偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第2讲、一阶拟线性方程

2.1 特征线方法

上节介绍了求解一阶半线性偏微分方程的特征线方法，现在我们试图求解拟线性方程。

考虑一阶非线性方程

$$u_t + a(u)u_x = 0, \qquad t > 0,\ x \in (-\infty, \infty),$$

其中$a = a(u)$是一给定的u的光滑函数。对无粘Burgers方程，$a(u) = u$.

假如这个方程有一个经典解$u=u(t,x)$. 那么$u=u(t,x)$满足"线性变系数"输运方程

$$u_t+\bar{a}(t,x)u_x=0,$$

其中$\bar{a}(t,x):=a(u(t,x))$.

把特征线方法用到这个方程上，我们知道沿着特征线$x=x(t,\beta)$:

$$\frac{dx}{dt}=\bar{a}(t,x),$$

函数$U(t,\beta)=u(t,x(t,\beta))$与变量$t$无关。

那么沿着特征线，$\bar{a}(t,x):=a(u(t,x))$是常数，所以

$$x(t,\beta)=\beta+ta(u_0(\beta)).$$

这说明特征线是直线，其斜率由u的初值决定(看图)。

若β可以从$x=\beta+ta(u_0(\beta))$解出，则u在点(t,x)处的值等于过这点的特征线与x轴交点处的初值，即

$$u(t,x)=u_0(\beta(t,x))=u_0(x-ta(u(t,x))).$$

这样，就求得了前面非线性方程的解(隐函数)。

可是在什么情况下β才可以从

$$x=\beta+ta(u_0(\beta))$$

解出呢？对于这个问题，我们有

命题2.1. 设$u_0=u_0(x)$和$a=a(u)$都是连续可微的。初值问题

$$u_t+a(u)u_x=0,\quad u(0,x)=u_0(x),\qquad t>0,\ x\in(-\infty,\infty),$$

有一个整体经典解的充要条件是$a(u_0(x))$单调递增。

如果有x使得$a(u_0(x))_x<0$, 记

$$T_*=\frac{-1}{\inf\limits_x a(u_0(x))_x},$$

那么$[0,T_*)$是经典解的最大存在区间，在此区间内有最大模估计

$$|u(t,\cdot)|_{L^\infty}\le|u_0|_{L^\infty}:=\sup_x|u_0(x)|.$$

进而，若$a(u_0(x))_x$的最小值能达到，那么

$$\lim_{t\to T_*-}|u_x(t,\cdot)|_{L^\infty}=\infty.$$

证明：定义

$$\psi(\beta;t,x):=\beta+ta(u_0(\beta))-x.$$

根据假设，这是β的一个连续可微函数。如果$a(u_0(x))$是递增的或者如果$t<T_*$，那么

$$\psi_\beta(\beta;t,x)=1+ta(u_0(\beta))_\beta\geq 1-t/T_*>0,$$

由此可见$\psi(\pm\infty;t,x)=\pm\infty$. 根据介值定理，$\psi(\beta;t,x)=0$唯一地决定了$\beta=\beta(t,x)$.

利用隐函数定理可知$\beta(t,x)\in C^1$. 这样$u=u(t,x)=u_0(\beta(t,x))$是经典解。

由于$u(t,x)=u_0(\beta(t,x))$, 最大模估计是显然的。为了说明$|u_x(t,\cdot)|_{L^\infty}\to\infty$，我们可以从$u(t,x)=u_0(x-ta(u(t,x)))$计算$u_x(t,x)$，再利用假设就能得到所需结论（细节留作作业）。证毕。

上述结果可以用图加以说明。若$a(u_0(x))$单调增，那么特征线斜率随着x的变大而变小，特征线逐渐散开（变稀疏）。

不然，如$a(u) = u$而$u_0(x) = -x$。此时，特征线斜率变大从而相交，在交点处，解的值超定。特征线斜率变化这个现象是由于非线性性，与初值的光滑性无关。

受图的启发，可以想象一条单行道的车流，每辆车都以自己的速度匀速往前跑，其中匀速对应特征线都是直线。前一种情况对应后面的车比前面的车跑的慢，所以路上车越来越稀疏。后一种情况对应后面的车比前面的车跑的快，所以一定会追上前面的车，从而发生交通事故。

上述讨论可以推广到多维一阶非线性非齐次方程

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} a_j(u) u_{x_j} = q(u).$$

有兴趣的读者可以查阅有关文献。

2.2 守恒律的弱解

如前所见，非线性一阶偏微分方程不总是有（经典）解。为此，我们需要接受不同含义的解。

很快就会看到，对一般的拟线性方程如何定义非经典解还没有一个成熟的办法。

这里我们只针对如下特殊的一阶非线性方程—守恒律

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{1}$$

引入弱解的概念。

为了推广解的概念，我们先引入（Friedrichs的光滑子）

$$\rho(x) = c\begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

其中自变量$x \in \mathbf{R}^d$, 常数c满足

$$c\int_{|x|\leq 1} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}\,dx = 1.$$

容易验证，$\rho = \rho(x)$ 是$(x \in)\mathbf{R}^d$上非负的、径向的、无穷次连续可微的且支集（其取非零值的自变量的集合）是单位球。

对$\mathbf{R}^d$中的开集Ω，符号$C_0^\infty(\Omega)$表示Ω中所有无穷次连续可微且支集（取非零值的自变量的集合的闭包）是有界的函数集合。

设$x_0 \in \Omega, h > 0$且当$|x - x_0| < h$ 时$x \in \Omega$. 那么

$$\phi(x) = \rho\left(\frac{x - x_0}{h}\right) \in C_0^\infty(\Omega).$$

设$\phi = \phi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $f = f(x)$连续或局部可积，可以证明卷积

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)\phi(y)dy$$

是x的无穷次连续可微的函数。（作业）

命题2.2. 设$\Omega \subset \mathbf{R}^d$是开的，$f = f(x) \in C(\Omega)$。如果

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0$$

对所有$\phi = \phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$成立，那么$f(x) \equiv 0$.

证明：不然的话，有$x_0 \in \Omega$使得$f(x_0) \neq 0$. 不妨设$f(x_0) > 0$. 由连续性，有$h > 0$, 当$|x - x_0| < h$ 时$x \in \Omega$且$f(x) > 0$。取

$$\phi(x) = \rho\left(\frac{x - x_0}{h}\right).$$

显然$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$且

$$0 = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx = \int_{|x-x_0|<h} f(x)\phi(x)dx > 0.$$

这个矛盾说明命题成立。证毕。

为了引入弱解的概念，我们做个观察。假如u是守恒律(1)的一个经典解，$\phi=\phi(x,t)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$。用$\phi$乘方程(1)的两端然后在$t>0$上积分所得的等式，得到

$$\int\int_{t\geq 0}(u_t+f(u)_x)\phi dxdt=0. \tag{2}$$

由于ϕ的支集是有界的，我们立即看见

$$\begin{aligned} 0= & \int\int_{t\geq 0}\left[(u\phi)_t-u\phi_t+(f(u)\phi)_x-f(u)\phi_x\right]dxdt \\ = & -\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,0)\phi(x,0)dx-\int\int_{t\geq 0}(u\phi_t+f(u)\phi_x)dxdt, \end{aligned}$$

即

$$\int\int_{t\geq 0}[u\phi_t+f(u)\phi_x]dxdt+\int_{-\infty}^{+\infty}u_0\phi(x,0)dx=0. \tag{3}$$

反之，若u是连续可微的并且满足等式（3），那么不难推出等式(2)。根据命题2.2，我们看见u是守恒律(1)的经典解。

这样看来，经典解也可以用(3)定义，外加u是连续可微的。注意式（3）不涉及到u或u_0的导数。

受上述观察的启发，我们引入

定义2.1. 设$f = f(u)$是连续的，$u_0 = u_0(x)$是局部可积的，$u = u(t,x)$是有界可测的（**“**局部可积的**”**）。如果等式

$$\int\int_{t\geq 0}[u\phi_t + f(u)\phi_x]dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0\phi(x,0)dx = 0.$$

对所有$\phi = \phi(t,x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ 成立，则称$u = u(t,x)$为守恒律**(1)**的以u_0为初值的弱解。

关于这个定义，我们说明如下。

(1). 上述弱解的定义关键依赖于守恒律的散度形式。另一方面，物理上的方程常常具有散度形式，所以这个定义是有意义的。

(2). 上述定义对守恒律组（u是向量）有效。

(3). 与经典解的定义比较，有界可测代替了连续可微，积分等式代替了微分等式。

如前所述，对于连续可微函数来说，上述定义无异于经典解的定义。一个比连续可微函数类较大的函数类是分片连续可微函数。下列定理可以帮助我们寻找这样的弱解。

定理2.3 （Rankine & Hugoniot）：
设$\Gamma := \{(t,x) : x = x(t)\}$是$(x,t)$平面上的一条光滑曲线，在$\Gamma$ 两侧函数$u = u(t,x)$ 是方程（3）的经典解且在Γ两侧的极限都存在。那么u是弱解当且仅当它满足Rankine-Hugoniot跳跃条件

$$[u]\frac{dx(t)}{dt} = [f(u)],$$

这里$[u] = u_+ - u_-$而$u_\pm = u(t,x(t) \pm 0)$。

通常称$s := dx/dt$为间断的speed.

对于无粘Burgers方程$u_t + (u^2/2)_x = 0$，这个跳跃条件是

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{u_+^2/2 - u_-^2/2}{u_+ - u_-} = \frac{u_+ + u_-}{2}.$$

这个定理说明分片经典解未必是弱解，只有在其间断满足定理中的Rankine-Hugoniot条件时才是，这个条件出自气动力学。

它的一个直接推论是

推论: 连续的分片经典解是弱解。

证明：给定$(t_0, x_0) \in \Gamma$, 其中$t_0 > 0$. 设B是(t_0, x_0)的一个小邻域，分解其为$\Omega_1 \cup \Omega_2$（图），取$\phi \in C_0^\infty(B) \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$。若$u$ 是弱解，那么由定义得

$$
\begin{aligned}
0 = \quad & \int\int_B (u\phi_t + f(u)\phi_x) dxdt \\
= \quad & \left\{ \int\int_{\Omega_1} + \int\int_{\Omega_2} \right\} \left[(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x - (u_t + f(u)_x)\phi \right] dxdt \\
= \quad & \left\{ \oint_{\partial\Omega_1} + \oint_{\partial\Omega_2} \right\} (-udx + f(u)dt)\phi.
\end{aligned}
$$

这里最后一行用了Green公式以及u在每个子区域Ω_i内满足方程。

由于在D的边界上$\phi = 0$，只有沿着Γ的那些线积分才可能非零，这

样我们有（两个方向相反）

$$\oint_{\partial\Omega_1}(-udx+f(u)dt)\phi=\int_{\Gamma\cap B}\phi(-u_-dx+f(u_-)dt),$$

$$\oint_{\partial\Omega_2}(-udx+f(u)dt)\phi=-\int_{\Gamma\cap B}\phi(-u_+dx+f(u_+)dt).$$

所以

$$\oint_{\Gamma\cap B}(-[u]dx+[f(u)]dt)\phi=0.$$

由于ϕ是任意的，这个等式给出了Rankine-Hugoniot条件。

注意到上述推导反过来也是对的，所以有充分性。证毕。

我们来看几个例子，第一个是无粘Burgers方程

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

与分段常数初值

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

注：守恒律（1）的这种分片常数初值问题常被称为Riemann问题，是第一个研究气动力学中激波管问题的Riemann首先考虑过的。

对于这种初值问题，若$u = u(t,x)$是解，那么对于任意$\lambda > 0$，$u(\lambda t, \lambda x)$也是解。如果有唯一性，可以合理地期待解在时空点(t,x)的值仅仅依赖于比值x/t，既是x/t的一元函数。

解：在区域$0 < x < t$以外，由特征线方法得到解为

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > t. \end{cases}$$

为了确定解在区域$0 < x < t$内的值，我们参考上述定理，延申已知的常数值而得到分片常数解

$$u_1(t,x) = \begin{cases} 0, & x < t/2, \\ 1, & x > t/2. \end{cases}$$

另一方面，受注1的启发，我们也可以寻找无粘Burgers方程的自相似解$u(t,x)=h(x/t)$:

$$-h'(x/t)x/t^2+h(x/t)h'(x/t)/t=0.$$

记$\xi=x/t$, 得到

$$h'(\xi)[h(\xi)-\xi]=0.$$

可见光滑函数$u(t,x)=h(\xi)=\xi=x/t$满足方程。

把这个函数与已知的常数值拼在一起，得到连续的分片光滑解

$$u_2(t,x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ x/t, & 0<x<t, \\ 1, & x>t. \end{cases}$$

根据推论，这也是一个弱解。

这个例子说明上面定义的弱解是不唯一，也说明初值不光滑但解可以连续（回忆之前说过初值光滑但解不光滑）。这个现象完全是由方程的非线性性造成的。

再看一个例子：Burgers方程与Riemann初值

$$u_0(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

参考定理2.3, 结合特征线方法，容易想到分片常值函数

$$u_\lambda(t,x) = \begin{cases} -1, & 2x < -(1+\lambda)t \\ -\lambda, & -(1+\lambda)t < 2x < 0 \\ \lambda, & 0 < 2x < (1+\lambda)t \\ 1, & (1+\lambda)t < 2x \end{cases}.$$

都是问题的弱解，其中$\lambda \geq -1$. 这样得到了有无穷多个弱解。

上述两个例子中，特征线逐渐散开（变得稀疏），解不能完全由特征线方法确定，这样的解称作**稀疏波**。

下一个例子中，特征线斜率逐渐变大从而相交，相应的解称为**激波**。

Burgers方程与分片线性初值

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

对这个初值问题，容易看到相应的特征线第一次在$(t, x) = (1, 1)$处相交。

当特征线相交之前($t < 1$)，由特征线方法可得解

$$u(t,x) = \begin{cases} 1, & x < t, \\ \frac{1-x}{1-t}, & t < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

当t从下趋于1时，上述解趋于

$$u(1-,x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

以此为（Riemann）初值，根据定理2.3，对$\lambda \geq 0$，分片常值函数

$$u_\lambda(t,x) = \begin{cases} 1, & x < 1 + \frac{1-\lambda}{2}(t-1), \\ -\lambda, & 1 + \frac{1-\lambda}{2}(t-1) < x < \frac{t+1}{2}, \\ 1+\lambda, & \frac{t+1}{2} < x < 1 + \frac{1+\lambda}{2}(t-1), \\ 0, & x > 1 + \frac{1+\lambda}{2}(t-1), \end{cases}$$

都是前述问题在$t > 1$时的弱解。又是无穷多个弱解。

上述例子说明Burgers方程可以有无穷多个弱解，这些解描述的未必是客观发生的现象。为了挑选出反映客观物理现象的解，可以考虑如下。

在弱解的间断线两侧沿着t变小画特征线。若这样的半边特征线不穿越间断线，说明解可以由之前时刻的值确定(causal)；否则无法由之前时刻的值确定。

不难理解，不穿越的情形符合客观事实。这样，我们以“在每条间断线两侧可以沿着t变小画不穿越该间断线的特征线”为准则挑选弱解。

对于一般的守恒律$u_t + f(u)_x = 0$, 上述准则对应于

$$f'(u_+) < \frac{dx(t)}{dt} < f'(u_-),$$

这个称作Lax熵条件。

不难验证（作业），前述第一例的弱解u_1不满足Lax熵条件；第二例的带有参数λ的弱解都不满足Lax 熵条件（看间断线$x = 0$）；第三例的带有参数λ的弱解中，只有$\lambda = 0$ 对应的解满足Lax 熵条件。

综上，

- 对一阶非线性方程，不管初值多么光滑，一般说来，整体经典解可能不存在。
- 为此我们引入了弱解的概念，可是弱解一般不唯一。
- 为了克服这个弊病，引入熵条件来挑选具有物理意义的解。

作业二：

1、pp. 107：习题31

2、命题2.1中的极限

3、写出多维守恒律方程组

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} F_j(u)_{x_j} = 0$$

的弱解定义并导出相应的HR跳跃条件。

4、证明只有$\lambda = 0$对应的解u_λ满足Lax熵条件。