偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第10讲、分离变量法

10.1　一维波动方程的混合问题

这节介绍求解一维波动方程混合问题的分离变量法。先考虑第一边值问题

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = &\quad 0, \qquad t > 0, x \in (0, l), \\
u(t, 0) = u(t, l) = &\quad 0, \qquad t > 0, \\
u(0, x) = \phi(x), \quad u_t(0, x) = &\quad \psi(x), \qquad x \in (0, l).
\end{aligned} \tag{1}
$$

分离变量法的出发点是寻找变量分离形式的非平凡解

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

为了确定$T = T(t)$和$X = X(x)$, 将这个形式的解带入齐次波动方程得

$$T''X - a^2TX'' = 0.$$

非平凡解要求$T(t)X(x) \neq 0$. 那么

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}.$$

这个等式的左端是t的函数，右端是x的函数，所以它们是个与t, x都无关的常数，记作$-\lambda$. 这样以来，有

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \qquad X'' + \lambda X = 0.$$

另一方面，齐次边界条件要求

$$T(t)X(0) = T(t)X(l) = 0.$$

这样我们得到了关于非零$X = X(x)$的特征值问题

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0.$$

这里X和λ都是未知的，分别称为特征函数和特征值。这是一个特殊的Sturm-Liouville问题。

对于这样的Sturm-Liouville问题，我们有

定理10.1：对于区间$[0,l]$上的特征值（Sturm-Liouville）问题：

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \qquad x \in (0,l), \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) &= 0, \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) &= 0, \end{aligned}$$

其中$\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i \neq 0 (i = 0, 1)$，以下四个结论成立。

(1) 所有特征值都是非负的。当$\beta_1 + \beta_2 > 0$时，特征值是正的。

(2) 有可列无限多个特征值，它们组成一个单调递增以无穷远点为聚点的序列:

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

(3) 不同特征值对应的特征函数必正交：

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = 0,$$

这里$X_n(x)$和$X_m(x)$分别是相应于特征值$\lambda_n, \lambda_m (n \neq m)$的特征函数。

(4) 特征函数系$\{X_n(x)\}$构成区间$[0, l]$上平方可积函数空间的一个完备正交基。

注：最后一个结论意味着对于$[0, l]$上的任意平方可积函数$f = f(x)$，有

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^l \left| f - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x) \right|^2 dx = 0.$$

其中

$$c_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}.$$

证明：第(1)第(3)条结论的证明涉及到较多泛函分析的知识，此处只证第(2)第(4)条结论。

（1）设$X_\lambda = X_\lambda(x)$是相应于特征值λ的特征函数。用X_λ乘特征方程的两端并在区间$[0,l]$上积分，分部积分得（注意到特征函数是光滑的 ?)：

$$X_\lambda(x)X'_\lambda(x)\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l (X'_\lambda)^2 dx + \lambda \int_0^l (X_\lambda)^2 dx = 0.$$

从而

$$\lambda = \frac{\int_0^l (X'_\lambda)^2 dx - X_\lambda(x)X'_\lambda(x)\Big|_{x=0}^{x=l}}{\int_0^l (X_\lambda)^2 dx}$$

对于边界项$X_\lambda(0)X'_\lambda(0)$, 利用给定的边界条件可得

$$\begin{aligned} X_\lambda(0)X'_\lambda(0) = & \quad \tfrac{1}{\alpha_1+\beta_1}[\alpha_1 X_\lambda(0)X'_\lambda(0) + \beta_1 X_\lambda(0)X'_\lambda(0)] \\ = & \quad \tfrac{1}{\alpha_1+\beta_1}[\beta_1(X_\lambda(0))^2 + \alpha_1(X'_\lambda(0))^2] \geq 0. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} -X_\lambda(l)X'_\lambda(l) = & \quad -\tfrac{1}{\alpha_2+\beta_2}[\alpha_2 X_\lambda(l)X'_\lambda(l) + \beta_2 X_\lambda(l)X'_\lambda(l)] \\ = & \quad \tfrac{1}{\alpha_2+\beta_2}[\beta_2(X_\lambda(l))^2 + \alpha_2(X'_\lambda(l))^2] \geq 0. \end{aligned}$$

因此$\lambda \geq 0$.

若$\lambda = 0$，根据

$$X'_\lambda(x) \equiv 0, \quad \beta_1(X_\lambda(0))^2 = 0, \quad \beta_2(X_\lambda(l))^2 = 0.$$

这时X_λ是一常数. 由于$\beta_1 + \beta_2 > 0$, 该常数只能为0，即$X_\lambda(x) \equiv 0$，与其为特征函数矛盾，故$\lambda > 0$.

（3）设X_λ, X_μ是相应于特征值λ和μ的特征函数。用X_λ, X_μ分别乘相应于μ和λ的方程，在$[0, l]$上积分，分部积分得

$$\begin{aligned} X_\mu(x)X'_\lambda(x)\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l X'_\mu X'_\lambda dx + \lambda \int_0^l X_\lambda X_\mu dx &= 0, \\ X_\lambda(x)X'_\mu(x)\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l X'_\lambda X'_\mu dx + \mu \int_0^l X_\mu X_\lambda dx &= 0. \end{aligned}$$

两式相减得

$$(\lambda-\mu)\int_0^l X_\lambda X_\mu dx = B(l)-B(0),$$

其中

$$B(x)=X_\lambda(x)X_\mu'(x)-X_\lambda'(x)X_\mu(x).$$

而边界条件

$$\begin{aligned}-\alpha_1 X_\lambda'(0)+\beta_1 X_\lambda(0) &= 0,\\ -\alpha_1 X_\mu'(0)+\beta_1 X_\mu(0) &= 0\end{aligned}$$

可以视作以(α_1,β_1)为未知量的线性齐次代数方程组。

由于$\beta_1+\beta_2>0$, 说明该齐次代数方程组有非零解，故其系数矩阵的行列式$B(0)=0$. 同理，$B(1)=0$.

这样，

$$(\lambda - \mu)\int_0^l X_\lambda X_\mu dx = 0.$$

由于$\lambda \neq \mu$,

$$\int_0^l X_\lambda X_\mu dx = 0,$$

即X_λ和X_μ正交。证毕。

注：特征值$\lambda = 0$：这只在且在$\beta_1 = \beta_2 = 0$时发生。此时，Sturm-Liouville问题是

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X'(0) = X'(l) &= 0. \end{aligned}$$

对这个问题，$X(x) = 1$(或任何非零常数）确实是对应于特征值0的特征函数。

回到开始导出的Sturm-Liouville问题

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) = X(l) &= 0. \end{aligned}$$

其中$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1$. 满足定理10.1的条件。

根据定理10.1，特征值$\lambda > 0$, 相应特征函数的一般形式是

$$X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x.$$

结合边界条件得

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

为了$X = X(x)$非零，必需有

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

由此得到

$$\lambda = (\frac{n\pi}{l})^2, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

这是可列无穷多个特征值, 组成一个单调递增的以无穷远点为聚点的序列!

相应的特征函数是

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

另一方面，相应于每个特征值$\lambda = (\frac{n\pi}{l})^2$，

$$T'' + a^2\lambda T = 0$$

的一般解$(t > 0)$是

$$T = T(t) = A_n \sin\frac{an\pi}{l}t + B_n \cos\frac{an\pi}{l}t, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

结果得到一系列分离变量形式的解

$$u_n(t,x) = \left(A_n \sin\frac{an\pi}{l}t + B_n \cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

这些解都满足齐次波动方程和齐次边界条件!

这些$u_n(t,x)$的简单叠加

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{an\pi}{l}t+B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

形式上也满足方程和边界条件。

为了确定系数A_n和B_n，回忆初始条件

$$\phi(x)=u(t,x)|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\tfrac{n\pi}{l}x,$$

$$\psi(x)=u_t(t,x)|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\tfrac{an\pi}{l}\sin\tfrac{n\pi}{l}x,$$

根据（4），所有特征函数$\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$ 构成平方可积函数空间$L_2(0,l)$上的一组完备正交基。因此平方可积函数ϕ,ψ都可以由这组基展开表示！即正弦展开

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$\phi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,$$

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

比较得

$$B_n = \phi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx,$$

$$A_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx.$$

确定了这些系数，就得到了混合问题的一个级数形式的解，其有限和是无穷次连续可微的。

分离变量法的四个步骤:

1、将$u(t,x)=T(t)X(x)$代入齐次波动方程及其齐次边界条件，得到关于$X(x)$的Sturm-Liouville问题以及关于$T(t)$的常微分方程。

2、解Sturm-Liouville问题，得到全部可列无限个特征值和全部特征函数，并求出相应的$T(t)$.

3、把可列无限个分离变量形式的解叠加起来，利用初值定出待定的展开系数。

4、验证无限叠加的收敛性、与微分算子的交换性以及边界条件。

对之前的例子，需要验证

$$
\begin{aligned}
(\partial_{tt} - a^2\partial_{xx}) \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (\partial_{tt} - a^2\partial_{xx}) u_n, \\
\lim_{x\to 0,l} \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0,l} u_n \\
\lim_{t\to 0+} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to 0+} \frac{\partial^m u_n}{\partial t^m} \qquad (m = 0, 1).
\end{aligned}
$$

只需证明级数

$$
\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} Du_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D^2 u_n
$$

在闭区域$(t, x) \in [0, T] \times [0, l]$ 上一致收敛。这个涉及到定解数据的光滑性以及在两个角点的相容性。

定理10.2：若$\phi \in C^3[0,l], \psi \in C^2[0,l]$并满足在定解区域角点的相容性条件

$$\phi(0) = \phi(l) = 0, \quad \phi''(0) = \phi''(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0,$$

则问题（1）的前述形式解是经典解。

证明：基于给定的条件，通过分部积分得

$$\begin{aligned}
A_n = & \quad \tfrac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \tfrac{n\pi x}{l} dx \\
= & \quad \tfrac{2}{an\pi} \tfrac{l}{n\pi} \left[-\cos \tfrac{n\pi x}{l} \psi(x)|_0^l + \int_0^l \psi'(x) \cos \tfrac{n\pi x}{l} dx \right] \\
= & \quad \tfrac{2}{an\pi} \tfrac{l}{n\pi} \tfrac{l}{n\pi} \left[\sin \tfrac{n\pi x}{l} \psi'(x)|_0^l - \int_0^l \psi''(x) \sin \tfrac{n\pi x}{l} dx \right] \\
= & \quad -\tfrac{l^3}{a(n\pi)^3} a_n,
\end{aligned}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi''(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

同理,

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{l^3}{(n\pi)^3}b_n,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi'''(x)dx.$$

注意$b_n(a_n)$是$\phi'''(\psi'')$关于基底$\{\cos\frac{n\pi x}{l}\}(\{\sin\frac{n\pi x}{l}\})$的Fourier展开系数。

回忆

$$u_n(t,x) = \left(A_n \sin\frac{an\pi}{l}t + B_n \cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

从而有估计

$$\begin{aligned}
|u_n(t,x)| \leq &\quad |A_n| + |B_n| = O(n^{-3}), \\
|Du_n(t,x)| \leq &\quad |A_n| + |B_n| = O(n^{-2}), \\
|D^2u_n(t,x)| \leq &\quad a_n^2 + b_n^2 + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

注意a_n和b_n作为Fourier展开系数，满足Bessel不等式

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq &\quad \frac{2}{l}\int_0^l |\psi''(x)|^2 dx, \\
\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq &\quad \frac{2}{l}\int_0^l |\phi'''(x)|^2 dx.
\end{aligned}
$$

从而原级数及其一、二阶（时空）导数叠加组成的导级数都一致收敛。证毕。

作业： pp 28, 15

pp100, 22(1)(5)， 23(2)(4)