偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第11讲、分离变量法（2）

（接课件10定理10.1之后的注）回到开始的第一边值问题

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = &\quad 0, \qquad t > 0, x \in (0, l), \\
u(t,0) = u(t,l) = &\quad 0, \qquad t > 0, \\
u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = &\quad \psi(x), \qquad x \in (0,l).
\end{aligned} \tag{1}
$$

及其相应的Sturm-Liouville问题

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) = X(l) &= 0. \end{aligned}$$

其中$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1$. 满足定理10.1的条件。

根据定理10.1，特征值$\lambda > 0$, 相应特征函数的一般形式是

$$X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x.$$

结合边界条件得

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

为了$X = X(x)$非零，必需有

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

由此得到

$$\lambda = (\frac{n\pi}{l})^2, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

这是可列无穷多个特征值, 组成一个单调递增的以无穷远点为聚点的序列!

相应的特征函数是

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

另一方面，相应于每个特征值$\lambda = (\frac{n\pi}{l})^2$，

$$T'' + a^2\lambda T = 0$$

的一般解$(t > 0)$是

$$T = T(t) = A_n \sin\frac{an\pi}{l}t + B_n \cos\frac{an\pi}{l}t, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

结果得到一系列分离变量形式的解

$$u_n(t, x) = \left(A_n \sin\frac{an\pi}{l}t + B_n \cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

这些解都满足齐次波动方程和齐次边界条件!

这些$u_n(t,x)$的简单叠加

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{an\pi}{l} t + B_n \cos \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

形式上也满足方程和边界条件。

为了确定系数A_n和B_n，回忆初始条件

$$\phi(x) = u(t,x)|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \tfrac{n\pi}{l} x,$$

$$\psi(x) = u_t(t,x)|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \tfrac{an\pi}{l} \sin \tfrac{n\pi}{l} x,$$

根据（4），所有特征函数$\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$ 构成平方可积函数空间$L_2(0,l)$上的一组完备正交基。因此平方可积函数ϕ,ψ都可以由这组基展开表示！即正弦展开

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$\phi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,$$

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

比较得

$$B_n = \phi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,$$

$$A_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

确定了这些系数，就得到了混合问题的一个级数形式的解，其有限和是无穷次连续可微的。

注：前述形式解的每一项可以写成

$$\begin{aligned} u_n(t,x) = & \left(A_n \sin \tfrac{an\pi}{l} t + B_n \cos \tfrac{an\pi}{l} t\right) \sin \tfrac{n\pi}{l} x \\ = & M_n \sin \tfrac{n\pi}{l} x \sin\left(\tfrac{an\pi}{l} t + \alpha_n\right), \end{aligned}$$

其中

$$M_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \qquad \alpha_n = \arctan \frac{B_n}{A_n}.$$

对于两端固定的弦上任意一点x, $u_n(t,x)$描述了这点的简谐振动，其中振幅是$M_n \sin\frac{n\pi}{l}x$, 频率是

$$\omega_n = a\sqrt{\lambda_n} = \frac{an\pi}{l}$$

初始位相是α_n.

另一方面，在$x = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \cdots, l$时，任意时刻的$u_n(t,x)$取零值（不动）；而在$x = \frac{l}{2n}, \frac{3l}{2n}, \cdots, \frac{(2n-1)l}{2n}$时，任意时刻的$u_n(t,x)$取最大最小值。

弦的这种形式的运动称为驻波。物理上也把分离变量法称为驻波法，把弦的横振动视作一系列具有特定频率的驻波的叠加。

弦发出的声音由$u = u(t, x)$ 表示。

基音: 由最低频率$\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$所对应的第一个 “单音” $u_1(t, x)$确定。

一般情况下，对$n \geq 2, M_n \ll M_1$, 所以$u_1(t, x)$决定了声音的音调。

与基音同时，其它 “单音” $u_n(t, x)(n \geq 2)$称为泛音，构成了声音的音色。不同乐器，相同音调下，由于泛音不同，音色不同，所以发出的声音不同。

手指压住弦线的不同部位，弦长l变小, 基音频率$\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$变大，音调升高。通过拧紧弦线改变张力，从而调整音调; 弦线的密度(粗细)

分离变量法的四个步骤:

1、将$u(t,x)=T(t)X(x)$代入齐次波动方程及其齐次边界条件，得到关于$X(x)$的Sturm-Liouville问题以及关于$T(t)$的常微分方程。

2、解Sturm-Liouville问题，得到全部可列无限个特征值和全部特征函数，并求出相应的$T(t)$.

3、把可列无限个分离变量形式的解叠加起来，利用初值定出待定的展开系数。

4、验证无限叠加的收敛性、与微分算子的交换性以及边界条件。

对之前的例子，需要验证

$$
\begin{aligned}
(\partial_{tt}-a^2\partial_{xx})\sum_{n=1}^{\infty}u_n &= \sum_{n=1}^{\infty}(\partial_{tt}-a^2\partial_{xx})u_n,\\
\lim_{x\to 0,l}\sum_{n=1}^{\infty}u_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0,l}u_n\\
\lim_{t\to 0+}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\sum_{n=1}^{\infty}u_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{t\to 0+}\frac{\partial^m u_n}{\partial t^m} \qquad (m=0,1).
\end{aligned}
$$

只需证明级数

$$
\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}Du_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}D^2u_n
$$

在闭区域$(t,x)\in[0,T]\times[0,l]$ 上一致收敛。这个涉及到定解数据的光滑性以及在两个角点的相容性。

定理10.2：若$\phi\in C^3[0,l],\psi\in C^2[0,l]$并满足在定解区域角点的相容性条件

$$\phi(0)=\phi(l)=0,\quad \phi''(0)=\phi''(l)=0,\quad \psi(0)=\psi(l)=0,$$

则问题（1）的前述形式解是经典解。

证明：基于给定的条件，通过分部积分得

$$\begin{aligned}
A_n = &\quad \tfrac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\tfrac{n\pi x}{l}dx\\
= &\quad \tfrac{2}{an\pi}\tfrac{l}{n\pi}\left[-\cos\tfrac{n\pi x}{l}\psi(x)|_0^l+\int_0^l\psi'(x)\cos\tfrac{n\pi x}{l}dx\right]\\
= &\quad \tfrac{2}{an\pi}\tfrac{l}{n\pi}\tfrac{l}{n\pi}\left[\sin\tfrac{n\pi x}{l}\psi'(x)|_0^l-\int_0^l\psi''(x)\sin\tfrac{n\pi x}{l}dx\right]\\
= &\quad -\tfrac{l^3}{a(n\pi)^3}a_n,
\end{aligned}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi''(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

同理,

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{l^3}{(n\pi)^3}b_n,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi'''(x)dx.$$

注意$b_n(a_n)$是$\phi'''(\psi'')$关于基底$\{\cos\frac{n\pi x}{l}\}(\{\sin\frac{n\pi x}{l}\})$的Fourier展开系数。

回忆

$$u_n(t,x) = \left(A_n \sin\frac{an\pi}{l}t + B_n \cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

从而有估计

$$\begin{aligned}
|u_n(t,x)| \le & \quad |A_n| + |B_n| = O(n^{-3}), \\
|Du_n(t,x)| \le & \quad |A_n| + |B_n| = O(n^{-2}), \\
|D^2u_n(t,x)| \le & \quad a_n^2 + b_n^2 + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

注意a_n和b_n作为Fourier展开系数，满足Bessel不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \quad \tfrac{2}{l}\int_0^l |\psi''(x)|^2 dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq \quad \tfrac{2}{l}\int_0^l |\phi'''(x)|^2 dx.$$

从而原级数及其一、二阶（时空）导数叠加组成的导级数都一致收敛。证毕。

11.1 非齐次问题

根据定理10.1，边界条件的齐次性对于分离变量法的成功运用是至关重要的！对于非齐次边界条件

$$u(t,0)=g_1(t), \qquad u(t,l)=g_2(t),$$

通过简单的变量替换

$$u(t,x)=v(t,x)+\frac{x}{l}g_2(t)+\frac{l-x}{l}g_1(t),$$

新未知量$v=v(t,x)$满足齐次边界条件，但其所满足的方程不再是齐次的：

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=f(t,x)$$

对非齐次方程，原则上可以运用齐次化方法结合分离变量法求解。但非齐次方程也可以按下列步骤处理

第一步：从齐次方程及齐次边界条件，得到Sturm-Liouville问题，求出全部特征值及特征函数。

第二步：把外力项$f(t,x)$, 初值$\phi(x)$和初始速度$\psi(x)$都当作是x的函数按特征函数展开

$$
\begin{aligned}
f(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\\
\phi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\frac{n\pi}{l}x,\\
\psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{n\pi}{l}x,
\end{aligned}
$$

其中$\phi_n, \psi_n, f_n(t)$分别是$\phi(x), \psi(x), f(t,x)$的展开系数。

这样非齐次方程的定解数据分解为一系列定解数据的叠加：

$$f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad \phi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad \psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

这个启发我们对每一组数据，求解相应的非齐次方程，然后通过线性叠加得到所需要的解。

注意特征函数是每组数据的共同因子！所以对每组数据，寻找形如$T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$的解，其中$T_n(t)$待定。代入原方程得到

$$T_n'' + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n = f_n(t),$$

$$T_n(0) = \phi_n,\quad T_n'(0) = \psi_n.$$

第三步：解上述常微分方程的初值问题：

$$T_n(t) = \phi_n \cos\frac{an\pi}{l}t + \frac{l}{an\pi}\psi_n \sin\frac{an\pi}{l}t + \frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau$$

（齐次化方法，或常数变异法）。

有了$T_n(t)$，通过线性叠加得到原非齐次方程的形式解

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

如果定解数据具有一定的光滑性并满足某些相容性条件（参考半无界问题的相容性），可以证明这个形式解确是经典解。

例1（强迫振动中的共振现象）：

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = A(x) \sin \omega t,$$

$$u(0, x) = u_t(0, x) = 0,$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0,$$

其中ω为强迫振动频率，$A(x)$是给定的平方可积函数：

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

根据前述公式，解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{la_n}{an\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\int_0^t\sin\omega\tau\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau.$$

当$\omega\neq\omega_n=\frac{an\pi}{l}(n=1,2,\ldots)$时，这里的积分通过“积化和差”算出来

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}(\omega\sin\omega_n t-\omega_n\sin\omega t)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

当ω趋于某个特征频率$\omega_k=\frac{ak\pi}{l}$（也称固有频率）时，上述系数的第k项趋于

$$\lim_{\omega\to\omega_k}\frac{\omega\sin\omega_k t-\omega_k\sin\omega t}{\omega^2-\omega_k^2}=\frac{\sin\omega_k t-t\omega_k\cos\omega_k t}{2\omega_k}$$

故当$\omega=\omega_k$时，解可以写为

$$u(t,x)= \frac{a_k(\sin\omega_k t - t\omega_k\cos\omega_k t)}{2\omega_k^2}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$+ \sum_{n\neq k}\frac{a_n}{\omega_n(\omega_k^2-\omega_n^2)}(\omega_k\sin\omega_n t-\omega_n\sin\omega_k t)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

这个表达式的第一项含有时间变量t! 其它的都是有界的。

由此可以看出，对应于固有频率$\omega_k=\frac{ak\pi}{l}$的项，其振幅随时间t一起无限增大，这种现象称作“共振”。

物理上，表示一根两端固定的弦线，从静止开始在一个周期外力的作用下作强迫振动。如果这个周期外力的频率与弦线的某一固有频率相等，弦线将发生共振，即弦线上一些点的振幅将随着时间的增大而变大，其结果是弦线会在某一时刻断裂。

对于许多工程问题（如修桥、建屋），为了避免共振现象发生，就需要事先知道这个物体的固有频率，为此需要求某个特征问题的解。

在另一些问题中，如电磁振荡理论中，共振现象可以被用来调频。

例2（第三边界条件）

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), t > 0,$$

$$-u_x + a_0 u = 0, \quad x = 0, t > 0,$$

$$u_x + a_1 u = 0, \quad x = l, t > 0,$$

$$u(0, x) = \phi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, l)$$

其中a_0, a_1是正数。

解: (1) 把$u(t,x)=T(t)X(x)$ 代入方程和边界条件，得到特征值问题

$$X''+\lambda X=0,\quad x\in(0,l),$$

$$X'(0)-a_0X(0)=0,$$

$$X'(l)+a_1X(l)=0$$

和常微分方程

$$T''+a^2\lambda T=0,\quad t>0,$$

（2）求解特征值问题：由定理10.1知道特征值$\lambda > 0$.
令$\lambda = \beta^2(\beta > 0)$, 则特征函数的一般形式为

$$X(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x,$$

其中常数C, D由给定的边界条件确定：

$$\beta D - a_0 C = 0,$$

$$(a_1\cos\beta l - \beta\sin\beta l)C + (\beta\cos\beta l + a_1\sin\beta l)D = 0.$$

这个可以视作以(C, D)为未知量的线性齐次代数方程组。

为了该齐次代数方程组有非零解，其系数矩阵的行列式须为零：

$$\beta(a_1 \cos\beta l - \beta \sin\beta l) + a_0(\beta \cos\beta l + a_1 \sin\beta l) = 0$$

或

$$(a_0 + a_1)\beta \cos\beta l = (\beta^2 - a_0 a_1) \sin\beta l$$

可见如果$\cos\beta l = 0$, 则$\beta = \frac{2k+1}{2l}\pi$（对某个正整数k）并

$$\beta = \sqrt{a_0 a_1}.$$

为了简单起见，假设$2l\sqrt{a_0 a_1}/\pi$不是一个奇整数。

在这个假设下，有

$$\tan\beta l = \frac{(a_0 + a_1)\beta}{\beta^2 - a_0 a_1},$$

即β（从而特征值）可以通过解这个代数方程得到。注意$\beta > 0$，并且在$\beta = \sqrt{a_0 a_1}$处, $\tan\beta l$取有限值。

为了看清这个代数方程的解，在βy平面上用等分点$(n-1)\frac{\pi}{l}(n = 1, 2, \ldots)$把$\beta$轴分成可列无穷多个互不相交的长度为$\pi$的子区间（正切函数tan的最小正周期为$\pi$）。画出周期函数$y = \tan\beta l$和单调递减函数$y = \frac{(a_0+a_1)\beta}{\beta^2-a_0a_1}$的图像，它们交点的横坐标就是上述代数方程的解。

在相邻等分点的中点$\tan\beta l$ 取无穷。在每个区间内一个严格递增、一个严格递减，恰有一个交点，结果有可列无穷多个交点。记交点的横坐标为β_n，则第n 个特征值为$\lambda_n = \beta_n^2$

从上图还可以看出

$$(n-1)\frac{\pi}{l} < \beta_n < n\frac{\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

或者

$$(n-1)^2\frac{\pi^2}{l^2} < \lambda_n < n^2\frac{\pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

借助反函数（正切函数tan的最小正周期为π）

$$\beta_n l = n\pi + \arctan\tfrac{(a_0+a_1)\beta_n}{\beta_n^2 - a_0 a_1} - \begin{cases} 0, & \beta_n < \sqrt{a_0 a_1}, \\ \pi, & \beta_n > \sqrt{a_0 a_1}. \end{cases}$$

所以，

$$\beta_n l \in n\pi + \begin{cases} (-\frac{1}{2}\pi, 0), & \beta_n < \sqrt{a_0 a_1}, \\ (-\pi, -\frac{1}{2}\pi), & \beta_n > \sqrt{a_0 a_1}; \end{cases}$$

当n趋于无穷时，β_n趋于无穷；进而

$$\lim_{n\to\infty}\left[\beta_n-(n-1)\frac{\pi}{l}\right]=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lambda_n-(n-1)^2\frac{\pi^2}{l^2}\right]=\frac{2(a_0+a_1)}{l}.$$

(教材上的不对)!

特征值$\lambda_n = \beta_n^2$相应的特征函数是

$$X_n(x) = \cos\beta_n x + \frac{a_0}{\beta_n}\sin\beta_n x, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

以及

$$T_n(t) = A_n \sin a\beta_n t + B_n \cos a\beta_n t$$

从而得到一系列分离变量形式的解

$$u_n(t, x) = (A_n \sin a\beta_n t + B_n \cos a\beta_n t)X_n(x)$$

（3）把所有这些分离变量形式的特解叠加起来

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin a\beta_n t + B_n \cos a\beta_n t)X_n(x).$$

根据定理10.1的（4），所有特征函数$\{\cos\beta_n x + \frac{a_0}{\beta_n}\sin\beta_n x\}$ 构成平方可积函数空间的一组完备正交基。

因此只要初始数据$\phi(x)$和$\psi(x)$是平方可积的，它们就能按照前述特征函数展开表示为

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a\beta_n A_n X_n(x)$$

其中展开系数

$$B_n = \frac{\int_0^l \phi X_n(x)dx}{\int_0^l |X_n(x)|^2 dx}, \quad A_n = \frac{1}{a\beta_n}\frac{\int_0^l \psi X_n(x)dx}{\int_0^l |X_n(x)|^2 dx},$$

确定了这些系数，就得到了例2中混合问题的一个形式解。

分离变量法的主要步骤：

1、齐次化边界条件。

2、解相应的Sturm-Liouville问题，得到全部可列无限个特征值和全部特征函数。

3、将初值、初始速度以及右端项按特征函数系展开，得到可列无限个二阶常微分方程（关于变量t）的初值问题，求得相应的解。

4、把可列无限个分离变量形式的解叠加起来。

5、验证无限叠加的收敛性、与微分算子的交换性以及边界条件。

针对最后一步，需要验证

$$
\begin{aligned}
(\partial_{tt} - a^2\partial_{xx}) \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (\partial_{tt} - a^2\partial_{xx}) u_n, \\
\lim_{x\to 0,l} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0,l} \frac{\partial^m}{\partial x^m} u_n, \qquad (m = 0, 1), \\
\lim_{t\to 0+} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to 0+} \frac{\partial^m u_n}{\partial t^m}, \qquad (m = 0, 1).
\end{aligned}
$$

为此，只需证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} Du_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D^2 u_n$$

在闭区域$(t, x) \in [0, T] \times [0, l]$ 上一致收敛。

这个涉及到定解数据的光滑性以及在两个角点的相容性。

作业：pp100、24, 25, 26