CHAPTER 4 特征函数

ZEYU XIE[1]

[1]

1. 母函数

Definition 1 (母函数)**.** 对任何实数列 $\{p_n\}$，如果幂级数

$$G(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n s^n \tag{1}$$

的收敛半径 $s_0>0$，则称 $G(s)$ 为 $\{p_n\}$ 的母函数。
特别地，当 $\{p_n\}$ 为某非负整值随机变量 ξ 的概率分布时，$G(s)$ 至少在区间 $[-1,1]$ 上绝对收敛且一致收敛，此时有

$$G(s)=E(s^{\xi}) \tag{2}$$

称此 $G(s)$ 为随机变量 ξ 或其概率分布 $\{p_n\}$ 的母函数。

Example 1: 求 Possion 分布和几何分布的母函数。

Solution 1:

(a) Possion 分布的母函数

$$G(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}s^n=e^{\lambda(s-1)} \tag{3}$$

收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。

(b) 几何分布的母函数

$$G(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{n-1}ps^n=\frac{ps}{1-(1-p)s} \tag{4}$$

收敛域为 $(-\frac{1}{1-p},\frac{1}{1-p})$。

---

[1] Department of Mathematics, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail address: xie.zeyu20@gmail.com.

Date: 2024 年 4 月 18 日.

Proposition 1 (分布由母函数唯一确定). 显然母函数由分布唯一确定, 反过来说, 由于 $G(s)$ 至少可以在区间 $(-1,1)$ 内逐项求导，再令 $s=0$ 得

$$p_n = \frac{1}{n!}G^{(n)}(0) \tag{5}$$

所以母函数 $G(s)$ 也可以由分布 $\{p_n\}$ 唯一确定。

Proposition 2 (母函数与数学期望、方差的关系). 设非负整值随机变量 ξ 的母函数为 $G(s)$，如果 $E(\xi)$ 和 $E(\xi^2)$ 有限，那么

$$\begin{aligned} G'(1) &= E(\xi) \\ G''(1) &= E(\xi^2) - E(\xi) \end{aligned} \tag{6}$$

Proposition 3 (独立和的母函数). 设 ξ 和 η 是两个独立的非负整值随机变量，分别有概率分布 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，母函数为 $A(s)$ 和 $B(s)$，则 $\xi+\eta$ 的母函数为

$$C(s) = A(s)B(s) \tag{7}$$

Proposition 4 (随机多个非负整值随机变量之和的母函数). 设 $\{\xi_k\}$ 为相互独立的非负整值随机变量序列, 有共同的母函数 $G(s)$。若 η 为另一非负整值随机变量, 其母函数为 $F(s)$，那么当 η 与每个 ξ_k 均独立时，$\xi = \sum_{k=1}^{\eta} \xi_k$ 的母函数为

$$H(s) = F[G(s)] \tag{8}$$

2. 特征函数

Definition 2 (特征函数). 设 $F(x)$ 为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 上的一个分布函数，称

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) \tag{9}$$

为 $F(x)$ 的特征函数。

Definition 3 (随机变量的特征函数). 设 $F(x)$ 为随机变量 ξ 的分布函数，则此 $f(t)$ 也称为 ξ 的特征函数，此时有

$$f(t) = E(e^{it\xi}) \tag{10}$$

注：对 $\forall\, t, x \in \mathbb{R}$，总有 $|e^{itx}| = 1$，故 10 式右端积分的模不超过 1。因此对任意的概率分布，其特征函数唯一确定地存在。[1]

Definition 4 (离散型随机变量的特征函数). 设 ξ 为离散型随机变量，其概率分布为 $\{p_n\}$，则其特征函数为

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{itx_k}, \quad p_k = P\{\xi = x_k\} \tag{11}$$

[1]这就比只对非负整值随机变量有定义的母函数好很多

Definition 5 (连续型随机变量的特征函数)**.** 设 ξ 为连续型随机变量，其概率密度函数为 $p(x)$，则其特征函数为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)e^{itx}dx \tag{12}$$

Proposition 5 (各种分布的特征函数)**.** 离散型随机变量的特征函数

表 1. 离散型随机变量的特征函数

分布类型	特征函数
Bernoulli 分布	$f(t) = q + pe^{it}$
二项分布	$f(t) = (q + pe^{it})^n$
几何分布	$f(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Pascal 分布	$f(t) = \left[\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right]^n$
Possion 分布	$f(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

连续型随机变量的特征函数

表 2. 连续型随机变量的特征函数

分布类型	特征函数
正态分布	$f(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
Gamma 分布	$f(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha}$
指数分布	$f(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$
均匀分布	$f(t) = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$

Proposition 6 (特征函数基本性质)**.** *(a)* $|f(t)| \leq f(0) = 1$

(b) 共轭对称性：$f(-t) = \overline{f(t)}$

(c) $f(t)$ 在 $t \in \mathbb{R}$ 上一致连续

(d) 半正定性：任意 $n \geq 1$，任意 n 个实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，任意 n 个复数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{a_j}f(t_i - t_j) \geq 0 \tag{13}$$

(e) $f_{a+b\xi}(t) = e^{iat}f_\xi(bt)$

Proposition 7. 如果随机变量 ξ 的各阶原点矩有限，那么对一切满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|t|^n E|\xi|^n}{n!} = 0 \tag{14}$$

的 t，ξ 的特征函数 $f(t)$ 有展开式

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E(\xi^k) \tag{15}$$

该定理可用于计算符合某些条件的概率分布的特征函数。

Proposition 8. 设随机变量 ξ 的 k 阶原点矩有限，则其特征函数 k 阶可微，且有

$$f^{(k)}(t) = E\left[(i\xi)^k e^{it\xi}\right] \tag{16}$$

Proposition 9 (独立随机变量之和)**.** 设 ξ 和 η 为两个独立的随机变量，其特征函数分别为 $f_\xi(t)$ 和 $f_\eta(t)$，则 $\xi + \eta$ 的特征函数为

$$f_{\xi+\eta}(t) = f_\xi(t) f_\eta(t) \tag{17}$$

即独立随机变量之和的特征函数等于各自特征函数的乘积。

3. 反演公式与唯一性定理

Lemma 10.

$$\lim_{c \to +\infty} \int_0^c \frac{sinax}{x} dx = \frac{\pi}{2} sgn\{a\} \tag{18}$$

Theorem 11 (反演公式)**.** 设 $f(t)$ 为随机变量 ξ 的特征函数，$f(t)$ 在 t 的某个邻域内连续，且 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续，且 $f(0)=1$，则 ξ 的分布函数 $F(x)$ 可以由 $f(t)$ 唯一确定，且有

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) dt \tag{19}$$

Theorem 12 (唯一性定理)**.** 分布函数由其特征函数唯一确定。

Theorem 13. 如果特征函数的模可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \tag{20}$$

那么对应的分布函数 $F(x)$ 为连续型，且其密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) dt \tag{21}$$

Definition 6 (再生性)**.** 设 $F(x;c)$ 为分布函数，其中 c 为此概率分布的参数，如果有

$$F(x;c_1) * F(x;c_2) = F(x;c_1+c_2) \tag{22}$$

则称此分布关于参数 c 具有再生性。
由 *12* 可知，特征函数的乘积等于特征函数的和，所以再生性也可以由特征函数的乘积等于特征函数的和来刻画

$$f(t;c_1)f(t;c_2)=f(t;c_1+c_2) \tag{23}$$

Definition 7 (多元特征函数)**.** 定义 n 元分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 所对应的 n 元特征函数为

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n)}dF(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{24}$$

如果 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布函数，则有

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=E\left[e^{i(t_1\xi_1+t_2\xi_2+\cdots+t_n\xi_n)}\right] \tag{25}$$

此时称 f 为随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的联合特征函数，它在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致连续的。

Proposition 14 (多元特征函数的性质)**.** *(a)* $|f(t_1,t_2,\cdots,t_n)|\le f(0,0,\cdots,0)=1$
(b) $f(-t_1,-t_2,\cdots,-t_n)=\overline{f(t_1,t_2,\cdots,t_n)}$
(c) $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续
(d) 若混合矩 $E(\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n})$ 有限，则可用 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的联合特征函数在原点的矩阵求导，即有公式

$$f^{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}=i^{-\sum_{j=1}^n k_j}\left.\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0} \tag{26}$$

(e) (反演公式) 如果随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 取值于 n 维区间 $\Delta=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|a_i\le x_i\le b_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 的边界面上的概率为 *0*，则有

$$\begin{aligned}&P\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\Delta\}\\=&P\left\{\cap_{j=1}^n[a_j\le\xi_j\le b_j]\right\}\\=&\lim_{\substack{c_j\to+\infty\\ j=1,2,\cdots,n}}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-c_1}^{c_1}\int_{-c_2}^{c_2}\cdots\int_{-c_n}^{c_n}\prod_{j=1}^n\frac{e^{-it_ja_j}-e^{-it_jb_j}}{it_j}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)dt_1dt_2\cdots dt_n\end{aligned} \tag{27}$$

(f) 多元分布函数和特征函数也是一一对应的。

4. 多元正态分布

Definition 8 (多元正态分布)**.** 设

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{28}$$

其中 B 为 $n \times n$ 对称正定阵，则由

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T B^{-1}(\vec{x}-\vec{a})\right\} \tag{29}$$

给出的 $p(\vec{x})$ 满足

$$p(\vec{x}) > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} p(\vec{x}) d\vec{x} = 1 \tag{30}$$

以此 $p(\vec{x})$ 为密度函数的连续型分布称为 n 元正态分布，记为 $N(\vec{a}, B)$。

Proposition 15. n 元正态分布的特征函数为

$$f(\vec{t}) = \exp\left\{i\vec{a}^T\vec{t} - \frac{1}{2}\vec{t}^T B\vec{t}\right\} \tag{31}$$

Definition 9 (多元正态分布的特征函数定义)**.** 设 n 元随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的联合特征函数为 $f(\vec{t})$，如果 $f(\vec{t})$ 满足 *31* 式，则称 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 服从 n 元正态分布 $N(\vec{a}, B)$。

Proposition 16 (边缘分布)**.** 设 n 元正态分布 $N(\vec{a}, B)$ 的 n 元随机向量为 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则其任意 k 个分量的联合分布称为 k 元边缘分布，其特征函数为

$$f(\vec{t}) = \exp\left\{i\vec{a}_k^T\vec{t} - \frac{1}{2}\vec{t}^T B_k\vec{t}\right\} \tag{32}$$

其中 $\vec{a}_k$ 为 $\vec{a}$ 的前 k 个分量，B_k 为 B 的前 k 行前 k 列的子阵。

Proposition 17 (数字特征)**.** $\vec{a}$ 为 $\vec{\xi}$ 的特征

References

[1] 杨振明. 概率论（第二版）. 北京：科学出版社, 2007.