偏微分方程

第27讲

雍稳安

清华大学数学科学系

12. Juni 2024

第27讲、复习二

一、热传导方程

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x,t)$$

1.1、分离变量法：

0、边界条件齐次化

1、设$u(x,t) = X(x)T(t)$，解$X = X(x)$所满足的Sturm-Liouville问题(同前)

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0$$

（第一边值问题），得到可列无限多个特征值$\lambda_n \geq 0$和特征函数系。

2、根据特征函数系(完备正交，Fourier）展开右端f、初值ϕ及其u，它们分别的展开系数是$f_n(t), \phi_n, T_n(t)$，满足

$$T_n' + \lambda T_n = f_n(t), \qquad T_n(0) = \phi_n$$

得到

$$T_n(t) = \phi_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n (t-\tau)} d\tau.$$

3、得到级数形式的解

4、级数的收敛性（指数衰减，对$t \geq \delta > 0$一致收敛，得到C^∞解，初值只需有界或平方可积，可以不连续）

推广：不限于标准的热传导方程（如圆形区域的热传导方程，有一阶导数项），自共扼算子的Sturm-Liouville定理

不限于二元函数的方程

1.2、能量估计（没有特征锥）:

用u乘方程，分部积分，处理边界项

$$\int_0^T uu_x dt,$$

得到

$$\sup_{0\leq\tau\leq t}\int u^2(x,t)dx+\int|\nabla u|^2 dxdt$$

的估计。

用u_t乘方程，得到

$$\sup_{0\leq\tau\leq t}\int u_x^2(x,t)dx+\int u_t^2 dxdt$$

的估计。

1.3、弱极值原理：

$\Omega \subset \mathbf{R}^d$开，在

$$(x,t) \in \Omega \times (0,T] = Q_T$$

上考虑

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(\cdots)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_j(\cdots)\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

其中

$$[a_{ij}(\cdots)] = [a_{ji}(\cdots)] \geq 0.$$

特别地，线性微分算子

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

弱极值原理：若$u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$满足$Lu \leq 0$, 则$u$的最大值在$Q_T$的抛物边界（底面和侧面，不包括上底）上取到。

反证：$Lu < 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|_{(x_0,t_0)} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x_0,t_0)} \geq 0, \qquad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right]\Big|_{(x_0,t_0)} \leq 0.$$

矛盾, 不能在内部！ $Lu \leq 0$，辅助函数

$$v = u - \epsilon t,$$

$Lv < 0$.

$$\begin{aligned}\max_{\bar{Q}_T} u(x,t) &= \max_{\bar{Q}_T}[v(x,t) + \epsilon t] \leq \max_{\bar{Q}_T} v(x,t) + \epsilon T \\ &= \max_{\partial_p Q_T} v(x,t) + \epsilon T \leq \max_{\partial_p Q_T} u(x,t) + \epsilon T.\end{aligned}$$

弱：不排除最值在内部取到。

类似地，$Lu \geq 0$，最小值在抛物边界上取到。

$Lu = 0$，最大最小值都在抛物边界上取到。

比较原理（线性方程？）：$Lu \leq Lv$. 且在边界上$u \leq v$，则在内部$u \leq v$.

(椭圆情形)

$$Lu := -\Delta u + c(x)u, \qquad x \in \Omega \subset R^d,$$

其中$\Omega \subset R^d$是有界开集,

$$c(x) \geq 0.$$

也可以考虑更一般的二阶算子:

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(\cdots)u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j(\cdots)u_{x_j} + c(\cdots)u,$$

其中矩阵$[a_{ij}(\cdots)]$是半正定的,$c(\cdots) \geq 0$.

引理:设$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$在$\Omega$内满足$Lu < 0$, 则$u$不能在$\Omega$内达到其在$\Omega$上的非负最大值。

弱极值原理：$c=c(x)$有界, Ω有界，$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$在$\Omega$内满足$Lu\leq 0$,则$u$在$\Omega$ 上的非负最大值必在$\partial\Omega$上达到。

证明：辅助函数

$$w=u+\epsilon e^{ax_1},$$

常数a充分大时$Lw<0$（由于$c(x)$有界）。

那么

$$\sup_{x\in\bar{\Omega}}u(x)\leq\sup_{x\in\bar{\Omega}}w(x)\leq\sup_{x\in\partial\Omega}\{0,w(x)\}\leq\sup_{x\in\partial\Omega}\{0,u(x)\}+\epsilon\sup_{x\in\partial\Omega}e^{ax_1}.$$

抛物情形，无需非负，无需有界!

$c(x)\equiv 0$, 非负要求可以不要。

1.4、最大模估计：

第一边值问题

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f,$$

$$u|_{\partial_p Q_T} = g(x,t).$$

解$u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$满足

$$|u(x,t)| \leq T\sup|f| + \sup|g|.$$

用弱极值原理，考虑Lu，引入辅助函数

$$w(x,t) = Ft + B \pm u(x,t).$$

同时控制（兼顾）两个边界和右端，每项为正，±号。

第二、三边值问题(一维)

$$Lu = u_t - a^2 u_{xx} = f, \qquad u|_{t=0} = \phi(x),$$

$$\left[-\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(t)u\right]\Big|_{x=0} = g_1(t), \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(t)u\right]\Big|_{x=l} = g_2(t).$$

解$u \in C^{1,0}(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$满足

$$|u(x,t)| \leq C(a,l,T)(\sup|f| + \max\{\sup|\phi|, \sup|g_1|, \sup|g_2|\}).$$

引入辅助函数

$$w(x,t) = Ft + Bz(x,t) \pm u(x,t),$$

其中

$$z = 1 + \frac{1}{l}\left[2a^2t + \left(x - \frac{l}{2}\right)^2\right] \geq 1$$

满足

$$Lz = 0, \qquad \left[-\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha(t)z\right]\Big|_{x=0} \geq 1, \qquad \left[\frac{\partial z}{\partial x} + \beta(t)z\right]\Big|_{x=l} \geq 1.$$

那么

$$Lw \geq 0, \qquad w|_{t=0} \geq 0,$$

$$\left[-\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha(t)w\right]\Big|_{x=0} \geq 0, \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \beta(t)w\right]\Big|_{x=l} \geq 0.$$

引理：若$f,\phi,g_1,g_2\geq 0$, 则$u\geq 0$ （类似于弱极值原理）.

证明：$Lu=f\geq 0$, 最小值在抛物边界上取到。反证，负最小值在侧边取到。

严格不等号，与边界条件矛盾。

辅助函数：

$$v=u+\epsilon(z-1).$$

初值问题(一维)：

取有界区间$[-L, L]$，其上最大值$K = K(L)$依赖于区间，构造辅助函数

$$w = Ft + B + K(x^2 + 2a^2t)/L^2 \pm u,$$

兼顾了初值、右端以及边值。

初值问题的唯一性估计：

设$u \in C^{2,1}(R^d \times (0,T]) \cap C(R^d \times [0,T])$ 满足

$$u_t - \Delta u = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x),$$

和

$$u(x,t) \le M e^{N|x|^2}.$$

则

$$\sup_{R^d \times [0,T]} u(x,t) = \sup_{R^d} u_0(x)$$

在构造辅助函数时，除了$x^2 + 2a^2 t$, 也可以使用解析解

$$K(x,t) = t^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \qquad w(x,t) = K(x-y, t-T-\epsilon).$$

证明：辅助函数：固定$y \in R^d, \mu > 0$, 定义

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{d/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}\right).$$

对任意$r > 0$，有

$$\max_{\bar{B}(y,r)\times[0,T]} v(x,t) = \max_{\partial B(y,r)\times[0,T)} v(x,t).$$

看看$\max_{\partial B(y,r)\times[0,T)} v(x,t)$. $t = 0$时$v(x,0) \le u_0(x)$;

$|x-y| = r$时，对T充分小，有$\gamma > 0$使得

$$\frac{1}{4(T+\epsilon)} = N + \gamma.$$

那么当r充分大时，

$$
\begin{aligned}
v(x,t) = \quad & u(x,t) - \tfrac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{d/2}} \exp\left(\tfrac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}\right) \\
\leq \quad & Me^{N|x|^2} - \tfrac{\mu}{(T+\epsilon)^{d/2}} \exp\left(\tfrac{r^2}{4(T+\epsilon)}\right) \\
\leq \quad & Me^{N(r+|y|)^2} - \tfrac{\mu}{(T+\epsilon)^{d/2}} \exp\left((N+\gamma)r^2\right) \\
\leq \quad & \sup\nolimits_{R^d} u_0(x)
\end{aligned}
$$

结果

$$
u(y,t) - \frac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{d/2}} = v(y,t) \leq \sup_{R^d} u_0(x)
$$

让μ趋于零，得到想要的结论。

1.5、Fourier变换

绝对可积函数$f=f(x)$的Fourier变换

$$F[f]=\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

有界连续函数（Lebesgue 控制收敛定理)!

8个基本性质：线性，对称$\hat{f}(-\xi)=F[f(-\cdot)](\xi)$，张量积，

平移$F[f(\cdot-a)](\xi)=e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)$，

伸缩$F[f(\lambda\cdot)](\xi)=|\lambda|^{-d}\hat{f}(\xi/\lambda)$，

卷积$F[f*g]=(\sqrt{2\pi})^d\hat{f}\hat{g}$（Fubini 定理)，

$$(\sqrt{2\pi})^d F[fg]=F[f]*F[g].$$

速降函数函数空间

$$\mathscr{S}(\mathbf{R}^d) := \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^d) : \forall \alpha, \beta, \lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = 0\}.$$

$$e^{-|x|^2} \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d).$$

速降函数是绝对可积的。

(7). 乘多项式

$$\partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi) = (-i)^{|\beta|} F[x^\beta f(x)].$$

(8). 导函数

$$\xi^\alpha \hat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} F[\partial_x^\alpha f(x)].$$

速降函数空间是Fourier变换的不变子空间。不动点$e^{-|x|^2/2}$.

反演定理: 若$f, \hat{f} \in L(\mathbf{R}^d)$, 那么

$$f(x) = f_0(x) \equiv \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

几乎处处成立。

设$f, g \in L(\mathbf{R}^d)$. 由Fubini定理,

$$\int_{\mathbf{R}^d} g(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbf{R}^d} f(x) \hat{g}(x) dx.$$

Parseval公式(内积，速降函数) :

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}).$$

特别,

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

平方可积函数$f \in L^2(\mathbf{R}^d)$的Fourier变换: 存在$f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d) \subset \mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$使得

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^2} = 0,$$

$$F[f] = \lim_{n\to\infty} F[f_n].$$

逆变换:

$$F^{-1}[f] = F[f(-\cdot)] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi$$

1.6、初值问题的Fourier变换解法;

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u &= f(x,t), \qquad x \in \mathbf{R}^d, \quad t > 0, \\
u(x,0) &= \phi(x).
\end{aligned}
$$

在方程两边关于空间变量x做Fourier变换，得

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{u}}{dt} + a^2|\xi|^2\hat{u} &= \hat{f}(\xi,t), \qquad \xi \in \mathbf{R}^d, \quad t > 0, \\
\hat{u}(\xi,0) &= \hat{\phi}(\xi).
\end{aligned}
$$

解这个常微分方程，得

$$
\hat{u}(\xi,t) = e^{-a^2|\xi|^2 t}\hat{\phi}(\xi) + \int_0^t e^{-a^2|\xi|^2(t-\tau)}\hat{f}(\xi,\tau)d\tau.
$$

对这个表达式两边求反演，得

$$u(x,t) = F^{-1}[e^{-a^2|\xi|^2 t}\hat{\phi}(\xi)] + \int_0^t F^{-1}[e^{-a^2|\xi|^2(t-\tau)}\hat{f}(\xi,\tau)]d\tau.$$

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}^d} K(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} K(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^d} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Poisson公式, 形式解

验证（$f=0$, 初值有界连续）

满足方程（光滑性，无限传播速度）:

$$K_t - a^2\Delta K = 0.$$

从而当$t>0$时，$K=K(x,t)$ 是x 速降函数。$u(x,t)$无穷次连续可微，且可在积分号下关于x,t求任意阶微商

满足初值:

$$x_0 \in \mathbf{R}^d, \lim_{x\to x_0, t\to 0+} u(x,t) = \phi(x_0)$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-|\eta|^2} d\eta = 1$$

$$u(x,t)-\phi(x_0) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-|\eta|^2}[\phi(x+2a\sqrt{t}\eta)-\phi(x_0)]d\eta$$

$$u(x,t)-\phi(x_0)=\frac{1}{(\sqrt{\pi})^d}\left[\int_{|\eta|>R}+\int_{|\eta|\le R}\right].$$

初值的有界性假设可以放松为

$$|\phi(x)|\le Me^{N|x|^2}.$$

Poisson公式的积分在

$$t<\frac{1}{4a^2N}$$

时收敛。

1.7、半无界问题的延拓法；

类似于波动方程：一维问题，齐次边值，奇、偶奇延拓（第一、第二边值问题)。

$t > 0$ 时，解是光滑的，齐次边界条件自然得到满足。和波动方程不同

第三边值问题：待定初值, 利用Poisson公式

1.8、广义函数；

基本函数空间$C_0^\infty(\Omega), \mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$，收敛（拓扑）；Friedrichs光滑子

广义函数；基本函数空间上的连续线性泛函。

任一局部可积函数都是广义函数（与基本函数乘积的积分），

δ函数是个广义函数（但不是局部可积函数），

对偶积$<, >$，取值（开集Ω内取0值，指的是其作用在$C_0^\infty(\Omega)$ 函数上恒为零，相等），支集（取零值的最大开集的余集）

运算（线性，极限，导数，平移，乘子，Fourier变换）：

(1) 线性：广义函数空间（两个广义函数的乘积一般没有意义，卷积，张量积...）

(2) 极限（弱*收敛）：

$$\lim_{n\to\infty} < T_n, \phi > = < T, \phi >$$

有很多例子：矩形脉冲、Poisson核（参数t）收敛到δ函数，

$$\lim_{A\to\infty} \frac{\sin Ax}{x} = \pi\delta(x).$$

(3) 求导数：

$$< \partial^\alpha T, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \phi >$$

Heaviside函数的广义导数是δ函数

所有广义函数都可导，并且有任意阶高阶导数，高阶导数可以任意交换次序

若一列（族）广义函数列收敛到广义函数T，则它们的任意阶导数收敛到T的相应导数

(4) 平移：

$$< T(\cdot - \xi), \phi >=< T, \phi(\cdot + \xi) > .$$

(5) 乘子： $h = h(x) \in C^{\infty}(\mathbf{R}^d)$,

$$< hT, \phi > = < T, h\phi >, \qquad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^d),$$

(6) Fourier变换:

$$< \hat{T}, f > = < T, \hat{f} > .$$

$$< F^{-1}[T], \phi > = < T, F^{-1}[\phi] > .$$

$$\hat{\delta} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}.$$

Fourier变换建立了一个到自身的同构对应。

$$F^{-1}[F[T]] = T \in \mathscr{S}'.$$

$$F[\partial^\alpha T] = i^{|\alpha|}\xi^\alpha F[T], \quad F[(-i)^{|\alpha|}x^\alpha T] = \partial^\alpha F[T].$$

（有条件成立）卷积的Fourier变换是Fourier变换的乘积，乘积的Fourier变换是Fourier变换的卷积。

1.9、基本解:

给定m阶线性常系数微分算子$P(\partial)=\sum_{|\alpha|\leq m} h_\alpha \partial^\alpha$, 若广义函数

$$K\in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^d)$$

满足

$$P(\partial)K=\delta$$

则称K为偏微分方程$P(\partial)u=f$ 的基本解（广义函数)。

例:

$$K(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^d}e^{-|x|^2/(4a^2t)}, & t>0, \\ 0, & t\leq 0. \end{cases}$$

是热传导方程的基本解，在$\mathbf{R}^{d+1}$上是局部可积的，满足

$$K_t - a^2 \Delta K = \delta(x,t).$$

需要验证$t > 0, \phi = \phi(x,t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{d+1})$时，

$$\phi(0,0) = < \delta, \phi > = < [\partial_t - a^2 \Delta] K, \phi >$$

$$= - < K, [\partial_t + a^2 \Delta]\phi > = - \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^d} K[\partial_t + a^2 \Delta]\phi dx dt$$
$$= - \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^\infty \int_{\mathbf{R}^d} K[\partial_t + a^2 \Delta]\phi dx dt$$
$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbf{R}^d} K(x,\epsilon)\phi(x,\epsilon) dx.$$

位势（Poisson）方程的基本解$E \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^d)$：

$$-\Delta E = \delta(x).$$

$$E(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi} \ln|x|, & d = 2, \\ \frac{1}{(d-2)\omega_d} \frac{1}{|x|^{d-2}}, & d \geq 3. \end{cases}$$

（ω_d球面面积）。

二维可从定义直接导出（径向，极坐标, 涉及到Δ的极坐标形式；比较麻烦！）

三维可通过Fourier变换导出（类似于三维波动方程的基本解）

一般情形：找满足位势方程径向函数形式的解，得到一ODE

演化方程：基本解可以理解为始于δ函数的广义函数流$C(0,\infty;\mathscr{S}'(\mathbf{R}^d))$.

结合齐次化原理，可得到方程的解。

例：

$$K(x,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^d}e^{-|x|^2/(4a^2t)},\qquad t>0$$

（没有0延拓到$t\le 0!$）可以看作热传导方程初值问题

$$u_t-a^2\Delta u=0,\qquad u(x,0)=\delta(x)$$

的基本解。(可以通过Fourier变换很简单地得到)

三维波动方程的基本解(上次)

二、Poisson 方程:

2.1、Green公式:

第一公式

$$\int_{\Omega} u\Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathbf{n}}} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

与唯一性（三种边值问题，能量估计)。

第二公式

$$\int_{\Omega} [u\Delta v - v\Delta u] dx = \int_{\partial\Omega} \left[u\frac{\partial v}{\partial \vec{\mathbf{n}}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \right] dS.$$

推论：Poisson方程第二边值问题

$$-\Delta u = f, \qquad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \phi,$$

有解的必要条件是

$$\int_\Omega f dx + \int_{\partial\Omega} \phi dS = 0.$$

定理: $\xi \in \Omega$（有界光滑），任何$u = u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$可表示成

$$u(\xi) = -\int_\Omega E(\xi - x)\Delta u(x)dx + \int_{\partial\Omega} \left[E(\xi - x)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}}(\xi - x)\right] dS.$$

证明要点：$E=E(x)$有奇性但局部可积（$E=E(x)$的奇性不是太差），所以

$$-\int_{\Omega} E(\xi-x)\Delta u(x)dx = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|\xi-x|\geq\epsilon} E(\xi-x)\Delta u(x)dx.$$

对上式右端的积分用第二公式，取$v(x)=E(\xi-x)$. 注意$\Delta v=0$, 结果上式等于两个边界积分：$\partial\Omega$和$|\xi-x|=\epsilon$. $\partial\Omega$上的积分就是想要的。对于$|\xi-x|=\epsilon$上的积分，利用$E=E(x)$及其法向导数的奇性阶，不难说明趋于$u(\xi)$。

推论(Poisson公式)：$u=u(x)$在$|x-\xi|<a$内调和，则

$$u(\xi)=\frac{1}{a^{d-1}\omega_d}\int_{|x-\xi|=a} u(x)dS_x.$$

命题：设$f = f(x) \in C_0^2(\mathbf{R}^d)$. 那么

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^d} E(x-y)f(y)dy \in C^2(\mathbf{R}^d)$$

是Poisson方程

$$-\Delta u = f, \qquad x \in \mathbf{R}^d,$$

解。

证明要点：求导求到f上去。然后把积分区域分解：含奇点与不含奇点。含奇点区域的积分趋于0 (同上)。

不含奇点部分用两次第一公式，注意$\Delta E = 0, E = E(x)$的法向导数有适当阶的奇性。

2.2、Green函数：对$\xi \in \Omega$，设$g = g(x;\xi)$光滑、满足

$$\Delta g = 0, \qquad g|_{x\in\partial\Omega} = -E(\xi - x)|_{x\in\partial\Omega}.$$

称

$$G = G(x;\xi) = g(x;\xi) + E(\xi - x)$$

为位势方程（第一边值问题）的Green函数。

如同前述定理，u可表示为

$$u(\xi) = -\int G(x;\xi)\Delta u dx - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x;\xi)dS_x.$$

Green函数的性质:

奇性和$E(\xi - x)$一样, 非负性, 对称性$G(x;\xi) = G(\xi;x)$, 外法向导数在边界上非负且积分为-1.

特殊区域的Green函数可显式求得:

球形区域，半空间，上半球，二维连通区域可通过保角变换

解的验证（球形区域，半空间），满足（第一）边界条件

2.3、估计

(1) 边界点引理: 设$S \subset \mathbf{R}^d$表示一球形区域,

- $u \in C^2(S) \cap C^1(\bar{S})$, $Lu \equiv -\Delta u + c(x)u \le 0$, $c = c(x) \ge 0$非负有界;
- $x_0 \in \partial S, u(x_0) \ge 0$, 且对任意$x \in S$，$u(x_0) > u(x)$.

则

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{x_0} > 0,$$

其中ν为任一与S在x_0处的外法方向夹角小于$\pi/2$的向量。

（球形区域，径向辅助函数，球壳）

（2）强极值原理

定理25.1（强极值原理）：$\Omega \subset \mathbf{R}^d$有界连通开，
在Ω内$u = u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$满足$Lu \equiv -\Delta u + c(x)u \leq 0$，
$c = c(x)$非负有界。

若$u = u(x)$在Ω内达到非负最大值，则$u = u(x)$为常数。

（连通区域，整体分析+用边界点引理；对调和函数，也可用平均值性质？)

（3）Poisson方程第一边值问题的最大模估计（可由Poisson公式直接给出）:

定理25.2：设$\Omega \subset R^d$有界开，$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$解

$$-\Delta u = f(x), \qquad x \in \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = \phi(x).$$

则存在常数$C = C(d, \Omega)$使得

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\phi(x)| + C \max_{\bar{\Omega}} |f(x)|.$$

（4）第三边值问题的最大模估计

定理25.3：$c = c(x) \geq 0$有界, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0, u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$解

$$-\Delta u + c(x)u = f(x), \qquad x \in \Omega, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u\right]\Big|_{\partial\Omega} = \phi(x).$$

则存在常数$C = C(d, \Omega, \alpha_0)$使得

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq C(\Phi + F).$$

(5) 能量模估计（对区域边界有一定的光滑性要求，边界条件齐次）

设$\Omega \subset R^d$开。考虑Dirichlet问题

$$\begin{aligned} -\Delta u + c(x)u = & \quad f(x), \qquad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = & \quad 0. \end{aligned}$$

定理26.1：$\partial\Omega$适当光滑（Gauss积分公式的条件），$c(x) \geq c_0 > 0$，$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$是上述问题的解，则$u$满足

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{c_0}{2} \int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2c_0} \int_\Omega |f(x)|^2 dx.$$

2.4、调和函数

定义：$\Omega \subset R^d$开, $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$, 则称$u = u(x)$是Ω内的调和函数。

定理26.2（定理2.10，习题24）：若u在Ω内调和，则$\forall r \in (0, R]$有

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{|y-x|=r} u(y) dS_y = \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{|y-x|\leq r} u(y) dy.$$

反之，若$h(x, r)$与$r \in (0, R]$无关，则$\Delta u(x) = 0$.

作为平均值刻画的简单应用，我们来证明调和函数的Harnack不等式和C^∞光滑性。

Harnack不等式：对于Ω的任意连通子集$V \subset\subset \Omega$，存在只与V有关的正常数C使得Ω内的任一非负调和函数$u = u(x)$ 满足

$$\max_{x\in V} u(x) \leq C \min_{x\in V} u(x).$$

定理26.3（C^∞光滑性）：若u在Ω内调和，则$u \in C^\infty(\Omega)$.

（只在Ω内部！）

定理26.4（定理2.11，Liouville）：若u在R^d内调和且有界，则u是常数。

Poisson公式

$$u(\xi) = \frac{a^2 - |\xi|^2}{a\omega_d} \int_{|x|=a} \frac{u(x)}{|x-\xi|^d} dS_x.$$

其中$|\xi| < a$. 类似于复分析中的Cauchy积分公式。当ξ为球心时，再现平均值性质。

解析性: 展开被积函数（分母），一致收敛。

2.5、$H^1(\Omega)$；

$C_0^\infty(\Omega)$在$L^2(\Omega)$中稠密(用到Lebesgue点引理)

定义：$H^1(\Omega)$表示$L^2(\Omega)$中具有所有一阶强广义微商的函数集，
对$u, v \in L^2(\Omega)$引入内积

$$(u, v) = \int_\Omega uv dx + \sum_{j=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

成为一Hilbert空间，称之为Sobolev空间$H^1(\Omega)$。

2.6、变分方法

- 位势方程零边值问题弱解：用变分形式，泛函定义在Sobolev空间$H_0^1(\Omega)$上；Euler方程的积分形式。

- 经典解是弱解（density argument）

- Friedrichs不等式：

$$u \in H_0^1(\Omega): \|u\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)};$$

  从C_0^1函数出发，利用0边值，把函数在一点的值用其导数的积分表示，得到不等式，density argument

  可以是某种无界区域；等价范数$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

- 弱解是唯一的(证法不同于之前的)：平行四边形等式

- 弱解的存在性：有下界，下确界，完备性

- 嵌入不等式：

$$u \in H_0^1(a,b), \quad \exists \bar{u} \in C_0(a,b), \quad s.t. \quad u(x) = \bar{u}(x) \quad a.e.,$$

$$\max_{x\in(a,b)} |\bar{u}(x)| \leq \sqrt{2}\|u\|_1.$$

density argument，完备性