偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第19讲、基本解

19.1　基本解的概念

考虑一个m阶常系数偏微分算子

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} h_\alpha \partial^\alpha.$$

若能找到一个广义函数$K \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$，使得

$$P(\partial)K = \delta,$$

则称这个K为偏微分方程$P(\partial)u = f$的基本解。

事实上，

$$K * f = \int K(x-\xi) f(\xi) d\xi$$

满足

$$\begin{aligned} P(\partial)(K * f) = &\quad \int P(\partial) K(x-\xi) f(\xi) d\xi \\ = &\quad \int \delta(x-\xi) f(\xi) d\xi \\ = &\quad f(x). \end{aligned}$$

由此得到解方程$P(\partial)u = f$的一个解。

上面的运算是形式的，用到了微分算符和积分算符的可交换性。

所得解仅仅是形式的。

例1、热传导方程初值问题的基本解

设

$$K(t,x)=\begin{cases}\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^d}e^{-|x|^2/(4a^2t)}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

$K=K(t,x)$显然是$\mathbf{R}^{d+1}$上局部可积的（非负），尽管有奇点$(t=0,x=0)$。

满足：

(1). 当$t\le 0$时，$K(t,x)=0$；

(2). 当$t > 0$时，

$$K_t - a^2 \Delta K = \delta(t, x).$$

为了说明（2），只需对任一函数$\phi = \phi(t, x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{d+1})$, 验证

$$\begin{aligned} \phi(0,0) = & < \delta, \phi > = < [\partial_t - a^2 \Delta] K, \phi > \\ = & - < K, [\partial_t + a^2 \Delta] \phi > . \end{aligned}$$

由$K = K(t, x)$的局部可积性得

$$\begin{aligned} - < K, [\partial_t + a^2 \Delta] \phi > = & - \int_{\mathbf{R}^d} \int_0^\infty K(t, x) [\partial_t + a^2 \Delta] \phi(t, x) dt dx \\ = & - \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^\infty \int_{\mathbf{R}^d} K(t, x) [\partial_t + a^2 \Delta] \phi(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

对$\epsilon > 0$, 利用分部积分得

$$\begin{aligned}
& -\int_\epsilon^\infty \int_{\mathbf{R}^d} K(t,x)[\partial_t + a^2\Delta]\phi(t,x)dxdt \\
= \quad & -\int_{\mathbf{R}^d} K(t,x)\phi(t,x)|_\epsilon^\infty dx \\
& +\int_\epsilon^\infty \int_{\mathbf{R}^d} \phi(t,x)[\partial_t - a^2\Delta]K(t,x)dxdt \\
= \quad & \int_{\mathbf{R}^d} K(\epsilon,x)\phi(\epsilon,x)dx.
\end{aligned}$$

结果只需说明

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbf{R}^d} K(\epsilon,x)\phi(\epsilon,x)dx = \phi(0,0).$$

这个能用类似于检验Poisson公式给出的解满足初始条件的证法说明:

$$\int_{\mathbf{R}^d} K(\epsilon, x)dx = 1$$

而

$$K(\epsilon, x)[\phi(\epsilon, x) - \phi(\epsilon, 0)]$$

点点收敛到0.

通常称

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=K(t-\tau,x-\xi)$$

为

$$u_t-a^2\Delta u=\delta(x-\xi,t-\tau)$$

的基本解。

物理意义：方程右端为热源强度，ξ处时刻τ 一个瞬时单位热源。基本解是这个瞬时单位点热源引起的温度分布（称为瞬时单位点热源的影响函数，或点源函数)。

基本解的6个性质：非负性，空间变量的对称性，归一性（$t>\tau$)，时间衰减性:$(t-\tau)^{-d/2}$ ，满足方程和初值。

19.2 位势方程的基本解

位势方程指的是

$$-\Delta u = f(x), \qquad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d,$$

其中$u = u(x)$是未知函数，$f = f(x)$是给定的函数，Ω是一开集。

$f = 0$时称为Laplace方程或调和方程，其经典解称为调和函数。

Laplace算子Δ的旋转不变性:

设$A=[a_{ij}]$是一个d阶正交矩阵, $x=Ay$, $v(y)=u(Ay)$. 那么

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_1}v = & \sum_{j=1}^{d}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_1}=\sum_{j=1}^{d}a_{j1}\frac{\partial u}{\partial x_j}\\ = & (a_{11},a_{21},\cdots,a_{d1})\nabla_x u.\end{aligned}$$

从而有

$$\nabla_y v = A^T\nabla_x u$$

进而

$$\begin{aligned}\Delta_y = &\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\\ = &\left(\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_d}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_d}\right)^T\\ = &\nabla_y^T\nabla_y = \nabla_x^T A A^T \nabla_x = \nabla_x^T\nabla_x\\ = &\Delta_x.\end{aligned}$$

此即旋转不变性。

（全空间$\Omega = \mathbf{R}^d$问题的）基本解

设广义函数$E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$是位势方程的基本解，则

$$-\Delta E = \delta(x).$$

对于基本函数$\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$，则有

$$-\phi(0) = - < \delta, \phi > = < \Delta E, \phi > = < E, \Delta\phi > .$$

为了求得E，先考虑$d=2$的情形。

在极坐标(ρ,θ)下，

$$x_1=\rho\cos\theta,\qquad x_2=\rho\sin\theta,$$

$$\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\qquad x_1\sin\theta=x_2\cos\theta.$$

由此得到

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_1}=\frac{x_1}{\rho}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x_1}=\frac{-\sin\theta}{\rho},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x_2}=\frac{\cos\theta}{\rho}$$

进而

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial \rho}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&= \cos\theta \partial_\rho - \frac{\sin\theta}{\rho}\partial_\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= (\cos\theta \partial_\rho - \frac{\sin\theta}{\rho}\partial_\theta)(\cos\theta \partial_\rho - \frac{\sin\theta}{\rho}\partial_\theta) \\
&= \cos^2\theta \partial_\rho^2 - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\partial_\rho\partial_\theta + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\partial_\theta + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\partial_\rho + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\partial_\theta^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad &= (\sin\theta\partial_\rho + \tfrac{\cos\theta}{\rho}\partial_\theta)(\sin\theta\partial_\rho + \tfrac{\cos\theta}{\rho}\partial_\theta) \\
&= \sin^2\theta\partial_\rho^2 + 2\tfrac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\partial_\rho\partial_\theta - 2\tfrac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\partial_\theta + \tfrac{\cos^2\theta}{\rho}\partial_\rho + \tfrac{\cos^2\theta}{\rho^2}\partial_\theta^2.
\end{aligned}
$$

所以在极坐标下，Laplace算子Δ成为（径向形式）

$$
\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.
$$

定义基本函数$\phi = \phi(x)$的平均

$$\overline{\phi}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)d\theta.$$

注意当ρ充分大时，$\overline{\phi}(\rho) = 0$;

$$
\begin{aligned}
\overline{\Delta\phi} &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi}(\Delta\phi)(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\phi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta \\
&= \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right]\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi}\phi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta \\
&= \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right]\overline{\phi}(\rho).
\end{aligned}
$$

考虑到Δ的旋转不变性，可以假设E是径向函数$E(\rho)$.

进一步，假设E局部可积的，且满足下列运算需要的一些性质：关于ρ连续可微；当ρ趋于0时，$\rho E(\rho)$趋于0.

那么

$$
\begin{aligned}
-\phi(0) &= -<\delta,\phi>=<\Delta E,\phi>=<E,\Delta\phi> \\
&= \int_{\mathbf{R}^2} E(x)\Delta\phi(x)dx \\
&= 2\pi\int_0^{\infty} E(\rho)\rho\overline{\Delta\phi}d\theta d\rho
\end{aligned}
$$

$$= 2\pi \int_0^\infty E(\rho)\rho \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right] \overline{\phi}(\rho) d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^\infty E(\rho)[\rho\overline{\phi}'(\rho)]' d\rho$$

$$= 2\pi[E(\rho)\rho\overline{\phi}'(\rho)]|_0^\infty - 2\pi \int_0^\infty E'(\rho)\rho\overline{\phi}'(\rho) d\rho$$

$$= 0 - 2\pi \int_0^\infty E'(\rho)\rho\overline{\phi}'(\rho) d\rho.$$

这个式子建议取

$$E'(\rho)\rho = \frac{-1}{2\pi}.$$

结果

$$E(\rho) = \frac{-1}{2\pi} \ln \rho = \frac{-1}{2\pi} \ln |x|.$$

满足之前的假设：局部可积、径向、当ρ趋于0 时，$\rho E(\rho)$趋于0.

这个$E = E(\rho)$称为全空间二维位势方程的基本解。

（另一做法）对E的方程两边作Fourier变换，得

$$|\xi|^2\hat{E}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d},\qquad \hat{E}=\hat{E}(\xi)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\frac{1}{|\xi|^2}.$$

求逆Fourier变换，得

$$E(x)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}\frac{1}{|\xi|^2}e^{ix\xi}d\xi.$$

对于$d=3$，以给定的x为北极方向建立球坐标系(ρ,θ,ϕ)，则有

$$x\xi=|x||\xi|\cos\theta\equiv r\rho\cos\theta$$

从而

$$\begin{aligned}
E(x) &= \tfrac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\tfrac{1}{\rho^2}e^{i\rho r\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\phi d\theta d\rho \\
&= \tfrac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_0^\pi e^{i\rho r\cos\theta}\sin\theta d\theta d\rho \\
&= \tfrac{i}{(2\pi)^2 r}\int_0^\infty\tfrac{1}{\rho}\left[\int_0^\pi de^{i\rho r\cos\theta}\right]d\rho \\
&= \tfrac{i}{(2\pi)^2 r}\int_0^\infty\tfrac{1}{\rho}[e^{-i\rho r}-e^{i\rho r}]d\rho
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(x) \quad &= \tfrac{2}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \tfrac{\sin \rho r}{\rho} d\rho \\
&= \tfrac{2}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \tfrac{\sin \rho r}{r\rho} d(r\rho) \\
&= \tfrac{2}{4\pi^2 r} \tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

于是得到三维位势方程的基本解

$$
E(x) = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi|x|}.
$$

也是径向函数。

高维问题的基本解：计算麻烦，直接把径向函数代入方程求解ODE，得到（作业）

$$E(x) = \frac{1}{(d-2)\omega_d} \frac{1}{|x|^{d-2}}$$

这里$d \geq 3$，ω_d是d维单位球面的面积。

二维计算被积函数有奇性（?）

$$E(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2} e^{i\rho r\cos\theta} \rho d\theta d\rho.$$

19.3 演化方程（带有时间导数的方程）初值问题的基本解

方程是齐次的，初值是空间变量的δ函数。

基本解的理解：对每个时间t, 基本解$E = E(t, x)$是一关于空间变量x的广义函数。

在这里，时间变量t扮演着参数的角色。

比如

$$K(t,x) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^d} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}$$

（$t > 0$，没有0延拓到$t \le 0$）可以视作热传导方程初值问题

$$u_t - a^2 \Delta u = 0, \qquad u(0,x) = \delta(x)$$

的基本解。这个可以通过Fourier变换很简单地得到（看参考书172页）

第一种理解：0延拓的$K=K(t,x)$是$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{d+1})$或$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{d+1})$广义函数。

第二种理解：没有延拓
的$K=K(t,x)$是$C(0,\infty;\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d))$或$C(0,\infty;\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d))$ 广义函数

这里的连续性可以定义.

结合齐次化原理.

波动方程初值问题的基本解（导出Kirchhoff公式）

$$
\begin{aligned}
E_{tt} - a^2 \Delta E &= 0, \\
E|_{t=0} &= 0, \qquad E_t|_{t=0} = \delta(x).
\end{aligned}
$$

(基本解的第二个理解，结合齐次化原理)

对波动方程及其初始条件做关于空间变量x的Fourier 变换，得到

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_{tt} + a^2 |\xi|^2 \hat{E} &= 0, \\
\hat{E}|_{t=0} &= 0, \qquad \hat{E}_t|_{t=0} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}.
\end{aligned}
$$

这个问题的解为

$$\hat{E} = \hat{E}(t,\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}.$$

求逆Fourier变换，得

$$E(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}e^{ix\xi}d\xi.$$

为了计算这个积分，我们以给定的x方向为北极方向建立球坐标系(ρ, θ, ϕ), 则有

$$x\xi = |x||\xi|\cos\theta \equiv r\rho\cos\theta$$

从而

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{i\rho r\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\phi d\theta d\rho \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 a}\int_0^\infty\int_0^\pi \sin a\rho t e^{i\rho r\cos\theta}\rho\sin\theta d\theta d\rho \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 ar}\int_0^\infty \sin a\rho t\left[\int_0^\pi de^{i\rho r\cos\theta}\right]d\rho \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(t,x) \quad &= \tfrac{i}{(2\pi)^2 ar}\int_0^\infty \sin a\rho t[e^{-i\rho r}-e^{i\rho r}]d\rho \\
&= \tfrac{1}{4\pi^2 ar}\int_0^\infty 2\sin a\rho t\sin\rho r d\rho \\
&= \tfrac{1}{4\pi^2 ar}\int_0^\infty [\cos\rho(r-at)-\cos\rho(at+r)]d\rho \\
&= \tfrac{1}{4\pi^2 ar}\lim_{A\to\infty}\left[\tfrac{\sin A(r-at)}{r-at}-\tfrac{\sin A(r+at)}{r+at}\right]
\end{aligned}
$$

这样作为广义函数的极限，得到三维波动方程的基本解

$$
E(t,x)=\frac{\delta(r-at)-\delta(r+at)}{4\pi ar}.
$$

结果一般解为（书上58页的式3.8）

$$
\begin{aligned}
u(t,x) \quad &= E(t,\cdot) * \psi = \int \tfrac{\delta(|x-\xi|-at)}{4\pi a|x-\xi|}\psi(\xi)d\xi \\
&= \tfrac{1}{4\pi a}\int_0^\infty \int_{|\omega|=1} \tfrac{\delta(r-at)}{r} r^2 \psi(x+r\omega)d\omega dr \\
&= \tfrac{1}{4\pi a}\int_0^\infty \delta(r-at)r\left[\int_{|\omega|=1}\psi(x+r\omega)d\omega\right]dr \\
&= \tfrac{1}{4\pi a}at\int_{|\omega|=1}\psi(x+at\omega)d\omega \\
&= t\tfrac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}\psi(x+at\omega)d\omega.
\end{aligned}
$$

作业：

教材：pp.162, 6, 7(3)

参考书（谷超豪等）pp167: 2, 4， 8（2）