Академический университет

Метод наименьших квадратов

Николай Жидков

3 апреля 2018 г.

1 Структура программы

Программа разделена на функции, записанные в файле solve.py. В программе выделены 3 блока. Первый содержит функции из прошлых заданий (решение СЛАУ, возмущения). Второй блок содержит функции, описанные ниже. Третий блок - основная функция выполнения.

- $process\_command\_line\_args$, разбор аргументов командной строки:
  - Ничего не принимает
  - Возвращает файл для считывания данных $filename$, флаг полного дебаг вывода $full\_mode$, степень полинома m, флаг использования одинаковых весов $equal\_weights$, ссылка на функцию для рассчета базисных функций phi, флаг построения графика $plot$.
- $read(filename)$, чтение данных:
  - Принимает имя файла
  - Возвращает число точек в сетке n, массив точек X, массив значений в точках Y, массив весов p
- $build\_system(p, X, Y, n, m, phi)$, строит СЛАУ для нахожления коэффициентов перед базисными функциями:
  - Принимает массив весовых коэффициентов p, массив точек X, массив значений в точках Y, число точек в сетке n, степень полинома m, функция вычислений базисной функции phi.

– Возвращает матрицу A и столбец b.

- $deviations(X, Y, P)$, считает отклонения:
  - Принимает массив точек X, массив значений функции в точках Y, массив значений в точках полинома в точках P.
  - Возвращает минимальное, максимальное и среднее отклонение.

2 Структура файлов исходных данных

Во входном файле ожидаются некоторые числа, формат которых описан дальше, при этом наличие пробелов и переводов строк между ними не важен (можно все данные задать в строку через проблел или по одному на строке, это не имеет значения).

Сначала ожидается число n - число узлов. Дальше идут n чисел - узлы сетки, потом еще n чисел - значения функции в узлах. После этого можно задать весовые коэффициенты в формате номер коэфициента и значения (по умолчанию все коэффициенты $= 1$)

Пример входных данных

3

0.01 0.02 0.03

1 12 3.343

0 14.4

1 2

В результате программе примет функцию, заданную в трех точках 0.01, 0.02, 0.03 со значениями 1, 12, 3.343. Весовые коэффициенты будут 14.4, 2, 1.

3 Примеры вызова из командной строки

Обязательные флаги (для каждого должно быть обязательно указано какое-то значение):

- $--input=$ для указания входного файла (произвольная строка)
- $--deg=$ для указания степени полинома (натуральное число)
- $--poly=$ для выбора базисных функций (два варианта - $standard$ и $legendre$)

Дополнительные опции (по умолчанию выключены):

- $--full$ или $-f$ для вывода подробной информации
- $--equal\_weights$ или $-e$ чтобы все весовые коэффиенты были равны 1 (даже если что-то указано во входном файле, значения будут проигнорированы).

- $--plot$ или $-p$ для вывода графика (синим выводится функция, оранжевым полином)

Примеры запусков

- Строим полином 5-ой степени по точкам из файла $data$ с помощью полиномов Лежандра. Все веса выставляем в 1, в конце выводим график. Дебаг информация не выводится.

  python3 solve.py −−input=data −−deg=5 −−poly=legendre -e -p

- Строим полином 10-ой степени по точкам из файла $data$ с помощью стандартных полиномов x^j. Дебаг информация выводится, график не строится, веса по умолчананию 1, но могут быть изменены через входной файл.

  python3 solve.py −−input=data −−deg=10 −−poly=standard -f

4 Численный эксперимент

4.1 степень полинома 4

Полученный полином при одинаковых весах: $1.416364 - 0.016119x^1 - 1.416245x^2 + 0.931432x^3 - 0.049175x^4$.
Полученный полином при весах $[10.0, 1, 1, 1, 1, 20.0, 10.0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 10.0, 1, 20.0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 10.0, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$: .

Критерий анализа	Веса постоянные (%)	Веса переменные
Наименьшая абсолютная ошибка	0.01299	0.000385922002963
Наибольшая абсолютная ошибка	0.33220	0.483314319147685
Средняя абсолютная ошибка	0.10554	0.099952249436113

Стандартные базисые функции

	Возмущение матрицы (%)	Возмущение вектора (%)	Чувствительность решения
максимальное	3.16898	244.31352	99.99332
среднее	2.40740	120.50122	49.54340
минимальное	1.66164	41.78941	20.20190

Полиномы Лежандра

	Возмущение матрицы (%)	Возмущение вектора (%)	Чувствительность решения
максимальное	4.00000	5.16191	1.84020
среднее	2.88506	3.44437	1.27230
минимальное	1.13641	2.01689	1.01290

4.2 степень полинома 7

Полученный полином при одинаковых весах: $1.568903x_0 + 0.287342x^1 + -4.559324x^2 + 0.780871x^3 + 9.005063x^4 + -5.160245x^5 + -2.959547x^6 + 2.011809x^7$.

Полученный полином при весах $[1, 10.0, 10.0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 40.0, 1, 1, 1, 1, 1, 10.0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$:
.

Критерий анализа	Веса постоянные (%)	Веса переменные
Наименьшая абсолютная ошибка	0.001727434894614	0.000841234277782
Наибольшая абсолютная ошибка	0.172415466746918	0.224322713840519
Средняя абсолютная ошибка	0.058579829907618	0.055907695828496

Стандартные базисые функции

	Возмущение матрицы (%)	Возмущение вектора (%)	Чувствительность решения
максимальное	3.26145	163.75074	101.30600
среднее	2.42021	106.91050	48.34924
минимальное	1.61640	71.37342	22.45056

Полиномы Лежандра

	Возмущение матрицы (%)	Возмущение вектора (%)	Чувствительность решения
максимальное	3.93094	4.52149	3.00852
среднее	2.26593	3.09789	1.65827
минимальное	1.00728	1.66332	0.97767

4.3 степень полинома 14

Полученный полином при одинаковых весах: $1.721314x_0 + 0.605135x^1 + -14.856810x^2 + 0.045137x^3 + 139.113235x^4 + -102.151454x^5 + -620.063284x^6 + 890.673525x^7 + 975.120456x^8 + -2692.055418x^9 + 847.502493x^{10} + 2280.496246x^{11} + -2696.022245x^{12} + 1183.103208x^{13} + -192.305783x^{14}$.
Полученный полином при весах $[1, 1, 30.0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 20.0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$:
.

Критерий анализа	Веса постоянные (%)	Веса переменные
Наименьшая абсолютная ошибка	0.000153587092497	0.000003629045815
Наибольшая абсолютная ошибка	0.025300241322584	0.032793533409576
Средняя абсолютная ошибка	0.008317548076360	0.008159458596758

Стандартные базисые функции

	Возмущение матрицы (%)	Возмущение вектора (%)	Чувствительность решения
максимальное	2.63284	100.31338	65.63425
среднее	2.23143	100.07348	45.82486
минимальное	1.52736	99.97096	37.97527

Полиномы Лежандра

	Возмущение матрицы (%)	Возмущение вектора (%)	Чувствительность решения
максимальное	3.67832	15.85469	12.41772
среднее	2.30980	11.14188	5.79881
минимальное	1.26857	6.69361	2.83865

4.4 Выводы

- Чувствительность решения при использовании полиномов Лежандра в среднем гораздо меньше, чем при стандартных функциях.

- Подобрать руками весовые коэффициенты так, чтобы улучшились сразу все показатели, очень сложно. Либо улучшаются вместе среднее и минимальное, но подскакивает максимальное, либо уменьшается максимальное, но увеличивается среднее.