偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第18讲、广义函数

热传导方程初值问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u &= 0, \qquad x \in \mathbf{R}^d, \quad t > 0, \\ u(0,x) &= \phi(x) \end{aligned}$$

的解有Poisson公式

$$u(t,x) = \int_{\mathbf{R}^d} K(t, x-\xi)\phi(\xi)d\xi.$$

（二维）波动方程初值问题

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 \Delta u &= 0, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad t > 0, \\ u(0,x) &= 0, \qquad u_t(0,x) = \psi(x) \end{aligned}$$

的解也有Poisson公式（降维法+ Kirchhoff 公式）

$$u(t,x) = \quad \frac{1}{2\pi a} \int_{\Sigma_{at}(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{a^2t^2 - |y-x|^2}} dy_1 dy_2,$$

其中二维积分区域$\Sigma_{at}(x)$是以x为圆心\$at$为半径的圆盘。

两个Poisson公式有个共同点：解可以表示为定解数据与某个特定函数的卷积!

对热传导方程和（二维）波动方程，这个特定函数分别是

$$K(t,x)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^d}e^{-|x|^2/(4a^2t)}$$

和

$$K(t,x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi a}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-x_1^2-x_2^2}}.$$

这两个函数都有奇点，都满足各自的齐次方程。

对于波动方程，可以验证如下。计算

$$K(t,x) = (a^2t^2 - x_1^2 - x_2^2)^{-1/2},$$

$$K_t = -a^2t(a^2t^2 - x_1^2 - x_2^2)^{-3/2} = -a^2tK^3,$$

$$K_{tt} = -a^2K^3 + 3a^4t^2K^5,$$

$$K_{x_1} = x_1K^3, \qquad K_{x_1x_1} = K^3 + 3x_1^2K^5,$$

$$K_{tt} - a^2K_{x_1x_1} - a^2K_{x_2x_2} = 0.$$

可见找到这个具有奇性的特定解，通过卷积，需要的解就找到了。

这个特定解称为原问题的基本解。基本解的概念适用于一般的线性方程。

为了进一步理解基本解，我们需要引入广义函数的概念。

另一方面，一个典型的广义函数是Dirac的δ函数：

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{\mathbf{R}^d} \delta(x)dx = 1.$$

物理上，这个函数描述了总量非零有限的集中分布的量（如击球、踢足球、点电荷、热源、瞬时脉冲、集中质量)。

它不是通常的函数（几乎处处为零，但积分不为零)!

但物理学家用起来（积分运算）并没有什么不妥！（和早期的微积分有点类似)。

Laurent Schwartz （1950）建立了严格的数学理论！ S.L.Sobolev (1930年代）引入了广义函数的微商。

18.1 预备知识

引理1：设$\Omega \subset \mathbf{R}^d$是一开集，则$C_0^\infty(\Omega)$在$L^p(\Omega)(1 \leq p < \infty)$中稠密。

证明：设$u \in L^2(\Omega)$. 任给$\epsilon > 0$, 需要说明存在$v_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$使得

$$\|u - v_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon.$$

对于正整数k定义

$$\Omega_k = \{x \in \Omega, \quad |x| \leq k, \quad \mathsf{dist}(x, \partial\Omega) > 1/k\},$$

$$u_k = u_k(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega_k \ \& \ |u(x)| \le k, \\ k, & x \in \Omega_k \ \& \ u(x) > k, \\ -k, & x \in \Omega_k \ \& \ u(x) < -k, \\ 0, & x \notin \Omega_k. \end{cases}$$

显然，在Ω中u_k几乎处处收敛于u, $|u_k(x)| \le \min\{|u(x)|, k\}$, u_k的支集完全含在Ω内且是紧的。由Lebesgue控制收敛定理，有充分大的k使得

$$\|u_k - u\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon/2.$$

固定k. 回忆标准光滑子

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{c}\begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x|<1, \\ 0, & |x|\geq 1, \end{cases}$$

其中c是一常数使得$\int_{R^d}\rho(x)dx=1$.

对于$\gamma>0$, 定义$\rho_\gamma(x)=\gamma^{-d}\rho(x/\gamma)\in C_0^\infty(R^d)$.

注意$u_k\in L^2(R^d)$. 考虑u_k与ρ_γ的卷积

$$u_k^\gamma=u_k^\gamma(x)=(u_k*\rho_\gamma)(x)=\int_{R^d}\rho_\gamma(x-y)u_k(y)dy=\int_{|y|\leq 1}\rho(y)u_k(x-\gamma y)dy.$$

当γ充分小时显然有$u_k^\gamma\in C_0^\infty(\Omega)$.

根据Lebesgue点定理，对几乎处处的$x \in R^d$，当$\gamma \to 0$时，

$$\begin{aligned} |u_k^\gamma(x) - u_k(x)| = & \quad \left| \int_{|y|\leq 1} \rho(y)[u_k(x-\gamma y) - u_k(x)]dy \right| \\ \leq & \quad \frac{1}{c} \int_{|y|\leq 1} |u_k(x-\gamma y) - u_k(x)|dy \to 0. \end{aligned}$$

又由于

$$|u_k^\gamma(x)| \leq \max_y |u_k(y)| \leq k,$$

根据Lebesgue（有界）收敛定理，当γ充分小时有

$$\|u_k^\gamma - u_k\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon/2.$$

取$v_\epsilon = u_k^\gamma$即可。证毕。

Riemann-Lebesgue引理: 设$\phi \in L^2(a,b)$, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \phi(x)\sin\lambda x dx = 0.$$

证明：先设$\phi=\phi(x)$在(a,b)上有界、连续可微且一阶导数可积。

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi(x)\sin\lambda x dx &= \tfrac{-1}{\lambda}\int_a^b \phi(x) d\cos\lambda x \\ &= \tfrac{-1}{\lambda}[\phi(b)\cos\lambda b-\phi(a)\cos\lambda a]+\tfrac{1}{\lambda}\int_a^b \phi'(x)\cos\lambda x dx \\ &= O(\lambda^{-1}).\end{aligned}$$

对其它$\phi=\phi(x)$，可以用具有上述正则性质的$\phi_n=\phi_n(x)$去逼近,

$$\int_a^b \phi(x)\sin\lambda x dx = \int_a^b [\phi(x)-\phi_n(x)]\sin\lambda x dx + \int_a^b \phi_n(x)\sin\lambda x dx.$$

命题：$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$

解：对$\lambda \geq 0$, 定义

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx.$$

显然$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2I(0), I(\infty) = 0.$

对$\lambda > 0$两边微分得

$$\begin{aligned} I'(\lambda) &= -\int_0^\infty \sin x e^{-\lambda x} dx = \lambda^{-1} \int_0^\infty \sin x de^{-\lambda x} \\ &= \lambda^{-2} \int_0^\infty \cos x de^{-\lambda x} \end{aligned}$$

$$= \quad \lambda^{-2}\left(-1+\int_0^\infty \sin x e^{-\lambda x}dx\right).$$

这样，$(1+\lambda^2)I'(\lambda)=-1$,

$$I(0)=\int_0^\infty \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}=\arctan(\lambda)|_0^\infty=\pi/2.$$

18.2 基本函数空间

设$\Omega \subset \mathbf{R}^d$是一开集。回忆

$C^\infty(\Omega)$：Ω内无穷次连续可微函数的集合，显然是一线性空间。

$C_0^\infty(\Omega)$：也代表一函数集合，显然也是一个非空线性空间。

还有，速降函数空间（课件16中介绍过的）$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

这三个函数集合显然有下列包含关系

$$C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega), \qquad C_0^\infty(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S} \subset C^\infty(\mathbf{R}^d).$$

引入收敛性的概念（拓扑向量空间: W. Rudin, Functional Analysis)

(1).

$$\mathcal{E}(\Omega) := \Big\{ f \in C^\infty(\Omega) : \{f_n\} \subset C^\infty(\Omega),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \qquad \text{iff}$$

$$\forall \alpha, \quad \forall K \subset\subset \Omega, \quad \lim_{n\to\infty} \max_{x\in K} |\partial^\alpha f_n(x)| = 0 \Big\}.$$

其中$\subset\subset$表示前者是紧的，且与后者边界的距离为正。

(2).

$$\mathcal{D}(\Omega) := \Big\{ f \in C_0^\infty(\Omega) : \{f_n\} \subset C_0^\infty(\Omega),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \qquad \text{iff}$$

$$\exists K \subset\subset \Omega \quad \text{such} \quad \text{that} \quad \text{supp} f_n \subset K \quad \text{and}$$

$$\forall \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \max_x |\partial^\alpha f_n(x)| = 0 \Big\}.$$

其中supp$f$表示函数f的支集，是集合$\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$的闭包。

注1、$C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$在$\mathcal{E}(\mathbf{R}^d)$中稠密。

考虑特征函数

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq R, \\ \\ 1, & |x| < R, \end{cases}$$

的卷积

$$\beta_R(x) = \int \chi_R(x-y)\rho(y)dy \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d),$$

其中$\rho = \rho(x)$是Friedrichs光滑子。

当$|x| < R-1$时，$\beta_R(x) = 1$；当$|x| > R+1$时，$\beta_R(x) = 0.$

任给$\phi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^d)$，记

$$\phi_n = \beta_n \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d).$$

当$|x| < n-1$时，$\phi_n(x) = \phi(x)$；当$|x| > n+1$时，$\phi_n(x) = 0$.

可见在$\mathcal{E}(\mathbf{R}^d)$中，

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi.$$

注2、$\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$和$\mathcal{E}(\mathbf{R}^d)$中的极限关系不同。

考虑函数列

$$\phi_n(x) = \rho(x_1 - n, x_2, \cdots, x_d)$$

当n趋于无穷大时，ϕ_n的支集趋于无限远。从而在任一有界集K，从某一时刻n开始，ϕ_n恒为零，所以这个序列在$\mathcal{E}(\mathbf{R}^d)$中收敛到0.

但在$\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$中，该序列不收敛（它们的支集不可能被包含在一个统一的有界集中）。

(3).

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbf{R}^d) : \{f_n\} \subset C^\infty(\mathbf{R}^d),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \qquad \text{iff}$$

$$\forall\alpha, \forall\beta, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_x |x^\beta \partial^\alpha f_n(x)| = 0 \Big\}.$$

三个基本函数空间:

$$\mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{E}(\mathbf{R}^d).$$

前一个在后一个中稠密（?）:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_2(x/n)\phi(x) = \phi(x) \qquad (\mathcal{S}).$$

极限关系一个比一个强（显然。反过来不对）。

18.3 广义函数：基本函数空间上的连续线性泛函

基本函数空间是线性空间，从其到（实或复）数域的映射可以称为泛函。

由于映射的定义域是线性空间，可以定义线性泛函。

基本函数空间中定义了序列的收敛性，基于此可以定义线性泛函的连续性。

线性连续泛函：设T是线性空间V上的线性泛函，如果V中任意趋于零的序列$\{v_n\}$，都有

$$\lim_{n\to\infty} T(v_n) = 0,$$

则称T是连续的。

只定义了序列收敛到0和线性泛函在0点的连续性（其它点的连续性？)

例1：开集$\Omega \subset \mathbf{R}^d$上的任一局部可积函数都对应$\mathcal{D}(\Omega)$上的一个广义函数。

给定Ω上的局部可积函数$f = f(x)$，对于基本函数空间$C_0^\infty(\Omega)$中的任一函数$\phi = \phi(x)$，积分

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

都是一个确定的数值。

定义

$$< f, \phi >= \int_\Omega f(x)\phi(x)dx.$$

显然，这是$C_0^\infty(\Omega)$上的一个线性泛函。

而且在$\mathcal{D}(\Omega)$的极限意义下，当$\phi_n \to 0$ 时，由于$\{\phi_n\}$ 的支集都含于某个有界集K中，所以

$$|< f, \phi_n >| \leq \max |\phi_n(x)| \int_K |f(x)| dx \to 0.$$

故这个泛函是连续的。

于是局部可积函数f就对应了$\mathcal{D}(\Omega)$上的一个广义函数。

例2：δ函数是$\mathcal{D}(\mathbf{R}^d), \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$或者$\mathcal{E}(\mathbf{R}^d)$上的广义函数。

在δ函数的作用下，基本函数空间的任一给定函数$\phi = \phi(x)$对应的数值为

$$< \delta, \phi >= \phi(0).$$

显然，这是一线性泛函。

而且无论是按$\mathcal{D}(\mathbf{R}^d), \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$，还是$\mathcal{E}(\mathbf{R}^d)$的极限意义下，当$\phi_n \to 0$时，都有$\phi_n(0) \to 0$，所以$\delta$函数是其上的广义函数。

以下讨论主要针对全空间上的基本函数及其相应的广义函数。可是许多结论对一般开集上的基本函数$\mathcal{D}(\Omega)$或$\mathcal{E}(\Omega)$及其相应的广义函数也是有效的。

$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d), \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d), \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$分别表示$\mathcal{D}(\mathbf{R}^d), \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$以及$\mathcal{E}(\mathbf{R}^d)$上广义函数的集合（对偶空间）。

它们显然都是线性空间，之间有关系

$$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d).$$

对偶积：对于确定的基本函数空间上定义的广义函数T，作用于该基本空间中任一元素ϕ的值可记为$T(\phi)$或$< T, \phi >$.

后者被称为对偶积。

18.4 广义函数的取值

若有一广义函数$T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$，对于任一$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$，$T(\phi) = 0$都成立，则称$T$在开集$\Omega$中取0值，或着说$T$在$\Omega$中为0.

据此，可以定义两个广义函数在开集中相等的概念。

一个广义函数可以在$\mathbf{R}^d$的某个开集上等于一个常义函数，甚至是无穷次连续可微函数。如δ函数仅在含原点的开集内是“广义”的；而在不含原点的任一开集上，取值恒为零。

广义函数T的支集：使广义函数取零值的最大开集的余集为其支集，记作supp$T$. 如supp$\delta = \{0\}$.

当广义函数T的支集与基本函数ϕ的支集不相交时，有$< T, \phi >= 0$.

18.5　广义函数的运算（6种）

(1)、线性运算：广义函数的值域是数域，所以可以定义两个广义函数的数乘和加法，结果显然还是线性的、是连续的。

一基本函数空间上的所有广义函数构成一线性空间，称为广义函数空间。

两个广义函数的乘积一般没有意义！但可以定义卷积和张量乘积(略)。

(2)、极限运算：广义函数T是广义函数列（族）T_n的极限当且仅当对基本函数空间的每个元素ϕ，都有

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\phi) = T(\phi),$$

（弱*收敛）符号n也可以表示某个参数。

例1：矩形脉冲指的是

$$Q_n(x)=\begin{cases}\frac{n}{2}, & |x|\leq\frac{1}{n},\\ \\ 0, & |x|>\frac{1}{n},\end{cases}$$

显然$Q_n\in L_{loc}(\mathbf{R})$，对于任意的基本（连续）函数$\phi$有

$$<Q_n,\phi>=\int Q_n(x)\phi(x)dx=\frac{n}{2}\int_{|x|\leq\frac{1}{n}}\phi(x)dx=\phi(x_n)$$

其中其中$x_n\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$。令$n\to\infty$，可得

$$\lim_{n\to\infty}<Q_n,\phi>=\phi(0).$$

可见矩形脉冲序列$\{Q_n\}$收敛到δ函数。

例2：Dirichlet核

$$K_n(x) = \begin{cases} 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi, \end{cases}$$

这里的等号是由于初等关系式

$$2\cos kx \sin\frac{x}{2} = \sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x.$$

显然$K_n(x)$是局部可积的，并且$\forall\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} < \tfrac{1}{2\pi}K_n, \phi > -\phi(0) = & \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2\pi}K_n(x)\phi(x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2\pi}\phi(0)dx \\ = & \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\phi(x)-\phi(0)}{\sin\frac{x}{2}} \sin(n+\tfrac{1}{2})xdx. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{\sin\frac{x}{2}}=2\phi'(0),$$

函数$\frac{\phi(x)-\phi(0)}{\sin\frac{x}{2}}$在区间$[-\pi,\pi]$上可积。

由Riemann-Lebesgue引理可得

$$\lim_{n\to\infty} < \frac{1}{2\pi}K_n,\phi >= \phi(0).$$

所以函数列$\{\frac{1}{2\pi}K_n(x)\}$也收敛到δ函数。

例3：Poisson核

$$K(t,x)=\begin{cases}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, & t>0,\\ 0, & t\le 0,\end{cases}$$

对任何t, $K(t,\cdot)$显然是局部可积的。把t当作参数，$\forall\phi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$ 有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}<K(t,\cdot),\phi> &= \lim_{t\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\phi(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}\phi(2a\sqrt{t}y)dy=\phi(0),\end{aligned}$$

也收敛到δ函数。

例4： $\lim_{A\to\infty}\frac{\sin Ax}{x}=\pi\delta(x)$

证明：对$\phi=\phi(x)$，计算

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Ax}{x}\phi(x)dx = &\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Ax}{x}[\phi(x)-\phi(0)]dx+\phi(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Ax}{x}dx \\
= &\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\sin Axdx+\phi(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy \\
\to &\quad 0+\pi\phi(0).
\end{aligned}
$$

(3)、广义函数的导数

回忆：若$f=f(x)$和其导函数$f'(x)$都是连续的，$\phi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$，则有分部积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx.$$

注意ϕ'还是一基本函数。用对偶积的符号，上式可表示为

$$<f',\phi>=-<f,\phi'>.$$

广义函数的导数就是基于这个简单事实!

设$T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$. 它的关于$x_k$的偏导数$\frac{\partial T}{\partial x_k}$ 定义为满足下述等式的广义函数

$$< \frac{\partial T}{\partial x_k}, \phi >= - < T, \frac{\partial \phi}{\partial x_k} >,$$

其中$\phi = \phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$是任意的。

由于$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$， $\frac{\partial T}{\partial x_k}$的线性性和连续性都是显然的，从而

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d).$$

这显然是普通导数概念的推广。任意广义函数有广义导数!

类似的，可以用下式

$$< \partial^\alpha T, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \phi >,$$

定义广义函数$T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$的$\alpha$（多重指标）阶广义导数。

包括δ函数在内的所有广义函数都可导，并且有任意阶高阶导数，高阶导数可以任意交换次序（与数学分析中的结论很不同 ?)

若一列（族）广义函数列收敛到广义函数T，则它们的任意阶导数收敛到T的相应导数。

例5：Heaviside函数

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ \\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

这显然是个局部可积函数。作为常义函数，它在$x=0$处不可导。然而作为广义函数可导。

事实上，对于任一$\phi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$，有

$$\begin{aligned}<H',\phi>= & \quad -<H,\phi'>=\int_{-\infty}^{\infty}H(x)\phi'(x)dx \\ \\ = & \quad -\int_0^{\infty}\phi'(x)dx=\phi(0)=<\delta,\phi>.\end{aligned}$$

可见，Heaviside函数的广义导数是δ函数。

(4)、广义函数的平移

为了定义广义函数的平移，回忆对于局部可积函数$f = f(x)$以及任一$\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$，有

$$< f(\cdot - \xi), \phi >= \int f(x-\xi)\phi(x)dx = \int f(x)\phi(x+\xi)dx.$$

由于$\phi(\cdot + \xi) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$，所以上式可以用对偶积符号写作

$$< f(\cdot - \xi), \phi >=< f, \phi(\cdot + \xi) > .$$

广义函数$T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$的平移$T(\cdot - \xi) = T(x - \xi)$就是以依这个等式定义的。

这样定义的平移$T(\cdot - \xi)$的线性性和连续性都是显然的。

以此定义，δ函数的平移$\delta(\cdot - \xi)$作用在基本函数$\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$的结果是

$$< \delta(\cdot - \xi), \phi > = < \delta, \phi(\cdot + \xi) > = \phi(\xi).$$

(5)、广义函数的乘子

设$T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$，$h = h(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$. 定义$h$与$T$的乘积$hT$如下

$$< hT, \phi > = < T, h\phi >, \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d).$$

由于从$\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$可以推出$h\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$. 又从$\phi_n \to 0(\mathcal{D}(\mathbf{R}^d))$可以推出$h\phi_n \to 0(\mathcal{D}(\mathbf{R}^d))$，所以上式定义的$hT$确实是一个$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$广义函数，$h = h(x)$称为乘子。

结合导数和乘子的定义，可以定义以$C^\infty(\mathbf{R}^d)$函数为系数的线性偏微分算子

$$P(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} h_\alpha(x) \partial^\alpha$$

作用于广义函数上。

从而可以在广义函数的意义下，研究线性偏微分方程

$$\sum_{|\alpha|\le m} h_\alpha(x)\partial^\alpha u = T(x),$$

其中$T = T(x)$是一广义函数。特别地，T 可以是δ函数。

上述方程的广义函数解$u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$，指的是对任一$\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$，成立

$$< u, \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha[h_\alpha(x)\phi] >=< T, \phi > .$$

(6)、广义函数的Fourier变换

在反演定理的证明中，我们用到

$$\int_{\mathbf{R}^d} g(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

据此，定义广义函数$T \in \mathcal{S}'$的Fourier变换$\hat{T}$为$\mathcal{S}'$广义函数

$$< \hat{T}, \phi > = < T, \hat{\phi} >, \qquad \phi \in \mathcal{S}.$$

$\hat{\phi}$是速降函数。Fourier变换是速降函数空间到自身的连续线性变换。

如果T是一绝对可积函数，则有

$$
\begin{aligned}
& < \hat{T}, \phi > = < T, \hat{\phi} > \\
= \quad & \int_{\mathbf{R}_\xi^d} T(\xi) \left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}_x^d} e^{-ix\xi} \phi(x) dx \right] d\xi \\
= \quad & \int_{\mathbf{R}_x^d} \phi(x) \left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}_\xi^d} e^{-ix\xi} T(\xi) d\xi \right] dx
\end{aligned}
$$

可见

$$
\hat{T} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}_\xi^d} e^{-ix\xi} T(\xi) d\xi.
$$

广义函数Fourier变换的这个定义是经典定义的推广。

类似地，可以定义广义函数的Fourier逆变换

$$< F^{-1}[T], \phi > = < T, F^{-1}[\phi] > .$$

例6：δ函数的Fourier变换

$$< \hat{\delta}, \phi > = < \delta, \hat{\phi} > = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} \phi(x) dx,$$

所以δ函数的Fourier变换是个常值函数（局部可积）

$$\hat{\delta} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}.$$

例7：求函数e^{iax}的Fourier变换

$$< F[e^{iax}], \phi > = < e^{iax}, \hat{\phi} >$$

$$= \int_{\mathbf{R}_\xi^d} e^{ia\xi} \left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}_x^d} e^{-ix\xi} \phi(x) dx \right] d\xi$$

$$= (\sqrt{2\pi})^d \phi(a) = (\sqrt{2\pi})^d < \delta(\cdot - a), \phi >,$$

所以

$$F[e^{iax}](\xi) = (\sqrt{2\pi})^d \delta(\xi - a).$$

性质(1)　Fourier变换建立了一个$\mathcal{S}'$到自身的同构对应。

线性同构是明显的。为了说明保持极限关系，设T_n 是$\mathcal{S}'$中以0为极限的序列，对于任一$\phi \in \mathcal{S}$，有$F[\phi] \in \mathcal{S}$，那么

$$< F[T_n], \phi >=< T_n, \hat{\phi} >\to 0.$$

可见$F[T_n] \to 0$ ，即Fourier变换是线性连续映射。

同理，逆映射也是。

性质(2)　若$T \in \mathcal{S}'$, 则$F^{-1}[\hat{T}] = T$.

事实上,

$$< F^{-1}[\hat{T}], \phi >=< \hat{T}, F^{-1}[\phi] >=< T, F[F^{-1}[\phi]] >=< T, \phi > .$$

性质(3)　若$T \in \mathcal{S}'$, 则

$$F[\partial^\alpha T] = i^{|\alpha|}\xi^\alpha F[T], \qquad F[(-i)^{|\alpha|}x^\alpha T] = \partial^\alpha F[T].$$

性质(4)　（有条件成立）卷积的Fourier变换是Fourier变换的乘积，乘积的Fourier变换是Fourier变换的卷积。

作业：

1、证明Fourier变换是速降函数空间到自身的线性连续变换。

2、参考书（谷超豪等）pp163: 1, 5, 7

3、pp.162, 5(1)(3)(5)，