偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第16讲、Fourier 变换

16.1 定义和基本性质

定义：设$f \in L(\mathbf{R}^d)$是欧几里得空间$\mathbf{R}^d$上的（绝对）可积函数，定义它的Fourier变换

$$F[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

这里$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d) \in \mathbf{R}^d, i = \sqrt{-1}$,

ξx表示ξ和$x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$ 的内积 $\xi x = \sum_{j=1}^d \xi_j x_j$.

- $F[f] = \hat{f}(\xi)$是$\xi \in \mathbf{R}^d$的有界连续函数。

有界性:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)| dx.$$

连续性:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \to \xi_0} \hat{f}(\xi) = & \lim_{\xi \to \xi_0} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} f(x) e^{-i\xi x} dx \\
= & \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} f(x) e^{-i\xi_0 x} dx = \hat{f}(\xi_0)
\end{aligned}$$

(Lebesgue控制收敛定理)

例1、求一元函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le A,\\ 0, & |x|>A,\end{cases}$$

的Fourier变换。

解：由定义

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}e^{-i\xi x}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin A\xi}{\xi}.$$

例2、求函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

的Fourier变换。

解：由定义

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(1+i\xi)x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\xi}.$$

基本性质:

(1). （线性） $(c_1 f_1 + c_2 f_2)\hat{} = c_1 \hat{f}_1 + c_2 \hat{f}_2$.

(2). （对称） $\hat{f}(-\xi) = (f(-x))\hat{}(\xi)$.

(3). 若$f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_d(x_d)$ 而每个$f_j \in L(-\infty, \infty)$, 则

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \hat{f}_2(\xi_2) \cdots \hat{f}_d(\xi_d).$$

例3、求$f=e^{-|x|}$的Fourier变换。

解：用$f_2=f_2(x)$表示例2中的函数，那么$f(x)=f_2(x)+f_2(-x)$.

由性质(1)和(2)得

$$\hat{f}(\xi)=\hat{f}_2(\xi)+\hat{f}_2(-\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\xi}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-i\xi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+\xi^2}.$$

(4). （平移） $$(f(x-a))\hat{}(\xi) = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi).$$

这是由于

$$\begin{aligned}(f(x-a))\hat{}(\xi) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} f(x-a)e^{-i\xi x}dx \\ &= e^{-ia\xi}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} f(x-a)e^{-i\xi(x-a)}dx \\ &= e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

(5). （伸缩） $(f(kx))\hat{}(\xi) = |k|^{-d}\hat{f}(\xi/k)$.

这是由于

$$
\begin{aligned}
(f(kx))\hat{}(\xi) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} f(kx)e^{-i\xi x}dx \\
&= |k|^{-d}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} f(kx)e^{-i(\xi/k)kx}d(kx) \\
&= |k|^{-d}\hat{f}(\xi/k).
\end{aligned}
$$

(6). （卷积）若$f, g \in L(\mathbf{R}^d)$, 则它们的卷积

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)dy \in L(\mathbf{R}^d),$$

并且

$$(f * g)\hat{}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^d \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

证明：由Fubini定理，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^d} |(f * g)(x)| dx &= \int_{\mathbf{R}^d} \left| \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} |f(x-y)g(y)| dy dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} |f(x-y)| dx \int_{\mathbf{R}^d} |g(y)| dy < +\infty.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(f * g)\hat{}(\xi) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\xi x} \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y) g(y) dy dx \\
&= (\sqrt{2\pi})^d \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\xi(x-y)} f(x-y) dx \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\xi y} g(y) dy \\
&= (\sqrt{2\pi})^d \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

(7). （乘多项式）　若$f, x_j f \in L(\mathbf{R}^d)$，则

$$\frac{d}{d\xi_j}\hat{f}(\xi) = -i(x_j f(x))\hat{}$$

证明：由Lebesgue控制收敛定理，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi_j}\hat{f}(\xi_0) &= \lim_{\Delta\xi_j \to 0} \frac{\hat{f}(\xi_0+\Delta\xi_j e_j)-\hat{f}(\xi_0)}{\Delta\xi_j} \\
&= \lim_{\Delta\xi_j \to 0} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\xi_0 x} \frac{e^{-ix_j\Delta\xi_j}-1}{\Delta\xi_j} f(x)dx \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\xi_0 x}(-ix_j) f(x)dx.
\end{aligned}$$

例4. 求函数$f(x)=e^{-|x|^2}$的Fourier变换。

解：由于$f(x)=e^{-x_1^2}e^{-x_2^2}\cdots e^{-x_d^2}$, 根据性质(3), 我们只需计算一元函数$e^{-x_1^2}=e^{-x^2}$的Fourier变换。

由分部积分和性质(7),

$$
\begin{aligned}
F[e^{-x^2}] &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}\xi}\left[e^{-x^2-ix\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}2xe^{-x^2}e^{-ix\xi}dx\right] \\
&= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}\xi}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}e^{-ix\xi}dx \\
&= -\frac{2}{\xi}\frac{dF[e^{-x^2}]}{d\xi}.
\end{aligned}
$$

这样$F[e^{-x^2}]$作为ξ的一元函数，满足微分方程

$$\frac{dF[e^{-x^2}]}{d\xi} = -\frac{\xi}{2}F[e^{-x^2}], \qquad F[e^{-x^2}](0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

解这个初值问题得

$$F[e^{-x^2}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\xi^2/4}.$$

结果

$$F[e^{-|x|^2}](\xi) = 2^{-d/2}e^{-|\xi|^2/4}.$$

例5. 求函数$f(x)=e^{-A|x|^2}(A>0)$的Fourier变换。

解：由于伸缩性质(5),

$$
\begin{aligned}
& F[e^{-A|x|^2}](\xi)=F[e^{-|\sqrt{A}x|^2}](\xi) \\
= \quad & \frac{1}{\sqrt{A}^d}F[e^{-|x|^2}](\xi/\sqrt{A})=(2A)^{-d/2}e^{-|\xi|^2/(4A)}.
\end{aligned}
$$

当$A=1/2$时，$F[e^{-|x|^2/2}]=e^{-|\xi|^2/2}$, 即函数$e^{-|x|^2/2}$是Fourier变换的一个不动点。

16.2 多重指标和速降函数空间

多重指标

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$$

是一个每个分量都为非负整数的向量，通常用希腊符号α, β, γ 等表示。记

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j.$$

进一步，对$x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d$, 记

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}, \qquad \partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d},$$

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_d!, \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},$$

$$\alpha \geq \beta \quad \text{if and only if} \quad \alpha_j \geq \beta_j \quad \forall j \in \{1, 2, \cdots, d\}.$$

可以归纳证明，多元Leibniz公式成立：

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g.$$

速降函数空间

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) := \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^d) : \forall \alpha, \beta, \lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = 0\}$$

是一线性空间。显然

$$e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d).$$

速降函数是绝对可积的，这是由于

$$|f(x)| = (1+|x|^2)^{-d}|(1+|x|^2)^d f(x)| < C(1+|x|^2)^{-d}.$$

性质(7)的一个直接推论是

$$\partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi) = (-i)^{|\beta|} F[x^\beta f(x)].$$

(8). （导函数） 若f是速降函数, 则

$$F[\partial_{x_j} f](\xi) = i\xi_j F[f](\xi).$$

证明：由分部积分，

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\xi x}\partial_{x_j} f(x)dx = i\xi_j \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\xi x} f(x)dx.$$

这个性质的直接推论是

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha+\beta|} F[\partial_x^\alpha (x^\beta f(x))].$$

可见速降函数空间是Fourier变换的一个不变子空间。

16.3　　反演定理

定理：设f是速降函数，那么

$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

证明：设$f,g\in L(\mathbf{R}^d)$. 由Fubini定理，有下列重要事实

$$\int_{\mathbf{R}^d}g(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}g(\xi)f(x)e^{-ix\xi}dxd\xi=\int_{\mathbf{R}^d}f(x)\hat{g}(x)dx.$$

对$\lambda > 0$和速降函数，

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} g(\xi/\lambda)\hat{f}(\xi)d\xi = \int g(\hat{\cdot/}\lambda)f(x)dx \\ = & \int_{\mathbf{R}^d} \lambda^d \hat{g}(\lambda x)f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^d} f(x/\lambda)\hat{g}(x)dx. \end{aligned}$$

让λ趋于无穷，

$$g(0)\int_{\mathbf{R}^d} \hat{f}(\xi)d\xi = f(0)\int_{\mathbf{R}^d} \hat{g}(x)dx.$$

取$g=e^{-|x|^2/2}$为那个不动点，那么

$$g(0)=\hat{g}(0)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} g(\xi)d\xi=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d}\hat{g}(x)dx.$$

这样，

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d}\hat{f}(\xi)d\xi=f(0).$$

所以逆公式在$x=0$成立！

由平移性质，

$$f(a)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d}F[f(\cdot+a)](\xi)d\xi=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d}e^{ia\xi}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

逆公式在其它点也成立。证毕。

注记1（Parseval公式(内积，速降函数)）

$$(f,g)=(\hat{f},\hat{g}).$$

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\bar{g}(x)dx=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d}\bar{g}(x)\int_{\mathbf{R}^d}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi dx$$

$$=\quad \int_{\mathbf{R}^d}\hat{f}(\xi)\overline{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d}e^{-ix\xi}g(x)dx}d\xi$$

$$=\quad \int_{\mathbf{R}^d}\hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi)d\xi$$

特别，

$$\|f\|_{L^2}=\|\hat{f}\|_{L^2}.$$

即，Fourier变换是速降函数空间上的一等距“同构”映射。

注记2 （平方可积函数的Fourier变换）

对$f \in L^2(\mathbf{R}^d)$，存在$f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$使得

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^2} = 0.$$

那么

$$\|F[f_m] - F[f_n]\|_{L^2} = \|f_m - f_n\|_{L^2} \to 0 \qquad (n, m \to 0).$$

可见$\{F[f_n]\}$是Hilbert空间$L^2(\mathbf{R}^d)$的一个Cauchy序列，所以极限$\lim\limits_{n\to\infty} F[f_n]$存在。

不难看见，这个极限与收敛到f的函数列$\{f_n\}$的选取无关。

称这个极限为平方可积函数f的Fourier变换：

$$F[f] = \lim_{n\to\infty} F[f_n].$$

这样定义的Fourier变换显然是$L^2(\mathbf{R}^d)$上的一个线性等距变换

$$\|f\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \lim_{n\to\infty} \|F[f_n]\| = \|F[f]\|.$$

Parseval公式对平方可积函数仍然成立。

注记3（逆变换）、根据反演定理，对速降函数f, 有

$$f = F[\hat{f}(-\cdot)].$$

称

$$F[f(-\cdot)] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{ix\xi} f(\xi)d\xi$$

为f的Fourier逆变换，记作$F^{-1}[f]$. 那么反演定理可以写作

$$f = F^{-1}[\hat{f}] = F[\hat{f}(-\cdot)].$$

不难看到，Fourier变换的性质对逆变换都成立，特别对平方可积函数可以定义逆变换。

注记4（反演）、反演定理对$f \in L^2(\mathbf{R}^d)$也成立。由于

$$\begin{aligned}\|f - F^{-1}F[f]\| \leq & \ \|f - f_n\| + \|f_n - F^{-1}F[f_n]\| + \|F^{-1}F[f_n] - F^{-1}F[f]\| \\ \leq & \ \|f - f_n\| + 0 + \|F[f_n] - F[f]\| = 2\|f - f_n\|,\end{aligned}$$

所以

$$f = F^{-1}F[f]$$

对平方可积函数几乎处处成立。

最后，利用逆变换可以看见

乘积的Fourier变换等于Fourier变换的卷积：

$$(\sqrt{2\pi})^d F[fg] = F[f] * F[g].$$

作业：pp160：1(3)(5), 2(6) (8), 3(2)(3)

试证：若$f, \hat{f} \in L(\mathbf{R}^d)$, 那么

$$f(x) = f_0(x) \equiv \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

几乎处处成立。