

CHAPTER 4 特征函数

ZEYU XIE¹

[1]

1. 母函数

Definition 1 (母函数). 对任何实数列 $\{p_n\}$, 如果幂级数

$$(1) \quad G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

的收敛半径 $s_0 > 0$, 则称 $G(s)$ 为 $\{p_n\}$ 的母函数。

特别地, 当 $\{p_n\}$ 为某非负整值随机变量 ξ 的概率分布时, $G(s)$ 至少在区间 $[-1, 1]$ 上绝对收敛且一致收敛, 此时有

$$(2) \quad G(s) = E(s^\xi)$$

称此 $G(s)$ 为随机变量 ξ 或其概率分布 $\{p_n\}$ 的母函数。

Example 1: 求 Poisson 分布和几何分布的母函数。

Solution 1:

(a) Poisson 分布的母函数

$$(3) \quad G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} s^n = e^{\lambda(s-1)}$$

收敛域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

(b) 几何分布的母函数

$$(4) \quad G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^{n-1} p s^n = \frac{ps}{1-(1-p)s}$$

收敛域为 $(-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p})$ 。

¹ DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TSINGHUA UNIVERSITY, BEIJING, CHINA.

E-mail address: xie.zeyu20@gmail.com.

Date: 2024 年 5 月 1 日.

Proposition 1 (分布由母函数唯一确定). 显然母函数由分布唯一确定, 反过来说, 由于 $G(s)$ 至少可以在区间 $(-1, 1)$ 内逐项求导, 再令 $s = 0$ 得

$$(5) \quad p_n = \frac{1}{n!} G^{(n)}(0)$$

所以母函数 $G(s)$ 也可以由分布 $\{p_n\}$ 唯一确定。

Proposition 2 (母函数与数学期望、方差的关系). 设非负整值随机变量 ξ 的母函数为 $G(s)$, 如果 $E(\xi)$ 和 $E(\xi^2)$ 有限, 那么

$$(6) \quad \begin{aligned} G'(1) &= E(\xi) \\ G''(1) &= E(\xi^2) - E(\xi) \end{aligned}$$

Proposition 3 (独立和的母函数). 设 ξ 和 η 是两个独立的非负整值随机变量, 分别有概率分布 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 母函数为 $A(s)$ 和 $B(s)$, 则 $\xi + \eta$ 的母函数为

$$(7) \quad C(s) = A(s)B(s)$$

Proposition 4 (随机多个非负整值随机变量之和的母函数). 设 $\{\xi_k\}$ 为相互独立的非负整值随机变量序列, 有共同的母函数 $G(s)$. 若 η 为另一非负整值随机变量, 其母函数为 $F(s)$, 那么当 η 与每个 ξ_k 均独立时, $\xi = \sum_{k=1}^{\eta} \xi_k$ 的母函数为

$$(8) \quad H(s) = F[G(s)]$$

2. 特征函数

Definition 2 (特征函数). 设 $F(x)$ 为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 上的一个分布函数, 称

$$(9) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

为 $F(x)$ 的特征函数。

Definition 3 (随机变量的特征函数). 设 $F(x)$ 为随机变量 ξ 的分布函数, 则此 $f(t)$ 也称为 ξ 的特征函数, 此时有

$$(10) \quad f(t) = E(e^{it\xi})$$

注: 对 $\forall t, x \in \mathbb{R}$, 总有 $|e^{itx}| = 1$, 故 10 式右端积分的模不超过 1。因此对任意的概率分布, 其特征函数唯一确定地存在。¹

Definition 4 (离散型随机变量的特征函数). 设 ξ 为离散型随机变量, 其概率分布为 $\{p_n\}$, 则其特征函数为

$$(11) \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{itx_k}, \quad p_k = P\{\xi = x_k\}$$

¹这就比只对非负整值随机变量有定义的母函数好很多

Definition 5 (连续型随机变量的特征函数). 设 ξ 为连续型随机变量, 其概率密度函数为 $p(x)$, 则其特征函数为

$$(12) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)e^{itx} dx$$

Proposition 5 (各种分布的特征函数). 离散型随机变量的特征函数

表 1. 离散型随机变量的特征函数

分布类型	特征函数
<i>Bernoulli</i> 分布	$f(t) = q + pe^{it}$
二项分布	$f(t) = (q + pe^{it})^n$
几何分布	$f(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
<i>Pascal</i> 分布	$f(t) = \left[\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}} \right]^n$
<i>Possion</i> 分布	$f(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

连续型随机变量的特征函数

表 2. 连续型随机变量的特征函数

分布类型	特征函数
正态分布	$f(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
<i>Gamma</i> 分布	$f(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha}$
指数分布	$f(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$
均匀分布	$f(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$

Proposition 6 (特征函数基本性质). (a) $|f(t)| \leq f(0) = 1$

(b) 共轭对称性: $f(-t) = \overline{f(t)}$

(c) $f(t)$ 在 $t \in \mathbb{R}$ 上一致连续

(d) 半正定性: 任意 $n \geq 1$, 任意 n 个实数 t_1, t_2, \dots, t_n , 任意 n 个复数 a_1, a_2, \dots, a_n , 有

$$(13) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \overline{a_j} f(t_i - t_j) \geq 0$$

(e) $f_{a+b\xi}(t) = e^{iat} f_{\xi}(bt)$

Proposition 7. 如果随机变量 ξ 的各阶原点矩有限, 那么对一切满足

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|t|^n E|\xi|^n}{n!} = 0$$

的 t, ξ 的特征函数 $f(t)$ 有展开式

$$(15) \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E(\xi^k)$$

该定理可用于计算符合某些条件的概率分布的特征函数。

Proposition 8. 设随机变量 ξ 的 k 阶原点矩有限, 则其特征函数 k 阶可微, 且有

$$(16) \quad f^{(k)}(t) = E[(i\xi)^k e^{it\xi}]$$

Proposition 9 (独立随机变量之和). 设 ξ 和 η 为两个独立的随机变量, 其特征函数分别为 $f_{\xi}(t)$ 和 $f_{\eta}(t)$, 则 $\xi + \eta$ 的特征函数为

$$(17) \quad f_{\xi+\eta}(t) = f_{\xi}(t)f_{\eta}(t)$$

即独立随机变量之和的特征函数等于各自特征函数的乘积。

3. 反演公式与唯一性定理

Lemma 10.

$$(18) \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\{a\}$$

Theorem 11 (反演公式). 设 $f(t)$ 为随机变量 ξ 的特征函数, $f(t)$ 在 t 的某个邻域内连续, 且 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续, 且 $f(0)=1$, 则 ξ 的分布函数 $F(x)$ 可以由 $f(t)$ 唯一确定, 且有

$$(19) \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) dt$$

Theorem 12 (唯一性定理). 分布函数由其特征函数唯一确定。

Theorem 13. 如果特征函数的模可积, 即

$$(20) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

那么对应的分布函数 $F(x)$ 为连续型, 且其密度函数为

$$(21) \quad p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) dt$$

Definition 6 (再生性). 设 $F(x; c)$ 为分布函数, 其中 c 为此概率分布的参数, 如果有

$$(22) \quad F(x; c_1) * F(x; c_2) = F(x; c_1 + c_2)$$

则称此分布关于参数 c 具有再生性。

由 12 可知, 特征函数的乘积等于特征函数的和, 所以再生性也可以由特征函数的乘积等于特征函数的和来刻画

$$(23) \quad f(t; c_1)f(t; c_2) = f(t; c_1 + c_2)$$

Definition 7 (多元特征函数). 定义 n 元分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 所对应的 n 元特征函数为

$$(24) \quad f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n)} dF(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

如果 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的分布函数, 则有

$$(25) \quad f(t_1, t_2, \dots, t_n) = E \left[e^{i(t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + \dots + t_n \xi_n)} \right]$$

此时称 f 为随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的联合特征函数, 它在 \mathbb{R}^n 上是一致连续的。

Proposition 14 (多元特征函数的性质). (a) $|f(t_1, t_2, \dots, t_n)| \leq f(0, 0, \dots, 0) = 1$

(b) $f(-t_1, -t_2, \dots, -t_n) = \overline{f(t_1, t_2, \dots, t_n)}$

(c) $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 在 \mathbb{R}^n 上一致连续

(d) 若混合矩 $E(\xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n})$ 有限, 则可用 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的联合特征函数在原点的矩阵求导, 即有公式

$$(26) \quad f^{(k_1, k_2, \dots, k_n)} = i^{-\sum_{j=1}^n k_j} \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \dots \partial t_n^{k_n}} \Big|_{t_1=t_2=\dots=t_n=0}$$

(e) (反演公式) 如果随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 取值于 n 维区间 $\Delta = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 的边界面上的概率为 0, 则有

$$(27) \quad \begin{aligned} & P\{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \Delta\} \\ &= P\left\{\bigcap_{j=1}^n [a_j \leq \xi_j \leq b_j]\right\} \\ &= \lim_{\substack{c_j \rightarrow +\infty \\ j=1, 2, \dots, n}} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-c_1}^{c_1} \int_{-c_2}^{c_2} \dots \int_{-c_n}^{c_n} \prod_{j=1}^n \frac{e^{-it_j a_j} - e^{-it_j b_j}}{it_j} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n \end{aligned}$$

(f) 多元分布函数和特征函数也是一一对应的。

4. 多元正态分布

Definition 8 (多元正态分布). 设

$$(28) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 B 为 $n \times n$ 对称正定阵, 则由

$$(29) \quad p(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{a})^T B^{-1}(\vec{x} - \vec{a}) \right\}$$

给出的 $p(\vec{x})$ 满足

$$(30) \quad p(\vec{x}) > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} p(\vec{x}) d\vec{x} = 1$$

以此 $p(\vec{x})$ 为密度函数的连续型分布称为 n 元正态分布, 记为 $N(\vec{a}, B)$ 。

Proposition 15. n 元正态分布的特征函数为

$$(31) \quad f(\vec{t}) = \exp \left\{ i\vec{a}^T \vec{t} - \frac{1}{2} \vec{t}^T B \vec{t} \right\}$$

Definition 9 (多元正态分布的特征函数定义). 设 n 元随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的联合特征函数为 $f(\vec{t})$, 如果 $f(\vec{t})$ 满足 31 式, 则称 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 服从 n 元正态分布 $N(\vec{a}, B)$ 。

Proposition 16 (边缘分布). 设 n 元正态分布 $N(\vec{a}, B)$ 的 n 元随机向量为 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, 则其任意 k 个分量的联合分布称为 k 元边缘分布, 其特征函数为

$$(32) \quad f(\vec{t}) = \exp \left\{ i\vec{a}_k^T \vec{t} - \frac{1}{2} \vec{t}^T B_k \vec{t} \right\}$$

其中 \vec{a}_k 为 \vec{a} 的前 k 个分量, B_k 为 B 的前 k 行前 k 列的子阵。

Proposition 17 (数字特征). \vec{a} 为 $\vec{\xi}$ 的特征

REFERENCES

- [1] 杨振明. 概率论 (第二版). 北京: 科学出版社, 2007.