Examen, version en français.

Recherche opérationnelle S3.

2017-2018

Le sujet comporte 3 exercices sur 6 pages. Tous les documents sont autorisés. Répondez directement sur le sujet. Vous pouvez écrire sur une copie à part si vous n'avez pas assez de place, mais précisez le sur le sujet. ***N'écrivez pas en rouge ni au crayon à papier****. Pensez à utiliser un brouillon. Évitez de perdre du temps bêtement sur les questions difficiles. N'oubliez pas de mettre votre nom sur le sujet et sur toutes les feuilles que vous utilisez. Un barème vous est donné à titre indicatif.*

Exercice 1 — *Programmes équivalents (7 points)*

Soit (P) le programme suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{llllll} Max & x & +3y & & & \\ s.c. & x & +y & +z & & \leq 3 \quad (1) \\ & x & +2y & & -t & \geq 1 \quad (2) \\ & x, & y, & z, & t & \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right.$$

1. Montrer que (P) est équivalent au programme (Q) suivant. On montrera que, de toute solution de (Q), on peut déduire une solution de (P) de même poids et inversement.

$$(Q)\left\{\begin{array}{llll} Max & x & +3y & \\ s.c. & x & +y & \leq 3 \quad (1) \\ & x & +2y & \geq 1 \quad (2) \\ & x, & y, & \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right.$$

2. En déduire un programme standard (S) équivalent à (P) n'utilisant que 4 variables.

3. L'algorithme du simplexe peut-il commencer sa première itération sur (S) en partant du point $(x = 1, y = 0)$? Justifier.

4. L'algorithme du simplexe peut-il commencer sa première itération sur (S) en partant du point $(x = 0.5, y = 0.5)$? Justifier.

5. En utilisant l'algorithme du simplexe sur (S) à partir du point $(x = 0, y = 3)$, montrer que ce point est une solution optimale. Il est inutile de justifier qu'il s'agit d'une solution de base réalisable.
   Aide :
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 — *Branch and bound et plus court chemin à vitesse variable (10 points)*

Un robot situé sur un quadrillage de taille 4×4 doit atteindre une sortie. Le robot est sur la case $(0,0)$, en bas à gauche. Il veut atteindre la case $(3,3)$ en haut à droite. Il peut à chaque étape aller en haut, à droite ou à gauche, sauf si un mur l'en empêche. Il ne revient jamais en arrière. La grille est donnée sur la Figure 1. Les murs sont en gras. Quand il se déplace d'une case à une autre, le robot consomme de l'énergie, la quantité dépend de l'endroit où il se trouve. Le robot part avec une réserve d'énergie égale à 6 joules. Il doit atteindre la sortie le plus rapidement possible sans que sa réserve d'énergie ne tombe à 0. La quantité d'énergie nécessaire pour aller d'une case à l'autre est notée sur la figure 1.

Sa vitesse à un instant donné dépend de son énergie. Le temps t mis par le robot pour traverser une case est ($t = 60/E$) secondes où E est l'énergie dont dispose le robot **avant son déplacement** :

E	0	1	2	3	4	5	6
t	$+\infty$	60	30	20	15	12	10

Un exemple de chemin est donné sur la figure 2.

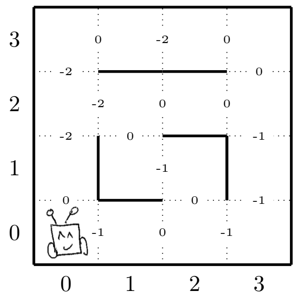


Figure 1 – Grille où doit se déplacer le robot. L'objectif est en haut à droite sur la case $(3,3)$ et le départ est sur la case $(0,0)$. Les traits en gras sont des murs. Les chiffres à l'extérieur sont les coordonnées. Les chiffres dans la grille correspondent à l'énergie consommée lors d'un déplacement. Par exemple pour aller de $(0,0)$ à $(0,1)$ le robot ne consomme rien. Mais pour aller en $(0,1)$ à $(0,2)$ il consomme 2 joules.

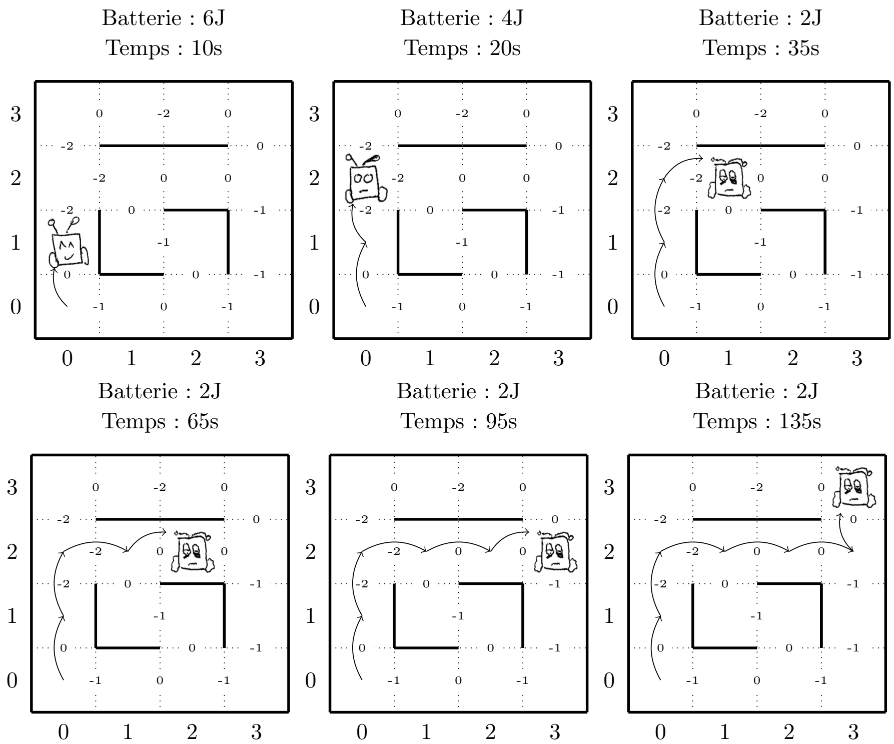


Figure 2 – Exemple de déplacement. Pour aller de la case $(0,0)$ à la case $(0,1)$, le robot met 10 secondes car $E = 6$ et ne consomme pas d'énergie. Pour aller à la case $(0,2)$, il met toujours 10 secondes car $E = 6$ puis perd 2 joules lors du déplacement. Enfin, pour aller à la case $(1,2)$, il met 15 secondes car $E = 4$ puis perd 2 joules lors du déplacement.

1. On veut résoudre de problème avec une méthode de séparation et d'évaluation.

   (a) Soit P un chemin de la case $(0,0)$ vers la case (i,j). On suppose que le robot a une énergie E et est parti depuis t secondes. Montrer que $t + \frac{60}{E}(6 - x - y)$ est une borne inférieure du temps total que mettra le robot pour aller jusqu'à l'arrivée.

   (b) Complétez l'arbre de branchement suivant **en explorant 3 nœuds**. (on rappelle que explorer = couper le nœud si sa borne est mauvaise, calculer ses fils et leur borne sinon).

   — Un nœud de l'arbre contient 4 informations : la position (x,y) du robot, l'énergie E qu'il lui reste et le temps t qu'il a mis pour arriver sur cette case.

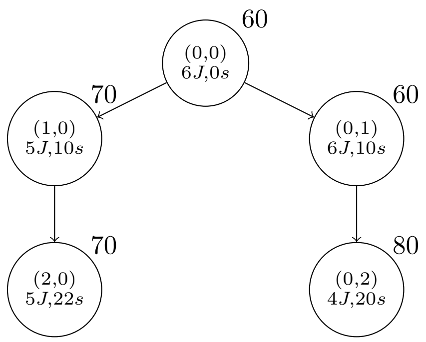
   — **Appliquez l'algorithme d'exploration du meilleur d'abord.**

   — Inscrivez à côté de chaque nœud la borne inférieure associée, calculée avec la formule de la question 1a.

   — N'inscrivez pas les déplacements passant par les murs. Par exemple, ne branchez pas le nœud $((0,1), 6J, 10s)$ vers la case $(1,1)$.

   — N'inscrivez pas les déplacements revenant en arrière. Par exemple, ne branchez pas le nœud $((0,1), 6J, 10s)$ vers la case $(0,0)$.

   — Si vous suivez toutes ces directives, vous devez trouver un arbre avec 9 nœuds.



2. On veut maintenant le résoudre avec un algorithme de programmation dynamique. Soit $n \times n$ la taille de la grille et E_0 l'énergie initiale du robot. On nomme $dE((x,y),(x',y'))$ la perte d'énergie lors du déplacement entre une case (x,y) et (x',y'). Cette perte est négative. On suppose dans cette partie que **tout déplacement du robot lui fait perdre de l'énergie** :

$$dE((x,y),(x',y')) < 0 \text{ pour tout } (x,y) \text{ et } (x',y')$$

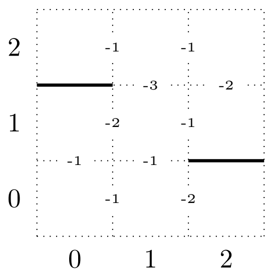
On pose $f((x,y),E)$ le temps minimum qu'il faut au robot pour aller de $(0,0)$ à (x,y) de sorte que l'énergie qu'il lui reste sur cette case est **exactement** E. La valeur de $f((x,y),E)$ quand ce chemin n'existe pas est $+\infty$.

(a) Supposons qu'on ait calculé $f((x,y),E)$ pour tout $0 \leq x,y < n$ et tout $0 \leq E \leq E_0$. Comment en déduire le temps minimum nécessaire au robot pour aller de $(0,0)$ à la case $(n-1,n-1)$?

(b) Soit $\Gamma(x,y)$ l'ensemble des voisins directs (mais pas les voisins diagonaux) de la case (x,y) tel qu'il n'y a pas de mur entre (x,y) et ce voisin. Donnez une formule de récurrence permettant de calculer $f((x,y),E)$. Pourquoi est-on certain que cette récurrence va s'arrêter ?

(c) Comment initialiser f ?

(d) Dans cet exemple ou $n=3$ et où $E_0=6$, calculez $f((x,y),4)$ et $f((x,y),3)$ pour tout $0 \leq x,y < 3$. On vous donne, à gauche, la grille et à droite $f((x,y),5)$ pour tout $0 \leq x,y < 3$.



	0	1	2
2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	10	$+\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	10	$+\infty$

$f((x,y),5)$

	0	1	2
2			
1			
0			

$f((x,y),4)$

	0	1	2
2			
1			
0			

$f((x,y),3)$

Exercice 3 — *File d'attente (6 points)*

On considère une file d'attente. Indiquez, dans chacun des cas suivant, où on décrit le taux de naissance λ_n en nombre d'arrivées par seconde et le taux de mort μ_n en nombre de départs par seconde s'il existe un régime permanent ou non (**justifiez**). Si oui, alors indiquez, **sans justifier**, la valeur de P_n pour tout $n \geq 0$. On rappelle que $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1. $\lambda_n = 3$, $\mu_n = 5$

2. $\lambda_n = 5$, $\mu_n = 3$

3. $\lambda_n = (n+1)$, $\mu_n = 100$

4. $\lambda_n = (n+1)$, $\mu_n = n^2$