偏微分方程（40420664-2）

清华大学数学科学系　雍稳安

办公室：理科楼A214

邮箱: wayong@tsinghua.edu.cn

第15讲、初值问题的最大模估计

15.1 初值问题的最大模估计

考虑一维热传导方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(t,x), & (t,x) \in (0,T] \times (-\infty,\infty), \\ u|_{t=0} = \phi(x), & x \in (-\infty,\infty). \end{cases} \tag{1}$$

定理15.1：设$u = u(t,x)$是上述问题的一个有界的经典解，则

$$|u(t,x)| \le T \sup_{(t,x)\in(0,T]\times(-\infty,\infty)} |f(t,x)| + \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |\phi(x)|.$$

证明：记

$$F=\sup_{(t,x)\in(0,T]\times(-\infty,\infty)}|f(t,x)|,$$

$$\Phi=\sup_{x\in(-\infty,\infty)}|\phi(x)|.$$

对任意$L>0$, 考虑区域$(0,T]\times(-L,L)$.

设$K=K(L)=\sup\limits_{(t,x)\in(0,T]\times(-L,L)}|u(t,x)|$.

考虑辅助函数

$$w(t,x)=Ft+\Phi+v_L(t,x)\pm u(t,x),$$

其中

$$v_L(t,x) = \frac{K}{L^2}(x^2 + 2a^2 t)$$

是齐次方程的一个解。

容易计算

$$\begin{aligned}
w_t - a^2 w_{xx} &= F \pm f(t,x) \geq 0, & (t,x) \in (0,T] \times (-\infty,\infty), \\
w|_{x=\pm L} &\geq K \pm u \geq 0, & t \in [0,T], \\
w|_{t=0} &\geq 0, & x \in (-\infty,\infty).
\end{aligned}$$

在$(0,T]\times(-L,L)$上运用极值原理可得

$$w(t,x)\geq 0.$$

因此对任意的(t_0,x_0)，可选L充分大使得

$$(t_0,x_0)\in(0,T]\times(-L,L).$$

由$w(t_0,x_0)\geq 0$得

$$|u(t_0,x_0)|\leq Ft_0+\Phi+\frac{K}{L^2}(x_0^2+2a^2t_0)$$

令L趋于无穷大，则有

$$|u(t_0,x_0)|\leq Ft_0+\Phi$$

由(t_0,x_0)的任意性得证。证毕。

不唯一性的例子：$a=1$, 右端$f(t,x)=0$, 初值$\phi(x)=0$.

$$u(t,x)=\sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{d^k}{dt^k}e^{-1/t^2}$$

是个无界解。

参考：Fritz John, Partial Differential Equations（第7章）.

15.2 初值问题的最大模估计2

定理15.2：设$u \in C^{2,1}(R^d \times (0,T]) \cap C(R^d \times [0,T])$ 满足

$$u_t - \Delta u = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x),$$

和

$$u(t,x) \leq M e^{N|x|^2}.$$

则

$$\sup_{R^d \times [0,T]} u(t,x) = \sup_{R^d} u_0(x).$$

证明：第一步：不妨设

$$4NT < 1,$$

那么有$\epsilon > 0$使得

$$4N(T + \epsilon) < 1.$$

事实上，假如对$t \in [0, T_1]$结论得证。那么可以把时间区间分为

$$[0, T_1], \quad [T_1, 2T_1], \quad [2T_1, 3T_1], \quad \cdots.$$

在每个小区间运用上述证明，可以得出对任何时间区间定理结论都成立。

第二步：固定$y \in R^d, \mu > 0$, 对$t < T$ 定义

$$v(t,x) = u(t,x) - \frac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{d/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}\right).$$

通过直接计算，可以看出$v(t,x)$也满足方程

$$v_t - \Delta v = 0.$$

由极值原理，对任意$r > 0$，有

$$\max_{\bar{B}(y,r)\times[0,T]} v(t,x) = \max_{\partial B(y,r)\times[0,T)} v(t,x).$$

第三步：讨论$\max\limits_{\partial B(y,r)\times[0,T)} v(t,x)$.

$t=0$时，

$$v(0,x)=u(0,x)-\frac{\mu}{(T+\epsilon)^{d/2}}\exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon)}\right)\leq u_0(x).$$

$|x-y|=r$时，注意有$\gamma>0$使得

$$\frac{1}{4(T+\epsilon)}=N+\gamma.$$

那么当r充分大时，

$$
\begin{aligned}
v(t,x) = \quad & u(t,x) - \tfrac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{d/2}} \exp\left(\tfrac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}\right) \\
\leq \quad & Me^{N|x|^2} - \tfrac{\mu}{(T+\epsilon)^{d/2}} \exp\left(\tfrac{r^2}{4(T+\epsilon)}\right) \\
\leq \quad & Me^{N(r+|y|)^2} - \tfrac{\mu}{(T+\epsilon)^{d/2}} \exp\left((N+\gamma)r^2\right) \\
\leq \quad & \sup\nolimits_{R^d} u_0(x).
\end{aligned}
$$

结果

$$
u(t,y) - \frac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{d/2}} = v(t,y) \leq \sup_{R^d} u_0(x)
$$

让μ趋于零，得到想要的结论。证毕。

作业：pp160：15，16，17，20, 21