# 偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

**邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn**

# 第14讲、热传导方程的估计

## 14.1 能量估计

考虑一维热传导方程的混合问题：

$$
\begin{aligned}
& u_t - a^2 u_{xx} = f(t,x), && (t,x) \in Q_T, \\
& u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, && t \in [0,T], \\
& u|_{t=0} = \phi(x), && x \in [0,l].
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中

$$Q_T = (0,T] \times (0,l).$$

定理14.1、设$u\in C^{1,0}(\bar{Q}_T)\cap C^{2,1}(Q_T)$是上述问题的解，则存在只与$T$有关的常数$M$，使得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T}\int_0^l u^2(t,x)dx+2a^2\int_0^T\int_0^l u_x^2(t,x)dtdx \\
\le\quad & M\left[\int_0^l \phi^2(x)dx+\int_0^T\int_0^l f^2(t,x)dtdx\right].
\end{aligned}
$$

其中记号$C^{2,1}(Q_T)$表示关于$x$二次连续可微、关于$t$一次连续可微。

证明：用$u$乘方程，积分得

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^l \frac{\partial u^2}{\partial t}dxdt - a^2\int_0^t\int_0^l uu_{xx}dxdt = \int_0^t\int_0^l ufdxdt.$$

分部积分（其它边界条件？)

$$\tfrac{1}{2}\int_0^l u^2(t,x)dx + a^2\int_0^t\int_0^l u_x^2 dxdt =$$

$$\leq \quad \tfrac{1}{2}\int_0^l \phi^2 dx + \tfrac{1}{2}\int_0^t\int_0^l u^2 dxdt + \tfrac{1}{2}\int_0^t\int_0^l f^2 dxdt.$$

记

$$G(t)=\int_0^t\int_0^l u^2dxdt,$$

$$F(t)=\int_0^l \phi^2dx+\int_0^t\int_0^l f^2dxdt.$$

则$F(t)$递增，$G(0)=0$并有

$$\frac{dG}{dt}=\int_0^l u^2dx\le G+F.$$

由Gronwall不等式，$G(t)\le(e^t-1)F(t)$.

代入得

$$\int_0^l u^2(t,x)dx + 2a^2\int_0^t\int_0^l u_x^2 dxdt$$

$$\leq \quad e^t\left[\int_0^l \phi^2 dx + \int_0^t\int_0^l f^2 dxdt\right].$$

从而

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^l u^2(t,x)dx + 2a^2\int_0^T\int_0^l u_x^2 dxdt$$

$$\leq \quad e^T\left[\int_0^l \phi^2 dx + \int_0^T\int_0^l f^2 dxdt\right].$$

证毕。

注：用$u_t$乘方程两边、积分。由于

$$u_t u_{xx} = [u_t u_x]_x - \frac{1}{2}\frac{\partial u_x^2}{\partial t},$$

得进一步的估计：

$$a^2 \sup_{0\le t\le T} \int_0^l u_x^2(t,x)dx + \int_0^T \int_0^l u_t^2 dxdt$$

$$\le \quad a^2 \int_0^l (\phi')^2 dx + \int_0^T \int_0^l f^2 dtdx.$$

## 14.2 弱极值原理

设$\Omega$是$d$维欧几里得空间的一开集，考虑定义在$(t,x)\in(0,T]\times\Omega\equiv Q_T$上的（二阶）微分算子

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(\cdots)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j(\cdots)\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

其中$[a_{ij}(\cdots)]$ 是一个对称半正定矩阵。

抛物边界：$Q_T$的侧面和底边（不包括上边！）

定理14.2（弱极值原理）：设$u=u(t,x)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$ 满足$Lu\leq 0$，则$u$的最大值在$Q_T$的抛物边界上取到。

证明：先设$Lu<0$. 设最大值在$(t_0,x_0)\in\bar{Q}_T$取到。若$(t_0,x_0)$不在$Q_T$的抛物边界上，那么有

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|_{(t_0,x_0)}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(t_0,x_0)}\begin{cases}=0, & t_0<T,\\ \geq 0, & t_0=T.\end{cases}$$

且$[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}]|_{(t_0,x_0)}$是一个对称半负定矩阵。结合下面的命题，有$(Lu)(t_0,x_0)\geq 0$，矛盾。

若$Lu \leq 0$情形: 对任意$\epsilon > 0$, 考虑辅助函数

$$v = u - \epsilon t.$$

则

$$Lv = Lu - \epsilon < 0.$$

（系数$(\ldots)$只依赖于空间导数）

根据上面证明的，$v$在$\bar{Q}_T$上的最大值在抛物边界取到：

$$\max_{\bar{Q}_T} v(t,x) = \max_{\partial_p Q_T} v(t,x).$$

于是

$$
\begin{aligned}
\max_{\bar{Q}_T} u(t,x) &= \max_{\bar{Q}_T}[v(t,x)+\epsilon t] \\
&\le \max_{\bar{Q}_T} v(t,x)+\epsilon T \\
&= \max_{\partial_p Q_T} v(t,x)+\epsilon T \\
&\le \max_{\partial_p Q_T} u(t,x)+\epsilon T.
\end{aligned}
$$

让$\epsilon$趋于零，得到所要结论。证毕。

命题：两个对称半正定矩阵的缩并非负。

证明：记给定的两个矩阵为$A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$. 由于$A$对称半正定，它有谱分解

$$A=\sum_k \lambda_k r_k r_k^T$$

其中$\lambda_k$ 是A的特征值（非负），$r_k$是相应的列特征向量。这样

$$a_{ij}=\sum_k \lambda_k r_{ki} r_{kj}$$

而它们的缩并为

$$\begin{aligned}\sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = & \sum_{ij}\sum_k \lambda_k r_{ki} r_{kj} b_{ij} = \sum_k \lambda_k \sum_{ij} r_{ki} b_{ij} r_{kj} \\ = & \sum_k \lambda_k r_k^T B r_k \geq 0.\end{aligned}$$

证毕。

弱：不排除最值在内部取到。

类似地，$Lu \geq 0$，最小值在抛物边界上取到。

$Lu = 0$，最大最小值都在抛物边界上取到。

比较原理（线性方程 ?)：$Lu \geq Lv$, 且在边界上$u \geq v$，则在内部$u \geq v$.

## 14.3 第一边值问题解的最大模估计

考虑第一边值问题

$$
\begin{aligned}
Lu = u_t - a^2 u_{xx} = \quad & f(t,x), \quad (t,x) \in (0,T] \times (0,l) \equiv Q_T, \\
u|_{t=0} = \quad & \phi(x), \quad x \in [0,l], \\
u|_{x=0} = \quad & g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t), \quad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{2}
$$

系数矩阵$[a_{ij}(\ldots)] = a^2$.

定理14.3：设是$u = u(t,x) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$是问题（2)的解，则

$$|u(t,x)| \leq FT + B.$$

其中

$$F = \sup_{Q_T} |f(t,x)|,$$

$$B = \max\{ \sup_{x\in[0,l]} |\phi(x)|, \sup_{t\in[0,T]} |g_1(t)|, \sup_{t\in[0,T]} |g_2(t)|\}.$$

证明：引入辅助函数

$$w(t,x) = Ft + B \pm u(t,x).$$

显然 $\quad Lw = F \pm Lu = F \pm f \geq 0.$

在$Q_T$的抛物边界上，$w \geq B \pm u \geq 0.$

由弱极值原理，$Ft + B \pm u(t,x) = w(x,t) \geq 0.$

证毕。

多维（线性）问题（系数矩阵$[a_{ij}(t,x)]$ 半正定）

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

唯一性.

连续依赖性（最大模）.

## 14.4　第二、三边值问题解的最大模估计

$$
\begin{aligned}
Lu = u_t - a^2 u_{xx} = &\quad f(t,x), \quad (t,x) \in (0,T] \times (0,l) \equiv Q_T, \\
u|_{t=0} = &\quad \phi(x), \quad x \in [0,l], \\
[-u_x + \alpha(t) u]|_{x=0} = &\quad g_1(t), \quad t \in [0,T], \\
[u_x + \beta(t) u]|_{x=l} = &\quad g_2(t), \quad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{3}
$$

其中　$\alpha(t) \geq 0, \quad \beta(t) \geq 0.$

定理14.4：设$u=u(t,x)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$是问题（3)的解，则存在只与$a,l,T$有关的常数$C$，使得

$$|u(t,x)|\leq C(F+B).$$

其中$F$ 和$B$ 同上一定理：

$$F=\sup_{Q_T}|f(t,x)|,$$

$$B=\max\{\sup_{x\in[0,l]}|\phi(x)|,\ \sup_{t\in[0,T]}|g_1(t)|,\ \sup_{t\in[0,T]}|g_2(t)|\}.$$

引理：设$u = u(t,x) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$满足

$$
\begin{aligned}
Lu = u_t - a^2 u_{xx} \geq & \quad 0, \\
u|_{t=0} \geq & \quad 0, \\
[-u_x + \alpha(t)u]|_{x=0} \geq & \quad 0, \\
[u_x + \beta(t)u]|_{x=l} \geq & \quad 0.
\end{aligned}
$$

则在$\bar{Q}_T$上，$u(t,x) \geq 0.$

证明：由于$Lu$非负，由弱极值原理，$u$的最小值一定在$Q_T$的抛物边界上取到。

先设$u$满足如下边界条件

$$
\begin{aligned}
[-u_x + \alpha(t)u]|_{x=0} > & \quad 0, \quad t \in [0, T], \\
[u_x + \beta(t)u]|_{x=l} > & \quad 0, \quad t \in [0, T].
\end{aligned}
$$

我们来证明$u$没有负的最小值。由引理假设，负最小值不能在$t=0$取到。

若在边界$x=0$某个点$P_0$取到负最小值，则

$$-u_x|_{P_0} \leq 0, \qquad \alpha(t)u|_{P_0} \leq 0,$$

与边界条件矛盾。边界$x=l$是类似的。

因此如上边界条件蕴含着$u(t,x) \geq 0$.

辅助函数（$\epsilon > 0$任意）

$$v = u + \epsilon\left[2a^2t + (x - \frac{l}{2})^2\right].$$

计算得：$Lv = Lu \geq 0$,

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} + \epsilon(x - \tfrac{l}{2})^2 \geq 0, \quad x \in [0, l],$$

$$[-v_x + \alpha(t)v]|_{x=0} = [-u_x + \alpha(t)u]|_{x=0}$$

$$+\epsilon\left[l + \alpha(t)(2a^2t + \tfrac{l^2}{4})\right] > 0, \quad t \in [0, T].$$

同理

$$[v_x + \beta(t)v]|_{x=l} > 0, \quad t \in [0, T].$$

根据上面证明的，$v(t,x) \geq 0$，即

$$u(t,x) \geq -\epsilon\left[2a^2t + (x - \frac{l}{2})^2\right] \geq -\epsilon\left[2a^2T + \frac{l^2}{4}\right].$$

由$\epsilon$的任意性，证毕。

定理14.4的证明：引入辅助函数

$$w(t,x) = Ft + Bz(t,x) \pm u(t,x).$$

其中

$$z(t,x) = 1 + \frac{1}{l}\left[2a^2 t + \left(x - \frac{l}{2}\right)^2\right] \geq 1.$$

计算得

$$Lz = z_t - a^2 z_{xx} = \frac{2a^2 - 2a^2}{l} = 0$$

以及

$$
\begin{aligned}
z|_{t=0} &\geq \quad 1, \\
[-z_x+\alpha(t)z]|_{x=0} &\geq \quad -z_x|_{x=0}=1, \\
[z_x+\beta(t)z]|_{x=l} &\geq \quad 1.
\end{aligned}
$$

因而

$$Lw=F+BLz\pm Lu=F+B0\pm f(t,x)\geq 0,$$

$$w|_{t=0}\geq B\pm\phi\geq 0,$$

$$[-w_x+\alpha(t)w]|_{x=0}\geq B\pm g_1\geq 0,$$

$$[w_x+\beta(t)w]|_{x=l}\geq B\pm g_2\geq 0.$$

由引理，$w(t,x) \geq 0$. 从而

$$|u(t,x)| \leq Ft + Bz(t,x) \leq FT + B\left(1 + \frac{2a^2T}{l} + \frac{l}{4}\right)$$

取

$$C = \max\left\{T, 1 + \frac{2a^2T}{l} + \frac{l}{4}\right\}$$

即可，证毕。

作业：pp160：13，14，18，22，23