Цель работы

Цель данной работы состоит в том, чтобы рассмотреть модель хищник-жертва - модель Лотки-Вольтерры, построить графики зависимости и изменеия и найти стационарное состояние.

Задание

(Вариант 11)
Для модели «хищник-жертва»:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.23x(t) + 0.053x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -0.43y(t) + 0.033x(t)y(t) \end{cases}$$
Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв,
а также графики изменения численности хищников и численности жертв при
следующих начальных условиях:
$x_0 = 8, y_0 = 14$. Найдите стационарное состояние системы.

Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

   $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) + bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$
   В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a

   описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c -

   естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

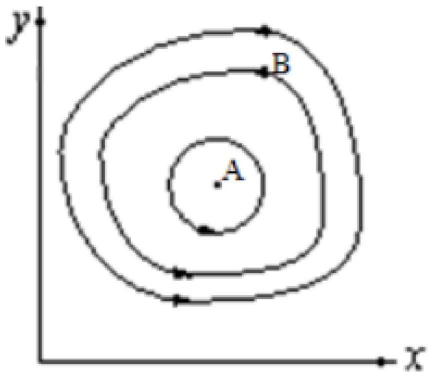

Рисунок 3.1. Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры.

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. 3.1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B. *Замечание: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).*

Решение

1. Программный код

```
model lab05

constant Real a=0.23;
constant Real b=0.053;
constant Real c=0.43;
constant Real d=0.033;

Real x;
Real y;

initial equation
x=8;
y=14;

equation
der(x)=-a*x+b*x*y;
der(y)=c*y-d*x*y;

end lab05;
```

2. График зависимости численности хищников от численности жертв (рис. 3.2)

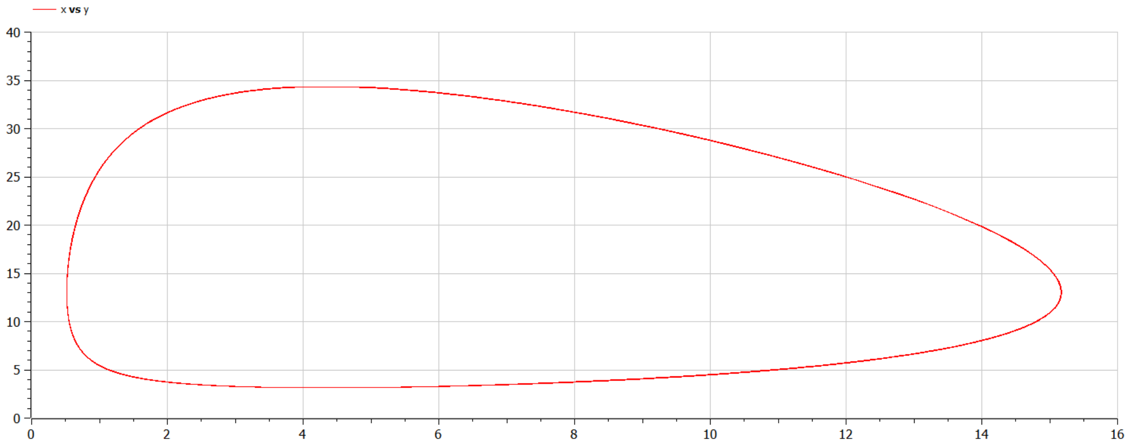

Рис. 3.2. График зависимости численности хищников от численности жертв

3. График изменения численности хищников и численности жертв (рис. 3.3)

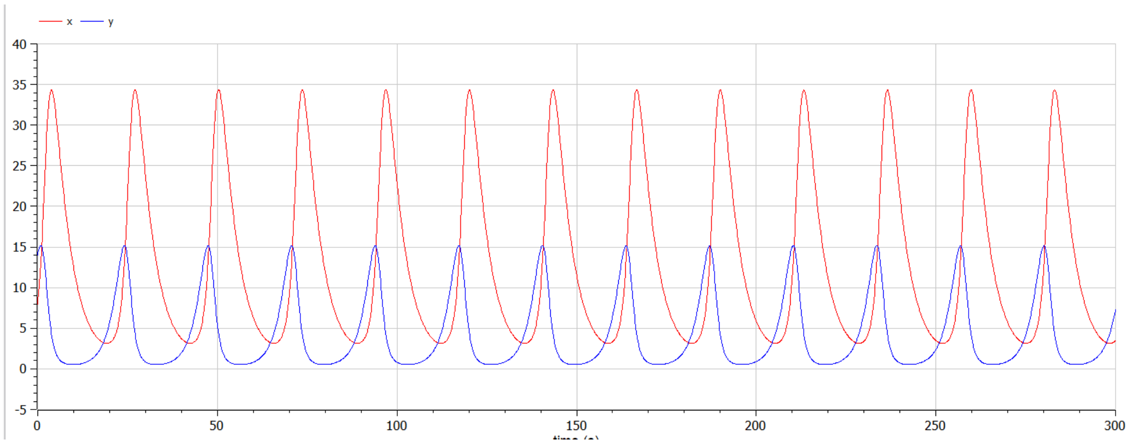

Рис. 3.3. График изменения численности хищников и численности жертв

4. Стационарное состояние системы

$$x_0 = \frac{c}{d} = \frac{0.43}{0.033} = 13,03030303030303$$

$$y_0 = \frac{a}{b} = \frac{0.23}{0.053} = 4,339622641509434$$

Выводы

1. Построила график зависимости численности хищников от численности жертв.
2. Построила график изменения численности хищников от численности жертв.
3. Нашла стационарное состояние системы.
4. Изучила модель Лотки-Вольтерры.
5. Улучшила навыки работы с openModelica.

Библиография

1. [Модель хищник-жертва. Кулябов Д.С.]