偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第7讲、一维波动方程的半无界问题

有了一维波动方程初值问题的求解公式，现在我们介绍如何求解该方程的半无界问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), & (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty), \\
u|_{t=0} = \phi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in [0,\infty), \\
u|_{x=0} = g(t), & t \in (0,\infty).
\end{cases}
\tag{1}
$$

求解的基本想法是把定解数据ϕ, ψ和f适当地延拓到整个实数轴上，使得新的初值问题的解在$x = 0$ 自动满足指定的边界条件

$$u|_{x=0} = g(t).$$

如果这是可能的并且解唯一的，那么把u限制在第一象限就得到了原半无界问题的解。

这样，关键就是去寻找上述延拓并说明解的唯一性。先说明唯一性。

定理：半无界问题(1)最多只有一个经典解。

证明：若有两个经典解u_1和u_2，那么它们的差$u = u_1 - u_2$是二次连续可微的并且满足齐次方程和齐次初边值条件：

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \qquad x \in [0,\infty),$$

$$u|_{x=0} = 0, \qquad t \in (0,\infty),$$

对这个齐次问题，略微修改之前的能量估计：锥台换成如图所示的梯形，左侧边界$x=0$积分成为

$$\begin{aligned} & -\int_{\Gamma_4} \left[\frac{1}{2}\left((u_t)^2 + a^2 (u_x)^2\right) dx + a^2 u_t u_x dt\right] \\ = \quad & -\int_{\tau}^{0} a^2 u_t u_x dt = 0. \end{aligned}$$

那么差u满足

$$\int_{K_\tau} [u_t^2 + a^2 u_x^2] dx dt \leq 0.$$

可见u是一常数。由于$u(0,x) = 0$，所以$u \equiv 0$. 唯一性。证毕。

下列我们考虑延拓。根据第5讲的推论，如果初值问题的定解数据是x的奇函数，那么解也是x的奇函数。

另一方面，定义域为整个实数轴的光滑奇函数在$x = 0$ 一定取零值。

这样，我们先考虑$g(t) = 0$的情形，并对定解数据做关于x的奇延拓:

$$\bar{\phi}(x) = \begin{cases} -\phi(-x), & x < 0, \\ \phi(x), & x > 0, \end{cases}$$

$$\bar{\psi}(x) = \begin{cases} -\psi(-x), & x < 0, \\ \psi(x), & x > 0, \end{cases}$$

$$\bar{f}(t,x) = \begin{cases} -f(t,-x), & x < 0, \\ f(t,x), & x > 0. \end{cases}$$

这三个函数都是x的奇函数，它们在$x = 0$可能有奇性。

根据D’Alembert公式，相应初值问题的解为

$$\bar{u}(t,x) = \quad \frac{1}{2}[\bar{\phi}(x+at)+\bar{\phi}(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\bar{\psi}(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\bar{f}(\tau,\xi)d\xi.$$

换回到原来的数据（不带“-”的数据）。当$x \geq at \geq 0$时，我们有$x-a(t-\tau) \geq x-at \geq 0$和

$$u(t,x) = \bar{u}(t,x) = \quad \frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi.$$

这个和初值问题的解公式没有区别（这个事实也可以从依赖域去理解）。

当$0\leq x<at$时，积分区间$(0,t)$需要分为两段：

$$
\begin{aligned}
& u(t,x)=\bar{u}(t,x)\\
= \;& \frac{1}{2}[\phi(x+at)-\phi(at-x)]+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(\xi)d\xi-\int_{x-at}^{0}\psi(-\xi)d\xi\right]\\
& +\frac{1}{2a}\left[\int_{t-x/a}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi d\tau\right.\\
& \left.+\int_0^{t-x/a}\int_0^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi d\tau-\int_0^{t-x/a}\int_{x-a(t-\tau)}^{0}f(\tau,-\xi)d\xi d\tau\right].\\
= \;& \frac{1}{2}[\phi(x+at)-\phi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi d\tau\\
& +\frac{1}{2a}\left[\int_{t-x/a}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi+\int_0^{t-x/a}\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi d\tau\right].
\end{aligned}
$$

这样我们得到了半无界问题（1）的一个满足齐次边界条件$u(x,t)|_{x=0}=0$的形式解。

如果

$$\lim_{x\to 0+} u(0,x) = \phi(0) \neq \lim_{t\to 0+} u(t,x)|_{x=0} = 0,$$

这个形式解在角点$(t,x)=(0,0)$显然不连续，所以不是经典解。

为了是经典解，我们必须要求

$$\phi(0)=0, \quad \psi(0)=\lim_{x\to 0} u_t(0,x)=\lim_{t\to 0} u_t(t,x)|_{x=0}=0,$$

和

$$0=\lim_{t\to 0} u_{tt}(t,x)|_{x=0}=a^2\lim_{t\to 0} u_{xx}(t,x)|_{x=0}+f(0,0)=a^2\phi''(0)+f(0,0).$$

这些必要条件称为相容性条件，下一个定理说明它们也是充分的。

定理6.2：设半无界问题（1）的定解数据满足

$$\phi \in C^2[0,\infty), \quad \psi \in C^1[0,\infty), \quad f \in C^1[0,\infty)^2$$

以及前述相容性条件，那么上述给出的是半无界问题（1）的经典解。

证明：在定理的假设下，函数

$$\phi(x) - \frac{\phi''(0)}{2}x^2, \quad \psi(x), \quad f(t,x) - f(t,0)$$

的奇延拓均满足第5讲定理的正则性条件，所以由它们决定的解在上半平面是二次连续可微的，从而在第一象限的限制也是二次连续可微的，且满足齐次边界条件。

根据线性叠加原理，只需考虑由

$$\frac{\phi''(0)}{2}x^2, \quad 0, \quad f(t,0)$$

确定的解。对这组定解数据，之前的延拓法给出的解是

$$u(t,x)=\begin{cases} \frac{\phi''(0)}{2}(x^2+a^2t^2)+\int_0^t (t-\tau)f(\tau,0)d\tau, & x>at, \\ \frac{\phi''(0)}{2}2xat+\int_{t-x/a}^t (t-\tau)f(\tau,0)d\tau+\frac{x}{a}\int_0^{t-x/a} f(\tau,0)d\tau, & x<at. \end{cases}$$

这个解显然满足齐次边界条件，且是分片光滑的。

为了说明这个分片表达式给出的解是二次连续可微的，只需说明两个分片表达式及其所有不超过二阶的导数在交界线上是连续的。

注意$x > at$时解的表达式对第一象限的一切(t, x)有定义且是充分光滑的，可以自然地把它推广到整个第一象限。

这样可以在第二表达式的定义域$x < at$内考虑两个表达式的差

$$\frac{\phi''(0)}{2}(x - at)^2 + \int_0^{t-x/a} (t - \tau - x/a) f(\tau, 0) d\tau \equiv \frac{a^2\phi''(0)}{2}\xi^2 + \int_0^{\xi} (\xi - \tau) f(\tau, 0) d\tau$$

其中$\xi = t - x/a$. 只需说明这个函数在$\xi = 0$处的前二阶导数均为零即可。零阶、一阶导数显然为零。二阶导数为$a^2\phi''(0) + f(0, 0)$. 根据假设，它也为零。证毕。

到目前为止，我们已经介绍了如何求解问题（1）且$g(t)=0$的情形。

当$g(t)\neq 0$时，引入替换

$$v(t,x)=u(t,x)-g(t).$$

那么$v=v(t,x)$满足

$$\begin{aligned}
v_{tt}-a^2v_{xx} = &\quad f(t,x)-g''(t),\\
v(0,x) = &\quad \phi(x)-g(0),\quad v_t(0,x)=\psi(x)-g'(0),\\
v|_{x=0} = &\quad 0.
\end{aligned}$$

这样化成了我们能处理的问题。

对第二边界条件$u_x|_{x=0} = g(t)$，引入替换

$$v(t,x) = u(t,x) - xg(t).$$

那么$v = v(t,x)$满足

$$\begin{aligned} v_{tt} - a^2 v_{xx} = & \quad f(t,x) - g''(t), \\ v(0,x) = & \quad \phi(x) - xg(0), \quad v_t(0,x) = \psi(x) - xg'(0), \\ v_x|_{x=0} = & \quad 0. \end{aligned}$$

这个初边值问题的解可以通过偶延拓而求得。唯一性（能量估计）。

7.2 三维波动方程的初值问题

本节导出三维波动方程初值问题

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}-a^2\Delta u=f(x,t), \qquad x\in\mathbf{R}^3,\ t>0,\\
&\tilde{u}|_{t=0}=\phi(x),\quad \tilde{u}_t|_{t=0}=\psi(x), \qquad x\in\mathbf{R}^3.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

的求解公式。为此我们先证明关于函数球面平均的下列性质。

引理：设$h \in C^2(\mathbf{R}^3), x \in \mathbf{R}^3, r > 0$. 那么4元函数（$h$的球面平均）

$$I(x, r; h) = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega \in \mathbf{R}^3, |\omega|=1} h(x + r\omega) dS_\omega$$

满足

$$\lim_{r \to 0+} I(x, r; h) = h(x), \qquad \Delta_x(rI(x, r; h)) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rI(x, r; h)).$$

证明：极限是显然的。记$M(x, r) = rI(x, r; h)$. 在球坐标下，

$$\omega = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi),$$

$$M(x, r) = rI(x, r; h) = \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} h(x + r\omega) \sin\phi d\phi d\theta.$$

计算

$$
\begin{aligned}
\partial_r^2 M(x,r) &= \frac{1}{4\pi}(2+r\partial_r)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\omega\cdot\nabla_x h)(x+r\omega)\sin\phi d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi r}\partial_r\left(r^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\omega\cdot\nabla_x h)(x+r\omega)\sin\phi d\phi d\theta\right) \\
&= \frac{1}{4\pi r}\partial_r\int_{\partial B(0,r)}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}}(x+y)dS_y.
\end{aligned}
$$

这里$\partial B(0,r)$是半径为r中心在原点的球$B(0,r)\subset \mathbf{R}^3$的边界，其外法向是$\mathbf{n}$.

借助Gauss积分公式，我们有

$$\begin{aligned}
\partial_r^2 M(x,r) &= \frac{1}{4\pi r}\partial_r \int_{B(0,r)} \Delta_y h(x+y)dy \\
&= \frac{1}{4\pi r}\int_{\partial B(0,r)} \Delta_x h(x+y)dS_y \\
&= \frac{r}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \Delta_x h(x+r\omega)dS_\omega = \Delta_x M(x,r).
\end{aligned}$$

证毕。

这个引理可以帮助我们导出三维波动方程初值问题的求解公式。设$u = u(t,x)$是问题（2）的一个经典解，其中$f = \phi = 0$. 定义

$$M(x,r,t) = rI(x,r;u(\cdot,t)).$$

这个函数显然满足

$$\begin{aligned}
M(x,r,t)|_{r=0} = &\quad 0 \times u(t,x) = 0, \\
M(x,r,t)|_{t=0} = &\quad \lim_{t\to 0}[rI(x,r;u(t,\cdot))] = rI(x,r;u(0,\cdot)) = rI(x,r;0) = 0, \\
M_t(x,r,t)|_{t=0} = &\quad \lim_{t\to 0}[rI(x,r;u_t(t,\cdot))] = rI(x,r;\psi).
\end{aligned}$$

另一方面，根据球面平均引理和波动方程，有

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 M(x,r,t)}{\partial r^2} &= a^2 \Delta_x M(x,r,t) \\ &= \frac{a^2 r}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \Delta_x u(x+r\omega,t) dS_\omega \\ &= \frac{r}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u_{tt}(x+r\omega,t) dS_\omega \\ &= \frac{\partial^2 M(x,r,t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

即$M = rI(x,r;u(t,\cdot))$解一维半无界问题

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} = &\quad 0, \qquad r > 0,\ t > 0, \\
M(x,r,t)|_{t=0} = &\quad 0, \quad M_t(x,r,t)|_{t=0} = rI(x,r;\psi), \\
M(x,r,t)|_{r=0} = &\quad 0,
\end{aligned}
$$

其中x是参数。

由前节一维半无界问题解的表达式（$r \le at$）

$$
M(x,r,t) = \frac{1}{2a}\int_{at-r}^{r+at} sI(x,s;\psi)ds.
$$

这样

$$\begin{aligned}
u(t,x) = & \lim_{r\to 0} I(x,r,u(t,\cdot)) \\
= & \lim_{r\to 0} \tfrac{M(x,r,t)}{r} \\
= & \lim_{r\to 0} \tfrac{1}{2ar} \int_{at-r}^{r+at} sI(x,s;\psi)ds \\
= & tI(x,at;\psi).
\end{aligned}$$

结果

$$\begin{aligned}
u(t,x) = & \tfrac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \psi(x+at\omega)dS_\omega \\
= & \tfrac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} \psi(y)dS_y,
\end{aligned}$$

其中积分区域是球面$S_{at}(x) = \{y \in \mathbf{R}^3 : |y-x| = at\}$. 这是三维波动方程对应数据$f = \phi = 0$的解。

根据齐次化原理，对于一般的数据，问题（2）的解为

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = \quad & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}(x)} \phi(y) dS_y\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}(x)} \psi(y) dS_y \\
& + \int_0^t \left[\frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)}\int_{S_{a(t-\tau)}(x)} f(\tau, y) dS_y\right] d\tau.
\end{aligned}
$$

这个称作Kirchhoff公式。

7.3 二维波动方程的初值问题

有了3维波动方程的求解公式，很容易导出2维问题

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f(x,t), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\ t > 0, \\
&u|_{t=0} = \phi(x_1, x_2), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,
\end{aligned} \tag{3}
$$

的求解公式。想法是把2维函数视作3维函数。

由于齐次化原理，先考虑$\phi(x_1, x_2) = 0$的情形。

设相应2维问题的解为$u = u(t, x_1, x_2)$. 那么

$$\tilde{u}(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, x_1, x_2)$$

显然满足

$$\tilde{u}_{tt} - a^2(\tilde{u}_{x_1x_1} + \tilde{u}_{x_2x_2} + \tilde{u}_{x_3x_3}) = f(x, t), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\ t > 0,$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = 0, \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

根据Kirchhoff公式,

$$u(t, x_1, x_2) = \tilde{u}(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} \psi(y_1, y_2) dS_y.$$

这里被积函数与y_3无关，因此球面积分可以简化为两重积分。注意积分区域$S_{at}(x)$可以视作定义于圆盘

$$\Sigma_{at}(x): \quad (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \le a^2 t^2$$

上的两个半球面组成：

$$y_3 = x_3 \pm \sqrt{a^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}.$$

计算

$$\frac{\partial y_3}{\partial y_1} = \mp \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{a^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}},$$

$$
\begin{aligned}
dS_y &= \sqrt{1+\left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2}\,dy_1dy_2 \\
&= \frac{at}{\sqrt{a^2t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy_1dy_2.
\end{aligned}
$$

结果

$$
u(t,x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi a}\int_{\Sigma_{at}(x)}\frac{\psi(y_1,y_2)}{\sqrt{a^2t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}dy_1dy_2.
$$

根据齐次化原理，对于一般的数据，问题（3）的解为

$$
\begin{aligned}
u(t,x)= \quad & \tfrac{1}{2\pi a}\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\Sigma_{at}(x)}\tfrac{\phi(y)}{\sqrt{a^2t^2-|y-x|^2}}dy_1dy_2\right)\\
&+\tfrac{1}{2\pi a}\int_{\Sigma_{at}(x)}\tfrac{\psi(y)}{\sqrt{a^2t^2-|y-x|^2}}dy_1dy_2\\
&+\tfrac{1}{2\pi a}\int_0^t\left[\int_{\Sigma_{a(t-\tau)}(x)}\tfrac{f(\tau,y)}{\sqrt{a^2t^2-|y-x|^2}}dy_1dy_2\right]d\tau.
\end{aligned}
$$

这个称作Poisson公式。

作业：pp. 100：11，15，16，17，19