CHAPTER 1 事件与概率

ZEYU XIE[1]

[1]

1. 概率空间

1.1. **代数、σ 代数、单调类、π 类、λ 类.** 设 φ 为空间 Ω 的子集组成的非空类

Definition 1 (代数和 σ 代数)**.** 对有限交、取余封闭，则称 φ 为 Ω 上的代数 若 φ 对无限交、取余封闭，则称 φ 为 Ω 上的 σ 代数

Definition 2 (单调类)**.** 若 φ 对单调极限封闭，则称 φ 为 Ω 上的单调类

Definition 3 (π 类)**.** 若 φ 对有限交封闭，则称 φ 为 Ω 上的 π 类

Definition 4 (λ 类)**.** 若 φ 对真差运算、上极限封闭，则称 φ 为 Ω 上的 λ 类

代数、σ 代数、单调类、π 类、λ 类之间有如下性质

Proposition 1. *(a)* σ 代数 $\Rightarrow$ 代数 $\Rightarrow$ 单调类
(b) 代数 *and* 单调类 $\Rightarrow$ σ 代数
(c) π 类 *and* λ 类 $\Rightarrow$ σ 代数

以及如下的单调类定理

Proposition 2 (单调类定理)**.** [1]
(a) 若 φ 为一代数，则 $m(\varphi) = \sigma(\varphi)$
(b) 若 φ 为一 π 类，则 $\lambda(\varphi) = \sigma(\varphi)$

以及如下的另一个定理

Proposition 3. 设 φ 和 $\mathcal{F}$ 为 ω 中的两个集类，$\varphi \subseteq \mathcal{F}$
(a) 若 φ 为代数而 $\mathcal{F}$ 为单调类 $\Rightarrow \sigma(\varphi) \subseteq \mathcal{F}$
(b) 若 φ 为 π 类而 $\mathcal{F}$ 为 λ 类 $\Rightarrow \sigma(\varphi) \subseteq \mathcal{F}$

---

[1] Department of Mathematics, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail address: `xie.zeyu20@gmail.com`.
Date: 2024 年 4 月 7 日.

[1] $m(\varphi)$、$\sigma(\varphi)$、$\lambda(\varphi)$ 分别表示 φ 生成的最小单调类、最小 σ 代数、最小 λ 类

1.2. **概率空间.**

Definition 5 (概率空间)**.** 设 Ω 为样本空间，$\mathcal{F}$ 为 Ω 上的 σ 代数，P 为定义在 $\mathcal{F}$ 上的函数，若满足

(a) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
(b) $P(\Omega) = 1$
(c) 若 $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ 两两互斥，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

则称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间

1.3. **条件概率.**

Definition 6 (条件概率)**.** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$B \in \mathcal{F}$ 且 $P(B) > 0$，则对任意 $A \in \mathcal{F}$，定义

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率

条件概率有以下基本性质

Proposition 4. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$B \in \mathcal{F}$ 且 $P(B) > 0$，则

(a) 乘法定理:$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$
(b) 全概率公式：$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$，其中 $\{B_i\}$ 为 Ω 的一个分割
(c) 贝叶斯公式：$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$，其中 $\{B_i\}$ 为 Ω 的一个分割

可通过如下的例子来理解条件概率

Example 1: 某病误诊率为 5%, 记 $A = \{$验血为阳性$\}, B = \{$患病$\}$, 则 $P(\overline{A}|B) = 0.95$，$P(A|\overline{B}) = 5\%$，若患病率 0.5%，即 $P(B) = 0.005$，求 $P(B|A)$

Solution 1: 由贝叶斯公式

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})} = \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.05 \times 0.995} \approx 0.087$$

也就是说，验血为阳性的人中，患病的概率为 8.7%

1.4. **独立性.**

Definition 7 (事件独立性)**.** 两个事件：A 和 B 独立可用下式表示

$$\text{(1)} \qquad 独立 \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

有限多个事件：n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 独立可用下式表示[2]

(2)
$$\text{独立} \Leftrightarrow \forall i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}, P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

无限多个事件：设 $\{A_t\} \subseteq \mathcal{F}$，其中 $t \in T$，则定义 $\{A_t\}$ 独立为

(3)
$$\text{独立} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in T, A_{t_1} A_{t_2} \cdots A_{t_n} \text{ 独立}$$

独立事件有如下性质

Proposition 5. 设 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 独立，则

(4)
$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n)$$

从而进一步有

(5)
$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

Definition 8 (试验独立性)**.** 两个试验：设 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ 和 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 为两个概率空间，若

(6)
$$\forall A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2, P_1(A_1) P_2(A_2) = P_1(A_1 \times A_2)$$

则称两个概率空间独立，其中 $A_1 \times A_2$ 为 *Descartes* 乘积
有限个试验：设 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$，$i = 1, 2, \ldots, n$ 为 n 个概率空间，若

(7)
$$\forall A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2, \ldots, n, P_1(A_1) P_2(A_2) \cdots P_n(A_n) = P_1(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$$

则称 n 个概率空间独立

注意：试验是否独立取决于乘积空间上概率测度的选择

References

[1] 杨振明. 概率论（第二版）. 北京：科学出版社, 2007.

[2] 共有 $2^n - n - 1$ 个式子