CHAPTER 3 数学特征与特征函数

ZEYU XIE[1]

[1]

1. 数学期望

1.1. 定义.

Definition 1 (离散型随机变量的数学期望). 设离散型随机变量 ξ 的概率分布为 $p_i = P\{\xi = x_i\}$，$i = 1, 2, \ldots$，若 $\sum_i |x_i| p_i < +\infty$，则称

(1) $$E(\xi) = \sum_i x_i p_i$$

为随机变量 ξ 的数学期望。

Definition 2 (连续型随机变量的数学期望). 设连续型随机变量 ξ 的概率密度为 $p(x)$，若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x) dx < +\infty$，则称

(2) $$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

为随机变量 ξ 的数学期望。

Definition 3 (数学期望的统一写法). 设 ξ 为随机变量，则定义

(3) $$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

为随机变量 ξ 的数学期望。

1.2. 基本性质.

Proposition 1 (数学期望的性质). 设 ξ, η 为随机变量，且都有有限的数学期望，则有

(a) $E(c) = c$
(b) $E(c\xi) = cE(\xi)$
(c) $E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta)$
(d) 若 $\xi \geq 0$，则 $E(\xi) \geq 0$
(e) 若 $\xi \geq \eta$，则 $E(\xi) \geq E(\eta)$

[1] Department of Mathematics, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail address: xie.zeyu20@gmail.com.
Date: 2024 年 4 月 16 日.

Proposition 2 (Borel 函数下的数学期望). *设 ξ 为随机变量，$f(x)$ 为 Borel 函数，则有*

$$E[f(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) \tag{4}$$

此性质在多元随机变量的情况下也成立：设随机变量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 有联合分布函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，f 为 n 元 *Borel* 函数，则有

$$E[f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dF(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{5}$$

注:以上性质说明,可直接用 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的联合分布计算 $\eta = f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的数学期望，而不必先求出 η 的分布。

1.3. **独立随机变量的性质.**

Proposition 3 (独立随机变量数学期望的性质). *设 ξ, η 为独立随机变量，且 ξ 与 η 均可积，则乘积 $\xi\eta$ 也可积，且有*

$$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta) \tag{6}$$

Proposition 4 (独立随机变量数学期望的等价条件). *概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中的随机变量 ξ, η 独立的充要条件是：对任意使得 $f(\xi)$ 和 $g(\eta)$ 可积的 Borel 函数 f, g，有*

$$E[f(\xi)g(\eta)] = E[f(\xi)]E[g(\eta)] \tag{7}$$

1.4. **极限性质.** 我们考虑

$$\lim_{n\to\infty} E(\xi_n) = E(\lim_{n\to\infty} \xi_n) \tag{8}$$

成立的条件。

Proposition 5 (单调收敛定理). *设随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 满足条件*

$$0 \le \xi_1(\omega) \le \xi_2(\omega) \le \cdots \le \xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \tag{9}$$

则 8 成立。

Proposition 6 (Fatou 引理). *设 $\{\xi_n\}$ 是一随机变量序列*

(a) 若存在可积随机变量 σ，使得 $\xi_n \ge \sigma$, 则有

$$E(\liminf_{n\to\infty} \xi_n) \le \liminf_{n\to\infty} E(\xi_n) \tag{10}$$

(b) 若存在可积随机变量 τ，使得 $\xi_n \le \tau$, 则有

$$E(\limsup_{n\to\infty} \xi_n) \ge \limsup_{n\to\infty} E(\xi_n) \tag{11}$$

Proposition 7 (Lebesgue 控制收敛定理)**.** *设* $\{\xi_n\}$ *是一随机变量序列，若存在可积随机变量* η *使得* $|\xi_n| \leq \eta$*，且* $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$*，则 8 成立，即*

$$\lim_{n\to\infty} E(\xi_n) = E(\xi) \tag{12}$$

1.5. **常见分布的期望.**

Proposition 8 (Bernoulli 分布的数学期望)**.** *设随机变量* ξ *服从参数为* p *的 Bernoulli 分布，则有*

$$E(\xi) = p \tag{13}$$

Proposition 9 (二项分布的数学期望)**.** *设随机变量* ξ *服从参数为* (n, p) *的二项分布，则有*

$$E(\xi) = np \tag{14}$$

Proposition 10 (Possion 分布的数学期望)**.** *设随机变量* ξ *服从参数为* λ *的 Possion 分布，则有*

$$E(\xi) = \lambda \tag{15}$$

证明：直接计算

Proposition 11 (几何分布的数学期望)**.** *设随机变量* ξ *服从参数为* p *的几何分布，则有*

$$E(\xi) = \frac{1}{p} \tag{16}$$

Proposition 12 (均匀分布的数学期望)**.** *设随机变量* ξ *服从参数为* (a, b) *的均匀分布，则有*

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2} \tag{17}$$

Proposition 13 (正态分布的数学期望)**.** *设随机变量* ξ *服从参数为* (μ, σ^2) *的正态分布，则有*

$$E(\xi) = \mu \tag{18}$$

Proposition 14 (χ^2 分布的数学期望)**.** *设随机变量* ξ *服从参数为* n *的* χ^2 *分布，则有*

$$E(\xi) = n \tag{19}$$

Proposition 15 (Cauchy 分布的数学期望)**.** *设随机变量 ξ 有密度函数*

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \tag{20}$$

注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx = +\infty \tag{21}$$

故 Cauchy 分布的数学期望不存在。

注：常见的分布中，数学期望不存在的仅有 Cauchy 分布。

1.6. **两个引理.**

Proposition 16. *$E(\xi^2) = 0$ 的充分必要条件为 $\xi = 0 \quad a.s.$*

Proposition 17 (Cauchy-Schwarz 不等式)**.** *设 $\xi, \eta \in L^2$，则*

$$[E(\xi\eta)]^2 \le E(\xi^2)E(\eta^2) \tag{22}$$

2. 方差

Definition 4 (方差)**.** *随机变量 $\xi \in L^2$ 的数学期望为 $E(\xi)$，则称*

$$D(\xi) = E[(\xi - E(\xi))^2] \tag{23}$$

为随机变量 ξ 的方差。

Definition 5 (标准差)**.** *随机变量 $\xi \in L^2$ 的方差为 $D(\xi)$，则称*

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} \tag{24}$$

为随机变量 ξ 的标准差。

Proposition 18 (方差的基本性质)**.** *设 $\xi \in L^2$，c 为常数，则有*
(a) $D(\xi) \ge 0$，等号成立当且仅当 $\xi = E(\xi) \quad a.s.$
(b) $D(c\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2$
(c) $D(c\xi) = c^2 D(\xi)$
(d) $f(c) = E(\xi - c)^2$ 在 $c = E(\xi)$ 处取得最小值 $D(\xi)$

Example 1: 求 Possion 分布的方差

Solution 1: 设随机变量 ξ 服从参数为 λ 的 Possion 分布 $P(\lambda)$，则有

$$E(\xi) = \lambda, \quad E(\xi^2) = \lambda^2 + \lambda \tag{25}$$

故 Possion 分布的方差为

$$D(\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 = \lambda \tag{26}$$

Proposition 19 (常见分布的方差). *(a) Possion* 分布：设 $\xi \sim P(\lambda)$，则 $D(\xi) = \lambda$
(b) 正态分布：设 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $D(\xi) = \sigma^2$
(c) χ^2 分布：设 $\xi \sim \chi^2(n)$，则 $D(\xi) = 2n$
(d) Cauchy 分布：方差不存在（因为数学期望不存在）
(e) 二项分布：设 $\xi \sim B(n, p)$，则 $D(\xi) = np(1-p)$

Definition 6 (标准化随机变量). 设随机变量 ξ 的数学期望为 $E(\xi)$，方差为 $D(\xi)$，若 $D(\xi) > 0$，即 ξ 不为常数，则称

$$\xi^* = \frac{\xi - E(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}} \tag{27}$$

为随机变量 ξ 的标准化随机变量。ξ^* 具有以下性质：
(a) $E(\xi^*) = 0$
(b) $D(\xi^*) = 1$

3. 协方差阵

Definition 7 (协方差). 设随机变量 $\xi, \eta \in L^2$，则称

$$cov(\xi, \eta) = E[(\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))] \tag{28}$$

为随机变量 ξ, η 的协方差，协方差反映了 ξ, η 之间的相依程度，是一个有单位的量。

Definition 8 (协方差阵). 设随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则称

$$B = [b_{ij}] = \begin{pmatrix} cov(\xi_1, \xi_1) & cov(\xi_1, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_1, \xi_n) \\ cov(\xi_2, \xi_1) & cov(\xi_2, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\xi_n, \xi_1) & cov(\xi_n, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix} \tag{29}$$

为随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的协方差阵。

Proposition 20 (协方差阵的性质). 设随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则协方差阵 B 具有以下性质：
(a) $cov(\xi_i, \xi_j) = E(\xi_i \xi_j) - E(\xi_i)E(\xi_j)$
(b) B 为对称半正定阵
(c) $D(\xi_i + \xi_j) = D(\xi_i) + D(\xi_j) + 2cov(\xi_i, \xi_j)$

Proposition 21 (二维正态分布的协方差阵). 设二维随机向量 (ξ, η) 服从参数为 $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 的二维正态分布，则有

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \tag{30}$$

4. 相关系数

Definition 9 (相关系数)**.** 设随机变量 $\xi,\eta\in L^2$，则称

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}=E\left[\frac{\xi-E(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}}\cdot\frac{\eta-E(\eta)}{\sqrt{D(\eta)}}\right] \tag{31}$$

为随机变量 ξ,η 的相关系数，相关系数是一个无单位的量。
当 $\rho(\xi,\eta)=0$ 时，称 ξ,η 不相关。

Proposition 22 (相关系数的范围)**.** 对空间 L^2 中的非退化随机变量 ξ,η 而言，其相关系数 $\rho\in[-1,1]$。
$\rho=1$ 当且仅当 $\eta^*=\xi^*\quad a.s.$
$\rho=-1$ 当且仅当 $\eta^*=-\xi^*\quad a.s.$

Proposition 23. 对于空间 L^2 中的非退化随机变量，如下四个命题等价：
(a) ξ 和 η 不相关
(b) $cov(\xi,\eta)=0$
(c) $E(\xi\eta)=E(\xi)E(\eta)$
(d) $D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)$

Proposition 24 (独立性和相关性的关系)**.** ξ 和 η 独立 $\Rightarrow$ ξ 和 η 不相关，反之不成立。

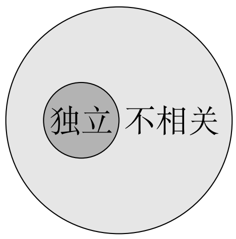

图 1. 独立性和相关性的关系

5. 条件数学期望

Definition 10 (条件分布函数)**.** 对任何有正概率的事件 B，定义随机变量 ξ 在事件 B 发生的条件下的条件分布函数为

$$F(x|B)=P\{\xi\le x|B\}=\frac{P\{\xi\le x,B\}}{P\{B\}} \tag{32}$$

注意到对固定的 B，$F(x|B)$ 也是一个分布函数，因此可以考虑对它的 *Lebesgue-Stieltjes* 积分

Definition 11 (条件数学期望)**.** 如果相应的积分绝对收敛，则称

$$E(\xi|B)=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x|B) \tag{33}$$

为随机变量 ξ 在事件 B 发生的条件下的条件数学期望。
特别地，当 $B=\{\eta=y\}$ 时，称 $E(\xi|\eta=y)$ 为给定 $\eta=y$ 时 ξ 的条件数学期望。

Definition 12 (给定 $\eta=y$ 的条件期望)**.** *(a)* 若 η 为离散型随机变量，则有

$$E(\xi|\eta=y_j)=\sum_i x_iP\{\xi=x_i|\eta=y_j\} \tag{34}$$

(b) 若 η 为连续型随机变量，则有

$$E(\xi|\eta=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x|\eta=y)dx \tag{35}$$

当 ξ 和 η 独立时，条件分布等于无条件分布，即 $E(\xi|\eta=y)=E(\xi)$。
若 g 为 Borel 函数，则有

$$E[g(\xi)|\eta=y]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF(x|\eta=y) \tag{36}$$

References

[1] 杨振明. 概率论（第二版）. 北京：科学出版社, 2007.