

期末大作业：1月15日提交

1. (30分) 在自然科学和工程中常常遇到已知向量 $b \in \mathbb{R}^m$ 和矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 想要重构向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 $Ax = b$ 的问题, 其中向量 b 的维数远小于向量 x 的维数, 即 $m \ll n$. 著名的数学模型就是 ℓ_0 范数最小化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x\|_0 \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b. \end{aligned}$$

其著名的凸松弛模型为LASSO问题或基追踪问题. 我们考虑如下的非凸松弛模型

$$\min \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \mu \sum_{i=1}^n g(x_i),$$

其中数据服从高斯随机分布, $g(\cdot)$ 任选下面的非凸替代函数:

- ① Capped ℓ_1 函数(参数 $\gamma > 0$)

$$g(\theta) = \begin{cases} |\theta|, & |\theta| \leq \gamma, \\ \gamma, & |\theta| \geq \gamma. \end{cases}$$

- ② MCP函数(参数 $\gamma > 0$)

$$g(\theta) = \begin{cases} |\theta| - \frac{\theta^2}{2\gamma}, & |\theta| \leq \gamma, \\ \frac{\gamma}{2}, & |\theta| \geq \gamma. \end{cases}$$

③ SCAD函数(参数 $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$)

$$g(\theta) = \begin{cases} |\theta|, & |\theta| \leq \gamma_1, \\ \frac{2\gamma_2|\theta| - \theta^2 - \gamma_1^2}{2(\gamma_2 - \gamma_1)}, & \gamma_1 < |\theta| \leq \gamma_2, \\ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}, & |\theta| \geq \gamma_2. \end{cases}$$

要求：写出该问题的合适的最优性条件，设计合适的算法求解，最好能给出收敛性分析

2. (10分) 学以致用：利用所学求解你正在研究的问题，要求清晰描述你的问题（包括背景和应用），所建模型，选择的算法，以及详细的算法设计和仿真结果；如果没有简要介绍你读的相关论文也可

作业要求：

- 正文提交PDF格式：要求有前言、模型、算法、理论分析、数值实验
- 能运行的程序代码，和所用的数据
- 压缩提交网络学堂
- 严防抄袭，一旦发现记0分
- 1仅是作业，不能用于其他地方，也不能拿类似的已有的代替