2、 卷积是用来描述线性移不变系统的。

（1）请用数学语言定义描述定义什么是线性移不变系统？

（2）请证明卷积具有交换性；

（3）请证明卷积是一种线性运算；

（4）请证明任何函数与单位脉冲函数进行卷积时，结果为该函数本身。

（5）(选作) 说明卷积是线性移不变系统的数学描述

（**注意： 证明采用连续或者离散形式都可以**）

（1）线性移不变系统是一类数学系统，一个系统被称为线性移不变系统，如果它满足线性性质和移不变性质，则称其是线性移不变系统。

线性性质（Linearity）：系统满足叠加原理，即对于任意输入信号 x1(t) 和 x2(t) 以及任意常数 a 和 b，系统对于输入 ax1(t) + bx2(t) 的响应等于 a 乘以 x1(t) 的响应与 b 乘以 x2(t) 的响应的线性组合。数学上表示为：

若系统对于 x1(t) 的响应为 y1(t)，对于 x2(t) 的响应为 y2(t)，则系统对于 ax1(t) + bx2(t) 的响应为 ay1(t) + by2(t)。

移不变性质（Time-Invariance）：系统的响应不受时间平移的影响，即如果系统对于输入信号 x(t) 的响应是 y(t)，那么对于输入信号 x(t - τ) 的响应将是 y(t - τ)，其中 τ 是任意实数，表示时间的偏移。

（2）线性运算是加法和数量乘法。证明卷积是一种线性运算等价于证明卷积的可加性和标量乘性

加法性： 设在R上可积，

标量乘性：

（3）证明：设在R上可积，

得证.

（4）证明：

时， 有

（5）由（1）知，只要满足线性性质和移不变性质即为线性移不变系统

卷积的线性性质：

卷积满足线性性质，这意味着它遵循叠加原理。对于线性系统，当输入信号 x1(t) 和 x2(t) 分别通过系统得到响应 y1(t) 和 y2(t) 时，系统对于输入 a \* x1(t) + b \* x2(t) 将得到响应 a \* y1(t) + b \* y2(t)。这可以用下面的数学表达式表示：

如果 y1(t) 是系统对于 x1(t) 的响应，y2(t) 是系统对于 x2(t) 的响应，那么对于 a \* x1(t) + b \* x2(t) 的响应将是 a \* y1(t) + b \* y2(t)。这与卷积的线性性质相吻合，因为卷积运算也满足线性性质。

卷积的移不变性质：

线性移不变系统的另一个关键性质是时间不变性，也称为移不变性。这意味着系统的行为不随时间的平移而改变。如果系统对于输入信号 x(t) 的响应是 h(t)，那么对于输入信号 x(t - τ) 的响应将是 h(t - τ)，其中 τ 是时间的偏移。这与卷积运算的性质相吻合，因为卷积中的核函数是不随时间的平移而改变的。