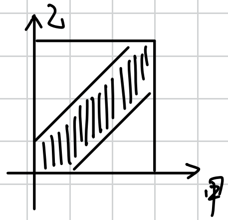
第二周第一次作业：

P19-20 3.



$P=\frac{24^2-\frac{1}{2}\times21^2-\frac{1}{2}\times20^2}{24^2}=\frac{311}{1152}$

5. 都是实数 $\iff \xi^2-4\eta\geq0 \iff \eta\leq\frac{\xi^2}{4}$

又 $\xi,\eta\in(-1,1)$. 故 $P_1=\frac{A}{4}$. 其中 $A=\int_{-1}^{1}(\frac{x^2}{4}+1)\,dx=\frac{13}{6}$ $P_1=\frac{13}{24}$

在此基础上都是正数 $\iff \eta>0$ 且 $\xi<0$

$P_2=\frac{1}{4}\cdot\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{4}\,dx=\frac{1}{48}$

6. (1) 设前两段长度为 l_1, l_2, s.t. $0<l_1,l_2<l_1+l_2<l$

可构成三角形 $\iff l_1<\frac{l}{2}, l_2<\frac{l}{2}, l_1+l_2>\frac{l}{2}$

$\Rightarrow P=\frac{1}{4}$

(2) 最长不超过 $\frac{2}{3}l \iff l_1<\frac{2}{3}l, l_2<\frac{2}{3}l, l_1+l_2>\frac{l}{3}$

$\Rightarrow P=\frac{2}{3}$

7. 设第一弦一端点位于 $(1,0)$. 另一端点在x轴上方. 位于 $e^{i\theta_1}$

第二弦两段点位于 $e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}$

相交 $\iff \min\{\theta_2,\theta_3\}\in(0,\theta_1)$. $\max\{\theta_2,\theta_3\}\in(\theta_1,2\pi)$

$\Rightarrow P=\frac{1}{3}$

P31-32 2. 若前(k-1)次取出过黑球. $P_1=1$

否则 $P_2=\frac{n-1}{n}$

P(前(k-1)次取出过黑球) $=1-(\frac{n-1}{n})^{k-1}$

故 $P=1-(\frac{n-1}{n})^{k-1}+\frac{n-1}{n}\cdot(\frac{n-1}{n})^{k-1}=1-\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$

3. 圆排列共 $\frac{(2n)!}{2n}=(2n-1)!$

全相邻有 $\frac{n!}{n}\times 2^n=2^n\cdot(n-1)!$

P(有夫妇不相邻) $=1-\frac{2^n\cdot(n-1)!}{(2n-1)!}=1-\frac{2}{(2n-1)!!}$

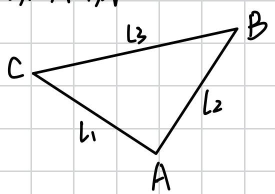
5. P(前k次仅一色) $=(\frac{1}{3})^k\,3=\frac{1}{3^{k-1}}$

P(前k次仅一色或两色) $=(\frac{2}{3})^k\cdot 3=\frac{2^k}{3^{k-1}}$

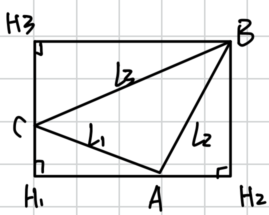
故 P(取球次数>k)=P(前k次至多两色) $=\frac{2^k}{3^{k-1}}$

P(恰取k次)=P(前k次恰两色) $\cdot\frac{1}{3}=\frac{2^{k-1}}{3^{k-1}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2^{k-1}}{3^k}$

7. 设三角形为:



将其放在水平矩形内:



其可自由移动面积 $S_1=(a-\overline{AH_1}-\overline{AH_2})(a-\overline{BH_2})$

$=(a-\overline{H_1H_2})(a-\overline{BH_2})$

对所有摆放角度积分： $P=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{S}\cdot[a-\overline{H_1H_2(\theta)}][b-\overline{H_1H_2(\theta)}]\,d\theta$

$$=\frac{L_1+L_2+L_3}{\pi a}$$

8. 即数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 中 $a_k\neq k$ 的种类数. $a_i\in\{1,2,\cdots,n\}$

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不同.

$P=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\frac{n!}{k!}$

9 $P(A)\vee P(B)\leq P(A)$. $A\subseteq A\cup B\Rightarrow P(A)\leq P(A\cup B)$.

$\Rightarrow P(A)\vee P(B)\leq P(A\cup B)$

$P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)\leq 2[P(A)\wedge P(B)]$

11. 右端 $=P(A_1)-[1-P(A_2)]-[1-P(A_3)]-\cdots-[1-P(A_n)]$

$=P(A_1)-P(A_2^c)-P(A_3^c)-\cdots-P(A_n^c)$

$\leq P(A_1-A_2^c-A_3^c-\cdots-A_n^c)$

$\leq P(\bigcap_{k=1}^{n}A_k)=$ 左端

13. 设 θ 为 $\mathbb{R}$ 上开集全体. $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{R}$ 上有理开区间全体. 求证 $\mathbb{R}$ 中 Borel 集类

$\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{F})=\sigma(\theta)$

证. $\sigma(\mathcal{F})=\sigma(\theta)$ 可由有理数在 $\mathbb{R}$ 上的稠密性得到.

因 $\theta\subseteq\mathcal{B}$. 且 $\mathcal{B}$ 为 σ-代数. 故 $\sigma(\theta)\subseteq\mathcal{B}$

因 $\mathcal{B}\subseteq\sigma(\mathcal{F})$. $\sigma(\mathcal{F})=\sigma(\theta)$

故 $\mathcal{B}=\sigma(\theta)=\sigma(\mathcal{F})$