偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第6讲、一维波动方程的能量估计

我们先介绍一维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty), \\ u|_{t=0} = \phi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in (-\infty,\infty), \end{cases} \tag{1}$$

的三个域。

6.1、依赖区域（间）、决定区域、影响区域

从D’Alembert公式

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi d\tau$$

可以立即看到解在点(t,x)的值由初始数据和右端项（外力f）在区域（图）

$$K(t,x) := \{(\tau,\xi) : |\xi - x| \le a(t-\tau), \quad \tau\in[0,t]\}$$

上的值唯一确定，与其它点的值无关。

当$f\equiv 0$（无外力）时，解在点(t,x)的值只依赖于初始数据在区间

$$[x-at, x+at]$$

上的值。这个区域（间）称为点(t,x) 的依赖区域（区间），也称特征锥（以(t,x)为顶点的）。

这个事实也可以换个角度来理解。设$f=0$，任取x轴上的一闭区间

$$[x_-, x_+]$$

过$x_\pm$做斜率为$\mp a$的两条直线，形成一个三角形（图）。解在这个三角形区域中任意一点的值完全由初始数据在该区间的值决定。这个三角形区域称为区间$[x_-, x_+]$ 的决定区域。

另一方面，对$f = 0$以及任取的区间

$$[x_-, x_+]$$

过$x_\pm$做斜率为$\pm a$的两条直线，形成一个倒立梯形（图）。这个梯形中任意一点的依赖区间都与$[x_-, x_+]$相交，而这个梯形之外点的依赖区间都不与$[x_-, x_+]$相交。这个梯形称为上述区间的影响区域。
当$x_- = x_+$时，点x_+的影响域是如图所示的倒立三角形。

影响区域形象地说明区间$[x_-, x_+]$上的初始扰动（如电磁波）沿着两族特征线$x = x_\pm \pm at$以有限传播速度a 向两边传播。初始扰动的影响只发生在过扰动点的两条特征线所围成的区域中。

当初始数据有奇性，比如$f = 0 = \phi$而$\psi = \psi(x)$连续但其一阶导数在$x = x_0$不连续（有左右极限），那么

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$$

是连续可微的，但u_{tt}和u_{xx}都在特征线$x = x_0 \pm at$两侧发生间断：

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) = \frac{a}{2}[\psi'(x+at) - \psi'(x-at)].$$

即，如果初值（包括$u(0,x)$）在某点有奇性，那么该奇性将沿着过这点的特征线以有限速度a传播。

6.2、能量估计

作为能量估计的准备，先引入

Gronwall不等式: 给定区间$[0,T]$上的单调增函数$F=F(t)$。设连续可微函数$G=G(t)$满足$G(0)=0$和不等式

$$\frac{dG(t)}{dt} \leq CG(t)+F(t),$$

其中$C>0$是个常数。那么

$$G(t) \leq C^{-1}(e^{Ct}-1)F(t), \qquad \frac{dG(t)}{dt} \leq e^{Ct}F(t).$$

证明：给定的微分不等式可以写成

$$\frac{d[e^{-Ct}G(t)]}{dt} \leq e^{-Ct}F(t).$$

注意到$G(0) = 0$和$F = F(t)$的单调性，两边积分得

$$e^{-Ct}G(t) \leq \int_0^t e^{-C\tau}F(\tau)d\tau \leq F(t)\int_0^t e^{-C\tau}d\tau = C^{-1}(1-e^{-Ct})F(t).$$

$$\cdots\cdots$$

对于一维波动方程的初值问题（1），给定$(T,X)\in(0,\infty)\times(-\infty,\infty)$, 考虑顶点为$(T,X)$ 的特征锥（图）

$$K=\{(t,x):0\le t\le T,\quad X-aT+at\le x\le X+aT-at\}.$$

以及锥台

$$K_\tau=\{(t,x)\in K,\quad 0\le t\le\tau\le T\}.$$

记这个锥台的上下表面分别为Ω_τ 和Ω_0.

关于一维波动方程的初值问题（1），有下列结论

定理6.1：设$u = u(t,x) \in C^2(K)$是定解问题(1)的解，则它满足下列两个估计：

$$\int_{\Omega_\tau}[u_t^2(\tau,x) + a^2 u_x^2(\tau,x)]dx,$$

$$\int_{K_\tau}[u_t^2 + a^2 u_x^2]dxdt$$

$$\leq \quad e^\tau \left[\int_{K_\tau} f^2 dxdt + \int_{\Omega_0}\left(\psi^2 + a^2\phi_x^2\right)dx\right].$$

注1（能量模）：对于弦振动问题，$\rho u_t^2(t,x)dx/2$ 表示弦段dx 在时刻t 所具有的动能，$\rho u_x^2(t,x)dx/2$与弦段dx 在时刻t 所具有的应变能（势能）成正比。

因此，不记常数因子，表达式

$$\int_{\Omega_\tau}[u_t^2(\tau,x)+a^2u_x^2(\tau,x)]dx$$

表示弦段Ω_τ 在时刻τ 的总能量。

数学上，我们称它为能量积分，或称为解u的能量模。定理6.1给出了初值问题（1）的解的能量模估计。

注2（唯一性、连续依赖性）：这个定理也说明波动方程初值问题的解是唯一的，并且在能量模意义下对初值和方程右端项是连续依赖的

设u为两个解的差，ϕ，ψ 以及f为相应的初值和右端项的差。对于唯一性，这些定解数据均为零，根据这个定理，u 的一阶导数均为零，那么u是常数。由于它的初值为零，所以u恒为零。

证明：用u_t 乘其上述波动方程的两端，然后在锥台K_τ上积分得

$$\int_{K_\tau} u_t(u_{tt}-a^2u_{xx})dxdt=\int_{K_\tau} u_t f dxdt.$$

由于

$$u_tu_{tt}=\frac{1}{2}\partial_t(u_t)^2,$$

$$u_tu_{xx}=\partial_x\left(u_tu_x\right)-u_{tx}u_x=\partial_x\left(u_tu_x\right)-\frac{1}{2}\partial_t(u_x)^2,$$

代入得

$$\int_{K_\tau}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left((u_t)^2+a^2(u_x)^2\right)-a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(u_tu_x\right)\right]dxdt=\int_{K_\tau} u_t f dxdt.$$

由Green积分公式，得

$$-\int_{\partial K_\tau}\left[\frac{1}{2}\left((u_t)^2+a^2(u_x)^2\right)dx+a^2u_tu_xdt\right]=\int_{K_\tau}u_tf\,dxdt.$$

边界∂K_τ由四部分构成（看图，逆时针)。上下两条边上的积分分别是

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left((u_t)^2+a^2(u_x)^2\right)|_{t=\tau}dx$$

和

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left((u_t)^2+a^2(u_x)^2\right)|_{t=0}dx.$$

在左侧边界上，$x = X - aT + at$. 那么$dx = adt$, 从而其上的积分为

$$
\begin{aligned}
& -\int_{\Gamma_4}\left[\frac{1}{2}\left((u_t)^2 + a^2(u_x)^2\right)dx + a^2 u_t u_x dt\right] \\
= \quad & -\int_{\tau}^{0}\left[\frac{1}{2}\left((u_t)^2 + a^2(u_x)^2\right)adt + a^2 u_t u_x dt\right] \\
= \quad & \frac{a}{2}\int_0^{\tau}(u_t + au_x)^2 dt \geq 0.
\end{aligned}
$$

在右侧边界上，$x = X + aT - at$. 那么$dx = -adt$, 从而其上的积分为

$$
\begin{aligned}
& -\int_{\Gamma_2}\left[\frac{1}{2}\left((u_t)^2 + a^2(u_x)^2\right)dx + a^2 u_t u_x dt\right] \\
= \quad & \int_0^{\tau}\left[\frac{1}{2}\left((u_t)^2 + a^2(u_x)^2\right)adt - a^2 u_t u_x dt\right] \\
= \quad & \frac{a}{2}\int_0^{\tau}(u_t - au_x)^2 dt \geq 0.
\end{aligned}
$$

综上，我们得到

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left((u_t)^2+a^2(u_x)^2\right)|_{t=\tau}dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left((u_t)^2+a^2(u_x)^2\right)|_{t=0}dx$$

$$\leq \int_{K_\tau} u_t f dxdt.$$

由于

$$\int_{K_\tau} u_t f dxdt \leq \frac{1}{2}\int_{K_\tau}[u_t^2+f^2]dxdt,$$

所以

$$\int_{\Omega_\tau}\left((u_t)^2+a^2(u_x)^2\right)|_{t=\tau}dx-\int_{\Omega_0}\left(\psi^2+a^2\phi_x^2\right)dx$$

$$\leq \int_{K_\tau}[u_t^2+f^2]dxdt.$$

记

$$G(t)=\int_{K_t}[u_t^2+a^2u_x^2]dxdt,$$

$$F(t)=\int_{K_t}f^2dxdt+\int_{\Omega_0}\left(\psi^2+a^2\phi_x^2\right)dx.$$

显然$F(t)$是单调增的，$G(0)=0$并且

$$\frac{dG(t)}{dt}=\int_{\Omega_t}[u_t^2+a^2u_x^2]dx.$$

进而，前述不等式可以写作

$$\frac{dG(t)}{dt}\leq G(t)+F(t).$$

根据Gronwall不等式，即可得到定理中的估计。证毕。

推论:

$$\int_{\Omega_\tau} u^2(\tau,x)dx + \int_{K_\tau} u^2 dxdt$$

$$\leq \quad 2e^{2\tau}\left[\int_{K_\tau} f^2 dxdt + \int_{\Omega_0}\left(\phi^2+\psi^2+a^2\phi_x^2\right)dx\right].$$

证明:(不用方程)注意

$$\int_{\Omega_\tau}[u^2(\tau,x)-u^2(0,x)]dx = \int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau \frac{du^2(t,x)}{dt}dtdx$$

$$= \quad 2\int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau u(t,x)u_t(t,x)dxdt$$

$$\leq \quad \int_{\Omega_\tau}\int_0^\tau [u^2(t,x)+u_t^2(t,x)]dxdt$$

$$\leq \quad \int_{K_\tau}[u^2(t,x)+u_t^2(t,x)]dxdt.$$

令

$$G(\tau) = \quad \int_{K_\tau} u^2(t,x)dtdx,$$

$$F(\tau) = \quad \int_{\Omega_0} u^2(0,x)dx + \int_{K_\tau} u_t^2(t,x)dxdt.$$

显然$F(\tau)$是单调增的，$G(0)=0$并且

$$\frac{dG(t)}{dt} = \int_{\Omega_t} u^2 dx.$$

进而，前述不等式可以写作

$$\frac{dG(t)}{dt} \leq G(t) + F(t).$$

根据Gronwall不等式并结合定理6.1，即可得到推论中的估计。证毕。

注：含有一阶导数项的估计（习题13）

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + a(t,x)u_t + b(t,x)u_x = f(t,x).$$

$$|u_t a(t,x) u_t|, \quad |u_t b(t,x) u_x| \le C(u_t^2 + u_x^2)$$

$\cdots, \cdots.$

作业：pp. 100：6，7，8，10