偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第17讲、无界区域上的热传导方程

17.1 初值问题

考虑初值问题

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u &= f(t,x), \qquad x \in \mathbf{R}^d, \quad t > 0, \\
u(0,x) &= \phi(x).
\end{aligned}
$$

在方程两边做关于空间变量x的Fourier变换（形式运算），利用性质(1)和(8)得

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{dt} + a^2|\xi|^2\hat{u} &= \hat{f}(t,\xi), \qquad \xi \in \mathbf{R}^d, \quad t>0, \\ \hat{u}(0,\xi) &= \hat{\phi}(\xi). \end{aligned}$$

解这个常微分方程的初值问题，得

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-a^2|\xi|^2 t}\hat{\phi}(\xi) + \int_0^t e^{-a^2|\xi|^2(t-\tau)}\hat{f}(\tau,\xi)d\tau.$$

对此式两边求反演，得

$$u(t,x) = F^{-1}[e^{-a^2|\xi|^2 t}\hat{\phi}(\xi)] + \int_0^t F^{-1}[e^{-a^2|\xi|^2(t-\tau)}\hat{f}(\tau,\xi)]d\tau.$$

回忆上一讲的例5：

$$F[e^{-A|x|^2}](\xi) = (2A)^{-d/2} e^{-|\xi|^2/(4A)}.$$

取$A = \frac{1}{4a^2 t}$, 那么

$$F^{-1}[e^{-a^2|\xi|^2 t}] = \frac{1}{(\sqrt{2a^2 t})^d} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}.$$

利用Fourier变换的卷积性质，

$$F^{-1}[e^{-a^2|\xi|^2 t}\hat{\phi}(\xi)] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}F^{-1}[e^{-a^2|\xi|^2 t}] * F^{-1}[\hat{\phi}(\xi)]$$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-|x-\xi|^2/(4a^2 t)}\phi(\xi)d\xi.$$

$$F^{-1}[e^{-a^2|\xi|^2(t-\tau)}\hat{f}(\tau,\xi)]$$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-|x-\xi|^2/(4a^2(t-\tau))}f(\tau,\xi)d\xi.$$

这样得到形式解

$$u(t,x)=\int_{\mathbf{R}^d}K(t,x-\xi)\phi(\xi)d\xi+\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}K(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi d\tau,$$

其中

$$K(t,x)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^d}e^{-|x|^2/(4a^2t)}.$$

当$t>0$时，$K=K(t,x)$是x的速降函数。

解的前述表达式称为热传导方程的Poisson公式，而称

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases} K(t-\tau,x-\xi), & t>\tau, \\ 0, & t\le\tau \end{cases}$$

为热传导方程的基本解。

定理17.1、设右端$f(t,x)=0$, 初值$\phi=\phi(x)$有界连续，则由Poisson公式给出的是初值问题的经典解。

证明：当$t>0$时，$K=K(t,x)$是x的速降函数。容易验证

$$K_t - a^2\Delta K = 0.$$

所以

$$u(t,x)=\int_{\mathbf{R}^d} K(t,x-\xi)\phi(\xi)d\xi$$

是无穷次连续可微的，且可在积分号下关于x,t求任意阶微商。

从而当$t > 0$时，

$$u_t - a^2 \Delta u = \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{\partial K(t, x-\xi)}{\partial t} - a^2 \Delta K(t, x-\xi) \right] \phi(\xi) d\xi = 0.$$

即满足方程。

还需验证初始条件：对任何$x_0 \in \mathbf{R}^d$,

$$\lim_{x \to x_0, t \to 0+} u(t, x) = \phi(x_0).$$

为此，作变量替换

$$\eta = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$$

那么

$$u(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-|\eta|^2} \phi(x + 2a\sqrt{t}\eta) d\eta.$$

注意

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-|\eta|^2} d\eta = 1,$$

由控制收敛定理立即可得，或者

$$
\begin{aligned}
u(t,x)-\phi(x_0) &= \tfrac{1}{(\sqrt{\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-|\eta|^2}[\phi(x+2a\sqrt{t}\eta)-\phi(x_0)]d\eta \\
&= \tfrac{1}{(\sqrt{\pi})^d}\left[\int_{|\eta|>R}+\int_{|\eta|\le R}\right]\cdots d\eta.
\end{aligned}
$$

由于$\phi(x)$有界，当R充分大时，第一个积分（$> R$）可以（关于t和x一致）小于任何预先指定的数。

一旦R选定，第二个积分的区域就是有界的（$|\eta| \le R$）。在这个有界区域上，$\phi(x)$是一致连续的。

从而当$|x-x_0|$和t都充分小时，

$$|\phi(x+2a\sqrt{t}\eta)-\phi(x_0)|$$

也可以小于任何预先指定的数。$\cdots$. 证毕。

注记1、初值的有界性假设可以放松为

$$|\phi(x)| \le Me^{N|x|^2}$$

这时，Poisson公式中的第一个积分在

$$N - \frac{1}{4a^2 t} < 0, \qquad t < \frac{1}{4a^2 N}$$

时收敛（回忆唯一性的证明)。

注记2、无论初值光滑与否，有奇性（微商或初值本身不连续）也可以，解在$t > 0$时变得无穷次连续可微！奇性不传播。与波动方程很不同。

注记3、无限传播速度：设想初值只在空间区域的一个很小的子集上为正，其余位置都为0. 根据Poisson公式，在$t>0$ 时, 解处处为正（$K(t,x)>0$, 卷积）。与波动方程很不同。

注记4、（一维）周期性、奇偶性

由Poisson公式（奇性；$K=K(t,x)$关于x偶）

$$
\begin{aligned}
u(t,-x) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} K(t,-x-\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} K(t,-x+y)\phi(-y)dy \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} K(t,x-y)\phi(y)dy = -u(t,x).
\end{aligned}
$$

16.2 一维半无界问题

(1)、第一边值问题

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 u_{xx} &= f(t,x), \qquad x > 0, \quad t > 0, \\
u(t,0) &= g(t), \qquad t > 0, \\
u(0,x) &= \phi(x), \qquad x \geq 0.
\end{aligned}
$$

类似于波动方程的延拓法

当$g(t)\equiv 0$时，奇延拓初值、右端:

$$\bar{\phi}(x)=\begin{cases} \phi(x), & x\geq 0, \\ -\phi(-x), & x<0, \end{cases}$$

$$\bar{f}(t,x)=\begin{cases} f(t,x), & x\geq 0, \\ -f(t,-x), & x<0. \end{cases}$$

求解相应的初值问题得

$$\bar{u}(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x-\xi)\bar{\phi}(\xi)d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(t-\tau,x-\xi)\bar{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

由于

$$\int_{-\infty}^{0} K(t, x-\xi)\bar{\phi}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{0} K(t, x-\xi)[-\phi(-\xi)]d\xi$$

$$= \int_{\infty}^{0} K(t, x+\eta)\phi(\eta)d\eta$$

$$\int_{-\infty}^{0} K(t-\tau, x-\xi)\bar{f}(\tau,\xi)d\xi = \int_{\infty}^{0} K(t-\tau, x+\eta)f(\tau,\eta)d\eta,$$

因此

$$\bar{u}(t,x) = \int_{0}^{\infty}[K(t, x-\xi) - K(t, x+\xi)]\phi(\xi)d\xi$$

$$+\int_{0}^{t}\int_{0}^{\infty}[K(t-\tau, x-\xi) - K(t-\tau, x+\xi)]f(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

最后

$$u(t,x) = \bar{u}(t,x)|_{x\geq 0}.$$

当$t > 0$时，解是光滑的（和波动方程不同！），齐次边界条件自然得到满足。

当$g(t)\neq 0$时，作变量代换

$$u(t,x)=v(t,x)+g(t).$$

那么$v=v(t,x)$满足

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t}-a^2 v_{xx} &= f(t,x)-g'(t), \qquad x>0, \quad t>0,\\
v(t,0) &= 0, \qquad t>0,\\
v(0,x) &= \phi(x)-g(0), \qquad x\geq 0.
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$

(2)、第二边值问题

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 u_{xx} &= f(t,x), \qquad x > 0, \quad t > 0, \\
u_x(t,0) &= g(t), \qquad t > 0, \\
u(0,x) &= \phi(x), \qquad x \geq 0.
\end{aligned}$$

当$g(t) \equiv 0$时，偶延拓初值、右端:

$$\bar{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0, \\ \phi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\bar{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & x \geq 0, \\ f(t,-x), & x < 0. \end{cases}$$

求解相应的初值问题得

$$\bar{u}(t,x) = \int_0^\infty [K(t,x-\xi) + K(t,x+\xi)]\phi(\xi)d\xi$$

$$+ \int_0^t \int_0^\infty [K(t-\tau,x-\xi) + K(t-\tau,x+\xi)]f(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

最后

$$u(t,x) = \bar{u}(t,x)|_{x\geq 0}.$$

当$t > 0$时，解是光滑的（和波动方程不同！），齐次边界条件自然得到满足。

当$g(t) \neq 0$时，作变量代换

$$u(t,x) = v(t,x) + xg(t).$$

那么$v = v(t,x)$满足

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 v_{xx} &= f(t,x) - xg'(t), \qquad x > 0, \quad t > 0, \\
v_x(t,0) &= 0, \qquad t > 0, \\
v(0,x) &= \phi(x) - xg(0), \qquad x \geq 0.
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$

(3)、第三边值问题

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 u_{xx} &= 0, \qquad x > 0, \quad t > 0, \\
u_x(t,0) + \alpha u(t,0) &= 0, \qquad t > 0, \\
u(0,x) &= \phi(x), \qquad x \geq 0.
\end{aligned}$$

其中α为常数。

先考虑初值问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} - a^2 W_{xx} &= 0, \qquad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0, \\ W(0,x) &= \Phi(x), \qquad x \in (-\infty, \infty), \end{aligned}$$

其中初值

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0, \\ \psi(x), & x < 0, \end{cases}$$

而$\psi(x)$待定。

期望边界条件成立：

$$W_x(t,0) + \alpha W(t,0) = 0.$$

若如此，由唯一性知，解为

$$u(t,x) = W(t,x)|_{x\geq 0}.$$

如何确定待定的$\psi(x)$？

由Poisson公式,

$$W(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x-\xi)\Phi(\xi)d\xi.$$

计算

$$\begin{aligned}
W_x(t,x)= &\quad \int_{-\infty}^{\infty}K_x(t,x-\xi)\Phi(\xi)d\xi \\
= &\quad -\int_{-\infty}^{\infty}K_\xi(t,x-\xi)\Phi(\xi)d\xi \\
= &\quad -K(t,x-\xi)\Phi(\xi)|_0^{\infty}-K(t,x-\xi)\Phi(\xi)|_{-\infty}^{0} \\
&\quad +\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x-\xi)\Phi'(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

代入期望的边界条件$W_x(t,0)+\alpha W(t,0)=0$, 得

$$
\begin{aligned}
-K(t,0)\psi(0)+K(t,0)\phi(0)+\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}K(t,-\xi)\Phi'(\xi)d\xi \\
+\alpha\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}K(t,-\xi)\Phi(\xi)d\xi \quad &= 0.
\end{aligned}
$$

选择$\psi(0)=\phi(0)$，则上式成为

$$\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right)K(t,\xi)\left[\Phi'(\xi)+\alpha\Phi(\xi)\right]d\xi=0.$$

而第二个积分可写为

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{-\infty} K(t,\xi)\left[\Phi'(-\xi)+\alpha\Phi(-\xi)\right]d(-\xi) \\
= \quad & \int_{-\infty}^{0} K(t,\xi)\left[\Phi'(-\xi)+\alpha\Phi(-\xi)\right]d\xi,
\end{aligned}
$$

因此我们选择$\psi=\psi(x)$使得

$$
\begin{aligned}
\psi'(\xi)+\alpha\psi(\xi) = & \quad -\phi'(-\xi)-\alpha\phi(-\xi), \qquad \xi<0, \\
\psi(0) = & \quad \phi(0).
\end{aligned}
$$

解这个ODE的初值问题可得$\psi=\psi(x)$.

令

$$\zeta = \zeta(\xi) = \psi(\xi) - \phi(-\xi).$$

那么$\zeta(0) = 0$,

$$\zeta' + \alpha\zeta = -2\alpha\phi(-\xi).$$

解得

$$\zeta(\xi) = -2\alpha \int_0^{\xi} e^{\alpha(\eta-\xi)}\phi(-\eta)d\eta = 2\alpha e^{-\alpha\xi}\int_0^{-\xi} e^{-\alpha\eta}\phi(\eta)d\eta,$$

$$\psi(\xi) = \phi(-\xi) + 2\alpha e^{-\alpha\xi}\int_0^{-\xi} e^{-\alpha\eta}\phi(\eta)d\eta.$$

代入

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{0} K(t, x-\xi)\psi(\xi)d\xi \\
= \quad & \int_{\infty}^{0} K(t, x+\xi)\psi(-\xi)d(-\xi) \\
= \quad & \int_{0}^{\infty} K(t, x+\xi)\psi(-\xi)d\xi \\
= \quad & \int_{0}^{\infty} K(t, x+\xi)[\phi(\xi) + 2\alpha e^{\alpha\xi} \int_{0}^{\xi} e^{-\alpha\eta}\phi(\eta)d\eta]d\xi.
\end{aligned}
$$

最后

$$
\begin{aligned}
W(t,x) = \quad & \int_{-\infty}^{0} K(t,x-\xi)\psi(\xi)d\xi + \int_0^{\infty} K(t,x-\xi)\phi(\xi)d\xi \\
= \quad & \int_0^{\infty}[K(t,x-\xi)+K(t,x+\xi)]\phi(\xi)d\xi \\
& +2\alpha\int_0^{\infty} e^{\alpha\xi}K(t,x+\xi)\int_0^{\xi} e^{-\alpha\eta}\phi(\eta)d\eta d\xi.
\end{aligned}
$$

作业： pp160： 4, 8(2)(3)

pp101. 9 (只求解)