偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第20讲、位势方程

20.1、 全空间位势方程的解

定理20.1：设$f = f(x) \in C_0^2(\mathbf{R}^d)$. 那么

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^d} E(x-y)f(y)dy$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \ln|x-y|f(y)dy, & d=2, \\ \frac{1}{(d-2)\omega_d}\int_{\mathbf{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-2}}dy, & d \geq 3, \end{cases} \in C^2(\mathbf{R}^d)$$

是Poisson方程

$$-\Delta u = f, \qquad x \in \mathbf{R}^d,$$

的经典解。

证明：注意到基本解

$$E = E(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x|, & d = 2, \\ \frac{1}{(d-2)\omega_d|x|^{d-2}}, & d \geq 3, \end{cases}$$

有奇性但是局部可积的。由

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^d} E(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbf{R}^d} E(y)f(x-y)dy$$

和Lebesgue控制收敛定理（考虑差商），容易得到u 是二次连续可微的（也可以不用Lebesgue定理，而通过f及其导数的一致收敛性），并且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \int_{\mathbf{R}^d} E(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)dy.$$

这样，

$$
\begin{aligned}
\Delta u = & \int_{\mathbf{R}^d} E(y)\Delta f(x-y)dy \\
= & \left[\int_{|y|\le\epsilon} + \int_{|y|>\epsilon}\right] E(y)\Delta f(x-y)dy \equiv I1 + I2.
\end{aligned}
$$

而当ϵ趋于0时，第一项趋于0。这是因为

$$
\begin{aligned}
|I1| \le & \max|\Delta f| \int_{|y|\le\epsilon} |E(y)|dy \\
\le & C\max|\Delta f|\epsilon^2 \begin{cases} |\ln\epsilon|, & d=2, \\ 1, & d\ge 3. \end{cases}
\end{aligned}
$$

对于第二项，由Gauss公式，

$$
\begin{aligned}
I2 = \quad & \int_{|y|>\epsilon} E(y)\Delta_y f(x-y)dy \\
= \quad & -\int_{|y|>\epsilon} \nabla_y E(y)\cdot\nabla_y f(x-y)dy \\
& -\int_{|y|=\epsilon} E(y)\tfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(x-y)dS_y.
\end{aligned}
$$

当ϵ趋于0时，这里的第二项也趋于0:

$$
\left|-\int_{|y|=\epsilon} E(y)\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(x-y)dS_y\right| \le C\max|\nabla f|\epsilon\begin{cases} |\ln\epsilon|, & d=2, \\ 1, & d\ge 3. \end{cases}
$$

所以只需考虑

$$
\begin{aligned}
& -\int_{|y|>\epsilon} \nabla_y E(y) \cdot \nabla_y f(x-y) dy \\
= \quad & \int_{|y|>\epsilon} \Delta_y E(y) f(x-y) dy \\
& + \int_{|y|=\epsilon} \frac{\partial E}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(y) f(x-y) dS_y \\
= \quad & \int_{|y|=\epsilon} \frac{\partial E}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(y) f(x-y) dS_y .
\end{aligned}
$$

而

$$\nabla E = -\frac{x}{\omega_d |x|^d} \qquad (x \neq 0),$$

球心在原点的球面的外法向是$\frac{x}{|x|}$. 所以在球面$|x| = \epsilon$上,

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{x}{|x|}, \qquad \frac{\partial E}{\partial \vec{\mathbf{n}}} = \vec{\mathbf{n}} \cdot \nabla E = -\frac{1}{\omega_d |x|^{d-1}},$$

这样，

$$
\begin{aligned}
& -\int_{|y|>\epsilon} \nabla_y E(y) \cdot \nabla_y f(x-y) dy \\
= \quad & \int_{|y|=\epsilon} \frac{\partial E}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(y) f(x-y) dS_y \\
= \quad & -\frac{1}{\omega_d \epsilon^{d-1}} \int_{|y|=\epsilon} f(x-y) dS_y \to -f(x).
\end{aligned}
$$

证毕。

唯一性？不唯一!

对右端项$f = f(x)$的正则性要求$f = f(x) \in C_0^2(\mathbf{R}^d)$可以放松
(看Gilbarg & Trudinger：Elliptic partial differential equations of second order)

有界区域问题的基本解

$$-\Delta u = f, \qquad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d.$$

20.2、 Green第一公式

Gauß散度定理: 设有界开集$\Omega \subset \mathbf{R}^d$有分片光滑的边界$\partial\Omega$（可以是多连通区域），$w = (w_1, w_2, \cdots, w_d)$在$\overline{\Omega}$ 上连续，在Ω内连续可微，则

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} w \cdot \vec{\mathbf{n}} dS,$$

其中dx是体积微元，$\vec{\mathbf{n}}$是边界$\partial\Omega$的外法方向，dS是面积微元。

设u和v的导数都在$\bar{\Omega}$上连续，在Ω内连续可微。在散度定理中取

$$w_j = u\frac{\partial v}{\partial x_j},$$

则有Green第一公式

$$\int_{\Omega} u\Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathbf{n}}} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

定理21.1的证明中已两次用到这个。

位势方程的唯一性（能量模估计以后再议）：位势方程

$$-\Delta u = f, \qquad x \in \Omega,$$

与边界条件

$$u|_{\partial\Omega} = g(x)$$

或

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} + \alpha(x)u\right]\Big|_{\partial\Omega} = g(x)$$

组成的边值问题最多只有一个解$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$，这里$\alpha(x)$是非负的。

证明：不然的话，设u是两个这样解的差，则u满足

$$-\Delta u = 0, \qquad x \in \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

或

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} + \alpha(x)u\right]\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

由Green第一公式

$$0 = \int_{\Omega} u[-\Delta u]dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} dS$$

由于$\alpha(x)$是非负的，所以无论那种边界条件，都有

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} dS \le 0.$$

这样u是一常值。

对第一种边界条件，有$u = 0$.

若$\alpha(x)$不恒为零，则为第三种边界条件，此时也有$u = 0$.

若$\alpha(x)$恒为零（第二种边界条件），则除了一个常数，解是唯一的(显然)。

20.3、 Green第二公式

在Green第一公式中交换u和v，得

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} dS - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx.$$

两式相减得Green第二公式

$$\int_\Omega [u\Delta v - v\Delta u] dx = \int_{\partial\Omega} \left[u\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\right] dS.$$

第二公式涉及到两个函数u和v. 如果u是我们关心的，v是任意的，这个公式提供了一个u的约束!

通过选取不同的v，可以得到关于u的不同的约束。

回忆基本解$E = E(x)$的奇点是原点。奇点以外，它是无穷次光滑的且满足Laplace方程。

若取v为基本解，会得到什么？

为此，设$\xi \in \Omega$, $\epsilon > 0$充分小以至于以ξ为中心以ϵ为半径的小球完全位于Ω内。

定义

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : |x - \xi| > \epsilon\}.$$

（与ξ也有关）

在Ω_ϵ上运用Green第二公式，取

$$v = v(x) = E(\xi - x).$$

那么

$$
\begin{aligned}
& -\int_{\Omega_\epsilon} E(\xi - x)\Delta u(x)dx \\
= \quad & \int_{\partial\Omega} \left[u(x)\frac{\partial E}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(\xi - x) - E(\xi - x)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(x)\right] dS \\
& -\int_{|x-\xi|=\epsilon} \left[u(x)\frac{\partial E}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(\xi - x) - E(\xi - x)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(x)\right] dS.
\end{aligned}
$$

由于基本解局部可积，这个等式的左端在ϵ趋于零时有清楚的极限。右端第一个积分与ϵ无关。

现在来看右端的第二个积分。

对于第二项，显然有估计

$$\left|\int_{|x-\xi|=\epsilon} E(\xi - x)\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(x)dS\right| \leq C \max|\nabla u|\epsilon \begin{cases} |\ln \epsilon|, & d = 2, \\ 1, & d \geq 3 \end{cases} \to 0.$$

而对于第一项，回忆

$$\nabla E(x) = -\frac{x}{\omega_d |x|^d} \quad (x \neq 0),$$

在球面$|x| = \epsilon$上，

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{x}{|x|}, \qquad \frac{\partial E}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(x) = \vec{\mathbf{n}} \cdot \nabla E = -\frac{1}{\omega_d |x|^{d-1}},$$

这样第一项为

$$\int_{|x-\xi|=\epsilon} u(x)\frac{\partial E}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(\xi - x)dS = -\frac{1}{\omega_d \epsilon^{d-1}}\int_{|x-\xi|=\epsilon} u(x)dS \to -u(\xi).$$

整理得

定理20.2: 设有界开集Ω的边界分片光滑（Gauss散度定理成立的区域），$\xi \in \Omega$，$u = u(x)$是一$C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$函数，则

$$\begin{aligned} u(\xi) = \quad & -\int_\Omega E(\xi - x)\Delta u(x)dx \\ & + \int_{\partial\Omega} \left[E(\xi - x)\tfrac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(x) - u\tfrac{\partial E}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(\xi - x)\right] dS. \end{aligned}$$

考虑到位势方程的形式（给定Δu），这个定理暗示全空间问题的基本解$E = E(x)$已经接近有界区域问题的基本解（比较定理20.1)!

这个式子表明位势方程的解u在其定义域Ω内任意一点的值可由它的边界值已及边界上的法向导数值确定。

然而由前面证明的唯一性，不能同时给定u的边界值和它的法向导数值!

作为Green第二公式的一个应用，考虑下列（也可以是其它齐次边界条件）特征值问题：

若有复数λ使得边值问题

$$-\Delta u + \lambda u = 0, \qquad x \in \Omega,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

有非零解$u = u_\lambda(x)$，则称λ为特征值, 称$u_\lambda(x)$为相应的特征函数。

命题：第二边值问题

$$-\Delta u + \lambda u = f(x), \qquad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\Big|_{\partial\Omega} = \phi(x), \qquad x \in \partial\Omega,$$

有属于$C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$解的必要条件是对于相应的齐次问题的任意解$u_\lambda(x)$，都有

$$\int_\Omega u_\lambda(x) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} u_\lambda(x)\phi(x) dS = 0.$$

证明：在Green第二公式中，取$v = u_\lambda$得

$$\int_\Omega [u\Delta u_\lambda - u_\lambda \Delta u]dx = \int_{\partial\Omega} \left[u\frac{\partial u_\lambda}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - u_\lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \right] dS.$$

由方程和边界条件，上式右端

$$\int_{\partial\Omega} \left[u\frac{\partial u_\lambda}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - u_\lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \right] dS = -\int_{\partial\Omega} u_\lambda \phi dS.$$

而左端

$$\int_\Omega [u\Delta u_\lambda - u_\lambda \Delta u]dx = \int_\Omega [u\lambda u_\lambda + u_\lambda (f - \lambda u)]dx = \int_\Omega u_\lambda f dx.$$

证毕。

推论：Poisson方程的第二边值问题

$$-\Delta u = f(x), \qquad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\Big|_{\partial\Omega} = \phi(x), \qquad x \in \partial\Omega,$$

有解的必要条件是

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\partial\Omega} \phi dS = 0.$$

特别，Ω内的调和函数$u = u(x)$满足

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} dS = 0.$$

进一步，球内$|x - \xi| < a$的调和函数具有下列重要的球面平均性质

定理20.3: 设$u = u(x)$是球内$|x-\xi| < a$的调和函数，那么

$$u(\xi) = \frac{1}{a^{d-1}\omega_d} \int_{|x-\xi|=a} u(x) dS_x.$$

证明：在定理21.2中，$\Delta u = 0$，在球面$|x-\xi| = a$上, $E(x-\xi)$和

$$\frac{\partial E(x-\xi)}{\partial \vec{\mathbf{n}}} = -\frac{1}{a^{d-1}\omega_d}$$

都是常值。证毕。

作业1: 求高维位势方程的基本解（19讲）

作业2：利用球坐标变换（不用Fourier变换），导出三维位势方程的基本解

作业pp.212-220，15, 16