偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

几点说明

- 教材：姜礼尚等：数学物理方程讲义（第三版），高教出版社
- 考核方式：作业+平时(20 + 10)%，期中20%，期末50%
- 助教：汤乐琪(tangleqi2022@163.com)
- 作业(20%): 每周交一次，方式和助教协商（网络学堂或纸质）
- 答疑：微信或周二下午3：30-5：00（理科楼A214）
- 习题（讨论）课：按需安排

课程简介

- 引言，一阶单个偏微分方程的特征线方法，守恒律的弱解
- 几类典型方程的建立：（1）热传导方程、输运方程、波动方程；（2）极小曲面和Possion方程；（3）定解条件和适定性。
- 波动方程：(1) 一维初值问题的算子分解法；(2) 半无界问题的延拓法；（3）高维初值问题的球面平均和降维解法; (4) 能量估计; (5) 混合问题的分离变量法; (6) 广义解。

- 热传导方程: (1) 混合问题的分离变量法; (2)极大值原理和最大模估计、能量估计; (3) 广义函数；（4）Fourier变换；（5）初值问题的Fourier 变换法; (6) 半无界问题的延拓法；（7）基本解。

- Poisson 方程：(1) 基本解和Green公式；（2）Green函数; (3) 极值原理，最大模估计和能量估计; (4) 调和函数的性质；(5) Sobolev空间初步；（6）变分方法及其近似。

- 二阶线性方程：（1）二阶偏微分方程分类；（2）Fichera条件

第1讲、序言、特征线方法

说到“偏微分”，大家可能马上想到多元函数、偏导数、Gauss积分公式（散度定理）、Green公式、混合求导次序不是总可以交换等多元微积分的知识。

“方程”一词的意思是有等式、有未知量。这两个词放在一起，则意味着未知量是多元函数，等式中有待求多元函数的偏导数。

偏微分方程（PDE）的一般形式:

$$F(x, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_d}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \cdots) = 0. \tag{1}$$

这里向量$x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \Omega \subset \mathbf{R}^d$ 是自变量，未知量是多元函数$u = u(x)$, 其定义域是Ω，未知函数的自变量下标表示偏导数，如

$$u_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad u_{x_1 x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},$$

等等。

在许多情况下，u的取值范围（值域）也需要特别关注。进一步，u可以是个向量值函数，那时$F(\cdots)$ 也应该有几个分量。

1.1 例子

例1、输运方程

$$u_t + u_x = 0,$$

或

$$u_t - u_x = 0.$$

这里未知量是二元函数$u = u(t,x)$, 自变量x和t 在适当的范围（定义域）内变化。输运方程是最简单的偏微分方程。

例2、Laplace方程

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j x_j} u = 0,$$

其中未知量$u = u(x)$表示x处（空间位置）的位移，

$$\Delta := \partial_{x_1 x_1} + \partial_{x_2 x_2} + \ldots + \partial_{x_d x_d}$$

称为Laplace算子。

例3、热传导方程

$$u_t - \Delta u = 0,$$

其中$u = u(t,x)$是未知量，表示时刻t时x处的温度。

例4、波动方程

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

其中$u = u(t,x)$是未知量，表示时刻t时x处的位移。

上述三个方程是经典的偏微分方程，是本课程重点关注的对象。下一个例子来自概率论。

例5、Kolmogorov方程

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x) u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j(t,x) u_{x_j} = 0$$

其中系数$a_{ij}(t,x)$和$b_j(t,x)$都是给定的函数。

例6、最小曲面方程

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}} \right) = 0,$$

其中未知量$u = u(x)$表示x处曲面的位置，

$$\nabla := (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_d})^T$$

是通常的梯度算子，$\nabla\cdot$是散度算子。

例7、无粘Burgers方程

$$u_t + uu_x = 0$$

是描述可压流体运动的Euler方程的一个简化模型。

除了上述例子，物理定律的数学表述通常也是偏微分方程。

例8、量子力学中的Schrödinger方程（主部）

$$\sqrt{-1}u_t + \Delta u = 0,$$

其中未知量$u = u(t, x)$表示波函数。

例9、电动力学中的Maxwell方程组（主部）

$$E_t = \nabla \times B,$$

$$B_t = -\nabla \times E,$$

$$\nabla \cdot B = 0.$$

其中$E = E(t, x, y, z) \in \mathbf{R}^3$表示电场强度，$B = B(t, x, y, z) \in \mathbf{R}^3$是磁场强度，$\times$是向量间的叉乘算符。

例10、流体力学中的不可压Navier-Stokes方程

$$u_t + u \cdot \nabla u + \nabla p = \Delta u,$$

$$\nabla \cdot u = 0.$$

其中$u = u(t, x, y, z) \in \mathbf{R}^3$表示时刻$t$位置$(x, y, z)$处的流体速度，$p = p(t, x, y, z)$是流体压力。这个方程（组）的研究是7个千禧年问题之一。

更多的例子:

广义相对论中的Einstein方程

相对论量子力学中的Dirac方程

统计力学中的Boltzmann方程

流体力学中的可压Navier-Stokes方程、Euler方程,

……

上面的例子展现了偏微分方程的丰富性(物理、工程和几何),也说明了它们的重要性(物理定律的数学表述)。

1.2 若干术语

我们引入几个常见的术语（或概念），尤其是经典解的概念。

- 阶：方程中实际出现的导数的最高阶。如输运方程是一阶偏微分方程，而Laplace方程和热传导方程都是二阶的。

- （经典）解：经典解是一个函数（可能是向量值的），它的出现在方程中的各阶导数都存在且连续，将其代入方程后使得等式成立。

- 线性和非线性：若一般形式（1）中的$F(\cdots)$线性依赖于u及其各阶偏导数（即，$F(\cdots)$ 是u及其各阶偏导数的仿射函数），则称之为线性偏微分方程；否则称为非线性方程。

除了最小曲面方程、无粘Burgers方程和不可压Navier-Stokes方程，前面的其它例子都是线性偏微分方程。

二阶线性偏微分方程的一般形式是

$$\sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(x)u_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{d} b_j(x)u_{x_j} + c(x)u = f(x),$$

其中系数$a_{jk}(x), b_j(x), c(x)$是已知函数。若诸系数都是常数，则称之为线性常系数方程；否则称之为变系数方程。

线性叠加原理：线性偏微分方程的一个重要性质是其服从线性叠加原理。为了叙述这个原理，我们写$F = L[u] + f(x)$，其中$f = f(x)$只依赖于自变量x, $L[u]$是u及其各阶偏导数的线性组合（其中的系数可以依赖于x）．若$u_1 = u_1(x)$和$u_2 = u_2(x)$ 分别满足

$$L[u_1] + f_1(x) = 0 \quad \text{和} \quad L[u_2] + f_2(x) = 0,$$

那么它们的（常系数）线性组合$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$显然满足

$$L[u] + c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0.$$

这就是线性叠加原理。

非线性偏微分方程又可分为半线性、拟线性、以及全非线性方程。

- 半线性：$F(\cdots)$对u的最高阶偏导数是线性依赖的。如不可压Navier-Stokes方程。
- 拟线性：$F(\cdots)$对u的所有偏导数是线性依赖的，但对u本身的依赖不是线性的。如无粘Burgers方程。
- 全非线性：既不是半线性也不是拟线性的非线性方程称之为全非线性方程。

非线性方程一般不满足线性叠加原理，例如常数1和函数$\frac{x}{t+1}$(其中$t > 0$)都是无粘Burgers方程$u_t + uu_x = 0$的解，可它们的和$(1 + \frac{x}{t+1})$不是。

1.3 注记

偏微分方程这门学科的使命是求解方程，即寻找方程的解（一个（组）函数)。一旦找到了解就都好了，可是问题常常不是那么简单。

绝大多数情形是没法写出解的显示表达式的，如同不是所有的不定积分都可以显式求出来一样。

这样，关注点便成为研究方程或解的各种性质。对此，也没有一般的理论，考虑到偏微分方程的丰富性，似乎也不可能有一般的理论。

然而有如下共识：

- 自变量少的方程比自变量多的方程简单。
- 方程比方程组简单。
- 低阶方程（组）比高阶方程（组）简单。
- 线性方程比非线性方程简单。

本课程的主要内容是介绍几种经典偏微分方程的求解方法。我们从一阶偏微分方程开始。

1.4 一阶线性方程的特征线方法

考虑最简单的偏微分方程（一阶单个方程、两个自变量、线性常系数）

$$u_t + au_x = 0, \qquad (t,x) \in (-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty),$$

其中未知量是x和t的二元函数$u = u(t,x)$, a是个实常数。

定义该方程的“特征线”

$$l: \qquad \frac{dx}{dt} = a.$$

记这个常微分方程过$(t,x) = (0,\beta)$的解为$x = x(t,\beta)(= at + \beta)$.

若$u=u(t,x)$是前述方程的解，那么沿着特征线$x=x(t,\beta)$，一元函数$U(t):=u(t,x(t,\beta))$满足

$$\frac{dU(t)}{dt}=u_t(t,x(t,\beta))+u_x(t,x(t,\beta))\frac{dx(t,\beta)}{dt}=u_t+au_x=0.$$

即沿着特征线$u=u(t,x)$是个常数。特别地，我们有

$$u(t,x(t,\beta))=u(0,\beta).$$

另一方面，从$x=x(t,\beta)=at+\beta$可以解出$\beta=x-at$. 这样前述方程的解具有下列性质

$$u(t,x)=u(0,x-at).$$

可以验证这样的函数是原方程的解!

如果指定解在$t=0$时为连续可微函数$u_0(x)$（回忆常微分方程的初值问题），那么原问题（方程+初始条件）的经典解为

$$u(t,x)=u_0(x-at).$$

这个得到解的过程称为特征线方法，其要点是：给定点(X,T)，为了求得未知函数在这点的值，做过这点的特征线，与$t=0$ （此曲线上未知函数的值已知）交于$(t,x)=(0,\beta)$, 那么未知函数在(T,X)的值等于其在该交点的值。(在xt平面上，上述解的图示; 它表示了初值$u_0(x)$随着时间的传播，传播速度为a)。

上述求解过程完全适用于方程定义域为$t>0$的情形。

它还有以下推广（除非特别声明，下面总假定$t > 0$）。

(1)、 方程的定义域为xt平面的第一象限$(t, x) \in (0, \infty)^2$. 此时，初值$u_0 = u_0(x)$只对$x \geq 0$有定义。

若$a \leq 0$, 解还是$u = u_0(x - at)$. （看图）若$a > 0$, 这个表达式只对$x \geq at$有效。

为了确定其它点的值，还需指定未知函数在定义域边界$x = 0$上的函数值$u|_{x=0} = \phi(t)$.

有了边值，从特征线方法不难看到解为

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0(x - at), & x \geq at, \\ \\ \phi(t - x/a), & x \in [0, at), \end{cases}$$

为了这个解是经典的，初值$u_0 = u_0(x)$和边值$u|_{x=0} = \phi(t)$必须是相容的:

$$u_0(0) = \phi(0), \qquad a u_0'(0) + \phi'(0) = 0.$$

类似的讨论也可以推广到更复杂的定义域。

(2)、 上述解法完全适合于“变系数”方程

$$u_t + a(t,x)u_x = 0,$$

其特征线方程是

$$\frac{dx}{dt} = a(t,x).$$

这时特征线未必是直线。

沿着特征线$x = x(t,\beta)$,

$$U(t,\beta) := u(t,x(t,\beta))$$

仍是t的常值函数。

若从$x = x(t,\beta)$ 可以解出$\beta = \beta(t,x)$, 那么未知函数在点(t,x)的值可以确定如下

$$u(t,x) = U(0,\beta) = u_0(\beta(t,x)).$$

(3)、 也适合于多维变系数半线性方程

$$u_t + \mathbf{a}(t,x) \cdot \nabla u = f(t,x,u),$$

这里$x \in \mathbf{R}^d$. 这时，特征线方程

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{a}(t,x)$$

是一常微分方程组。

对于给定的初值$x|_{t=0} = \beta \in \mathbf{R}^d$, 其解表示$(d+1)$维空间过点$(0, \beta)$的一条曲线$x = x(t, \beta)$.

沿着特征线，函数$U(t, \beta) := u(t, x(t, \beta))$满足

$$\frac{dU}{dt} = f(t, x(t, \beta), U),$$

这又可以当作常微分方程的初值问题求解, 其中β是参数。此时，解$U(t, \beta)$未必是t的常值函数。如前，

若从$x = x(t, \beta)$ 可以解出$\beta = \beta(t, x)$, 那么未知函数在点(t, x)的值可以确定如下

$$u(t, x) = U(t, \beta),$$

其中$\beta = \beta(t, x)$是参数。

特征线方法的主要想法是把偏微分方程的求解转化为常微分方程的求解，其步骤如下：

1、求特征线$x = x(t, \beta)$，并解出$\beta = \beta(t, x)$.

2、沿特征线将原方程化为关于$U(t, \beta) := u(t, x(t, \beta))$的关于$t$的常微分方程，并求出其初值问题的解$U(t, \beta)$.

3、所求的解为$u = u(t, x) = U(t, \beta)$, 其中$\beta = \beta(t, x)$是参数。

我们来看两个例子。

例1、求解一阶线性方程的初值问题

$$\begin{aligned} u_t + (x+t)u_x + u &= x, \qquad t > 0,\ x \in (-\infty, \infty) \\ u(0,x) &= x. \end{aligned}$$

解：特征线方程是

$$\frac{dx}{dt} = x + t,$$

改写其为

$$\frac{d(e^{-t}x)}{dt} = e^{-t}t.$$

设$x(0) = \beta$. 那么解$x = x(t)$满足

$$\begin{aligned} e^{-t}x(t) - \beta = & \int_0^t e^{-\tau}\tau d\tau = -\int_0^t \tau de^{-\tau} \\ = & -\tau e^{-\tau}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-\tau}d\tau = -te^{-t} - e^{-t} + 1. \end{aligned}$$

从而特征线可以表示为

$$x = x(t,\beta) = (1+\beta)e^t - 1 - t,$$

由此可解得

$$\beta = (x+t+1)e^{-t} - 1.$$

沿着特征线，$U(t,\beta) = u(t, x(t,\beta))$满足

$$\begin{aligned} \tfrac{dU}{dt} + U &= x = (1+\beta)e^t - 1 - t, \\ U(0,\beta) &= u(0, x(0,\beta)) = u(0,\beta) = \beta. \end{aligned}$$

解之得

$$U(t,\beta) = \frac{1}{2}(1+\beta)e^t + \frac{1}{2}(\beta-1)e^{-t} - t.$$

最终得到

$$u(t,x) = U(t,\beta(x,t)) = \frac{1}{2}(1+x+t)e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x-t).$$

例2、求解2维线性方程的初值问题

$$u_t + (x + 2y)u_x + (3x + 4y)u_y = 0.$$

解：特征线方程是

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

其通解为

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\beta,$$

其中$\beta \in \mathbf{R}^2$是一任意向量。由此有

$$\beta = e^{-At} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}.$$

沿着特征线，$U(t,\beta) = u(t, x(t,\beta), y(t,\beta))$满足

$$\frac{dU}{dt} = 0,$$

所以是常值$u_0(\beta)$. 这样，最终解是

$$u(t,x,y) = U(t,\beta) = u_0(\beta) = u_0 \left(e^{-At} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} \right).$$

作业一

1、pp. 100：习题3 （4个小题）

2、pp. 106：习题30

3、设$\rho=\rho(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $f=f(x)$连续或局部可积，证明卷积

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)\rho(y)dy$$

是x的无穷次连续可微函数。