偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第3讲、三类二阶偏微分方程的导出

这节我们说明本课程关注的三类（线性）二阶偏微分方程定量地表述了各种应用场景下的物理定律。

3.1、能量守恒定律与热传导方程

考虑三维空间中一均匀、各向同性的物体。假定它内部有热源，并且与周围介质有热交换。我们的问题是如何确定物体内部温度的分布及其随时间的变化。

针对这一物理问题，我们首先注意物体内部由于各部分温度不同，导致热量由高温处到低温处的传递。热是一种能量，其传递遵循能量守恒定律。

为了数学上表述这一定律，我们设物体占据的区域为$\Omega \subset \mathbf{R}^3$，物体内部$x \in \Omega$处在时刻$t > 0$ 的温度是$u = u(t, x)$.

为了确定温度$u = u(t, x)$，我们采用微元法，即任取一空间区域$D \subset \Omega$和一时间段$[t_1, t_2]$. 根据能量守恒定律，D中热量在时间段$[t_1, t_2]$内的增加等于通过它的边界流入的热量与其内热源所生成的热量的总和。这三种热量可以计算如下：

- D中热量的增加等于

$$\int_D c\rho(u|_{t_2} - u|_{t_1})dV,$$

其中$\rho = \rho(t, x)$是时刻t位置x的体密度，c是比热容（单位质量的物体温度升高一度所需要的热量，单位J/kg·K)。

- 内部产生的热量是

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_D \rho(t,x) f(t,x) dV,$$

其中$f = f(t,x)$ 是热源强度。$f > 0$热源，$f < 0$热汇。

- 过D的表面∂D流入的热量是

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{\partial D} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS,$$

其中**q**(向量）热流密度（单位面积)，**n**表面单位外法向量(−**n**是流入的方向)。

那么能量守恒定律可表述为

$$\int_D c\rho(u|_{t_2} - u|_{t_1})dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{\partial D} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D \rho(x,t)f(x,t)dV. \tag{1}$$

对上式右端第一项（边界积分）利用Gauss散度定理得到

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_D c\rho u_t dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_D \nabla\cdot\mathbf{q}dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D \rho(x,t)f(x,t)dV,$$

这里假设比热容c和密度ρ都与时间t无关。

由于D和时间区间$[t_1,t_2]$的任意性，我们得到

$$c\rho u_t + \nabla\cdot\mathbf{q} = \rho f. \tag{2}$$

这是能量守恒定律的一个数学表示。

注：上述推导只是形式的，很不严谨：我们在使用Gauss散度定理，但不清楚该定理的前提条件是否成立。尤其是温度u是未知的从而其光滑性也是未知的。

但这样的推导是典型的，贯穿在大多数科学发现中，其有效性往往是通过所得到的结果是否正确而判定的。

本书后面介绍的求解偏微分方程的许多方法也具有这样的不严谨性：我们先充分利用已有的知识得到一个形式解，然后再验证这个形式解是真解。

关于热流密度$\mathbf{q}$, 我们知道它的出现是由于温度的空间不均匀，根据Fourier热传导定律（一个经验规律）

$$\mathbf{q} = -k\nabla u.$$

另外，$k > 0$ 表示热量的传递是从高温到低温。

结合Fourier热传导定律和能量守恒定律（2），我们得到

$$c\rho u_t - \nabla \cdot (k\nabla u) = \rho f.$$

若比热容c，密度ρ以及热传导系数k都是常数的情形，这个方程可以写作

$$u_t - a^2\Delta u = f/c$$

其中$a^2 = \frac{k}{c\rho}$. （除了常数a^2和右端项f, 这个正是1.1节的例3.）

正如求解常微分方程或一阶输运方程一样，为了确定$u = u(t,x)$, 还需要指定初始条件和适当的边界条件（混合问题）。

初始条件($t = 0$)

$$u(0,x) = u_0(x).$$

对于物体占据了全空间的情形（一种理想情形），此时只需初始条件，这样的问题称为初值问题或Cauchy问题。

一般情形，还需要边界条件($t > 0, x \in \partial\Omega$; 三种)：

第一边界条件（Dirichlet，边界温度已知）

$$u(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=g(t,x).$$

第二边界条件（Neumann，通过边界的热量已知）

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{x\in\partial\Omega}=h(t,x).$$

(绝热：$h=0$)

第三边界条件（Robin，通过边界与周围介质有热交换）

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{x\in\partial\Omega}=\alpha(g(t,x)-u),$$

其中α称作热交换系数。

方程（物理）简化

(1). 一维热传导：

Ω是一细杆，侧表面绝热，热交换只在两端进行。初始温度、热源在任何垂直截面上变化很小，即初值、右端只依赖于x. 物理上，杆内温度可以表示为二元函数$u = u(t, x)$，满足

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(t, x),$$

得到一维热传导方程。

(2). 球对称问题：

Ω是一球体，球表面与周围介质有热交换；球面上各点所受周围介质的影响相同，球内任意一点的初始温度、热源强度只依赖于该点离球心的距离而与方位无关。

设Ω半径的为R，取球心为坐标原点，记r为点$(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$到球心的距离。那么球内温度可以表示为二元函数$u = u(t, r)$.

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{x_j}{r}\frac{\partial u}{\partial r},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=\frac{x_j^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{r^2-x_j^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\Delta u=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2},$$

热传导方程成为

$$u_t-a^2\Delta u=u_t-a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r})=f(t,r).$$

或($v=ru$)

$$v_t-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=rf(t,r).$$

(3). 轴对称问题（柱坐标）：

Ω是一圆柱体，柱坐标：轴线z, 柱内任意一点的初始温度、热源强度只依赖于z和该点离轴线心的距离r，边界条件也如此。那么温度$u = u(t, r, z)$ (三元函数）满足（类似于球坐标情形）

$$u_t - a^2 \Delta u = u_t - a^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) = f(t, r, z).$$

对于无穷长柱体（边界条件、初始条件，热源强度不依赖于z)。温度$u = u(t, r)$ (二元函数）满足

$$u_t - a^2 \Delta u = u_t - a^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}) = f(t, r)$$

(4). 经验表明，长时间后物体内部各处的温度将不再随时间变化，即$u = u(t, x)$与时间无关。那样一来，温度的分布满足

$$-\Delta u = \frac{f}{ca^2},$$

这个称作位势方程（除了右端项, 这个正是1.1节的例2)。

3.2、质量守恒定律与连续性方程

考虑一空间区域内的流体流动。类似于热传导方程的导出，在流场中任取一空间区域D和一时间段$[t_1, t_2]$. 根据质量守恒定律，这一时空区域内流体质量的变化等于通过D的表面流入的质量（dt时间内通过D的表面上任意小块dS流入的质量为$-\rho v \cdot \mathbf{n} dSdt$）。

由此可以导出流体流动中的连续性方程

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho v) = 0,$$

其中$\rho = \rho(t, x)$是流体密度，向量值函数$v = v(t, x)$是流体速度。

这是流体力学中的一个基本方程。它不是封闭的（一个等式，多个未知量$\rho = \rho(t, x)$和$v = v(t, x)$）。完整的流体力学方程组还包含动量方程（Euler方程）和能量守恒方程。

在v是常值时，我们得到多维线性输运方程

$$\rho_t + v \cdot \nabla \rho = 0.$$

在研究交通流的早期文献中，工程师们给出如下的经验公式

$$v = v(\rho).$$

这个公式表示汽车的速度依赖于路上车的密度，比如密度很大时，汽车速度v就不能很大。把连续性方程与这样的经验公式结合起来，我们就得到之前研究过的一阶非线性守恒律方程。

另一方面，对不可压流体, 密度ρ是个常值, 此时我们得到

$$\nabla \cdot v = 0,$$

这是不可压Navier-Stokes方程的一部分。

作业： pp.27, 6, 7, 10, 18.