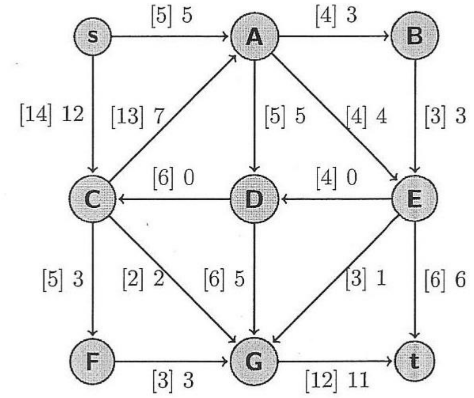
Examen de Recherche Opérationnelle
S3 ENSIIE - 2015/2016 - 1ère session
Documents manuscrits et polycopiés du cours autorisés
Calculatrice interdite
Durée 1h45 - Barême indicatif

Exercice 1 (3 points)

On considère le réseau de transport ci-dessous où un flot a déjà été calculé de la source s au puits t. Sur chaque arc figurent sa capacité (entre crochets) et son flux.



1. Montrer que le flot actuel est correct et donner sa valeur.
2. Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximal en partant du flot actuel.
3. En déduire une coupe de capacité minimale. Indiquer clairement les ensembles S et T.
4. La capacité de l'arc (D,C) passe de [6] à [16]. Que devient la valeur du flot maximal ?

Exercice 2 (4 points)

On considère le programme linéaire suivant:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 5 \\ \quad 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Effectuer une résolution graphique. Indiquer clairement votre solution optimale et sa valeur.

2. On remplace la fonction économique (max $2x_1 + x_2$) par (max $\alpha x_1 + x_2$) où α est un réel positif ou nul. Donner une solution optimale et sa valeur suivant la valeur de α.

Remarque : des graphiques brouillons seront considérés comme faux

Exercice 3 (3,5 points)

On considère le programme linéaire (P) suivant:

$$(P)\begin{cases} \min \quad 10x_1 + 2x_2 + 7x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 \leq 2 \\ 4x_1 - x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 5x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Mettre (P) sous forme standard.
2. Pourquoi la base formée par les variables d'écart n'est-elle pas réalisable ?
3. Poser le problème de phase 1 (ou pb auxiliaire) noté PA. On ne rajoutera qu'une variable artificelle.
4. Résoudre (PA).
5. Reprendre la base optimale de (PA) pour résoudre (P). Donner clairement la solution optimale obtenue et sa valeur.

Remarque : on a besoin ici de très peu d'itérations.

Exercice 4 (2,5 points)

Pour chacune des matrices de transition suivantes, dire, en le justifiant, si la chaîne de Markov est régulière ou non, c'est à dire si elle possède une seule classe récurrente apériodique.

$$M1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \; M2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; M3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; M4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \; M5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (2 points)

Soit une expérience décrite par une chaîne de Markov à 2 états dont la matrice de transition est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

0,2 0,8

où α est inconnu.

On fait l'expérience un grand nombre de fois et on constate qu'on se retrouve toujours dans le premier état dans 20% des cas et dans le 2ème état dans 80% des cas. Trouver α en justifiant votre calcul.