偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第8讲、高维波动方程的初值问题

本节导出三维波动方程初值问题

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), \qquad x \in \mathbf{R}^3,\ t > 0, \\ &\tilde{u}|_{t=0} = \phi(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \psi(x), \qquad x \in \mathbf{R}^3. \end{aligned} \tag{1}$$

的求解公式。为此我们先证明关于函数球面平均的下列性质。

8.1 球面平均引理

引理：设$h \in C^2(\mathbf{R}^3), x \in \mathbf{R}^3, r > 0$. 那么4元函数（$h$的球面平均）

$$I(x,r;h) = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega \in \mathbf{R}^3, |\omega|=1} h(x + r\omega) dS_\omega$$

满足

$$\lim_{r \to 0+} I(x,r;h) = h(x), \qquad \Delta_x(rI(x,r;h)) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rI(x,r;h)).$$

证明：极限是显然的。记$M(x,r) = rI(x,r;h)$. 在球坐标下，

$$\omega = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi),$$

$$M(x,r) = rI(x,r;h) = \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} h(x + r\omega) \sin\phi d\phi d\theta.$$

计算

$$\begin{aligned}
\partial_r^2 M(x,r) &= \frac{1}{4\pi}(2+r\partial_r)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\omega\cdot\nabla_x h)(x+r\omega)\sin\phi d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi r}\partial_r\left(r^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\omega\cdot\nabla_x h)(x+r\omega)\sin\phi d\phi d\theta\right) \\
&= \frac{1}{4\pi r}\partial_r\int_{\partial B(0,r)}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}}(x+y)dS_y.
\end{aligned}$$

这里$\partial B(0,r)$是半径为r中心在原点的球$B(0,r)\subset\mathbf{R}^3$的边界，其外法向是$\mathbf{n}$.

借助Gauss积分公式，我们有

$$
\begin{aligned}
\partial_r^2 M(x,r) &= \frac{1}{4\pi r}\partial_r \int_{B(0,r)} \Delta_y h(x+y)dy \\
&= \frac{1}{4\pi r}\int_{\partial B(0,r)} \Delta_x h(x+y)dS_y \\
&= \frac{r}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \Delta_x h(x+r\omega)dS_\omega = \Delta_x M(x,r).
\end{aligned}
$$

证毕。

8.2 Kirchhoff公式

上述引理可以帮助我们导出三维波动方程初值问题的求解公式。设$u = u(t,x)$是问题（1）的一个经典解，其中$f = \phi = 0$. 定义

$$M(x,r,t) = rI(x,r;u(\cdot,t)).$$

这个函数显然满足

$$\begin{aligned}
M(x,r,t)|_{r=0} = &\quad 0 \times u(t,x) = 0, \\
M(x,r,t)|_{t=0} = &\quad \lim_{t\to 0}[rI(x,r;u(t,\cdot))] = rI(x,r;u(0,\cdot)) = rI(x,r;0) = 0, \\
M_t(x,r,t)|_{t=0} = &\quad \lim_{t\to 0}[rI(x,r;u_t(t,\cdot))] = rI(x,r;\psi).
\end{aligned}$$

另一方面，根据球面平均引理和波动方程，有

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 M(x,r,t)}{\partial r^2} &= a^2 \Delta_x M(x,r,t) \\ &= \frac{a^2 r}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \Delta_x u(x+r\omega,t) dS_\omega \\ &= \frac{r}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u_{tt}(x+r\omega,t) dS_\omega \\ &= \frac{\partial^2 M(x,r,t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

即$M = rI(x,r;u(t,\cdot))$解一维半无界问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} &= 0, \qquad r > 0,\ t > 0, \\ M(x,r,t)|_{t=0} &= 0, \quad M_t(x,r,t)|_{t=0} = rI(x,r;\psi), \\ M(x,r,t)|_{r=0} &= 0, \end{aligned}$$

其中x是参数。

由前节一维半无界问题解的表达式（$r \le at$）

$$M(x,r,t) = \frac{1}{2a} \int_{at-r}^{r+at} sI(x,s;\psi)ds.$$

这样

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = &\quad \lim_{r\to 0} I(x,r,u(t,\cdot)) \\
= &\quad \lim_{r\to 0} \tfrac{M(x,r,t)}{r} \\
= &\quad \lim_{r\to 0} \tfrac{1}{2ar} \int_{at-r}^{r+at} sI(x,s;\psi)ds \\
= &\quad tI(x,at;\psi).
\end{aligned}
$$

结果

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = &\quad \tfrac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \psi(x+at\omega)dS_\omega \\
= &\quad \tfrac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} \psi(y)dS_y,
\end{aligned}
$$

其中积分区域是球面$S_{at}(x)=\{y\in\mathbf{R}^3:|y-x|=at\}$. 这是三维波动方程对应数据$f=\phi=0$的解。

根据齐次化原理，对于一般的数据，问题（1）的解为

$$
\begin{aligned}
u(t,x)= \quad & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}(x)}\phi(y)dS_y\right)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}(x)}\psi(y)dS_y \\
& +\int_0^t\left[\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\int_{S_{a(t-\tau)}(x)}f(\tau,y)dS_y\right]d\tau.
\end{aligned}
$$

这个称作Kirchhoff公式。

8.3 二维波动方程的初值问题

有了3维波动方程的求解公式，很容易导出2维问题

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f(x,t), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\ t > 0, \\
&u|_{t=0} = \phi(x_1, x_2), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,
\end{aligned} \tag{2}
$$

的求解公式。想法是把2维函数视作3维函数。

由于齐次化原理，先考虑$\phi(x_1, x_2) = 0$的情形。

设相应2维问题的解为$u = u(t, x_1, x_2)$. 那么

$$\tilde{u}(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, x_1, x_2)$$

显然满足

$$\tilde{u}_{tt} - a^2(\tilde{u}_{x_1x_1} + \tilde{u}_{x_2x_2} + \tilde{u}_{x_3x_3}) = f(x, t), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\ t > 0,$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = 0, \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

根据Kirchhoff公式,

$$u(t, x_1, x_2) = \tilde{u}(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} \psi(y_1, y_2) dS_y.$$

这里被积函数与y_3无关，因此球面积分可以简化为两重积分。注意积分区域$S_{at}(x)$可以视作定义于圆盘

$$\Sigma_{at}(x): \quad (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq a^2 t^2$$

上的两个半球面组成：

$$y_3 = x_3 \pm \sqrt{a^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}.$$

计算

$$\frac{\partial y_3}{\partial y_1} = \mp \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{a^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}},$$

$$
\begin{aligned}
dS_y &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2} dy_1 dy_2 \\
&= \frac{at}{\sqrt{a^2t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2.
\end{aligned}
$$

结果

$$
u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Sigma_{at}(x)} \frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{a^2t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2.
$$

根据齐次化原理，对于一般的数据，问题（2）的解为

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = \quad & \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\Sigma_{at}(x)} \frac{\phi(y)}{\sqrt{a^2t^2-|y-x|^2}}dy_1dy_2\right) \\
& + \frac{1}{2\pi a}\int_{\Sigma_{at}(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{a^2t^2-|y-x|^2}}dy_1dy_2 \\
& + \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \left[\int_{\Sigma_{a(t-\tau)}(x)} \frac{f(\tau,y)}{\sqrt{a^2t^2-|y-x|^2}}dy_1dy_2\right]d\tau.
\end{aligned}
$$

这个称作Poisson公式。

8.4　初值问题的三域

从Kirchhoff或Poisson公式，我们立即看到波动方程初值问题解在时空点$P_0=(t_0,x_0)$的值由初始数据和右端在特征锥（P_0为顶点）

$$K_{P_0}:=\{(t,x):|x-x_0|\le a(t_0-t),\quad t\in[0,t_0]\}$$

上（三维两维有区别!）的值唯一确定，与其它点的值无关。当右端$f=0$时，只依赖于初始数据在空间区域$B_{at_0}(x_0)$上的值。

物理上，膜上任意一点x_0在时刻t_0的位移只依赖于区域$B_{at_0}(x_0)$上的初始位移和初始速度以及特征锥K_{P_0}内外力f的值，而与它们在这些区域以外的值无关。

空间区域$B_{at_0}(x_0)$称为点$P_0=(t_0,x_0)$对初值的依赖区域（特征锥K_{P_0}与平面$t=0$的交集）。

（$f=0$, 空间区域D的）决定区域：依赖区域完全落在D中的时空点$P=(t,x)$ 组成的集合:

$$F_D := \{P=(t,x): t>0,\ B_{at}(P)\subset D\}.$$

（$f=0$, 空间区域D的）影响区域：D内的扰动在$t>0$ 时刻影响到的集合

$$J_D := \{P=(t,x): B_{at}(P)\cap D\neq\emptyset\}.$$

一个空间点x_0的影响区域：以这个点为顶点的开口向上的圆锥

$$J_{x_0}=\{P=(t,x): |x-x_0|\le at, t>0\}.$$

一个区域D的影响区域是以这个区域内每个点为顶点的开口向上的圆锥的并集。

有限传播速度a：离点x_0的距离超过at_0处的扰动在$t = t_0$时刻内传播（影响）不到该点。

两维波动与三维波动的定性区别（$f=0$）

对于三维问题，解在一时空点(t,x)（如$t=1, x=O$）的值只依赖于依赖区域的边界（球面）

$$S_{at}=\{y\in\mathbf{R}^3:|y-x|=at\}$$

上的初值，而与其内部的值无关。

对于二维问题，解在一时空点(t,x)的值依赖于整个依赖区域$B_{at}(x)$（实心圆盘）上的初值。

物理上，设想在初始时刻，初值及其速度只在空间闭区域D非零，P为D外一空间点（图）。记

$$d_{min} = \min_{Q \in D} |Q - P|,$$

$$d_{max} = \max_{Q \in D} |Q - P|.$$

设$t > 0$, 考虑$u(t, P)$:

- 当$t < d_{min}/a$时，D与(t, P)的依赖域$B_{at}(P)$不相交，所以$u(t, P) = 0$.

- 当$d_{min}/a < t < d_{max}/a$时，$D$与$(t, P)$的依赖域$B_{at}(P)$相交，所以$u(t, P) \neq 0$.

- 当$d_{max}/a < t$时，三维情况下D与(t, P)的依赖域$B_{at}(P)$不相交，所以$u(t, P) = 0$; 而在二维情况下D与(t, P) 的依赖域$B_{at}(P)$仍然相交，所以$u(t, P) \neq 0$.

3维波传播有清晰的波前和波后（无后效现象，可以清楚地听到对方的谈话）

2维波传播只有清晰的波前，没有波后。

作业：p. 100: 9, 18, 20, 21