CHAPTER 2 随机变量

ZEYU XIE[1]

[1]

1. 随机变量

Definition 1 (随机变量)**.** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$，若

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

则称 ξ 为随机变量

注：$\xi(\omega)$ 可简写为 ξ，$\xi(\omega) < x$ 可简写为 $\xi < x$
随机变量的逆变换有如下性质

Proposition 1. 设 ξ 为随机变量，其逆变换为 ξ^{-1}，则
(a) $\xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$
(b) $\forall B \subseteq C \Rightarrow \xi^{-1}(B) \subseteq \xi^{-1}(C)$
(c) $\xi^{-1}(\overline{B}) = \overline{\xi^{-1}(B)}$
(d) ξ 的 *Borel* 函数仍为随机变量

Proposition 2 (随机变量的结构)**.** *(a)* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中 $E \in F$ 的示性函数 $\mathbb{1}_E(\omega)$ 为随机变量
(b) 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为 *R.V.* $\Leftrightarrow \exists$ 简单随机变量列 $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ *s.t.* $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega), \forall \omega \in \Omega$（此处极限为逐点收敛）

2. 随机分布（分布）

Definition 2 (分布)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$\mathbb{F}(B) = P\{\xi^{-1}(B)\} = P\{\xi \in B\}, \forall B \in \mathcal{B}$，则 $\mathbb{F}$ 为一个概率测度，称作 ξ 的概率分布

$\mathbb{F}$ 刻画了 ξ 的分布规律

Definition 3 (相空间)**.** $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{F})$ 为 ξ 的相空间，$\mathbb{F}$ 与 ξ 有关

Definition 4 (分布函数)**.** $F(x) = \mathbb{F}((-\infty, x]) = P\{\xi \leq x\}, \forall x \in \mathbb{R}$，称 $F(x)$ 为 ξ 的分布函数

---

[1] Department of Mathematics, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail address: `xie.zeyu20@gmail.com`.
Date: 2024 年 4 月 15 日.

分布函数具有以下性质

Proposition 3. *(a)* $F(x)$ 单调不减，即 $x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$
(b) $F(x)$ 左连续，即 $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x) = F(x_0)$
(c) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Definition 5 (离散型)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，ξ 为随机变量，若 $\exists \{x_k\}, \{p_k\}$ 使得

$$p_k \ge 0, \sum_k p_k = 1, P\{\xi = x_k\} = p_k, \forall k \tag{2}$$

则称 ξ 为离散型随机变量，其密度阵

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Definition 6 (连续型)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，ξ 为随机变量，若 $\exists p(x)$ 使得

$$p(x) \ge 0, \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1, P\{\xi = a\} = 0, \forall a \tag{4}$$

则称 ξ 为连续型随机变量，其密度函数为 $p(x)$

不管是什么类型的随机变量，我们都有

Proposition 4 (Lebesgue 分解)**.** 任意分布函数 $F(x)$ 可分解为

$$F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + c_3 F_3(x) \tag{5}$$

其中 $F_1(x)$ 为纯条约分布函数，$F_2(x)$ 为连续型分布函数，$F_3(x)$ 为奇异分布函数

3. 一些典型分布

3.1. **二项分布.** $\xi \sim B(n, p)$

Definition 7 (二项分布)**.** 设 n 次独立重复试验，每次试验成功的概率为 p，失败的概率为 $1-p$，则 ξ 为成功次数，$\xi \sim B(n, p)$

Proposition 5 (二项分布的分布函数)**.**

$$P\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{6}$$

3.2. **几何分布.** $\xi \sim G(p)$

Definition 8 (几何分布)**.** 设独立重复试验，每次试验成功的概率为 p，失败的概率为 $1-p$，则 ξ 为第一次成功所需的试验次数，$\xi \sim G(p)$

Proposition 6 (几何分布的分布函数)**.**

$$P\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p \tag{7}$$

3.3. **Pascal 分布（负二项分布）.** $\xi \sim F(n,p)$

Definition 9 (Pascal 分布)**.** 设独立重复试验，每次试验成功的概率为 p，失败的概率为 $1-p$，则 ξ 为第 n 次成功所需的试验次数，$\xi \sim F(n,p)$

Proposition 7 (Pascal 分布的分布函数)**.**

$$P\{\xi = k\} = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \tag{8}$$

3.4. **Poisson 分布.** $\xi \sim P(\lambda)$

Definition 10 (Poisson 分布)**.** 设独立重复试验，每次试验成功的概率为 λ/n，失败的概率为 $1-\lambda/n$，则 ξ 为成功次数，$\xi \sim P(\lambda)$

Proposition 8 (Poisson 分布的分布函数)**.**

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{9}$$

3.5. **正态分布.** $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$

Definition 11 (正态分布)**.** 设 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则其密度函数为

$$p(\xi) = \varphi_{\mu,\sigma}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{10}$$

Proposition 9 (正态分布的分布函数)**.**

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \tag{11}$$

3.6. **Gamma 分布.** $\xi \sim \Gamma(\lambda, r)$

Definition 12 (Gamma 分布)**.** 设 ξ 服从 *Gamma* 分布 $\Gamma(\lambda, r)$，其中 $\lambda > 0, r > 0$，则其密度函数为

$$p(\xi) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \xi^{r-1} e^{-\lambda\xi} \tag{12}$$

Proposition 10 (Gamma 分布的分布函数)**.**

$$F(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^x t^{r-1} e^{-\lambda t} dt \tag{13}$$

3.7. **指数分布.** Gamma 分布中 $r=1$ 的情形，$\xi \sim E(\lambda)$

Definition 13 (指数分布)**.** 设 ξ 服从指数分布 $E(\lambda)$，则其密度函数为

$$p(\xi) = \lambda e^{-\lambda\xi} \tag{14}$$

Proposition 11 (指数分布的分布函数)**.**

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \tag{15}$$

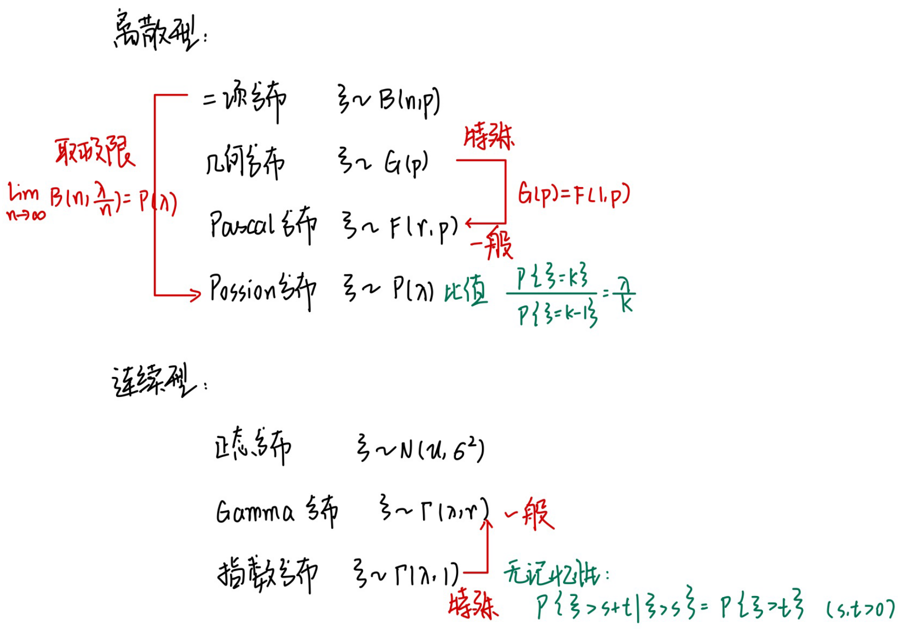

图 1. 各种分布的关系

3.8. **各种分布的关系.**

4. 多维概率分布

4.1. **联合分布.**

Definition 14 (联合分布函数)**.** 设 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ 与 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 为概率空间，ξ_1, ξ_2 为随机变量，$\xi_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}, \xi_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}$，则 ξ_1, ξ_2 的联合分布函数为

$$F(x_1, x_2) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\} \tag{16}$$

Proposition 12 (联合分布函数的性质)**.** *(a)* $F(x_1, x_2)$ 对 x_1, x_2 单调非降

(b) $F(x_1, x_2)$ 对 x_1, x_2 左连续

(c) $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$

(d) $F(+\infty, +\infty) = 1$

(e) $\Delta F = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0$, 且 ΔF 表示落入 $[a_1, a_2) \times [b_1, b_2)$ 的概率

Definition 15 (离散型联合分布)**.** (ξ, η) 有至多可列对 (x_i, y_j)，其联合分布为

$$P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij} \geq 0, \sum_{i,j} p_{ij} = 1 \tag{17}$$

Definition 16 (连续型联合分布)**.** *(a)* (ξ, η) 有密度函数 $p(x, y)$，其分布函数为

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u, v)\,du\,dv \tag{18}$$

其中 $p(x,y)\geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dxdy=1$ 为密度函数

(b) 对任意的 *Borel* 集合 $B\in\mathcal{B}^2$，有

$$P\{(\xi,\eta)\in B\}=\iint_B p(x,y)dxdy \tag{19}$$

Definition 17 (边缘分布)**.** 设 (ξ,η) 有联合分布 $F(x,y)$，则 ξ 的边缘分布为

$$F_1(x)=P\{\xi<x\}=F(x,+\infty) \tag{20}$$

η 的边缘分布为

$$F_2(y)=P\{\eta<y\}=F(+\infty,y) \tag{21}$$

Definition 18 (离散型边缘分布)**.**

$$P\{\xi=x_i\}=\sum_j p_{ij}, P\{\eta=y_j\}=\sum_i p_{ij} \tag{22}$$

Definition 19 (连续型边缘分布)**.**

$$\begin{aligned} p_1(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy\\ p_2(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} F_1(x)&=\int_{-\infty}^{x} p_1(u)du=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} p(u,v)dudv\\ F_2(y)&=\int_{-\infty}^{y} p_2(v)dv=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} p(u,v)dvdu \end{aligned} \tag{24}$$

4.2. **典型的二维分布.**

Definition 20 (二维均匀分布)**.** 设 (ξ,η) 有联合密度函数

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{25}$$

其中 $D\in\mathcal{B}^2$ 为平面上的区域，满足 $0<m(D)<+\infty$，$S=m(D)$ 为 D 的面积，则称 (ξ,η) 服从二维均匀分布

Definition 21 (二维正态分布)**.** 设 (ξ,η) 有联合密度函数

(26)

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 为常数，$\sigma_1,\sigma_2>0,\rho\in(-1,1)$，则称 (ξ,η) 服从二维正态分布，记作 $(\xi,\eta)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 或 $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$

Proposition 13. 二维正态分布的性质

(a) (ξ, η) 的边缘分布为

$$\begin{aligned} \xi &\sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ \eta &\sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{aligned} \tag{27}$$

(b) (ξ, η) 的条件分布为

$$\begin{aligned} \xi|\eta = y &\sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\right) \\ \eta|\xi = x &\sim N\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right) \end{aligned} \tag{28}$$

(c) (ξ, η) 的独立性与 ρ 无关

5. 随机变量的独立性

[1]

5.1. **条件分布.**

Definition 22 (条件分布)**.** 设 (ξ, η) 有联合分布 $F(x, y)$，设 $B \in \mathcal{B}$，则 ξ 在条件 $\eta \in B$ 下的条件分布为

$$F(x|B) = P\{\xi < x|\eta \in B\} = \frac{P\{\xi < x, \eta \in B\}}{P\{\eta \in B\}} \tag{29}$$

Definition 23 (离散型条件分布)**.**

$$P\{\xi = x_i|\eta = y_j\} = \frac{P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}} \tag{30}$$

Definition 24 (连续型条件分布)**.**

$$\begin{aligned} p(x|y) &= \frac{p(x,y)}{p_2(y)} \\ F(x|y) &= \int_{-\infty}^{x} p(u|y)du \end{aligned} \tag{31}$$

5.2. **随机变量独立性.** 根据条件分布的概念，我们可以定义随机变量的独立性

Definition 25 (两个随机变量的独立性)**.** 设 (ξ, η) 有联合分布 $F(x, y)$，ξ 在条件 $\eta = y$ 下的条件分布为 $F(x|y)$，若

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) \tag{32}$$

则称 ξ 与 η 独立

[1]关于独立性，第一章涉及事件的独立性，本章则主要探讨随机变量的独立性，注意区分

Definition 26 (有限个随机变量的独立性)**.** 设 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 有联合分布 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n) \tag{33}$$

则称 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 独立

Definition 27 (无限个随机变量的独立性)**.** 设 $(\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 有联合分布 $F(x_1, x_2, \cdots)$，若其中任意有限个随机变量独立，则称 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 独立

Proposition 14. [2] 关于有限个变量独立，以下两命题等价

(a) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 独立
(b) $\forall i_1, i_2, \cdots, i_k, k \le n$，$\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_k}$ 独立

Proposition 15. 关于两个离散变量独立，以下两命题等价

(a) ξ, η 独立
(b) $\forall x_i, y_j, P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P_1\{\xi = x_i\}P_2\{\eta = y_j\}$（联合分布为边缘分布之积）

Proposition 16. 关于 $\mathbb{R}$ 上的 *Borel* 函数 f_1, f_2，第一个命题成立可推出第二个命题成立

(a) ξ, η 独立
(b) $\forall$*Borel* 函数$f_1, f_2, f_1(\xi), f_2(\eta)$ 独立

6. 随机变量函数的分布

由于离散型随机变量的分布函数是分段常数函数，故我们主要讨论连续型随机变量的函数分布。

6.1. 一维情形.

Proposition 17. 设 ξ 为随机变量，密度函数 $p_\xi(x)$，$\eta = f(\xi)$，若 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上严格单调、连续，则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 存在且连续，此时 η 也为随机变量，其密度函数为

$$p_\eta(y) = p_\xi(f^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}f^{-1}(y)\right| \tag{34}$$

Example 1: 设 $\xi \sim N(0, 1)$，求 $\eta = \xi^2$ 的分布

Solution 1: 若 $y < 0$，则不存在 ξ 使得 $\xi^2 = y$，故 $p_\eta(y) = 0$
下面考虑 $y \ge 0$ 的情况

[2]由此性质知，多个变量独立可以推出其中两两独立，但反之不成立

$f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调、连续，反函数 $f^{-1}(y)=+\sqrt{y}$ 存在且连续
从而

$$p_{\eta,1}(y)=p_\xi(+\sqrt{y})\left|\frac{d}{dy}+\sqrt{y}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}} \tag{35}$$

由对称性，对于 $x<0$

$$p_{\eta,2}(y)=p_\xi(-\sqrt{y})\left|\frac{d}{dy}-\sqrt{y}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}} \tag{36}$$

故 η 的分布为

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases} \tag{37}$$

6.2. **多维情形.**

Proposition 18. 设 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 有联合密度函数 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n),\eta_j=f_j(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\quad(j=1,2,\cdots,n)$，若 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足方程组

$$\begin{cases}y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \cdots\\ y_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases} \tag{38}$$

有唯一解

$$\begin{cases}x_1=h_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)\\ x_2=h_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)\\ \cdots\\ x_n=h_n(y_1,y_2,\cdots,y_n)\end{cases} \tag{39}$$

且 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 对 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 均连续可导，则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为连续型随机变量，其联合密度函数为

$$\begin{cases}q(y_1,y_2,\cdots,y_n)=p(h_1,h_2,\cdots,h_n)|J| & \text{若 } y_1,y_2,\cdots,y_n \text{ 有解}\\ 0 & \text{若 } y_1,y_2,\cdots,y_n \text{ 无解}\end{cases} \tag{40}$$

其中

$$|J|=\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix} \tag{41}$$

为 *Jacobi* 矩阵的行列式

6.3. **常用性质.** 下面的性质描述了两个连续型随机变量的和、差、积、商的分布

Proposition 19. 设 ξ, η 为两个随机变量，联合密度函数为 $p_{\xi,\eta}(x,y)$ （ξ 和 η 不一定独立）

(a) 和的密度

$$
\begin{aligned}
p_{\xi+\eta}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(z-y, y)dy \\
F_{\xi+\eta}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\eta}(z-x)dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi}(z-y)dF_{\eta}(y)
\end{aligned}
\tag{42}
$$

(b) 差的密度

$$
\begin{aligned}
p_{\xi-\eta}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x, x-z)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(z+y, y)dy \\
F_{\xi-\eta}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\eta}(x-z)dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi}(z+y)dF_{\eta}(y)
\end{aligned}
\tag{43}
$$

(c) 积的密度

$$
\begin{aligned}
p_{\xi\eta}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x, \frac{z}{x})\frac{1}{|x|}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(z\cdot y, y)\frac{1}{|y|}dy \\
F_{\xi\eta}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\eta}(\frac{z}{x})dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi}(z\cdot y)dF_{\eta}(y)
\end{aligned}
\tag{44}
$$

(d) 商的密度

$$
\begin{aligned}
p_{\frac{\xi}{\eta}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x, \frac{x}{z})\frac{1}{|x|}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(z\cdot y, y)\frac{1}{|y|}dy \\
F_{\frac{\xi}{\eta}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\eta}(\frac{x}{z})dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi}(z\cdot y)dF_{\eta}(y)
\end{aligned}
\tag{45}
$$

下面的性质描述了有限个随机变量的最大、最小值的分布

Proposition 20. 最大、最小值的分布：设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 独立，且有相同的分布 $F(x)$ 或密度 $p(x)$，记 $\xi_{max} = \max\limits_{1\le i\le n} \xi_i, \xi_{min} = \min\limits_{1\le i\le n} \xi_i$，则 ξ_{max} 和 ξ_{min} 有联合分布

$$
q(x,y) = n(n-1)[F(y)-F(x)]^{n-2}p(x)p(y) \quad (x<y)
\tag{46}
$$

References

[1] 杨振明. <u>概率论（第二版）</u>. 北京：科学出版社, 2007.