CHAPTER 2 随机变量

ZEYU XIE[1]

[1]

1. 随机变量

Definition 1 (随机变量)**.** 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间，$\xi=\xi(\omega):\Omega\to\mathbb{R}$，若

$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}\in\mathcal{F},\quad\forall x\in\mathbb{R}\tag{1}$$

则称 ξ 为随机变量

注：$\xi(\omega)$ 可简写为 ξ，$\xi(\omega)<x$ 可简写为 $\xi<x$
随机变量的逆变换有如下性质

Proposition 1. 设 ξ 为随机变量，其逆变换为 ξ^{-1}，则
(a) $\xi^{-1}(\mathbb{R})=\Omega$
(b) $\forall B\subseteq C\Rightarrow\xi^{-1}(B)\subseteq\xi^{-1}(C)$
(c) $\xi^{-1}(\overline{B})=\overline{\xi^{-1}(B)}$
(d) ξ 的 *Borel* 函数仍为随机变量

Proposition 2 (随机变量的结构)**.** *(a)* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中 $E\in F$ 的示性函数 $\mathbb{1}_E(\omega)$ 为随机变量
(b) 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为 *R.V.* $\Leftrightarrow\exists$ 简单随机变量列 $\{\xi_n\}_{n\geq1}$ *s.t.* $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega),\forall\omega\in\Omega$（此处极限为逐点收敛）

2. 随机分布（分布）

Definition 2 (分布)**.** $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间,$\mathbb{F}(B)=P\{\xi^{-1}(B)\}=P\{\xi\in B\},\forall B\in\mathcal{B}$，则 $\mathbb{F}$ 为一个概率测度，称作 ξ 的概率分布

$\mathbb{F}$ 刻画了 ξ 的分布规律

Definition 3 (相空间)**.** $(\mathbb{R},\mathcal{B},\mathbb{F})$ 为 ξ 的相空间，$\mathbb{F}$ 与 ξ 有关

Definition 4 (分布函数)**.** $F(x)=\mathbb{F}((-\infty,x])=P\{\xi\leq x\},\forall x\in\mathbb{R}$，称 $F(x)$ 为 ξ 的分布函数

---

[1] Department of Mathematics, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail address: xie.zeyu20@gmail.com.
Date: 2024 年 4 月 7 日.

分布函数具有以下性质

Proposition 3. *(a)* $F(x)$ 单调不减，即 $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
(b) $F(x)$ 左连续，即 $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x) = F(x_0)$
(c) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Definition 5 (离散型)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，ξ 为随机变量，若 $\exists\{x_k\}, \{p_k\}$ 使得

$$p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1, P\{\xi = x_k\} = p_k, \forall k \tag{2}$$

则称 ξ 为离散型随机变量，其密度阵

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

References

[1] 杨振明. 概率论（第二版）. 北京：科学出版社, 2007.