# CHAPTER 4 特征函数

ZEYU XIE[1]

[1]

## 1. 母函数

**Definition 1** (母函数)**.** 对任何实数列 $\{p_n\}$，如果幂级数

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n \tag{1}$$

的收敛半径 $s_0 > 0$，则称 $G(s)$ 为 $\{p_n\}$ 的母函数。
特别地，当 $\{p_n\}$ 为某非负整值随机变量 $\xi$ 的概率分布时，$G(s)$ 至少在区间 $[-1, 1]$ 上绝对收敛且一致收敛，此时有

$$G(s) = E(s^{\xi}) \tag{2}$$

称此 $G(s)$ 为随机变量 $\xi$ 或其概率分布 $\{p_n\}$ 的母函数。

**Example 1:** 求 Possion 分布和几何分布的母函数。

**Solution 1:**

(a) Possion 分布的母函数

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} s^n = e^{\lambda(s-1)} \tag{3}$$

收敛域为 $(-\infty, +\infty)$。

(b) 几何分布的母函数

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^{n-1} p s^n = \frac{ps}{1-(1-p)s} \tag{4}$$

收敛域为 $(-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p})$。

---

[1] Department of Mathematics, Tsinghua University, Beijing, China.
*E-mail address*: `xie.zeyu20@gmail.com`.
*Date*: 2024 年 4 月 17 日.

**Proposition 1** (分布由母函数唯一确定)**.** 显然母函数由分布唯一确定，反过来说，由于 $G(s)$ 至少可以在区间 $(-1,1)$ 内逐项求导，再令 $s=0$ 得

$$p_n = \frac{1}{n!}G^{(n)}(0) \tag{5}$$

所以母函数 $G(s)$ 也可以由分布 $\{p_n\}$ 唯一确定。

**Proposition 2** (母函数与数学期望、方差的关系)**.** 设非负整值随机变量 $\xi$ 的母函数为 $G(s)$，如果 $E(\xi)$ 和 $E(\xi^2)$ 有限，那么

$$\begin{aligned} G'(1) &= E(\xi) \\ G''(1) &= E(\xi^2) - E(\xi) \end{aligned} \tag{6}$$

**Proposition 3** (独立和的母函数)**.** 设 $\xi$ 和 $\eta$ 是两个独立的非负整值随机变量，分别有概率分布 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，母函数为 $A(s)$ 和 $B(s)$，则 $\xi+\eta$ 的母函数为

$$C(s) = A(s)B(s) \tag{7}$$

**Proposition 4** (随机多个非负整值随机变量之和的母函数)**.** 设 $\{\xi_k\}$ 为相互独立的非负整值随机变量序列，有共同的母函数 $G(s)$。若 $\eta$ 为另一非负整值随机变量，其母函数为 $F(s)$，那么当 $\eta$ 与每个 $\xi_k$ 均独立时，$\xi=\sum_{k=1}^{\eta}\xi_k$ 的母函数为

$$H(s) = F[G(s)] \tag{8}$$

## 2. 特征函数

**Definition 2** (特征函数)**.** 设 $F(x)$ 为 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上的一个分布函数，称

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}dF(x) \tag{9}$$

为 $F(x)$ 的特征函数。

**Definition 3** (随机变量的特征函数)**.** 设 $F(x)$ 为随机变量 $\xi$ 的分布函数，则此 $f(t)$ 也称为 $\xi$ 的特征函数，此时有

$$f(t) = E(e^{it\xi}) \tag{10}$$

注：对 $\forall\ t,x\in\mathbb{R}$，总有 $|e^{itx}|=1$，故 10 式右端积分的模不超过 1。因此对任意的概率分布，其特征函数唯一确定地存在。[1]

**Definition 4** (离散型随机变量的特征函数)**.** 设 $\xi$ 为离散型随机变量，其概率分布为 $\{p_n\}$，则其特征函数为

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{itx_k}, \quad p_k = P\{\xi = x_k\} \tag{11}$$

[1]这就比只对非负整值随机变量有定义的母函数好很多

**Definition 5** (连续型随机变量的特征函数)**.** 设 $\xi$ 为连续型随机变量，其概率密度函数为 $p(x)$，则其特征函数为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)e^{itx}dx \tag{12}$$

**Proposition 5** (各种分布的特征函数)**.** 离散型随机变量的特征函数

表 1. 离散型随机变量的特征函数

| 分布类型 | 特征函数 |
|---|---|
| *Bernoulli* 分布 | $f(t) = q + pe^{it}$ |
| 二项分布 | $f(t) = (q + pe^{it})^n$ |
| 几何分布 | $f(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$ |
| *Pascal* 分布 | $f(t) = \left[\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right]^n$ |
| *Possion* 分布 | $f(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ |

连续型随机变量的特征函数

表 2. 连续型随机变量的特征函数

| 分布类型 | 特征函数 |
|---|---|
| 正态分布 | $f(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ |
| *Gamma* 分布 | $f(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha}$ |
| 指数分布 | $f(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$ |
| 均匀分布 | $f(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$ |

**Proposition 6** (特征函数基本性质)**.** *(a)* $|f(t)| \leq f(0) = 1$

*(b)* 共轭对称性：$f(-t) = \overline{f(t)}$

*(c)* $f(t)$ 在 $t \in \mathbb{R}$ 上一致连续

*(d)* 半正定性:任意 $n \geq 1$,任意 $n$ 个实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$,任意 $n$ 个复数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{a_j}f(t_i - t_j) \geq 0 \tag{13}$$

*(e)* $f_{a+b\xi}(t) = e^{iat}f_\xi(bt)$

**Proposition 7.** 如果随机变量 $\xi$ 的各阶原点矩有限，那么对一切满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|t|^n E|\xi|^n}{n!} = 0 \tag{14}$$

的 $t$，$\xi$ 的特征函数 $f(t)$ 有展开式

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}E(\xi^k) \tag{15}$$

该定理可用于计算符合某些条件的概率分布的特征函数。

**Proposition 8.** 设随机变量 $\xi$ 的 $k$ 阶原点矩有限，则其特征函数 $k$ 阶可微，且有

$$f^{(k)}(t)=E\left[(i\xi)^k e^{it\xi}\right] \tag{16}$$

**Proposition 9** (独立随机变量之和)**.** 设 $\xi$ 和 $\eta$ 为两个独立的随机变量，其特征函数分别为 $f_\xi(t)$ 和 $f_\eta(t)$，则 $\xi+\eta$ 的特征函数为

$$f_{\xi+\eta}(t)=f_\xi(t)f_\eta(t) \tag{17}$$

即独立随机变量之和的特征函数等于各自特征函数的乘积。

## 3. 反演公式与唯一性定理

**Lemma 10.**

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{sinax}{x}dx=\frac{\pi}{2}sgn\{a\} \tag{18}$$

**Theorem 11** (反演公式)**.** 设 $f(t)$ 为随机变量 $\xi$ 的特征函数，$f(t)$ 在 $t$ 的某个邻域内连续，且 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续，且 $f(0)=1$，则 $\xi$ 的分布函数 $F(x)$ 可以由 $f(t)$ 唯一确定，且有

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt \tag{19}$$

**Theorem 12** (唯一性定理)**.** 分布函数由其特征函数唯一确定。

**Theorem 13.** 如果特征函数的模可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty \tag{20}$$

那么对应的分布函数 $F(x)$ 为连续型，且其密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt \tag{21}$$

**Definition 6** (再生性)**.** 设 $F(x;c)$ 为分布函数，其中 $c$ 为此概率分布的参数，如果有

$$F(x;c_1)*F(x;c_2)=F(x;c_1+c_2) \tag{22}$$

则称此分布关于参数 $c$ 具有再生性。
由 *12* 可知，特征函数的乘积等于特征函数的和，所以再生性也可以由特征函数的乘积等于特征函数的和来刻画

$$f(t;c_1)f(t;c_2)=f(t;c_1+c_2) \tag{23}$$

**Definition 7** (多元特征函数)**.** 定义 $n$ 元分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 所对应的 $n$ 元特征函数为

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n)}dF(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{24}$$

如果 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的分布函数，则有

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=E\left[e^{i(t_1\xi_1+t_2\xi_2+\cdots+t_n\xi_n)}\right] \tag{25}$$

此时称 $f$ 为随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的联合特征函数，它在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致连续的。

**Proposition 14** (多元特征函数的性质)**.** *(a)* $|f(t_1,t_2,\cdots,t_n)|\leq f(0,0,\cdots,0)=1$

*(b)* $f(-t_1,-t_2,\cdots,-t_n)=\overline{f(t_1,t_2,\cdots,t_n)}$

*(c)* $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续

*(d)* 若混合矩 $E(\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n})$ 有限，则可用 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的联合特征函数在原点的矩阵求导，即有公式

$$f^{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}=i^{-\sum_{j=1}^n k_j}\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\Bigg|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0} \tag{26}$$

*(e)* (反演公式)如果随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 取值于 $n$ 维区间 $\Delta=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|a_i\leq x_i\leq b_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 的边界面上的概率为 *0*，则有

$$\begin{aligned} &P\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\Delta\}\\ =&P\left\{\cap_{j=1}^n[a_j\leq\xi_j\leq b_j]\right\}\\ =&\lim_{\substack{c_j\to+\infty\\ j=1,2,\cdots,n}}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-c_1}^{c_1}\int_{-c_2}^{c_2}\cdots\int_{-c_n}^{c_n}\prod_{j=1}^n\frac{e^{-it_ja_j}-e^{-it_jb_j}}{it_j}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)dt_1dt_2\cdots dt_n \end{aligned} \tag{27}$$

*(f)* 多元分布函数和特征函数也是一一对应的。

## 4. 多元正态分布

## References

[1] 杨振明. 概率论（第二版）. 北京：科学出版社, 2007.