

实验报告：阻尼振动和受迫振动

谢泽钰¹

1. 实验目的

- (a) 通过实验，学习测量振动系统基本参数的方法；
- (b) 研究受迫振动的幅频特性和相频特性，观察共振现象；
- (c) 观测不同阻尼对受迫振动的影响。

2. 实验仪器

本实验所用仪器是专门研究振动的波耳共振仪，仪器结构如 1 所示。

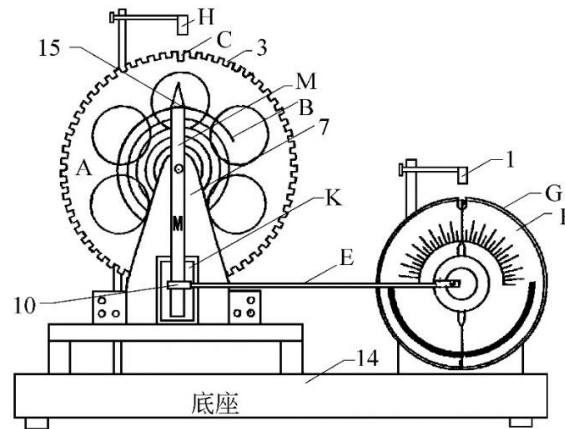


图 1. 波耳共振仪结构示意图

铜质圆形摆轮 A 与弹簧 B 构成待测的振动系统，弹簧 B 的另一端固定在摇杆 M 上的点 15 的位置处。摆轮边沿有一圈周期为 2° 的槽形缺口，光电门 H 通过测定缺口移动的个数来记录振动的幅度，其中有一长缺口 C 是平衡位置的标志，是测量摆轮振动周期的参考点，也是控制闪光灯开关以测量受迫振动与外激励之间的相位差的参考点。

外激励是由转速极为稳定且可调的电机的偏心轴通过连杆 E 和摇杆 M 加到振动系统上。由于连杆 E 较长，电机匀速转动时对系统的作用可看作简谐激励，改变电机转速就改变了外激励的周期。带有标志电机位置刻线（0 位标志线）的有机玻璃转盘 F 同电机一同转动。

¹ 致理书院，致理-数 02，学号 2020012544

E-mail address: xie-zy20@mails.tsinghua.edu.cn.

Date: 2024 年 4 月 2 日.

当摆轮 A 的长缺口 C 通过平衡位置时，闪光灯点亮，照亮有机玻璃盘 F 的 0 位标志线，此刻 0 位标志线指示的角度即为外激励超前摆轮振动的角度，亦即摆轮滞后于外激励的角度。

闪光灯在长缺口 C 来回通过光电门 H 时都要闪亮，因此每周期闪亮两次。在摆轮完全不受外激励作用且光电门 H 正好处于平衡位置时，闪光灯照亮 0 位标志线的两次示值应完全一致，但由于整体结构的一致性差，这一点并不能处处保证。实际上两次角度示值可能有少许偏差，我们可取其平均值作为被测的角度。

由阻尼线圈 K 产生电磁阻尼作用于摆轮。调整线圈电流可改变电磁铁气隙中磁场，从而改变阻尼力矩。阻尼选择旋钮置 0 时，线圈中无电流，是最小阻尼的状态。调节阻尼选择旋钮，能改变线圈中的电流，也就改变了阻尼。由于线圈用直流励磁，可能因材料中的剩磁或磁滞现象而使阻尼状态与旋钮位置不呈单值对应关系，因此在做某一阻尼状态的实验测量过程中不可改变阻尼状态，直至该阻尼状态的实验完全做完。

3. 实验原理

3.1. 有粘滞阻尼的阻尼振动. 对于弹簧与摆轮组成的振动系统（如 2a 所示），设摆轮转动惯量为 J ，粘滞阻尼的阻尼力矩大小定义为角速度 $\frac{d\theta}{dt}$ 与阻尼力矩系数 γ 的乘积，弹簧劲度系数为 k ，弹簧的反抗力矩为 $-k\theta$ 。忽略弹簧的等效转动惯量，则转角 θ 的运动方程

$$(1) \quad J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = 0$$

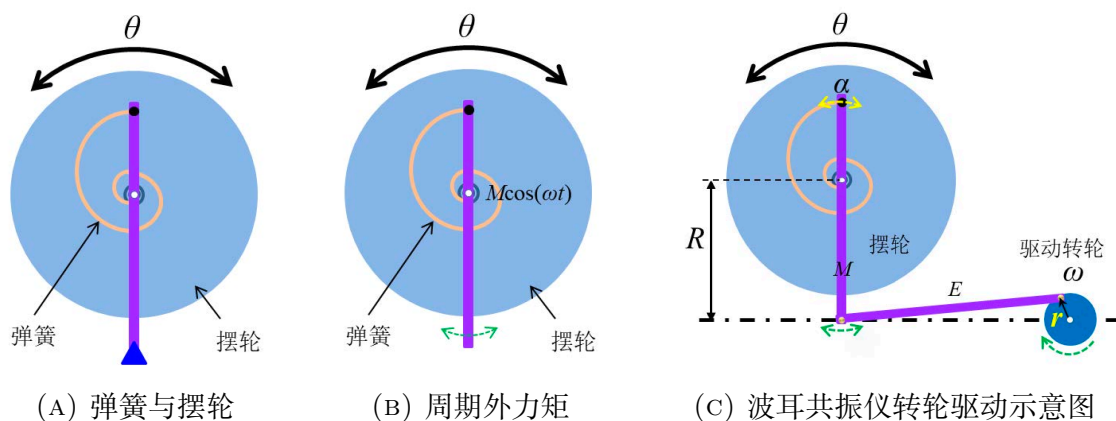
记 ω_0 为无阻尼时自由振动的固有角频率，其值为 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}}$ ，定义阻尼系数 $\beta = \frac{\gamma}{2J}$ ，则 1 变为

$$(2) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$$

对于弱阻尼即 $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$ 的情况，阻尼振动运动方程 1 的解为

$$(3) \quad \theta(t) = \theta_i \exp(-\beta t) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_i)$$

式中 θ_i 为摆幅， φ_i 为初始相位。由上式可知，阻尼振动角频率为 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ，相应的阻尼振动周期为 $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ 。



3.2. 周期外力矩作用下的受迫振动. 在周期外力矩 $M \cos(\omega t)$ 激励下 (见图 2b) 的运动方程和方程的通解分别为:

$$(4) \quad J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = M \cos(\omega t)$$

$$(5) \quad \theta(t) = \theta_i \exp(-\beta t) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_i) + \theta_m \cos(\omega t - \varphi)$$

通解 5 是形如式 3 的阻尼振动和频率同激励源频率的简谐振动的叠加。阻尼振动项反映一定初始条件后的过渡过程, $t \rightarrow \infty$ 则该项为 0。一般 $t \gg \tau$ 之后 (τ 为阻尼振动振幅衰减到 e^{-1} 即 36.8% 时所用的时间), 就有稳态解

$$(6) \quad \theta(t) = \theta_m \cos(\omega t - \varphi)$$

稳态解的振幅和相位差分别为

$$(7) \quad \theta_m = \frac{M/J}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$(8) \quad \varphi = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

式 8 中相位差 φ 的取值范围为 $0 < \varphi < \pi$, 反映摆轮振动总是滞后于激励源支座的振动。

3.3. 转轮驱动下的受迫振动运动方程及解. 利用转轮连杆结构对摆盘施加周期性驱动力矩，如 2c 所示波耳共振仪驱动原理。当连杆 E 的长度和摇杆 M 的长度远大于连杆在转轮上的连接点到转轮轴心的距离 r 时，若驱动转轮的以角速度 ω 匀速旋转，可以证明，系统调节对称后，弹簧支座（摇杆 M 上与弹簧的连接处）的偏转角的一阶近似式可以写成

$$(9) \quad \alpha(t) = \alpha_m \cos(\omega t) = \frac{r}{R} \cos(\omega t)$$

α_m 是摇杆摆幅， R 是 2c 中连杆 E 与摇杆 M 的接点到摇杆和摆轮共同的转轴中心的距离。由于弹簧的支座在运动，运动支座是激励源。弹簧总转角为 $\theta - \alpha(t) = \theta - \alpha_m \cos(\omega t)$ ，仿照式 4，在固定坐标系中摆轮转角 θ 的运动方程为：

$$(10) \quad J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k(\theta - \alpha \cos(\omega t)) = 0$$

上式可以改写成

$$(11) \quad J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = k\alpha_m \cos(\omega t)$$

该式和弹簧支座固定、摆轮受周期外力矩 $M \cos(\omega t)$ 作用时的运动方程在形式上完全一致，等效外激励力矩的振幅为 $k\alpha_m$ 。方程 11 的通解与稳态解的形式分别同 5 和 6 式；这表明 2c 的装置是一个十分巧妙的设计，得到了与周期外力矩作用下相同形式的解。稳态解的相位差表达式仍为 8，而 7 变为

$$(12) \quad \theta_m = \frac{\alpha_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

由 θ_m 的极大值条件 $\frac{\partial \theta}{\partial \omega} = 0$ 可知，当外激励角频率 $2\omega = \omega_0^2 - \beta^2$ 时，系统发生共振， θ_m 有极大值，其值为：

$$(13) \quad \theta_m = \frac{2\alpha}{\omega_0^2 - \beta^2}$$

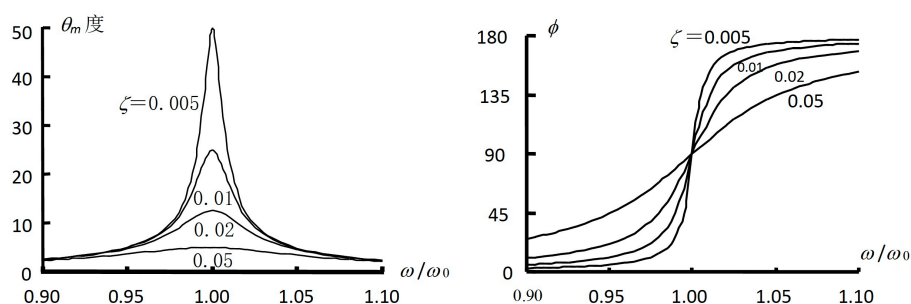
引入参数 $\zeta = \frac{\beta}{\omega_0} = \frac{\gamma}{2\sqrt{kJ}}$ ，称为阻尼比。振幅 θ_m 和相位差 φ 是支座振幅 α_m 、阻尼比 ζ 和频率比 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 的函数，它们随频率比变化的曲线分别叫做幅频特性曲线和相频特性曲线（参见 3）。测定并分析这些曲线，有助于对受迫振动规律的深入理解。

表 1. 方程中的参量及其符号

方程中的参量	符号
转动惯量	J
劲度系数	k
阻尼力矩系数	γ
固有角频率	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}}$
外激励角频率	ω

表 2. 文献中描述阻尼振动的常用参量及其计算公式

序号	名称	符号及公式	定义或说明
1	阻尼系数	$\beta = \gamma(2J)$	标准定义, 但机械、力学文献中常用上表中的 γ 。
2	阻尼比	$\zeta = \frac{\gamma}{2\sqrt{kJ}} = \frac{\beta}{\omega}$	damping ratio, 无量纲。
3	阻尼振动周期	$T = \frac{2\pi}{\omega - \beta}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1 - \zeta^2}}$
4	时间常数	$\tau = \frac{2J}{\gamma} = \frac{1}{\beta}$	time constant, 阻尼振动的振幅衰减到原来的 $1/e$ 的时间, 单位为 s(秒)。
5	品质因数	$Q = \frac{1}{2\zeta}$	系统共振锐度或频率选择性的量度。一般定义为系统储能 E 与周期能耗 ΔE 之比 ($E/\Delta E$) 的 2π 倍。
6	对数减缩率	$\Lambda = \frac{T_d}{\tau} = 2 \frac{\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$	定义为衰减阻尼振动中相邻两循环的振幅比的自然对数。

图 3. $\alpha_m = 8^\circ$, $\omega_0 = 4\text{rad/s}$ 时, $\zeta = 0.005, 0.01, 0.02, 0.05$ 的幅频、相频特征曲线

3.4. 描述阻尼振动的常用参量.

4. 实验内容

4.1. 调整仪器使波耳共振仪处于工作状态.

- 关断电机和闪光灯开关，打开电源开关，阻尼开关置于“0”档。
- 手动微调光电门 H、I，避免与摆轮或相位差测量盘接触。
- 手动调整电机偏心轮使有机玻璃转盘 F 上的 0 位标志刻线指示 0 度，即通过连杆 E 和摇杆 M 使摆轮处于平衡位置。
- 拨动摆轮使其偏离平衡位置约 $120^\circ \sim 150^\circ$ ，松开手后，检查摆轮的自由摆动情况。正常情况下，振动衰减应该很慢。

4.2. 测量最小阻尼条件下系统的阻尼比 ζ 和固有角频率 ω_0 .

- 设实际测量的量为振幅值 θ_j 和振动周期 T_d 。
- 光电门选择开关置于“摆轮”位置，拨动摆轮使其偏离平衡位置约 $120^\circ \sim 150^\circ$ 后松手，摆轮开始摆动。
- 由大到小依次读取显示窗中的振幅值 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_j, \dots, \theta_n$ 。
- 周期选择开关选择“10”，按复位钮启动周期测量，停止时读取所显示的时间 $10\overline{T_d}$ 。
- 立即按一下复位按钮，再次启动周期测量，多次重复此过程，记录每次的显示时间。

4.2.1. 用最小二乘法计算阻尼比 ζ 及其不确定度 Δ_ζ . 3 两边取对数，有

$$(14) \quad \ln \theta = \ln[\theta_i \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \varphi_i)] - \beta t$$

假设从 t_0 时刻开始连续测量摆轮的最大摆幅，则测量第 j 个摆幅 θ_j 对应的时间 $t = t_0 + jT_d$ ，于是有

$$(15) \quad \ln \theta_j = \ln[\theta_i \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t_0 + \varphi_i)] - \beta(t_0 + jT_d)$$

由此可知， $\ln \theta_j$ 与 j 成线性关系，设因变量为 $y = \ln \theta_j$ ，自变量为 $x = j$ ，用最小二乘法拟合直线 $y = a + bx$ ，则斜率

$$(16) \quad b = -\beta T_d = -\beta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{\zeta^{-2} - 1}}$$

另外， b 的不确定度 $\Delta b = t_{0.95}(\nu)S_b$ ，其中 $\nu = n - 2$ 为自由度，标准偏差 $S_b = b\sqrt{\frac{r^{-2}-1}{n-2}}$ ， r 为相关系数（不考虑仪器角度测量的系统误差），由此可以得到系统的阻尼比 $\zeta \pm \Delta_\zeta$ 。

4.2.2. 通过阻尼比 ζ 和振动周期 T_d 计算固有角频率 $\omega_0 \pm \Delta_\zeta$. 通过 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1-\zeta^2}}$ 可得到系统的固有角频率。在阻尼比很小的情况下，可以用阻尼振动角频率代替 ω_0 。不确定度的估算中，时间测量的仪器误差限取 $\Delta_{\text{仪}} = \text{读数} \times 10^{-5} + 0.001$ (单位: s)。

应该指出，原理上我们认为弹簧的劲度系数 k 为常数，与摆角无关，因此 ω_0 为常数。实际上由于制造工艺和材料性能的影响， k 随着角度的改变有微小的变化，使不同振幅时系统的固有频率有微小的变化，有时需要考虑这些变化，如共振点附近受迫振动相频特性与 ω_0 的关系，这时需要测出固有角频率与不同振幅的相关数据，减少实验值与理论值的偏差。

4.3. **测量较强阻尼条件下的阻尼比 ζ** . 选择其它两种阻尼挡位 (2、3 档位或 2、4 档位)，类似上述的方法测量较强阻尼条件下的阻尼比 ζ 。由于阻尼较强时的振动次数少，因此只要求振幅 θ_j 的测量次数 n 大于 10 次。测量时，周期选择开关置于“1”的位置，每次只测量一个振动周期的时间。测量后参考 2，求出不同阻尼条件下系统的时间常数 τ ，并相互比较理解其物理含义。

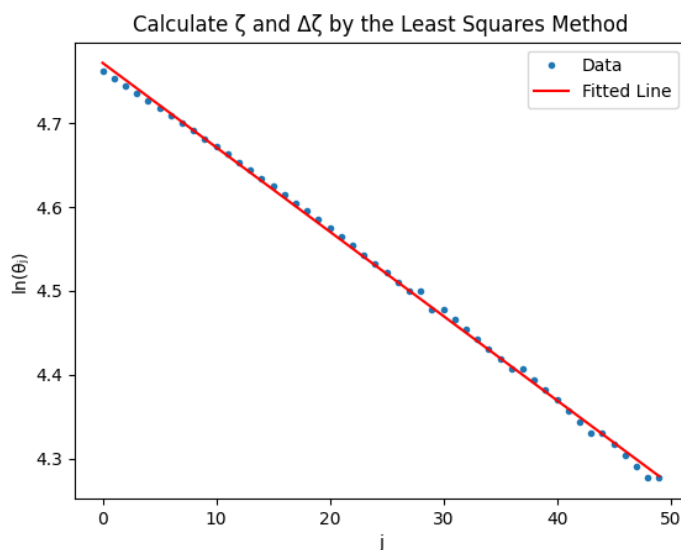
4.4. **测定受迫振动的幅频特性和相频特性曲线**. 选择 2 个不同阻尼比的阻尼档位 (与任务 3 中的档位选择保持一致)，测量摆轮做受迫振动的幅频特性和相频特性曲线。具体操作过程：选择阻尼挡位，光电门开关置“强迫力”位置，周期选择开关置“1”；开启驱动电机开关，调节强迫力周期旋钮改变驱动电机的转动周期 T ，测量记录不同激励周期 T 下摆轮稳定摆动时的振幅 θ ，接着打开 (或者按下) 闪光灯开关测量摆轮振动与激励源之间的相位差 φ 。注意阻尼比较小 (“0” 和 “1” 档) 时，共振点附近不要测量，以免振幅过大损伤弹簧。每次调节电机转速后，需等待摆轮的摆动经多次摆动达到稳定后，再要测量振幅和周期。要求每条曲线至少有 12 个数据点，其中要包括共振点，即 $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ 的点。

5. 数据处理及结果

所有实验数据均记录于 7。

5.1. **第一组实验**. 选择 0 档阻尼下摆盘自由振动，一次起摆连续测 50 个幅度，再次起摆连续测 5 个 $10T_d$ 。

绘制 $\ln \theta_j$ 与 j 的关系图，如 4 所示。

图 4. 0 档阻尼下 $\ln \theta_j$ 与 j 的关系

通过最小二乘法拟合直线，得到如 1 的输出结果。斜率 $b \approx -0.01007$ ，由公式 16 可得阻尼比 $\zeta \approx 0.00160$ 。记录 5 次 $10T_d$ 的时间，计算平均值 $10T_d \approx 15.38216$ s，由此可得平均振动周期 $T_d \approx 1.53822$ s，固有角频率 $\omega_0 \approx 4.08472$ rad/s。

LISTING 1. 第一组实验数据处理结果

```
y = a + bx
a=4.772264731257109, b=-0.01007121882703009
\zeta=0.0016028822001904336
td=1.53822
\omega_0=4.084716996706236
\beta=0.0065473201668357515
\tau=152.73424462504772
```

5.2. 第二组实验. 第二组实验的数据输出如下

LISTING 2. 第二组实验数据处理结果

```
y = a + bx
a=4.3490939658348635, b=-0.16992775069555735
\zeta=0.027034956298399453
td=1.5408333333333335
\omega_0=4.0792748869888324
\beta=0.11028301829890146
```


\tau=9.067579174245008

选择 2 档阻尼下摆盘自由振动，一次起摆连续测 12 个幅度，绘制 $\ln \theta_j$ 与 j 的关系图（如 5）计算阻尼比 $\zeta \approx 0.02703$ 和固有角频率 $\omega_0 \approx 4.07927$ 。

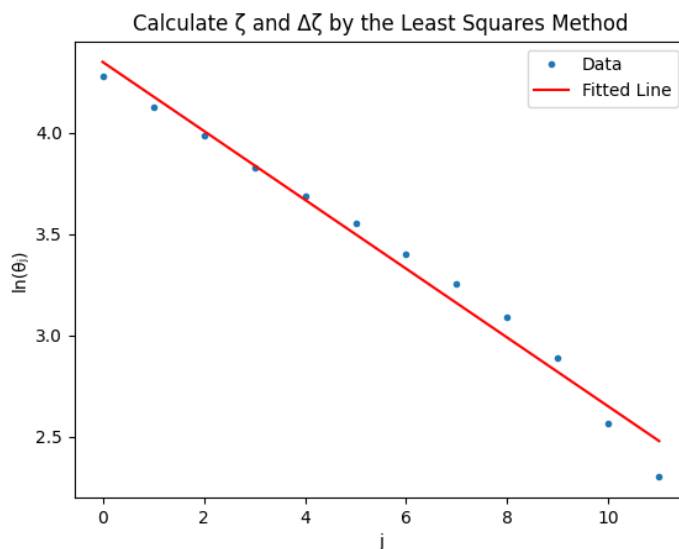
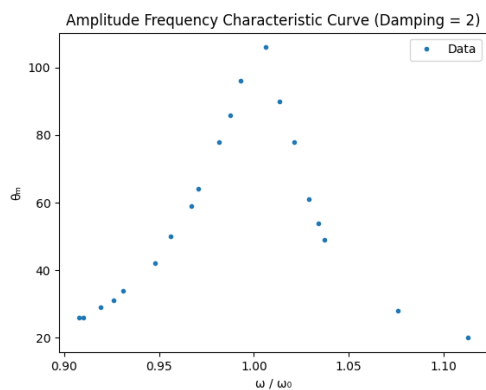
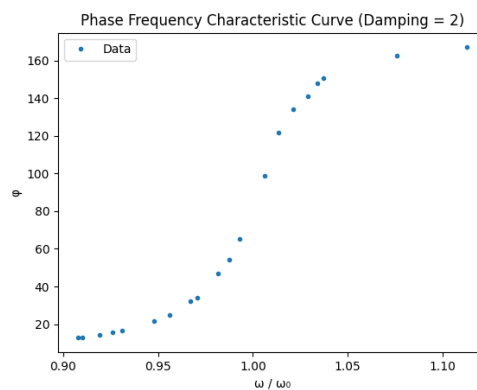


图 5. 2 档阻尼下 $\ln \theta_j$ 与 j 的关系

根据阻尼档 2 的数据，绘制幅频特性曲线（如 6a）和相频特性曲线（如 6b）。



(A) 2 档阻尼下幅频特性曲线



(B) 2 档阻尼下相频特性曲线

5.3. 第三组实验. 第三组实验的数据输出如下

LISTING 3. 第三组实验数据处理结果

$$y = a + bx$$

$$a=4.752038708069851, b=-0.39109800808349326$$

$$\backslash \text{zeta}=0.0621249471761529$$

td=1.5374999999999999

\omega_0=4.094533673616203

\beta=0.2543726881843859

\tau=3.931239659169442

选择 4 档阻尼下摆盘自由振动，一次起摆连续测 12 个幅度，绘制 $\ln \theta_j$ 与 j 的关系图（如 7）计算阻尼比 $\zeta \approx 0.06212$ 和固有角频率 $\omega_0 \approx 4.09453$ 。

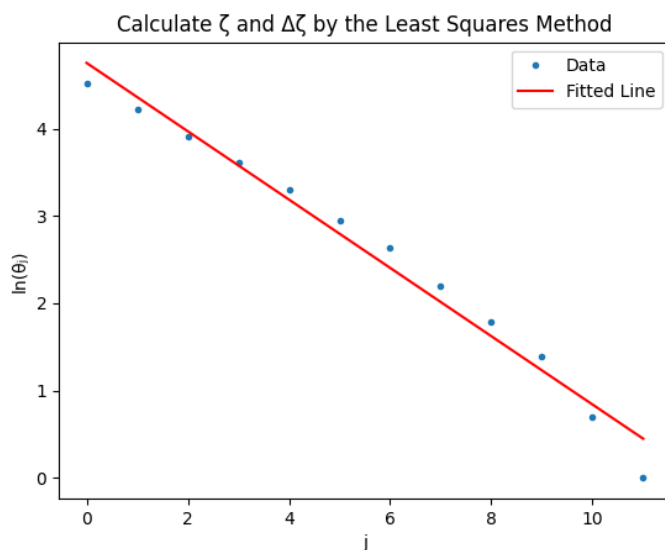
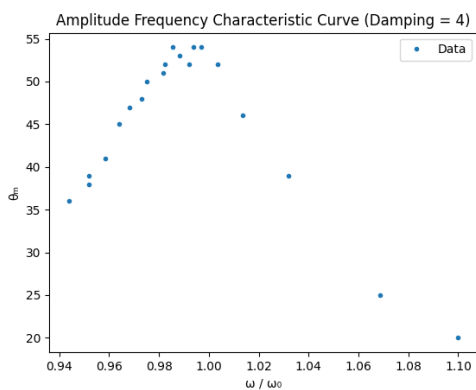
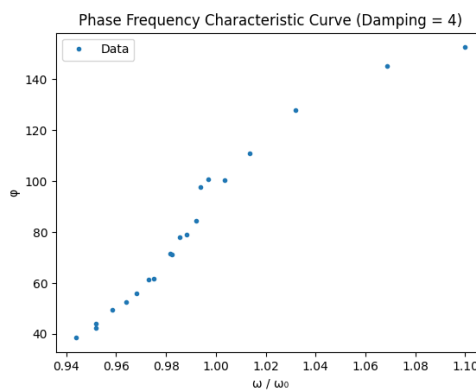


图 7. 4 档阻尼下 $\ln \theta_j$ 与 j 的关系

根据阻尼档 4 的数据，绘制幅频特性曲线（如 8a）和相频特性曲线（如 8b）。



(A) 4 档阻尼下幅频特性曲线



(B) 4 档阻尼下相频特性曲线

6. 实验小结

(a) 为避免剩磁影响，阻尼开关不要随便拨动；

- (b) 只有测受迫振动相频特性时才开启仪器面板上的闪光灯开关，读完数据后迅即关闭；
- (c) 相频特性与幅频特性测量要在振动稳定后进行，可根据测量数据计算 τ 值和达到稳定态 ($e^{-t/\tau} < 0.01$) 所需要的时间；
- (d) 在共振点附近要注意随时调节 ω ，勿使振幅过大 ($\theta_{\max} < 180^\circ$) 以免损坏波耳共振仪，在阻尼较小时尤其要小心操作；
- (e) 几种阻尼状态下的幅频特性曲线和相频特性曲线要画在同一张坐标纸上，以便进行比较。

7. 原始数据记录

REFERENCES

阻尼振动与受迫振动

班级 物理-教02 姓名 谢泽超 学号 2020012504 实验座位号 20 实验日期 2024.3.25

请自行补全表格中物理量符号单位

一、0 档阻尼下摆盘自由振动，一次启摆连续测 50 个幅度，再次启摆连续测 5 个 $10T_d$

幅度连续测量									
序号	幅度	序号	幅度	序号	幅度	序号	幅度	序号	幅度
1	117	11	107	21	97	31	88	41	79
2	116	12	106	22	96	32	87	42	78
3	115	13	105	23	95	33	86	43	77
4	114	14	104	24	94	34	85	44	76
5	113	15	103	25	93	35	84	45	76
6	112	16	102	26	92	36	83	46	75
7	111	17	101	27	91	37	82	47	74
8	110	18	100	28	90	38	82	48	73
9	109	19	99	29	90	39	81	49	72
10	108	20	98	30	88	40	80	50	72
周期 测量	序号	1	2	3	4	5			
	$10T_d$	15.359	15.374	15.385	15.394	15.399			

二、阻尼档 2 的阻尼振动与受迫振动

1、阻尼振动（幅度连续测量）

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
幅度	72	62	54	46	40	35	30	26	22	18	13	10
T_d	1.532	1.534	1.537	1.538	1.540	1.543	1.543	1.544	1.544	1.545	1.545	1.545

2、受迫振动

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
周期	1.697	1.520	1.625	1.587	1.490	1.432	1.384	1.692	1.676	1.663
幅度	26	90	42	64	54	28	20	26	29	31
相差 1	10.5	122.5	20	33	146.5	160.5	162.5	10.5	12	13.5
相差 2	15	121	23.5	35	149.5	165	171.5	15.5	16.5	17.5
平均相差	12.75	121.75	21.75	34	148	162.75	167	13	14.25	15.5
序号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
周期	1.654	1.611	1.593	1.569	1.560	1.551	1.531	1.508	1.485	1.497
幅度	34	50	59	78	86	96	106	78	49	61
相差 1	14.5	23	31	46	54	65	98.5	133	149	140
相差 2	18.5	26.5	38.5	47.5	54.5	65.5	99	135	152	142
平均相差	16.5	24.75	32.25	46.75	54.25	65.25	98.75	134	150.5	141

普 5 周一下

图 9. 原始数据记录页 1

三、阻尼档上的阻尼振动与受迫振动

1、阻尼振动（幅度连续测量）

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
幅度	92	68	50	37	27	19	14	9	6	4	2	1
T_d	1.529	1.533	1.536	1.536	1.536	1.538	1.537	1.536	1.539	1.540	1.544	1.546

2、受迫振动

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
周期	1.436	1.395	1.487	1.514	1.547	1.563	1.577	1.601	1.612	1.626
幅度	25	20	39	46	52	51	48	41	38	36
相差 1	102.5	149	126	109	83.5	70.5	60	47	42	36
相差 2	148	156	130	112.5	85.5	72.5	62.5	52	46	41
平均相差	145.25	152.5	128	110.75	84.5	71.5	61.25	49.25	44	38.5
序号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
周期	1.553	1.562	1.529	1.539	1.544	1.537	1.574	1.585	1.592	1.612
幅度	53	52	52	54	54	54	50	47	45	39
相差 1	78	72.5	99.5	100	97	77	61	54.5	51	40.5
相差 2	80	70	101.5	101.5	98.5	79	62.5	57.5	54	44.5
平均相差	79	71.25	100.5	100.75	97.75	78	61.75	56	52.5	42.5

图 10. 原始数据记录页 2