偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第21讲、Green函数

21.1、 第一边值问题的Green函数

由定理20.2，我们看见对于给定的位势方程

$$-\Delta u = f, \qquad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d,$$

若也知道解在边界上的值及其法向导数的值，则解在区域内部的值就完全确定了。

然而，由前面证明的唯一性，不能同时给定解的边界值及其法向导数值!

为了消去u的这个表达式中对边界值和法向导数值的同时依赖，注意若用一没有奇性的满足Laplace方程的函数g代替Green第二公式中的基本解$E(\xi - x)$，则有

$$0 = -\int_{\Omega} g\Delta u(x)dx + \int_{\partial\Omega} \left[g\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(x) - u\frac{\partial g}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \right] dS.$$

记

$$G = g + E(\xi - x).$$

两式相加，则有

$$u(\xi) = -\int_{\Omega} G\Delta u(x)dx + \int_{\partial\Omega} \left[G\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}(x) - u\frac{\partial G}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \right] dS.$$

若选择未定的g使得$G = g + E(\xi - x)$满足

$$G|_{x \in \partial\Omega} = 0,$$

那么Poisson方程第一边值问题

$$-\Delta u = f(x), \qquad x \in \Omega,$$
$$u|_{\partial\Omega} = \phi(x), \qquad x \in \partial\Omega,$$

的解就可表示为

$$(*) \qquad u(\xi) = \int_\Omega G f(x) dx - \int_{\partial\Omega} \phi(x) \frac{\partial G}{\partial \vec{\mathbf{n}}} dS.$$

这样求解Poisson方程第一边值问题就归结为寻找$G = g + E(\xi - x)$或g 使得

$$\Delta g = 0, \qquad x \in \Omega,$$

$$g|_{x\in\partial\Omega} = -E(\xi - x)|_{x\in\partial\Omega}.$$

这个g显然依赖于$\xi \in \Omega$，从而记作$g = g(x;\xi)$, 而称

$$G(x;\xi) = g(x;\xi) + E(\xi - x)$$

为（Poisson方程第一边值问题的）Green函数。(其它边界条件 ?)

总之，Green函数满足（基本解）

$$-\Delta_x G(x;\xi) = \delta(x-\xi), \qquad x \in \Omega,$$

$$G(x;\xi)|_{x\in\partial\Omega} = 0.$$

物理意义：物（导）体Ω内部ξ 处放一单位点热源（电荷），与外界接触的表面保持恒温（表面接地），长时间后的物（导）体内的温度（电位）分布。

Green函数的意义：类似于基本解，只要找到这个特定问题的解，其它数据的问题就有了。

针对某些特定的区域可以找到g的显式表达式。

21.2、 Green函数的性质

(1)、对于$x \neq \xi$, $\Delta_x G(x;\xi) = 0$; 当$x \to \xi$时，

$$G(x;\xi) = g(x;\xi) + E(|x-\xi|)$$

以$E(|x-\xi|)$的速率趋于正无穷。

(2)、（之后的作业）

$$0 < G(x;\xi) \leq E(|x-\xi|).$$

(3)、在公式（*）中，取$u = 1$, 得

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x;\xi) dS = -1.$$

(4)、对称性：

$$G(\xi';\xi) = G(\xi;\xi').$$

证明：设$\xi, \xi' \in \Omega$且$\xi \neq \xi'$. 在Ω中挖去以ξ和ξ'为中心的两个球，用Green第二公式得

$$0 = \left(\int_{\partial B_\epsilon(\xi)} + \int_{\partial B_\epsilon(\xi')}\right)\left[G(\cdot;\xi)\frac{\partial G(\cdot;\xi')}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - G(\cdot;\xi')\frac{\partial G(\cdot;\xi)}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\right].$$

这里用到了Green第二公式中的体积分为零，这是由于$G(\cdot;\xi)$和$G(\cdot;\xi')$在挖去那两个小球的Ω中都是调和的。

还用到$G(\cdot;\xi)$和$G(\cdot;\xi')$在边界$\partial\Omega$上都为0.

又由于$g(\cdot;\xi)$和$G(\cdot;\xi')$在球内$B_\epsilon(\xi)$都是调和的，由Green第二公式得

$$0=\int_{\partial B_\epsilon(\xi)}\left[g(\cdot;\xi)\frac{\partial G(\cdot;\xi')}{\partial\vec{\mathbf{n}}}-G(\cdot;\xi')\frac{\partial g(\cdot;\xi)}{\partial\vec{\mathbf{n}}}\right].$$

这样，

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B_\epsilon(\xi)}[G(\cdot;\xi)\tfrac{\partial G(\cdot;\xi')}{\partial\vec{\mathbf{n}}}-G(\cdot;\xi')\tfrac{\partial G(\cdot;\xi)}{\partial\vec{\mathbf{n}}}]\\
=\quad&\int_{\partial B_\epsilon(\xi)}[E(x-\xi)\tfrac{\partial G(\cdot;\xi')}{\partial\vec{\mathbf{n}}}-G(\cdot;\xi')\tfrac{\partial E(x-\xi)}{\partial\vec{\mathbf{n}}}]\\
&+\int_{\partial B_\epsilon(\xi)}[g(\cdot;\xi)\tfrac{\partial G(\cdot;\xi')}{\partial\vec{\mathbf{n}}}-G(\cdot;\xi')\tfrac{\partial g(\cdot;\xi)}{\partial\vec{\mathbf{n}}}]\\
=\quad&\int_{\partial B_\epsilon(\xi)}[E(x-\xi)\tfrac{\partial G(\cdot;\xi')}{\partial\vec{\mathbf{n}}}-G(\cdot;\xi')\tfrac{\partial E(x-\xi)}{\partial\vec{\mathbf{n}}}]\to G(\xi;\xi'),
\end{aligned}$$

类似地，

$$
\begin{aligned}
& \int_{\partial B_\epsilon(\xi')}[G(\cdot;\xi')\frac{\partial G(\cdot;\xi)}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - G(\cdot;\xi)\frac{\partial G(\cdot;\xi')}{\partial \vec{\mathbf{n}}}] \\
= & \int_{\partial B_\epsilon(\xi')}[E(x-\xi')\frac{\partial G(\cdot;\xi)}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - G(\cdot;\xi)\frac{\partial E(x-\xi')}{\partial \vec{\mathbf{n}}}] \to G(\xi';\xi).
\end{aligned}
$$

所以

$$
G(\xi';\xi) = G(\xi;\xi').
$$

证毕。

21.3、 特殊区域上的Green函数（镜像法、对称开拓）

求区域Ω上的Green函数

$$G(x;\xi)=g(x;\xi)+E(|x-\xi|)$$

归结为求函数$g=g(x;\xi)$.

比较三维情形基本解E的表达式和静电学中的库伦定律，$E(|x-\xi|)$代表ξ 处的单位点电荷（正）在x处产生的电位。

假设在区域Ω外也有一个（负）点电荷，它对自由空间的电场也产生一个电位。如果这两个点电荷产生的电位在Ω的边界上恰巧抵消。这个虚拟的点电荷在内Ω产生的电位就是g.

这个虚拟点电荷的位置应该是ξ关于区域边界的某个对称点。这种利用对称性求Green函数的方法称为静电源像法（或镜像法)。

1)、半空间（简单）:

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d : x_d > 0\}.$$

设$\xi \in \Omega$. 那么ξ 的最后一个分量$\xi_d > 0$. 取

$$\xi^* = \xi - 2\xi_d(0, 0, \cdots, 0, 1).$$

可见ξ位于上半空间，ξ^*位于下半空间，$\xi + \xi^*$位于边界上。

Green函数为

$$G(x;\xi) = E(|x-\xi|) - E(|x-\xi^*|)$$

或

$$g(x;\xi) = -E(|x-\xi^*|).$$

显然在上半空间$g = g(x;\xi)$满足Laplace方程，且当x位于Ω 的边界时，$|x-\xi| = |x-\xi^*|$，从而$G(x;\xi)$取零值。

Green函数$G(x;\xi)$在边界处法向导数的计算：

$$\frac{\partial G}{\partial x_d} = \frac{\partial E(|x-\xi|)}{\partial x_d} - \frac{\partial E(|x-\xi^*|)}{\partial x_d}$$

$$= -\frac{x_d-\xi_d}{\omega_d|x-\xi|^d} + \frac{x_d-\xi_d^*}{\omega_d|x-\xi^*|^d},$$

所以

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\Big|_{x_d=0} = -\frac{\partial G}{\partial x_d}\Big|_{x_d=0} = \frac{-2\xi_d}{\omega_d|x-\xi|^d}.$$

那么Poisson方程第一边值问题

$$-\Delta u = f(x), \qquad x_d > 0,$$
$$u|_{\partial\Omega} = \phi(x), \qquad x \in \partial\Omega,$$

的解就可表示为

$$u(\xi) = \int_{x_d>0} G(x;\xi)f(x)dx + \frac{2\xi_d}{\omega_d}\int_{x_d=0}\frac{\phi(x)}{|x-\xi|^d}dS.$$

（Poisson核，Poisson公式）。

2)、球（多维）

$$\Omega = B_a = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d : |x| < a\}.$$

给定$\xi \in B_a, \xi \neq 0$，取

$$\xi^* = \frac{a^2}{|\xi|^2}\xi.$$

（图）点ξ^*位于$O\xi$的延长线上，满足$|\xi^*||\xi| = a^2$.

那么$|\xi^*| > a$, 即ξ^*在球B_a之外。

而对球面上的任一点x，三角形$O\xi x$ 相似于三角形$Ox\xi^*$，所以有

$$\frac{|x-\xi|}{|x-\xi^*|} = \frac{|\xi|}{a}.$$

那么$E(|x-\xi|) = E(\frac{|\xi||x-\xi^*|}{a})$.

另一方面，由于ξ^*在球B_a之外，

$$g(x;\xi) = -E(\frac{|\xi||x-\xi^*|}{a})$$

是球B_a内关于x的调和函数。

综上，在这种情形，Green函数是

$$G(x;\xi) = E(x-\xi) - E(\frac{|\xi||x-\xi^*|}{a}).$$

$G(x;\xi)$在边界处法向导数的计算：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x_i} &= \frac{\partial E(|x-\xi|)}{\partial x_i} - \frac{\partial E(|\xi|(x-\xi^*)/a)}{\partial x_i} \\
&= \frac{\xi_i - x_i}{\omega_d |x-\xi|^d} + \frac{x_i - \xi_i^*}{\omega_d |x-\xi^*|^d |\xi|^d} \frac{|\xi|^2 a^d}{a^2},
\end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{a},$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\right|_{|x|=a} &= \vec{\mathbf{n}} \cdot \nabla_x G(x;\xi)|_{|x|=a} \\
&= \tfrac{1}{a\omega_d|x-\xi|^d}\left[x\xi - a^2 + \tfrac{|\xi|^2}{a^2}(a^2 - x\xi^*)\right] \\
&= \tfrac{1}{a\omega_d|x-\xi|^d}(|\xi|^2 - a^2).
\end{aligned}$$

那么位势方程第一边值问题的解是

$$u(\xi) = \int_{|x|<a} G(x;\xi) f(x) dx + \frac{a^2 - |\xi|^2}{a\omega_d} \int_{|x|=a} \frac{\phi(x)}{|x-\xi|^d} dS.$$

（Poisson核，Poisson公式）。

在二维极坐标(r,α)之下，设$\xi=\rho(\cos\theta,\sin\theta), x=r(\cos\alpha,\sin\alpha)$, 则

$$\begin{aligned}
G(x;\xi) = \quad & E(x-\xi)-E(|\xi|(x-\xi^*)/a) \\
= \quad & \tfrac{1}{2\pi}\ln\tfrac{|\xi||x-\xi^*|}{a|x-\xi|} \\
= \quad & \tfrac{1}{4\pi}\ln\tfrac{|\xi|^2|x-\xi^*|^2}{a^2|x-\xi|^2} \\
= \quad & \tfrac{1}{4\pi}\ln\tfrac{\rho^2[r^2+a^4/\rho^2-2a^2r\cos(\theta-\alpha)/\rho]}{a^2[\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)]}.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\Big|_{|x|=a}=\frac{1}{a\omega_d|x-\xi|^d}(|\xi|^2-a^2)=\frac{\rho^2-a^2}{2\pi a[\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)]}.$$

3)、半球

设ξ是上半球内的一点，$\tilde{G}(x;\xi)$是相应球形区域的Green函数，ξ^*是ξ关于超平面$x_d = 0$的对称点（同半空间情形的ξ^*），则

$$G(x;\xi) = \tilde{G}(x;\xi) - \tilde{G}(x;\xi^*)$$

是需要的Green函数。

4)、平面单连通区域（保角变换法）

Riemann映射定理：对于平面上任一具有光滑边界的单连通区域，必存在一个共形映射将此区域映射到单位圆。

设$v = v(z)$是把单连通区域Ω映到单位圆的共形映射，$\xi \in \Omega$. 可以直接验证

$$w = w(z;\xi) = \frac{v(z) - v(\xi)}{1 - v(z)\overline{v}(\xi)}$$

是一个把Ω映成单位圆$|w| < 1$，把ξ映到圆心：$w(\xi;\xi) = 0$，并把Ω的边界映为单位圆的边界$|w| = 1$的保角变换。

由于$w(\xi;\xi)=0$，可以写

$$w(z;\xi)=(z-\xi)\bar{w}(z;\xi),$$

而$\bar{w}(z;\xi)\neq 0$ （共形映射）是解析的。

基于此，可以直接验证$\ln|\bar{w}(z;\xi)|$是调和的。

所以

$$G(z;\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w(z;\xi)|}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-\xi|}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\bar{w}(z;\xi)|}$$

为所要的Green函数。

例1：设ξ位于上半平面，$\xi^* = \bar{\xi}$, 函数

$$w = \frac{z-\xi}{z-\bar{\xi}}$$

把上半平面映射到单位圆、把ξ映为圆心、实轴映为圆周。

上半平面的ξ点和其位于下半平面的对称点ξ^*分别映为圆内点P和它的镜像对称点P^*（看179页图4.1）

这样得到的Green函数与之前得到的一致（二维)。

例2：设ξ位于单位圆内，$\xi^* = \frac{1}{\bar{\xi}} = \frac{\xi}{|\xi|^2}$是镜像对称点。

$$w = \frac{z-\xi}{1-z\bar{\xi}} = \frac{z-\xi}{-\bar{\xi}(z-1/\bar{\xi})}$$

把单位圆映为单位圆，把ξ映为圆心，并把圆周映为圆周。

这样得到的Green函数也与之前得到的一致。

5)、其它情形：矩形、正三角形等规则区域，Green 函数的形式很复杂。

以ξ为中心的基本解+ 以其它点（区域外的！）为中心的基本解的线性组合!

21.4、 解的验证

之前说若解是光滑的，则一定可以表示成那样（Poisson公式）。现在来说明对于球形区域或半空间，这个表达式给出的确实是解。

定理21.1：用Ω表示球形区域或上半空间。设$\phi = \phi(x) \in C(\partial\Omega)$有界，$f = f(x) \equiv 0$. 那么Poisson公式给出的

$$u(\xi) = -\int_{\partial\Omega} \phi(x) \frac{\partial G(x;\xi)}{\partial \vec{\mathbf{n}}_x} dS_x$$

是Ω内的调和函数且满足边界条件

$$u|_{\xi\in\partial\Omega} = \phi(\xi).$$

证明：(1)、（调和性）回忆$x \neq \xi$时，$G(x;\xi)$关于x是调和的；由于Green函数的对称性，$G(x;\xi)$关于ξ也是调和的，从而

$$\frac{\partial G(x;\xi)}{\partial \vec{\mathbf{n}}_x}$$

关于ξ也是调和的。

另一方面，Ω内任一固定的ξ 有一个与边界$\partial\Omega$保持一致距离的邻域。对于ξ属于这个邻域，由于积分只是在边界$\partial\Omega$上，被积函数没有任何奇点，因此可以在积分号下二次求导计算ξ点的二阶导数(带参数积分)，从而得到调和性。

(2)、（边界条件）固定$\xi_0 \in \partial\Omega$. 由于

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x;\xi)}{\partial \vec{\mathbf{n}}_x} dS_x = -1,$$

那么对任意$\delta > 0$,

$$\begin{aligned} u(\xi) - \phi(\xi_0) = & \quad \int_{\partial\Omega} [\phi(\xi_0) - \phi(x)] \tfrac{\partial G(x;\xi)}{\partial \vec{\mathbf{n}}_x} dS_x \\ = & \quad \left[\int_{x \in \partial\Omega, |x-\xi_0| < \delta} + \int_{x \in \partial\Omega, |x-\xi_0| \geq \delta} \right] (\cdots). \end{aligned}$$

对于任意$\epsilon > 0$，由于$\phi = \phi(x)$在$x = \xi_0$是连续的，存在$\delta > 0$，当$|x - \xi_0| < \delta$时，

$$|\phi(\xi_0) - \phi(x)| < \epsilon/2.$$

这样（从Green函数的性质2，知道$\frac{\partial G(x;\xi)}{\partial \vec{\mathbf{n}}_x}$在边界上非正），

$$\left| \int_{x\in\partial\Omega,|x-\xi_0|<\delta} [\phi(\xi_0) - \phi(x)] \frac{\partial G(x;\xi)}{\partial \vec{\mathbf{n}}_x} dS_x \right|$$

$$\leq \quad \epsilon/2 \left[- \int_{x\in\partial\Omega,|x-\xi_0|<\delta} \frac{\partial G(x;\xi)}{\partial \vec{\mathbf{n}}_x} dS_x \right] \leq \epsilon/2.$$

对于另一积分项（$|x-\xi_0|\geq\delta$），利用$\phi=\phi(x)$的有界性，只需估计

$$\int_{x\in\partial\Omega,|x-\xi_0|\geq\delta}\left|\frac{\partial G(x;\xi)}{\partial\vec{\mathbf{n}}_x}\right|dS_x.$$

对球形区域，当$|\xi_0-\xi|\le\delta/2\le|x-\xi_0|/2$时，

$$|x-\xi|\ge|x-\xi_0|-|\xi_0-\xi|\ge\delta-\delta/2=\delta/2.$$

所以当$\xi\to\xi_0$时，$|\xi|\to|\xi_0|=a$，从而

$$\int_{|x|=a,|x-\xi_0|\ge\delta}\left|\frac{\partial G(x;\xi)}{\partial\vec{\mathbf{n}}_x}\right|dS_x=\int\left|\frac{|\xi|^2-a^2}{a\omega_d|x-\xi|^d}\right|dS_x$$

$$\le\quad 2^{d+1}\delta^{-d}(a-|\xi|)\to 0.$$

对于上半空间区域，当$\xi_d \to 0$时，

$$|x-\xi| \geq |x-\xi_0| - |\xi_0 - \xi| \geq |x-\xi_0| - |x-\xi_0|/2 = |x-\xi_0|/2.$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_d=0,|x-\xi_0|\geq\delta} \left|\frac{\partial G}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\right| dS_x = & \int_{x_d=0,|x-\xi_0|\geq\delta} \left|\frac{-2\xi_d}{\omega_d |x-\xi|^d}\right| dS_x \\
\leq & \frac{2^{d+1}\xi_d}{\omega_d} \int_{x_d=0,|x-\xi_0|\geq\delta} \frac{dS_x}{|x-\xi_0|^d} \\
\leq & 2^{d+1}\xi_d \int_\delta^\infty r^{-2} dr \to 0.
\end{aligned}$$

证毕。

作业：pp.212-220，17, 18, 19, 21, 23

对于半球，计算Green函数在边界上的外法向导数，并证明相应的定理21.1.