第十周第一次作业：

一. P152 2.

特征函数：$\phi(t)=E(e^{itx})=\int_0^{+\infty} e^{itx}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}dx$

$$=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{(-\lambda+it)x}dx$$

$$=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\Gamma(r)(-\lambda+it)^{-r}$$

$$=\left(\frac{1}{-\lambda+it}\right)^r$$

k阶原点矩m_k：

$$\phi(t)=\left(\frac{1}{-\lambda+it}\right)^r$$

求k阶导：$\phi^{(k)}(t)=\dfrac{(-1)^k r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1)}{(-\lambda+it)^{r+k}}$

$$m_k=\phi^{(k)}(0)=\frac{(-1)^k r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1)}{(-\lambda)^{r+k}}$$

3. (3) 取$t=-\frac{1}{2}$，$\left|\frac{1-t}{1+t^2}\right|=\frac{6}{5}>1$，不是特征函数

(4) 选取 $a_1, a_2\in\mathbb{C}$，$t_1,t_2\in\mathbb{R}$.

则 $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_i\bar{a}_j\sin(t_i-t_j)=a_1\bar{a}_2\sin(t_1-t_2)+a_2\bar{a}_1\sin(t_2-t_1)$

$$=(a_1\bar{a}_2-\bar{a}_1a_2)\sin(t_1-t_2)$$

取 $a_1=-1$, $a_2=i$, $t_1=-\frac{\pi}{2}$, $t_2=0$

则上式 $=-2i\notin\mathbb{R}$.

(8) 由反演公式. 若有 r.v. 的特征函数为 $|\cos(t)|$

则 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}|\cos t|\,dt$ 不可积.

剩余的(1)(2)(5)(6)(7)均可用反演公式算出密度函数

5. $f(t)$ 为实值特征函数. 证:

① $1-f(2t)\le 4[1-f(t)]$

② $1+f(2t)\geqslant 2[f(t)]^2$

Proof: $LHS=E(e^{2itx})$, $RHS=[E(e^{itx})]^2=LHS$

故由 $[f(t)-1][f(t)-3]\geqslant 0$

$\Rightarrow [f(t)]^2-4f(t)+3\geqslant 0$

$\Rightarrow f(2t)-4f(t)+4\geqslant 1$

$\Rightarrow 1-f(2t)\le 4[1-f(t)]$

$|f(t)|\le 1 \Rightarrow 1\geqslant[f(t)]^2 \Rightarrow 1+[f(t)]^2\geqslant 2[f(t)]^2$

$\Rightarrow 1+f(2t)\geqslant 2[f(t)]^2$

7. $g(u)=1-|u|,\ |u|<1$

(1) $\phi(t)=\int_{-1}^{+1}e^{itx}g(x)\,dx=\int_{-1}^{1}e^{itx}[1-|x|]\,dx=$

$\int_{-1}^{1}e^{itx}dx+\int_{-1}^{0}e^{itx}x\,dx-\int_{0}^{1}e^{itx}x\,dx$

$=\frac{2}{t^2}(1-\cos t)$

(2) $p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-itx}g(-t)\,dt=\frac{1}{\pi x^2}(1-\cos x)$

9. Cauchy 分布 $C(\lambda,u)$: $p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-u)^2}$

其特征函数 $\phi(t)=E(e^{itx})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\cos(tx)+i\sin(tx)]p(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(tx)p(x)dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(tx)p(x)dx$$

$$f(t)=e^{iut-\lambda|t|}=e^{iut}e^{-\lambda|t|}=[\cos(ut)+i\sin(ut)]e^{-\lambda|t|}$$

$$=\cos(ut)e^{-\lambda|t|}+i\sin(ut)e^{-\lambda|t|}$$

分别对 $f(t)$ 的实部 虚部求导. 即证明了 $\phi(t)$ 即为 $f(t)$

13. (1) $f(-t)=\overline{f(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}p(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it(-x)}p(-(-x))dx$

故取密度函数为 $p(-x)$ 的 r.v., 其特征函数为 $f(-t)$

(2) $|f(t)|^2=f(t)\overline{f(t)}=f(t)f(-t)$

设 ξ 的特征函数为 $f(t)$, η 的特征函数为 $f(-t)$

则 $|f(t)|^2$ 对应的 r.v. 为 $\xi\eta$

(3) $E(e^{it\sum_{k=1}^{Y}x_j})=\sum_n e^{-1}\frac{1}{n!}f(t)^n=e^{f(t)-1}$

其中 $Y\sim P(1)$ 为 r.v. x_j iid r.v.'s 特征函数为 $f(t)$

(4) $\mathrm{Re}f(t)=\frac{f(t)+\overline{f(t)}}{2}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}p(x)dx}{2}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\frac{p(x)+p(-x)}{2}p(x)dx$$

So Re(f(t)) is the Characteristic function of r.v. whose d.f. $p_1(x)=\dfrac{p(x)+p(-x)}{2}$

二. P158 1. ① $\int_0^1 f(ut)\,du=\int_0^1 du\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iutx}p(x)\,dx$

$=\int_0^1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(ux)}p(x)\,dx\,du$ ，令 $p(x,u)=p(x)$

$=\int_0^1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(ux)}p(x,u)\,dx\,du$ ，取 $s=ux$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 e^{its}p(\frac{s}{u},u)\,du\cdot\frac{1}{u}\cdot ds$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{its}\left(\int_0^1 p(\frac{s}{u},u)\frac{1}{u}\,du\right)ds$

为 ch.f.

② $\int_0^{+\infty} f(ut)e^{-u}\,du=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iutx}p(x)\,dx\,e^{-u}\,du$

$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iutx}e^{-u}p(x)\,dx\,du$ ，令 $s=ux$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{its}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u}p(\frac{s}{u},u)\,du\right)\frac{1}{u}\,ds$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{its}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}p(\frac{s}{u},u)\,du\right)ds$

为 ch.f.

③ $\int_0^{+\infty} e^{-|t|u}\,dG(u)=G(u)e^{-|t|u}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}G(u)\,d(e^{-|t|u})$

$=\int_0^{+\infty}G(u)|t|e^{-|t|u}\,du$

$=\int_0^{+\infty}G(u)e^{-|t|u}\,d(|t|u)=\int_0^{+\infty}G(\frac{|t|u}{|t|})e^{-|t|u}\,d(|t|u)$

由②结论. 即证明为 ch.f

④ $\int_0^{+\infty} e^{-t^2 u}\,dG(u) = \int_0^{+\infty} e^{-|t|(|t|u)}\,dG(u) = \int_0^{+\infty} e^{-|t|s}\,dG(\frac{s}{|t|})$

其中 $G(\frac{s}{|t|})$ 为关于 s 的 d.f. 故由 ③ 结论为 ch.f.

⑤ $\int_0^{+\infty} f(ut)\,dG(u) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iutx} p(x)\,dx\,dG(u)$

Similar to ①, let $s=ut$ and the result becomes $f_1(s)$

where $f_1(\cdot): \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ is a ch.f.

2. $f(u,t): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $G(u)$ d.f.

$\forall u.$ $f(u,\cdot)$ is a ch.f.

$\forall t$ $f(\cdot,t)$ is a continuous function.

Prove: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,t)\, dG(u)$ is a ch.f.

Proof: For $u \in \mathbb{R}$, suppose X_u is the r.v. whose ch.f. is $f(u,t)$

$f(u,t) = E(e^{itX_u})$

$f(\cdot,t)$ continuous function $\Rightarrow$

$$dF_u(x) = dx \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(u,t)(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{dF_u(x)}{du} = dx \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \frac{\partial f(u,t)}{\partial u}\, dx \quad \text{continuous}$$

So the integration

$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_u(x)\, dG(u)$ is the d.f. of the r.v.

whose ch.f. is $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,t)\, dG(u)$

13. Prove: $\mathrm{Re}[1-f(t)] \geq \frac{1}{4}\mathrm{Re}[1-f(2t)]$

Proof: $\mathrm{Re}[1-f(t)] = \dfrac{(1-f(t))+\overline{(1-f(t))}}{2} = 1-\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$

$$\mathrm{Re}[1-f(2t)] = \frac{(1-f(2t))+\overline{(1-f(2t))}}{2} = 1-\frac{f(2t)+f(-2t)}{2}$$

So we just need to prove:

$$[f(2t)-4f(t)+3]+[f(-2t)-4f(-t)+3] \geq 0$$

Notice that:

$$f(2t)-4f(t)+3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}\,dF(x) - 4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dF(x)+3$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx}-1)(e^{itx}-3)\,dF(x)$$

$$\mathrm{Re}[f(2t)-4f(t)+3] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(tx)-1][\cos(tx)-3]+\sin^2(tx) \geq 0$$

This is the same that:

$$\mathrm{Re}[f(-2t)-4f(-t)+3] \geq 0$$

Thus $[f(2t)-4f(t)+3]+[f(-2t)-4f(-t)+3]$

$= \mathrm{Re}[f(2t)-4f(t)+3]+\mathrm{Re}[f(-2t)-4f(-t)+3]$

≥ 0