偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第22讲、极值原理和估计

22.1、 弱极值原理

设$\Omega \subset R^d$是有界开区域，考虑

$$Lu := -\Delta u + c(x)u = f(x), \qquad x \in \Omega \subset R^d,$$

其中

$$c(x) \geq 0.$$

也可以考虑更一般的二阶方程

$$-\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(\cdots)u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j(\cdots)u_{x_j} + c(\cdots)u = f(x),$$

其中矩阵$[a_{ij}(\cdots)]$是半正定的，

$$c(\cdots) \geq 0.$$

引理22.1：设$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$在$\Omega$内满足$Lu < 0$, 则$u$不能在$\Omega$内达到其在$\Omega$上的非负最大值。

证明：不然的话，存在$x_0 \in \Omega$，使得

$$0 \leq u(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x).$$

那么$u = u(x)$在$x = x_0$处的Hessian矩阵$[u_{x_i x_j}(x_0)]$是半负定的，特别每个$u_{x_i x_i}(x_0) \leq 0$. 结果

$$Lu(x_0) = -\Delta u(x_0) + c(x_0)u(x_0) \geq 0,$$

与假设$Lu < 0$矛盾。证毕。

（与热传导方程类似！$c(x) \equiv 0$时“非负”二字可以不要））

定理22.2(弱极值原理)：设$c = c(x)$非负有界, Ω有界, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$在$\Omega$内满足

$$Lu \le 0,$$

则$u = u(x)$在Ω 上的非负最大值必在$\partial\Omega$上达到。

证明：对$\epsilon > 0$, 记（辅助函数）

$$w = u + \epsilon e^{ax_1},$$

其中常数a待定。

计算

$$Lw = Lu + \epsilon e^{ax_1}(-a^2 + c(x)).$$

由于$c(x)$有界, 可选取a充分大使得$Lw < 0$.

根据引理22.1，有

$$\sup_{x\in\bar{\Omega}} u(x) \le \sup_{x\in\bar{\Omega}} w(x) \le \sup_{x\in\partial\Omega}\{0, w(x)\}$$

$$\le \sup_{x\in\partial\Omega}\{0, u(x)\} + \epsilon \sup_{x\in\partial\Omega} e^{ax_1}.$$

利用Ω的有界性，当ϵ趋于0时，上式最后一项趋于0. 证毕。

$c(x) \equiv 0$, 非负要求可以不要。只需x_1方向有界。

Green函数性质2（$d>2; d=2$: pp.177, 式1.24）:

对于$x,\xi\in\Omega, x\neq\xi$,

$$0\leq G(x;\xi)=g(x;\xi)+E(|x-\xi|)<E(|x-\xi|).$$

其中$g=g(x;\xi)$是调和函数，边值为负。

根据弱极值原理，g在Ω上的最值必在边界$\partial\Omega$上取到，所以

$$g(x;\xi)<0.$$

另一方面，对于$x \neq \xi$, $G(x;\xi)$是x的调和函数，边值为零，且在$x = \xi$附近随$E(|x-\xi|)$一起趋于正无穷。

在Ω除去ξ的子区域中，应用弱极值原理于$G(x;\xi)$，可以看到

$$0 \leq G(x;\xi).$$

22.2、 强极值原理

边界点引理：S为一球形区域，

- $u \in C^2(S) \cap C^1(\bar{S}),\ Lu \leq 0,\ c = c(x)$有界非负。
- $x_0 \in \partial S,\ u(x_0) \geq 0$ 且对任意$x \in S,\ u(x_0) > u(x)$.

则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} > 0,$$

其中ν为与球面在x_0处的外法方向$\vec{\mathbf{n}}$夹角小于$\pi/2$的向量。

证明：根据引理假设，显然有

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \cos(\vec{\mathbf{n}}, \nu) \geq 0.$$

为了排除等号，考虑辅助函数

$$w = u - u(x_0) + \epsilon v.$$

其中ϵ是一正参数，$v = v(x)$待定。

若能说明w也在x_0处取(非负)极大值，则

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} - \epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu} \geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu} = -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \cos(\vec{\mathbf{n}}, \nu).$$

这样我们还需选取v使得$\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathbf{n}}} < 0$，即沿着径向严格递减。

设S的中心为原点，半径为r. 取

$$v = e^{-a|x|^2} - e^{-ar^2}.$$

这个v沿着径向严格递减, 在∂S上取0；

而在球壳（球面的附近，如$r/2 < |x| < r$）内，只要a充分大便有

$$Lv = [-4a^2|x|^2 + 2da + c(x)]e^{-a|x|^2} - c(x)e^{-ar^2} < 0$$

(这里用到x不能为零)。

从而在球壳上

$$Lw = Lu - c(x)u(x_0) + \epsilon Lv < 0.$$

由弱极值原理，w的非负最大值只能在球壳的边界上达到。

而在球壳的外侧边界上$w(x) = u(x) - u(x_0) \leq 0$且$w(x_0) = 0$;

在球壳的里侧边界上由假设，$u - u(x_0) \leq -\beta < 0$. 从而当$\epsilon$充分小时，$w$在里侧边界上取负值。

故在球壳上$w \leq 0$且在$x = x_0$取最大值。证毕。

定理22.3(强极值原理)：Ω有界连通，$c = c(x) \geq 0$有界，$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$在$\Omega$内满足$Lu \leq 0$. 若$u$在$\Omega$ 内达到非负最大值，则u是常数。

证明：由于u的连续性，集合

$$E := \{x \in \Omega : u(x) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u \geq 0\}$$

相对于Ω是闭的。

若能说明E相对于Ω也是开的，则由连通性$E = \Omega$ （常数）或是空的。

（证开的）设$x_0 \in E$, 则存在$r > 0$ 使得

$$x_0 \in B_{2r}(x_0) \subset \Omega.$$

若x_0不是E的内点，则有

$$\bar{x} \in (\Omega - E) \cap B_r(x_0).$$

设

$$\rho = dist(\bar{E}, \bar{x}) \leq |x_0 - \bar{x}| < r.$$

则$B_\rho(\bar{x}) \subset B_{2r}(x_0) \subset \Omega$，这是由于（$y \in B_\rho(\bar{x})$）

$$|y - x_0| \leq |y - \bar{x}| + |\bar{x} - x_0| < 2r.$$

取

$$y \in \partial B_\rho(\bar{x}) \cap E \subset E,$$

那么$\nabla u(y) = 0.$

另一方面，在边界点引理中，取$S = B_\rho(\bar{x})$，那么u在y处的外方向导数应该是正的。这与边界点引理矛盾。证毕。

22.3、 最大模估计

定理22.4：设$\Omega \subset R^d$有界开，$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$解Poisson方程的第一边值（Dirichlet）问题

$$-\Delta u = f(x), \qquad x \in \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = \phi(x).$$

则存在常数$C = C(d, \Omega)$使得

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\phi(x)| + C \max_{\bar{\Omega}} |f(x)| \equiv \Phi + CF.$$

这个估计可通过Poisson（Green函数）公式直接给出得到!

证: 不妨设$0 \in \Omega$. 定义

$$w = z \pm u,$$

其中

$$z = \frac{F}{2d}(\rho^2 - |x|^2) + \Phi,$$

而$\rho = \max_{x,y \in \Omega} |x - y|$. 那么

$$w|_{\partial\Omega} \geq \Phi \pm \phi \geq 0, \qquad -\Delta w = F \pm f \geq 0.$$

由弱极值原理, $w \geq 0$....证毕。

定理22.5： $c=c(x)\geq 0$有界, $\alpha(x)\geq\alpha_0>0, u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$解第三边值问题

$$-\Delta u+c(x)u=f(x),\qquad x\in\Omega,$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}+\alpha(x)u\right]\Big|_{\partial\Omega}=\phi(x).$$

则存在常数$C=C(d,\Omega,\alpha_0)$使得

$$\max_{\bar{\Omega}}|u(x)|\leq C(\Phi+F).$$

证: 不妨设$0 \in \Omega$. 定义

$$w = z \pm u,$$

其中

$$z = \frac{F}{2d}\left(\frac{1+\rho^2}{\alpha_0} + \rho^2 - |x|^2\right) + \frac{\Phi}{\alpha_0}$$

(把所有上界加起来)。那么

$$\begin{aligned} -\Delta w + c(x) w = & \quad -\Delta z + c(x) z \pm f \\ \geq & \quad F \pm f \geq 0 \end{aligned}$$

由弱极值原理，w的负最小值必在$\partial\Omega$ 达到。

设在$x_0 \in \partial\Omega$达到，那么

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}|_{x=x_0} \leq 0.$$

另一方面，计算

$$\begin{aligned}\left[\tfrac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)z\right]\Big|_{\partial\Omega} \geq & \quad \tfrac{F}{2d}(-2\mathbf{n}x + \alpha(x)\tfrac{1+\rho^2}{\alpha_0}) + \alpha(x)\tfrac{\Phi}{\alpha_0} \\ \geq & \quad \Phi,\end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
0 > \quad & [\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)w]|_{x=x_0} \\
= \quad & \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)z \pm \phi \\
\geq \quad & \Phi \pm \phi \geq 0.
\end{aligned}
$$

矛盾！ $w \geq 0$....证毕。

定理22.4、22.5说明了前述几种边值问题解的唯一性及对右端项、对边值在最大模意义下的连续依赖性。

对唯一性，定理22.5的假设可以减弱。

命题（唯一性）：设$\Omega \subset \mathbf{R}^d$有界开, $c = c(x) \geq 0$有界, $\alpha(x) \geq 0$.

若c在α消失的（边界）点取正值且连续，且在该点可做与边界相切并完全含在Ω内的一个小球。那么

$$\begin{aligned} -\Delta u + c(x)u = &\quad f, \\ [\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u]_{x\in\partial\Omega} = &\quad \psi(x) \end{aligned}$$

最多只有一个$C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 解。

证明. 反证，设有两个解u_1和u_2. 记$v = u_2 - u_1$，那么$v \neq 0$并且

$$-\Delta v + c(x)v = 0, \qquad [\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)v]_{x\in\partial\Omega} = 0.$$

不妨设有$x \in \bar{\Omega}$使得

$$v(x) > 0.$$

由弱极值原理，v的正最大值在$\partial\Omega$上达到，记最大值在$x_0 \in \partial\Omega$达到。

这样，

$$0 \leq \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}|_{x=x_0}.$$

若$\alpha(x_0) > 0$, 那么

$$0 < \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}|_{x=x_0} + \alpha(x_0)v(x_0)$$

与边界条件矛盾。

若$\alpha(x_0) = 0$, 那么$c(x_0) > 0$.

由$c = c(x)$在x_0的连续性，$c = c(x)$在x_0的一个邻域内为正，特别在以x_0为切点的小球内为正。容易看见（?)，在这个小球内v的值小于正最大值$v(x_0)$。

由边界点引理，$0 < \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}|_{x=x_0}$, 也与边界条件矛盾。从而$v \le 0$.

类似可证$v \ge 0$. 故$v(x) \equiv 0$.

22.4、 能量模估计

设$\Omega \subset R^d$开。考虑Dirichlet问题

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + c(x)u = & \quad f(x), \qquad x \in \Omega, \\
u|_{\partial\Omega} = & \quad 0.
\end{aligned}
$$

定理22.6：$\partial\Omega$适当光滑（Gauss 积分公式的条件），$c(x) \geq c_0 > 0$，$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$是上述问题的解，则$u$满足

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{c_0}{2} \int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2c_0} \int_\Omega |f(x)|^2 dx.$$

证明：方程两边同乘以u，在Ω上积分得

$$-\int_\Omega u\Delta u dx + \int_\Omega c(x)u^2 dx = \int_\Omega f u dx.$$

对此式左端第一项用Green第一公式得

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + c_0\int_\Omega u^2 dx \le \frac{c_0}{2}\int_\Omega u^2 dx + \frac{1}{2c_0}\int_\Omega f^2 dx.$$

整理即得。证毕。

- $c(x) \geq c_0 > 0$可以用$c(x) \geq 0$代替（Friedrichs或称Poincare不等式)。

- 由这个定理也可以推出唯一性, 稳定性

对第二（Neumann)、第三（Robin）边值问题

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + c(x)u = & \quad f(x), \qquad x \in \Omega, \\
\left[\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} + \alpha(x)u\right]_{\partial\Omega} = & \quad 0,
\end{aligned}
$$

其中$\alpha(x) \geq 0$, 有类似的结论（pp. 192, 定理2.8)。

作业: pp.212-220, 4, 3, 1, 2, 5