

CHAPTER 2 随机变量

ZEYU XIE¹

[1]

1. 随机变量

Definition 1 (随机变量). 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间, $\xi = \xi(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 若

$$(1) \quad \{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

则称 ξ 为随机变量

注: $\xi(\omega)$ 可简写为 ξ , $\xi(\omega) < x$ 可简写为 $\xi < x$

随机变量的逆变换有如下性质

Proposition 1. 设 ξ 为随机变量, 其逆变换为 ξ^{-1} , 则

$$(a) \quad \xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$$

$$(b) \quad \forall B \subseteq C \Rightarrow \xi^{-1}(B) \subseteq \xi^{-1}(C)$$

$$(c) \quad \xi^{-1}(\overline{B}) = \overline{\xi^{-1}(B)}$$

(d) ξ 的 Borel 函数仍为随机变量

Proposition 2 (随机变量的结构). (a) (Ω, \mathcal{F}, P) 中 $E \in \mathcal{F}$ 的示性函数 $\mathbb{1}_E(\omega)$ 为随机变量

(b) 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 为 R.V. $\Leftrightarrow \exists$ 简单随机变量列 $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ s.t. $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega), \forall \omega \in \Omega$ (此处极限为逐点收敛)

2. 随机分布 (分布)

Definition 2 (分布). (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间, $\mathbb{F}(B) = P\{\xi^{-1}(B)\} = P\{\xi \in B\}, \forall B \in \mathcal{B}$, 则 \mathbb{F} 为一个概率测度, 称作 ξ 的概率分布

\mathbb{F} 刻画了 ξ 的分布规律

Definition 3 (相空间). $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{F})$ 为 ξ 的相空间, \mathbb{F} 与 ξ 有关

Definition 4 (分布函数). $F(x) = \mathbb{F}((-\infty, x]) = P\{\xi \leq x\}, \forall x \in \mathbb{R}$, 称 $F(x)$ 为 ξ 的分布函数

¹ DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TSINGHUA UNIVERSITY, BEIJING, CHINA.

E-mail address: xie.zeyu20@gmail.com.

Date: 2024 年 4 月 15 日.

分布函数具有以下性质

Proposition 3. (a) $F(x)$ 单调不减, 即 $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

(b) $F(x)$ 左连续, 即 $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = F(x_0)$

(c) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Definition 5 (离散型). (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间, ξ 为随机变量, 若 $\exists \{x_k\}, \{p_k\}$ 使得

$$(2) \quad p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1, P\{\xi = x_k\} = p_k, \forall k$$

则称 ξ 为离散型随机变量, 其密度阵

$$(3) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Definition 6 (连续型). (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间, ξ 为随机变量, 若 $\exists p(x)$ 使得

$$(4) \quad p(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1, P\{\xi = a\} = 0, \forall a$$

则称 ξ 为连续型随机变量, 其密度函数为 $p(x)$

不管是什么类型的随机变量, 我们都有

Proposition 4 (Lebesgue 分解). 任意分布函数 $F(x)$ 可分解为

$$(5) \quad F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + c_3 F_3(x)$$

其中 $F_1(x)$ 为纯条约分布函数, $F_2(x)$ 为连续型分布函数, $F_3(x)$ 为奇异分布函数

3. 一些典型分布

3.1. 二项分布. $\xi \sim B(n, p)$

Definition 7 (二项分布). 设 n 次独立重复试验, 每次试验成功的概率为 p , 失败的概率为 $1-p$, 则 ξ 为成功次数, $\xi \sim B(n, p)$

Proposition 5 (二项分布的分布函数).

$$(6) \quad P\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

3.2. 几何分布. $\xi \sim G(p)$

Definition 8 (几何分布). 设独立重复试验, 每次试验成功的概率为 p , 失败的概率为 $1-p$, 则 ξ 为第一次成功所需的试验次数, $\xi \sim G(p)$

Proposition 6 (几何分布的分布函数).

$$(7) \quad P\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p$$

3.3. Pascal 分布 (负二项分布). $\xi \sim F(n, p)$

Definition 9 (Pascal 分布). 设独立重复试验, 每次试验成功的概率为 p , 失败的概率为 $1 - p$, 则 ξ 为第 n 次成功所需的试验次数, $\xi \sim F(n, p)$

Proposition 7 (Pascal 分布的分布函数).

$$(8) \quad P\{\xi = k\} = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

3.4. Poisson 分布. $\xi \sim P(\lambda)$

Definition 10 (Poisson 分布). 设独立重复试验, 每次试验成功的概率为 λ/n , 失败的概率为 $1 - \lambda/n$, 则 ξ 为成功次数, $\xi \sim P(\lambda)$

Proposition 8 (Poisson 分布的分布函数).

$$(9) \quad P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

3.5. 正态分布. $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$

Definition 11 (正态分布). 设 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则其密度函数为

$$(10) \quad p(\xi) = \varphi_{\mu, \sigma}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Proposition 9 (正态分布的分布函数).

$$(11) \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

3.6. Gamma 分布. $\xi \sim \Gamma(\lambda, r)$

Definition 12 (Gamma 分布). 设 ξ 服从 Gamma 分布 $\Gamma(\lambda, r)$, 其中 $\lambda > 0, r > 0$, 则其密度函数为

$$(12) \quad p(\xi) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \xi^{r-1} e^{-\lambda\xi}$$

Proposition 10 (Gamma 分布的分布函数).

$$(13) \quad F(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^x t^{r-1} e^{-\lambda t} dt$$

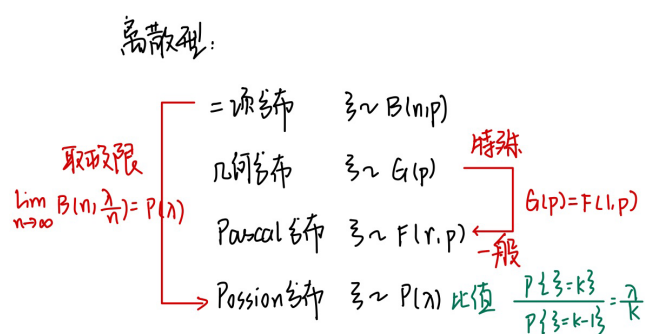
3.7. 指数分布. Gamma 分布中 $r = 1$ 的情形, $\xi \sim E(\lambda)$

Definition 13 (指数分布). 设 ξ 服从指数分布 $E(\lambda)$, 则其密度函数为

$$(14) \quad p(\xi) = \lambda e^{-\lambda\xi}$$

Proposition 11 (指数分布的分布函数).

$$(15) \quad F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$$



连续型:

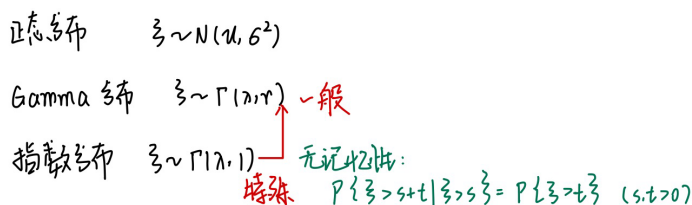


图 1. 各种分布的关系

3.8. 各种分布的关系.

4. 多维概率分布

4.1. 联合分布.

Definition 14 (联合分布函数). 设 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ 与 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 为概率空间, ξ_1, ξ_2 为随机变量, $\xi_1: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \xi_2: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$, 则 ξ_1, ξ_2 的联合分布函数为

$$(16) \quad F(x_1, x_2) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\}$$

Proposition 12 (联合分布函数的性质). (a) $F(x_1, x_2)$ 对 x_1, x_2 单调非降

(b) $F(x_1, x_2)$ 对 x_1, x_2 左连续

(c) $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$

(d) $F(+\infty, +\infty) = 1$

(e) $\Delta F = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0$, 且 ΔF 表示落入 $[a_1, a_2) \times [b_1, b_2)$ 的概率

Definition 15 (离散型联合分布). (ξ, η) 有至多可列对 (x_i, y_j) , 其联合分布为

$$(17) \quad P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij} \geq 0, \sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

Definition 16 (连续型联合分布). (a) (ξ, η) 有密度函数 $p(x, y)$, 其分布函数为

$$(18) \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv$$

其中 $p(x, y) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1$ 为密度函数

(b) 对任意的 Borel 集合 $B \in \mathcal{B}^2$, 有

$$(19) \quad P\{(\xi, \eta) \in B\} = \iint_B p(x, y) dx dy$$

Definition 17 (边缘分布). 设 (ξ, η) 有联合分布 $F(x, y)$, 则 ξ 的边缘分布为

$$(20) \quad F_1(x) = P\{\xi < x\} = F(x, +\infty)$$

η 的边缘分布为

$$(21) \quad F_2(y) = P\{\eta < y\} = F(+\infty, y)$$

Definition 18 (离散型边缘分布).

$$(22) \quad P\{\xi = x_i\} = \sum_j p_{ij}, P\{\eta = y_j\} = \sum_i p_{ij}$$

Definition 19 (连续型边缘分布).

$$(23) \quad \begin{aligned} p_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \\ p_2(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx \end{aligned}$$

$$(24) \quad \begin{aligned} F_1(x) &= \int_{-\infty}^x p_1(u) du = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, v) du dv \\ F_2(y) &= \int_{-\infty}^y p_2(v) dv = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, v) dv du \end{aligned}$$

4.2. 典型的二维分布.

Definition 20 (二维均匀分布). 设 (ξ, η) 有联合密度函数

$$(25) \quad p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $D \in \mathcal{B}^2$ 为平面上的区域, 满足 $0 < m(D) < +\infty$, $S = m(D)$ 为 D 的面积, 则称 (ξ, η) 服从二维均匀分布

Definition 21 (二维正态分布). 设 (ξ, η) 有联合密度函数

$$(26) \quad p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 为常数, $\sigma_1, \sigma_2 > 0, \rho \in (-1, 1)$, 则称 (ξ, η) 服从二维正态分布, 记作 $(\xi, \eta) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 或 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$

Proposition 13. 二维正态分布的性质

(a) (ξ, η) 的边缘分布为

$$\begin{aligned} \xi &\sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ \eta &\sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{aligned} \quad (27)$$

(b) (ξ, η) 的条件分布为

$$\begin{aligned} \xi|\eta=y &\sim N\left(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2)\right) \\ \eta|\xi=x &\sim N\left(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2)\right) \end{aligned} \quad (28)$$

(c) (ξ, η) 的独立性与 ρ 无关

REFERENCES

- [1] 杨振明. 概率论 (第二版). 北京: 科学出版社, 2007.