偏微分方程

第26讲

雍稳安

清华大学数学科学系

12. Juni 2024

第26讲、复习一

偏微分方程的一般形式：

$$F(x, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_d}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \cdots) = 0, \qquad x \in G \subset \mathbf{R}^m.$$

阶；线性、半线性、拟线性、非线性；方程，方程组，...

1、一阶方程（特征线方法，弱解）

一般形式

$$F(x, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_d}) = 0, \qquad x \in G.$$

1.1、线性方程

$$u_t + \sum_{k=1}^{d} b_k(x,t) u_{x_k} + c(x)u = f(x).$$

（数量）特征线方法（若想知道点(X,T)处未知函数u的值）：

$$\frac{dx}{dt} = (b_1(x,t), b_2(x,t), \cdots, b_d(x,t))^T \in \mathbf{R}^d; \qquad x|_{t=T} = X.$$

这是一个一阶ODE方程组的初值问题。从点(X,T)出发，向着u的值（初值或边值）已知的位置画特征线Γ！（Fichera 理论（左上，右下））。

设特征线过（β, t_0）而$u(\beta,t_0)$已知。显然，β和t_0都依赖于(X,T).

记特征线的方程为

$$x = x(t;\beta).$$

沿着特征线，解带参量β的线性ODE的初值问题

$$\frac{du}{dt} = -c(x(t;\beta),t)u + f(x(t;\beta),t)), \qquad u|_{t=t_0} = u(\beta, t_0).$$

即可获得$u(X,T)$.

特征线方法也可用来求解拟线性方程

$$u_t + \sum_{k=1}^{d} b_k(u,x,t)uu_{x_k} = f(u,x,t).$$

这时上述特征线方程和u的ODE就要联立求解!

在诸系数$b_j(u;x,t)$不依赖于(x,t)并且右端项$f(u;x,t)$恒消失时，如

$$u_t + a(u)u_x = 0,$$

特征线是直线，解的最大模不增。关键是确定β.

定理：设$a = a(u)$及其$u_0 = u_0(x)$都是连续可微的。那么初值问题

$$u_t + a(u)u_x = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0(x)$$

有一个整体经典解的充要条件是复合函数$a(u_0(x))$是递增的。否则，经典解的最大存在区间是$[0, T_*)$, 其中

$$T_* = \frac{-1}{\inf_x [a(u_0(x))]'}.$$

且当t趋于T_*时，解的最大模不增但一阶导数的最大模趋于无穷

(u_0有紧支集的情况下)。

此时，从不同初值点出发的特征线可能相交（激波现象），β不能唯一确定，方法失效!

非线性现象，与初值的增减性有关，但与初值的光滑性无关。

例子？

守恒律

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

弱解:　　设$f = f(u)$连续, $u_0 = u_0(x)$局部可积。若有界可测函数$u = u(x,t)$使得

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u\phi_t + f(u)\phi_x] dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x,0)dx = 0,$$

对所有$\phi = \phi(x,t) \in C_0^\infty((-\infty,\infty) \times (0,\infty))$, 则称其为上述守恒律与初值$u_0$的弱解。

f的连续性、u_0的局部可积性都是为了保证上述定义式中的每一项都有意义。

来源于分部积分，经典解是弱解。

Rankine-Hugiot 定理(分片经典解): 设$\Gamma : x = x(t)$是(x,t)平面内的一条光滑曲线，在Γ两侧$u = u(x,t)$是守恒律的经典解，且在Γ两侧的极限都存在，那么u是弱解的充要条件是满足

$$[u]\frac{dx(t)}{dt} = [f(u)] \equiv (f(u(x(t)+0,t)) - f(u(x(t)-0,t))).$$

推论：连续的分片经典解是弱解。

找弱解: 在特征线相交之前，尽量用特征线方法。

Riemann问题，分片常数，用直线分开，直线的斜率由RH跳跃条件决定。

例子？

弱解不唯一，熵条件，...

2、二阶线性偏微分方程

一般形式

$$\sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{m} b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u = f(x), \quad x \in G \subset \mathbf{R}^m,$$

其中

$$a_{kl}(x) = a_{lk}(x), \qquad \forall k, l.$$

例子：波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,t), \qquad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d,\ t > 0,$$

其中$m = d + 1$,

$$a_{kl}(x) = a_{lk}(x) = -a^2\delta_{kl}\ (k, l \leq d), \qquad a_{mk}(x) = a_{km}(x) = \delta_{km},$$

$$b_1(x) = b_2(x) = \cdots = b_m(x) = c(x) = 0.$$

热传导方程$(m = d + 1, b_m = 1)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f, \qquad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d$$

位势方程$(m = d)$

$$-\Delta u = f, \qquad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d$$

线性叠加原理（不限于二阶！）：设u_1满足

$$\sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}(x)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{m} b_k(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + c(x)u_1 = f_1(x),$$

u_2满足

$$\sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}(x)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{m} b_k(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_k} + c(x)u_2 = f_2(x),$$

那么它们的线性组合$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$满足

$$\sum_{k,l=1}^{m} a_{kl}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{m} b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x).$$

分类: 设$x_0 \in G$ （二阶线性偏微分方程的定义域)。

- 若对称矩阵$A(x_0) = [a_{kl}(x_0)]$正定或负定，则称方程在x_0点是椭圆型的（elliptic）。
- 若对称矩阵$A(x_0)$有一个0特征值，其余全是正的或负的，则称方程在x_0点是抛物型的（parabolic）。
- 若矩阵$A(x_0)$有一个正（或负）特征值，其余全是负（或正）的，则称方程在x_0点是双曲型的（hyperbolic）。

若在定义域G中每一点都是椭圆（或抛物，或双曲）型的，则称方程在G中是椭圆（或抛物，或双曲）型的。

常系数方程

若对称矩阵$A(x) = [a_{kl}(x)]$是常系数的，即$a_{kl}(x)$与自变量$x \in G$ 无关，那么存在正交矩阵P和实对角矩阵Λ使得

$$A = P^T \Lambda P.$$

此时原二阶线性方程可写为

$$(\nabla_x^T A \nabla_x)u + \sum_{k=1}^{m} b_k(x)u + c(x)u = f(x).$$

做自变量的旋转变换 $y = Px.$ 容易验算

$$\nabla_x = P^T \nabla_y.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_1}\quad (P\text{的第一列}).$$

那么

$$\nabla_x^T A\nabla_x=\nabla_y^T PAP^T\nabla_y=\nabla_y^T\Lambda\nabla_y$$

再对$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$做适当的伸缩变换

$$z_k=y_k\begin{cases}\sqrt{|\lambda_k|}, & \Lambda\text{的第}k\text{个对角元}\lambda_k\neq 0,\\ \\ 1, & \Lambda\text{的第}k\text{个对角元}=0.\end{cases}$$

所以可以假定

$$\Lambda=\mathrm{diag}(-1,-1,\cdots,-1,0,0,\cdots,0,1,1,\cdots,1),$$

由此得到标准型。

位势方程、热传导方程、波动方程分别称为椭圆、抛物、双曲型方程的标准型。

这些方程从数学上定量地描述了大自然中物质运动遵循的自然规律(如物理定律，经验规律等)。

物理背景：守恒律（能量，动量，质量），最小势能

能量守恒：考虑三维空间中一均匀、各向同性的物体。假定它内部有热源，并且与周围介质有热交换。

物体内部由于各部分温度不同，导致热量由高温到低温的传递，它们遵循能量守恒定律。

研究物体内部温度的分布和变化

微元法：在物体内任取一小块D，在时间段$[t_1, t_2]$上对D使用能量守恒定律。

D中热量的增加= 通过它的边界流入的热量+ 其内热源所生成的热量:

$$\int_D c\rho(u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1})dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D \rho f_0 dV - \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial D} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS.$$

其中$u = u(t, x)$时刻t位置x的温度，密度$\rho = \rho(t, x)$，比热容c（单位质量的物体温度升高一度所需要的热量，单位J/kg.K)，f_0是热源强度(单位质量), $\mathbf{q}$(向量）热流密度（单位面积)，$\mathbf{n}$表面单位外法向量(外，-)。

Fourier 热传导定律（经验）

$$\mathbf{q} = -k\nabla u$$

$k > 0$热传导系数。代入前述能量守恒定律得

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_D c\rho u_t dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D \rho f_0 dV + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial D} k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS$$

由Gauss 散度定理

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_D c\rho u_t dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D [\rho f_0 + \nabla \cdot (k\nabla u)] dV$$

D是任意的，得

$$c\rho u_t = \rho f_0 + \nabla \cdot (k\nabla u)$$

当c, k, ρ都是常数时，得热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f, \qquad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d$$

长时间温度与时间t无关, $u = u(x, y, z)$满足Poisson方程

$$-\Delta u = f(x)$$

一维热传导方程（细杆，侧表面绝热，热交换只在两端进行。初始温度、热源在任何垂直截面上变化很小，即初值、右端只依赖于x ）

从动量守恒定律可导出（一维）弦振动方程，

杆的纵振动（一均匀细杆在外力作用下沿杆长方向作微小振动）也可以用弦振动方程（或称一维波动方程）来描述

多维波动方程：膜的振动、声波在空气中的传播

变分原理（极小曲面, 最小势能）:

给定平面上一有界区域Ω，假定其边界充分光滑，在其边界上给定一条空间闭曲线:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad \phi = \phi(s),$$

其中$x = x(s)$和$y = y(s)$是平面闭曲线的参数方程。

求一张定义在$\bar{\Omega}$上的曲面S，使得S以给定空间闭曲线为周界且其面积最小。

即在函数类

$$M_\phi = \{v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = \phi\}$$

中找$u = u(x, y, z)$，使得$J(u) = \min_{v \in M_\phi} J(v)$.

其中$J(v)=\sqrt{1+v_x^2+v_y^2}$是定义在函数集合$M_\phi$上的泛函。
u是$J=J(v)$的极小值“点”。

极值点满足的必要条件:

设u是极值点。任取$v\in C^1(\bar{\Omega})$满足$v|_{\partial\Omega}=0$，则对任意实数ϵ，

$$u+\epsilon v\in M_\phi.$$

那么

$$j(\epsilon):=J(u+\epsilon v)$$

是一个定义在实数轴上的函数，满足对于任意$\epsilon, j(\epsilon)\geq j(0)$.
即0是$j(\epsilon)$的最小值点。

计算$j(\epsilon)$关于ϵ的导数得Euler方程的微分形式：

$$0 = j'(0) = \int_\Omega \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} dxdy, \qquad \forall v \in C_0^1(\Omega).$$

若$u \in C^2(\bar{\Omega})$，利用Green公式得Euler方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right) = 0$$

或

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0.$$

（利用泛函$J(v)$的下凸性，可以说明Euler方程的解确实是变分问题的解）。

一个二阶非线性PDE。

在$|u_x|, |u_y| \ll 1$时，可以考虑其线性化方程（Laplace方程）

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

注意u满足边界条件$u|_{\partial\Omega} = \phi$.

.

上述做法适用于一般的变分问题导致的Euler方程一定是偶数阶的，奇数阶PDE不能是变分问题的Euler方程!

膜的平衡问题

考虑一处于紧张状态的薄膜。它的部分边界固定在一框架上，在另一部分边界上受到外力p的作用；若整个薄膜在外力f作用下处于平衡状态，求薄膜的形状？

建立坐标系, 位置$v = v(x, y)$的总势能为

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(v_x^2 + v_y^2)dxdy - \int_{\Omega} f(x, y)v(x, y)dxdy - \int_{\Gamma} p(s)v(s)ds.$$

定义

$$M_{\phi} = \{v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\Gamma} = \phi\}.$$

最小势能原理：平衡状态$u \in M_{\phi}$ 满足

$$J(u) = \min_{v \in M_{\phi}} J(v).$$

即u是一个变分问题的解。

如同最小曲面问题的做法，可得到Euler方程的积分形式：

$$\int_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) - \int_\Omega f v - \int_\Gamma p v = 0, \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega-\Gamma} = 0.$$

Euler方程的微分形式($u \in C^1(\bar{\Omega})$):

$$-\Delta u = f, \qquad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_\Gamma = p, \qquad u|_{\partial\Omega-\Gamma} = \phi.$$

(自由、强制两种边界条件的处理不同)

3、适定性（存在、唯一、稳定）

存在性：绝大多数情形找不到解的表达式！有没有解？

非线性一阶PDE未必有整体经典解，但可以有弱解。

存在性依赖于解的空间（函数类）

唯一性：也与解的空间（函数类）有关。一阶非线性PDE的弱解可以不唯一！

对于线性问题（方程+定解条件），假若有两个解（反证法），那么它们的差满足相应的齐次方程和齐次边界条件。所以唯一性归结为齐次问题是否只有零解！

稳定性：解对定解条件的扰动不敏感。这涉及到两个解（函数）之间的距离的大小比较。

不适定的例子: 定解数据的微小变化导致解的巨大变化

Laplace方程的初值问题（pp.210）

热传导方程的终边值问题（pp.159）

适定性：Fichera理论

(演化方程的)齐次化原理:

求解方法：一维初值问题：二阶算子分解为两个一阶算子的乘积，用特征线方法；坐标变换，

D’Alembert公式

半无界问题的延拓法（齐次化边值，奇偶延拓；待定初值)，相容性条件，

初边值问题的分离变量法（Sturm-Liouville定理）:

第一步：齐次化边值，

第二步：求特征值、特征函数

第三步：

收敛性验证！

三维初值问题：Kirchhoff公式，（调和函数的球面平均性质）
Fourier变换，基本解，

二维初值问题：降维法, 化球面积分为圆盘上的两重积分

能量估计（多维）：特征锥，

边界项的处理：类似于Sturm-Liouville定理第一个结论的证明

零阶项$c(x)u$的处理：（比较Friedrichs不等式的证明）

$$\int_I u^2(x,t)dx = \int_I u^2(x,0)dx + 2\int_I \int_0^t u(x,t)u_t(x,t)dxdt,$$

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(I)} \leq \|u(\cdot,0)\|^2_{L^2(I)} + \|u\|^2_{L^2(I\times(0,t))} + \|u_t\|^2_{L^2(I\times(0,t))}.$$

唯一性，稳定性: 对初值对边值在L^2范数意义下的连续依赖性。

广义解

经典解是广义解（分部积分，比较守恒律的弱解）

广义解的唯一性（对偶问题的存在性证原问题的唯一性）

广义解的存在性：截断(有限项）分离变量法得到的三角级数的解，？证明该部分和一致收敛(density argument)

热传导方程：

分离变量法，多维问题，光滑化，能量估计，最大模估计，唯一性估计，

Fourier变换，反演性质的证明，

广义函数，速降函数，基本解，初始条件的满足，

位势方程：

Green函数，调和函数，变分方法，Sobolev空间，

作业：pp.212-220，29, 31，32，34，36;

28，（迹）35