CHAPTER 4 特征函数

ZEYU XIE[1]

[1]

1. 母函数

Definition 1 (母函数)**.** 对任何实数列 $\{p_n\}$，如果幂级数

$$G(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n \tag{1}$$

的收敛半径 $s_0>0$，则称 $G(s)$ 为 $\{p_n\}$ 的母函数。
特别地，当 $\{p_n\}$ 为某非负整值随机变量 ξ 的概率分布时，$G(s)$ 至少在区间 $[-1,1]$ 上绝对收敛且一致收敛，此时有

$$G(s)=E(s^{\xi}) \tag{2}$$

称此 $G(s)$ 为随机变量 ξ 或其概率分布 $\{p_n\}$ 的母函数。

Example 1: 求 Possion 分布和几何分布的母函数。

Solution 1:

(a) Possion 分布的母函数

$$G(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}s^n=e^{\lambda(s-1)} \tag{3}$$

收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。

(b) 几何分布的母函数

$$G(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{n-1}ps^n=\frac{ps}{1-(1-p)s} \tag{4}$$

收敛域为 $(-\frac{1}{1-p},\frac{1}{1-p})$。

---

[1] Department of Mathematics, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail address: xie.zeyu20@gmail.com.
Date: 2024 年 4 月 17 日.

Proposition 1 (分布由母函数唯一确定). 显然母函数由分布唯一确定, 反过来说, 由于 $G(s)$ 至少可以在区间 $(-1,1)$ 内逐项求导，再令 $s=0$ 得

$$p_n = \frac{1}{n!}G^{(n)}(0) \tag{5}$$

所以母函数 $G(s)$ 也可以由分布 $\{p_n\}$ 唯一确定。

Proposition 2 (母函数与数学期望、方差的关系). 设非负整值随机变量 ξ 的母函数为 $G(s)$，如果 $E(\xi)$ 和 $E(\xi^2)$ 有限，那么

$$\begin{aligned} G'(1) &= E(\xi) \\ G''(1) &= E(\xi^2) - E(\xi) \end{aligned} \tag{6}$$

Proposition 3 (独立和的母函数). 设 ξ 和 η 是两个独立的非负整值随机变量, 分别有概率分布 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，母函数为 $A(s)$ 和 $B(s)$，则 $\xi+\eta$ 的母函数为

$$C(s) = A(s)B(s) \tag{7}$$

Proposition 4 (随机多个非负整值随机变量之和的母函数). 设 $\{\xi_k\}$ 为相互独立的非负整值随机变量序列, 有共同的母函数 $G(s)$。若 η 为另一非负整值随机变量, 其母函数为 $F(s)$，那么当 η 与每个 ξ_k 均独立时，$\xi=\sum_{k=1}^{\eta}\xi_k$ 的母函数为

$$H(s) = F[G(s)] \tag{8}$$

2. 特征函数

Definition 2 (特征函数). 设 $F(x)$ 为 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上的一个分布函数，称

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}dF(x) \tag{9}$$

为 $F(x)$ 的特征函数。

Definition 3 (随机变量的特征函数). 设 $F(x)$ 为随机变量 ξ 的分布函数，则此 $f(t)$ 也称为 ξ 的特征函数，此时有

$$f(t) = E(e^{it\xi}) \tag{10}$$

注：对 $\forall\, t,x\in\mathbb{R}$，总有 $|e^{itx}|=1$，故 10 式右端积分的模不超过 1。因此对任意的概率分布，其特征函数唯一确定地存在。[1]

Definition 4 (离散型随机变量的特征函数). 设 ξ 为离散型随机变量，其概率分布为 $\{p_n\}$，则其特征函数为

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{itx_k}, \quad p_k = P\{\xi = x_k\} \tag{11}$$

[1]这就比只对非负整值随机变量有定义的母函数好很多

Definition 5 (连续型随机变量的特征函数)**.** 设 ξ 为连续型随机变量，其概率密度函数为 $p(x)$，则其特征函数为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)e^{itx}dx \tag{12}$$

Proposition 5 (各种分布的特征函数)**.** 离散型随机变量的特征函数

表 1. 离散型随机变量的特征函数

分布类型	特征函数
Bernoulli 分布	$f(t) = q + pe^{it}$
二项分布	$f(t) = (q + pe^{it})^n$
几何分布	$f(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Pascal 分布	$f(t) = \left[\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right]^n$
Possion 分布	$f(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

连续型随机变量的特征函数

表 2. 连续型随机变量的特征函数

分布类型	特征函数
正态分布	$f(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
Gamma 分布	$f(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha}$
指数分布	$f(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$
均匀分布	$f(t) = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$

Proposition 6 (特征函数基本性质)**.** *(a)* $|f(t)| \le f(0) = 1$

(b) 共轭对称性：$f(-t) = \overline{f(t)}$

(c) $f(t)$ 在 $t \in \mathbb{R}$ 上一致连续

(d) 半正定性:任意 $n \ge 1$,任意 n 个实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$,任意 n 个复数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \overline{a_j} f(t_i - t_j) \ge 0 \tag{13}$$

(e) $f_{a+b\xi}(t) = e^{iat} f_\xi(bt)$

Proposition 7. 如果随机变量 ξ 的各阶原点矩有限，那么对一切满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|t|^n E|\xi|^n}{n!} = 0 \tag{14}$$

的 t，ξ 的特征函数 $f(t)$ 有展开式

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}E(\xi^k) \tag{15}$$

该定理可用于计算符合某些条件的概率分布的特征函数。

Proposition 8. 设随机变量

3. 多元正态分布

References

[1] 杨振明. 概率论（第二版）. 北京：科学出版社, 2007.