

Examen

Durée: 2h

Documents et téléphone non autorisés

Exercice 1. Relation d'arbitrage

On se place dans un marché **viable** à N dates, composé d'un actif sans risque de valeur S_n^0 à la date n et d'un actif risqué de valeur S_n à la date n . On note C_n^d (resp. P_n^d) le prix, à la date n , de l'option digitale de strike K de pay-off $\mathbb{1}_{\{S_N > K\}}$ (resp. $\mathbb{1}_{\{S_N \leq K\}}$). Montrer que pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, on a

$$C_n^d + P_n^d = \frac{S_n^0}{S_N^0}.$$

Exercice 2. Modèle binomial

On se place dans un modèle binomial de maturité $N = 2$. A la date $n \in \{0, 1, 2\}$, la valeur de l'actif sans risque est $S_n^0 = (1+r)^n$ et, pour $n \in \{1, 2\}$, celle de l'actif risqué est $S_n = S_{n-1}(1+U_n)$ où U_n suit une loi de Bernoulli et est à valeurs dans $\{b, h\}$. On suppose que $r = 0.03$, $b = -0.05$, $h = 0.07$ et $S_0 = 100$.

1. **Put européen** Calculer le prix d'un put européen de prix d'exercice $K = 103$ sur l'actif risqué, en déduire une stratégie de couverture pour le vendeur de ce put aux dates 0 et 1.
2. **Put asiatique** Calculer le prix d'un put asiatique de prix d'exercice $K = 103$ sur l'actif risqué. On rappelle que le pay-off de cette option est $(K - \frac{1}{3}(S_0 + S_1 + S_2))^+$.
3. **Put américain** Calculer le prix V_n d'un put américain de prix d'exercice $K = 103$ sur l'actif risqué aux dates $n \in \{0, 1, 2\}$.
Donner la décomposition de Doob de V_n et en déduire une stratégie de couverture pour le vendeur de ce put.

Exercice 3. Marché à plusieurs actifs risqués

On se place dans un modèle de marché à deux dates, composé d'un actif S^0 sans risque de valeur initiale égale à 1, rémunéré au taux r que l'on supposera égal à 5% et de deux actifs risqués dont les valeurs S_1^1 et S_1^2 peuvent prendre chacune trois valeurs:

trajectoires	S_0^1	S_1^1	trajectoires	S_0^2	S_1^2
ω_1	100	114	ω_1	100	113
ω_2	100	100	ω_2	100	97
ω_3	100	90	ω_3	100	93

- a) Le marché composé de l'actif sans risque S^0 et de S^1 est-il viable? complet?
- b) Le marché composé de S^0 et des deux actifs risqués S^1 et S^2 est-il viable? complet?
- c) Calculer le prix initial d'une option européenne d'échange entre les deux actifs risqués, c'est à dire de pay-off $H = (S_1^2 - S_1^1)^+$. Quelle est le portefeuille de couverture de cette option?