作业1:

1. 习题3

(1) 特征线 $\frac{dx}{dt}=2$, $x(0)=c \Rightarrow x(t)=2t+c$

沿特征线 $\frac{dU(x(t),t)}{dt}=0 \Rightarrow U=U(x(0),0)=c^2$

又 $c=x-2t$，故 $u=(x-2t)^2$

(2) 特征线 $\frac{dx}{dt}=2$, $x(0)=c \Rightarrow x(t)=2t+c$

沿特征线 $\frac{dU}{dt}+U=(2t+c)t$

即有ODE: $\begin{cases} \frac{dv}{dt}+v=(2t+c)t \\ v(0)=2-c \end{cases}$

$\Rightarrow v(t)=-2e^{-t}+2t^2+(c-4)t+(c-4)$

$\Rightarrow u(x,t)=-2e^{-t}+2t^2+(x-2t-4)(t-1)$

(3) 特征线 $x(t)=-\frac{t}{2}+c$

沿特征线 $\begin{cases} \frac{dU}{dt}=(\frac{t}{4}-\frac{c}{2})U \\ U(0)=u(x(0),0)=u(c,0)=2ce^{c^2/2} \end{cases}$

$\Rightarrow U=2ce^{\frac{c^2}{2}}e^{\frac{t^2}{8}\frac{c}{2}t}$

(4) 特征线 $x=\tan(t+\arctan c)$

沿特征线 $\begin{cases} \frac{dU}{dt}=U \\ U(0)=u(x(0),0)=u(c,0)=\arctan(c) \end{cases}$

$\Rightarrow v = \arctan ce^t$

$\Rightarrow u(x,t) = (\arctan x - t)e^t$

2 (习题30) 对于第一个方程提法正确，理由：特征线总向上

第二个方程提法错误。理由：特征线向下，从而 t 轴上每点值均由 x 轴上函数值给定，从而 t 轴上不可任意给值.

第一题求解：

设 (x,t) 给定在特征线 $x=at$ 和 t 轴之间.

则特征线与 t 轴相交于 $(0, t-\frac{x}{a})$，沿线 $\frac{du}{dt}=0$，$u=C$

从而 $u(x,t) = u(0, t-\frac{x}{a}) = u(t-\frac{x}{a})$

当 $x>at$，点 (x,t) 引的特征线与 x 轴交于 $(x-at, 0)$，

此时 $u(x,t) = \varphi(x-at)$

因经典解 $\in C^1(\mathbb{R}^2_+)$ 故 $u \in C^1([0,+\infty))$，$\varphi \in C^1([0,+\infty))$ 且 $u(0) = \varphi(0)$

又在 $(0,0)$ 处满足方程，故 $u'(0) + a\varphi'(0) = 0$

3. 对卷积求导相当于先求导再卷积

$$\frac{d\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi(y)\,dy\right)}{dx} = \frac{d\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y)f(y)\,dy\right)}{dx}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\varphi(x-y)}{dx} f(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi'(x-y)f(y)\,dy$$

由 $\rho=\rho(x)\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \rho(x-y)\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$

从而该卷积连续可微