

# Цель работы

Цель данной работы состоит в том, чтобы рассмотреть модель конкуренции двух фирм и построить графики изменения оборотных средств фирм.

## Задание

(Вариант 11)

### Случай 1.

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

$$\text{где } a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 N q}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2}$$

Также введена нормировка  $t = c_1 \theta$ .

### Случай 2.

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед  $M_1 M_2$  будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \left( \frac{b}{c_1} + 0.00021 \right) M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M_0^1 = 5 \text{ — оборотные средства фирмы 1}$$

$$M_0^2 = 4.5 \text{ — оборотные средства фирмы 2}$$

$$p_{cr} = 12 \text{ — критическая стоимость продукта}$$

$$N = 40 \text{ — число потребителей производимого продукта}$$

$q = 1$  — максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

$\tau_1 = 20$  — длительность производственного цикла фирмы 1

$\tau_2 = 30$  — длительность производственного цикла фирмы 2

$\tilde{p}_1 = 8$  — себестоимость продукта у фирмы 1

$\tilde{p}_2 = 5$  — себестоимость продукта у фирмы 2

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 1.
2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 2.

## Теоретическое введение

### Для одной фирмы

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

$N$  – число потребителей производимого продукта.

$S$  – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

$M$  – оборотные средства предприятия

$\tau$  – длительность производственного цикла

$p$  – рыночная цена товара

$\tilde{p}$  – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

$\delta$  – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

$\kappa$  – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$Q(S/p)$  – функция спроса, зависящая от отношения дохода  $S$  к цене  $p$ . Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k \frac{P}{S} = q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right),$$

где  $q$  – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при  $p = p_{cr}$  (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина  $p_{cr} = Sq/k$ . Параметр  $k$  – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть,  $Q(S/p) = 0$  при  $p \geq p_{cr}$ ) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa$$

Уравнение для рыночной цены  $p$  представим в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}))$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр  $\gamma$  зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла  $\tau$ . При заданном  $M$  уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены  $p$  равно

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq})$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{\partial M}{\partial t} = M\frac{\delta}{\tau}(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\delta p})^2 \frac{p_{cr}}{Nq} - \kappa$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию  $\partial M / \partial t = 0$ :

$$\tilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае  $a^2 < 4b$ ) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть,  $b \ll a^2$ ) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При  $b \ll a$  стационарные значения  $M$  равны

$$\tilde{M}_+ = Nq\frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}, \tilde{M}_- = \kappa\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr}-\tilde{p})}$$

Первое состояние  $\tilde{M}_+$  устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние  $\tilde{M}_-$  неустойчиво, так что при  $M < \tilde{M}_-$  оборотные средства падают ( $\partial M / \partial t < 0$ ), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу  $\tilde{M}_-$  соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр  $\delta$  всюду входит в сочетании с  $\tau$ . Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим:  $\delta = 1$ , а параметр  $\tau$  будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

## Для двух фирм

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.)

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1} + N_1 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) p - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2} + N_2 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) p - \kappa_2 \end{cases}$$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно. Величины  $N_1$  и  $N_2$  – числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене  $p$ . Тогда

$$\begin{cases} \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} = -N_1 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \\ \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} = -N_2 q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \end{cases}$$

где  $\tilde{p}_1$  и  $\tilde{p}_2$  – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1} \left(1 - \frac{p}{\tilde{p}_1}\right) - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2} \left(1 - \frac{p}{\tilde{p}_2}\right) - \kappa_2 \end{cases}$$

Уравнение для цены, по аналогии с (3),

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma \left( \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} - N q \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \right)$$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$p = p_{cr} \left(1 - \frac{1}{N q} \left( \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} \right) \right)$$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = c_1 M_1 - b M_1 M_2 - a_1 M_1^2 - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = c_2 M_2 - b M_1 M_2 - a_2 M_2^2 - \kappa_2 \end{cases}$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 N q}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2}$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки ( $\kappa_1, \kappa_2$ ) пренебрежимо малы. И введем нормировку  $t = c_1 \theta$ . Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

## Стационарная точка

Приравниваем первое уравнение из системы (17) к нулю и находим корни:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{c_1 - b y}{a_1} \end{cases}$$

Отбрасываем 0, потому что он не может быть стационарным состоянием, и находим вторую точку:

$$\begin{cases} x = \frac{c_1 - by}{a_1} \\ y = \frac{a_1 c_2 - bc_1}{a_1 a_2 - b^2} \end{cases}$$

Подставляем значение у и получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{c_1 a_2 - bc_2}{a_1 a_2 - b^2} \\ y = \frac{a_1 c_2 - bc_1}{a_1 a_2 - b^2} \end{cases}$$

## Решение

1.

- Код

```
model lab_08_1
constant Real p_cr = 12 "критическая стоимость продукта";
constant Real N = 40 "число потребителей производимого продукта";
constant Real q = 1 "максимальная потребность одного человека в продукте в
единицу времени";
constant Real tau_1 = 20 "длительность производственного цикла фирмы 1";
constant Real tau_2 = 30 "длительность производственного цикла фирмы 2";
constant Real p_tilda_1 = 8 "себестоимость продукта, то есть переменные издержки
на производство единицы продукции фирмы 1";
constant Real p_tilda_2 = 5 "себестоимость продукта, то есть переменные издержки
на производство единицы продукции фирмы 2";
constant Real a1 = p_cr/((tau_1^2)*(p_tilda_1^2)*N*q);
constant Real a2 = p_cr/((tau_2^2)*(p_tilda_2^2)*N*q);
constant Real b = p_cr/((tau_1^2)*(p_tilda_1^2)*(tau_2^2)*(p_tilda_2^2)*N*q);
constant Real c1 = (p_cr-p_tilda_1)/(tau_1*p_tilda_1);
constant Real c2 = (p_cr-p_tilda_2)/(tau_2*p_tilda_2);

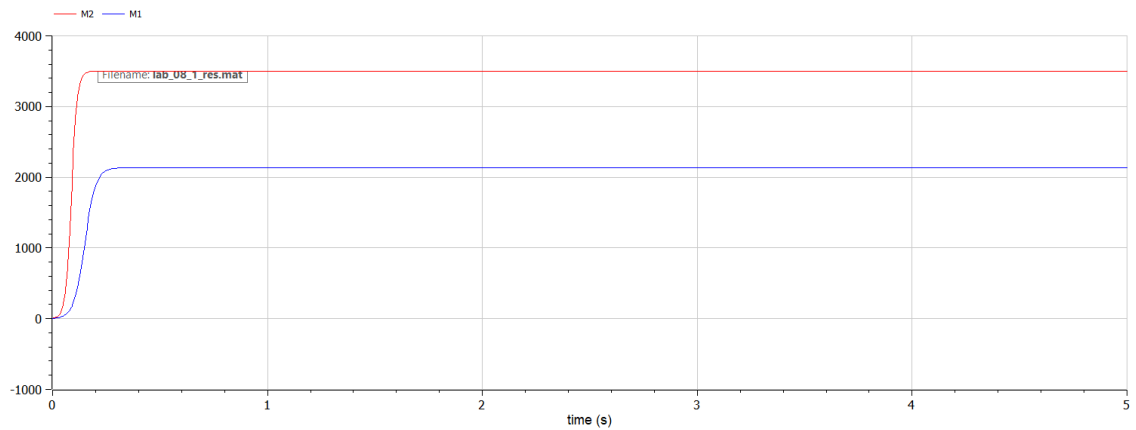
Real M1 "оборотные средства предприятия 1";
Real M2 "оборотные средства предприятия 2";
Real teta "безразмерное время";
Real stationary_1 "стационарное состояние фирмы 1";
Real stationary_2 "стационарное состояние фирмы 2";

initial equation
M1 = 5;
M2 = 4.5;
teta = 0;

equation
stationary_1 = (c1*a2-b*c2)/(a1*a2-b*b);
stationary_2 = (a1*c2-b*c1)/(a1*a2-b*b);
teta = time/c1;
der(M1)/der(teta)=M1-(b/c1)*M1*M2-(a1/c1)*M1^2;
der(M2)/der(teta)=(c2/c1)*M2-(b/c1)*M1*M2-(a2/c1)*M2^2;

end lab_08_1;
```

- График



2.

- Код

```
model lab_08_2
constant real p_cr = 12 "критическая стоимость продукта";
constant real N = 40 "число потребителей производимого продукта";
constant real q = 1 "максимальная потребность одного человека в продукте в
единицу времени";
constant real tau_1 = 20 "длительность производственного цикла фирмы 1";
constant real tau_2 = 30 "длительность производственного цикла фирмы 2";
constant real p_tilda_1 = 8 "себестоимость продукта, то есть переменные издержки
на производство единицы продукции фирмы 1";
constant real p_tilda_2 = 5 "себестоимость продукта, то есть переменные издержки
на производство единицы продукции фирмы 2";
constant real a1 = p_cr/((tau_1^2)*(p_tilda_1^2)*N*q);
constant real a2 = p_cr/((tau_2^2)*(p_tilda_2^2)*N*q);
constant real b = p_cr/((tau_1^2)*(p_tilda_1^2)*(tau_2^2)*(p_tilda_2^2)*N*q);
constant real c1 = (p_cr-p_tilda_1)/(tau_1*p_tilda_1);
constant real c2 = (p_cr-p_tilda_2)/(tau_2*p_tilda_2);

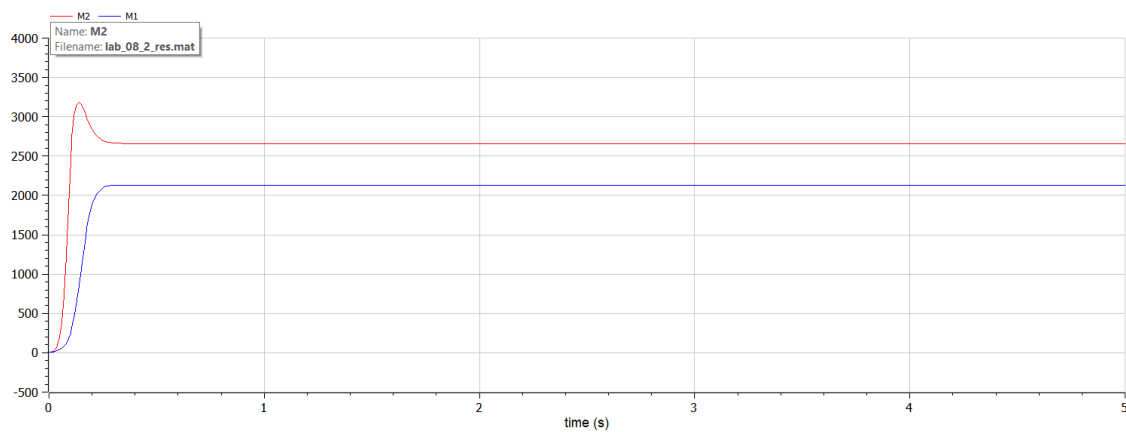
Real M1 "оборотные средства предприятия 1";
Real M2 "оборотные средства предприятия 2";
Real teta "безразмерное время";

initial equation
M1 = 5;
M2 = 4.5;
teta = 0;

equation
teta = time/c1;
der(M1)/der(teta)=M1-(b/c1)*M1*M2-(a1/c1)*M1^2;
der(M2)/der(teta)=(c2/c1)*M2-(b/c1+0.00021)*M1*M2-(a2/c1)*M2^2;

end lab_08_2;
```

- График



## Выводы

---

Рассмотрела модель конкуренции двух фирм и построила графики изменения оборотных средств фирм.

## Библиография

---

1. [Методические материалы по конкуренции двух фирм. Кулябов Д.С.](#)