

5. 哈尔变换可以用矩阵的形式表示为:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^T$$

其中,  $\mathbf{F}$ 是一个  $N \times N$  的图像矩阵,  $\mathbf{H}$ 是  $N \times N$  变换矩阵,  $\mathbf{T}$ 是  $N \times N$  变换结果。对于哈尔变

换, 变换矩阵 $\mathbf{H}$ 包含基函数 $h_k(z)$ , 它们定义在连续闭区间  $z \in [0,1], k = 0,1,2 \cdots N-1$ , 其中

$N = 2^n$ 。为了生成矩阵, 定义整数 $\mathbf{k}$ , 即  $k = 2^p + q - 1$  (这里  $0 \leq p \leq n-1$ , 当  $p=0$  时  $q=0$ , 或  $1$ ; 当  $p \neq 0$  时,  $1 \leq q \leq 2^p$ )。可得哈尔基函数为:

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, z \in [0,1]$$

$$\text{且 } h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{\frac{p}{2}}, (q-1)/2^p \leq z < (q-0.5)/2^p \\ -2^{\frac{p}{2}}, (q-0.5)/2^p \leq z < q/2^p \\ 0, \text{其它}, z \in [0,1] \end{cases}$$

$N \times N$  哈尔变换矩阵的第 $i$ 行包含了元素 $h_i(z)$ , 其中  $z = \frac{0}{N}, \frac{1}{N}, \cdots, \frac{(N-1)}{N}$ 。计算当  $N = 16$  时的 $H_{16}$ 矩阵。

$$H_{16} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$