# Projet de PAP
# 2018-2019

MEHDI M'BITEL
CHEN Zeyu

09 Janvier 2019

# Sommaire

# 1 Introduction

Dans ce projet nous utilisons des méthodes numériques telle que la méthode de Crank-Nickelson ou encore celle des différences finies implicites afin d'estimer la solution de l'équation de Black-Scholes.

En effet, en 1973, Fischer Black et Myron Scholes ont développé un modèle pour calculer le prix d'une option, dite européenne , liant le prix de cette option aux variations de l'actif sous-jacent (que l'on peut considérer comme une action). Leur modélisation du prix de l'actif sous-jacent St vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où $\sigma$ est la volatilité, $\mu$ une dérive, et $W_t$ est un processus de Weiner.

En utilisant la formule d'Ito, on se ramène à un problème déterministe sous la forme d'une équation aux dérivées partielles (EDP) vérifiée par la fonction $C(t, S)$ définie sur $[0, T] * [0, L]$ :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC$$

Avec des conditions initiales, aux bords et aux limites données, tels des call ou des put, nous nous devons de déterminer $C(0, t)$ où $C$ vérifie l'équation différentielle précédente. Et ce en passant par différentes méthodes à savoir celle de Crank-Nickelson où encore celle des différences finies implicites en passant par des changements de variables qui metteront l'équation différentielle précédente sous la forme d'une équation de chaleur.

# 2 EDP complète

## 2.1 Discrétisation de l'espace-temps

Nous allons fixer le nombre N de points en temps à calculer. On pose $\Delta T = \frac{T}{N}$ puis $t_n = n\Delta T$.

Nous allons fixer le nombre M+1 de points en espace à calculer. On pose $\Delta s = \frac{L}{M+1}$ puis $s_i = i\Delta s$.

## 2.2 Discrétisation des dérivées partielles

On approche les dérivées partielles intervenant dans l'EDP :

$$\frac{\partial C_{n,i}}{\partial t} \approx \frac{1}{\triangle T}\left(C_{n+1,i} - C_{n,i}\right)$$

$$\frac{\partial C_{n,i}}{\partial S} \approx \frac{1}{2}\left( (\frac{1}{2\triangle s} C_{n+1,i+1} - C_{n+1,i-1}) + \frac{1}{2\triangle s}(C_{n,i+1} - C_{n,i-1}) \right)$$

$$\frac{\partial^2 C_{n,i}}{\partial S^2} \approx \frac{1}{2\triangle s^2}(C_{n+1,i+1} - 2C_{n+1,i} + C_{n+1,i-1}) + \frac{1}{2\triangle s^2}(C_{n,i+1} - 2C_{n,i} + C_{n,i-1})$$

## 2.3 Résourde le problème sous la forme de la matrice

Tout d'abord, on a l'EDP :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC$$

et on sait que $C(t_n, s_i)$ est remplacé par $C_{n,i}$.

donc, on a :

$$\frac{1}{\triangle T}(C_{n+1,i} - C_{n,i}) + \frac{1}{4} rS \frac{1}{\triangle s}((C_{n+1,i+1} - C_{n+1,i-1}) + (C_{n,i+1} - C_{n,i-1}))$$

$$+\frac{1}{4\triangle s^2}\sigma^2 S^2((C_{n+1,i+1} - 2C_{n+1,i} + C_{n+1,i-1}) + (C_{n,i+1} - 2C_{n,i} + C_{n,i-1})) = rC_{n,i}$$

après :

$$\left(-\frac{1}{\triangle T} - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 - r\right) C_{n,i} + \left(\frac{\sigma^2 i^2}{4} + \frac{1}{4} ri\right) C_{n,i+1} + \left(\frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{1}{4} ri\right) C_{n,i-1} =$$

$$\left(-\frac{1}{\triangle T} + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2\right) C_{n+1,i} + \left(-\frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{1}{4} ri\right) C_{n+1,i+1} + \left(\frac{1}{4} ri - \frac{\sigma^2 i^2}{4}\right) C_{n+1,i-1}$$

Sur la matrice, on a :

$$a_i = \frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{1}{4} ri$$

$$b_i = -\frac{1}{\triangle T} - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 - r$$

$$c_i = \frac{\sigma^2 i^2}{4} + \frac{1}{4} ri$$

$$d_i = \frac{1}{4}ri - \frac{\sigma^2 i^2}{4}$$
$$e_i = -\frac{1}{\triangle T} + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2$$
$$f_i = -\frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{1}{4}ri$$

donc, on a :

$$A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_M & b_M & c_M \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{M+1} & b_{M+1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} e_0 & f_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ d_1 & e_1 & f_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & d_M & e_M & f_M \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{M+1} & e_{M+1} \end{bmatrix}$$

A et B sont de taille $M + 2 * M + 2$, parce que j'ai fait une discrétisation de l'espace en fixant le nombre M+1 de points. Et puis, comme on change pas le Pc (y compris la premier et la derniere colonne et la derniere ligne de la matrice C), On peut déduire que $b_0 = e^{-r\Delta T}, c_0 = f_0 = d_{M+1} = 0, e_0 = e_{M+1} = 1$

Les matrices précédentes deviennent alors :

$$A = \begin{bmatrix} e^{-r\Delta T} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_M & b_M & c_M \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ d_1 & e_1 & f_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & d_M & e_M & f_M \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sachant deux conditions :

$$P(t, 0) = Ke^{r(t-T)} \quad \forall t \in [0, T]$$
$$P(t, L) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$
$$P(T, s) = max(K - s, 0) \quad \forall s \in [0, L]$$

On sait donc C est :

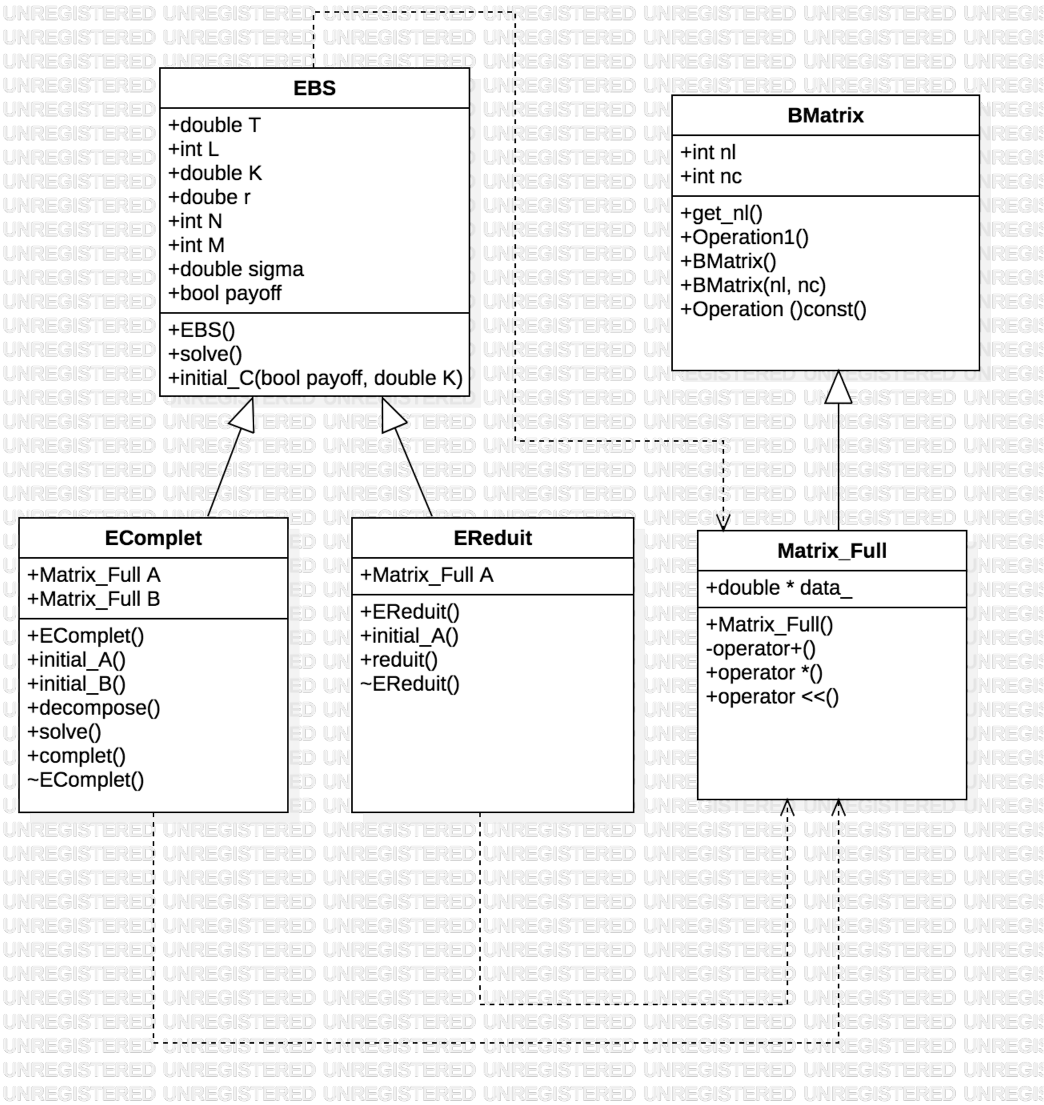
$$C = \begin{bmatrix} Ke^{r(-T)} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ Ke^{r(\Delta T-T)} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ Ke^{r(2\Delta T-T)} & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ K & max(0, K - \Delta s) & max(0, K - 2\Delta s) & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement, on a transformé notre problème sous la forme matricielle :

$$\boxed{AC_n = BC_{n+1}}$$

## 2.4 L'implémentation de la méthode en C++

D'abord le diagramme UML :




Donc, à partir de l'initialisation de la matrice A et B et C, on va parcourir chaque ligne de la matrice C, on commence par Cn pour derminer C0. Pour chaque itération on cherche à resoudre le problème $AC_i = BC_{i+1}$ , on passe la matrice A à la méthode decompose et on appelle la méthode solve pour avoir la solution en donnant sa valeur à $C_i$ .

La méthode solve est une méthode pour resoudre l'equation Ax=b , où A est une matrice tridiagonale . On l'a réalisé en fonction de "Thomas algorithm". Donc , chaque fois qu'on a appellé sovle , on va mettre jour à $C_i$ , et dans la prochaine itération , on calcule $C_{i-1}$ en fonction de $C_i$ jusqu'a on a trouvé $C_0$

# 3 Différence finie implicite

## 3.1 Transformer l'équation de Black-Scholes en une equation de chaleur

NB : Pour simplifier les notations $\widetilde{S}$ sera vu comme $x$, $\widetilde{t}$ comme $\tau$ et $\widetilde{C}$ comme $U$. Nous commençons par l'équation de Black-Scholes fournie dans le sujet :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} = rC \tag{1}$$

### 3.1.1 Première étape

L'équation peut être réecrite sous la forme équivalente :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(S\frac{\partial}{\partial S}\right)^2 C + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0.$$

Nous faisons un changement de variables :

$$S = e^y, \qquad t = T - \tau$$

Ce qui donne :

$$S\frac{\partial}{\partial S} \to \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -\frac{\partial}{\partial \tau}$$

Nous obtenons alors l'équation à coefficients constants suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial C}{\partial y} + rC = 0. \tag{3}$$

### 3.1.2 Deuxième étape

Si l'on remplace $C(y, \tau)$ dans l'équation (3) par $U = e^{r\tau}C$, nous obtenons :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

### 3.1.3 Troisième étape

Finalement, le changement de variable $x = y + (r - \sigma^2/2)\tau$ nous permet d'éliminer le terme de premier ordre et de mettre l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

## 3.2 L'implémentation de la méthode des différences finies implicite

### 3.2.1 Documentation

Considérons une équation de chaleur à une dimension vérifiée par $u$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}$$

Pour numériser l'équation précédente, il faut approximer les dérivées partielles par des différences. Dans ce cas l'on considère une grille spacio-temporelle $(x_i, t_i)$ homogène telle que la différence entre deux points de temps consécutifs soit $\Delta t$ et deux points de l'espace consécutifs soit $\Delta x$.

Les points $U(x_j, t_n) = u_j^n$ représenterons une approximation numérique de $U(x_j, t_n)$

Ainsi :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}$$

Est approximée en :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Ce qui donne :

$$u_j^{n+1} = \alpha \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + u_j^n$$

Nous posons

$$\beta = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

L'équation précédente devient alors :

$$u_j^{n+1} = \beta(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + u_j^n$$

Ce qui donne finalement :

$$u_j^{n+1} = \beta u_{j+1}^n + (1 - 2\beta) u_j^n + \beta u_{j-1}^n$$

Nous arrivons alors à une forme matricielle :

$$A = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & . \\ . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & . \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ie une matrice tridiagonale en (a,b,c) à laquelle l'on rajoute une dernière ligne en (1,0,...,0) et une première ligne en ($w = \frac{u_0^{n+1}}{u_0^n}$,0,..,0) à savoir $a = c = \beta$ et $b = 1 - 2\beta$

Dans ce cas nous obtenons :

$$U^{n+1} = AU^n$$

ie,

$$U^n = A^{-1}U^{n+1}$$

où

$$U^{n+1} = \begin{bmatrix} u_0^{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ u_{M+1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

Et évidemment

$$U^n = \begin{bmatrix} u_0^n \\ . \\ . \\ . \\ u_{M+1}^n \end{bmatrix}$$

Commençant par la condition finale $U^T$, nous arrivons par boucle de T à 0 à $U^0$. Nous pouvons déduire $C^0$ puisque $U = e^{r\tau}C$ , sachant que $t = 0$, donc $\tau = T - t = 1$ , on a alors

$$C^0 = U^0 e^{-r}$$

### 3.2.2 Discrétisation et conditions

On commence par une discrétisation de $S$ et de $t$ l'on arrive à une discrétisation de $x$ et de $\tau$ par le raisonnement suivant :

$$t = T - \tau$$

et

$$T = 1$$

Alors :

$$\Delta t = -\Delta\tau$$

Aussi à partir de la discrétisation de $S$ on peut discrétiser $x$ :

$$\Delta y = ln(\Delta S)$$

et

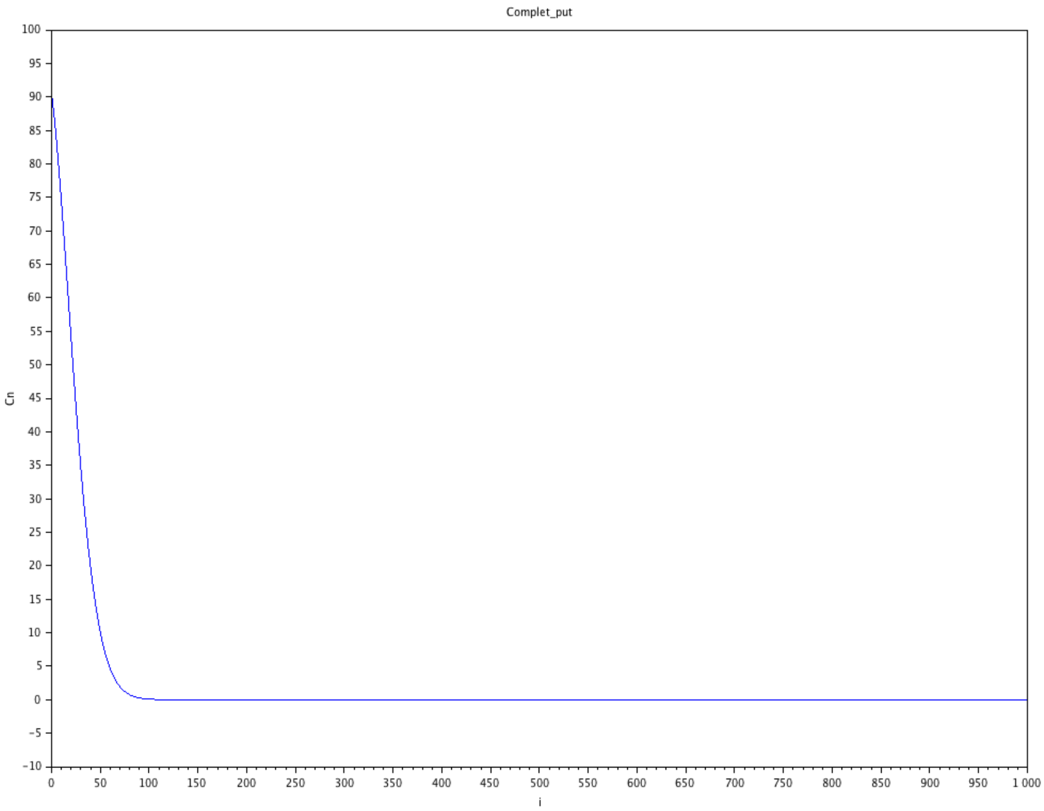
$$\Delta x = \Delta y + \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{M+1}\Delta\tau$$

Concernant les conditions initiale, de bord et aux limites il suffit de considérer le fait que $U = e^{r\tau}C$ et que $t = T - \tau = 1 - \tau$ alors $\tau = 1 - t$.

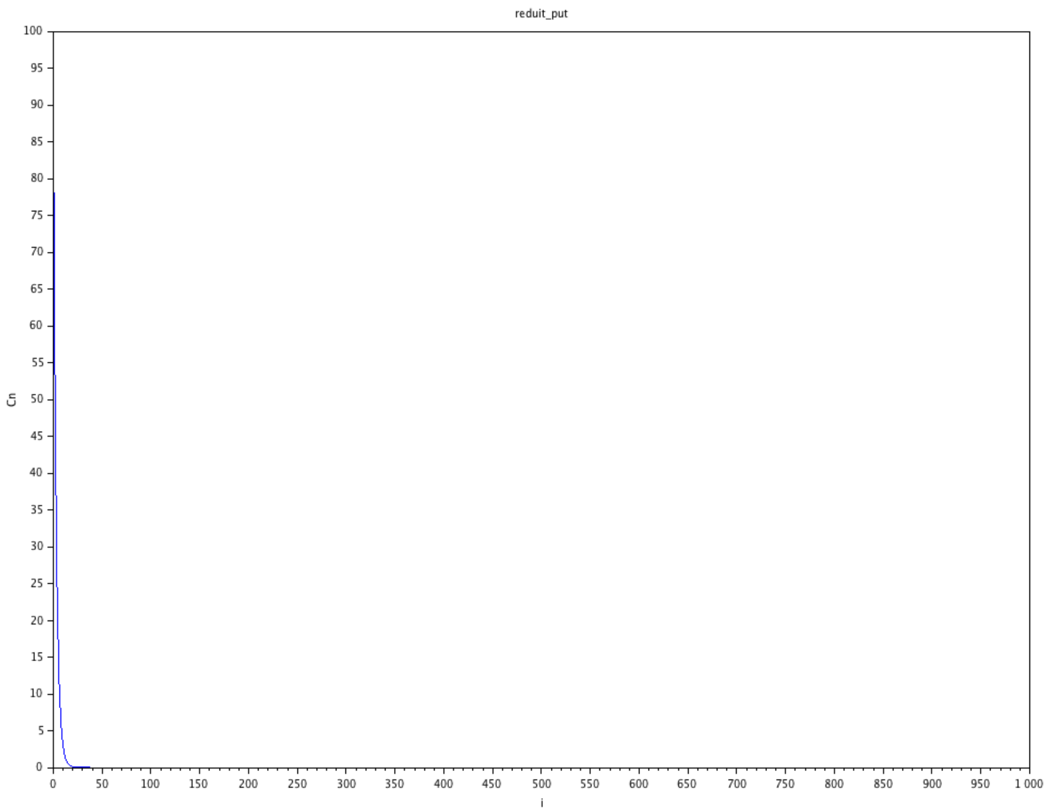
# 4 Affichage des courbes

## 4.1 le plot pour un put

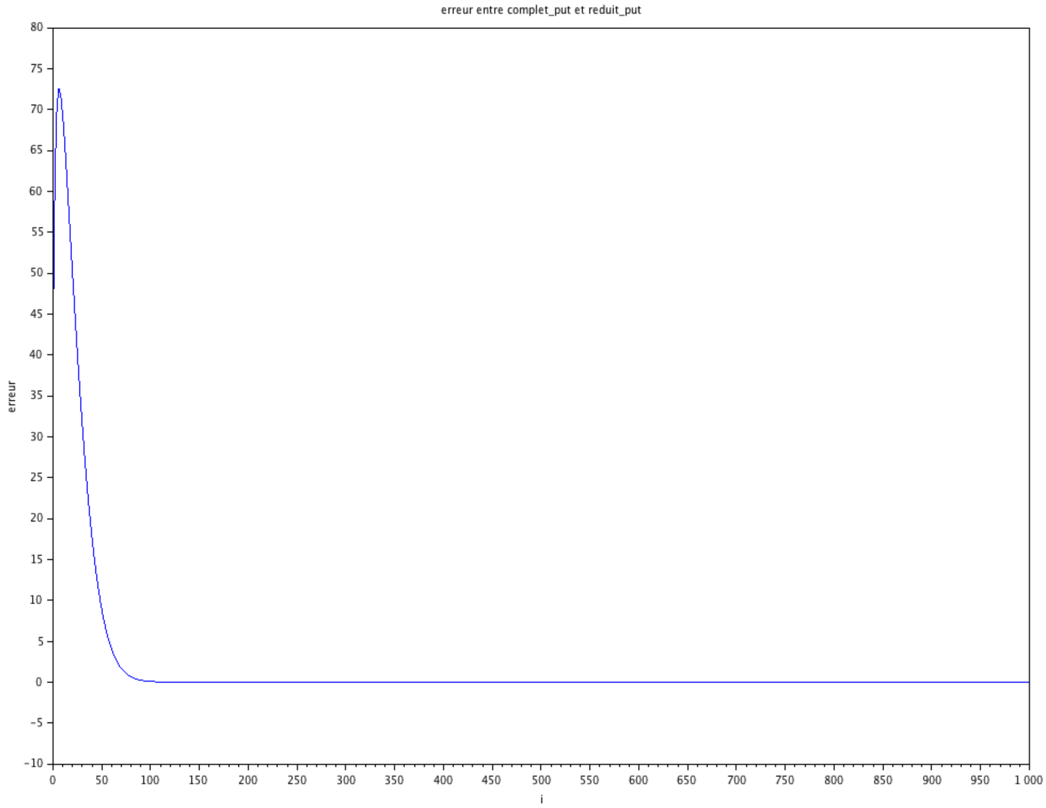
Le plot de la courbe avec la méthode complète :




Le plot de la courbe avec la méthode réduit :

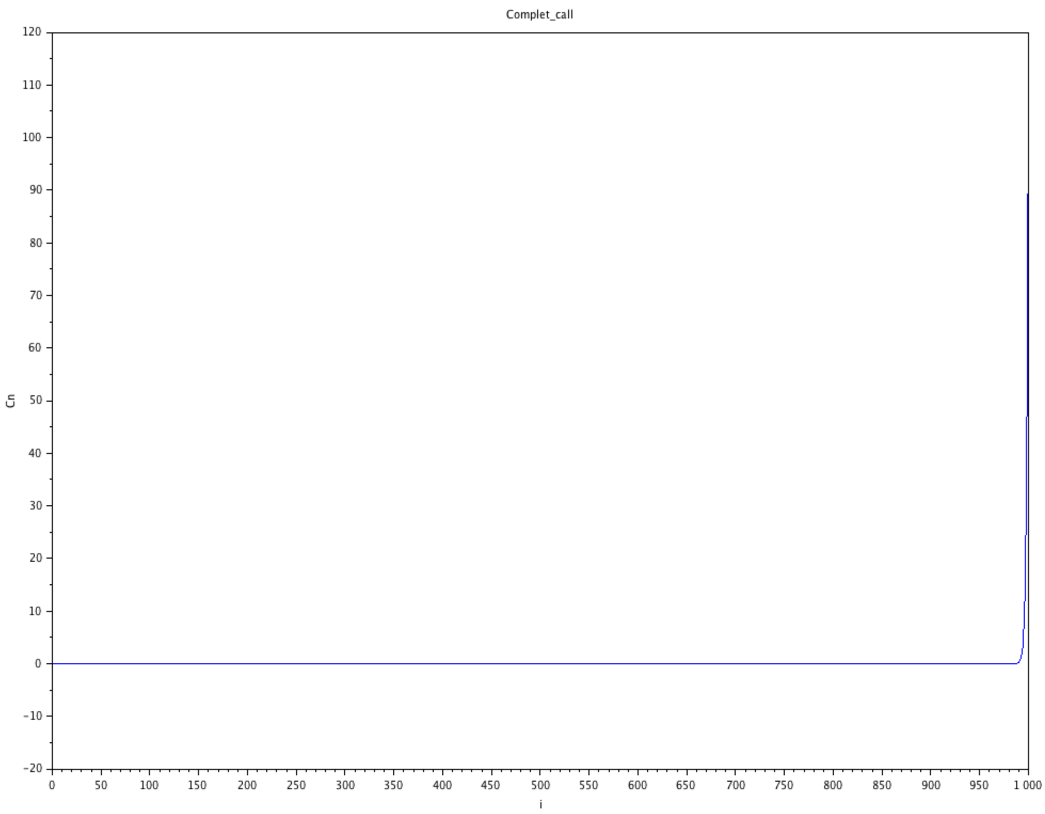


Le plot d'erreur entre les deux méthodes

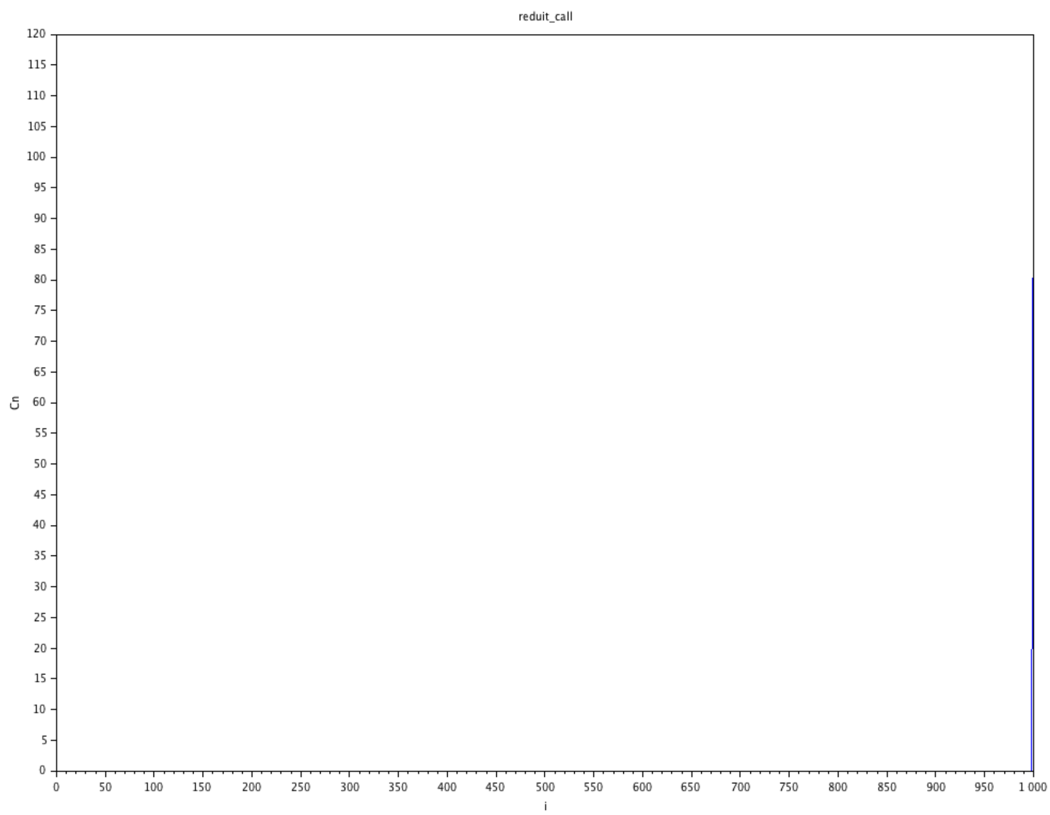



## 4.2 le plot pour un call

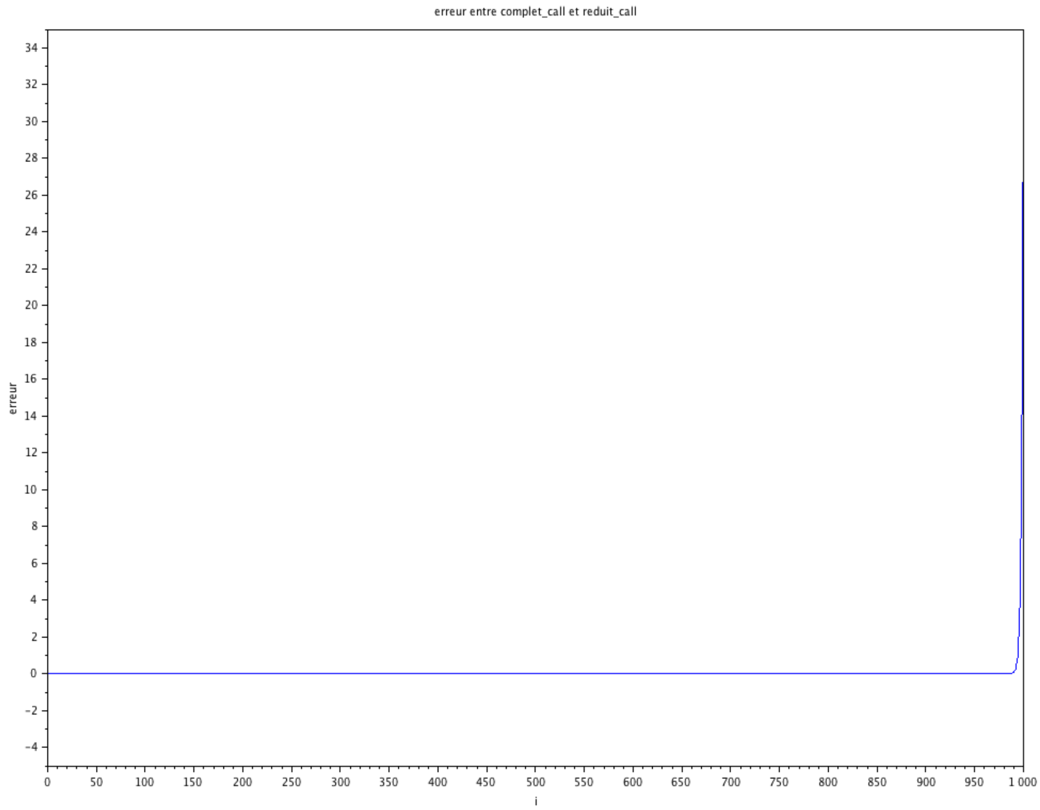
Le plot de la courbe avec la méthode complète :




Le plot de la courbe avec la méthode réduit :




Le plot d'erreur entre les deux méthodes


erreur entre complet_call et reduit_call
erreur
i
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650
700
750
800
850
900
950
1 000

# 5 Bibliographie

La liste des sources utilisées pour réaliser ce projet.


— Matrice tridiagonale

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_tridiagonale

— Black-Scholes equation

- https://en.wikipedia.org/wiki/Black-Scholes_equation

— Crank-Nicolson method

- https://en.wikipedia.org/wiki/Crank-Nicolson_method