偏微分方程

第23讲

雍稳安

清华大学数学科学系

25. Mai 2023

第23讲、调和函数

1、调和函数的性质

定义：$\Omega \subset R^d$开, $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$, 则称$u = u(x)$是Ω内的调和函数。

- 调和函数是Laplace方程的解，所以满足相应的极值原理、最大模估计、能量估计等

之前（22讲）已说过调和函数具有球面平均性质，这里是一个更完整的讨论。

用$B_R(x)$表示中心在$x \in R^d$半径为$R > 0$的球。

对$x \in B_R(x) \subset \Omega$, $0 < r \leq R$, 定义

$$
\begin{aligned}
h(x, r) = &\quad \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{|\omega|=1} u(x + r\omega) dS_\omega \\
= &\quad \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{|y-x|=r} u(y) dS_y.
\end{aligned}
$$

注意u在x处的连续性蕴含着

$$
\lim_{r \to 0^+} h(x; r) = u(x).
$$

利用Gauss积分公式和

$$|B_r(0)| = \frac{r}{d}|\partial B_r(0)|,$$

计算

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(x,r)}{\partial r} &= \tfrac{1}{|\partial B_1(0)|}\int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla_x u(x + r\omega) dS_\omega \\
&= \tfrac{1}{|\partial B_r(0)|}\int_{|y-x|=r} \tfrac{y-x}{r} \cdot \nabla_x u(y) dS_y \\
&= \tfrac{1}{|\partial B_r(0)|}\int_{|y-x|=r} \tfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) dS_y \\
&= \tfrac{r}{d}\tfrac{1}{|B_r(0)|}\int_{|y-x|\le r} \Delta u(y) dy.
\end{aligned}$$

有了这个恒等式，可以很容易证明下列

定理23.1（定理2.10，习题24）：若u在Ω内调和，则$\forall r \in (0, R]$有

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{|y-x|=r} u(y) dS_y = \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{|y-x|\leq r} u(y) dy.$$

反之，若$h(x, r)$与$r \in (0, R]$无关，则$\Delta u(x) = 0$.

证明：若u在Ω内调和，则对所有的$r \in (0, R]$有$\frac{\partial h(x,r)}{\partial r} = 0$. 那么$h(x, r)$不依赖于$r \in (0, R]$,

$$u(x) = \lim_{r \to 0^+} h(x; r) = \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{|y-x|=r} u(y) dS_y.$$

进而，

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{|B_r(0)|}\int_{|y-x|\le r} u(y)dy \\
= \quad & \frac{d}{r^d|\partial B_1(0)|}\int_0^r\int_{|\omega|=1}\epsilon^{d-1}u(x+\epsilon\omega)d\omega d\epsilon \\
= \quad & u(x)\frac{d|\partial B_1(0)|}{r^d|\partial B_1(0)|}\int_0^r\epsilon^{d-1}d\epsilon = u(x).
\end{aligned}
$$

反之，有x使得$\Delta u(x)\neq 0$, 不妨设$\Delta u(x)>0$. 那么有$a>0$使得对所有满足$|y-x|<a$的y, $\Delta u(y)>0$. 根据上式，对$r\in(0,a]$, $\frac{\partial h(x,r)}{\partial r}>0$, 与假设矛盾。

证毕。

作为平均值刻画的简单应用，我们来证明调和函数的Harnack不等式和C^∞光滑性。

Harnack不等式：对于Ω的任意连通子集$V \subset\subset \Omega$，存在只与V有关的正常数C使得Ω内的任一非负调和函数$u = u(x)$ 满足

$$\max_{x\in V} u(x) \leq C \min_{x\in V} u(x).$$

证明：给定V，设$r = \frac{1}{4}\mathrm{dist}(V, \partial\Omega)$. 对于任意$x, y \in V$满足$|x-y| \le r$，由平均值刻画

$$u(x) = \frac{1}{|B_{2r}(x)|}\int_{B_{2r}(x)} u(z)dz \ge \frac{1}{2^d r^d |B_1(0)|}\int_{B_r(y)} u(z)dz = \frac{1}{2^d}u(y),$$

这里的不等号是由于$u \ge 0$. 这样对于任意$x, y \in V$满足$|x-y| \le r$，有

$$2^{-d}u(y) \le u(x) \le 2^d u(y).$$

由于$\bar{V}$是紧的，存在N个半径为$r/2$的小球，它们的并覆盖了$\bar{V}$。

设P, Q分别是$u = u(x)$在$\bar{V}$上的最大最小值点。由于V是连通的（其内必有一条连接P和Q的折线，图），那N个球有n个$B_1, \cdots, B_n$（$n \leq N$）满足

$$P \in B_1, \qquad B_j \cap B_{j-1} \neq \emptyset, \qquad Q \in B_n,$$

那么

$$u(P) \leq 2^{nd} u(Q) \leq 2^{Nd} u(Q).$$

证毕。

定理23.2（C^∞光滑性）：若u在Ω内调和，则$u \in C^\infty(\Omega)$.

（只在Ω内部！）

证明：对任意$\epsilon > 0$, 记

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega; \mathsf{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}.$$

设$\rho = \rho(|x|)$是标准的光滑子。

$$\rho = \rho(|x|) = \frac{1}{c}\begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

其中c是一常数使得$\int_{R^d} \rho(|x|)dx = 1$。

对$x \in \Omega_\epsilon$, 考虑（局部可积，C_0^∞）

$$
\begin{aligned}
C^\infty \ni u_\epsilon(x) = \quad & \rho_\epsilon * u(x) = \frac{1}{\epsilon^d} \int_{y\in\Omega} \rho\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) u(y) dy \\
= \quad & \frac{1}{\epsilon^d} \int_0^\epsilon \int_{|\omega|=1} \rho\left(\frac{r}{\epsilon}\right) u(x+r\omega) r^{d-1} d\omega dr \\
= \quad & u(x) |\partial B_1(0)| \frac{1}{\epsilon^d} \int_0^\epsilon \rho\left(\frac{r}{\epsilon}\right) r^{d-1} dr \\
= \quad & u(x) \frac{1}{\epsilon^d} \int_0^\epsilon \int_{|\omega|=1} \rho\left(\frac{r}{\epsilon}\right) r^{d-1} d\omega dr \\
= \quad & u(x) \int_{x\in R^d} \rho(|x|) dx \\
= \quad & u(x).
\end{aligned}
$$

由ϵ的任意性，证毕。

定理23.3（定理2.11，Liouville）：若u在R^d内调和且有界，则u是常数。

证明：若u在Ω内调和，则它的每个一阶导数是调和的。由Gauss积分公式，

$$u_{x_j}(x) = \frac{1}{|B_r(0)|}\int_{|y-x|\le r} u_{x_j} dS_y = \frac{d}{r}\frac{1}{|\partial B_r(0)|}\int_{|y-x|=r} u(y)\vec{\mathbf{n}}_j dS_y$$

从而

$$|u_{x_j}(x)| \le \frac{d}{r}\max_y |u(y)|.$$

这样，当r趋于无穷大时，u的一阶导数都为零，所以为常数。

证毕。

?高阶导数的估计（L.C.Evans，29页）

前面的结论只用到调和函数的平均值刻画。调和函数的另一个重要的结论是

Poisson公式

$$u(\xi) = \frac{a^2 - |\xi|^2}{a\omega_d} \int_{|x|=a} \frac{u(x)}{|x-\xi|^d} dS_x.$$

其中$|\xi| < a$. 类似于复分析中的Cauchy积分公式。当ξ为球心时，再现平均值性质。

定理23.4（解析性）：若u在Ω在内调和，则解析。

解析性当然蕴含着C^∞光滑性。只需u的连续性，与复分析里的结果比较!

证明：设$\xi_0 \in \Omega$，则有$a > 0$使得$B_a(\xi_0) \subset \Omega$. 需要说明在$\xi_0$附近$u(\xi)$可以展开成幂级数：

$$u(\xi) = \sum_\alpha c_\alpha (\xi - \xi_0)^\alpha,$$

其中α是多重指标。

不妨设$\xi_0 = 0$. 根据Poisson公式,

$$u(\xi) = \frac{a^2 - |\xi|^2}{a\omega_d} \int_{|x|=a} \frac{u(x)}{|x-\xi|^d} dS_x \equiv \frac{a^2 - |\xi|^2}{a\omega_d} v(\xi)$$

所以只需说明

$$v(\xi) = \int_{|x|=a} \frac{u(x)}{|x-\xi|^d} dS_x.$$

是解析的。

当x在球面上时($|x| = a$),

$$|x-\xi|^{-d} = (|x-\xi|^2)^{-d/2} = (|x|^2 - 2x\xi + |\xi|^2)^{-d/2}$$

$$= (a^2 - 2x\xi + |\xi|^2)^{-d/2} = a^{-d}(1-\sigma)^{-d/2},$$

其中

$$\sigma = \frac{2x\xi - |\xi|^2}{a^2}.$$

是ξ的不含零阶项的二次多项式。

而幂级数

$$(1-\sigma)^{-d/2} = \sum_{k\geq 0} b_k \sigma^k,$$

其中

$$b_0 = 1, \qquad b_k = \frac{(d/2)(d/2+1)\cdots(d/2+k-1)}{k!}.$$

收敛域是$\sigma \in (-1,1)$.

那么

$$v(\xi) = \int_{|x|=a} \frac{u(x)}{|x-\xi|^d} dS_x = \sum_{k\geq 0} \frac{b_k}{a^d} \int_{|x|=a} \sigma^k u(x) dS_x.$$

由于$\int_{|x|=a} \sigma^k u(x) dS_x$是一个$\xi$的多项式, 可写（重排？)

$$v(\xi) \sim \sum_{\alpha} c_\alpha \xi^\alpha.$$

$$|\sigma| \leq \frac{|\xi|^2 + 2|x||\xi|}{a^2} = \frac{|\xi|}{a^2}(|\xi| + 2a)$$

$$v(\xi) - \sum_{|\alpha| \leq 2N} c_\alpha \xi^\alpha = v(\xi) - \sum_{k \leq N} \frac{b_k}{a^d} \int_{|x|=a} \sigma^k u(x) dS_x - [\cdots] =$$

$$|[\cdots]| \leq \frac{1}{a^d} \int_{|x|=a} |u(x)| dS_x \sum_{k>N}^{2N} b_k (\frac{|\xi|}{a^2}(|\xi| + 2a))^k$$

当$|\xi| \leq a/3$时，

$$\frac{|\xi|}{a^2}(|\xi| + 2a) \leq \frac{7}{9}.$$

证毕。

Harnack第二定理：设$\{u_k\}$是连通区域Ω上的一个单调不减的调和函数序列，在Ω内一点收敛，则它在Ω中处处收敛于一调和函数，并且在Ω上的任一有界闭集上这个收敛是一致的。

证明：对于给定的调和函数序列$\{u_k\}$，令$v_k = u_k - u_{k-1} \geq 0$. 设函数序列在点$P \in \Omega$收敛。

$Q \in \Omega$是任一点。由于连通性假设，P和Q同属于Ω的一个闭子集。在这个闭子集上，由Harnack不等式得

$$0 \leq v_k(Q) \leq C v_k(P).$$

那么对任意$n > m$,

$$0 \le u_n(Q) - u_m(Q) = \sum_{k=m+1}^{n} v_k(Q)$$

$$\le C \sum_{k=m+1}^{n} v_k(P) = C(u_n(P) - u_m(P)).$$

然后利用Cauchy准则，可见函数序列$\{u_k\}$在点Q收敛。

从上述证明容易看出，若在点Q收敛，则收敛性在Q的邻域内是一致的。由Harnack第一定理，极限函数是该邻域内是调和的。

进而，对于Ω的任一有界闭集，从有限覆盖定理可得一致收敛性。
证毕。

作业：pp.212-220，6, 10, 25, 27, 29