偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第12讲、一维波动方程的广义解

关于波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f,$$

到目前为止已经介绍了下列求解方法：

- 算子分裂结合特征线方法（D’Alembert公式）：一维波动方程初值问题。

- 延拓法: 一维弦振动方程半空间问题。

- 球面平均方法（Kirchhoff公式）：三维波动方程初值问题。

- 降维法（Poisson公式）：二维波动方程初值问题。

- 分离变量法（Sturm-Liouville问题, 齐次边界条件): 一维波动方程的混合问题。

从已知的求解公式或理论结果，我们知道：

要有经典解，问题的定解数据应具有一定的光滑性并满足某些相容性条件；否则可能没有（经典）解。

例如：两端固定弦线，从其间某点提起弦线，使其离开平衡位置，然后轻轻放下，使弦线作微小横振动（初始位移分段线性，初始速度为零）。物理上，弦在任意时刻的振动是确定的，应有唯一解。

然而，根据之前的讨论，解有奇性（短时间内，初值分段线性、不可微），沿特征线传播并在边界反射，所以没有经典解。

这样，如果只考虑经典解，所得结论的使用范围就大打折扣。

需要扩充解的函数类，重新定义解，称之为广义解！

另外，回忆波动方程的导出，我们先有微元上的积分形式，在解是充分光滑的情况下从积分形式得到的。

基本要求：经典解应是广义解。

适定性：广义解最好是唯一的，并在某种合理的意义下连续依赖于定解数据。

12.1 广义解的定义

设$u = u(t,x)$是下列问题（简单起见!）的经典解

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = &\quad 0, \qquad t > 0,\ x \in (0,l), \\
u(t,0) = u(t,l) = &\quad 0, \qquad t > 0, \\
u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = &\quad \psi(x), \qquad x \in (0,l).
\end{aligned} \tag{1}
$$

记

$$Q_T = \{(t,x) \in (0,T) \times (0,l)\}.$$

设$\zeta = \zeta(t,x) \in C^2(\bar{Q}_T)$. 用$\zeta$乘波动方程(1)两边，然后在$Q_T$上积分得到

$$\int_{Q_T} \zeta(u_{tt} - a^2 u_{xx}) dtdx = 0.$$

运用分部积分（将u的导数转移到ζ上去）并利用边界条件，得到

$$\int_{Q_T} (\zeta_{tt} - a^2 \zeta_{xx}) udtdx + \int_0^l (u_t \zeta - u\zeta_t)|_0^T dx - a^2 \int_0^T (u_x \zeta)|_0^l dt = 0.$$

如果ζ满足

$$\zeta(T,x)=\zeta_t(T,x)=\zeta(t,0)=\zeta(t,l)=0,$$

则上式成为

$$\int_{Q_T}(\zeta_{tt}-a^2\zeta_{xx})u\,dt\,dx+\int_0^l[\phi\zeta_t(0,x)-\psi\zeta(0,x)]dx=0. \tag{2}$$

可见问题（1）的经典解满足（2），其中

$$\zeta\in\mathcal{D}:=\{\zeta\in C^2(\bar{Q}_T):\zeta(T,x)=\zeta_t(T,x)=\zeta(t,0)=\zeta(t,l)=0\}.$$

是任意的。

反之，若$u = u(t,x)$是二次连续可微的，且对任意$\zeta \in \mathcal{D}$式（2）成立，容易看见u是经典解。

广义解的定义：设$u = u(t,x)$是闭集$\bar{Q}_T$上的连续函数。若对任意$\zeta \in \mathcal{D}$，式（2）成立，则称u为问题（1）的广义解。

称ζ为试验函数，$\mathcal{D}$为试验函数集。

12.2 广义解的唯一性

定理12.1：问题（1）的广义解是唯一的。

证明：(用到经典解的有关结果！）设有两个解u_1和u_2. 那么它们显然满足

$$\int_{Q_T}[u_1 - u_2](\zeta_{tt} - a^2\zeta_{xx})dtdx = 0, \qquad \forall \zeta \in \mathcal{D}.$$

选试验函数ζ使得

$$\zeta_{tt} - a^2\zeta_{xx} = g(t,x), \quad (t,x) \in Q_T$$

$$\zeta(t,0) = \zeta(t,l) = 0, \quad 0 < t < T$$

$$\zeta(T,x) = \zeta_t(T,x) = 0, \quad 0 < x < l,$$

其中$g = g(t,x) \in C_0^\infty(Q_T)$是任意的。

令

$$\tau = T - t, \qquad \bar{\zeta}(\tau, x) = \zeta(T - \tau, x).$$

易见$\bar{\zeta}$满足

$$\bar{\zeta}_{\tau\tau} - a^2 \bar{\zeta}_{xx} = g(T - \tau, x), \quad (\tau, x) \in Q_T,$$

$$\bar{\zeta}(\tau, 0) = \bar{\zeta}(\tau, l) = 0, \quad 0 < \tau < T,$$

$$\bar{\zeta}(0, x) = \bar{\zeta}_\tau(0, x) = 0, \quad 0 < x < l,$$

由于$g = g(t,x)$充分光滑，且在Q_T的边界附近取零值，故在Q_T的角点(0, 0)和(0, l)满足之前的相容性条件：

$$\bar{\zeta}(0,0) = \bar{\zeta}_\tau(0,0) = \bar{\zeta}(0,l) = \bar{\zeta}_\tau(0,l) = 0,$$

$$(\bar{\zeta}_{tt} - a^2\bar{\zeta}_{xx})_{(0,0)} = g(T,0) = 0,$$

$$(\bar{\zeta}_{tt} - a^2\bar{\zeta}_{xx})_{(0,l)} = g(T,l) = 0.$$

根据定理10.2，对任意$g \in C_0^\infty(Q_T)$，可由分离变量法得到经典解$\bar{\zeta} \in C^2(\bar{Q}_T)$.

这样得到$\zeta(t,x)=\bar{\zeta}(T-t,x)\in\mathcal{D}$满足

$$\zeta_{tt}-a^2\zeta_{xx}=g(t,x).$$

代入

$$\int_{Q_T}[u_1-u_2](\zeta_{tt}-a^2\zeta_{xx})dtdx=0$$

得到

$$\int_{Q_T}[u_1-u_2]gdtdx=0,\qquad \forall g\in C_0^\infty(Q_T).$$

由于g是任意的，故$u_1=u_2$. 证毕。

注1、用（对偶问题）解的存在性证原问题解的唯一性，是证明唯一性的一个传统的方法，对有些非线性问题也有效。

注2、（连续依赖性）设$u_i(i=1,2)$分别是对应于初值ϕ_i, ψ_i 的广义解，通过适当的选取g，可以证明（作业）

$$\int_{Q_T} |u_1 - u_2|^2 dtdx \leq C\left(\int_0^l |\phi_1 - \phi_2|^2 dx + \int_0^l |\psi_1 - \psi_2|^2 dx\right).$$

12.3 广义解的存在性

定理12.2. 设$\phi = \phi(x) \in C[0, l], \phi(0) = \phi(l) = 0$, ϕ'在区间$[0, l]$上分片连续（可以分部积分）；ψ平方可积。那么问题（1）有唯一的广义解，且可以通过分离变量法得到。

证明：只需证存在性。根据假设，ϕ和ψ可以按特征函数系$\{\sin\frac{n\pi x}{l}\}$展开：

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中ϕ_n, ψ_n是展开系数。

用S_N和T_N分别这两个级数的前N项部分和。

考虑混合问题

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (t, x) \in Q_T$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad 0 < t < T$$

$$u(0, x) = S_N(x), \quad u_t(0, x) = T_N(x), \quad 0 < x < l.$$

固定N，这个混合问题的定解数据显然满足定理10.2的条件。根据定理10.2, 所以这个混合问题有唯一经典解

$$u_N(t, x) = \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \sin \frac{an\pi}{l} t + B_n \cos \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$A_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

那么$u_N = u_N(t,x)$是广义解：对任意试验函数$\zeta \in \mathcal{D}$下式

$$\int_{Q_T}(\zeta_{tt} - a^2\zeta_{xx})u_N dtdx + \int_0^l [S_N\zeta_t(0,x) - T_N\zeta(0,x)]dx = 0.$$

成立。

让N趋于无穷大，后一个积分趋于广义解定义式中想要的：

$$\int_0^l [S_N\zeta_t(0,x) - T_N\zeta(0,x)]dx \longrightarrow \int_0^l [\phi\zeta_t(0,x) - \psi\zeta(0,x)]dx.$$

这是由于特征函数系的完备性，蕴含着当N趋于无穷大时，

$$\|S_N - \phi\|_{L^2(0,l)} \to 0, \qquad \|T_N - \psi\|_{L^2(0,l)} \to 0$$

(强收敛蕴含着弱收敛)

为了说明第一项的收敛性，注意

$$
\begin{aligned}
B_n = \quad & \phi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\
= \quad & \frac{2}{n\pi}\left[-\phi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l + \int_0^l \phi'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right] \\
= \quad & \frac{2}{n\pi}\int_0^l \phi'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{l}{n\pi}\phi_n^{(1)}.
\end{aligned}
$$

记

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$w_N=u-u_N.$$

那么

$$\begin{aligned}
|w_N(t,x)| \leq & \quad \sum_{n=N+1}^{\infty}(|A_n|+|B_n|) \\
\leq & \quad \sum_{n=N+1}^{\infty}\tfrac{l}{an\pi}(|\psi_n|+a|\phi_n^{(1)}|) \\
\leq & \quad \tfrac{\sqrt{2}l}{a\pi}\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}\tfrac{1}{n^2}\right]^{1/2}\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|\psi_n|^2+a^2|\phi_n^{(1)}|^2\right)\right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

由Bessel不等式，得到

$$\lim_{N\to\infty}\|w_N\|_{C(\bar{Q}_T)}=0.$$

即连续函数列$\{u_N\}$一致收敛到u. 所以由前式得到

$$\int_{Q_T}(\zeta_{tt}-a^2\zeta_{xx})udtdx+\int_0^l[\phi\zeta_t(0,x)-\psi\zeta(0,x)]dx=0.$$

即连续函数u是广义解。证毕。

作业：89页附注2（提示：选取适当的g, 利用83页的能量估计定理4.3),

pp106. 27，29