Durée 1h45.
Les documents papier sont autorisés, tout matériel électronique est interdit.
Toute copie dont la qualité de rédaction sera jugée insuffisante sera sanctionné par au plus 2 points.

Nous allons traiter tout au long de ce document des polynômes sur un anneau $\mathbb{K}$. Un élément p de l'espace des polynômes $\mathbb{K}[x]$ est représenté par l'expression :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

Le coefficient a_n est supposé différent de 0. Le degré de p est dans ce cas n.

Question 1
En supposant que vous disposez d'un type `T` qui représente les éléments d'un anneau, créez une famille de classes pouvant représenter les polynômes dont les coefficients sont représentés par des éléments de `T`. Les coefficients pourront être stockés dans un conteneur de la librairie standard `C++`.

Question 2
En supposant que pour le type `T` il existe une surcharge de :

```
std::ostream operator<<(std::ostream &, const T&)
```

écrire le code nécessaire afin de pouvoir afficher les polynômes définis dans la question 1 sur un flot de type `std::ostream`. Le format de l'écriture doit représenter les puissances de x par `x^n`, en faisant attention au signe des coefficients. Par exemple le polynôme $3x^2 + x - 1$ sera représenté par

```
3x^2 + x - 1
```

Question 3
Ajouter aux classes définies dans la question 1 les opérations somme, différence et produit de polynômes. On fera en sorte de pouvoir utiliser les opérateurs `+`, `-` et `*`. Pour le produit vous pouvez vous servir de l'annexe 1.

Question 4
En supposant que les polynômes sont définis sur un corps, dériver des classes définies dans la question 1 des classes qui calculent la division et le reste de la division euclidienne de deux polynômes. On fera en sorte d'utiliser les opérateurs `/` et `%`. L'algorithme de la division de polynômes est décrit dans l'annexe 2.

Question 5
Ajouter aux classes définies dans la question 1 une fonction membre `D` qui retourne le polynôme dérivé d'un polynôme $p(x)$.

Question 6
Ajouter aux classes définies dans la question 1 un membre qui permet de calculer la valeur du polynôme dans un point $x \in \mathbb{K}$. Vous ferez en sorte que si p est une instance d'un polynôme on puisse calculer sa valeur par l'expression `p(x)`. Utilisez la règle de Horner décrite dans l'annexe 3.

Annexe 1
Le produit de deux polynômes est donné par la formule suivante :

$$(u_r x^r + \ldots + u_0)(v_s x^s + \ldots + v_0) = (w_{r+s} x^{r+s} + \ldots w_0)$$

où les coefficients du produit sont donnés par

$$w_k = u_0 v_k + u_1 v_{k-1} + \cdots + u_{k-1} v_1 + u_k v_0$$

Annexe 2
Si $u(x)$ et $v(x)$ sont deux polynômes sur un corps $\mathbb{K}$ alors il existe des polynômes $q(x)$ et $r(x)$ tels que :

$$u(x) = q(x)v(x) + r(x)$$

où $q(x)$ est le quotient de la division euclidienne de $u(x)$ par $v(x)$ et $r(x)$ est le reste qui vérifie degré(r) $<$ degré(v).

On peut calculer les coefficients de $q(x)$ et $r(x)$ en utilisant l'algorithme suivant :

Algorithm 1 Division de polynômes
  $r \leftarrow u$
  for $k = m-n, m-n-1, \ldots, 0$ **do**
    $q_k \leftarrow r_{n-k}/v_n$
    for $j = n+k-1, n+k-1, \ldots, k$ **do**
      $r_j \leftarrow r_j - q_k v_{j-k}$
    end for
  end for

Annexe 3
Soit $u(x) = u_n x^n + \ldots + u_1 x + u_0$ un polynôme. Pour calculer sa valeur en un point $x \in \mathbb{K}$ on peut réorganiser les termes de la façon suivante :

$$u(x) = ((\ldots(u_n x + u_{n-1})x + \ldots)x + u_0$$