Examen, version en français.

Recherche opérationnelle S3.

2016-2017

Le sujet comporte 4 exercices. Tous les documents sont autorisés. Répondez sur une copie à part, **pas** *sur le sujet.* ***N'écrivez pas en rouge ni au crayon à papier.*** *Pensez à utiliser un brouillon. N'oubliez pas de mettre votre nom sur la copie et votre numéro de copie sur toutes les feuilles supplémentaires. Un barême vous est donné à titre indicatif.*

Exercice 1 — *Programmation linéaire (6 Points)*

$$(P)\begin{cases} Max & z & = 2x_1 + x_2 & \\ s.c. & x_1 & \geq -2 & (3) \\ & x_2 & \leq 2 & (4) \\ & -x_1 + x_2 & \leq 3 & (5) \\ & x_1 & \in \mathbb{R}^- & (1) \\ & x_2 & \in \mathbb{R}^+ & (2) \end{cases}$$

(1) Représenter et résoudre (P) graphiquement.

(2) Ecrire (P) sous forme standard. On créera pour cela 3 variables d'écart x_3, x_4, x_5 associées respectivement aux contraintes $(3), (4)$ et (5), et **une unique** variable de signe x_1^-.

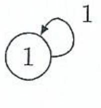
(3) Montrer que $x_3 = x_4 = 0$ implique une solution de base mais pas une solution réalisable.

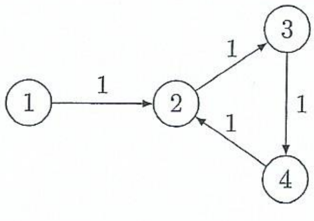
(4) En commençant au point $x_1^- = x_2 = 0$, appliquer l'algorithme du simplexe pour trouver une solution optimale. (Il est possible d'utiliser la méthode des tableaux.) On précisera à chaque itération les variables de base et de non base, la variable entrant dans la base, la variable sortant de la base à la fin de l'itération et pourquoi ces deux variables ont été choisies.

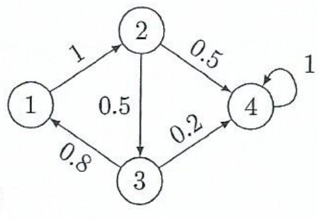
Aide : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

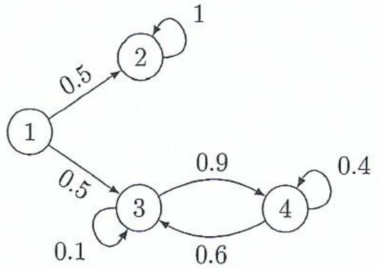
Exercice 2 — *Chaîne de Markov et distribution limite (5 Points)*

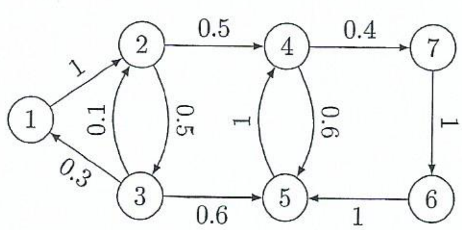
Indiquer pour chacune des 5 chaînes ci-après laquelle ou lesquelles possèdent une distribution limite. Si oui, préciser cette distribution sans justifier. Sinon expliquer rapidement pourquoi.

(5)


(6)


(7)


(8)


(9)


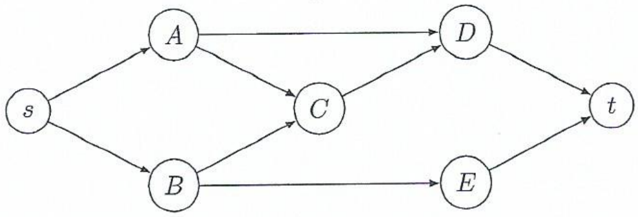
Exercice 3 — ***Flot et chemin disjoint (6 Points)***

On recherche dans un graphe G contenant deux nœuds s et t le plus grand nombre de chemins arcs-disjoints entre s et t. Deux chemins sont dits disjoints si et seulement s'ils n'ont aucun arc en commun. Ils peuvent cependant avoir des nœuds en commun.

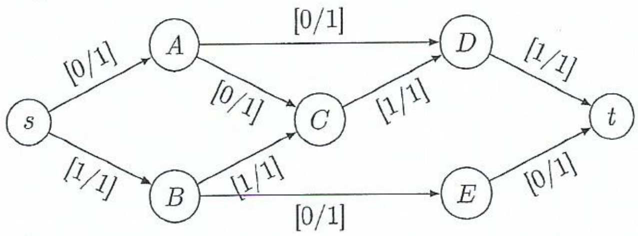
(10) Soit le réseau de flot (G, s, t, c) où la capacité de tous les arcs est égale à 1.
Supposons qu'on dispose de k chemins arcs-disjoints $P_1, P_2, \ldots, P_k$ entre s et t. Comment trouver un flot admissible de valeur k dans le réseau ? Expliquer rapidement pourquoi ce flot est admissible.

(11) On suppose démontré le fait que la valeur d'un flot maximum est toujours inférieure ou égale au nombre de chemins disjoints entre s et t. Montrer qu'il y a égalité.

(12) On recherche à résoudre le problème de chemins disjoints dans le graphe G suivant.



On a déjà complété le flux de certains arcs. Montrer que ce flot est admissible puis utilisez l'algorithme de Ford Fulkerson à partir de ce flot pour trouver un flot maximum. En déduire le nombre de chemins disjoints maximum qui existent- entre s et t dans G.



Exercice 4 — ***File d'attente de métro (5 Points)***

On s'intéresse à un problème de file d'attente sur le quai d'un métro. Le métro n'arrive jamais. Cependant, les gens attendent car ils ne sont pas informés.

Deux phénomènes se produisent simultanément :

— attroupement : s'il y a n personnes sur le quai, $\lambda_n = 0.99(n+1)$ personnes arrivent sur le quai chaque minute.

— abandon : s'il y a n personnes sur le quai, $\mu_n = 1.01 \cdot n$ personnes quittent le quai chaque minute.

On modélise ce système par une file d'attente (processus de naissance et mort avec les taux λ_n et μ_n). On note $X(t)$ le nombre de personnes à l'instant t sur le quai.

(13) Représentez le graphe de la file.

(14) Calculer $\frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_n}$ pour tout n. En déduire qu'il existe un régime permanent.

(15) On note P_n la probabilité que $X(t) = n$ en régime permanent. Donnez, en fonction de n et P_0, la valeur de P_n pour tout $n \geq 1$. Puis donnez la valeur de P_0.

(16) Quel est le nombre moyen de personnes sur le quai en régime permanent ?