MPM2 Projet Mathématique 2017-2018

1 Organisation

Règles :

- 3 séances : le 3 avril, le 24 avril et le 22 mai ; la 1ere séance consiste à présenter le projet et expliquer le travail attendu, lors de la 2eme et 3eme séances (salle TP) vous pouvez poser des questions et présenter votre travail afin de vérifier que ce que vous avez fait est bon. Lors de la fin de la 3eme séance vous enverrez votre travail par mail à Sergio Pulido dans un fichier zip dans lequel se trouve un document pdf expliquant ce que vous avez fait et un document py dans lequel se trouve vos codes Python (les documents et sources rendus en retard ne seront pas pris en compte).
- Travail réalisé en trinôme.
- Un travail copié ou effectué en collaboration entre N groupes divise les notes des groupes concernés par N.

Objectif et contenu du travail :

- Le Projet Mathématique consiste en la résolution mathématique d'un problème, et à sa mise en oeuvre informatique. Ce qui est attendu est donc un rapport qui contient :
  - une présentation formalisée et claire du problème étudié et de sa solution mathématique,
  - une description algorithmique des solutions implémentées (en pseudo-code),
  - un programme mettant en oeuvre ses méthodes implémentées en Python.
- Le programme fourni sera commenté et les variables auront des noms explicites, ou tout du moins univoque.

2 Le sujet

L'objectif est de modéliser un marché financier et de déterminer le prix et la couverture d'options européennes. Le marché financier est composé de deux actifs que l'on peut échanger à un prix fixé par le marché :

- un actif que l'on appelle sans risque dont le prix à l'instant t est noté S_t^0 que l'on suppose connu dès l'instant initial 0 (ce prix est une variable aléatoire déterministe),
- un actif risqué dont le prix S_t à l'instant t est une variable aléatoire (typiquement une action), dont on modélisera la loi par la suite.

Un investisseur souhaite acheter à l'instant initial une option européenne qui lui rapportera la valeur $f(S_T)$ à l'instant T, où la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est continue (c'est une fonction qui prend en argument la valeur de l'actif risqué à l'instant T). Afin de déterminer le prix que doit faire payer le vendeur à l'instant initial à cet investisseur nous utiliserons des outils probabilistes. Nous souhaitons également déterminer la couverture que doit mettre en place le vendeur pour couvrir ses risques. La couverture correspond à la façon dont le vendeur investit dynamiquement l'argent qu'il reçoit à l'instant initial dans le marché pour qu'à l'instant T il a exactement $f(S_T)$ à donner à l'acheteur du contrat sachant qu'à l'instant initial il n'a que ce qu'il reçoit de la part de l'investisseur et qu'il ne rajoute jamais d'argent de sa poche et qu'il ne prend jamais d'argent pour lui. En resumé on cherche la proportion d'argent investie dans l'actif risqué et la proportion d'argent investie dans l'actif sans risque à n'importe quelle date pour qu'à la date T lorsqu'on vend tout pour récuperer du cash le vendeur a exactement la somme $f(S_T)$.

Pour résoudre ce problème nous modéliserons dans un premier temps l'évolution des prix de manière discrète avec une progression par arbre en suivant le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, puis dans un second temps nous modéliserons l'évolution des prix de manière continu avec le modèle de Black-Scholes. Dans un troisième temps nous étudierons la convergence du prix donné par le modèle de Cox-Ross-Rubinstein vers celui donné par le modèle de Black-Scholes.

3 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Nous supposons que les prix des deux actifs sur le marché évoluent de manière discrète et ne changent qu'aux dates $(t_i)_{0\leq i\leq N}$ avec $t_0 = 0$, $t_N = T$ et $t_{i+1} - t_i = \delta$ pour $i \in \{0, \dots, N-1\}$ où $\delta = T/N$.
Le prix de l'actif sans risque à la date t_i, pour $i \in \{0, \dots, N\}$, est $S^0_{t_i} = (1+r_N)^i$, où r_N est appelé le taux sans risque et est une constante positive fixée à la date 0.
Le prix de l'actif risqué à l'instant initial est $S^{(N)}_0 = s > 0$, et à l'instant t_i, pour $i \in \{1, \dots, N\}$, est

$$S^{(N)}_{t_i} = T^{(N)}_i S^{(N)}_{t_{i-1}} ,$$

où $T^{(N)}_i$ est une variable aléatoire qui prend soit la valeur $1 + h_N$ soit la valeur $1 + b_N$ avec $b_N < r_N < h_N$. On supposera dans la suite que les variables aléatoires $(T^{(N)}_i)_{1\leq i\leq N}$ sont indépendantes et identiquement distribuées. [1]

Définition 1. *On définit le prix actualisé de l'actif risqué par* $\tilde{S}^{(N)}_{t_i} := S^{(N)}_{t_i} / S^0_{t_i}$ *pour* $i \in \{0, \dots, N\}$.

Définition 2. *On dit qu'un processus* $(X_k)_{0\leq k\leq N}$ *est une martingale sous une probabilité* $\mathbb{P}$ *si* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k] = X_k$ *où* $\mathcal{F}_k$ *est la tribu engendrée par* $(X_i)_{0\leq i\leq k}$.

Définition 3. *On définit la probabilité risque-neutre* $\mathbb{Q}$ *comme la probabilité sous laquelle le prix actualisé de l'actif risqué est une martingale.*

Nous notons $\Omega := (\omega_i)_{1\leq i\leq l}$ l'ensemble des trajectoires possible pour le prix de l'actif risqué entre l'instant initial et l'instant final. Que vaut l en fonction de N (l correspond au nombre de feuilles dans l'arbre modélisant le prix de l'actif risqué) ? Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre $S^{(N)}_{t_N}$ (le prix de l'actif risqué à l'instant t_N).
Nous recherchons une probabillité $\mathbb{Q}$ telle que sous cette probabilité $\mathbb{Q}$ on a $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[T^{(N)}_1] = 1+r_N$. Cette probabilité $\mathbb{Q}$ est appelée la probabilité risque-neutre. On note $q_N = \mathbb{Q}(T^{(N)}_1 = 1 + h_N)$.
1. Trouver q_N.
Une fois que l'on connait la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ on peut déterminer le prix $p_{(N)}$ de l'option qui paye $f(S^{(N)}_{t_N})$:

$$p_{(N)} := \frac{1}{(1+r_N)^N}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[f(S^{(N)}_{t_N})\big] .$$

2. Exprimer $p_{(N)}$ à l'aide de r_N, q_N, s, h_N, b_N et $f(.)$ sous la forme d'une somme (utiliser les coefficients binomiaux).

3.1 Premier pricer

3. Implémenter une fonction **price1** qui prend en argument N, r_N, h_N, b_N, s et la fonction f, et qui retourne le prix $p_{(N)}$ obtenu à la question 2.
4. Tester votre pricer en utilisant la fonction $f(x) = \max(x - 100, 0)$ avec $s = 100$, $h_N = 0.05$, $b_N = -0.05$ et $r_N = 0.02$ et $N = 10$.

3.2 Deuxième pricer

Une autre méthode pour déterminer le prix $p_{(N)}$ est de raisonner par itération et de déterminer le prix à chaque instant t_k avec $k \in \{0, \dots, N\}$ mais en commençant par le prix en t_N et en prenant en compte dans quel état $\omega \in \Omega$ nous sommes.
Etape 1 : à la date t_N on sait que le prix à payer pour recevoir la somme $f(S^{(N)}_{t_N})$ maintenant est $f(S^{(N)}_{t_N})$, donc on définit la fonction v_N par

$$v_N(S^{(N)}_{t_N}) := f(S^{(N)}_{t_N}) .$$

Etape k : à la date t_k, $k \in \{0, \dots, N-1\}$, le prix est donné par la fonction v_k qui est définie par récurrence

$$v_k(S^{(N)}_{t_k}) := \frac{1}{1+r_N}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[v_{k+1}(S^{(N)}_{t_{k+1}})\big|S^{(N)}_{t_k}\big] .$$

Le prix à la date initiale est alors $p_{(N)} = v_0(S^{(N)}_0)$.
5. Implémenter cet algorithme et écrire une fonction **price2** qui prend en argument N, r_N, h_N, b_N, s et la fonction f et qui retourne le prix $p_{(N)}$.
6. Tester votre pricer avec l'exemple suivant : $f(x) = \max(x - 95, 0)$ avec $s = 100$, $r_N = 0.02$, $h_N = 0.05$, $b_N = -0.05$, $N = 3$. Dessiner l'arbre avec les valeurs de $v_k(.)$ pour chaque noeud de l'arbre.

1. Dans ce paragraphe nous utilisons la notation $.^{(N)}$ pour indiquer que le pas de discrétisation est en fonction de N.

3.3 Comparaison

7. Comparer les deux pricer en utilisant les entrées suivantes : $s = 100$, $r_N = 0.03$, $h_N = 0.05$, $b_N = -0.05$, $N =$ un nombre aléatoire entre 5 et 15 qui sera donné par la fonction de Python randint, $f(x) = \max(x-100, 0)$.

3.4 La couverture

L'avantage de la deuxième méthode est quelle nous permet de déterminer en même temps la couverture que l'on doit mettre en place. La couverture est la manière d'investir notre argent (en tant que vendeur de l'option) à chaque instant t_k, $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, afin d'avoir à la date T exactement $f(S_T^{(N)})$. Notons $\alpha_k(x)$ (resp. $\beta_k(x)$) le nombre d'actifs risqués (resp. le nombre d'actif sans risque) que l'on achète à l'instant t_k si le prix de l'actif risqué est x en t_k. Ces actifs sont gardés pendant une période δ et revendu après donc à la date t_{k+1} on a comme argent

$$\alpha_k(S_{t_k}^{(N)})S_{t_{k+1}}^{(N)} + \beta_k(S_{t_k}^{(N)})S_{t_{k+1}}^0 \; .$$

En particulier à la date terminale notre portefeuille doit vérifier

$$\alpha_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})S_{t_N}^{(N)} + \beta_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})S_{t_N}^0 = f(S_{t_N}^{(N)}) \; .$$

Or cette équation doit être vérifier pour le cas où le prix à la date T est $S_{t_N}^{(N)} = (1 + h_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}$ et aussi pour le cas où le prix à la date T est $S_{t_N}^{(N)} = (1 + b_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}$, puisque cette équation doit être satisfaite pour tous les évènements, donc on a un système d'équations.

8. Donner le système d'équations et résoudre ce système.

Pour les autres dates t_k, le vendeur doit toujours avoir à la date t_k la valeur $v_k(S_{t_k}^{(N)})$ en sa possession. On doit donc avoir l'équation

$$\alpha_{k-1}(S_{t_{k-1}}^{(N)})S_{t_k}^{(N)} + \beta_{k-1}(S_{t_{k-1}}^{(N)})S_{t_k}^0 = v_k(S_{t_k}^{(N)}) \; .$$

9. En utilisant les mêmes arguments que pour le cas précédent touver le système d'équations et résoudre ce système.

10. On considère que $N = 2$, $s = 100$, $r_N = 0.03$, $h_N = 0.05$, $b_N = -0.05$, $f(x) = \max(x - 100, 0)$. Donner la couverture à la date 0 et à la date 1.

4 Modèle de Black-Scholes

4.1 Le modèle

En mathématique financière on modélise généralement le prix des actifs de manière continu. Le prix S^0 de l'actif sans risque satisfait l'équation différentielle suivante

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

avec $S_0^0 = 1$. Le prix S de l'actif risqué vérifie l'équation différentielle stochastique suivante

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t)$$

avec $S_0 = s$, σ et r deux constantes strictement positives. B est un processus stochastique appelé mouvement brownien, c'est à dire une suite de variables aléatoires réelles $(B_t)_{t \geq 0}$ indexées par le temps (les variables B_t dépendent les unes des autres). Le mouvement brownien peut être caractérisé mathématiquement de plusieurs manières différentes, dont la suivante (mouvement brownien standard) :

1. $B_0 = 0$.
2. Les accroissements sont des variables aléatoires (v.a.) gaussiennes, i.e. pour $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.
3. Les accroissements sont indépendants, i.e. si $0 \leq s' \leq t' \leq s \leq t$ alors la v.a. $B_t - B_s$ est indépendante de la v.a. $B_{t'} - B_{s'}$.

Pour trouver la solution à cette équation différentielle stochastique on utilise la formule d'Ito : soit g une fonction C^2 alors la différentielle du processus $g(S_t)$ satisfait

$$dg(S_t) = g'(S_t)dS_t + \frac{|\sigma S_t|^2}{2} g''(S_t)dt \; .$$

11. Appliquer la formule d'Ito à $\ln(S_t)$ afin de déterminer une formule de S_t en fonction de s, r, σ, t et B_t.

4.2 Le pricer par la méthode de Monte-Carlo

La formule du prix d'une option qui paye $f(S_T)$ est donnée par

$$p := \mathbb{E}[e^{-rT}f(S_T)] \ .$$

Soit $(\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit

$$\hat{p}_{(n)} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-rT} f\Big(s\exp\Big((r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}\xi_i\Big)\Big) \ .$$

12. Ecrire une fonction **price3** qui prend en argument n, s, r, σ, T et f, et qui renvoit $\hat{p}_{(n)}$.
13. Tracer le graphique pour le prix avec $r = 0.03$, $\sigma = 0.1$, $s = 100$, $T = 1$, $f(x) = \max(100-x,0)$, $n = 10^5k$ pour $1 \leq k \leq 10$.
14. Montrer mathématiquement que la suite $(\hat{p}_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers p.

4.3 Le pricer par formule fermée

Nous pouvons montrer que le prix de l'option qui paye $\max(K - S_T, 0)$ en T est donné par la formule de Black-Scholes

$$p = -sF(-d) + Ke^{-rT}F(-d+\sigma\sqrt{T})$$

avec $d := \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\Big[\ln\Big(\frac{s}{K}\Big)+\Big(r+\frac{\sigma^2}{2}\Big)T\Big]$ et $F(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$ où $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.
15. Ecrire une fonction **put** qui prend en argument s, r, σ, T, K et qui renvoit le prix de cette option.
16. Appliquer votre fonction à l'exemple : $r = 0.04$, $\sigma = 0.1$, $s = 100$, $T = 1$, $K = 100$.
17. Tracer sur un graphique, dont l'abscisse est n et l'ordonnée est le prix, le prix donné par la fonction **price3** pour $r = 0.03$, $\sigma = 0.1$, $s = 100$, $T = 1$, $f(x) = \max(100-x,0)$, et $n = 10^5k$ avec $1 \leq k \leq 10$. Tracer sur ce graphique la droite qui correspond au prix donné par la fonction **put**. Que remarquez vous.
18. Tracer sur un graphique en 3 dimensions le prix de l'option en utilisant la fonction **put** lorsque $r = 0.03$, $\sigma = 0.1$, $K = 100$, $s = 20k$ avec $1 \leq k \leq 10$, et $T \in \{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$. Que remarquez vous ?

5 Convergence des prix

Dans cette section nous allons nous intéresser à la convergence des prix donnés dans le cas du modèle de Cox-Ross-Rubinstein vers les prix donnés dans le cas du modèle de Black-Scholes. Pour un N fixé de discrétisation on pose

$$r_N = \frac{rT}{N}\ ,\ h_N = (1+r_N)\exp\Big(\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\Big)-1\ ,\ b_N = (1+r_N)\exp\Big(-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\Big)-1\ .$$

19. Tracer sur un même graphique le prix en utilisant la fonction **price1** d'une option qui paye $max(100-S_T,0)$, $s = 100$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.04$, $T = 1$, avec $N = 10k$ pour $1 \leq k \leq 100$. Tracer sur le même graphe la droite qui a pour ordonnée p en utilisant la fonction **put** pour le calcul de p. Que remarquez vous ?

6 EDP de Black-Scholes

Nous reprenons exacement les notations de la partie 4. Nous pouvons montrer que la fonction prix du put $P(t, S_t)$ qui dépend du temps t auquel on achète le produit et du prix de l'actif risqué S_t à l'instant t vérifie l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivantes définie sur $[0,T]\times[0,L]$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = rP\ .$$

La condition est terminale, et non initiale, puisqu'on connait la valeur du prix à l'instant T mais pas à l'instant 0. Pour résoudre cette EDP, on donne la condition à l'instant T et sur les bords. Les conditions sont alors :

$$\begin{aligned}
&P(T,s) = \max(K-s,0) \quad \forall s \in [0,L],\\
&P(t,0) = Ke^{r(t-T)} \quad \forall t \in [0,T],\\
&P(t,L) = 0 \quad \forall t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Nous utiliserons, pour approcher numériquement cette EDP, les différences finies, qui consistent à approcher les dérivées partielles par leur quotient différentiel, sur une grille de points.

6.1 Discrétisation de l'espace-temps

— Nous allons fixer le nombre N de points en temps à calculer. On pose $\Delta T = \frac{T}{N}$ puis $t_n = n\Delta T \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}$.
— Nous allons fixer le nombre M de points en espace à calculer. On pose $\Delta s = \frac{L}{M+1}$ puis $s_i = i\Delta s \quad \forall i \in \{0, \dots, M+1\}$.

6.2 Discrétisation des dérivées partielles

Pour tout $(n, i) \in \{0, \dots, N-1\} \times \{1, \dots, M\}$, on approche les dérivées partielles intervenant dans l'EDP ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t}(t_n, s_i) &\approx \frac{1}{\Delta T}(P(t_{n+1}, s_i) - P(t_n, s_i)) \\
\frac{\partial P}{\partial S}(t_n, s_i) &\approx \frac{1}{\Delta s}(P(t_n, s_i) - P(t_n, s_{i-1})) \\
\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(t_n, s_i) &\approx \frac{1}{\Delta s^2}(P(t_n, s_{i+1}) - 2P(t_n, s_i) + P(t_n, s_{i-1}))
\end{aligned}$$

Posons $\mathbf{P}_n \in \mathbb{R}^M$ le vecteur colonne de composantes $(P_{n,1}, \dots, P_{n,M})$. Si les approximations deviennent des égalités et si $P(t_n, s_i)$ est remplacé par $\mathbf{P}_{n,i}$, alors, nous obtenons une équation vectorielle faisant intervenir $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{P}_{n-1}$ et une (ou des) matrice(s) en fonction de la méthode utilisée.

6.3 Travail demandé

Cette partie de projet consistera donc à approcher numériquement cette EDP avec les 3 méthodes suivantes :
— différences finies explicites (attention à la condition de CFL),
— différences finies implicites,
— méthode de Crank-Nicholson.
Il sera demandé d'optimiser les calculs en utilisant les méthodes adéquates vues en MAN.
20. Tracer dans une même fenêtre les trois graphiques de la courbe définie par $\mathbf{P}_0$, et un quatrième graphique représentant les erreurs relatives de chacun des résultats obtenus par les 3 méthodes ci-dessus. On utilisera les données suivantes : $K = 100$, $r = 0.04$, $\sigma = 0.1$, $T = 1$, $L = 4K$ et $M = 1000$. La valeur de N est laissée à votre appréciation.

6.4 Références

— `https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_des_diff%C3%A9rences_finies`
— `https://fr.wikipedia.org/wiki/Stabilit%C3%A9_d%27un_sch%C3%A9ma_num%C3%A9rique`
— `http://lmah.univ-lehavre.fr/~ambrosio/CoursL3Phy/Chap3.pdf`