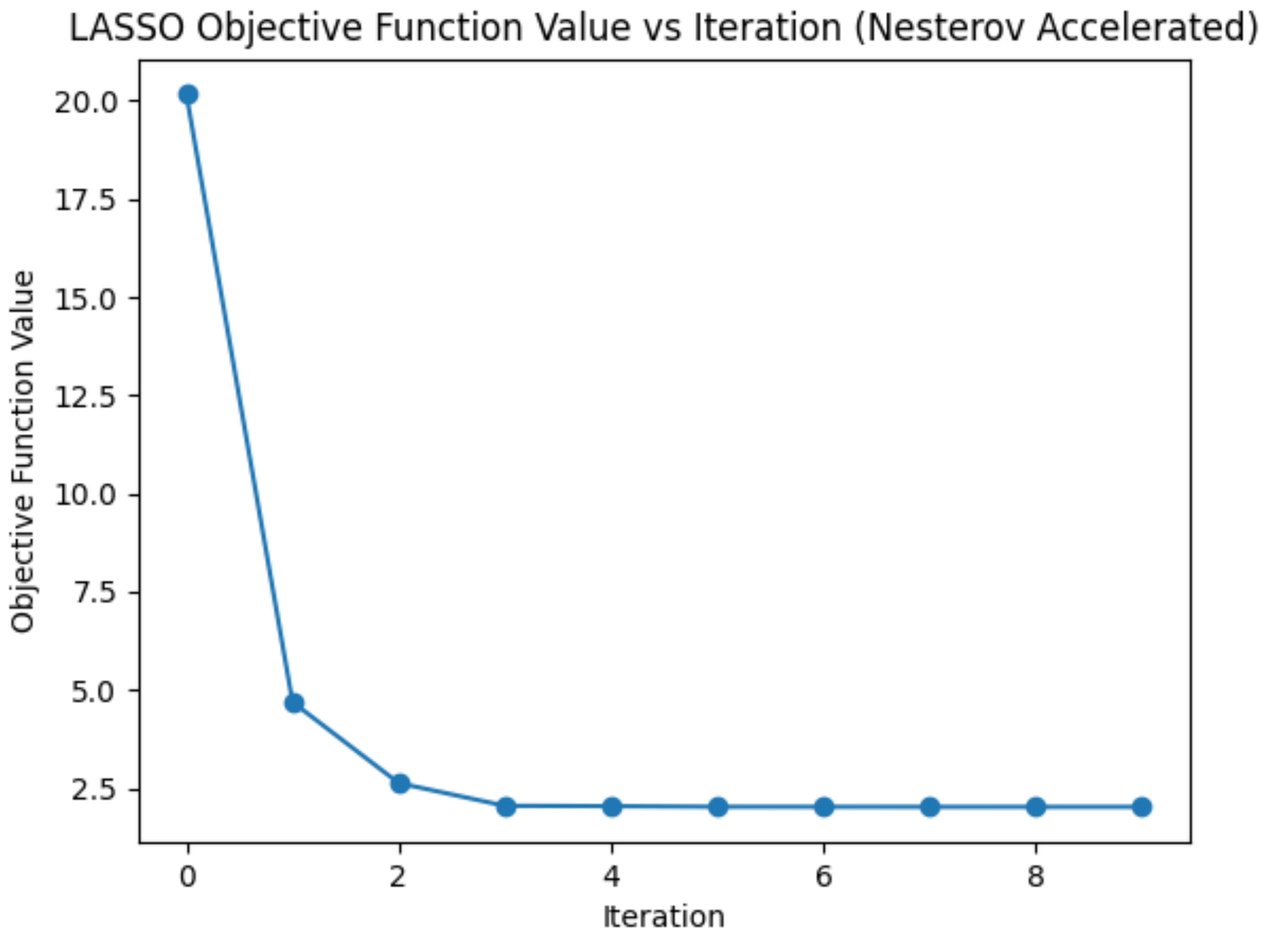
Nesterov 加速算法

代码实现

```
import numpy as np
from scipy.optimize import minimize
import matplotlib.pyplot as plt

# 生成模拟数据
np.random.seed(42)
n = 100
p = 20

X = np.random.randn(n, p)
true_beta = np.random.randn(p)
noise = 0.1 * np.random.randn(n)
y = np.dot(X, true_beta) + noise

# 定义 LASSO 目标函数
def lasso_objective(beta, X, y, lambda_):
    n = len(y)
    residuals = y - np.dot(X, beta)
    lasso_term = lambda_ * np.sum(np.abs(beta))
    objective = 0.5 * np.sum(residuals**2) + lasso_term
```

```
    return objective

def lasso_gradient(beta, X, y, lambda_):
    n = len(y)
    residuals = y - np.dot(X, beta)
    sign = np.sign(beta)
    gradient = -np.dot(X.T, residuals) + lambda_ * sign
    return gradient

# 记录
def callback_function(beta):
    obj_value = lasso_objective(beta, X, y, lambda_)
    objective_values.append(obj_value)

# 运行
initial_beta = np.zeros(p)
lambda_ = 0.1
objective_values = []

def nesterov_gradient(beta, X, y, lambda_, momentum):
    n = len(y)
    residuals = y - np.dot(X, beta)
    sign = np.sign(beta)
    gradient = -np.dot(X.T, residuals) + lambda_ * sign
    return gradient + momentum * (beta - old_beta)

old_beta = initial_beta.copy()
momentum = 0.9  # 设置动量参数

result = minimize(
    fun=lasso_objective,
    x0=initial_beta,
    args=(X, y, lambda_),
    jac=lambda beta, X, y, lambda_: nesterov_gradient(beta, X, y, lambda_, momentum),
    method='L-BFGS-B',
    callback=callback_function
)

print(objective_values)

# 绘制
plt.plot(objective_values[1:], marker='o')
plt.title('LASSO Objective Function Value vs Iteration (Nesterov Accelerated)')
plt.xlabel('Iteration')
plt.ylabel('Objective Function Value')
plt.show()
```

输出结果



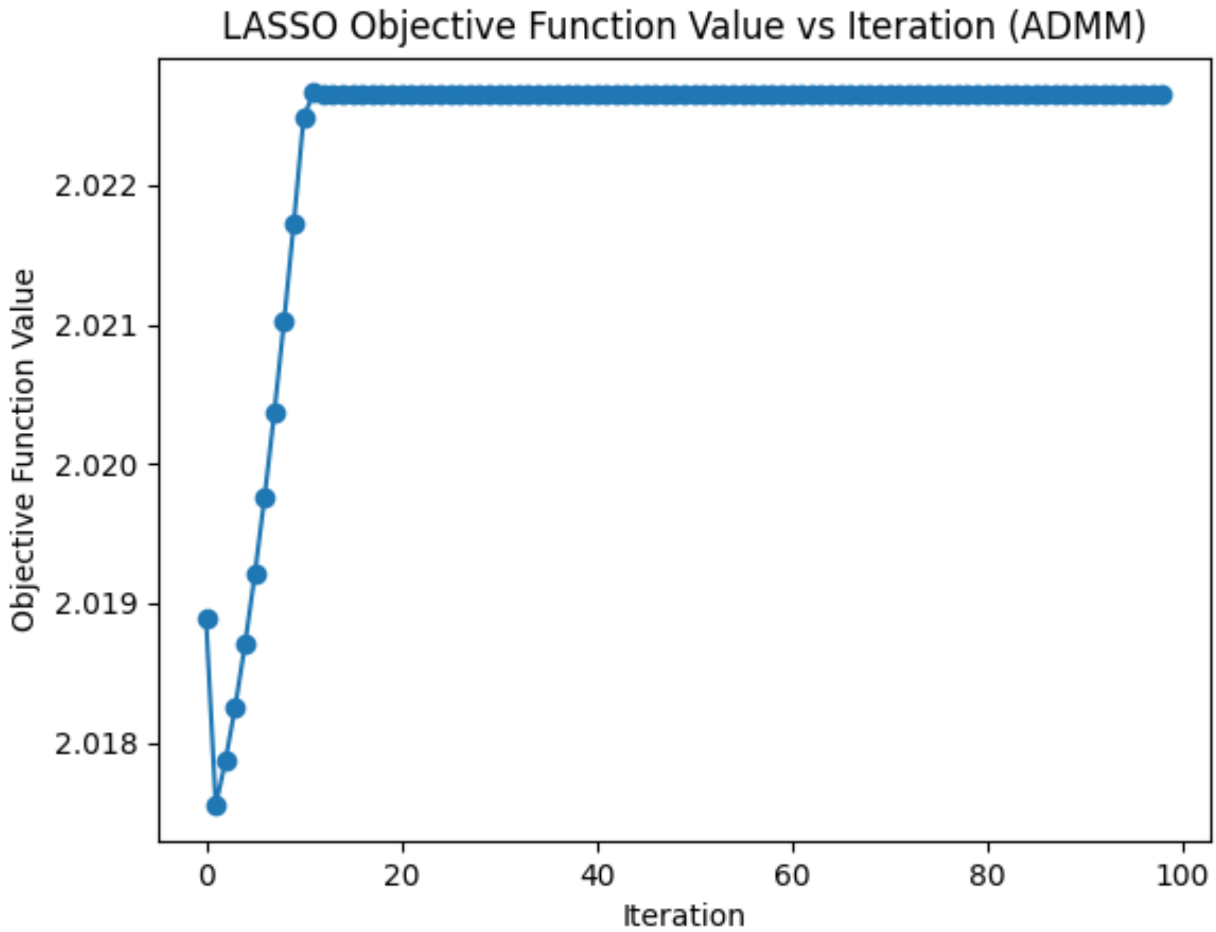
交替方向乘子法

代码实现

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 生成模拟数据
np.random.seed(42)
n = 100
p = 20

X = np.random.randn(n, p)
true_beta = np.random.randn(p)
noise = 0.1 * np.random.randn(n)
y = np.dot(X, true_beta) + noise

# 定义 LASSO 目标函数
def lasso_objective(beta, X, y, lambda_, rho, z):
    n = len(y)
    residuals = y - np.dot(X, beta)
```

```
    lasso_term = lambda_ * np.sum(np.abs(z))
    augmented_term = (rho / 2) * np.sum((beta - z + u)**2)
    objective = 0.5 * np.sum(residuals**2) + lasso_term + augmented_term
    return objective

# 初始化参数
beta = np.zeros(p)
z = np.zeros(p)
u = np.zeros(p)
rho = 1.0  # 步长

# ADMM 迭代
max_iterations = 100
lambda_ = 0.1
objective_values = []

for iteration in range(max_iterations):
    # 求解 beta
    beta = np.linalg.solve(np.dot(X.T, X) + rho * np.identity(p), np.dot(X.T, y) + rho *
(z - u))

    # 求解 z（软阈值运算）
    z = np.maximum(0, beta + u - lambda_ / rho) - np.maximum(0, -beta - u - lambda_ / rho)

    # 更新 u
    u = u + beta - z

    # 计算目标函数值
    obj_value = lasso_objective(beta, X, y, lambda_, rho, z)
    objective_values.append(obj_value)

# 打印
print("Optimal beta:", beta)
print("Objective values:", objective_values)

# 绘制
plt.plot(objective_values[1:], marker='o')
plt.title('LASSO Objective Function Value vs Iteration (ADMM)')
plt.xlabel('Iteration')
plt.ylabel('Objective Function Value')
plt.show()
```

输出结果


LASSO Objective Function Value vs Iteration (ADMM)
Objective Function Value
2.022
2.021
2.020
2.019
2.018
0
20
40
60
80
100
Iteration