第三周作业：

一、设 $\xi:(\Omega,\mathcal{F})\to(S,\mathcal{B}(S))$ 为可测映射.

设 $\xi^{-1}(B):=\{w:\xi(w)\in B\}$. $\forall B\in\mathcal{B}(S)$

证明：

(1) $\xi^{-1}(S)=\Omega$, $\xi^{-1}(\phi)=\phi$

(2) $(\xi^{-1}(A))^c=\xi^{-1}(A^c)$

(3) $\xi^{-1}(\bigcup_n A_n)=\bigcup_n\xi^{-1}(A_n)$, $A_n\in\mathcal{B}(S)$, $n\geq1$

(4) $\xi^{-1}(\bigcap_n A_n)=\bigcap_n\xi^{-1}(A_n)$, $A_n\in\mathcal{B}(S)$, $n\geq1$

(5) $\xi^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))=\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E}))$, $\mathcal{E}\subseteq\{B:B\subseteq S\}$

(6) If G is a σ-algebra on S', then $\xi^{-1}(G)$ is a σ-algebra on Ω

(1) 若 $\exists\alpha\in\Omega$, s.t. $\alpha\in\xi^{-1}(\phi)$. 则 $\xi(\alpha)\in\phi$ 矛盾. 故 $\xi^{-1}(\phi)=\phi$

若 $\exists\alpha\in\Omega\setminus\xi^{-1}(S)$. 则 $\xi(\alpha)\in S\setminus S=\phi$. 矛盾. 故 $\xi^{-1}(S)=\Omega$

(2) $\alpha\in\xi^{-1}(A^c)\Leftrightarrow\xi(\alpha)\notin A\Leftrightarrow\alpha\notin\xi^{-1}(A)\Leftrightarrow\alpha\in(\xi^{-1}(A))^c$

(3) $\alpha\in\bigcup_n\xi^{-1}(A_n)\Leftrightarrow\exists k\geq1$, s.t. $\xi(\alpha)\in A_k\Leftrightarrow\alpha\in\bigcup_n A_n\Leftrightarrow\alpha\in\xi^{-1}(\bigcup_n A_n)$

(4) $\alpha\in\bigcap_n\xi^{-1}(A_n)\Leftrightarrow\forall k\geq1$, $\xi(\alpha)\in A_k\Leftrightarrow\alpha\in\bigcap_n A_n\Leftrightarrow\alpha\in\xi^{-1}(\bigcap_n A_n)$

(5) $\alpha\in\xi^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))\Leftrightarrow\xi(\alpha)\in\sigma(\mathcal{E})\Leftrightarrow\exists\{\alpha_k\}_{k\geq1}\subseteq\Omega$, $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\alpha$ 且 $\xi(\alpha_k)\in\mathcal{E}$

$\Leftrightarrow\alpha\in\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{E}))$

(6) G is σ-algebra $\Rightarrow \sigma(G)=G$

由(5)知 $\xi^{-1}(\sigma(G))=\sigma(\xi^{-1}(G)) \Rightarrow \xi^{-1}(G)=\sigma(\xi^{-1}(G))$

$\Rightarrow \xi^{-1}(G)$是σ-代数

二. P101-102 2. 设 $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 单调递增. 欲证 f 可测. 即证 $\forall$ Borel集 $B\subseteq\mathbb{R}$

$f^{-1}(B)\subseteq\mathbb{R}$ 仍为Borel集

对 $c\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(-\infty,c)$ 和 $f^{-1}(c,+\infty)$ 均为区间 $\Rightarrow$ 均为Borel集

对 (a,b), $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. $f^{-1}(a,b)=f^{-1}(b)-f^{-1}(a) \Rightarrow$ Borel集

B为Borel集 $\Rightarrow$ B为可数开区间之并 $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$为可数Borel集之并 $\Rightarrow f^{-1}(B)\subseteq\mathcal{B}$.

3. 设 $f\in C(\mathbb{R})$, 则 f 可测 $\Leftrightarrow \forall B\in\mathcal{B}$. $f^{-1}(B)\in\mathcal{F}$

注意到 $\forall B\in\mathcal{B}$. $\exists f\in C(\mathbb{R})$, s.t. $f(B)=B$.

故 $\forall B\in\mathcal{B}$, $f^{-1}(B)\in\mathcal{F} \Leftrightarrow B\in\mathcal{F}$

P38 EX.2. $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ 为随机变量, 即 $\xi_n=\xi_n(\omega)$. $X\to\mathbb{R}$

则 $\sup_n \xi_n$. $\inf_n \xi_n$. $\overline{\lim_n}\, \xi_n$ 和 $\underline{\lim_n}\, \xi_n$ 均存在. 且均为 X 到 $\mathbb{R}$ 的映射

$\Rightarrow$ 以上四个也为随机变量