CHAPTER 2 随机变量

ZEYU XIE[1]

[1]

1. 随机变量

Definition 1 (随机变量)**.** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$，若

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

则称 ξ 为随机变量

注：$\xi(\omega)$ 可简写为 ξ，$\xi(\omega) < x$ 可简写为 $\xi < x$
随机变量的逆变换有如下性质

Proposition 1. 设 ξ 为随机变量，其逆变换为 ξ^{-1}，则
(a) $\xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$
(b) $\forall B \subseteq C \Rightarrow \xi^{-1}(B) \subseteq \xi^{-1}(C)$
(c) $\xi^{-1}(\overline{B}) = \overline{\xi^{-1}(B)}$
(d) ξ 的 *Borel* 函数仍为随机变量

Proposition 2 (随机变量的结构)**.** *(a)* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中 $E \in F$ 的示性函数 $\mathbb{1}_E(\omega)$ 为随机变量
(b) 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为 *R.V.* $\Leftrightarrow \exists$ 简单随机变量列 $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ *s.t.* $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega), \forall \omega \in \Omega$（此处极限为逐点收敛）

2. 随机分布（分布）

Definition 2 (分布)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$\mathbb{F}(B) = P\{\xi^{-1}(B)\} = P\{\xi \in B\}, \forall B \in \mathcal{B}$，则 $\mathbb{F}$ 为一个概率测度，称作 ξ 的概率分布

$\mathbb{F}$ 刻画了 ξ 的分布规律

Definition 3 (相空间)**.** $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{F})$ 为 ξ 的相空间，$\mathbb{F}$ 与 ξ 有关

Definition 4 (分布函数)**.** $F(x) = \mathbb{F}((-\infty, x]) = P\{\xi \leq x\}, \forall x \in \mathbb{R}$，称 $F(x)$ 为 ξ 的分布函数

[1] Department of Mathematics, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail address: xie.zeyu20@gmail.com.
Date: 2024 年 4 月 15 日.

分布函数具有以下性质

Proposition 3. *(a)* $F(x)$ 单调不减，即 $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
(b) $F(x)$ 左连续，即 $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x) = F(x_0)$
(c) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Definition 5 (离散型)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，ξ 为随机变量，若 $\exists\{x_k\}, \{p_k\}$ 使得

$$p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1, P\{\xi = x_k\} = p_k, \forall k \tag{2}$$

则称 ξ 为离散型随机变量，其密度阵

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Definition 6 (连续型)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，ξ 为随机变量，若 $\exists p(x)$ 使得

$$p(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1, P\{\xi = a\} = 0, \forall a \tag{4}$$

则称 ξ 为连续型随机变量，其密度函数为 $p(x)$

不管是什么类型的随机变量，我们都有

Proposition 4 (Lebesgue 分解)**.** 任意分布函数 $F(x)$ 可分解为

$$F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + c_3 F_3(x) \tag{5}$$

其中 $F_1(x)$ 为纯条约分布函数，$F_2(x)$ 为连续型分布函数，$F_3(x)$ 为奇异分布函数

3. 一些典型分布

3.1. **二项分布.** $\xi \sim B(n, p)$

Definition 7 (二项分布)**.** 设 n 次独立重复试验，每次试验成功的概率为 p，失败的概率为 $1-p$，则 ξ 为成功次数，$\xi \sim B(n, p)$

Proposition 5 (二项分布的分布函数)**.**

$$P\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{6}$$

3.2. **几何分布.** $\xi \sim G(p)$

Definition 8 (几何分布)**.** 设独立重复试验，每次试验成功的概率为 p，失败的概率为 $1-p$，则 ξ 为第一次成功所需的试验次数，$\xi \sim G(p)$

Proposition 6 (几何分布的分布函数)**.**

$$P\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p \tag{7}$$

3.3. **Pascal 分布（负二项分布）.** $\xi \sim F(n,p)$

Definition 9 (Pascal 分布)**.** 设独立重复试验，每次试验成功的概率为 p，失败的概率为 $1-p$，则 ξ 为第 n 次成功所需的试验次数，$\xi \sim F(n,p)$

Proposition 7 (Pascal 分布的分布函数)**.**

$$P\{\xi = k\} = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \tag{8}$$

3.4. **Poisson 分布.** $\xi \sim P(\lambda)$

Definition 10 (Poisson 分布)**.** 设独立重复试验，每次试验成功的概率为 λ/n，失败的概率为 $1-\lambda/n$，则 ξ 为成功次数，$\xi \sim P(\lambda)$

Proposition 8 (Poisson 分布的分布函数)**.**

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{9}$$

3.5. **正态分布.** $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$

Definition 11 (正态分布)**.** 设 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则其密度函数为

$$p(\xi) = \varphi_{\mu,\sigma}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{10}$$

Proposition 9 (正态分布的分布函数)**.**

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \tag{11}$$

3.6. **Gamma 分布.** $\xi \sim \Gamma(\lambda, r)$

Definition 12 (Gamma 分布)**.** 设 ξ 服从 *Gamma* 分布 $\Gamma(\lambda, r)$，其中 $\lambda > 0, r > 0$，则其密度函数为

$$p(\xi) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \xi^{r-1} e^{-\lambda\xi} \tag{12}$$

Proposition 10 (Gamma 分布的分布函数)**.**

$$F(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^x t^{r-1} e^{-\lambda t} dt \tag{13}$$

3.7. **指数分布.** Gamma 分布中 $r=1$ 的情形，$\xi \sim E(\lambda)$

Definition 13 (指数分布)**.** 设 ξ 服从指数分布 $E(\lambda)$，则其密度函数为

$$p(\xi) = \lambda e^{-\lambda\xi} \tag{14}$$

Proposition 11 (指数分布的分布函数)**.**

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \tag{15}$$

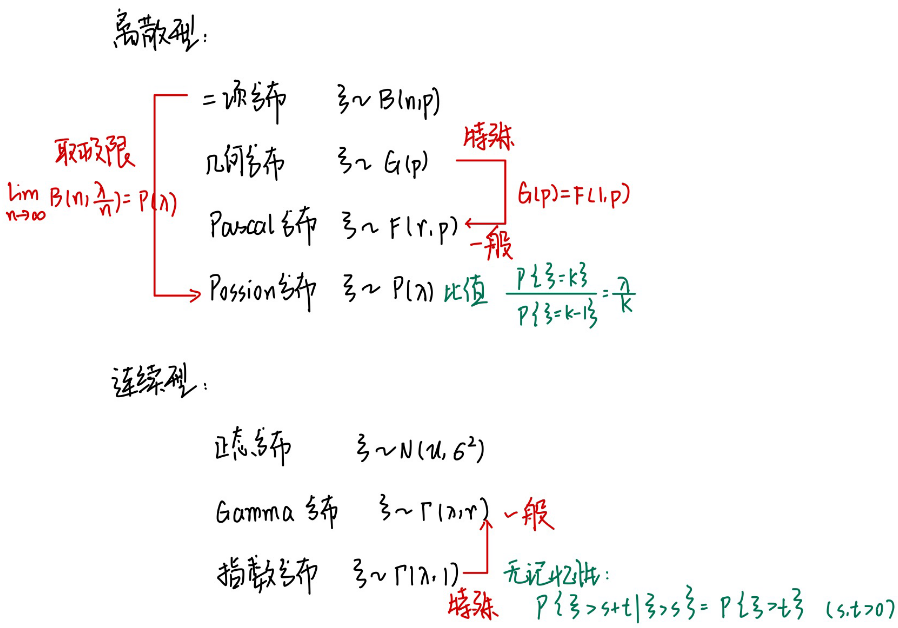

图 1. 各种分布的关系

3.8. **各种分布的关系.**

4. 多维概率分布

References

[1] 杨振明. 概率论（第二版）. 北京：科学出版社, 2007.