Méthodes de rejet et de transformation

HASSINI Houda & FERRERI Mickael & CHEN zeyu

13 février 2019

Nous sommes le groupe 2 avec 05, 10, 30. Nous nous sommes attribué les notes suivantes,
05 : 3/3, 10 : 3/3, 30 : 3/3.

Méthodes de rejet et de transformation

Exercice 5

1.On pose , $Y = |X|$ Donc , dx = -dy quand x < 0 et dx = dy quand x > 0

$$\mathbb{E}_X[h(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} h(x) f_X(x) dx + \int_{0}^{\infty} h(x) f_X(x) dx$$
$$= \int_{0}^{\infty} h(-x) f_X(-x) d(-x) + \int_{0}^{\infty} h(x) f_X(x) dx$$
$$= \int_{0}^{\infty} h(y) f_X(y) d(y) + \int_{0}^{\infty} h(y) f_X(y) dy$$
$$= \int_{0}^{\infty} h(y) 2 f_X(y) dy = E_Y[h(y)]$$

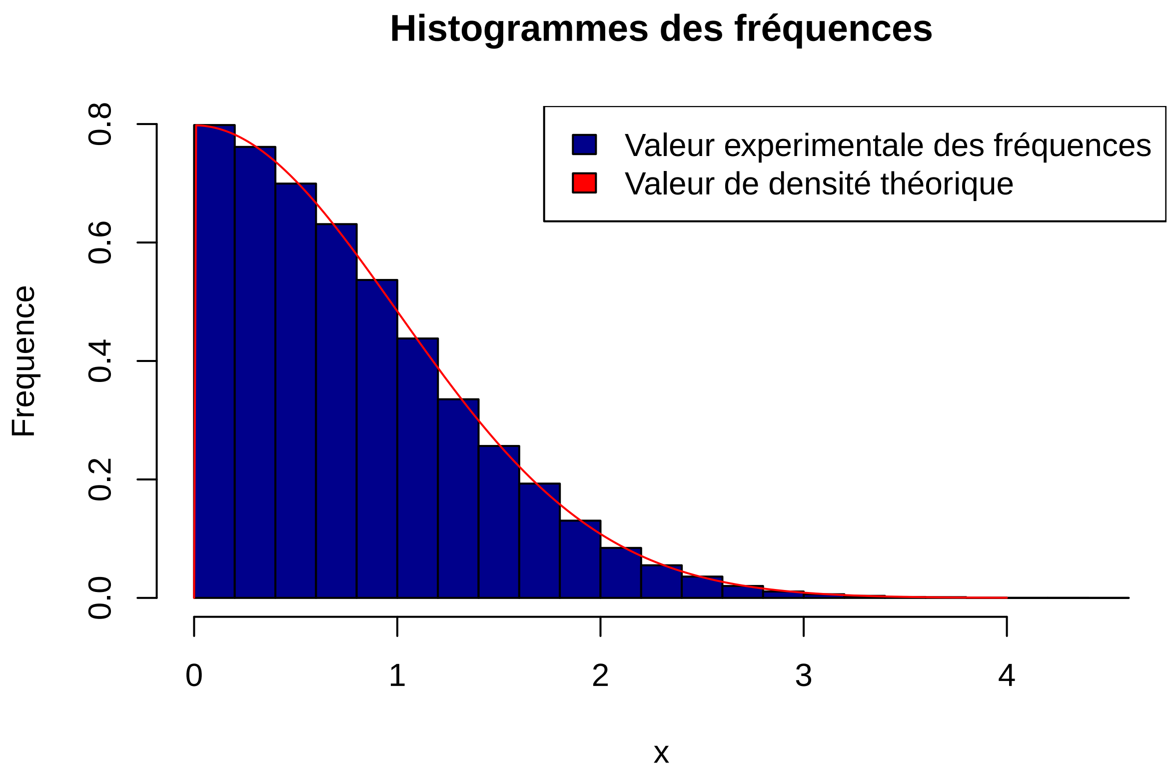
Donc

$f_Y(y) = 2 f_X(y) \mathbb{I}_{y>0}$

2. POut tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$(x-1)^2 \geq 0$$
donc
$$x^2 \geq 2x - 1$$
puis
$$e^{-\frac{1}{2}x^2} \leq e^{\frac{1}{2}} e^{-x}$$
en multipliant par
$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$
les deux cotés de l'inégalité on obtient apres simplification
$$\boxed{f(x) \leq \sqrt{\frac{2e}{\pi}}}$$

3. On simule la variable aléatoire $|X|$ grace à la méthode de rejet. Selon le résultats de la question 2. Nous pouvons conclure qu'il existe une variables aléatoire Y suivant une loi exponentielle qu'on sait simuler. Il suffit par la suite de suivre l'algorithme d ela simulation par rejet afin de simuler l'echantillon de la variables $|X|$

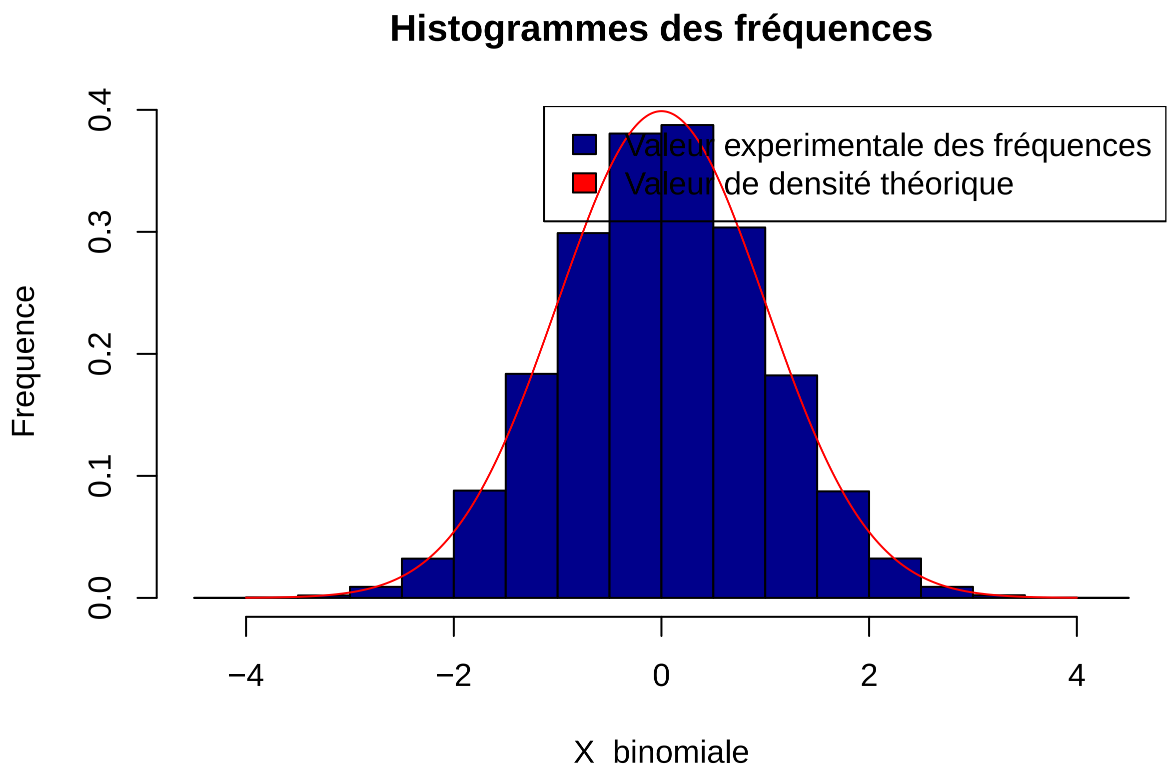
```r
#fonction indicatrice:
ind <- function(x) ifelse(x>0, 1,0)
f <- function(x) {
  return((2/sqrt((2*pi)))*exp(-x*x/2)*ind(x))
}
#fonction exponnentielle
g <- function(x) {
  return (exp(-x))
}

#paramètre c
c <- sqrt(2*exp(1)/pi)

#Simulation d'un echantillon suivant une loi exponentielle
exponentielle <- function(n, lambda) {
  vect = 1:n
  rand = 0
  for (i in 1:n) {
    rand = runif(1)
    vect[i] = - log(rand)/lambda
  }
  return(vect)
}

#Méthode du rejet
rejet <- function (N) {
  x= c()
  for(i in 1:N){
  u <- runif (1,0,1)
  y <- exponentielle (1,1)
  h <- f(y)/(c*g(y))
  while (u>=h){
    u <- runif (1,0,1)
    y <- exponentielle (1,1)
    h <- f(y)/(c*g(y))
  }
  x[i]= y
  }
  return(x)
}
#Echantillon , Diagramme de fréquences et densité théoriques
x<- rejet(100000)
hist(x,freq= FALSE, col= "Darkblue",main = "Histogrammes des fréquences", ylab= "Frequence")
a<-c(0:400)/100
par(new=TRUE)
y<-f(a)
lines(a,y, col= "Red")
legend("topright", c("Valeur experimentale des fréquences","Valeur de densité théorique"),
       fill= c("darkblue", "red"))
```



On ramarque que l'istogramme corespond parfaitement aux valeurs théoriques.

5. 6.Afin de similer un echantillon de X , il suffit d'utiliser le fait d'avoir X et $\theta|X|$ qui suivent la même loi. il suffit donc d'atribuer un signe positif ou négatif à l'échantillon . Pour ceci nous avons multiplé attribuer un signe positif ou négatif avec un probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacun

```
theta <-(1:100000)
for (i in 1:100000){
  u<- runif(1,0,1)
  if(u>0.5){
    u <- 1
  }
  else u<--1
  theta [i] <- u
}
X_binomiale <-theta*x
hist(X_binomiale, freq= FALSE, col= "Darkblue",main = "Histogrammes des fréquences", ylab= "Frequence")

f1 <- function(x) {
  return((1/sqrt((2*pi)))*exp(-x*x/2))

}
a<-c(-400:400)/100
y<-f1(a)
lines(a,y, col= "Red")
legend("topright", c("Valeur experimentale des fréquences","Valeur de densité théorique"),
       fill= c("darkblue", "red"))
```



En observant le diagramme , on remarque que les valeurs des fréquences d'apparition des a_i correspond aux densités théoriques.

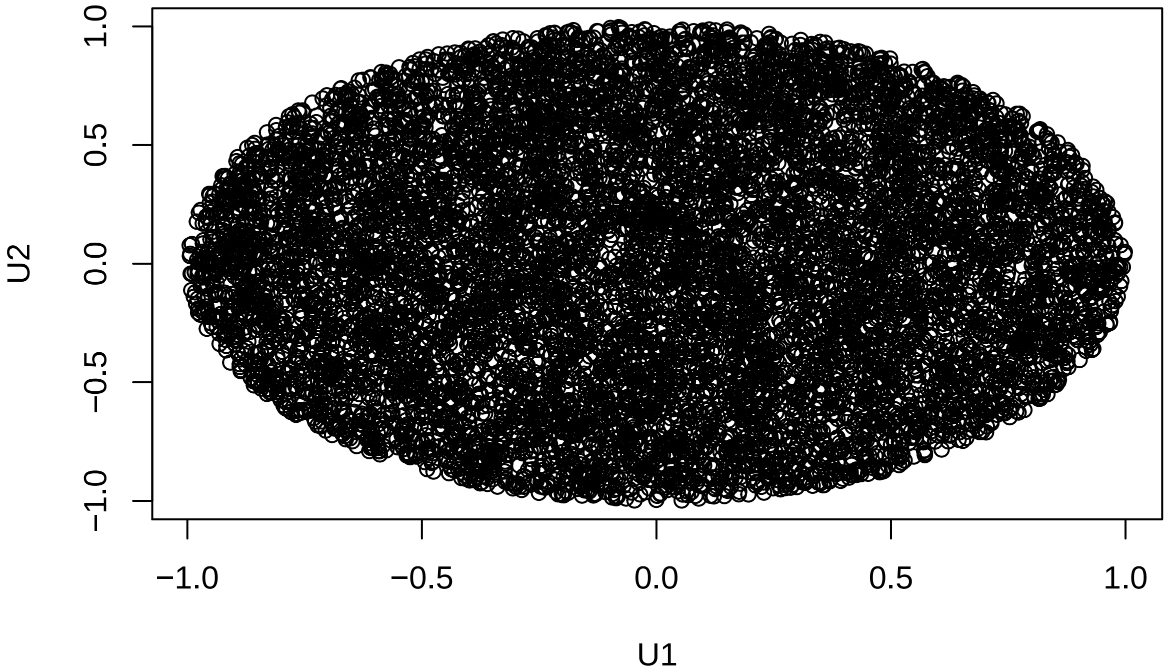
Exercice 6

Grâce à l'algorithme fourni nous allons simuler N= 10000 point de la variable aléatoire X.

```
#1
gen_var_ex_6 <- function(N){
  U1 <- 1:N
  U2 <- 1:N
  for (i in 1:N) {
    u1 <- 2*runif(1,0,1)-1
    u2 <- 2*runif(1,0,1)-1
    while(u1*u1+u2*u2>1){
       u1 <- 2*runif(1,0,1)-1
       u2 <- 2*runif(1,0,1)-1
    }
    U1[i] <- u1
    U2[i] <- u2
  }
  plot(U1,U2)
  return(c(U1,U2))
}
```

Cette loi est une loi uniforme en dimension 2

```
#2
N<-10000
vec <- gen_var_ex_6(N)
```



Exercice 6 (Box-Muller)

1.On a $X_1 = \sqrt{R}cos(\Theta)$ et $X_2 = \sqrt{R}sin(\Theta)$

Par consequence , on peut déduire que $R = X_1^2 + X_2^2$ et $\Theta = arctan(X_2/X_1)$

On sais que $f_{(X_1,X_2)}(X) = f_{(R,\Theta)}(R,\Theta) * det(J(X)) = f_R(R) * f_\Theta(\Theta) * det(J(X))$

Donc, on dois juste calculer J(X)

$$J(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial X_1} & \frac{\partial R}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial X_1} & \frac{\partial \Theta}{\partial X_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2X_1 & 2X_2 \\ \frac{-X_2}{X_1^2+X_2^2} & \frac{X_1}{X_1^2+X_2^2} \end{pmatrix}$$

Alors , $det(J(X)) = \frac{2(X_1^2+X_2^2)}{X_1^2+X_2^2} = 2$

Finalement , on a

$$f_{(X_1,X_2)}(x) = f_R(r) * f_\Theta(\theta) * det(J(X)) = \frac{1}{2\pi} exp(-(x_1^2+x_2^2)/2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-x_1^2/2) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-x_2^2/2)$$

ils sont independentes car $f_{(X_1,X_2)}(x) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$

2. Nous allons maintenant deduire du résultats précedent une simulation de taille N =10000 de loi gaussienne bidimensionnelle

```
expo <- function(N,lambda){
  u <- runif(N,0,1)
  return(-log(u)/lambda)
}
#2
```

```r
gen_pair_gauss <- function(N){
  U1 <- sqrt(expo(N,1/2))*cos(runif(N,0,2*pi))
  U2 <- sqrt(expo(N,1/2))*sin(runif(N,0,2*pi))
  return(c(U1,U2))
}
```

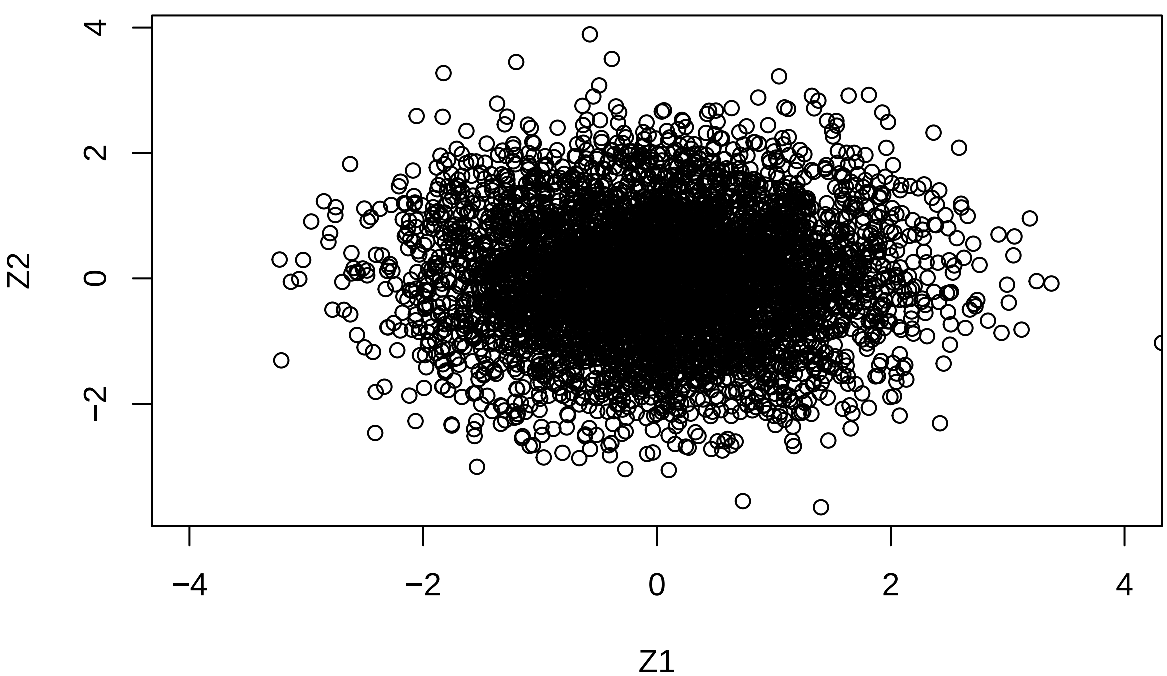
```r
densite_theo_norm <- function(x,y){
  return(exp(-(x*x+y*y)/2)/(2*pi))
}
```

3.Tracer de la densité empirique

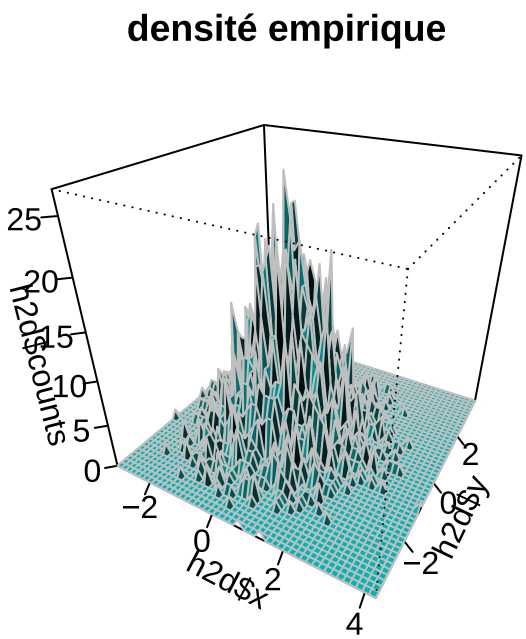
```r
library(gplots)
```

```
##
## Attaching package: 'gplots'

## The following object is masked from 'package:stats':
##
##     lowess
```

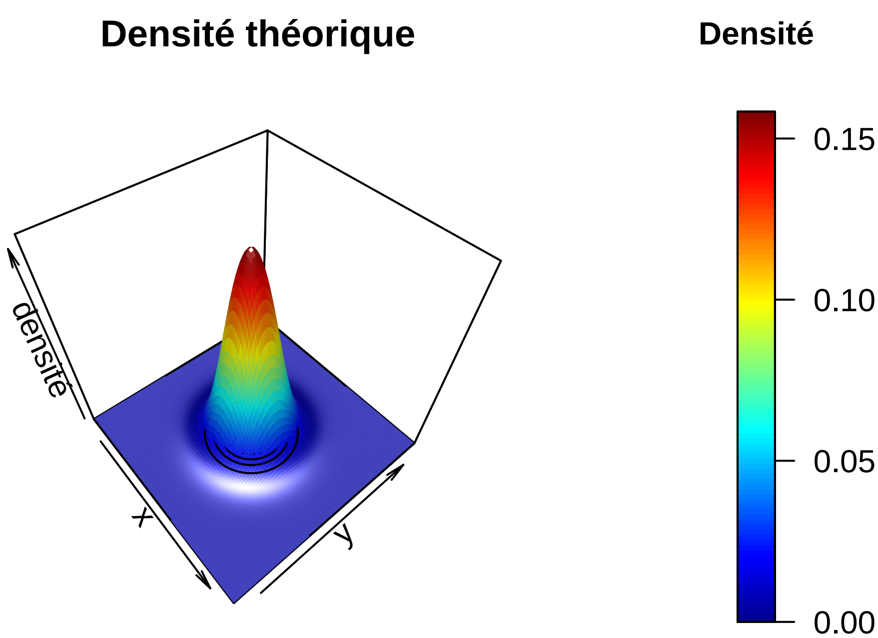
```r
#3
N<-10000
vec <- gen_pair_gauss(N)
Z1 <- vec[1:(N/2)]
Z2 <- vec[((N/2)+1):N]
plot(Z1,Z2,xlim=c(-4,4))
```




```r
#4
h2d <- hist2d(cbind(Z1,Z2),nbins=50,show=FALSE)
persp( h2d$x, h2d$y, h2d$counts,
          ticktype="detailed", theta=30, phi=30,
          expand=1, shade=0.5, col="cyan",border="grey",main="densité empirique")
```

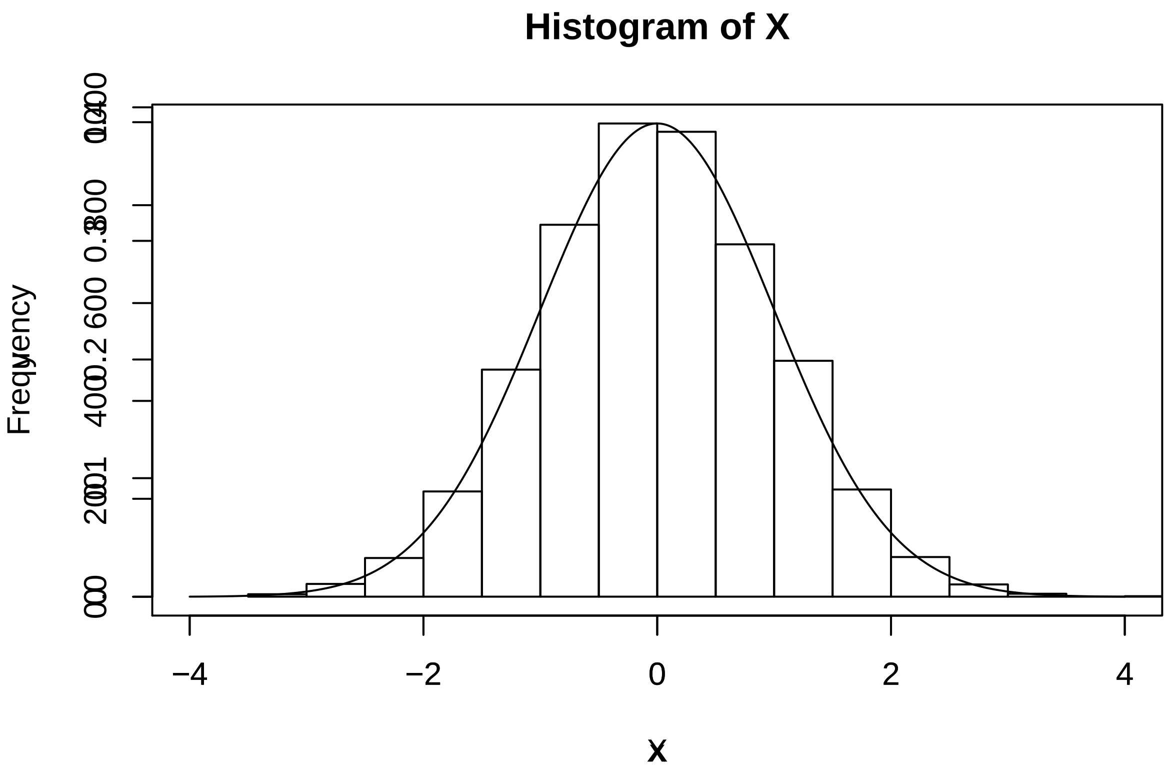



```r
library(plot3D)
X2<-seq(-5,5,0.1)
Y2<-seq(-5,5,0.1)
Graphe2<-c()
for ( i in -50:50){
  R<-c()
  for (j in -50:50){
    R<-c(R,densite_theo_norm(i/10,j/10))
  }
  Graphe2<-cbind(Graphe2,R)
}

persp3D(x = X2, y =Y2 , z =Graphe2 , clab = c("Densité"),phi=50, theta=50, contour=TRUE, lighting=TRUE,
```



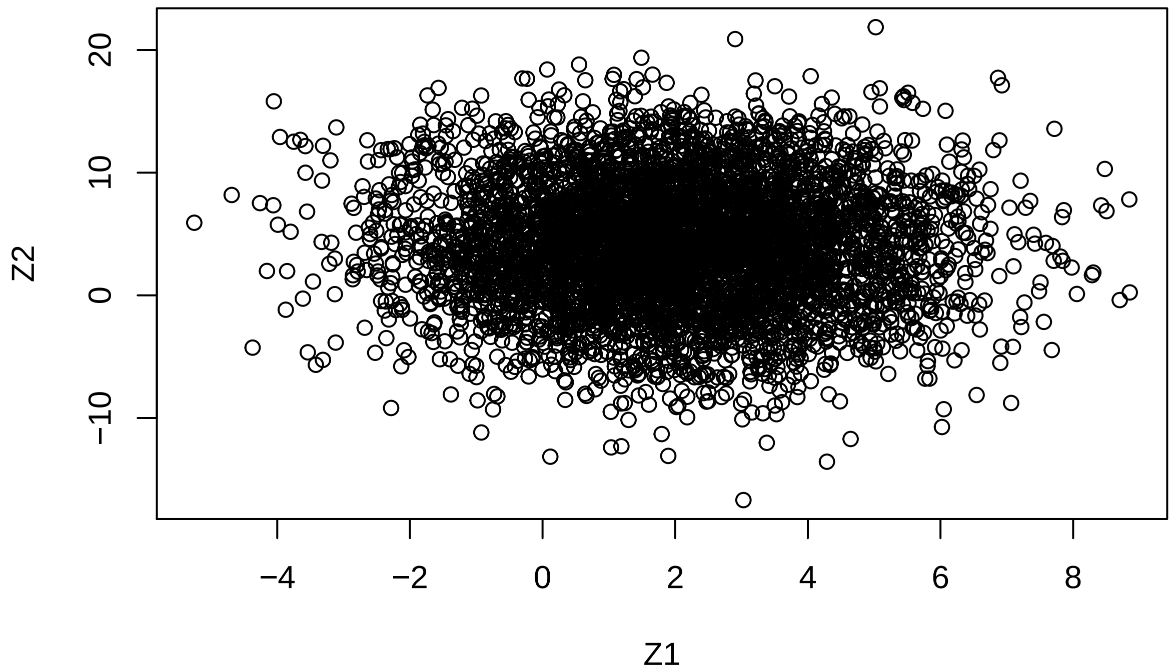
5.Simulation d'un echantillon de loi normale centrée réduite

```r
#5
N <- 10000
X <- gen_pair_gauss(N)[1:(N/2)]
hist(X,xlim=c(-4,4))
par(new=TRUE)
x <- seq(-4, 4, length = N)
y <- dnorm(x)
plot(x, y, type = 'l')
```

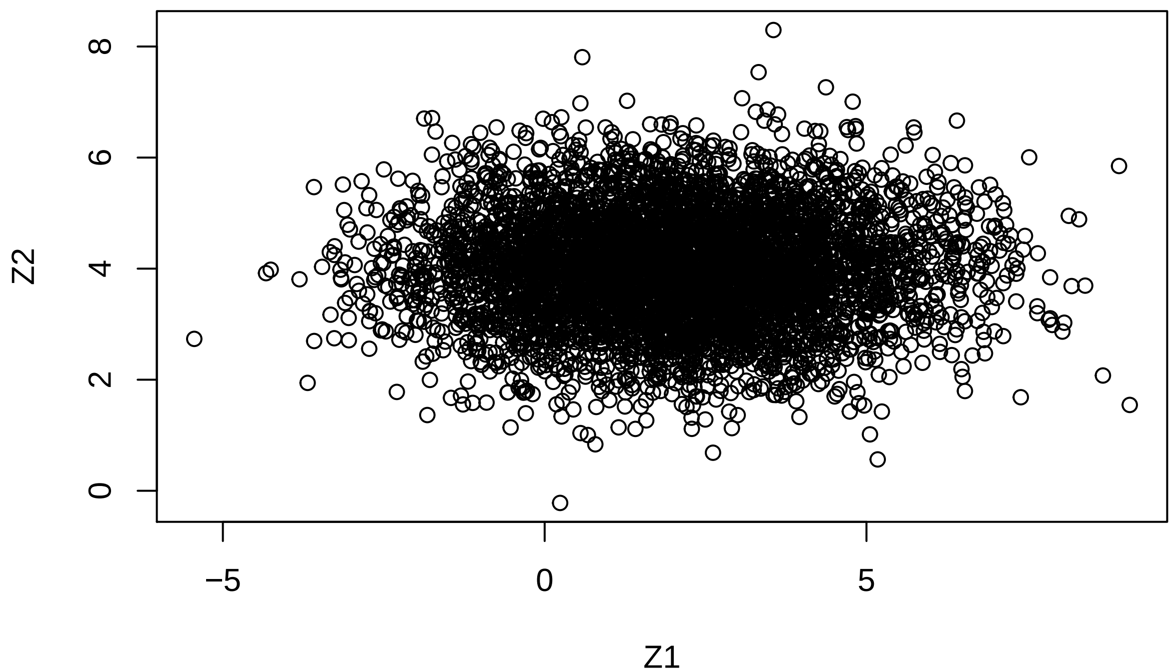


6.

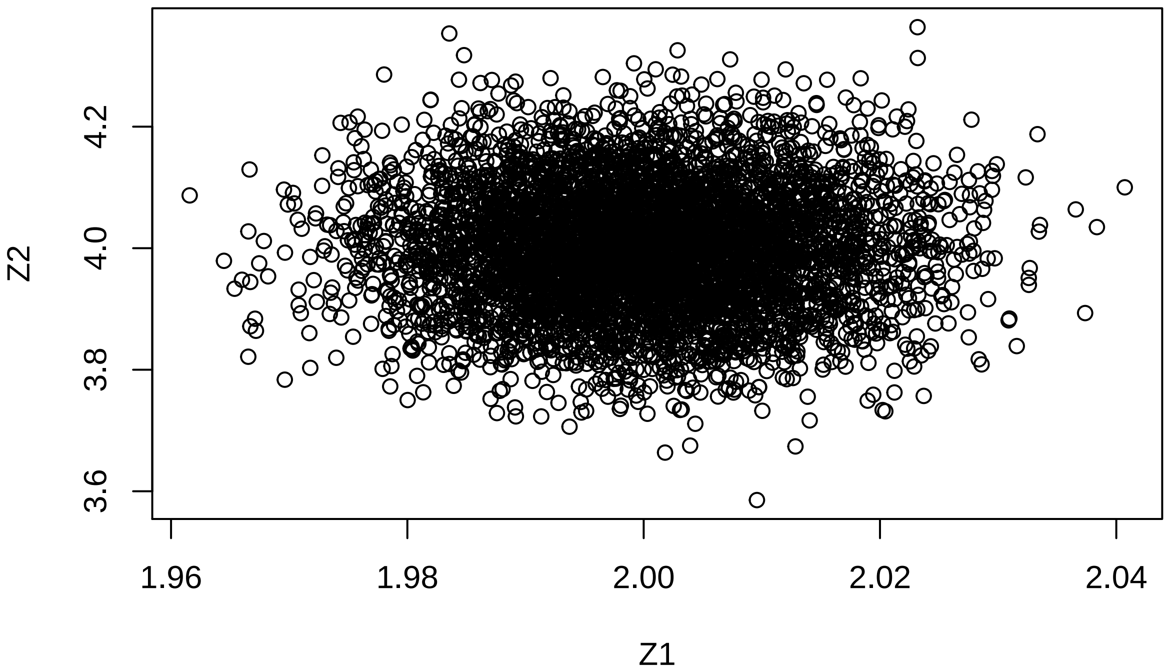
```r
plot_norm_2d <- function(sig,mu,N){
  Z1 <- mu[1] + sig[1]*gen_pair_gauss(N)[1:(N/2)]+sig[2]*gen_pair_gauss(N)[((N/2)+1):N]
  Z2 <- mu[2] + sig[3]*gen_pair_gauss(N)[1:(N/2)]+sig[4]*gen_pair_gauss(N)[((N/2)+1):N]
  plot(Z1,Z2)
  return(cbind(Z1,Z2))
}

mu = c(2,4)
N = 10000
#ro = 0.1
ro01 <- plot_norm_2d(c(0,2,0,5),mu,N)
```



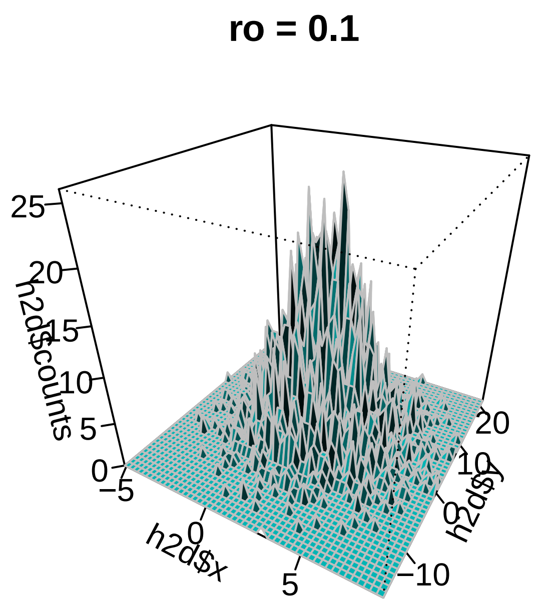

```r
#ro = 0.5
ro05 <- plot_norm_2d(c(0,2,0,1),mu,N)
```



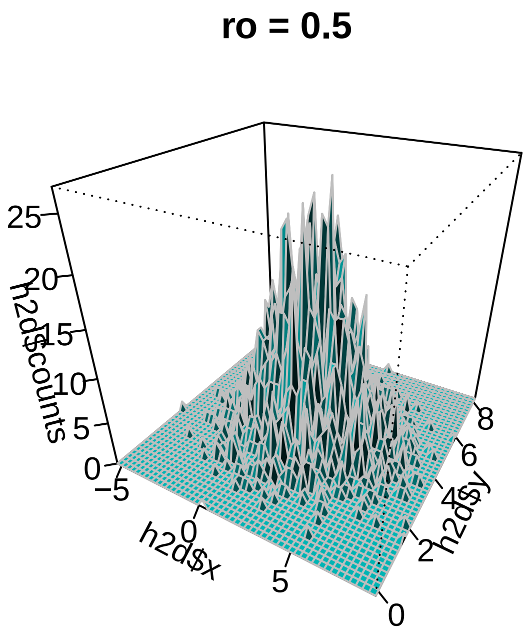

```r
#ro = 0.9
ro09 <- plot_norm_2d(c(0,1/90,0,0.1),mu,N)
```



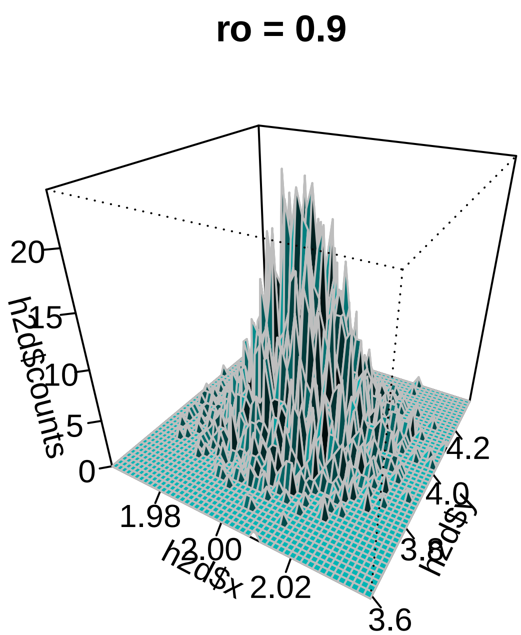

```
h2d <- hist2d(ro01,nbins=50,show=FALSE)
persp( h2d$x, h2d$y, h2d$counts,
         ticktype="detailed", theta=30, phi=30,
         expand=1, shade=0.5, col="cyan",border="grey",main="ro = 0.1")
```




```
h2d <- hist2d(ro05,nbins=50,show=FALSE)
persp( h2d$x, h2d$y, h2d$counts,
         ticktype="detailed", theta=30, phi=30,
         expand=1, shade=0.5, col="cyan",border="grey",main="ro = 0.5")
```




```
h2d <- hist2d(ro09,nbins=50,show=FALSE)
persp( h2d$x, h2d$y, h2d$counts,
          ticktype="detailed", theta=30, phi=30,
          expand=1, shade=0.5, col="cyan",border="grey",main="ro = 0.9")
```

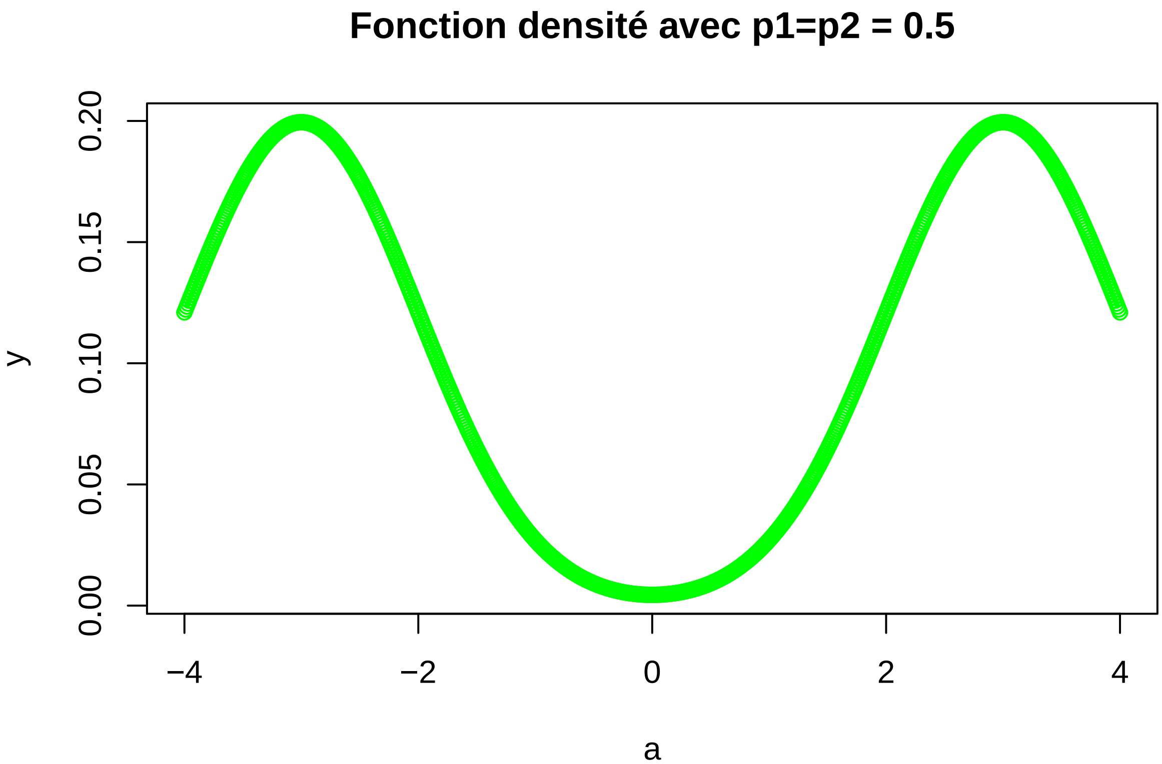


Exercice 7

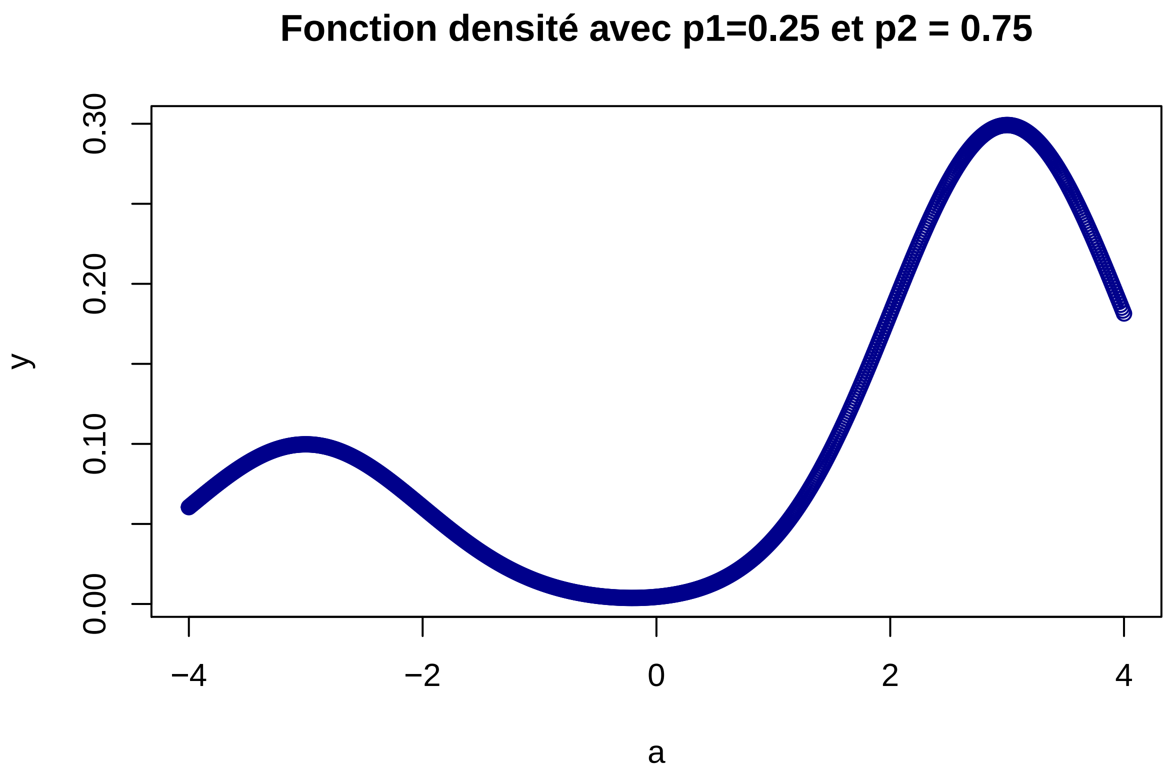
Représentation du graphique de la fonction densité :

```
binom <- function ( mu , sigma, x){
  return((1/(sigma*sqrt((2*pi))))*exp(-0.5*((x-mu)/sigma)^2))
}
f <- function (x , p1 , p2){
```

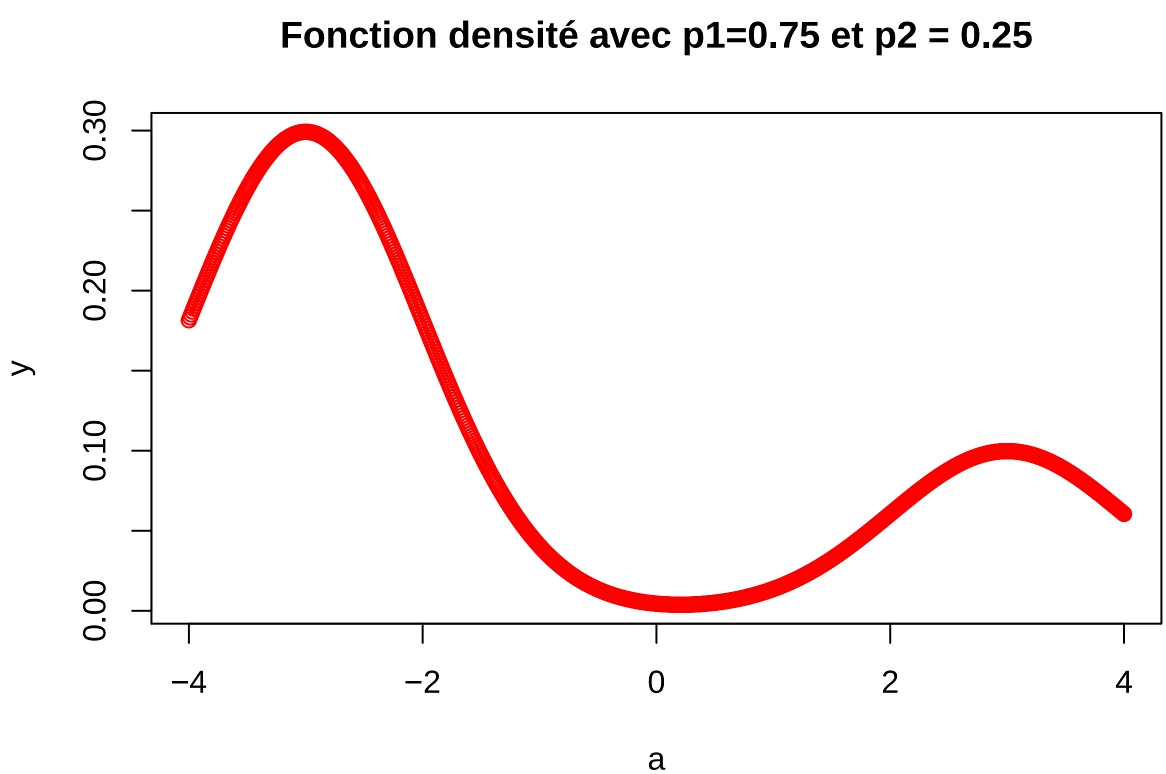
```
  return(p1* binom(-3,1,x)+p2*binom(3,1,x))
}


a<-c(-400:400)/100
y<-f(a,1/2,1/2)
plot(a,y,col= "Green",main = "Fonction densité avec p1=p2 = 0.5" )
```




```
a<-c(-400:400)/100
y<-f(a,1/4,3/4)
plot(a,y,col= "Darkblue",main = "Fonction densité avec p1=0.25 et p2 = 0.75" )
```

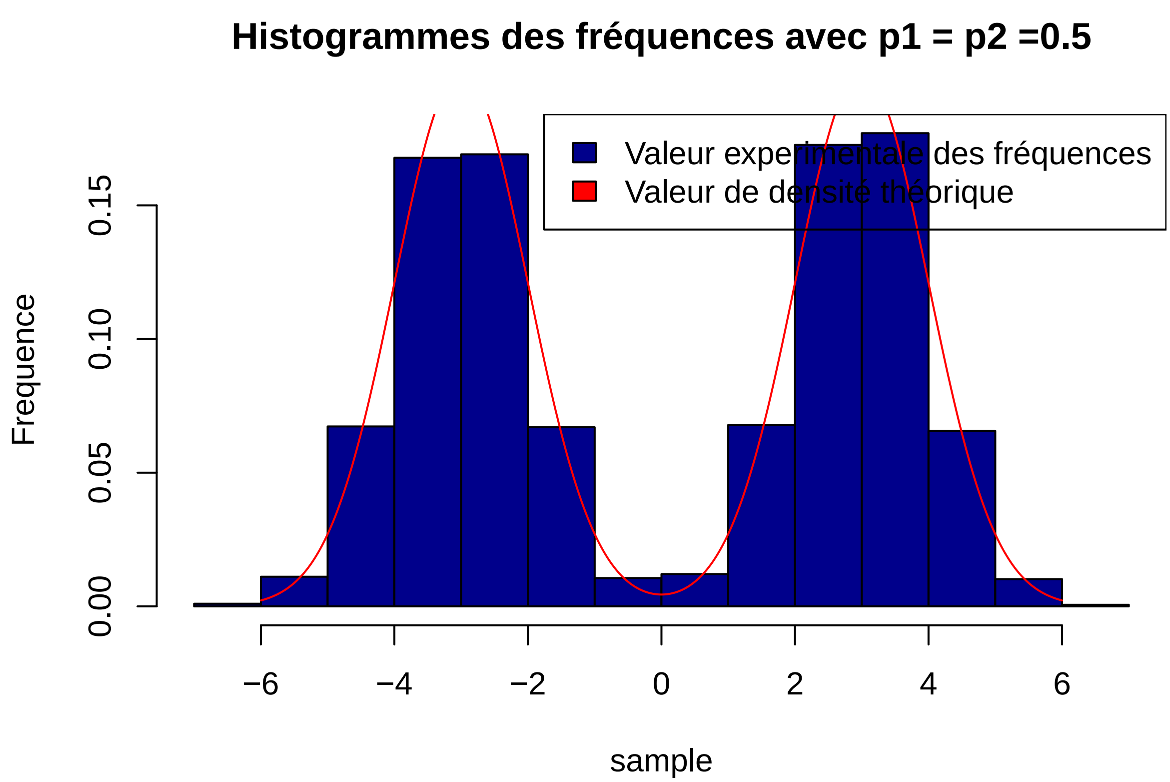



```
a<-c(-400:400)/100
y<-f(a,3/4,1/4)
plot(a,y,col= "Red",main = "Fonction densité avec p1=0.75 et p2 = 0.25" )
```

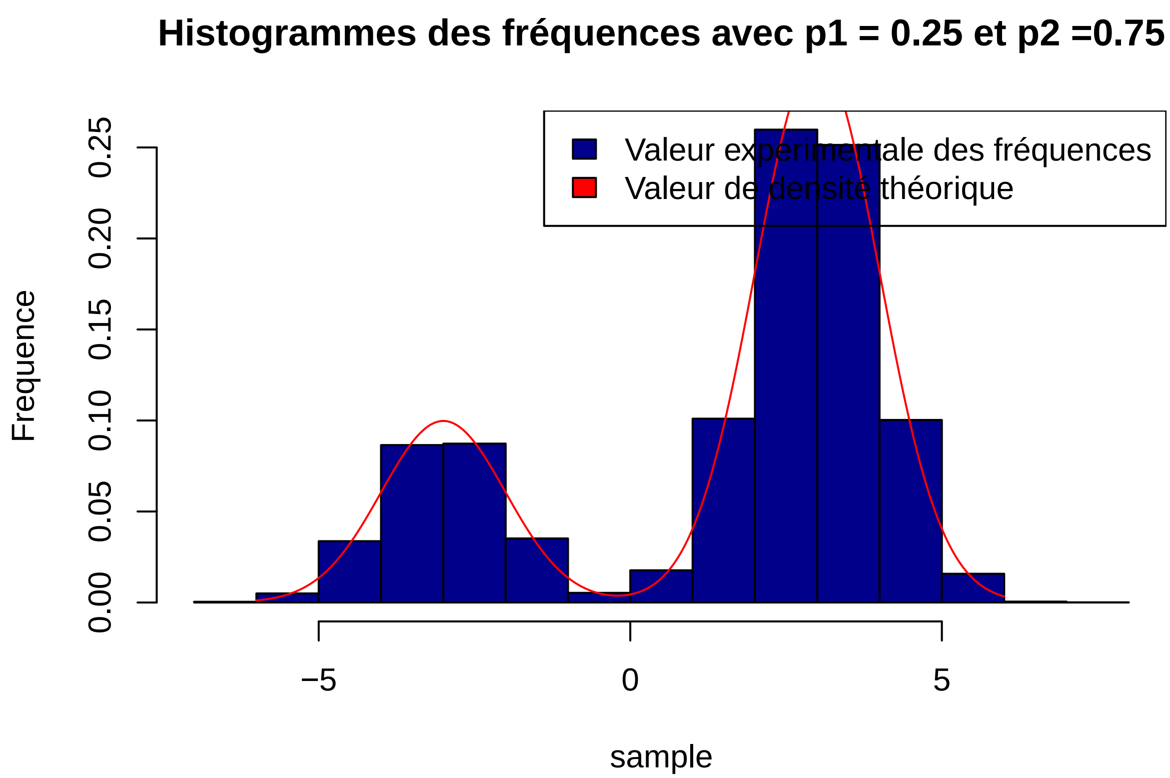


Afin de génerer un échantillon suivan t une loi mixte il suffit de générer deux echantillon correspondant aux deux loi normale précisées dans l'énoncé ensuite il suffit de générer un nombre aléatoire entre 0 et 1 si celui-ci est inferieur à p1 on choisit un élément dans l'échantillon 1 qui n'a pas encore été choisi sinon on fait la même chose mais dans l'échantillon 2 .

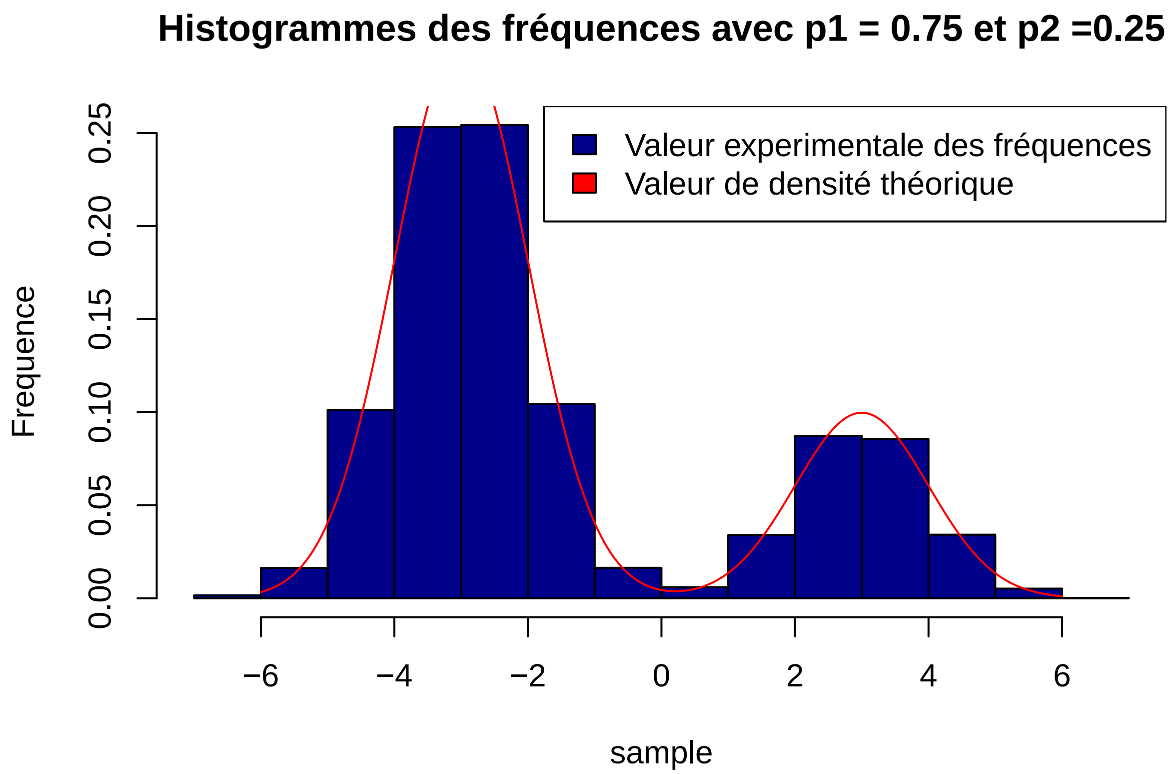
```
gaussienne <- function(N){
  return(sqrt(exponentielle(N,1/2))*cos(runif(N,0,2*pi)))
}

sample1<-gaussienne(10000)-3
sample2<-gaussienne(10000)+3

sample3 <- function(sample1 , sample2 , p1,N){
  sample <- c()
  for (i in 1: N){
  u <- runif(1,0,1)
  if (u<p1){
    sample [i] <- sample1 [i]

  }
  else sample [i] <- sample2 [i]
  }
  return (sample)
}
a<-c(-600:600)/100
y<-f(a,1/2,1/2)
sample = sample3(sample1,sample2,1/2,10000)
hist(sample, freq=FALSE, col= "Darkblue",main = "Histogrammes des fréquences avec p1 = p2 =0.5", ylab=
lines(a,y, col= "Red")
legend("topright", c("Valeur experimentale des fréquences","Valeur de densité théorique"),
       fill= c("darkblue", "red"))
```



```r
a<-c(-600:600)/100
y<-f(a,1/4,3/4)
sample = sample3(sample1,sample2,1/4,10000)
hist(sample, freq=FALSE,  col= "Darkblue",main = "Histogrammes des fréquences avec p1 = 0.25 et p2 =0.75
lines(a,y, col= "Red")
legend("topright", c("Valeur experimentale des fréquences","Valeur de densité théorique"),
       fill= c("darkblue", "red"))
```




```r
a<-c(-600:600)/100
y<-f(a,3/4,1/4)
sample = sample3(sample1,sample2,3/4,10000)
hist(sample, freq=FALSE,  col= "Darkblue",main = "Histogrammes des fréquences avec p1 = 0.75 et p2 =0.25
lines(a,y, col= "Red")
legend("topright", c("Valeur experimentale des fréquences","Valeur de densité théorique"),
       fill= c("darkblue", "red"))
```



En observant les diagrammes , on remarque que les valeurs des fréquences correspond aux denstités théoriques.