偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第13讲、热传导方程的分离变量法

从现在开始，我们转向求解热传导方程

$$u_t - a^2 \Delta u = f(t, x)$$

的各种初边值问题。

13.1 一维混合问题

考虑长度为l, 侧表面绝热的均匀细杆，初始温度已知，细杆两端的温度保持为零（非齐次情形也可以同前处理)，则杆上的温度分布$u = u(t, x)$满足

$$\begin{aligned} u_t - a^2 u_{xx} &= f(t, x), && (t, x) \in (0, T) \times (0, l), \\ u|_{t=0} &= \phi(x), && x \in (0, l), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} &= 0, && t \in (0, T). \end{aligned} \tag{1}$$

分离变量法：寻找变量分离形式的非零解$u(t,x)=T(t)X(x)$.

代入原方程得到熟悉的Sturm-Liouville问题

$$\begin{aligned} X''+\lambda X = &\quad 0, \qquad x\in(0,l), \\ X(0)=X(l) = &\quad 0. \end{aligned}$$

解之得到可列无穷多个非负特征值

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n=1,2,3,\ldots,$$

相应的特征函数是

$$\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad n=1,2,3,\ldots,$$

$\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$构成$[0,l]$上平方可积函数空间的完备正交基。

把解$u=u(t,x)$, 热源$f(t,x)$和初值$\phi(x)$都按特征函数系展开

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx,$$

$$\phi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx,$$

而系数$u_n(t)$ 待定。

为了确定$u_n(t)$，将上述展开式代入方程和初始条件

$$
\begin{aligned}
u_n' + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_n = &\quad f_n(t), \\
u_n(0) = &\quad \phi_n.
\end{aligned}
$$

解为

$$
u_n(t) = \phi_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau.
$$

代入得形式解

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau.
\end{aligned}
$$

在关于初值和热源一定的光滑性和相容性假设下，这个形式解是经典解。

级数的收敛性（$f(t,x)=0$）：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

对任意非负整数k和l, 逐项求导

$$\frac{\partial^{k+l}u(t,x)}{\partial x^k\partial t^l}=(-1)^l\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n a^{2l}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{k+2l}e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}+\frac{k\pi}{2}\right)x.$$

设初值有界。由于

$$|\phi_n| = \left|\frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\right| \leq 2\sup_{x\in[0,l]}|\phi(x)|, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

对任意$\delta > 0$, 上述导级数在区域

$$\{(t, x) \in (\delta, T] \times [0, l]\}$$

上一致收敛。

这表明函数级数

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

关于x 和t 可以任意次逐项求导数!

由δ的任意性知

$$u=u(t,x)\in C^{\infty}(0,T]\times[0,l].$$

初值只须有界，不必连续!

13.2 圆形区域上的热传导问题

考虑一个均匀且各向同性的无穷长圆柱体。假设柱体内部无热源，通过柱体表面沿法向方向的热流量大小是个常值，柱体的初始温度也是常值。

在柱坐标系(r,θ,z)下，柱体内部各点的温度$u=u(t,r)$满足

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)= &\quad 0, \qquad t>0,\ 0<r\le r_0,\\
u(0,r)= &\quad U_0, \qquad 0\le r\le r_0\\
\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_0}= &\quad q, \qquad t>0,\\
u=u(t,r) &\quad 在r=0附近有界.
\end{aligned}$$

其中$r_0 > 0$表示柱体的半径，U_0 和$q \neq 0$都是常数。

边界条件齐次化：设

$$w(t,r) = U_0 + \frac{q}{2r_0}(4a^2t + r^2).$$

通过简单计算，可以看到（齐次热源）

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial w}{\partial t} - a^2\left(\tfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial w}{\partial r}\right) = &\quad 0, \qquad t > 0,\ 0 < r \leq r_0, \\
\tfrac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = &\quad q, \qquad t > 0.
\end{aligned}$$

令

$$v(t,r)=u(t,r)-w(t,r),$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)= & \quad 0, \qquad t>0,\ 0<r\le r_0, \\
v(0,r)= & \quad -\frac{qr^2}{2r_0}, \qquad 0\le r\le r_0 \\
\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=r_0}= & \quad 0, \qquad t>0, \\
v=v(t,r) & \quad \text{在}r=0\text{附近有界}.
\end{aligned}$$

分离变量法：设$v(t,r)=T(t)R(r)$. 不难看到

$$T' + a^2\lambda T = 0, \qquad t > 0,$$

而$R = R(r)$解

$$\begin{aligned} R'' + \tfrac{1}{r}R' + \lambda R &= 0, \qquad 0 < r \le r_0, \\ R'(r_0) &= 0, \\ |R(0)| &< \infty \end{aligned}$$

其中λ待定常数。又是一特征值问题！

特征值非负：设λ是一特征值，$R=R(r)$是相应的特征向量。注意R方程可以写作

$$\frac{1}{r}(rR')'+\lambda R=0.$$

用$rR(r)$乘这个方程两端, 在$[0,r_0]$上积分，利用边界条件，得

$$\begin{aligned}
\lambda\int_0^{r_0} rR^2(r)dr &= -\int_0^{r_0} R(r)(rR'(r))'dr \\
&= -[rR(r)R'(r)]_0^{r_0}+\int_0^{r_0} r[R'(r)]^2dr \geq 0.
\end{aligned}$$

当$\lambda = 0$时，R方程成为

$$(rR'(r))' = 0.$$

通解为

$$R(r) = C_1 + C_2 \ln r$$

由于$R(0)$有界，$C_2 = 0$. 所以相应的特征函数是

$$R(r) = 1.$$

Sturm-Liouville问题：定义内积

$$(R_1, R_2) = \int_0^{r_0} rR_1(r)R_2(r)dr.$$

关于这个内积，线性微分算子

$$\mathcal{D}R = \frac{1}{r}(rR')'$$

是自共轭的:

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}R, S) &= \int_0^{r_0}(rR')'Sdr = rSR'|_0^{r_0} - \int_0^{r_0} rR'S'dr = -(R', S') \\ &= -(S', R') = (\mathcal{D}S, R) = (R, \mathcal{D}S).\end{aligned}$$

Hilbert空间紧算子的谱理论:

- 特征值非负，有可列无穷多个特征值:

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

- 不同特征值的特征函数相互正交。

- 特征函数系构成相应加权Hilbert空间的一组完备正交基。

特征函数的正交性：设R_λ, R_μ是相应于特征值λ, μ的特征向量，则

$$\lambda(R_\lambda, R_\mu) = -(\mathcal{D}R_\lambda, R_\mu) = -(R_\lambda, \mathcal{D}R_\mu) = \mu(R_\lambda, R_\mu)$$

这样，如果$\lambda \neq \mu$，那么正交

$$(R_\lambda, R_\mu) = 0.$$

当$\lambda > 0$时，引入新变量

$$\rho = \sqrt{\lambda} r$$

并记$\bar{R}(\rho) = R(r)$. 则$\bar{R} = \bar{R}(\rho)$满足零阶Bessel方程

$$\rho^2 \bar{R}'' + \rho \bar{R}' + \rho^2 \bar{R} = 0.$$

这个二阶线性ODE有两个线性独立的解：

零阶Bessel函数$J_0(\rho)$和

零阶Neumann函数$Y_0(\rho)$. （表达式见教材pp. 148）

其中$J_0(\rho)$可通过广义幂级数解法获得（pp. 146-147），
$Y_0(\rho)$在$\rho = 0$附近无界。

通解可表示为

$$\bar{R}(\rho) = C_1 J_0(\rho) + C_2 Y_0(\rho).$$

$$R(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r).$$

由于$Y_0(\rho)$在$\rho = 0$附近无界，$C_2 = 0$.

边界条件要求

$$C_1 \sqrt{\lambda} J_0'(\sqrt{\lambda} r_0) = 0.$$

由零阶Bessel函数的性质知道，方程

$$J_0'(\rho) = 0.$$

有可列无穷多个正根

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty.$$

由此给出特征值

$$\lambda_n = (\frac{\mu_n}{r_0})^2, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

对应的特征函数是

$$R_n(r) = J_0(\frac{\mu_n r}{r_0}), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

最后

$$T_0(t) = A_0, \quad T_n(t) = A_n e^{-(\frac{a\mu_n}{r_0})^2 t}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

叠加

$$v(t,r) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{a\mu_n}{r_0})^2 t} J_0(\frac{\mu_n r}{r_0}).$$

初始条件

$$v(0,r) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\frac{\mu_n r}{r_0}) = -\frac{qr^2}{2r_0}.$$

特征函数系

$$1, J_0(\frac{\mu_1 r}{r_0}), J_0(\frac{\mu_2 r}{r_0}), \ldots, J_0(\frac{\mu_n r}{r_0}), \ldots$$

完备正交。

$$A_0 = \frac{\int_0^{r_0} r(-\frac{qr^2}{2r_0})dr}{\int_0^{r_0} rdr} = -\frac{qr_0}{4},$$

$$A_n = \frac{\int_0^{r_0} r(-\frac{qr^2}{2r_0})J_0(\frac{\mu_n r}{r_0})dr}{\int_0^{r_0} rJ_0^2(\frac{\mu_n r}{r_0})dr} = \frac{-qr_0}{2\mu_n^2}\frac{\int_0^{\mu_n} s^3 J_0(s)ds}{\int_0^{\mu_n} sJ_0^2(s)ds}$$

最后

$$
\begin{aligned}
u(t,r) = \quad & U_0 + \tfrac{q}{2r_0}(4a^2t + r^2) \\
& -qr_0\left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu_n^2}\,\frac{\int_0^{\mu_n} s^3 J_0(s)ds}{\int_0^{\mu_n} sJ_0^2(s)ds}\, e^{-(\frac{a\mu_n}{r_0})^2 t} J_0\big(\frac{\mu_n r}{r_0}\big)\right].
\end{aligned}
$$

作业：pp160、9(2,4,5)，10(1), 12(3)