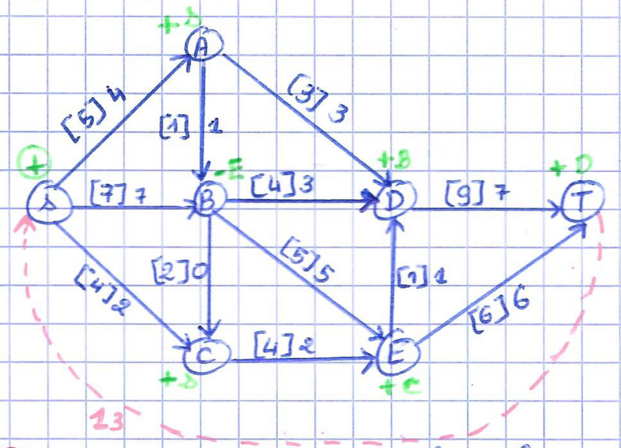
Exercice 1 Pb de flot max / coupe min



(1) Pour vérifier que le flot actuel est correct il suffit de dire que :

(1) tous les arcs vérifient valeur de flot ≤ capacité de l'arc (par exemple l'arc (S, C) vérifie 2 < 4 et l'arc (B, E) vérifie 5 ≤ 5) ...

(2) Conservation du flot pour chaque sommet.

Sommet A : flot entrant = 4 et flot sortant = 3 + 1 = 4

⋮

Sommet E : flot entrant = 5 + 2 = 7 et flot sortant = 1 + 6 = 7.

Ce qui sort du sommet S (= 4 + 7 + 2 = 13) est égal à ce qui rentre dans T (= 7 + 6 = 13).

On pourrait ajouter un arc fictif de T vers S où circule un flot de valeur 13.

Le flot actuel est bien correct et il est de valeur 13

(2) Rappel sur le marquage

- marquer S par (+)
- répéter :
  - * si arc (i, j) tel que i marqué et j non marqué et (i, j) arc non saturé
    alors marquer j par (+i)
  - * si arc (j, i) tel que i marqué et j non marqué et flot sur (j, i) non nul
    alors marquer j par (-i)

jusqu'à T marqué ou je n'arrive plus à marquer

si T est marqué alors : le flot n'est pas maximal et il existe une chaîne augmentante
sinon, le flot est maximal.

pour le marquage, voir le schéma ci-dessus.
Bon je sais que le graphe peut vite devenir illisible alors je vous détaille l'ordre de marquage et comment j'ai déroulé l'algo..

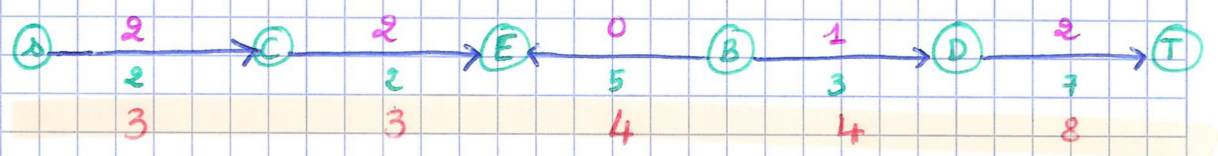
Petites parenthèses pour ceux qui ne savaient pas faire un marquage.

(J'ai marqué s par ⊕, l'arc (s, A) a son extrémité marqué et arc non saturés donc j'ai marqué A par +s. les deux arcs qui partent de A ~~donts~~ saturés donc je suis revenue voir pour les autres arcs qui partent de s. l'arc (s, B) est saturé mais ce n'est pas le cas de l'arc (s, C) j'ai donc marqué C par +s. Maintenant que vous avez compris je peux aller plus vite : j'ai marqué E par +C. l'arc $B \xrightarrow{[5]\ \boxed{5}} E$ vérifie E marqué et le flot de B vers E vaut $\boxed{5}$ et n'est pas nul donc je marque B par (-E).
Après D par +B et Enfin T par +D. On arrive à marquer T donc on s'arrête.)

À la suite de notre marquage, T est marqué donc le flot actuel n'est pas maximal.

③ À partir du marquage qui nous a conduit à marquer T on va ~~de~~ dessiner la chaîne augmentante.

Personnellement, je mets mes sommets qui appartiennent à la chaîne dans l'ordre de marquage et je reprend le sens des arcs qui relient ces sommets.



capacité résiduelle = capacité - flot initial
flot initial
nouveau flot.

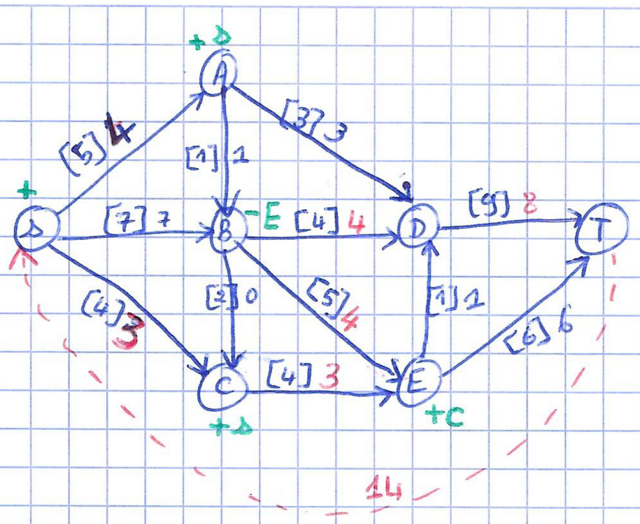
On cherche à augmenter le flot de $+\alpha$ dans tout les arcs de la chaîne où le marquage est de +.. et le diminuer de $-\alpha$ sur l'arc B → E où B est marqué par (-E).

$\alpha = \min(2, 2, 5, 1, 2)$ pour vérifier que le flot ne dépasse pas la capacités sur les arcs (s→C), (C, E), (B, D) et (D, T) et que le flot ne soit pas négatif sur l'arc (B, E).

donc $\boxed{\alpha = 1}$ le nouveau flot sur ~~ces~~ ces arcs est donc calculé.

④ Le flot global a donc augmenté de 1 et vaut maintenant $\boxed{14}$

⑤ Je vais redessiner le graphe avec le nouveau flot et ré-effectuer un marquage pour montrer que ce flot est maximal.



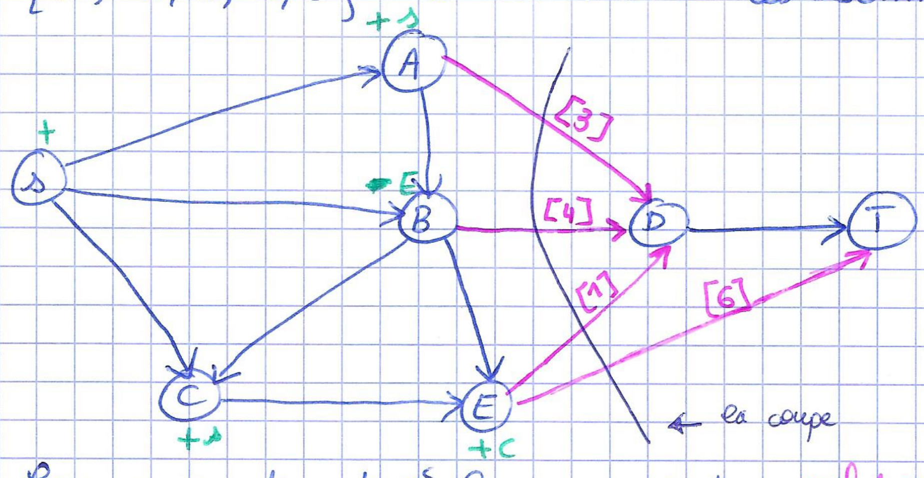
Le marquage n'est plus possible à partir du sommet B car maintenant l'arc (BD) est saturé.

Le marquage ne permet pas d'atteindre le sommet T donc le flot est de valeur maximale.

Maintenant on va déduire une coupe de capacité minimale.

Une coupe est constitué d'un ensemble des arcs qui partagent les sommets de graphes en sommets marqués et d'autres non marqués:

Autrement dit, d'un côté on aura les sommets {S, A, B, C, E} et de l'autre les sommets {D, T}



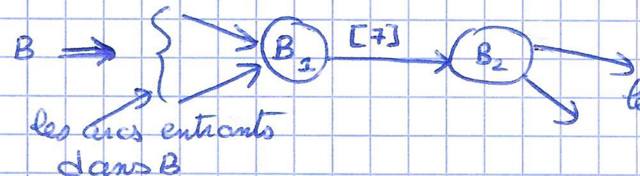
Les arcs appartenant à la coupe sont en violet ♥ et les capacités correspondantes sont 3, 4, 1 et 6 dont la somme vaut 14.

On a donc trouvé une coupe de capacité minimale 14.

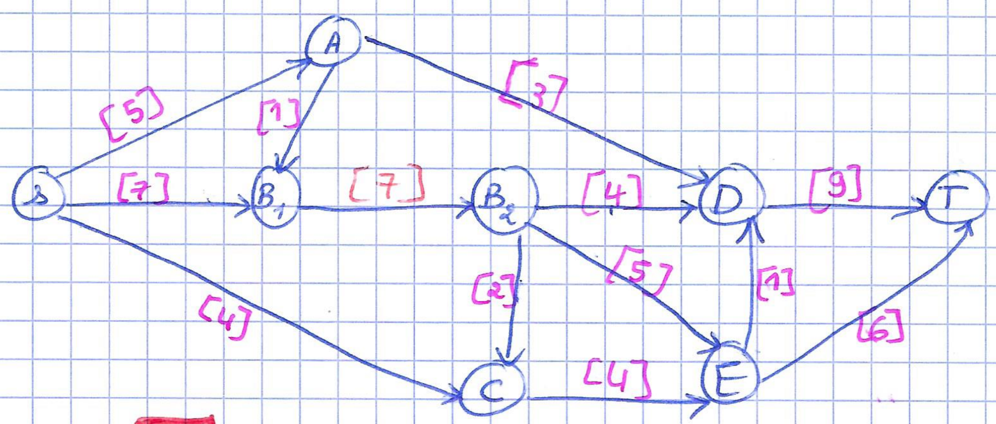
On a bien flot max = coupe min (ça veut dire que mes calculs sont corrects... (merci pina de m'avoir expliqué comment faire la coupe ♥♥).)

6 ⚠ Ici, il faut oublier toutes les valeurs des flots (données, calculées, etc) On ne s'intéresse qu'aux capacités.

On va modifier le réseau dans le sommet B pour forcer le fait qu'en B ne puissent circuler qu'au plus 7 unités de flot. on va transformer le sommet B de la façon suivante :



Le réseau devient :



Fin de l'exercice 1 ♡ ♡ ♡

Exercice 2 :

1 Mettre sous forme standard = ajouter des variables d'écart.
(transformer les inégalités par des égalités en ajoutant des variables positives ou nulles $+e$ si $\geq$ et $-e$ si $\leq$)

$$(P_1)_{std} \begin{cases} \min & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} x_1 + x_2 + e_1 = 4 & (\heartsuit) \\ x_1 + 5x_2 + e_2 = 5 & (\heartsuit\heartsuit) \end{cases} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

2 On veut montrer que $x_1 = \frac{15}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$ est une sol° optimale de P_1

* Montrons d'abord que (x_1, x_2) constitue une base de réalisable.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (obtenue à partir des coeff de x_1 et x_2 dans les deux contraintes (*) et (**)).

B est inversible car $\det B = 5 - 1 = 4 \neq 0$.

On calcule $B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \geq 0$ (car $\frac{15}{4} > 0$ et $1/4 > 0$)

donc cette base est $\boxed{\text{réalisable}}$

★ Maintenant, je vais montrer que cette solution est optimale en utilisant la méthode algébrique :

① on va écrire les variables de bases en fonction des variables hors-base.

(*) $x_1 + x_2 + e_1 = 4$

(**) $x_1 + 5x_2 + e_2 = 5$

(**) $- 5$(*) $\Rightarrow -4x_1 + e_2 - 5e_1 = -15$

$4x_1 + 5e_1 - e_2 = 15$

$\boxed{x_1 + \frac{5}{4} e_1 - \frac{1}{4} e_2 = \frac{15}{4}}$ ou encore $\boxed{x_1 = \frac{-5}{4} e_1 + \frac{1}{4} e_2 + \frac{15}{4}}$

(**) $-$ (*) $\Rightarrow 4x_2 + e_2 - e_1 = 1$

$\boxed{x_2 - \frac{1}{4} e_1 + \frac{1}{4} e_2 = \frac{1}{4}}$ ou $\boxed{x_2 = \frac{1}{4} e_1 - \frac{1}{4} e_2 + \frac{1}{4}}$

Rq : on retrouve les coeff de B^{-1}

Si $x_1 = \frac{15}{4}$ et $x_2 = \frac{1}{4}$ ça veut dire qu'alors on a :

$$\begin{cases} -5/4\, e_1 + \frac{1}{4} e_2 = 0 \\ \frac{1}{4} e_1 - \frac{1}{4} e_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow e_1 = e_2 = 0$$

La solution $x_1 = \frac{15}{4}$ et $x_2 = \frac{1}{4}$ annule les variables d'écart. Quand les variables ~~de bases~~ hors-bases (ici e_1 et e_2) sont nulles la solution est optimale.

On vient donc de démontrer par $\boxed{\text{la méthode algébrique}}$ que $x_1 = \frac{15}{4}$ et $x_2 = \frac{1}{4}$ est une solution optimale de P_1.

Méthode du simplexe.

Nous allons donner le tableau de simplexe à partir des équations suivantes :

$1 . x_1 + 0 . x_2 + \frac{5}{4} e_1 - \frac{1}{4} e_2 = 15/4$

→ $x_1 = \frac{-5}{4} e_1 + \frac{1}{4} e_2 + 15/4$

$0 . x_1 + 1 . x_2 - \frac{1}{4} e_1 + \frac{1}{4} e_2 = 1/4$

$x_2 = \frac{1}{4} e_1 - \frac{1}{4} e_2 + 1/4$

avec (x_1, x_2) sont les variables de base.

		x_1	x_2	e_1	e_2	
(1)	x_1	1	0	$-5/4$	$1/4$	$15/4$
(2)	x_2	0	1	$+1/4$	$-1/4$	$1/4$
	Δ_j	0	0	$3/4$	$1/4$	$z = 17/4 = 15/4 + 2 . \frac{1}{4}$

Les coûts réduits des variables de base sont nuls

Δ_{e_1} : coût réduit de e_1 $= 0 - \left(1 * \left(\frac{-5}{4}\right) + 2 * \left(\frac{1}{4}\right)\right) = 3/4$

coeff de e_1 dans la fonction à minimiser

$$\Delta e_2 = 0 - \left(1 * \left(\frac{1}{4}\right) + 2 * \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}$$

Les coûts réduits sont tous positifs donc la solution est optimale.

3) La fonction économique devient : $\min \alpha x_1 + 2 x_2$.

Pour que la solution reste optimale, il faut que les coûts réduits restent positifs ou nuls.

Les coeff de la fonction économique ne sont mis en jeu que lorsqu'on calcule les coûts réduits. Je réécris le tableau avec en rouge les modifs :

		x_1	x_2	e_1	e_2	
(α)	x_1	1	0	$-5/4$	$1/4$	$15/4$
(2)	x_2	0	1	$1/4$	$-1/4$	$1/4$
		0	0	$-\left(\frac{-5}{4}\alpha + \frac{1}{4} . 2\right)$ ≥ 0	$-\left(\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4} . 2\right)$ ≥ 0	$z = \alpha . \frac{15}{4} + 2 . \frac{1}{4}$

il faut que : • $\frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq \frac{1}{2} . \frac{4}{5} \rightarrow \alpha \geq \frac{2}{5}$

• $-\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}\alpha \geq -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha \leq 2$.

⇒ pour $\alpha \in [2/5 , 2]$ la solution $\left(x_1 = \frac{15}{4} \text{ et } x_2 = \frac{1}{4}\right)$ reste optimale pour $(P_1)_\alpha$.

Remarques sur l'exo 4.

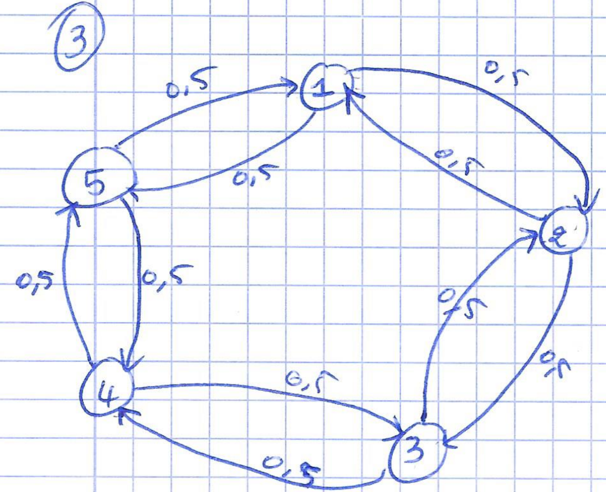
Je suis désolée, je commence à fatiguer.. donc la flemme pour l'exo 3 et la flemme pour l'exo 4 pour faire des calculs... ☹

Je ferai ce w.e. si je suis motivée. ☺

Remarque sur l'exo 4 :

je commence par la question 3 parce qu'elle est ma préférée ♥

3



1 $M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

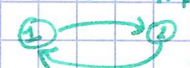
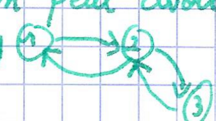
$\Sigma = 1$
La somme sur chaque ligne fait 1.

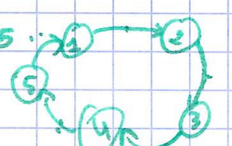
2 État initial $Q_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
(d'après l'énoncé qui dit que la particule est au point 1).

$Q_1 = Q_0 \cdot M = (0 \quad 0{,}5 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}5)$

$Q_2 = Q_1 \cdot M = (0{,}5 \quad 0 \quad 0{,}25 \quad 0{,}25 \quad 0)$

(je ne suis pas sure pour les calculs.

4 A partir de graphe de la chaîne de Markov, on peut avoir des circuits de longueurs : 2 () et 4 

et de 5 : 

PGCD (2, 4, 5) = 1 donc le régime est apériodique car le PGCD des longueurs des circuits possibles vaut 1

Justifier qu'un [illegible] régime permanent existe se fait en disant que le système est apériodique et le graphe est fortement ~~est~~ connexe

(tout les sommets de 1 à 5 sont 2 à 2 reliés donc le graphe est fortement connexe).

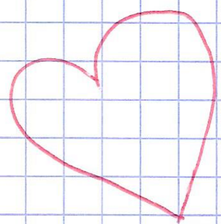
⇒ Pour ce pb, le régime permanent existe autrement dit

5 il existe $Q^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*, q_5^*)$ tel que

$Q^* = Q^* \cdot M$ ← bcq de calcul la flemme.

+ normalisation : $\sum_{i=1}^{5} q_i^* = 1$.

On trouve un ~~q~~ Q^* unique qui correspond à "la stabilisation" de la distribution de probabilité de stationner dans ~~la~~ les 5 états.



SNO : I love You

and I ♡ R.O.