作业2:

1. (习题31) 令 $v=x+u$. 则方程化为

$$\begin{cases} v_t = \dfrac{1}{1-v} v_x & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ v(x,0)=\varphi(x) & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

沿特征线 Γ_a 过 x 轴上 $(a,0)$, 则沿 Γ_a 有:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1-a} \Rightarrow x = \frac{t}{1-a} + a$$

$$v\left(\frac{t}{1-a}+a, t\right) = v(a,0) = a$$

令 $\dfrac{t}{1-a} + a = x$, 则 $a = \dfrac{1+x \pm \sqrt{(1-x)^2+4t}}{2}$

$$v(x,t) = \frac{1+x \pm \sqrt{(1-x)^2+4t}}{2}$$

因 $v(x,0)=x$, 故取 $v(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1+x+\sqrt{(1-x)^2+4t}}{2} & x \geq 1 \\ \dfrac{1+x-\sqrt{(1-x)^2+4t}}{2} & x<1 \end{cases}$

3. 多维守恒律方程组

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} F_j(u)_{x_j} = 0$$

的弱解定义为: 满足等式

$$\iint_{t\geq 0} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \phi(x,0)\,dx = 0$$

的 $u=u(x)$, 相应的HR跳跃条件:

$$[u]\cdot \nabla f(x) = [f(u)]$$

4. 当 $\lambda=0$， $u_\lambda(t,x)=\begin{cases}1 & x<\frac{t+1}{2}\\ 0 & x>\frac{t+1}{2}\end{cases}$

仅分为2片

此时 $f'(u_+)=u_+=0$， $f'(u^-)=u^-=1$

特征线上 $\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{2}$ ， $0<\frac{1}{2}<1$. 故符合 Lax 熵条件

当 $\lambda>0$. $u_\lambda(t,x)$ 分为4片 此时在特征线

$x=\frac{t+1}{2}$ 两侧

$f'(u_+)=1+\lambda$ $f'(u_-)=-\lambda$， $1+\lambda<-\lambda \Rightarrow \lambda<-\frac{1}{2}<0$. 矛盾.

此时不符合 Lax 熵条件