概率空间

集合的上下极限：$A_n \uparrow A$：$\lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A$

$A_n \downarrow A$：$\lim\limits_{n\to\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A$

定义. 设 $\mathscr{C}$ 为空间 Ω 的子集组成的非空类

(1) 对有限交、取余封闭：代数 $\xrightarrow{\text{有限变为无限}}$ σ 代数

(2) 对单调极限运算封闭：单调类

(3) 对有限交运算封闭：π 类

(4) 真差运算、上极限封闭：λ 类

性质： σ 代数 $\Rightarrow$ λ 类 $\Rightarrow$ 单调类

代数 + 单调类 $\Rightarrow$ σ 代数

π 类 + λ 类 $\Rightarrow$ σ 代数

单调类定理：设 $\mathscr{C}$ 为 Ω 中的集类

(1) 若 $\mathscr{C}$ 为一代数 $\Rightarrow$ $m(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$ 生成的单调类

(2) 若 $\mathscr{C}$ 为一 π 类 $\Rightarrow$ $\lambda(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$

生成的 λ 类　　生成的 σ 代数

另一个定理：设$\mathscr{C}$和$\mathscr{F}$为Ω中的两个集类，$\mathscr{C}\subseteq\mathscr{F}$

(1) 若$\mathscr{C}$为代数而$\mathscr{F}$为单调类 $\Rightarrow \sigma(\mathscr{C})\subseteq\mathscr{F}$

(2) 若$\mathscr{C}$为π类而$\mathscr{F}$为λ类 $\Rightarrow \sigma(\mathscr{C})\subseteq\mathscr{F}$

概率空间：$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，若：

$\mathscr{F}$为Ω上的σ-代数，$P:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$ 且P非负、正定（$P(\Omega)=1$），可列可加

条件概率：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

乘法定理：$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

全概率公式：$P(A)=\sum P(B_n)P(A|B_n)$ 其中$\{B_n\}$为Ω的一个分割

Bayes公式：$P(B_n|A)=\dfrac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum_i P(B_i)P(A|B_i)}$ 其中$\{B_n\}$为Ω的一个分割

eg. 某病误诊率5%，记$A=\{$验血为阳性$\}$，$B=\{$患此病$\}$.

则 $P(\bar{A}|B)=P(A|\bar{B})=5\%$

若患病率0.5%，即$P(B)=0.005$，求$P(B|A)$

A　　B　0.005

$\bar{A}$　　$\bar{B}$　0.995

由Bayes公式. $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$

$=\dfrac{0.005\times0.95}{0.005\times0.95+0.995\times0.05}$

$=0.087$

=> 阳性者仅 8.7% 为真病患

独立性. A B 独立 $\Leftrightarrow P(A)P(B)=P(AB) \Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 独立 $\Leftrightarrow \forall\ 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_s \le n$. 均有

$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_s}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_s})$ $(2^n-1-n$ 个式子$)$

设 $\{A_t\} \subseteq \mathcal{F}\ (t \in T)$, 则 $\{A_t \mid t \in T\}$ 相互独立

$\Leftrightarrow \forall\ n \ge 1,\ A_1, A_2, \cdots, A_n \in \{A_t \mid t \in T\}$ 独立

独立性性质: 若 $A_1 A_2, \cdots, A_n$ 相互独立:

则 $P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$

$\Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1 - \prod_{k=1}^{n}[1-P(A_k)]$

试验的独立性: $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 为2个试验的概率空间

若 $\forall A_1 \in \mathcal{F}_1$, $A_2 \in \mathcal{F}_2$. $P_1(A_1)P_2(A_2) = P(A_1 \times A_2)$ 则 A_1. A_2 独立

其中 $A_1 \times A_2$ 为 Descartes 乘积

=> 试验是否独立取决于乘积空间上概率测度的选择)

$(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$, $\cdots$, $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为乘积测度空间. 则独立 $\Leftrightarrow P(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n) = P_1(B_1)\cdots P_n(B_n)$

$(\forall B_1, B_2, \cdots B_n)$

随机变量：

RV: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$为PS (Probability Space)，$\xi = \xi(w): \Omega \to \mathbb{R}$

若 $\forall x \in \mathbb{R}$. $\{w \mid \xi(w) < x\} \in \mathcal{F}$

则 $\xi(w)$为随机变量 (RV)

$\xi(w)$可简写为ξ

逆变换ξ^{-1}： $\xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$

$B \subset C \Rightarrow \xi^{-1}(B) \subseteq \xi^{-1}(C)$

$\xi^{-1}(\bar{B}) = \overline{\xi^{-1}(B)}$

性质. ξ的Borel函数仍为随机变量

结构: (1) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$中$E \in \mathcal{F}$的示性函数 $1_E(w) = \begin{cases} 1 & 若 w \in E \\ 0 & 若 w \notin E \end{cases}$ 为随机变量

(2) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$为RV $\Leftrightarrow \exists$ Simple RV List $\{\xi_n \mid n \geq 1\}$

s.t. $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n(w) = \xi(w)$ $\forall w \in \Omega$

(逐点收敛即可)

分布: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$为PS. $\mathbb{F}(B) = P\{\xi^{-1}(B)\} = P(\xi \in B)$ $\forall B \in \mathcal{B}$

则$\mathbb{F}$为一个概率测度，称做ξ的概率分布

相空间: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{F})$为$\xi$相空间，F与$\xi$有关

F刻画了ξ的分布规律

分布函数 $F(x)=\mathbb{F}\{(-\infty,x)\}=P\{\xi<x\}\quad (x\in\mathbb{R})$

为ξ的分布函数

性质: $x_1<x_2 \Rightarrow F(x_1)<F(x_2)$ (单调)

$x_0\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} F(x)=F(x_0)$ (左连续)

$F(-\infty)=0 \qquad F(+\infty)=1$

离散型: $(\Omega,\mathcal{F},P)$ P.S. ξ R.V. 若$\exists\{x_k\}$. $\{p_k\}$.

s.t. $p_k\geq 0 \quad \sum\limits_k p_k=1$

$P\{X=x_k\}=p_k \quad (k=1,2,\cdots)$

密度阵. $\begin{pmatrix} x_1, & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$

连续型: $p(x)\geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1$

$p(x)$. 密度函数

$P\{\xi=a\}=0 \quad (\forall a)$

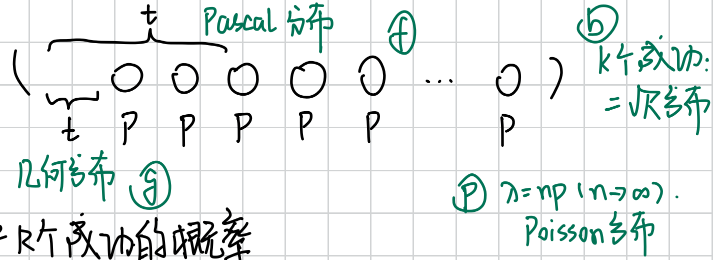
Lebesgue分解: 分布函数 $F(x)$ 有分解

纯跳跃

$F(x)=C_1F_1(x)+C_2F_2(x)+C_3F_3(x)$

$C_1+C_2+C_3=1$ 绝对连续 奇异?

分布类型:



1. 二项分布 $\xi \sim B(n,p)$

n重 Bernoulli 试验中k次成功的概率

$$P\{\xi=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

2. 几何分布 $\xi \sim G(p)$

可列重 Bernoulli ~中首次成功时间 t

$$P\{\xi=k\} = (1-p)^{k-1} p$$

3. Pascal 分布 (负二项分布) $\xi \sim F(r,p)$

可列重 Bernoulli ~中第 r $(r\geq 1)$ 次成功时间 ξ_r

$$P\{\xi=k\} = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} \quad (k=r, r+1, \cdots)$$

$$\sum_{k=r}^{\infty} f(k,r,p) = 1$$

$\xi_r \sim T_1+T_2+\cdots+T_r$

(r个几何T_i相加的分布)

4 Poisson 分布:

$\xi \sim P(\lambda)$

$$P\{\xi=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$= \lim_{n\to\infty} b(k;n,p_n) \quad (\text{二项分布极限}) \ (np_n=\lambda)$$

用于计算二项分布的近似 ($\lambda = n\cdot p$)

$$b(k;n,p) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$$

比值 $\dfrac{P(k,\lambda)}{P(k-1;\lambda)} = \dfrac{\lambda}{k}$

Poisson 在随机选择下不变

Poisson 过程?

5. 正态分布: $\xi \sim N(a,\sigma^2)$ $p(\xi)=\varphi_{a,\sigma}(\xi)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\xi-a)^2}{2\sigma^2}}$

6. Γ分布. 其参数 $\lambda>0$, $r>0$, 记作 $\Gamma(\lambda,r)$ $\xi\sim\Gamma(\lambda,r)$

$$F(t)=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$$p(t)=\frac{\lambda^r}{(r-1)!}t^{r-1}e^{-\lambda t}\quad(t>0)=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}\quad(x>0)$$

与$\Gamma(r)$的关系: $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=\cdots=n!$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^{+\infty}x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x}dx=\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\pi}$$

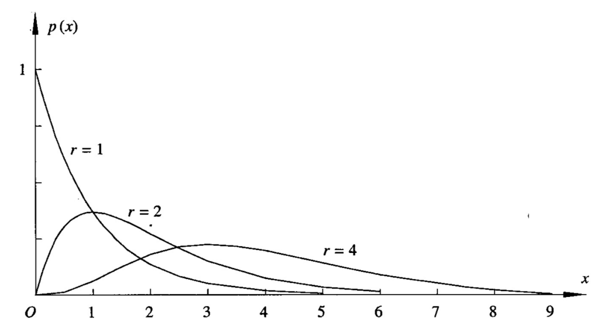


图 2.4.3 Γ(1, r) 密度曲线

7. 指数分布 (特殊的Γ分布: $r=1$)

$\xi\sim\Gamma(\lambda,1)$ $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}\quad(x>0)$

$F(x)=1-e^{-\lambda x}\quad(x>0)$

指数分布 <=> 无记忆 $P\{\xi>s+t\mid\xi>s\}=P\{\xi>t\}$

$(\forall s,t>0)$

多维概率分布

联合分布函数：$F(x,y)=P\{\xi<x,\eta<y\}$，$x,y\in\mathbb{R}$

为 (ξ,η) 的联合分布函数

性质：$F(x,y)$ 对 x,y 单调非降

$F(x,y)$ 对 x,y 左连续

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1\end{cases}$$

非负增量

$$\Delta F=\underbrace{F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2)}_{\text{恰为落入 }[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\text{ 概率}}\geq 0$$

离散型：(ξ,η) 有至多可列对～

$p_{ij}=P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}$ $i,j=1,2,\cdots$

$\sum\limits_{i,j}p_{ij}=1$

连续型：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\,du\,dv$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$p(x,y)\geq 0$. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dx\,dy=1$

$P\{(\xi,\eta)\in B\}=\iint\limits_{B}p(x,y)\,dx\,dy$ $B\in\mathcal{B}^2$

边缘分布：