概率论の笔记:

第二次课: 概率空间

集合的上下极限: $A_n \uparrow A$: $\lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A$

$A_n \downarrow A$: $\lim\limits_{n\to\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A$

定义. 设$\mathscr{C}$为空间Ω的子集组成的非空类

(1) 对有限交、取余封闭: 代数 $\xrightarrow{\text{有限变为无限}}$ σ代数

(2) 对单调极限运算封闭: 单调类

(3) 对有限交运算封闭: π类

(4) 真差运算、上极限封闭: λ类

性质: σ代数 $\Rightarrow$ λ类 $\Rightarrow$ 单调类

代数 + 单调类 $\Rightarrow$ σ代数

π类 + λ类 $\Rightarrow$ σ代数

单调类定理: 设$\mathscr{C}$为Ω中的集类

(1) 若$\mathscr{C}$为一代数 $\Rightarrow$ $\underbrace{m(\mathscr{C})}_{\text{生成的单调类}} = \sigma(\mathscr{C})$

(2) 若$\mathscr{C}$为一π类 $\Rightarrow$ $\underbrace{\lambda(\mathscr{C})}_{\text{生成的}\lambda\text{类}} = \underbrace{\sigma(\mathscr{C})}_{\text{生成的}\sigma\text{代数}}$

另一个定理：设$\mathcal{C}$和$\mathcal{F}$为Ω中的两个集类，$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{F}$

(1) 若$\mathcal{C}$为代数而$\mathcal{F}$为单调类 $\Rightarrow$ $\sigma(\mathcal{C})\subseteq\mathcal{F}$

(2) 若$\mathcal{C}$为π类而$\mathcal{F}$为λ类 $\Rightarrow$ $\sigma(\mathcal{C})\subseteq\mathcal{F}$