偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第5讲、一维波动方程初值问题的求解

这节的目标是求解一维波动方程的初值问题，我们从多维问题的齐次化原理开始。

5.1、齐次化原理

考虑d维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(t,x), & (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty)^d, \\ u|_{t=0} = \phi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in (-\infty,\infty)^d. \end{cases}$$

其中未知量是t和x的函数$u = u(t,x)$，a是个正常数。

受线性问题叠加原理的启发，这个问题的解$u = u(t, x)$可以分解为

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

其中u_1, u_2和u_3分别是下面三个问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \\ u|_{t=0} = \phi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(t, x), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

进一步，这三个问题的解有下列简单的（形式）关系，它特别说明非齐次方程初值问题的求解可以转化为齐次方程的求解。

齐次化原理（Duhamel原理）：记上述第二个问题的解为$u_2 = S_\psi$. 那么

$$u_1 \equiv \frac{dS_\phi}{dt}, \qquad u_3 \equiv \int_0^t S_{f(\tau,x)}(t-\tau,x)d\tau$$

分别是第一、第三个问题的解。

(形式地)证明: 根据其义, S_ϕ满足

$$(S_\phi)_{tt} - a^2 \Delta S_\phi = 0, \quad S_\phi|_{t=0} = 0, \quad u_1|_{t=0} \equiv (S_\phi)_t|_{t=0} = \phi(x).$$

从这里的第一、第二式可以看到

$$(u_1)_t|_{t=0} = (S_\phi)_{tt}|_{t=0} = a^2 \Delta S_\phi|_{t=0} = 0.$$

对第一个等式两端关于t求导得到

$$(u_1)_{tt} - a^2 \Delta u_1 = 0.$$

所以u_1是第一个问题的解。

关于u_3，它显然满足$u_3|_{t=0}=0$. 计算

$$(u_3)_t = S_{f(t,x)}(0,x)+\int_0^t (S_{f(\tau,x)})_t(t-\tau,x)d\tau = \int_0^t (S_{f(\tau,x)})_t(t-\tau,x)d\tau,$$

从而$(u_3)_t|_{t=0}=0$. 进一步，我们利用$S_{f(\tau,x)}$满足的方程计算

$$\begin{aligned}
(u_3)_{tt} &= (S_{f(t,x)})_t(0,x)+\int_0^t (S_{f(\tau,x)})_{tt}(t-\tau,x)d\tau \\
&= f(t,x)+a^2\int_0^t \Delta S_{f(\tau,x)}(t-\tau,x)d\tau \\
&= f(t,x)+a^2\Delta\int_0^t S_{f(\tau,x)}(t-\tau,x)d\tau \\
&= f(t,x)+a^2\Delta u_3.
\end{aligned}$$

故u_3是第三个问题的解。证毕。

注：类似于之前几类方程的导出，上述过程不是一个严格的证明。它涉及到求导，可并没有这样的可导性假设。这样的形式推导过程之后还会遇到，它不过分拘泥于运算的合法性，先假定所有运算是合法的（如积分号下求导数、积分号下取极限、交换积分次序等），由此得到问题的形式解。为了说明得到的形式解确实是解，还需要检验形式解的正则性（光滑性）。

上述齐次化原理也可以从物理上加以解释。回忆弦振动方程的导出过程，弦的位移$u = u(t,x)$满足动量守恒定律

$$\int_a^b \rho u_t(t_2,x)dx - \int_a^b \rho u_t(t_1,x)dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \frac{\partial(T_0 u_x)}{\partial x}dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \rho f dxdt.$$

注意最后一项近似地等于$(t_2 - t_1)\int_a^b \rho f(t_1,x)dx$. 把这项与上面等式左边的第二项合并，即视作时刻$t_1$的动量，而无外力项。

可见$u = u(t,x)$近似地满足齐次方程

$$\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x^2} = 0, \qquad t > t_1,$$

和时刻t_1的初始条件

$$t = t_1: \quad \tilde{W} = u(t_1, x), \quad \tilde{W}_t = u_t(t_1, x) + (t_2 - t_1) f(t_1, x).$$

即t_1之后的位移近似地等于该时刻初值（$u(t_1, x), u_t(t_1, x)$）导致的(无外力）位移与在时刻t_1施加新冲量$(t_2 - t_1) f(t_1, x)$ 所产生的位移之和（线性叠加)。

受此启发，我们可以把时间区间$[0, t]$刨分为$[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 其中$t_0 = 0$.

考虑强迫振动情形的初值问题（上述第三个问题）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \quad t > 0,$$

$$t = 0: \quad u = u_t = 0,$$

其中$a^2 = T_0/\rho$. 根据前述讨论，可以看见弦在时刻t的位移$u = u(t,x)$近似地等于

$$\sum_i W(t,x;t_i)(t_{i+1} - t_i),$$

其中$W = W(t,x;\tau)$解

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \qquad t > \tau,$$

$$t = \tau: \quad W = 0, \quad W_t = f(\tau, x).$$

用齐次化原理中的记号，这个问题的一个解显然可以写作

$$W(t, x; \tau) = S_{f(\tau,x)}(t - \tau, x).$$

这样，当$\max_i |t_{i+1} - t_i|$趋于零时，我们得到齐次化原理:

$$u(t, x) = \int_0^t W(t, x; \tau) d\tau = \int_0^t S_{f(\tau,x)}(t - \tau, x) d\tau.$$

上述推到中的近似合理性也可以这样来理解。设想用二胡演奏一首乐曲，在演奏过程中，绝大多数时间琴弦与弓毛没有分开（连续不断的接触着），也就是说，二胡的琴弦受到了外力无间隙的作用。

另一方面，同一首乐曲也可以用吉他演奏。此时，吉他的琴弦与指头（或拨片）的接触不是连续不断的，而是间隙性的。在相邻两次拨动之间，吉他琴弦没有受到外力的作用，其振动是由前一次的拨动而不是外力引起的。也就是说，在相邻两次拨动之间，吉他琴弦的振动不是由外力而是由前一次的瞬间拨动引起的。虽然音色不同，二胡和吉他演奏了同样的乐曲（曲调或旋律相同）。这说明了前述近似的合理性。

5.2、一维波动方程的初值问题

这节我们求解一维波动方程的初值问题

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty),$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \qquad x \in (-\infty,\infty),$$

其中定解数据$\phi = \phi(x), \psi = \psi(x)$和$f = f(t,x)$都是已知的。

由于线性叠加原理和齐次化原理，我们只需考虑齐次方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty),$$

和初始条件

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \qquad x \in (-\infty,\infty).$$

解法1：设$u=u(t,x)$解这个齐次方程。考虑自变量变换

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

那么

$$x = \frac{\xi+\eta}{2}, \quad t = \frac{\eta-\xi}{2a},$$

从而

$$x_\xi = x_\eta = \frac{1}{2}, \quad t_\eta = -t_\xi = \frac{1}{2a}.$$

令$v=v(\xi,\eta)=u(t,x)$. 计算

$$v_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}(u_x x_\xi + u_t t_\xi) = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{2}u_x - \frac{1}{2a}u_t\right) = \frac{1}{4a^2}(a^2 u_{xx} - u_{tt}) = 0.$$

这说明v关于ξ的导数与η无关（或者v关于η的导数与ξ无关），所以v的一般形式是

$$v = g(\xi) + h(\eta),$$

其中$g(\xi)$和$h(\eta)$是任意两个光滑函数，结果

$$u(t,x) = g(x-at) + h(x+at). \tag{4}$$

初值条件要求

$$g(x) + h(x) = 0, \qquad ah'(x) - ag'(x) = \psi(x).$$

所以

$$h(x) = -g(x) = \frac{1}{2a}\int^x \psi(s)ds.$$

代入(4)得到

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds.$$

上述推导过程也说明原问题的经典解是唯一的。事实上，若有两个经典解u_1和u_2，那么它们的差$u = u_1 - u_2$ 是二次连续可微的且满足齐次方程和齐次初始条件。根据上述推到，u一定具有(4)的形式从而恒等于零，故$u_1 = u_2$，即唯一性。后面将会看到，唯一性也能通过能量方法来证明。

解法2：u的上述表达式也可以通过算子分裂和特征线方法得到。

注意

$$0 = u_{tt} - a^2 u_{xx} = (\partial_t - a\partial_x)(\partial_t + a\partial_x)u.$$

令

$$v = (\partial_t + a\partial_x)u = u_t + au_x.$$

那么

$$v_t - av_x = 0, \qquad v(0, x) = \psi(x).$$

由一阶方程的特征线方法得到

$$v(t, x) = v(0, x + at) = \psi(x + at).$$

这样一来，u满足

$$u_t + au_x = v = \psi(x + at).$$

对这个一阶方程，沿着过时空点(X,T)的特征线$x = at + X - aT$, 我们有

$$\frac{du(t, X - aT + at)}{dt} = \psi(X - aT + 2at).$$

积分得到

$$u(t, X - aT + at) = \int_0^t \psi(X - aT + 2as)ds,$$

从而有

$$u(t,x) = \int_0^t \psi(x - at + 2as)ds = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi,$$

这个与自变量变换方法所得的结果相同。

根据线性叠加原理和齐次化原理，原来问题的解可以为

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = \quad & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\phi(\xi)d\xi\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \\
& + \int_0^t d\tau \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi \\
= \quad & \frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \\
& + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

当$f=0$时，解的这个表达式称为D’Alembert公式。

这个公式给出的解只是形式的，它未必是经典解（未必是二次连续可微的)。然而，下列结论显然成立。

定理（光滑性）:
若$\phi \in C^2(-\infty, \infty), \psi \in C^1(-\infty, \infty), f \in C^1((0, \infty) \times (-\infty, \infty))$,
则D’Alembert公式给出的是原问题的经典解（二次连续可微)。

该定理的一个直接推论是

推论：若$\phi, \psi, f \in C^1((0, \infty) \times (-\infty, \infty))$均是$x$的偶（奇，周期）函数，则由表达式给出的解关于$x$是偶（奇，周期）的。

证明：(只证偶性) 设

$$\phi(-x) = \phi(x), \psi(-x) = \psi(x), f(t, -x) = f(t, x).$$

根据D’Alembert公式，我们有

$$
\begin{aligned}
u(t,-x) = \quad & \tfrac{1}{2}[\phi(-x+at)+\phi(-x-at)] + \tfrac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(\xi)d\xi \\
& +\tfrac{1}{2a}\int_0^t\int_{-x-a(t-\tau)}^{-x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi d\tau \\
= \quad & \tfrac{1}{2}[\phi(x-at)+\phi(x+at)] + \tfrac{1}{2a}\int_{-x-at}^{-x+at}\psi(-\xi)d\xi \\
& +\tfrac{1}{2a}\int_0^t\int_{-x-a(t-\tau)}^{-x+a(t-\tau)} f(\tau,-\xi)d\xi d\tau \\
= \quad & \tfrac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)] - \tfrac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at}\psi(\xi)d\xi \\
& -\tfrac{1}{2a}\int_0^t\int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \\
&\quad +\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi d\tau \\
&= u(t,x).
\end{aligned}
$$

证毕。

作业：pp.27, 12; pp.100, 2, 4, 5