自学部分作业3：

1. Jordan-Hann测度定理：

设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为有限 m.s $f: X \to \mathbb{R}$ 可测，则：

存在两个唯一的可测函数 $f^+$ $f^-$. s.t. $f = f^+ - f^-$.

且 $|f^+(x)| \le f^-(x) \le |f(x)|$ a.s.

这里 $f^+$ 和 $f^-$ 称为 $f$ 的 Jordan-Hann分解.

证：构造积分核 $k(x, A) = \int_A |f(x)| d\mu$

由非负函数分解引理. $\exists$ 递增序列 $\{f_n^+\}$ 和 $\{f_n^-\}$ s.t.

$f_n^+ - f_n^- = f_n$ a.s. 且 $f^+$. $f^-$ 非负

欲证 $f^+(x) \le f^-(x)$ a.s. 可从递增序列性质及积分的单调性得到

具体地，可以证明 $k(x, \{f^+ \le f^-\}) = 0$.

下证唯一性. 若 $g^+$. $g^-$ 为另一组分规分解

$\Rightarrow f^+ = g^+$, $f^- = g^-$ a.s

最后. 由 $\int_X f^+ d\mu = \int_X f^- d\mu = \int_X f d\mu$ 得 $f^+$. $f^-$ 可积

2. Random-Nikodym Thm

$(X, \mathcal{A}, u)$ m.s. $(X, \mathcal{A}, v)$ another m.s.

若 $v$ 对 $u$ 绝对连续，则 ∃ 可测 $f: X \to [0, \infty)$ s.t. $\forall A \in \mathcal{A}$, $v(A) = \int_A f du$

证：据 Jordan-Hann 分解. 将其分为 $f^+ . f^-$.

即 $v = v^+ - v^-$, $|v^+| \leq v^-$ a.s.

令 $f = f^+ + f^-$. 则 $f$ 非负可测 $|v^+(x)| \leq v^-(x)$ a.s.

$\Rightarrow f^+ \leq f^- \Rightarrow f = f^+ + f^- = f^- - f^+$

据 Jordan-Hann: $v^+(A) = \int_A f^+ du$ $v^-(A) = \int_A f^- du$

将两式相加，我们得到：

$v(A) = v^+(A) + v^-(A) = \int_A f^+ du + \int_A f^- du = \int_A f du$

因此 $f$ 为所求函数. 定理得证.