MPM2 Rapport
Projet de Mathématiques
2017-2018

XU Kevin
LI Ziheng
Chen Zeyu

22 mai 2018

Sommaire

Préambule

L'objectif de ce projet est de modéliser un marché financier et de déterminer le prix et la couverture d'options européennes.
Notre marché sera constitué de deux actifs échangeables à un certain prix :

— un actif sans risque : S_t^0 à l'instant t

— un actif risqué (une action) : S_t une variable aléatoire

On va utiliser une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tout au long du problème. Cette fonction renvoie le montant d'argent gagné pour un certain montant de l'actif risqué en paramètre.

Le problème est alors le suivant : un investisseur souhaite acheter à l'instant initial une option européenne qui lui rapport la valeur $f(S_T)$. On cherche alors le prix que le vendeur doit faire payer à cet investisseur. On étudiera aussi la couverture que le vendeur doit se munir pour faire face aux risques.

Ainsi, nous allons étudier différents modèle connus pour résoudre ce problème. Tout d'abord, on va aborder le problème avec une évolution des prix de manière discrète à l'aide du modèle de Cox-Ross-Rubinstein. Ensuite, on va étudier le modèle de Black-Scholes qui considère le problème de manière continu. Enfin, nous allons étudier les équations aux dérivées partielles de Black-Sholes.

1 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Dans un premier temps, nous allons étudier le modèle de Cox-Ross-Rubinstein.

Le nombre de feuilles dans l'arbre modélisant le prix de l'actif risqué est : $l = 2^N$. Et les différentes valeurs que peut prendre $S_{t_N}^{(N)}$ sont dans :

$$\left\{s(1+b_N)^k(1+h_N)^{N-k}, k \in [\![1;N]\!]\right\}$$

1.0.1 Question 1

On a $q_N = \mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1+h_N)$ donc $1-q_N = \mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1+b_N)$ car $T_1^{(N)}$ ne prendre que deux valeurs.
De plus, la probabilité $\mathbb{Q}$ est telle que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[T_1^{(N)}] = 1+r_N$.
Déterminons q_N :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[T_1^{(N)}] & = & (1+h_N)\mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1+h_N) + (1+b_N)\mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1+b_N) \\ \Leftrightarrow 1+r_N & = & (1+h_N)q_N + (1+b_N)(1-q_N) \end{array}$$

Ainsi, on obtient : $\boxed{q_N = \dfrac{r_N - b_N}{h_N - b_N}}$

1.0.2 Question 2

On a :

$$S_{t_i}^{(N)} = T_i^{(N)} S_{t_{i-1}}^{(N)}$$

Donc, on en déduit que :

$$S_{t_i}^{(N)} = s \times T_i^{(N)} T_{i-1}^{(N)}, ..., T_1^{(N)}$$

On sait donc que la valeur de $S_{t_i}^{(N)}$ dépend de T_i, et on peut en déduire le nombre de $1+h_N$ et de $1+b_N$ dans l'ensemble $\left\{T_i^{(N)}, T_{i-1}^{(N)}, ..., T_1^{(N)}\right\}$

De plus, $T_i^{(N)}$ peut prendre deux valeurs : $1+h_N$ et $1+b_N$.
On pose $X_i = 1$ (le cas de succès) quand $T_i^{(N)} = 1+h_N$, et $X_i = 0$ (le cas d'échec) quand $T_i^{(N)} = 1+b_N$. Donc, X_i suit la loi Bernoulli $\mathcal{B}(q_N)$. On peut donc en déduire que le nombre d'apparition de $T_i^{(N)} = 1+h_N$ est la somme des X_i avec $i \in [\![1, N]\!]$.
D'après l'énoncé, $T_i^{(N)}$ sont les variables aléatoire indépendants et identiquement distribuées. Donc, $\sum_{i=1}^N X_i$ suit par définition une loi binomial $\mathcal{B}(N, q_N)$. En posant $X = \sum_{i=1}^n X_i$, on a :

$$\mathbb{Q}(X = k) = \binom{N}{k} q_N^k (1-q_N)^{n-k}$$

où k représente le nombre d'apparition de $1+h_N$.

Donc d'après la définition de l'espérance, on obtient :

$$p_{(N)} \quad = \quad \frac{1}{(1+r_N)^N} \sum_{k=0}^N f(s(1+b_N)^k(1+h_N)^{N-k})\mathbb{Q}(X=k)$$

Donc $\boxed{p_{(N)} = \dfrac{1}{(1+r_N)^N} \sum_{k=0}^N f(s(1+b_N)^k(1+h_N)^{N-k}) \binom{N}{k} q_N^k (1-q_N)^{N-k}}$

1.1 Premier pricer

1.1.1 Question 3

Algorithm 1 `price1`

Require: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
Ensure: $p_{(N)}$

function PRICE1(N, r_N, h_N, b_N, s, f)
    $qN = \frac{r_N - b_N}{h_N - b_N}$
    $S = 0$
    for $k = 0$ to N **do**
        $S = S + f(s(1+b_N)^k(1+h_N)^{N-k})\binom{N}{k}q_N^{N-k}(1-q_N)^k$
    end for
    $p = \frac{S}{(1+r_N)^N}$
    return p
end function

1.1.2 Question 4

En prennant $f(x) = max(x-100, 0)$, $s = 100$, $h_N = 0.05$, $b_N = -0.05$, $r_N = 0.02$ et $N = 10$, la fonction `price1` nous donne : $\boxed{p_{(N)} = 18.57}$

1.2 Deuxième pricer

1.2.1 Question 5

Algorithm 2 `price2`

Require: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
Ensure: $p_{(N)}$

function PRICE2(N, r_N, h_N, b_N, s, f)
    $q_N = \frac{(r_N - b_N)}{(h_N - b_N)}$
    Matrice $V \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ ▷ On va compter les indices à partir de 0 jusqu'à N
    for $k = 0$ to N **do**
        $V_{N,k} = f(s(1+b_N)^{N-k}(1+h_N)^k)$ ▷ Etape 1
    end for
    for $i = N-1$ to 0 **do**
        for $j = 0$ to i **do**
            $V_{i,j} = \frac{1}{1+r_N}\left[V_{i+1,j} \times (1-q_N) + V_{i+1,j+1} \times q_N\right]$ ▷ Etape k
        end for
    end for
    return $V_{0,0}$
end function

Dans un premier temps, notre algorithme calcule toutes les valeurs que $v_N(S_{t_N}^{(N)})$ peut prendre. Elles sont alors stockées sur la ligne N de notre matrice V. On utilise la formule suivante :

$$Etape\ 1 : v_N(S_{t_N}^{(N)}) := f(S_{t_N}^{(N)})$$

Ensuite, pour les étapes $k \in \{0, ..., N-1\}$, on affecte chaque valeur que $v_k(S_{t_k}^{(N)})$ peut prendre à la ligne k de la matrice V. On utilise la formule suivant :

$$\begin{aligned} Etape\ k : v_k(S_{t_k}^{(N)}) &= \frac{1}{1+r_N}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[v_{k+1}(S_{t_{k+1}}^{(N)})|S_{t_k}^{(N)}\right] \\ &= \frac{1}{1+r_N}\left[v_{k+1}(S_{t_k}^{(N)}(1+b_N)) \times (1-q_N) + v_{k+1}(S_{t_k}^{(N)}(1+h_N)) \times q_N\right] \end{aligned}$$

Ainsi, à la fin de l'algorithme, on obtient le prix $p_{(N)} = v_0(S_0^{(N)})$ qui correspondra à la valeur $V_{0,0}$.

1.2.2 Question 6

En prenant $f(x) = max(x-95, 0)$, $s = 100$, $h_N = 0.05$, $b_N = -0.05$, $r_N = 0.02$ et $N = 10$, la fonction `price2` nous donne : $\boxed{p_{(N)} \simeq 10.76}$.

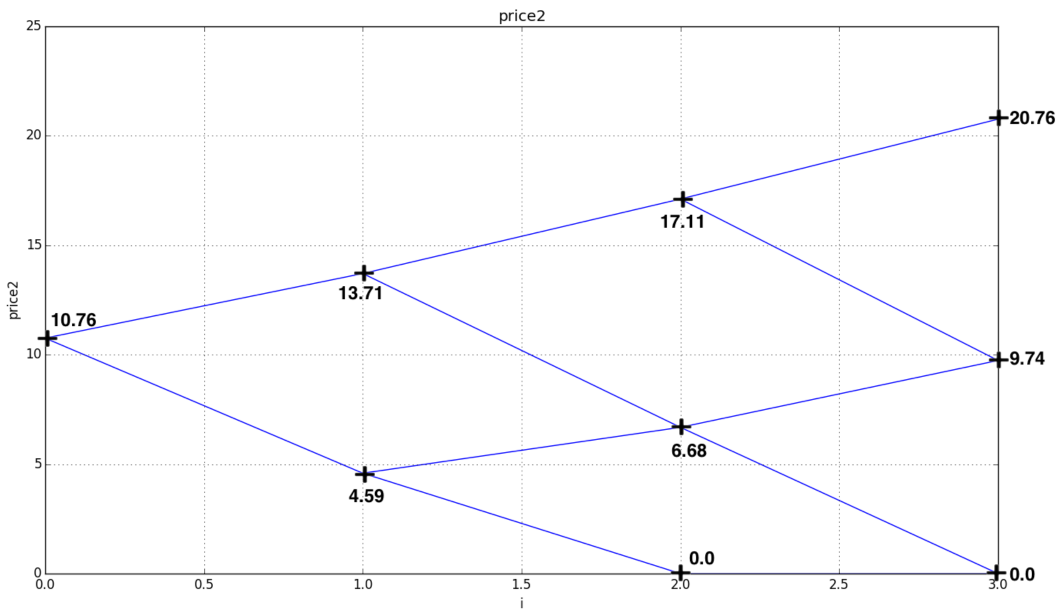

FIGURE 1 – Arbre avec les valeurs de $v_k(.)$ pour chaque noeud de l'arbre

1.2.3 Question 7

En utilisant comme paramètres : $f(x) = max(x-100, 0)$, $s = 100$, $h_N = 0.05$, $b_N = -0.05$, $r_N = 0.03$ et N un nombre aléatoire entre 5 et 15, `price1` et `price2` nous donnent exactement le même résultat : $\boxed{p_{(N)}^1 = p_{(N)}^2 \simeq 29.91}$

De fait, on peut conclure que les deux méthodes sont équivalentes. Bien qu'elles ne calculent pas le prix de la même façon, elle permettent d'obtenir le même résultat.

1.3 La couverture

1.3.1 Question 8

À la date T, $S_{t_N}^{(N)}$ peut prendre deux valeurs possibles : soit $(1+b_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}$, soit $(1+h_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}$. On alors le système d'équations suivant :

$$f((1+h_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}) = \alpha_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})(1+h_N)S_{t_{N-1}}^{(N)} + \beta_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})(1+r_N)S_{t_{N-1}}^{0} \tag{1}$$

$$f((1+b_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}) = \alpha_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})(1+b_N)S_{t_{N-1}}^{(N)} + \beta_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)})(1+r_N)S_{t_{N-1}}^{0} \tag{2}$$

En faisant (1) - (2), on obtient :

$$\alpha_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{(N)}) = \frac{f((1+h_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}) - f((1+b_N)S_{t_{N-1}}^{(N)})}{(h_N-b_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}} \tag{3}$$

Donc, on a :

$$\beta_{N-1}(S_{t_{N-1}}^{N}) = \frac{x}{(1+r_N)S_{t_{N-1}}^{0}} - \frac{(x-y)(1+h_N)}{(h_N-b_N)(1+r_N)S_{t_{N-1}}^{0}} \tag{4}$$

où

$$x = f((1+h_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}) \; et \; y = f((1+b_N)S_{t_{N-1}}^{(N)})$$

1.3.2 Question 9

D'après les mêmes argument que la question précédente, on a le système d'équations suivant :

$$v_k((1+h_N)S_{t_{k-1}}^{(N)}) = \alpha_{k-1}(S_{t_{k-1}}^{(N)})(1+h_N)S_{t_{k-1}}^{(N)} + \beta_{k-1}(S_{t_{k-1}}^{(N)})(1+r_N)S_{t_{k-1}}^{0} \tag{5}$$

$$v_k((1+b_N)S_{t_{k-1}}^{(N)}) = \alpha_{k-1}(S_{t_{k-1}}^{(N)})(1+b_N)S_{t_{k-1}}^{(N)} + \beta_{k-1}(S_{t_{k-1}}^{(N)})(1+r_N)S_{t_{k-1}}^{0} \tag{6}$$

En faisant (5) - (6), on obtient :

$$\alpha_{k-1}(S_{t_{k-1}}^{(N)}) = \frac{v((1+h_N)S_{t_{k-1}}^{(N)}) - v((1+b_N)S_{t_{k-1}}^{(N)})}{(h_N-b_N)S_{t_{k-1}}^{(N)}} \tag{7}$$

Donc, on a :

$$\beta_{k-1}(S_{t_{k-1}}^{N}) = \frac{x}{(1+r_N)S_{t_{k-1}}^{0}} - \frac{(x-y)(1+h_N)}{(h_N-b_N)(1+r_N)S_{t_{k-1}}^{0}} \tag{8}$$

où

$$x = v((1+h_N)S_{t_{k-1}}^{(N)}) \; et \; y = v((1+b_N)S_{t_{k-1}}^{(N)})$$

1.3.3 Question 10

1. Pour la couverture à la date 0, on sait que $s = S_0^N = 100$ et d'après la question 9, on aura :

$$\alpha_0(100) = \frac{v(105) - v(95)}{10}$$

et

$$\beta_0(100) = \frac{v(105)}{1.03} - \frac{(v(105) - v(95)) * 1.05}{0.103}$$

D'après la partie 3.2 on a :

$$v_N(S_{t_N}^{(N)}) = f(S_{t_N}^{(N)}) \tag{9}$$

et

$$v_k(S_{t_k}^{(N)}) = \frac{E_Q[v_{k+1}(S_{t_{k+1}}^{(N)})|S_{t_k}^{(N)}])}{1+r_N} \tag{10}$$

Donc, quand $S_{t_1}^{(N)} = 105$, on a :

$$v_1(105) = v_1(S_{t_1}^{(N)}) = (q_N)v_2((1+h)S_{t_1}^{(N)}) + (1-q_N)v_2((1+b)S_{t_1}^{(N)}) =$$

$$(q_N)f(110.25) + (1-q_N)f(99.75) = 10.25 * q_N$$

où $q_N = \frac{(r_N - b_N)}{h_N - b_N} = 0.8$, donc $v_1(105) = 8.2$

et quand $S_{t_1}^{(N)} = 95$

$v_1(95) = v_1(S_{t_1}^{(N)}) = (q_N)v_2((1+h)S_{t_1}^{(N)}) + (1-q_N)v_2((1+b)S_{t_1}^{(N)}) = (q_N)f(99.75) + (1-q_N)f(90.25) = 0$

Donc , la couverture à la date 0 sont :

$$\alpha_0(100) = 0.82$$

et

$$\beta_0(100) = -75.63$$

2. Pour la couverture à la date 1, $S_{t_1}^{(N)}$ peut prendre deux valeurs possibles.
Remarque :

$$v_N(S_{t_N}^{(N)}) = f(S_{t_N}^{(N)})$$

Dans le cas où $S_{t_1}^{(N)} = 105$, on a

$$\alpha_1(105) = \frac{v(110.25) - v(99.75)}{10.5} = 0.976$$

et

$$\beta_1(105) = \frac{v(110.25)}{1.0609} - \frac{v(110.25) - v(99.75)(1.05)}{0.10609} = -91.79$$

Dans le cas où $S_{t_1}^{(N)} = 95$, on a

$$\alpha_1(95) = \frac{v(99.75) - v(90.25)}{9.5} = 0$$

et

$$\beta_1(95) = \frac{v(90.25)}{1.0609} = 0$$

2 Modèle de Black-Scholes

2.1 Le modèle

On modèle maintenant le prix des actifs de manière continu. Soit S^0 le prix de l'actif sans risque qui vérifie :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

Le prix S de l'actif risqué satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t)$$

où $S_0 = s$, σ et r sont des constantes strictement positives. B est un mouvement brownien.

2.1.1 Question 11

On va utiliser la formule d'Ito pour déterminer une formule de S_t en fonction de s, r, σ, t et B_t :

$$dg(S_t) = g'(S_t)dS_t + \frac{|\sigma S_t|^2}{2}g''(S_t)dt$$

En prennent la fonction ln comme fonction g, on obtient :

$$\begin{aligned}
d(ln(S_t)) &= ln'(S_t)dS_t + \frac{|\sigma S_t|^2}{2}ln''(S_t)dt \\
\Leftrightarrow d(ln(S_t)) &= \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{|\sigma S_t|^2}{2}\frac{1}{S_t^2}dt \\
\Leftrightarrow d(ln(S_t)) &= \frac{1}{S_t}\left(S_t(rdt + \sigma dB_t)\right) - \frac{\sigma^2}{2}dt \\
\Leftrightarrow d(ln(S_t)) &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t
\end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t, on obtient alors :

$$ln(S_t) - ln(S_0) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma(B_t - B_0)$$

Donc : $\boxed{S_t = s\ \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)}$

2.2 Le pricer par la méthode de Monte-Carlo

2.2.1 Question 12

Algorithm 3 `price3`

Require: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}*$
Ensure: $\hat{p}_{(n)}$

function PRICE3(n, s, r, σ, T, f)
    $(x_1, ..., x_n)$ Échantillon aléatoire de $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$
    $S = 0$
    for $k = 1$ to n **do**
        $S = S + \exp(-rT) f\left(s \times \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma\sqrt{T} x_i\right)\right)$
    end for
    $\hat{p}_{(n)} = \frac{S}{n}$
    return $\hat{p}_{(n)}$
end function

2.2.2 Question 13

En prenant comme paramètre $r = 0.03$, $\sigma = 0.1$, $s = 100$, $T = 1$, $f(x) = max(100 - x, 0)$, $n = 10^5 k$ et avec $k \in [\![1, 10]\!]$, on obtient le graphique suivant :

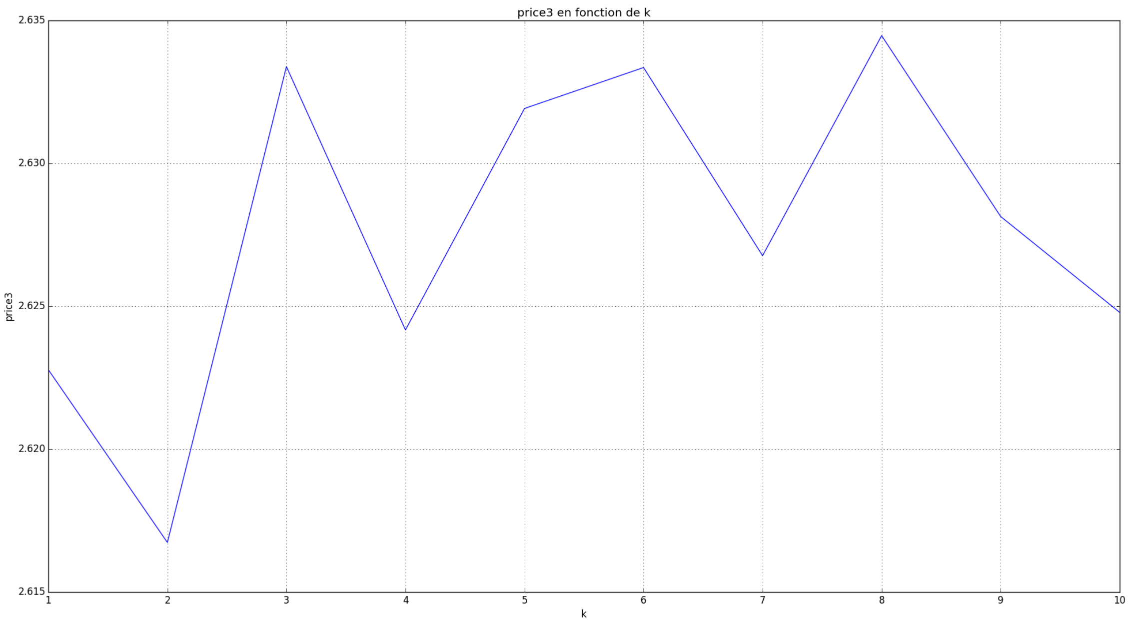

Figure 2 – `price3` en fonction de k

2.2.3 Question 14

On a :

$$\hat{p}_{(n)} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-rT} f\left(s\exp((r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}\xi_i)\right)$$

Et on pose :

$$X_i = e^{-rT} f\left(s\exp((r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}\xi_i)\right)$$

On obtient alors :

$$\hat{p}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

On peut facilement déduire que $\mathbb{E}[X] < +\infty$, parce que $\forall s, f(s)$ et e^{-rT} sont bornées. De plus, (ξ_i) sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), donc les (X_i) sont aussi i.i.d. On peut alors appliquer la loi forte des grands nombres qui donne :

$$\bar{X} \overset{p.s}{\to} \bar{\mu}$$

avec

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ et \ \bar{\mu} = \mathbb{E}[\bar{X}]$$

Ce qui nous permet d'obtenir que :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-rT} f\left(s\exp((r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}\xi_i)\right) \overset{p.s}{\to} \mathbb{E}[e^{-rT} f\left(s\exp((r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}\xi_i)\right)]$$

On a :

$$p := \mathbb{E}[e^{-rT} f(S_T)]$$

Donc, il ne nous reste plus qu'à montrer que :

$$S_T = s\exp\left((r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}\xi_i\right)$$

D'après la question 11, on a :

$$S_T = s \ \exp\left((r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma B_T\right)$$

avec B_T un mouvement brownien, donc, on a besoin de montrer que :

$$\sqrt{T}\xi_i = B_T$$

C'est-à-dire, qu'on doit montrer que $\sqrt{T}\xi_i$ est un mouvement brownien.

On rappel que : Le mouvement brownien peut être caractérise mathématiquement de la manière suivante :
(1) $B_0 = 0$.
(2) Les accroissements sont des variables aléatoire gaussiennes , i.e. pour $0 \leqslant s \leqslant t$, $B_T - B_S \sim \mathcal{N}(0, T-S)$
(3) Les accroissements sont indépendants, i.e. si $0 \leqslant s' \leqslant t' \leqslant s \leqslant t$ alors la v.a. $B_t - B_s$ est indépendante de la v.a. $B_{t'} - B_{s'}$

Pour (1) : Quand T =0 ,on a bien

$$\sqrt{T}\xi_i = 0$$

Pour (2) : On note la variable

$$B_T = \sqrt{T}\xi_i$$

on a donc :

$$B_T \sim \mathcal{N}(0, T)$$

De manière équivalente, on note la variable

$$B_S = \sqrt{S}\xi_i$$

on a donc :

$$B_S \sim \mathcal{N}(0, S)$$

avec T et S deux temps différents et $T > S$.

On note maintenant $Z = B_T - B_S$. Donc, on sait que Z suit aussi une loi normal, avec :

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[B_T] - \mathbb{E}[B_S] = 0$$

et

$$\mathbb{V}[Z] = \mathbb{V}[B_T] + \mathbb{V}[B_S] - 2cov(B_T, B_S)$$

On a $\mathbb{V}[B_T] + \mathbb{V}[B_S] = T + S$, on calcule $cov(B_T, B_S)$:

$$\begin{aligned} cov(B_T, B_S) &= \mathbb{E}[(B_T - \mathbb{E}[B_T])(B_S - \mathbb{E}[B_S])] \\ &= \mathbb{E}[B_T B_S] \\ &= \mathbb{E}[(B_S(B_T - B_S))] + \mathbb{E}[B_S^2] \\ &= \mathbb{E}[B_S]\mathbb{E}[B_T - B_S] + \mathbb{V}[B_S] \\ &= S \end{aligned}$$

Finalement , on a :

$$\mathbb{V}[Z] = T + S - 2S = T - S$$

Donc, on obtient :

$$B_T - B_S = Z \sim \mathcal{N}(0, T - S)$$

Pour (3) : D'après une propriété de la loi normal, si les deux variables suivent une loi normal, alors pour montrer qu'elles sont indépendantes, il suffit de montrer que $cov(x, y) = 0$.
Parce que pour tous les $0 \leqslant S \leqslant T$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_T B_S] &= \mathbb{E}[(B_S(B_T - B_S))] + \mathbb{E}[B_S^2] \\ &= \mathbb{E}[B_S]\mathbb{E}[B_T - B_S] + \mathbb{V}[B_S] \\ &= S \end{aligned}$$

où

$$B_T = \sqrt{T}\xi_i \ et \ B_S = \sqrt{S}\xi_i$$

Donc, pour tous les temps $0 \leqslant S' \leqslant T' \leqslant S \leqslant T$:

$$\begin{aligned} cov((B_T - B_S), (B_{T'} - B_{S'})) &= \mathbb{E}[(B_T - B_S)(B_{T'} - B_{S'})] \\ &= \mathbb{E}[B_T B_{T'}] - \mathbb{E}[B_T B_{S'}] - \mathbb{E}[B_S B_{T'}] + \mathbb{E}[B_S B_{S'}] \\ &= S - S_1 - S + S_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

où

$$B_T = \sqrt{T}\xi_i \quad B_S = \sqrt{S}\xi_i \quad B_{T'} = \sqrt{T'}\xi_i \quad B_{S'} = \sqrt{S'}\xi_i$$

On a bien $B_T - B_S$ et $B_{T'} - B_{S'}$ qui sont indépendants, donc on a bien montré que :

$$\sqrt{T}\xi_i = B_T$$

C'est-à-dire que $\sqrt{T}\xi_i$ est un mouvement brownien. Par conséquent, on a bien :

$$\hat{p}_n \overset{p.s}{\to} p$$

2.3 Le pricer par la formule fermée

2.3.1 Question 15

Algorithm 4 `put`

Require: σ, T, K, $s > 0$
Ensure: p

1: **function** PUT(s, r, σ, T, K)
2: $\quad d = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]$
3: $\quad F(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$
4: $\quad p = -sF(-d) + Ke^{-rT}F(-d + \sigma\sqrt{T})$
5: $\quad$ **return** p
6: **end function**

2.3.2 Question 16

En appliquant la fonction `put` à : $r = 0.04$, $\sigma = 0.1$, $s = 100$, $T = 1$ et $K = 100$, on obtient : $\boxed{p \simeq 2.257}$

2.3.3 Question 17

On va tracer le prix donné par la fonction `price3` avec $r = 0.03$, $\sigma = 0.1$, $s = 100$, $T = 1$, $f(x) = max(100 - x, 0)$ et $n = 10^5 k$ avec $1 \leq k \leq 10$. Sur ce graphique, on y ajoute aussi le prix donné par la fonction `put`. On obtient alors le graphique suivant :

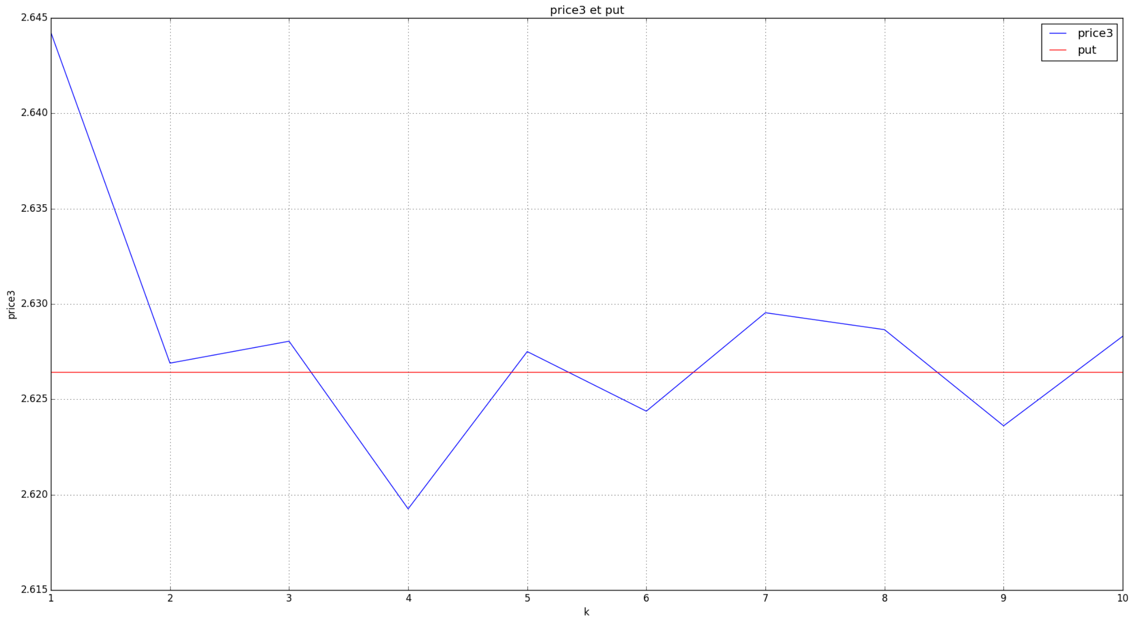

FIGURE 3 – `put` et `price3` en fonction de k

On constate que lorsque k devient grand, la valeur retournée par `price3` semble être assez proche du prix donné par `put`. On peut conjecturer que `price3` converge vers la valeur donné par `put`, lorsque k tend vers l'infini.

2.3.4 Question 18

On va maintenant tracer un graphique en 3 dimensions du prix de l'option donné par `put` lorsque $r = 0.03$, $\sigma = 0.1$, $K = 100$, $s = 20k$ avec $k \in [\![1, 10]\!]$ et $T \in \left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Voici ce que l'on obtient :

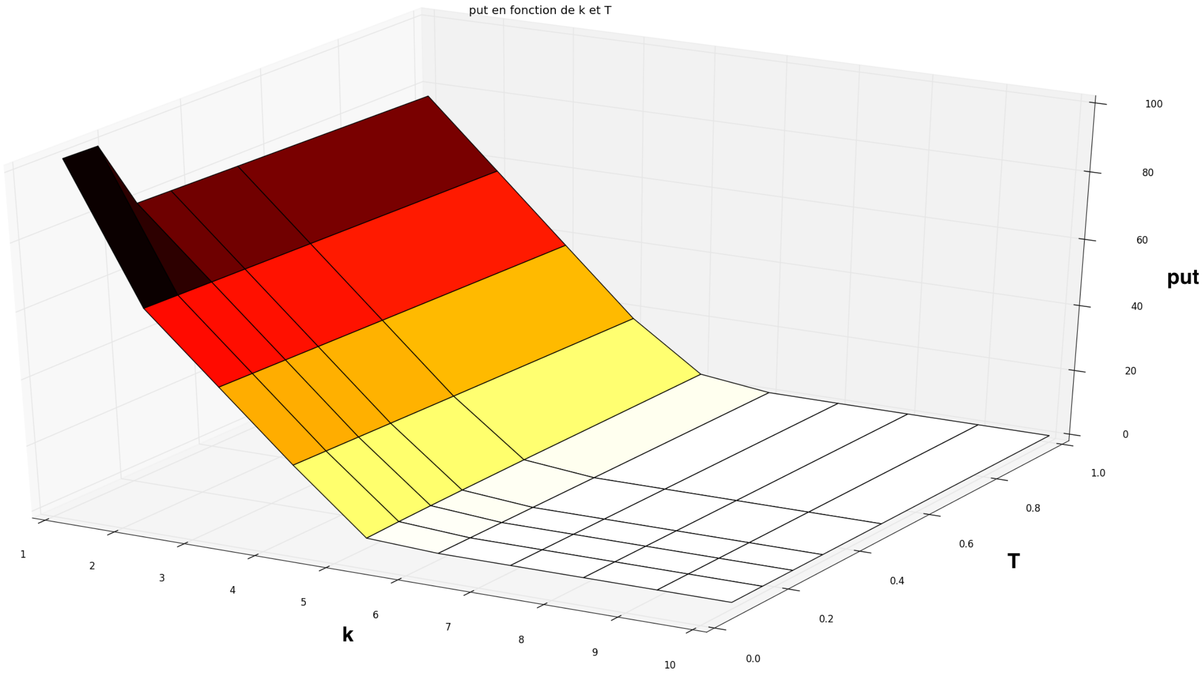

FIGURE 4 – `put` en fonction de k et T

On remarque la valeur de T ne fait pas beaucoup varier le prix donné par `put`. Cependant, le prix semble décroître selon k. De plus, lorsque $k > 5$, le prix est toujours nul.

2.3.5 Question 19

On va tracer le prix donné par `price1` avec $f(x) = max(100 - S_T, 0)$, $s = 100$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.04$, $T = 1$, et $N = 10k$ pour $k \in [\![1, 100]\!]$. On y ajoute aussi le prix donné par la fonction `put`. On obtient alors le graphique suivant :

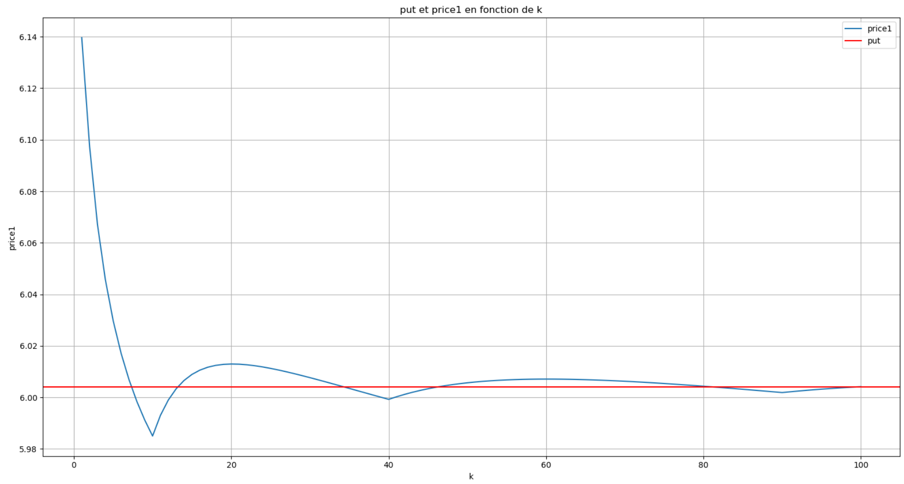

FIGURE 5 – `put` et `price1` en fonction de k et T

On observe que le prix donné par `price1` semble converger vers le prix donné par `put` lorsque $k \to \infty$.
On peut donc conclure que le prix donné par le modèle de Cox-Ross-Rubinstein converge vers celui donné par le modèle de Black-Sholes.

3 EDP de Black-Scholes

3.1 Question 20

3.1.1 Différences Finies Explicites

Tout d'abord, on a l'EDP :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = rP$$

et on sait que $P(t_n, s_i)$ est remplacé par $P_{n,i}$.
On approche les dérivées partielles intervenant dans l'EDP :

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial t} \approx \frac{1}{\triangle T}(P_{n,i} - P_{n-1,i})$$

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial S} \approx \frac{1}{\triangle s}(P_{n,i} - P_{n,i-1})$$

$$\frac{\partial^2 P_{n,i}}{\partial S^2} \approx \frac{1}{\triangle s^2}(P_{n,i+1} - 2P_{n,i} + P_{n,i-1})$$

donc, on a :

$$\frac{1}{\triangle T}\left(P_{n,i} - P_{n-1,i}\right) + rS\frac{1}{\triangle s}\left(P_{n,i} - P_{n,i-1}\right) + \frac{1}{2\triangle s^2}\sigma^2 S^2 (P_{n,i+1} - 2P_{n,i} + P_{n,i-1}) = rP_{n,i}$$

après :

$$\left(\frac{\sigma^2 i^2}{2} - ri\right)P_{n,i-1} + \left(\frac{1}{\triangle T} + ri - \sigma^2 i^2 - r\right)P_{n,i} + \frac{\sigma^2 i^2}{2}P_{n,i+1} = \frac{1}{\triangle T}P_{n-1,i}$$

Sur la matrice, on a :

$$a_i = \frac{\sigma^2 i^2}{2} - ri$$

$$b_i = \frac{1}{\triangle T} + ri - \sigma^2 i^2 - r$$

$$c_i = \frac{\sigma^2 i^2}{2}$$

donc, on a :

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_M & b_M \end{bmatrix}$$

Quand $i = 1$, on a :

$$\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)P_{n,0} + \left(\frac{1}{\triangle T} - \sigma^2\right)P_{n,1} + \frac{\sigma^2}{2}P_{n,2} = \frac{1}{\triangle T}P_{n-1,1}$$

Sachant qu'on a les deux conditions :

$$P(t, 0) = Ke^{r(t-T)} \quad \forall t \in [0, T]$$

$$P(t,L) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

donc, on obtient Pc :

$$Pc = \begin{bmatrix} (\frac{\sigma^2}{2} - r)Ke^{r(t_n - T)} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et sur cette condition, on obtiendra Pn :

$$P(T,s) = max(K - s, 0) \quad \forall s \in [0,L]$$

On sait que A est inversible, donc :

$$AP_n + Pc = \frac{1}{\triangle T} P_{n-1}$$

$$\boxed{P_{n-1} = \triangle T(AP_n + Pc)}$$

3.1.2 Différences Finies Implicites

Tout d'abord, on a l'EDP :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = rP$$

et on sait que $P(t_n, s_i)$ est remplacé par $P_{n,i}$.
On approche les dérivées partielles intervenant dans l'EDP :

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial t} \approx \frac{1}{\triangle T}(P_{n+1,i} - P_{n,i})$$

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial S} \approx \frac{1}{\triangle s}(P_{n,i} - P_{n,i-1})$$

$$\frac{\partial^2 P_{n,i}}{\partial S^2} \approx \frac{1}{\triangle s^2}(P_{n,i+1} - 2P_{n,i} + P_{n,i-1})$$

donc, on a :

$$\frac{1}{\triangle T}(P_{n+1,i} - P_{n,i}) + rS\frac{1}{\triangle s}(P_{n,i} - P_{n,i-1}) + \frac{1}{2\triangle s^2}\sigma^2 S^2 (P_{n,i+1} - 2P_{n,i} + P_{n,i-1}) = rP_{n,i}$$

D'où :

$$\left(\frac{\sigma^2 i^2}{2} - ri\right) P_{n,i-1} + \left(-\frac{1}{\triangle T} + ri - \sigma^2 i^2 - r\right) P_{n,i} + \frac{\sigma^2 i^2}{2} P_{n,i+1} = -\frac{1}{\triangle T} P_{n+1,i}$$

Sur la matrice, on a :

$$a_i = \frac{\sigma^2 i^2}{2} - ri$$

$$b_i = -\frac{1}{\triangle T} + ri - \sigma^2 i^2 - r$$

$$c_i = \frac{\sigma^2 i^2}{2}$$

donc, on a :

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_M & b_M \end{bmatrix}$$

Quand $i = 1$, on a :

$$\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) P_{n,0} + \left(-\frac{1}{\triangle T} - \sigma^2\right) P_{n,1} + \frac{\sigma^2}{2} P_{n,2} = -\frac{1}{\triangle T} P_{n+1,1}$$

Sachant que deux conditions :

$$P(t,0) = Ke^{r(t-T)} \quad \forall t \in [0,T]$$

$$P(t,L) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

donc, on obtiendra Pc :

$$Pc = \begin{bmatrix} (\frac{\sigma^2}{2} - r)Ke^{r(t_n-T)} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et sur cette condition, on obtiendra Pn :

$$P(T,s) = max(K-s,0) \quad \forall s \in [0,L]$$

On sait que A est inversible, donc :

$$AP_n + Pc = -\frac{1}{\triangle T} P_{n+1}$$

$$\boxed{P_n = A^{-1}\left(-\frac{1}{\triangle T} P_{n+1} - Pc\right)}$$

3.1.3 Méthode de Crank-Nicholson

Tout d'abord, on a l'EDP :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = rP$$

et on sait que $P(t_n, s_i)$ est remplacé par $P_{n,i}$.
On approche les dérivées partielles intervenant dans l'EDP :

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial t} \approx \frac{1}{\triangle T}\left(P_{n+1,i} - P_{n,i}\right)$$

$$\frac{\partial P_{n,i}}{\partial S} \approx \frac{1}{2}\left((\frac{1}{2\triangle s}P_{n+1,i+1} - P_{n+1,i-1}) + \frac{1}{2\triangle s}(P_{n,i+1} - P_{n,i-1}) \right)$$

$$\frac{\partial^2 P_{n,i}}{\partial S^2} \approx \frac{1}{2\triangle s^2}(P_{n+1,i+1} - 2P_{n+1,i} + P_{n+1,i-1}) + \frac{1}{2\triangle s^2}(P_{n,i+1} - 2P_{n,i} + P_{n,i-1})$$

donc, on a :

$$\frac{1}{\triangle T}(P_{n+1,i} - P_{n,i}) + \frac{1}{4}rS\frac{1}{\triangle s}((P_{n+1,i+1} - P_{n+1,i-1}) + (P_{n,i+1} - P_{n,i-1}))$$

$$+\frac{1}{4\triangle s^2}\sigma^2 S^2((P_{n+1,i+1} - 2P_{n+1,i} + P_{n+1,i-1}) + (P_{n,i+1} - 2P_{n,i} + P_{n,i-1})) = rP_{n,i}$$

après :

$$\left(-\frac{1}{\triangle T} - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 - r\right)P_{n,i} + \left(\frac{\sigma^2 i^2}{4} + \frac{1}{4}ri\right)P_{n,i+1} + \left(\frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{1}{4}ri\right)P_{n,i-1} =$$

$$\left(-\frac{1}{\triangle T} + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2\right)P_{n+1,i} + \left(-\frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{1}{4}ri\right)P_{n+1,i+1} + \left(\frac{1}{4}ri - \frac{\sigma^2 i^2}{4}\right)P_{n+1,i-1}$$

Sur la matrice, on a :

$$a_i = \frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{1}{4}ri$$

$$b_i = -\frac{1}{\triangle T} - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 - r$$

$$c_i = \frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{1}{4}ri$$

$$d_i = \frac{1}{4}ri - \frac{\sigma^2 i^2}{4} = -a_i$$

$$e_i = -\frac{1}{\triangle T} + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 = -b_i$$

$$f_i = -\frac{\sigma^2 i^2}{4} - \frac{1}{4}ri = -c_i$$

donc, on a :

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_M & b_M \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ d_2 & e_2 & f_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_3 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & f_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_M & e_M \end{bmatrix}$$

Quand $i = 1$, on a :

$$\left(-\frac{1}{\triangle T} - \frac{1}{2}\sigma^2 - r\right) P_{n,1} + \left(\frac{\sigma^2}{4} + \frac{1}{4}r\right) P_{n,2} + \left(\frac{\sigma^2}{4} - \frac{1}{4}r\right) P_{n,0} =$$

$$\left(-\frac{1}{\triangle T} + \frac{1}{2}\sigma^2\right) P_{n+1,1} + \left(-\frac{\sigma^2}{4} - \frac{1}{4}r\right) P_{n+1,2} + \left(\frac{1}{4}r - \frac{\sigma^2}{4}\right) P_{n+1,0}$$

Sachant que deux conditions :

$$P(t,0) = Ke^{r(t-T)} \quad \forall t \in [0,T]$$

$$P(t,L) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

donc, on obtiendra Pc et Pc1 :

$$Pc = \begin{bmatrix} (\frac{1}{4}r - \frac{\sigma^2}{4})Ke^{r(t_n-T)} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Pc1 = \begin{bmatrix} (\frac{\sigma^2}{4} - \frac{1}{4}r)Ke^{r(t_{n+1}-T)} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et sur cette condition,on obtiendra Pn :

$$P(T,s) = max(K-s,0) \quad \forall s \in [0,L]$$

On sait que A est inversible, donc :

$$AP_n + Pc = BP_{n+1} + Pc1$$

$$\boxed{P_n = A^{-1}(BP_{n+1} + Pc1 - Pc)}$$

Voici les 3 graphes que l'on obtient :

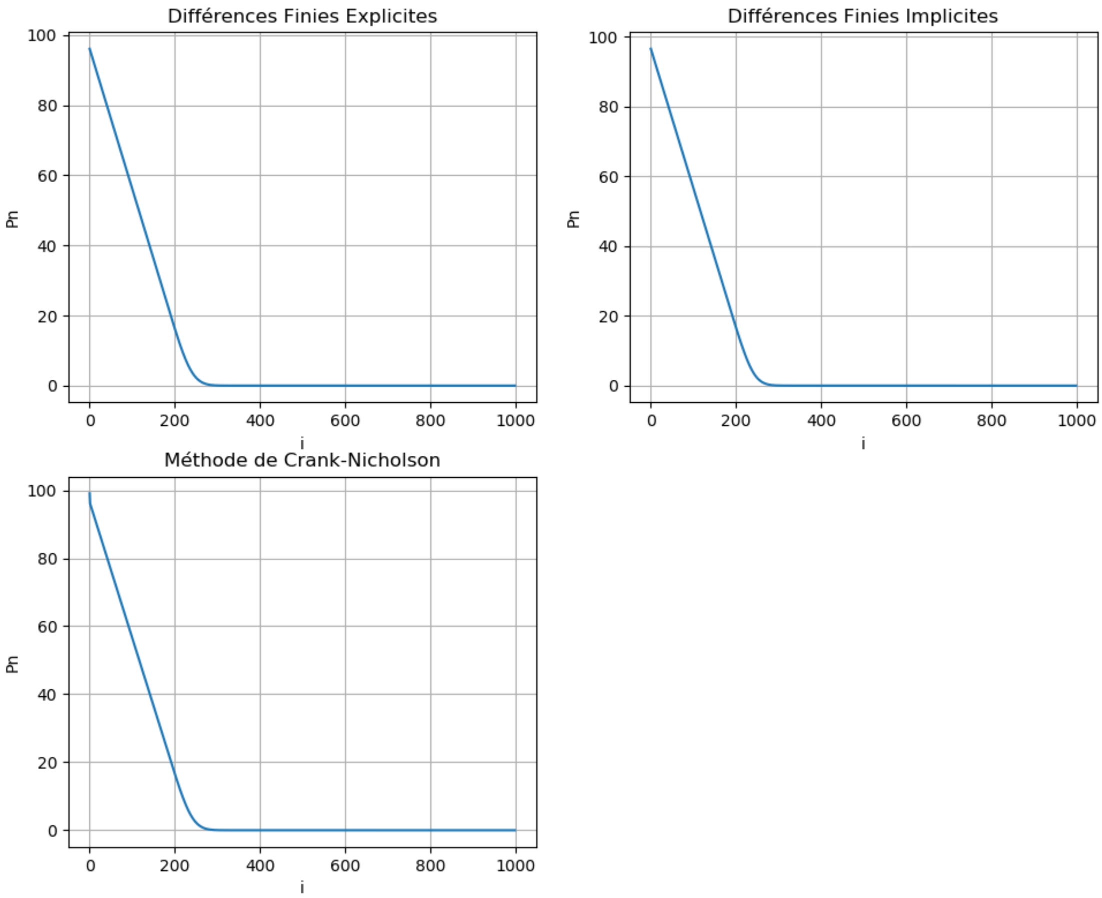

FIGURE 6 – Courbes définie par P_0