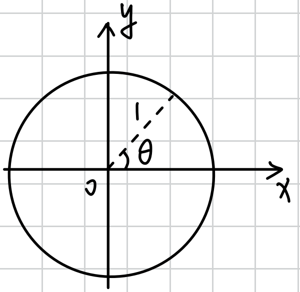
第五周第一次作业：

P58. 5.



$\theta \sim U(0, 2\pi)$

$\xi = 1 + \sin\theta$

当 $\xi \in (0, 2)$，对应两个 θ：θ_1 和 θ_2. s.t. $\xi = 1+\sin\theta_1 = 1+\sin\theta_2$

$\Rightarrow p_2(\xi) = p_1(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial\xi} + p_1(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial\xi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\xi} + \frac{\partial\theta_2}{\partial\xi}\right) = \frac{1}{\pi}\arccos(1-x)$

当 $\xi=0$ 和 $\xi=2$，可对应取使 $p_2(\xi)$ 连续的 $p_2(\xi)=0$

7. (1) $\int_0^{+\infty} e^{-e(x-a)}dx = -e^{-e(x-a)-1}\Big|_0^{+\infty} = e^{ae-1}$

$\Rightarrow ae-1=0 \Rightarrow a=e^{-1}$

(2) ξ 的密度函数为 $p(x) = e^{-e(x-e^{-1})} = e^{-ex+1}$ $(x>0)$

$P\{\xi \le b\} = \int_0^b p(x)dx = 1-e^{-1}$

$\Rightarrow b = 1 - P\{\xi \le b\} = 1+\frac{1}{e} - e^{-eb+1}$

$\Rightarrow b = e^{-1}$

P65-66 2. $P\{\text{掷一次无“6”}\} = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

$\Rightarrow P\{\text{第n次恰好出“6”}\} = (1-\frac{25}{36})\times(\frac{25}{36})^{n-1} = \frac{11\times 5^{2n-2}}{6^{2n}}$

4. 若胜4场者胜，则

$P_4 = 0.6^4 = 0.1296$

$p_5 = 0.6\times(4\times0.6^3\times0.4) = 0.2074$

$p_6 = 0.6\times[\binom{5}{2}\times0.6^3\times0.4^2] = 0.2074$

$p_7 = 0.6\times[\binom{6}{3}\times0.6^3\times0.4^3] = 0.1659$

$p_1(\text{甲胜}) = p_4+p_5+p_6+p_7 = 0.7103$

若"三局两胜"

$p_2(\text{甲胜}) = 0.6^3+\binom{3}{2}\times0.6^2\times0.4 = 0.6480$

故"三场两胜"甲队夺冠概率较小

5. 设成功一次概率为 p. 则 $p_0=(1-p)^n$

$p_2=\binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2}$ $p_4=\binom{n}{4}p^4(1-p)^{n-4}$ ...

$\Rightarrow P_n = \sum\limits_{\substack{k=0\\2|k}}^{n} p_k = \frac{1}{2}$

7. $\xi_1 \sim F(n,1)$ $\xi_2 \sim F(n,2)$

故 ξ_1, ξ_2 的分布分别为 $P\{\xi_1=k\}=p(1-p)^{k-1}$; $P\{\xi_2=k\}=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$

$\xi_2-\xi_1$ 分布为 $P\{\xi_2-\xi_1=k\}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}P\{\xi_1=j\}P\{\xi_2=j+k\}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}(k+j-1)p^3(1-p)^{2k+j-3}$

$=p(1-p)^{k-1}=P\{\xi_1=k\}$

P71 4. $\xi \sim P(\lambda)$, $\lambda=200$, ξ表示进店人数 $\Rightarrow P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

设η_k为进店k人,购买商品的人数 $\Rightarrow P\{\eta_k=s\}=\binom{k}{s}\cdot0.05^s\,0.95^{k-s}$

设 p_k 表示 k 人在这一小时内购买商品.

则 $p_t = \sum_{k=t}^{\infty} P\{\xi=k\} P\{\eta_k=t\} = \sum_{k=t}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-t)!} \lambda^k e^{-\lambda} = \lambda^t$

$P\{$一小时内购物人数 $\geq 6\} = \sum_{t=6}^{\infty} p_t = \frac{11}{12}$

8. $\forall k, \lambda$, Possion 分布均满足 $\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\lambda}{k}$ $(k \geq 1)$

为示区别. 设 $\{p_k'\}$ 为以 λ 为参数的 Possion 分布的分布函数

若 $p_1 > p_1'$. 则 $1 = p_1 + \sum_{k=2}^{\infty} p_k > p_1' + \sum_{k=2}^{\infty} p_k' = 1$. 矛盾.

同理若 $p_1 < p_1'$ 矛盾.

$\Rightarrow p_1 = p_1'$. 由比例关系及归纳法知 $p_k = p_k'$. 故为 Possion 分布

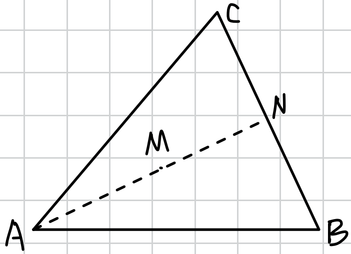
P77-78 1. $\xi \sim U(0,5)$

$4x^2 + 4\xi x + (\xi+2) = 0$ 有实根 $\Leftrightarrow$ $(4\xi)^2 - 4 \cdot 4(\xi+2) > 0$

$\Leftrightarrow$ $\xi < -1$ 或 $\xi > 2$

故 $P\{$有实根$\} = \frac{3}{5}$

2.



对于图中情况 若另取一点 M' 异于 M. 并形成新点 N'

则 N' 在 BN 段上 $\Leftrightarrow$ M 在 $\triangle ABN$ 内部

$\Rightarrow P\{N'$ 在 BN 段上$\} = \frac{S_{\triangle ANB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BN}{BC}$

$\Rightarrow N$ 在 BC 上的分布为均匀分布

3. 任取的 (x,y) 满足 $0<x<y<1$ 的联合分布：$p(x,y)=2$

为 $(0,0),(0,1),(1,1)$ 围成三角形的内均分布.

故 $(y-x)$ 的分布为 $p(y-x)=\int_0^{1-x} p(x,x+t)\,dt=\frac{1}{y-x}$

$\Rightarrow P\{\xi\in(x,y)\}=\frac{1}{y-x} \Rightarrow \xi\sim U(0,1)$

7. $\xi\sim N(0,1)$, $\eta=\begin{cases}\xi & |\xi|\le 1\\ -\xi & |\xi|>1\end{cases}$

由对称性知 $\eta\sim N(0,1)$ 与 ξ 相同

9. $\xi\sim Exp(\lambda)$, $\eta=[\xi]+1$

设 $p_k=P\{\eta=k\}=P\{[\xi]=k-1\}=P\{k-1\le\xi<k\}=F(k)-F(k-1)=e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda})$