ENSIIE 2018-2019
2A UE Méthodes de Simulation

Feuille 2 de Travaux pratiques

Exercice 1. (*Exemple simple mais illustratif*). Soit X une v.a. à valeurs dans $\{-5, 0, 5\}$ avec :

$$\mathbb{P}(X = -5) = 1/3, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1/6, \quad \mathbb{P}(X = 5) = 1/2,$$

Soit Y une autre variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(Y = 0) = 5/6$.

1. Déterminez $\mathbb{P}(Y = -1)$ et $\mathbb{P}(Y = 1)$ pour que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$.
2. Calculez Var(Y) et expliquez pourquoi Var$(Y) <$ Var(X).
3. Pour $N = 1, \dots, 1000$, tracez sur le même graphe la fonction $N \mapsto \bar{X}_N$ et la fonction $N \mapsto \bar{Y}_N$ où pour toute v.a. Z, $\bar{Z}_N = (Z_1 + \ldots + Z_N)/N$ est la moyenne empirique associée au N-échantillon $Z_1, \dots, Z_N$ de la loi de Z. Commentez les graphes.
4. Tracez sur deux fenêtres graphiques différentes les graphiques précédentes, chacun accompagné des bornes inférieures et supérieures des intervalles de confiance (qui est partout de niveau de confiance 95%) pour tout N. Commentez les graphes.
5. Pour chacun des estimateurs $\bar{X}_N$ et $\bar{Y}_N$, déterminer numériquement l'entier approximatif N_0 à partir duquel l'erreur d'estimation est d'ordre 10^{-2} (au niveau de confiance 95%).

Exercice 2. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On veut comparer la méthode de Monte Carlo naive et la méthode d'échantillonage préférentiel dans l'estimation de

$$\mathbb{E}(g(X)) \qquad \text{où} \qquad g(x) = x\,\mathbb{1}_{\{x \geq 3.5\}}. \tag{1}$$

1. Donnez une estimation de (1) par la méthode de Monte Carlo en simulant un N-échantillon $X_1, \dots, X_N$ de taille $N = 10000$ de la loi de X.
2. Pour $N = 1, \dots, 10000$, tracez sur le même graphe la fonction $N \mapsto \bar{X}_N$ et les intervalles de confiances associés.
3. Soit $A = [0, 6]$ et $\{Z^\mu,\ \mu \in A\}$, une famille de variables aléatoires telle que $Z^\mu \sim \mathcal{N}(\mu; 1)$.
   (a) Identifiez la fonction ψ telle que $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(\psi(Z^\mu))$.
   (b) On pose $\mu = 2.5$. Pour $N = 1000$, puis pour $N = 10000$, donnez une estimation de (1) par la méthode d'échantillonage préférentiel en utilisant un N-échantillon de Z^μ.
   (c) Pour $N = 1, \dots, 10000$, tracez sur le même graphe les fonctions $N \mapsto \frac{g(X_1)+\ldots g(X_N)}{N}$ et $N \mapsto \frac{\psi(Z_1^\mu)+\ldots\psi(Z_N^\mu)}{N}$, pour $\mu = 2.5$.
   (d) Faites un zoom des graphes précédents pour $N = 1, \dots, 1000$ et comparez-les.
   (e) Pour $N = 1, \dots, 10000$, tracez sur une nouvelle fenêtre graphique la fonction $N \mapsto \frac{\psi(Z_1^\mu)+\ldots\psi(Z_N^\mu)}{N}$ et les intervalles de confiance associés.
4. On veut chercher le paramètre μ^* qui minimise $\mathbb{E}\psi^2(Z^\mu)$.
   (a) Spécifiez la fonction K qui vérifie $\mathbb{E}\psi^2(Z^\mu) = \mathbb{E}(K(\mu, \xi))$, avec $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
   (b) Utilisez l'algorithme suivant pour donner une approximation de μ^*:
   $$\mu_{n+1} = \mu_n - \gamma_{n+1} K'_\mu(\mu_n, \xi_{n+1}), \qquad \mu_0 \in A,$$
   où $(\xi_n)_{n\geq 1}$ est une suite iid de v.a. de même loi que ξ et $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ vérifie:
   $$\sum_{n\geq 0} \gamma_{n+1} = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \gamma_{n+1}^2 < +\infty,$$
   et K'_μ est la dérivée partielle de K par rapport à μ.

(c) Pour $N = 1, \ldots, 10000$, tracez la fonction $N \mapsto \frac{\psi(Z_1^{\mu^*})+\ldots\psi(Z_N^{\mu^*})}{N}$ et les intervalles de confiance associés. Comparez avec les résultats obtenus pour $\mu = 0$ et $\mu = 2.5$.

5. Pour chacun des cas $\mu = 0$, $\mu = 2.5$, $\mu = \mu^*$, déterminer numériquement l'entier approximatif N_0 à partir duquel l'erreur d'estimation est d'ordre 10^{-2} (au niveau de confiance 95%). On fera croître N par pas de 10 pour atteindre le critère d'erreur d'approximation (voir cours).

Exercice 3. Soit $T > 0$ et soit $t_k = \frac{kT}{n}$, $k = 0, \ldots, n$, des points de discrétisation réguliers sur $[0, T]$. On considère le modèle d'évolution suivant de deux actifs financiers (X, Y) corrélés:

$$\begin{cases} X_{t_{k+1}} = X_{t_k}\big((1 + r\Delta) + \sigma_1\sqrt{\Delta}Z_{k+1}\big) \\ Y_{t_{k+1}} = Y_{t_k}\big((1 + r\Delta) + \rho\sigma_2\sqrt{\Delta}Z_{k+1} + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\Delta}\tilde{Z}_{k+1}\big) \end{cases}$$

où r est le taux d'intérêt, $\Delta = T/n$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\rho \in (-1, 1)$ est le coefficient de corrélation entre Z et $\tilde{Z}$; $(Z_k)_{k\geq 1}$ est une suite iid de loi $\mathcal{N}(0; 1)$, de même que $(\tilde{Z}_k)_{k\geq 1}$, et Z_k et $\tilde{Z}_k$ sont indépendantes pour tout $k \geq 1$.

On veut donner une approximation par Monte Carlo de ($x_+ = \max(x, 0)$)

$$e^{-rT}\mathbb{E}\Big(\big(0.5 \times X_{t_n} + 0.5 \times Y_{t_n} - K\big)_+\Big) \tag{2}$$

1. On pose $T = 1$, $n = 50$, $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 0.8$, $r = 0.03$, $X_0 = 50$, $Y_0 = 60$, $K = 55$.

   (a) Donner une estimation de (2) par la méthode de Monte Carlo pour $\rho = 0.1$, $\rho = 0.5$ et pour $\rho = 0.9$.

   (b) Donnez l'intervalle de confiance associé pour un niveau de confiance de 95%.

2. On pose toujours $T = 1$, $n = 50$, $\sigma_2 = 0.8$, $r = 0.03$, $X_0 = 50$, $Y_0 = 60$, $K = 55$, et $\rho = 0.5$. Donnez une estimation de (2) par la méthode de Monte Carlo pour $\sigma_1 = 0.7$ et $\sigma_1 = 1$. Donnez les intervalles de confiance associées.