

## CHAPTER 1 事件与概率

ZEYU XIE<sup>1</sup>

[1]

### 1. 概率空间

1.1. 代数、 $\sigma$  代数、单调类、 $\pi$  类、 $\lambda$  类. 设  $\varphi$  为空间  $\Omega$  的子集组成的非空类

**Definition 1** (代数和  $\sigma$  代数). 对有限交、取余封闭, 则称  $\varphi$  为  $\Omega$  上的代数  
若  $\varphi$  对无限交、取余封闭, 则称  $\varphi$  为  $\Omega$  上的  $\sigma$  代数

**Definition 2** (单调类). 若  $\varphi$  对单调极限封闭, 则称  $\varphi$  为  $\Omega$  上的单调类

**Definition 3** ( $\pi$  类). 若  $\varphi$  对有限交封闭, 则称  $\varphi$  为  $\Omega$  上的  $\pi$  类

**Definition 4** ( $\lambda$  类). 若  $\varphi$  对真差运算、上极限封闭, 则称  $\varphi$  为  $\Omega$  上的  $\lambda$  类

代数、 $\sigma$  代数、单调类、 $\pi$  类、 $\lambda$  类之间有如下性质

**Proposition 1.** (a)  $\sigma$  代数  $\Rightarrow$  代数  $\Rightarrow$  单调类

(b) 代数 and 单调类  $\Rightarrow \sigma$  代数

(c)  $\pi$  类 and  $\lambda$  类  $\Rightarrow \sigma$  代数

以及如下的单调类定理

**Proposition 2** (单调类定理).<sup>1</sup>

(a) 若  $\varphi$  为一代数, 则  $m(\varphi) = \sigma(\varphi)$

(b) 若  $\varphi$  为一  $\pi$  类, 则  $\lambda(\varphi) = \sigma(\varphi)$

以及如下的另一个定理

**Proposition 3.** 设  $\varphi$  和  $\mathcal{F}$  为  $\omega$  中的两个集类,  $\varphi \subseteq \mathcal{F}$

(a) 若  $\varphi$  为代数而  $\mathcal{F}$  为单调类  $\Rightarrow \sigma(\varphi) \subseteq \mathcal{F}$

(b) 若  $\varphi$  为  $\pi$  类而  $\mathcal{F}$  为  $\lambda$  类  $\Rightarrow \sigma(\varphi) \subseteq \mathcal{F}$

---

<sup>1</sup> DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TSINGHUA UNIVERSITY, BEIJING, CHINA.

E-mail address: xie.zeyu20@gmail.com.

Date: 2024 年 4 月 7 日.

<sup>1</sup> $m(\varphi)$ 、 $\sigma(\varphi)$ 、 $\lambda(\varphi)$  分别表示  $\varphi$  生成的最小单调类、最小  $\sigma$  代数、最小  $\lambda$  类

## 1.2. 概率空间.

**Definition 5** (概率空间). 设  $\Omega$  为样本空间,  $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  上的  $\sigma$  代数,  $P$  为定义在  $\mathcal{F}$  上的函数, 若满足

$$(a) P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$$

$$(b) P(\Omega) = 1$$

$$(c) \text{ 若 } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ 两两互斥, 则 } P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为概率空间

## 1.3. 条件概率.

**Definition 6** (条件概率). 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为概率空间,  $B \in \mathcal{F}$  且  $P(B) > 0$ , 则对任意  $A \in \mathcal{F}$ , 定义

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件  $B$  发生的条件下事件  $A$  发生的条件概率

条件概率有以下基本性质

**Proposition 4.** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为概率空间,  $B \in \mathcal{F}$  且  $P(B) > 0$ , 则

$$(a) \text{ 乘法定理: } P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

$$(b) \text{ 全概率公式: } P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i), \text{ 其中 } \{B_i\} \text{ 为 } \Omega \text{ 的一个分割}$$

$$(c) \text{ 贝叶斯公式: } P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}, \text{ 其中 } \{B_i\} \text{ 为 } \Omega \text{ 的一个分割}$$

可通过如下的例子来理解条件概率

**Example 1:** 某病误诊率为 5%, 记  $A = \{\text{验血为阳性}\}$ ,  $B = \{\text{患病}\}$ , 则  $P(\bar{A}|B) = 0.95$ ,  $P(A|\bar{B}) = 5\%$ , 若患病率 0.5%, 即  $P(B) = 0.005$ , 求  $P(B|A)$

**Solution 1:** 由贝叶斯公式

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.05 \times 0.995} \approx 0.087$$

也就是说, 验血为阳性的人中, 患病的概率为 8.7%

## 1.4. 独立性.

**Definition 7** (事件独立性). 两个事件:  $A$  和  $B$  独立可用下式表示

$$(1) \quad \text{独立} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

有限多个事件:  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  独立可用下式表示<sup>2</sup>

(2)

$$\text{独立} \Leftrightarrow \forall i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}, P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

无限多个事件: 设  $\{A_t\} \subseteq \mathcal{F}$ , 其中  $t \in T$ , 则定义  $\{A_t\}$  独立为

$$(3) \quad \text{独立} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T, A_{t_1} A_{t_2} \cdots A_{t_n} \text{ 独立}$$

独立事件有如下性质

**Proposition 5.** 设  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  独立, 则

$$(4) \quad P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n)$$

从而进一步有

$$(5) \quad P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

**Definition 8** (试验独立性). 两个试验: 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  和  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  为两个概率空间, 若

$$(6) \quad \forall A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2, P_1(A_1) P_2(A_2) = P_1(A_1 \times A_2)$$

则称两个概率空间独立, 其中  $A_1 \times A_2$  为 *Descartes* 乘积

有限个试验: 设  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  为  $n$  个概率空间, 若

$$(7) \quad \forall A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2, \dots, n, P_1(A_1) P_2(A_2) \cdots P_n(A_n) = P_1(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$$

则称  $n$  个概率空间独立

注意: 试验是否独立取决于乘积空间上概率测度的选择

## REFERENCES

- [1] 杨振明. 概率论 (第二版). 北京: 科学出版社, 2007.

---

<sup>2</sup>共有  $2^n - n - 1$  个式子