概率论作业 2 （英文教材 P19-P20 1.2）

（中文教材 P36-P38 5,8,9,10,11,14）

谢泽钰 2020012544

英文教材:

1. $(\bigcup_j A_j)\setminus(\bigcup_j B_j)=\bigcup_j(A_j\setminus B_j) \Leftrightarrow$ 对$\forall x\in \bigcup_j(A_j\setminus B_j)$

均有 $x\in\bigcup_j A_j$ 且 $x\notin\bigcup_j B_j$

$\Leftrightarrow$ 对$\forall x$ 存在于某个 $A_k\setminus B_k$ 均有 $x\notin\bigcup_j B_j$

$\Leftrightarrow (A_k\setminus B_k)\cap B_t=\emptyset \quad (\forall k,t)$

$(\bigcap_j A_j)\setminus(\bigcap_j B_j)=\bigcup_j(A_j\setminus B_j) \Leftrightarrow$ 对$\forall x\in\bigcup_j(A_j\setminus B_j)$

均有 $x\in\bigcap_j A_j$ 且 $x\notin\bigcap_j B_j$

$\Leftrightarrow$ 对$\forall x$ 存在某个 $A_k\setminus B_k$，均有 $x\in\bigcap_j A_j$

$\Leftrightarrow A_k\setminus B_k\subseteq A_t \quad (\forall k,t)$

2. $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

若 $x\in A\cap B$. 则 $x\notin A\triangle B$. $1_A(x)+1_B(x)=2\equiv 0 \pmod 2$

若 $x\in A\setminus B$或 $x\in B\setminus A$ 则 $x\in A\cup B$. $x\notin A\cap B\Rightarrow x\in A\triangle B$

$1_A(x)+1_B(x)=1\equiv 1 \pmod 2$

若 $x\notin A\cup B$ 则 $x\notin A\triangle B$ $\quad 1_A(x)+1_B(x)\equiv 0 \pmod 2$

综上即有 $1_{A\triangle B}\equiv 1_A+1_B \pmod 2$

中文教材·

5. 充分性. 若 $\lim_{n\to\infty} A_n=\phi$，则对 $\forall x$，存在 N，s.t. $n\geq N$ 时 $x\notin A_n$

此时若 $x\in B_N$，则 $x\in B_N\triangle A_{N+1}=B_{N+1}$. $x\in B_{N+1}\triangle A_{N+2}=B_{N+2}$，…

故对 $\forall n\geq N$，$x\in B_n$

若 $x\notin B_N$. 则 $x\notin B_N\triangle A_{N+1}=B_{N+1}$. $x\notin B_{N+1}\triangle A_{N+2}=B_{N+2}$，…

故对 $\forall n\geq N$，$x\notin B_n$

从而对 $\forall x$ 存在 $N=N(x)$，s.t. $n\geq N$ 时 $1_{B_n}(x)$ 恒为1或恒为0

从而 $\lim_{n\to\infty} B_n$ 存在.

必要性: $\lim_{n\to\infty} B_n$ 存在 即对 $\forall x$，存在 N，s.t. $n\geq N$ 时 $x\in B_n$ 或 $n\geq N$ 时 $x\notin B_n$

设 x 对应 N. 且 $x\in B_N$，$x\in B_{N+1}$，…

此时对 $\forall n\geq N+1$. 因 $B_n=B_{n-1}\triangle A_n$，故 $x\notin A_n$

设 x 对应 N 且 $x\notin B_N$，$x\in B_{N+1}$，…

此时对 $\forall n\geq N+1$. 因 $B_n=B_{n-1}\triangle A_n$. 故 $x\notin A_n$.

综上. 对 $\forall x$. 存在 $N=N(x)$，s.t. $\forall n\geq N$. $x\notin A_n$.

也即 $\lim_{n\to\infty} A_n=\phi$

8. (1) $\mathcal{C}$ 为代数，由单调类定理. $m(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$

又因 $\mathcal{F}$ 为单调类，故 $m(\mathcal{C})\subseteq\mathcal{F}$，故 $\sigma(\mathcal{C})\subseteq\mathcal{F}$

(2) $\mathscr{C}$为π类. 由单调类定理 $\lambda(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$

又因 $\mathscr{F}$为λ类，故 $\lambda(\mathscr{C})\subseteq\mathscr{F}$. 故 $\sigma(\mathscr{C})\subseteq\mathscr{F}$

9. (1) 由课本上的性质，σ代数为单调类. $m(\mathscr{C})\subseteq\sigma(\mathscr{C})$

若 $\sigma(\mathscr{C})\subseteq m(\mathscr{C})$ 则: $A\in\mathscr{C}\Rightarrow A\in\sigma(\mathscr{C})\Rightarrow A^c\in\sigma(\mathscr{C})\Rightarrow A^c\in m(\mathscr{C})$

$A,B\in\mathscr{C}\Rightarrow A,B\in\sigma(\mathscr{C})\Rightarrow A\cap B\in\sigma(\mathscr{C})\Rightarrow A\cap B\in m(\mathscr{C})$

反之若 $A\in\mathscr{C}\Rightarrow A^c\in m(\mathscr{C})$ 且 $A,B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B\in m(\mathscr{C})$

则 $A\in m(\mathscr{C})\Rightarrow A^c\in m(\mathscr{C})$ $A,B\in m(\mathscr{C})\Rightarrow A\cap B\in m(\mathscr{C})$

故 $m(\mathscr{C})$为代数. 又因其为单调类. 故 $m(\mathscr{C})$为σ代数

$\Rightarrow$ $\sigma(\mathscr{C})\subseteq m(\mathscr{C})$

(2) 由课本上的性质，λ类为单调类，$m(\mathscr{C})\subseteq\lambda(\mathscr{C})$

若 $\lambda(\mathscr{C})\subseteq m(\mathscr{C})$ 则 $A,B\in\mathscr{C}\Rightarrow A,B\in\lambda(\mathscr{C})\Rightarrow A\cap B\in\lambda(\mathscr{C})$

反之若 $A,B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B\in\lambda(\mathscr{C})$，则 $A,B\in\lambda(\mathscr{C})\Rightarrow A\cap B\in\lambda(\mathscr{C})$

$\Rightarrow$ $\lambda(\mathscr{C})$为π类，又因其为λ类，故$\lambda(\mathscr{C})$为σ代数 也为单调类

$\Rightarrow$ $\lambda(\mathscr{C})\subseteq m(\mathscr{C})$

10. 与9相同. 仅将交换为并即可

11. (1) 若 $A\in\mathscr{C}\Rightarrow A^c\in\mathscr{C}_\sigma$ 且 $A,B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cup B\in m(\mathscr{C})$

则 $A\in m(\mathscr{C})\Rightarrow A^c\in m(\mathscr{C})$ 且 $A,B\in m(\mathscr{C})\Rightarrow A\cup B\in m(\mathscr{C})$

故 $m(\mathscr{C})$为代数 又因$m(\mathscr{C})$为单调类. 故$m(\mathscr{C})$为σ-代数

$\Rightarrow \sigma(\mathscr{C}) \subseteq m(\mathscr{C})$

又因 $\sigma(\mathscr{C})$ 为 σ 代数. 也为单调族. 故 $m(\mathscr{C}) \subseteq \sigma(\mathscr{C})$

综上 $\sigma(\mathscr{C}) = m(\mathscr{C})$

(2) 若 $A \in \mathscr{C} \Rightarrow A^c \in \mathscr{C}$ 且 $A, B \in \mathscr{C} \Rightarrow A \cap B \in m(\mathscr{C})$

则同 (1) 可证 $m(\mathscr{C})$ 为 σ-代数.

$\Rightarrow \sigma(\mathscr{C}) = m(\mathscr{C})$

14. (1) 若 $\mathscr{F}_n$ $(n \geq 1)$ 为代数 (σ-代数)

则 $\forall$ 有限(无限)个集合 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in X}$ 在 $\mathscr{F}$ 中

$\Rightarrow \forall n \geq 1$, $\forall$ 有限(无限)个集合 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in X}$ 在 $\mathscr{F}_n$ 中

$\Rightarrow \forall n \geq 1,\ \bigcup\limits_{\alpha \in X} A_\alpha \in \mathscr{F}_n$ (因 $\mathscr{F}_n$ 为代数 (σ-代数))

$\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in X} A_\alpha \in \mathscr{F}$

(2) 设 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subseteq \mathscr{F}_t$ 则 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{F}_t$

$\Rightarrow$ 此时设 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subseteq \mathscr{H}$, 则对 $\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$\exists N = N(k)$ s.t. $n \geq N$ 有 $A_k \in \mathscr{F}_n$

取 $M = \sup\limits_{1 \leq t \leq n} N(t)$, 则 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}_M$

$\Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{F}_M \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{H}$

故由定义, $\mathscr{H}$ 为代数

但若$\mathcal{F}_n$换成σ代数，则$A_1, A_2, \cdots, A_n$相应地应为$\{A_\alpha\}_{\alpha\in X}$

此时不必能找到相应的M, s.t. $\forall t\in\alpha$, $A_t\in\mathcal{F}_M$.

故$\mathcal{F}$不一定为σ代数