偏微分方程

第25讲

雍稳安

清华大学数学科学系

10. Juni 2024

25、二阶线性偏微分方程

复习&补充：

- 位势方程零边值问题弱解：用变分形式，泛函定义在Sobolev空间$H_0^1(\Omega)$上；Euler方程的积分形式。

- 经典解是弱解（density argument）

- Friedrichs不等式：

$$u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)};$$

从C_0^1函数出发，利用0边值，把函数在一点的值用其导数的积分表示，得到不等式，density argument

可以是某种无界区域；等价范数$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

Ritz-Galerkin近似解法

对于前述变分问题

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$$

Ritz方法：在$H_0^1(\Omega)$中选取一个N维子空间S_N，然后在S_N中求解上述变分问题，即求$u_N \in S_N$使得

$$J(u_N) = \min_{v \in S_N} J(v).$$

这是一个有限维函数的极（最小）值问题!

投影定理：设$u \in H_0^1(\Omega), u_N \in S_N$分别是原变分问题、近似变分问题的解，则有

$$(\nabla(u-u_N), \nabla v_N) = 0, \qquad \forall v_N \in S_N;$$

$$|u-v_N|_1^2 \geq |u-u_N|_1^2, \qquad \forall v_N \in S_N.$$

这里$|v|_1^2 := (\nabla v, \nabla v)$.

证明：变分问题的解满足相应Euler方程的积分形式：

$$u \in H_0^1(\Omega): \qquad (\nabla u, \nabla v) = (f, v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega);$$

$$u_N \in S_N: \qquad (\nabla u_N, \nabla v_N) = (f, v_N), \qquad \forall v_N \in S_N.$$

由于$S_N \subset H_0^1(\Omega)$, 所以$\forall v_N \in S_N$, 有

$$(\nabla(u-u_N), \nabla v_N) = 0.$$

这样一来,

$$\begin{aligned}
& |u-v_N|_1^2 \equiv (\nabla(u-v_N), \nabla(u-v_N)) \\
= \quad & (\nabla(u-u_N), \nabla(u-u_N)) + (\nabla(u_N-v_N), \nabla(u_N-v_N)) \\
& +2(\nabla(u-u_N), \nabla(u_N-v_N)) \\
= \quad & (\nabla(u-u_N), \nabla(u-u_N)) + (\nabla(u_N-v_N), \nabla(u_N-v_N)) \\
\geq \quad & |u-u_N|_1^2.
\end{aligned}$$

收敛性定理：如果$S_1, S_2, \cdots$是$H_0^1(\Omega)$的一列有限维子空间，满足对任意的$u \in H_0^1(\Omega)$, 存在$\bar{u}_N \in S_N (N = 1, 2, \cdots)$使得

$$\lim_{N\to\infty} \|\bar{u}_N - u\|_1 = 0, \qquad (!)$$

则当N趋于无穷大时由Ritz方法得到的近似解收敛到广义解。

证明：

$$|u_N - u|_1 \le |\bar{u}_N - u|_1 \le \|\bar{u}_N - u\|_1 \to 0.$$

证毕。

（! ）：S_N对$H_0^1(\Omega)$的近似（或逼近）性质，可通过插值近似、函数逼近等等检验。

Ritz近似解的构造：

1、选定$H_0^1(\Omega)$的N个线性无关的函数$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N$ （称为基函数）。S_N为这些函数张成的线性子空间：

$$S_N = \left\{ v \middle| \ v = \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k, \ (c_1, c_2, \cdots, c_N) \in \mathbf{R}^N \right\}.$$

那么近似变分问题的泛函成为

$$\begin{aligned} J(v) = & \ \frac{1}{2} \left(\nabla \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k, \nabla \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k \right) - \left(f, \textstyle\sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k \right) \\ = & \ \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{N} c_k c_l \left(\nabla \phi_k, \nabla \phi_l \right) - \sum_{k=1}^{N} c_k \left(f, \phi_k \right). \end{aligned}$$

记
$$A = [(\nabla\phi_k, \nabla\phi_l)] \equiv [a_{kl}], \qquad b_k = (f, \phi_k),$$

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_N), \qquad c = (c_1, c_2, \cdots, c_N).$$

那么可写
$$J(v) = \frac{1}{2}c^T Ac - (b, c).$$

一个N元二次函数！其中矩阵A和向量b是知道的，c是未知的。

通过求偏导数，可知这个N元二次函数的极值点c满足

$$Ac = b.$$

定理：矩阵A是对称正定的。

证明：对称性源于内积的对称性，是显然的。欲证正定性，考虑二次型

$$
\begin{aligned}
c^T A c = & \sum_{k,l=1}^{N} a_{kl} c_k c_l = \sum_{k,l=1}^{N} c_k c_l \left(\nabla\phi_k, \nabla\phi_l \right) \\
= & \left(\nabla \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k, \nabla \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k \right) \\
\geq & \ 0.
\end{aligned}
$$

等号成立时,

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k\right\|_1^2 \le C_\Omega^2 \left|\nabla\sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k\right|_1^2 \equiv C_\Omega^2 \left(\nabla\sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k, \nabla\sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k\right) = 0.$$

那么

$$\sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k = 0$$

(几乎处处)。

由基函数$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N$的线性无关性，得到$c = (c_1, c_2, \cdots, c_N) = 0.$

证毕。

求解步骤:

- (1) 构造线性无关的函数$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N \in H_0^1(\Omega)$.
- (2) 计算积分:
$$a_{kl} = \int_\Omega \nabla\phi_k(x)\nabla\phi_l(x)dx,$$
$$b_k = \int_\Omega \nabla\phi_k(x)f(x)dx.$$
- (3) 求解线性代数方程组: $(c_1, c_2, \cdots, c_N)[a_{kl}] = (b_1, b_2, \cdots, b_N)$.
- (4) 得到近似解 $u_N = \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k(x)$.

Galerkin方法：从变分问题Euler方程的积分形式

$$u \in H_0^1(\Omega): \qquad (\nabla u, \nabla v) = (f, v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

出发，

（也是）在$H_0^1(\Omega)$中选取有限个线性无关的函数$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N$，张成有限维线性子空间$S_N$.

在S_N中找u_N 使得

$$(\nabla u_N, \nabla v) = (f, v)$$

对所有$v \in S_N$成立。

很多问题没有变分形式，但有上述积分形式!

基函数$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N$的构造是问题的关键!

满足边界条件，线性无关，能够近似$H_0^1(\Omega)$，系数矩阵$A = [a_{kl}]$稀疏。

有限元方法：基函数是分块多项式插值函数。例如：（书上的图）把求解区域Ω剖分为三角形单元，线性基函数，整体连续，局部光滑，属于$H_0^1(\Omega)$，系数矩阵$A = [a_{kl}]$稀疏。

1、二阶线性偏微分方程的分类

二阶线性偏微分方程的一般形式

$$\sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{m} b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u = f(x), \quad x \in G \subset \mathbf{R}^m,$$

其中

$$a_{kl}(x) = a_{lk}(x), \qquad \forall k, l.$$

例子：一阶输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{d}b_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}+c(x,t)u=f(x,t),\quad x\in\Omega\subset\mathbf{R}^d,\ t>0,$$

其中$m=d+1$,

$$a_{kl}(x)=a_{lk}(x)=0,\qquad b_m=1.$$

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f(x,t),\qquad x\in\Omega\subset\mathbf{R}^d,\ t>0,$$

其中$m=d+1$,

$$a_{kl}(x)=a_{lk}(x)=-a^2\delta_{kl}\ (k,l\le d),\qquad a_{mk}(x)=a_{km}(x)=\delta_{km},$$

$$b_1(x)=b_2(x)=\cdots=b_m(x)=c(x)=0.$$

热传导方程$(m=d+1, b_m=1)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f,\qquad x\in\Omega\subset\mathbf{R}^d$$

位势方程$(m=d)$

$$-\Delta u=f,\qquad x\in\Omega\subset\mathbf{R}^d$$

记

$$A(x) = [a_{kl}(x)],$$

一个对称矩阵。

输运方程： $A = 0,$

波动方程： $A = \mathrm{diag}(-a^2, -a^2, \cdots, -a^2, 1),$

热传导方程: $A = \mathrm{diag}(-a^2, -a^2, \cdots, -a^2, 0),$

位势方程: $A = \mathrm{diag}(-1, -1, \cdots, -1).$

分类

设$x_0 \in G$ （二阶线性偏微分方程的定义域)。

- 若对称矩阵$A(x_0) = [a_{kl}(x_0)]$正定或负定，则称方程在x_0点是椭圆型的（elliptic）。
- 若对称矩阵$A(x_0)$有一个0特征值，其余全是正的或负的，则称方程在x_0点是抛物型的（parabolic）。
- 若矩阵$A(x_0)$有一个正（或负）特征值，其余全是负（或正）的，则称方程在x_0点是双曲型的（hyperbolic）。

若在定义域G中每一点都是椭圆（或抛物，或双曲）型的，则称方程在G中是椭圆（或抛物，或双曲）型的。

若在定义域G中几乎处处是椭圆型的，但在其它x点$A(x)$有0特征值，则称方程在G中是蜕化（degenerate）椭圆型的。

类似地，可定义蜕化（degenerate）抛物型、蜕化（degenerate）双曲型

相应的x称为退化点。

蜕化椭圆型方程的例子： $G=\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,|x|\le 1,0\le y\le 1\}$.

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y),$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y),$$

第一个在Ω的部分边界$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,|x|\le 1,y=0\}$上蜕化，第二个在$\Omega$内部的线段$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,x=0,0\le y\le 1\}$上蜕化。

位势方程、热传导方程、波动方程分别称为椭圆、抛物、双曲型方程的标准型。

2、常系数方程

若对称矩阵$A(x) = [a_{kl}(x)]$是常系数的，即$a_{kl}(x)$与自变量$x \in G$ 无关，那么存在正交矩阵P和实对角矩阵Λ使得

$$A = P^T \Lambda P.$$

此时原二阶线性方程可写为

$$(\nabla_x^T A \nabla_x) u + \sum_{k=1}^{m} b_k(x) u + c(x) u = f(x).$$

做自变量的旋转变换　　$y = Px.$　　容易验算

$$\nabla_x = P^T \nabla_y.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_1} \quad (P\text{的第一列}).$$

那么

$$\nabla_x^T A \nabla_x = \nabla_y^T P A P^T \nabla_y = \nabla_y^T \Lambda \nabla_y$$

再对$y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$做适当的伸缩变换

$$z_k = y_k \begin{cases} \sqrt{|\lambda_k|}, & \Lambda\text{的第}k\text{个对角元}\lambda_k \neq 0, \\ 1, & \Lambda\text{的第}k\text{个对角元} = 0. \end{cases}$$

所以可以假定

$$\Lambda = \mathsf{diag}(-1, -1, \cdots, -1, 0, 0, \cdots, 0, 1, 1, \cdots, 1),$$

由此得到标准型。

3、边界条件的提法

O. Oleinik & Radkevic (1971): Second order equations with nonnegative characteristic form.

若二阶线性偏微分方程的系数矩阵$A = A(x)$半正定，
即$\forall x \in G, \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \in \mathbf{R}^m$,

$$\sum_{kl} a_{kl}(x)\xi_k\xi_l \geq 0,$$

则称它具有非负特征。

这样的二阶偏微分方程有很多：一阶方程，椭圆，抛物，蜕化椭圆，椭圆-抛物耦合等。

Fichera定理

设定义域G的边界∂G在x处的外法方向是

$$\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{n}}(x) = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \cdots, \mathbf{n}_m), \qquad x \in \partial G.$$

那么对于具有非负特征的二阶线性偏微分方程

$$\sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{m} b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u = f(x), \quad x \in G \subset \mathbf{R}^m,$$

有

$$\sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}(x)\mathbf{n}_k(x)\mathbf{n}_l(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \partial G.$$

定义**Fichera**函数

$$B(x) = \sum_{k=1}^{m} \left[b_k(x) - \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_l}(x) \right] \mathbf{n}_k(x).$$

按照前述二次型和**Fichera**函数把边界∂G分为不相交的四部分（书上的记号）:

$$\partial G = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

其中

$$\Gamma_3 = \left\{ x \in \partial G \;\middle|\; \sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}(x)\mathbf{n}_k(x)\mathbf{n}_l(x) > 0 \right\}.$$

$$\Gamma_2 = \left\{ x \in \partial G - \Gamma_3 \;\middle|\; B(x) > 0 \right\}.$$

$$\Gamma_1 = \left\{ x \in \partial G - \Gamma_3 \;\middle|\; B(x) < 0 \right\}.$$

$$\Gamma_0 = \left\{ x \in \partial G - \Gamma_3 \;\middle|\; B(x) = 0 \right\}.$$

Fichera定理：假定前述具有非负特征的二阶线性偏微分方程的系数满足

$$a_{kl}(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \qquad b_k(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \qquad c(x) \le -c_0 < 0.$$

那么在边界条件

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

下，它有唯一解。

(完整的叙述和证明看O.Oleinik & Radkevic： ...)

在∂G的$\Gamma_2 \cup \Gamma_3$部分应该指定边界条件，而在$\Gamma_0 \cup \Gamma_1$部分不应该指定!

例1、Black-Scholes方程（金融数学）

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+(r-q)s\frac{\partial V}{\partial s}-rV=0,$$

定义域是

$$(s,t)\in G:=(0,\infty)\times(0,T).$$

其中σ, r, q为正常数。

与二阶方程的一般形式对比，有

$$m=2;\quad x_1=s,\quad x_2=t;$$

$$a_{11}=\frac{\sigma^2}{2}s^2,\quad a_{12}=a_{21}=a_{22}=0;\quad b_1=(r-q)s,\quad b_2=1.$$

- 在边界$t=0$部分, 单位外法向量是$\vec{\mathbf{n}}^T=(0,-1)$. 因此二次型

  $$\vec{\mathbf{n}}^T A\vec{\mathbf{n}}=0,$$

  Fichera函数

  $$B(x)=b_2\times(-1)=-1<0.$$

- 在边界$t=T$部分, 单位外法向量是$\vec{\mathbf{n}}^T=(0,1)$. 因此二次型

  $$\vec{\mathbf{n}}^T A\vec{\mathbf{n}}=0,$$

  Fichera函数

  $$B(x)=b_2\times 1=1>0.$$

- 在边界$s=0$部分, 单位外法向量是$\vec{\mathbf{n}}^T=(-1,0)$. 因此二次型

$$\vec{\mathbf{n}}^T A\vec{\mathbf{n}}=0,$$

Fichera函数

$$B(x)=\left((r-q)s-\frac{\partial a_{11}}{\partial s}\right)\times(-1)=0.$$

根据Fichera定理，对Black-Scholes方程，需要且仅需要在$t=T$给定边界条件。后向热传导方程!

例2、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\alpha(\theta-r)\frac{\partial u}{\partial r}-ru=0,$$

定义域是

$$(r,t)\in G:=(0,\infty)\times(0,T).$$

其中σ,α,θ为正常数。

与二阶方程的一般形式对比，有

$$m=2;\quad x_1=r,\quad x_2=t;$$

$$a_{11}=\frac{\sigma^2}{2}r,\quad a_{12}=a_{21}=a_{22}=0;\quad b_1=\alpha(\theta-r),\quad b_2=1.$$

- 在边界$t=0$部分, 单位外法向量是$\vec{\mathbf{n}}^T=(0,-1)$. 因此二次型

$$\vec{\mathbf{n}}^T A\vec{\mathbf{n}}=0,$$

Fichera函数

$$B(x)=b_2\times(-1)=-1<0.$$

- 在边界$t=T$部分, 单位外法向量是$\vec{\mathbf{n}}^T=(0,1)$. 因此二次型

$$\vec{\mathbf{n}}^T A\vec{\mathbf{n}}=0,$$

Fichera函数

$$B(x)=b_2\times 1=1>0.$$

- 在边界$r=0$部分, 单位外法向量是$\vec{\mathbf{n}}^T=(-1,0)$. 因此二次型

$$\vec{\mathbf{n}}^T A\vec{\mathbf{n}}=0,$$

Fichera函数

$$B(x)=\left(\alpha(\theta-r)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sigma^2}{2}r\right)\right)\times(-1)=\frac{\sigma^2}{2}-\alpha\theta.$$

对这个方程，根据Fichera定理，当$\frac{\sigma^2}{2}>\alpha\theta$时，需要且仅需要在$t=T$及$r=0$给定边界条件;

而当$\frac{\sigma^2}{2}\leq\alpha\theta$时，需要且仅需要在$t=T$给定边界条件。

例3、一阶输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

定义域是

$$(x,t) \in G := (0,a) \times (0,T).$$

与二阶方程的一般形式对比，有

$$m = 2; \quad x_1 = x, \quad x_2 = t;$$

$$a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0; \quad b_1 = b_2 = 1.$$

因此二次型

$$\vec{\mathbf{n}}^T A \vec{\mathbf{n}} = 0.$$

- 在边界$t = 0$部分, 单位外法向量是$\vec{\mathbf{n}}^T = (0, -1)$.

  Fichera函数
  $$B(x) = b_2 \times (-1) = -1 < 0.$$

- 在边界$t = T$部分, 单位外法向量是$\vec{\mathbf{n}}^T = (0, 1)$.

  Fichera函数
  $$B(x) = b_2 \times 1 = 1 > 0.$$

- 在边界$x = 0$部分, 单位外法向量是$\vec{\mathbf{n}}^T = (-1, 0)$.

Fichera函数

$$B(x) = \left(b_1 - \frac{\partial a_{11}}{\partial s}\right) \times (-1) = -1 < 0.$$

- 在边界$x = a$部分, 单位外法向量是$\vec{\mathbf{n}}^T = (1, 0)$.

  Fichera函数

$$B(x) = \left(b_1 - \frac{\partial a_{11}}{\partial s}\right) \times 1 = 1 > 0.$$

根据Fichera定理，对上述一阶输运方程，需要且仅需要在$t = T$和$s = a$给定边界条件。

(有点不对 ?)

由于一阶输运方程无二阶导数项，因此它的同解方程

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

也具有非负特征，此时

$$b_1 = b_2 = -1.$$

重复上述讨论，我们看见需要且仅需要在$t = 0$和$x = 0$给定边界条件。

综上，在矩形区域

$$(x,t) \in G := (0,a) \times (0,T)$$

上求解前述一阶输运方程，需要且仅需要

或者在$t=0$和$x=0$给定边界条件（左下），

或者在$t=T$和$x=a$给定边界条件（右上）。

但不能是左上、右下、左右、上下等!

（与一阶方程的特征线方法吻合！）

例4、（M. V. Keldys, 1951）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

其中$m\geq 1$. 其定义域G为x轴上一线段γ与xy上半平面一条曲线Γ所围成的有界区域（看图)。

显然

$$x_1=x,\quad x_2=y;\quad a_{11}=1,\quad a_{12}=a_{21}=0,\quad a_{22}=y^m.$$

在边界Γ上，$y>0$, 二次型

$$\vec{\mathbf{n}}^T A\vec{\mathbf{n}}=\mathbf{n}_1^2+y^m\mathbf{n}_2^2>0.$$

因此需要给边界条件。

而在边界γ上，$y=0$, 外法方向是$\vec{\mathbf{n}}^T=(0,-1)$，二次型

$$\vec{\mathbf{n}}^T A\vec{\mathbf{n}}=\mathbf{n}_1^2+y^m\mathbf{n}_2^2=0.$$

计算Fichera函数

$$B(x)=my^{m-1}|_{y=0}-b_2(x,0).$$

因此要否在边界γ上给边界条件取决于m和$b_2(x,0)$的值。

4、Fichera定理唯一性部分的证明

记

$$Lu \equiv \sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{m} b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u.$$

它的共轭算子记为

$$L^*u \equiv \sum_{k,l=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}(a_{kl}(x)u) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}(b_k(x)u) + c(x)u.$$

对于微分算子L，定义它在其定义域边界上的补外法（connormal）向导算子

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} = \sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}(x)\mathbf{n}_k \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

注意由于$A = [a_{kl}]$的对称非负性，那么在$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$上，

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kl}(x)\mathbf{n}_k = 0, \qquad l = 1, 2, \cdots, m,$$

（矩阵的结论），从而

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} = \sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}(x)\mathbf{n}_k \frac{\partial}{\partial x_l} = 0.$$

证明步骤（细节看教材pp. 235-238）：

1、通过直接计算，建立推广的Green第二公式

$$\int_{\Omega}(vLw - wL^{*}v)dx = \int_{\partial\Omega}\left[v\frac{\partial w}{\partial\gamma} - w\frac{\partial v}{\partial\gamma}\right]dS + \int_{\partial\Omega}vwB(x)dS.$$

2、在上述公式中，取

$$w = u^{2p}, \qquad v = -1,$$

（p是待定的正整数），直接计算（用到$A(x)$和$B(x)$有符号，以及u和$\frac{\partial}{\partial\gamma}$在部分边界上消失）。

3、选p充分大，用Hölder不等式，以得到u的$L^p(\Omega)$范数估计。

作业：pp.212-220，31，34

pp.238-239，1，2，3