清华大学数学系本科生2023年春概率论I期末考题(A)

考试时间: 2023年6月18日上午9:00-11:00　地点: 一教-101

考生姓名:　　　　学号:　　　　班号:

选做5题(每题20分), 多做取最高分

1. 设$\{\eta_n,\ \xi_n,\ \xi;\ n\geq 1\}$ 和 $\{A_n,\ n\geq 1\}$ 分别为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$上的随机变量序列和随机事件列.

(1)证明: $\xi_n\xrightarrow{L^r}\xi\Longrightarrow\xi_n\xrightarrow{\mathbf{P}}\xi\Longrightarrow\xi_n\xrightarrow{\mathbf{d}}\xi\ (r>0)$.

(2)$\xi_n\xrightarrow{L^r}\xi\Longleftarrow\xi_n\xrightarrow{\mathbf{P}}\xi\Longleftarrow\xi_n\xrightarrow{\mathbf{d}}\xi\ (r>0)$是否成立？不成立举出反例.

(3) 若$\eta_n\xrightarrow{\mathbf{d}}c$ (其中 c 为一个常数), $\xi_n\xrightarrow{\mathbf{d}}\xi$, 证明: $\eta_n\xi_n\xrightarrow{\mathbf{d}}c\xi$.

(4) 若$\{A_n:n\geq 1\}$相互独立, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)=\infty\ \Leftrightarrow\mathbf{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k)=1$.

2. 设ξ 和 η 是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$上的独立随机变量. 证明:

(1) $\mathbf{E}\{|\xi+\eta|\}<+\infty\Longleftrightarrow\mathbf{E}\{|\xi|\}<+\infty,\ \mathbf{E}\{|\eta|\}<+\infty$.

(2) 如 $\mathbf{E}\{\eta\}=0$, $\mathbf{E}\{|\xi|\}<+\infty$, 则 $\mathbf{E}\{|\xi+\eta|\}\geq\mathbf{E}\{|\xi|\}$.

(3) 设 $\{F_k,\ k\geq 1\}$ 为定义在$\Re=(-\infty,\infty)$上的一列概率分布函数. 证明存在一个概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$及其上的一列独立随机变量$\{\xi_k,k\geq 1\}$ 使得 $F_k(x)=\mathbf{P}(\omega:\xi_{\mathbf{k}}(\omega)<\mathbf{x})$, $x\in\Re$, $k\geq 1$.

3.(1) 设$\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$上**i.i.d.**随机变量且 $\xi_1\sim\mathbf{N}(a,\sigma^2)$. 证明: $\bar{\xi}\triangleq\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$ 与 $S_n^2\triangleq\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-\bar{\xi})^2$ 是独立随机变量且 $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$.

(2) 设ξ 为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$上的非负随机变量. 证明: 对 $\forall s>0$ 有

$$\int_0^{\infty}x^s d\mathbf{F}_{\xi}(x)=\int_0^{\infty}sx^{s-1}\mathbf{P}\{\omega:\xi(\omega)\geq x\}dx.$$

(3) 设 $\{f_n(t);\ n\geq 1\}$ 是一列特征函数且 $f_n(t)\to f(t)$, $t\in\Re$. 如果 函数 $f(t)$ 在 0 点连续且$f(0)=1$, 证明 存在一个概率分布函数$F(\cdot)$ 使得 $f(t)=\int_{\Re}\exp\{itx\}d\mathbf{F}(x)$, $\forall\ t\in\Re$, 其中 $i=\sqrt{-1}$.

4.设$\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$上 **i.i.d.**随机变量且 $\xi_1\sim U(0,1)$. 定义 $X\triangleq\min\{\xi_k,1\le k\le n\}$, $Y\triangleq\max\{\xi_k,1\le k\le n\}$. 求
(1) 随机向量 (ξ_1,Y) 与 (X,Y) 的概率分布函数.
(2) $\mathbf{P}\{\omega:Y-X\le\frac{1}{2}\}$. **(3)** $\mathbf{E}\{\xi_1^2|Y\}$.

5.(1)设随机向量$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T\sim\mathbf{N}\left(\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\-2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{smallmatrix}\right)\right)$.
求$\mathbf{E}\{\xi_2-\xi_3\big|\xi_1+\xi_2+\xi_3\}$.
(2) 设 $\{X_n,\ n\ge1\}$ 是**i.i.d.**随机变量序列且$X_1\sim C(1,0)$, 证明

$$\limsup_n\frac{1}{n}|\sum_{k=1}^n X_k|=\infty\ a.s..$$

6.设对每个$n\ge1$, $\{\xi_{n,m}:m=1,2,\cdots,n\}$是独立随机变量且满足:
(1) $\mathbf{E}\{\xi_{n,m}\}=0$; **(2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^n\mathbf{E}\{\xi_{n,m}^2\}=1$; **(3)** 对任意 $\varepsilon>0$,
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^n\mathbf{E}\big\{\xi_{n,m}^2I_{\{|\xi_{n,m}|>\varepsilon\}}(\omega)\big\}=0$. 令 $S_n\triangleq\sum\limits_{m=1}^n\xi_{n,m}$. 证明
$S_n\xrightarrow{\mathbf{d}}\xi\sim N(0,1)$.

7.设$\{\xi_n;\ n\ge1\}$ 是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$上的独立随机变量序列且 $\mathbf{E}\{\xi_n\}=0,n\ge1$.
(1)证明若$\sum\limits_{k=1}^\infty D(\xi_k)<\infty$, 则随机级数$\sum\limits_{k=1}^\infty\xi_k$ 几乎处处收敛.
(2)证明若$\{\xi_n;\ n\ge1\}$是**i.i.d.**随机变量序列,则 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\xi_k\xrightarrow{a.s.}0$.

8.(1)设$\xi=\{\xi_n,n\ge1\}$是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ 上的独立随机变量序列且$\mathbf{E}\{\xi_n^2\}<\infty$, $n\ge1$. $S_k\triangleq\sum\limits_{m=1}^k\xi_m,k\ge1$. 证明: $\forall n\ge1,\forall\varepsilon>0$,

$$\mathbf{P}\{\omega:\max_{1\le k\le n}\{|S_k-\mathbf{E}\{S_k\}|\}\ge\varepsilon\}\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^n D(\xi_k).$$

(2)证明若$\{\xi_n;\ n\ge1\}$ 是**i.i.d.**随机变量序列, $\mathbf{E}\{\xi_1^2\}=1$, $\mathbf{E}\{\xi_1\}=0$, 则 $\frac{1}{\sqrt{\nu_n}}\sum\limits_{k=1}^{\nu_n}\xi_k\xrightarrow{d}\xi\sim N(0,1)$, 其中 $\{\nu_n\}$为取正整数值的随机列且 $\frac{\nu_n}{n}\xrightarrow{\mathbf{d}}1$.

9. 设$\xi=\{\xi_n,n\ge1\}$是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbf{P})$上一个**sub-martingale**(下央), 其中滤子 $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_n\}_{n\ge1}$ 满足:$\mathcal{F}_n\subseteq\mathcal{F}_{n+1}\subseteq\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_n$ 是σ-代数(**field**). **S**和**T** 是关于$\mathbb{F}$的两个随机停时. 证明
(1) $\mathcal{F}_{\mathbf{T}}\triangleq\{A\in\mathcal{F}\mid A\cap\{\omega:T(\omega)\le n\}\in\mathcal{F}_n,n\ge1\}$ 是 Ω上的一个σ-代数(**field**).
(2) $\xi_{\mathbf{T}}$ 是 $\mathcal{F}_{\mathbf{T}}$-可测. **(3)** 如 **T** 有界, 则 $\xi_{\mathbf{T}}$ 可积. **(4)** 如 **T**有界且 $\mathbf{S}\le\mathbf{T}$, 则 $\mathbf{E}\{\xi_{\mathbf{T}}\mid\mathcal{F}_{\mathbf{S}}\}\overset{a.s.}{\ge}\xi_{\mathbf{S}}$.