偏微分方程

第24讲

雍稳安

清华大学数学科学系

4. Juni 2024

第24讲、Sobolev空间简介和位势方程的弱解

1、Sobolev空间$H^1(\Omega)$

引理1：$C_0^\infty(\Omega)$在$L^2(\Omega)$中稠密。

定义（强广义微商）：设$u \in L^2(\Omega)$. 如果存在序列$\{u_k\} \subset C^1(\bar{\Omega})$，当$k \to \infty$时$u_k \to u(L^2(\Omega))$且$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \to v_j(L^2(\Omega))(j = 1, 2, \cdots, d)$，则称$u$关于$x$具有一阶强广义微商，记$v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$.

经典微商概念的推广: $u_k = u$. 强广义微商是广义导数$\partial_{x_j} u$:

$$(\partial_{x_j} u_k, \phi) = -(u_k, \partial_{x_j} \phi),$$

$$(v_j, \phi) = -(u, \partial_{x_j} \phi) = (\partial_{x_j} u, \phi).$$

引理2：强广义微商是唯一的。

证明：不然的话，则存在$\{u_k^{(1)}\},\{u_k^{(2)}\}\subset C^1(\bar{\Omega})$使得当$k\to\infty$时，

$$u_k^{(n)}\to u,\qquad (L^2(\Omega)),$$

$$\frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x_j}\to v_j^{(n)},\qquad (L^2(\Omega))\qquad (n=1,2;j=1,2,\cdots,d)$$

而$v_j^{(1)}\neq v_j^{(2)}$.

设$\phi = \phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$. 由于

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_j} \right) \phi dx = -\int_\Omega (u_k^{(1)} - u_k^{(2)}) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx,$$

让$k \to \infty$即得

$$\int_\Omega (v_j^{(1)} - v_j^{(2)}) \phi dx = 0.$$

由于$C_0^\infty(\Omega)$在$L^2(\Omega)$中稠密，立得$v_j^{(1)} = v_j^{(2)} (a.e.\Omega)$. 矛盾。证毕。

定义：$H^1(\Omega)$表示$L^2(\Omega)$中具有所有一阶强广义微商的函数集，对$u \in L^2(\Omega)$ 引入范数

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega u^2 dx + \sum_{j=1}^{d} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx \right]^{1/2}.$$

这是一个赋范线性空间（容易验证），称之为Sobolev空间$H^1(\Omega)$。

注记1：上述范数可以通过$H^1(\Omega)$中的内积

$$(u, v) = \int_\Omega uv dx + \sum_{j=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

诱导出。

注记2：很多文献采用如下定义

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : u\text{在分布意义下的一阶广义导数属于}L^2(\Omega)\}.$$

然后证明，若Ω有界，则$C^\infty(\Omega)$在$H^1(\Omega)$中稠密。若Ω有界且其边界Lip光滑，则$C^\infty(\bar{\Omega})$在$H^1(\Omega)$ 中稠密。

用强广义微商的概念，绕开了边界的光滑性!

区域$\Omega \subset \mathbf{R}^d$的边界$\partial\Omega$的光滑性

对于每个$x \in \partial\Omega$, 存在x的邻域U使得$U \cap \partial\Omega$可表示为

$$x_j = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_d)$$

而ϕ是光滑的（C^k、Lipschitz连续、等等）

(可以和隐函数定理联系起来)

引理3：$H^1(\Omega)$是完备的。

证明：设$\{u_k\}$是$H^1(\Omega)$中的基本函数列，则当$k, l \to \infty$时，

$$\|u_k - u_l\|_{L^2(\Omega)} \leq \quad \|u_k - u_l\|_{H^1(\Omega)} \to 0,$$

$$\|\tfrac{\partial u_k}{\partial x_j} - \tfrac{\partial u_l}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)} \leq \quad \|u_k - u_l\|_{H^1(\Omega)} \to 0, \qquad (j = 1, 2, \cdots, d)$$

由$L^2(\Omega)$的完备性（交接1），存在u, v_j使得当时

$$u_k \to u, \qquad (L^2(\Omega)),$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \to v_j, \qquad (L^2(\Omega)) \qquad (j = 1, 2, \cdots, d).$$

我们来说明v_j是u的强广义微商。由于$u_k \in H^1(\Omega)$, 则存在$u_k^{(k)} \in C^1(\bar{\Omega})$使得

$$\|u_k^{(k)} - u_k\|_{H^1(\Omega)} < 1/k.$$

（对角线法则）

因此当$k \to \infty$时，

$$\|u_k^{(k)} - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_k^{(k)} - u_k\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k - u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$< 1/k + \|u_k - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

$$\|\frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_j} - v_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - v_j\|_{L^2(\Omega)}$$

$$< 1/k + \|\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - v_j\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

由强广义微商的定义，$v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}(j = 1, 2, \cdots, d)$, 故$u \in H^1(\Omega)$.

证毕。

注记3：可以定义k阶强广义微商$(k \geq 1)$；在强广义微商的定义中也可以用L^p代替$L^2(p \geq 1)$；从而定义一般形式的Sobolev空间$W^{p,k}(\Omega)$及其范数，也是完备的（Banach空间)。

引理4：分片光滑的连续函数属于$H^1(\Omega)$.

（按照传统Sobolev空间的定义）

2、位势方程的弱解（或广义解）

位势方程

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f, \qquad x \in \Omega, \\
u|_{\partial\Omega} &= \phi
\end{aligned}
$$

解的存在性？(特殊区域，Green函数法)。

为了简单起见，下面我们只讨论边值为零的情形：$\phi = 0$.

位势方程的一个出处：膜的平衡问题（边界固定，在外力作用下，处于紧张状态），最小势能原理。

总势能（= 应变能- 外力做功, 张力取做常数1）：

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx-\int_\Omega f u dx \equiv \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2-(f,u).$$

（内积）为了定义这个量，我们之前要求$u\in C^1(\bar{\Omega})$.

有了强广义微商的概念，这个势能对$H^1(\Omega)$中的函数就有定义!

为了定义弱解，我们先引进$H^1(\Omega)$的一个重要的闭子空间:

$$H_0^1(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \\ u\text{是}C_0^1(\Omega)\text{函数在}H^1(\Omega)\text{范数意义下的极限} \Big\}.$$

子空间ok，闭?

弱解: 如果存在$u \in H_0^1(\Omega)$使得

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$$

则称u为前述位势方程(0边值）的弱解（或广义解)。

如同推导变分问题Euler方程的积分形式一样，对任意$v \in H_0^1(\Omega)$，考虑实数ϵ的一元二次函数

$$J(u+\epsilon v) \geq J(u)$$

在$\epsilon = 0$取最小值，可以立即得到弱解$u \in H_0^1(\Omega)$ 所满足的充分必要条件：

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

在这个积分形式的基础上，当u还是二次连续可微时，利用分部积分即可得到位势方程。

引理1：位势方程齐次Dirichlet问题的古典解$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$是弱解。

证明：对任意$v \in C_0^1(\Omega)$，利用Green公式和方程得

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u dx = -\int_\Omega v \Delta u dx = \int_\Omega v f dx \equiv (f, v).$$

由于稠性，这个等式对任意$v \in H_0^1(\Omega)$也成立（强收敛蕴含弱收敛），故u是弱解。

证毕。

3、存在唯一性

引理2（平行四边形等式）、对于任意$u,v \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\left\| \frac{\nabla(u-v)}{2} \right\|_0^2 = J(u) + J(v) - 2J\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

从现在起，$\|\cdot\|_0$是$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$的简写, $\|\cdot\|_1$是$\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$的简写。

证明：容易看见恒等式

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_0^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_0^2 = \frac{\|u\|_0^2 + \|v\|_0^2}{2}$$

成立，那么

$$\left\|\frac{\nabla u+\nabla v}{2}\right\|_0^2+\left\|\frac{\nabla u-\nabla v}{2}\right\|_0^2=\frac{\|\nabla u\|_0^2+\|\nabla v\|_0^2}{2}.$$

又由于

$$-2\left(f,\frac{u+v}{2}\right)=-(f,u)-(f,v),$$

与前一式相加移项即得要证的。

证毕。

引理3 （Friedrichs不等式）：设$u \in H_0^1(\Omega)$, 则

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \rho \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

其中ρ是区域Ω的直径。

证明：不妨假设

$$\Omega \subset [0, \rho]^d.$$

对$u \in C_0^1(\Omega)$，令

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \neq \Omega. \end{cases}$$

那么$\bar{u} \in C_0^1([0,\rho]^d)$且对任何$x \in \Omega$有

$$u(x) = \bar{u}(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \int_0^{x_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}(s, x_2, \cdots, x_d) ds.$$

由Schwarz不等式,

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \left(\int_0^{x_1} 1 \cdot \tfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}(s, x_2, \cdots, x_d) ds \right)^2 \\ &\leq \int_0^{x_1} 1^2 ds \int_0^{x_1} \left| \tfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}(s, x_2, \cdots, x_d) \right|^2 ds \\ &\leq \rho \int_0^{\rho} \left| \tfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}(s, x_2, \cdots, x_d) \right|^2 ds. \end{aligned}$$

两边在Ω上积分得

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^2(x)dx &\leq \rho^2 \int_{[0,\rho]^d} \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}(s, x_2, \cdots, x_d)\right|^2 dx \\ &\leq \rho^2 \int_{[0,\rho]^d} |\nabla \bar{u}|^2 dx = \rho^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.\end{aligned}$$

所以

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \rho \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

对$u \in H_0^1(\Omega)$, 存在序列$u_k \in C_0^1(\Omega)$使得

$$\|u_k - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0.$$

根据上述证明，

$$\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \rho\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

注意到

$$\big|\|u_k\|_{L^2(\Omega)} - \|u\|_{L^2(\Omega)}\big| \leq \|u_k - u\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\big|\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} - \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\big| \leq \|\nabla u_k - \nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

让$k \to \infty$, 则得所需要的。证毕。

注:

- 稠密性及其稠性（density）argument: 先对经典的光滑函数，再逼近。
- Ω也可以是某种无界区域，如

$$\Omega = [0,1] \times \mathbf{R}^{d-1},$$

也未必需要边界上处处取零值。也可以用梯度的L^2范数控制如下量

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)dx \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

总之，这个不等式可以有许多变种。

- $H_0^1(\Omega)$中的等价范数：

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1+\rho^2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

定理24.1、变分问题的解是唯一的。

证明：设有两个解$u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$使得

$$J(u_1) = J(u_2) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v) \equiv m.$$

由平行四边形等式

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\nabla(u_1 - u_2)}{2} \right\|_{L^2(\Omega)} &= J(u_1) + J(u_2) - 2J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \\ &= 2(m - J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)) \leq 0. \end{aligned}$$

由Friedrichs不等式,

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \le \rho \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

所以u_1几乎处处等于u_2. 证毕。

(和以前的证法不一样)

定理24.2、 设$f \in L^2(\Omega)$, 则变分问题有弱解。

证明：先证$J(v)$有下界。事实上，对于任意的$v \in H_0^1(\Omega)$，

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|_0^2 - (f, v) \geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|_0^2 - \|f\|_0\|v\|_0.$$

由不等式得

$$\begin{aligned} J(v) \geq \quad & \tfrac{1}{2}\|\nabla v\|_0^2 - \rho\|f\|_0\|\nabla v\|_0 \\ = \quad & \tfrac{1}{2}(\|\nabla v\|_0 - \rho\|f\|_0)^2 - \tfrac{1}{2}\rho^2\|f\|_0^2 \\ \geq \quad & -\tfrac{1}{2}\rho^2\|f\|_0^2. \end{aligned}$$

可见$J(v)$有下界。

记

$$m = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

由下确界的定义，对任意正整数k 存在$v_k \in H_0^1(\Omega)$使得

$$m \leq J(v_k) < m + 1/k.$$

我们来说明是v_k是$H_0^1(\Omega)$中的Cauchy序列。由平行四边形等式

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\nabla(v_k - v_l)}{2} \right\|_0 = \quad & J(v_k) + J(v_l) - 2J(\tfrac{v_k + v_l}{2}) \\ < \quad & m + 1/k + m + 1/l - 2m = 1/k + 1/l. \end{aligned}$$

由范数的等价性，v_k是$H_0^1(\Omega)$中的Cauchy 序列。由$H_0^1(\Omega)$的完备性，存在$u \in H_0^1(\Omega)$使得当$k \to \infty$时，

$$\|v_k - u\|_1 \to 0.$$

容易看见

$$\lim_{k\to\infty} J(v_k) = J(u) = m = \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

即，$u \in H_0^1(\Omega)$是变分问题的解。

证毕。

这样就得到了弱解的存在性（很容易！）。那么古典解的存在性就归结为弱解的光滑（正则）性问题

通常分两步：内正则性$\in C^2$, 边界附近的正则性（依赖于边界的光滑性）

嵌入不等式: 若$u \in H_0^1(a,b)$, 则存在$\bar{u} = \bar{u}(x) \in C_0(a,b)$ 满足$\bar{u}(x) = u(x)$几乎处处成立和不等式

$$\max_{x\in(a,b)} |\bar{u}(x)| \le \sqrt{2}\|u\|_1.$$

证明：若$u \in C_0^1(a,b)$, 那么对$x \in (a,b)$,

$$u(x)^2 = 2\int_a^x u(y)\frac{du}{dx}(y)dy.$$

所以,

$$
\begin{aligned}
u(x)^2 \leq & \quad 2\int_a^x |u(y)\tfrac{du}{dx}(y)|dy \\
\leq & \quad 2\int_a^b |u(y)\tfrac{du}{dx}(y)|dy \\
\leq & \quad 2(\int_a^b u^2(y)dy)^{1/2}(\int_a^b |\tfrac{du}{dx}(y)|^2 dy)^{1/2} \\
\leq & \quad 2\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2} \leq 2\|u\|_{H^1}^2.
\end{aligned}
$$

从而,

$$
\max_{x\in(a,b)} |u(x)| \leq \sqrt{2}\|u\|_{L^2}^{1/2}\|u_x\|_{L^2}^{1/2} \leq \sqrt{2}\|u\|_{H^1}.
$$

若$u \in H_0^1(a,b)$，存在$u_k \in C_0^1(a,b)$使得$\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u\|_1 = 0$. 那么$u_k$是$H_0^1(a,b)$中的一Cauchy序列。

由上述不等式，它也是$C_0(a,b)$中的一Cauchy序列。由$C_0(a,b)$的完备性，在$C_0(a,b)$中u_k 收敛到一函数$\bar{u} \in C_0(a,b)$.

容易证明$\bar{u} = u$ a.e. 且

$$\max|\bar{u}(x)| \le \sqrt{2}\|u\|_{L^2}^{1/2}\|u_x\|_{L^2}^{1/2} \le \sqrt{2}\|u\|_{H^1}.$$

证毕。

作业： pp.212-220: 12, 14, 30, 33, 35