偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第4讲、三类二阶偏微分方程的导出（2）

我们继续从物理定律导出二阶偏微分方程。

4.1、动量守恒定律与弦振动方程

考虑一个均匀的细弦。拉紧之后让它离开平衡位置，在垂直于弦线的外力作用下使其在平衡位置附近作微小横振动。确定不同时刻弦线的形状。

这个问题中的术语可以解释如下。

- “均匀”：弦的线密度（即单位长度的质量）为常数。

- “细”：弦的直径远远小于其长度，所以可以把弦视为一直的或弯曲的线段。

- “弦”：一理想的物理模型，它充分柔软，只抗伸长，不抗弯曲(如橡皮筋)，即其变形时反抗弯曲的力矩可以忽略，各质点之间的张力沿着弦线的方向。铁杆、木棍如扁担就不是弦，它们抗弯曲。

- “横振动”：弦上各质点的运动发生在同一平面内，其位移与平衡位置垂直。

关于“微小”，下面我们将给出精确的刻画。

弦的形状由其上各质点的位移决定。由于外力和质点之间张力的作用，这些质点会往返运动。在运动过程中，各点的位移、加速度、张力等都在不断变化，它们遵循动量守恒定律。基于这个认识，我们可以建立弦的形状所满足的偏微分方程。

为此，我们建立平面坐标系（图）：横轴表示弦上各点的平衡位置，纵轴表示它们的位移。设弦的长度为l，线密度为ρ，位于x 处的质点在时刻t的位移为$u = u(t, x)$.

根据微元法，任取弦线上一小段$[a,b]$, 在时间段$[t_1,t_2]$内，该段的动量改变为

$$\int_a^b \rho u_t(t_2,x)dx - \int_a^b \rho u_t(t_1,x)dx.$$

外力产生的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \rho f(t,x)dxdt,$$

其中$f=f(t,x)$是单位质量弦线所受到的（垂直）外力。

另一方面，张力产生的冲量可以计算如下。

（图）由于是横振动，小段$[a,b]$在水平方向所受合力为零，因此有

$$T_a\cos\alpha_a = T_b\cos\alpha_b \equiv T_0,$$

即T_0与空间位置x无关。

在垂直方向所受合力为

$$\begin{aligned} T_b\sin\alpha_b - T_a\sin\alpha_a &= T_b\cos\alpha_b\tan\alpha_b - T_a\cos\alpha_a\tan\alpha_a \\ &= T_0(\tan\alpha_b - \tan\alpha_a). \end{aligned}$$

根据动量守恒定律，我们有

$$\int_a^b \rho u_t(t_2,x)dx - \int_a^b \rho u_t(t_1,x)dx = \int_{t_1}^{t_2} T_0(\tan\alpha_b - \tan\alpha_a)dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \rho f dx dt.$$

由于

$$\tan\alpha_a = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_a),$$

上式可以写为

$$\int_a^b \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial(\rho u_t)}{\partial t} dt dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \frac{\partial(T_0 u_x)}{\partial x} dx dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \rho f dx dt.$$

由于时空区域$[a,b]\times[t_1,t_2]$的任意性，我们得到

$$\rho\frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{\partial(T_0 u_x)}{\partial x} + \rho f(t,x).$$

为了计算T_0，我们注意α_a很小时（微小），等价于$u_x = \tan\alpha_a$很小时，$T_0 = T_a \cos\alpha_a$ 近似等于静止时的张力，从而为一常值。

在T_0是常数时，令$a^2 = T_0/\rho$, 得到弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t, x).$$

定解条件（类似于热传导方程）

初始条件：由于方程中最高时间导数是二阶的，通常指定初始时刻弦上各点的位移和速度:

$$u(0,x), \qquad u_t(0,x).$$

- 第一或Dirichlet边界条件：给定两个端点的位移

$$u(t,0), \qquad u(t,l).$$

- 第二或Neumann边界条件：已知在两个端点所受的垂直于弦线的外力作用

$$-T_0 u_x(0,t), \qquad T_0 u_x(l,t).$$

- 第三或Robin边界条件：...

- 混合问题：方程+ 初始条件+ 三个边界条件中的一个。

- 初值（Cauchy）问题：方程+ 初始条件

- 半无界问题：$x > 0$ 或$x < 0$.

杆的纵振动（一均匀细杆在外力作用下沿杆长方向作微小振动）（27页习题3）也可以用弦振动方程（或称一维波动方程）来描述。

高维波动方程：

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(t, x),$$

可以通过线性化流体力学中的Euler方程而得到（声波方程），电动力学中Maxwell方程电磁场强度的各个分量也满足这样的方程。

4.2、最小势能原理与位势方程

除了前述三大守恒定律之外，其它物理定律的应用常常也可以通过偏微分方程来描述，一个典型的例子是弹性力学中的最小势能原理。

最小势能原理：受外力作用的弹性体，在满足已知边界位移约束的一切可能位移中，达到平衡状态的位移使物体的总势能为最小。

总势能= 应变能- 外力所作的功。

为了说明这点，我们考虑膜的平衡问题。类似于弦，膜也是一个理想的弹性体，它只抗面积增缩，不抗弯曲。

物理问题：设一处于紧张状态的薄膜，它的部分边界固定在一框架上，在另一部分边界上受到外力的作用。在外力作用下若整个薄膜处于平衡状态，求其形状？(图)

为了计算总势能，我们建立坐标系：取膜的水平位置为xy平面上的区域Ω, 膜上各点离开水平位置的位移为垂直于xy 平面的v轴。

Ω的边界分为两部分γ 和Γ, 在γ上膜的位移已知，在Γ上膜受到外力$p = p(x, y)$ 的作用，在Ω内受到外力$f = f(x, y)$ 的作用。

假定边界$\partial\Omega$充分光滑，那么外力对曲面$v = v(x, y)$所作的功为

$$\int\int_\Omega f(x, y)v(x, y)dxdy + \int_\Gamma p(s)v(s)ds.$$

当v_x和v_y很小时，如同弦的情形，膜的张力T可视为常值，其应变能为

$$T\int\int_{\Omega}\left[\sqrt{1+|\nabla v|^2}-1\right]dxdx \approx \frac{T}{2}\int\int_{\Omega}|\nabla v|^2 dxdy,$$

其中积分$\int\int_{\Omega}\sqrt{1+|\nabla v|^2}dx$为曲面$v=v(x,y)$的面积。

这样，膜在位置$v=v(x,y)$时的总势能为

$$J[v]:=\frac{T}{2}\int\int_{\Omega}(v_x^2+v_y^2)dxdy-\int\int_{\Omega}f(x,y)v(x,y)dxdy-\int_{\Gamma}p(s)v(s)ds.$$

定义

$$M_\phi = \{v \in C^1(\bar{\Omega}), \quad v|_\gamma = \phi\}.$$

根据最小势能原理，膜的平衡问题可以归结为：求$u \in M_\phi$满足

$$J[u] = \min_{v \in M_\phi} J[v].$$

即u是一个泛函极值问题（或称变分问题）的解。

假设是$u \in M_\phi$是上述变分问题的解，任取$v \in M_0$. 那么对任意实数ξ，$u + \xi v \in M_\phi$. 故函数$j(\xi) \equiv J[u + \xi v]$在$\xi = 0$取得最小值。这样$j'(0) = 0$, 从而得到

$$T \int\int_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dxdy - \int\int_\Omega f v dxdy - \int p v ds = 0, \qquad \forall v \in M_0.$$

这是u应该满足的一个必要条件, 称为（积分形式的）Euler方程。

为了说明这个必要条件也是充分的，我们容易看到泛函$J[v]$关于v是下凸的:

$$\forall v_1, v_2 \in M_\phi, \quad \forall \theta \in [0,1], \qquad J[\theta v_1+(1-\theta)v_2] \leq \theta J[v_1]+(1-\theta)J[v_2].$$

那么我们有

$$\begin{aligned}
j(\theta\xi_1+(1-\theta)\xi_2) &= J[u+(\theta\xi_1+(1-\theta)\xi_2)v] \\
&= J[\theta(u+\xi_1 v)+(1-\theta)(u+\xi_2 v)] \\
&\leq \theta J[u+\xi_1 v]+(1-\theta)J[u+\xi_2 v] \\
&= \theta j(\xi_1)+(1-\theta)j(\xi_2).
\end{aligned}$$

即$j=j(\xi)$是实轴上的下凸函数，所以其临界点就是其最小值点。

进一步，对任意$w \in M_\phi$, 我们有$v = w - u \in M_0$和

$$J[w] = J[u+v] = j(1) \geq j(0) = J[u],$$

从而积分形式的Euler方程也是充分的。

若$u \in C^2(\Omega)$，注意到积分形式的Euler方程中$v|_\gamma = 0$，由Green公式得

$$-\int\int_\Omega (T\Delta u + f) v dx dy + \int_\Gamma \left(T\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - p \right) v ds = 0.$$

由v的任意性得

$$-T\Delta u = f, \qquad T\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_\Gamma = p.$$

这是微分形式的Euler方程。

结果，对$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 积分形式的Euler方程等价于微分形式的Euler方程

$$-T\Delta u = f$$

以及下述两种边界条件。

约束（强制）边界条件：

$$u\big|_{\gamma} = \phi.$$

自由边界条件:

$$T\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma} = p.$$

注1：几何上的最小曲面问题是类似的变分问题。该问题是：

给定平面上一有界区域Ω 及其定义在其边界$\partial\Omega$ 上的一条空间闭曲线

$$l: \qquad x = x(s), \quad y = y(s), \quad \phi = \phi(s), \qquad s \in [0, s_0].$$

其中$(x, y) = (x(s), y(s))$是平面闭曲线$\partial\Omega$的参数方程，满足

$$x(0) = x(s_0), \qquad y(0) = y(s_0), \qquad \phi(0) = \phi(s_0).$$

求一张定义在$\bar{\Omega}$上以l为周界且面积最小的曲面。

即在函数类

$$M_\phi := \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} = \phi\}$$

中，寻找泛函

$$J[v] = \int_\Omega F(x, v, \nabla v)dx \tag{1}$$

的最小值点，其中

$$F(x, v, \nabla v) = \sqrt{1 + |\nabla v|^2}.$$

不难求得，相应积分形式的Euler方程是

$$\int_\Omega \frac{\nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dxdy = 0, \qquad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}), \qquad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

而微分形式的Euler方程是

$$\nabla \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0.$$

这个方程也可以写成

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0.$$

这是一个二阶非线性方程。

在$|\nabla u|$很小时，忽略它们可以得到调和方程

$$\Delta u = 0, \qquad u|_{\Omega} = \phi.$$

注2：更一般的变分问题

$$J[u] = \min_v J[v] = \min_v \int_\Omega F(x, v, \nabla v, \ldots) dx$$

是一个经典的十分有趣的研究方向，有着丰富的研究成果。这里Ω可以是高维的区域，$v = v(x)$可以是满足某种约束的向量值函数。

不难看到，相应微分形式的Euler方程一定是偶数阶的。也就说，奇数阶的偏微分方程不能是某个变分问题的Euler方程。

另一方面，若泛函$J[v]$有下界，那么对任意正整数k，存在v_k满足

$$\inf_v J[v] \le J[v_k] < \inf_v J[v] + 1/k.$$

紧接着的问题是极限$\lim\limits_{k\to\infty} v_k$存在吗？在什么意义下存在？

如存在，关系式

$$\lim_{k\to\infty} J[v_k] = J[\lim_{k\to\infty} v_k]$$

成立吗？

这些基本问题直接联系着变分问题及其Euler方程解的存在性。有兴趣的话可以查阅有关文献。

4.3、定解条件和适定性

截至目前，我们已经从物理原理出发导出了若干二阶偏微分方程。正如在学习常微分方程时看到的，为了得到这些方程的解，还需要指定适当的初始条件或（两点边值问题的）边界条件，这种条件统称为定解条件。

对于热传导方程，由于出现的时间导数只是一阶的，开始时刻的温度应该作为初始条件事先给定:

$$u|_{t=0} = \phi(x).$$

波动方程中的最高时间导数是二阶的，通常指定初始时刻解及其一阶时间导数的值:

$$u|_{t=0} = \phi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x).$$

除了关于时间变量的导数及其对应的初始条件，偏微分方程还含有关于其它变量的导数，从而也需要指定相应的定解条件。

对于前面导出的热传导方程、波动方程以及位势方程，它们含有关于空间变量的最高阶导数都是二阶的。如同常微分方程两点边值问题，可以给定边界条件。常有下面三种给法：

(1). $u|_{\partial\Omega} = g(t,x)$,

(2). $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = g(t,x)$,

(3). $\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u\right]\Big|_{\partial\Omega} = g(t,x)$,

其中$\mathbf{n}$是区域Ω在相应边界点的外法方向，$\alpha = \alpha(t,x)$是已知函数。这三种边界条件分别称为第一、第二、第三边界条件，或称为Dirichlet，Neumann和Robin边界条件。

给定一个偏微分方程及其定解条件，如果得到了相应的解，那么我们的任务就完成了。然而，对于一个给定的偏微分方程，我们一般无法显式地求得它的解。

这样，解的存在性便是研究偏微分方程的首要任务。正像在研究一阶非线性方程时看到的（经典解未必存在但有无穷多个弱解），解的存在性往往依赖于所考虑的函数空间。

另一方面，虽然解的存在性在数学上非常重要，可并不是物理学家关心的。物理学家认为他们给出的偏微分方程一定有解，因为方程的解对应着现实的物理现象而后者总是存在的。可是怎么知道他们给出的方程正确地描述了现实的客观现象。

除了存在性，解的唯一性是第二个基本的研究任务。如同在研究一阶非线性方程时看到的，唯一性也依赖于解所在的函数空间。

对于线性偏微分方程，唯一性的证明常常采用反证法，这点可以借助波动方程第一初边值问题为例说明如下。

设$u_1 = u_1(t,x)$和$u_2 = u_2(t,x)$是下列初边值问题

$$u_t - a^2\Delta u = f(t,x), \qquad u|_{t=0} = \phi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

的两个解，那么它们的差$u = u_1 - u_2$满足齐次方程和齐次初边值条件

$$u_t - a^2\Delta u = 0, \qquad u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0.$$

所以唯一性归结为齐次问题是否只有零解!

不同于存在性，稳定性是物理学家关心的，具有清楚的物理意义。事实上，绝大多数研究感兴趣的物理现象都是可重复观测的。而每次观测的“外围条件”都可能与上次的不同，测量本身也可能有误差。若微小的不同或误差导致观察的结果很不同，就不是可观测的。反映在偏微分方程，其解应对合理的定解条件的扰动不敏感，这是偏微分方程对定解条件的稳定性。

为了更好的理解稳定性，我们来看两个例子。

例1、考虑Laplace方程的初值问题

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xx} &= 0, & t > 0,\ x \in (-\infty, \infty), \\ u|_{t=0} &= \phi(x), & x \in (-\infty, \infty), \\ u_t|_{t=0} &= 0, & x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

容易验证，$u = 0$和

$$u = \frac{e^{nt} + e^{-nt}}{n} \sin(nx)$$

都是上述问题的解, 对应的初值ϕ分别是0和$\frac{2}{n}\sin(nx)$，其中n是正整数。

当n充分大时，两个初值0和$\frac{2}{n}\sin(nx)$很接近，可在$t > 0$时对应两个解的差可以任意大。

例2、考虑热传导方程的终边值问题

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0, & (x,t) \in (0,1)^2, \\
u|_{x=0} &= u|_{x=1} = 0, & t \in (0,1), \\
u|_{t=1} &= \frac{\sin(n\pi x)}{n}, & x \in (0,1),
\end{aligned}
$$

其中n是正整数。容易验证，

$$
u = \frac{1}{n}\sin(n\pi x)e^{(n\pi)^2(1-t)}
$$

是问题的解。

当n充分大时，终值$u|_{t=1} = \frac{1}{n}\sin(n\pi x)$很小，可在$t < 1$时解可以任意大。

稳定性涉及到两个解（函数）之间的距离。不同于数之间的距离（差的绝对值），函数之间的距离有各种各样的定义。

由于定义于一给定集合上的所有函数构成一线性空间，偏微分方程的研究自然联系到赋范线性空间或更一般的拓扑向量空间。

对于给定的偏微分方程，采用什么样的函数空间，如何选取合适的范数，完全依赖所研究的方程。

存在性、唯一性和稳定性统称为适定性，是偏微分方程的基本研究内容。

除了适定性，控制问题是偏微分方程的一个重要研究方向。通俗地说，这类问题是通过适当调整方程中的某些项或定解条件，使得方程的解在特定时空点上的值达到或接近事先指定的值。

可以想象，控制问题有着广泛的应用，其研究需要对偏微分方程有良好的认识，是认识世界从而改造世界的一个典范。

最后，数值求解是近代的一个主要手段。差分方法的基本思路是用差商代替导数。有限元方法的基本思路是用有限维的函数空间代替无穷维的解空间。

作业：pp.27, 2, 5, 8, 16, 14