Цель работы

Цель данной работы состоит в том, чтобы рассмотреть модель гармонических колебаний, сделать программу для получения графиков линейного гармонического осциллятора.

Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
   $\ddot{x} + 12x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы
   $\ddot{x} + 10\dot{x} + 5x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы
   $\ddot{x} + 7\dot{x} + 7x = 7sin(3t)$
   На интервале $t \in [0; 60]$ $(шаг\ 0.05)$ $с\ начальными\ условиями$ $x_0 = 1,\ y_0 = 2$

Теоретическое введение

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0^2 x = f(t)$

x — переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.)

t — время

w — частота

γ — затухание

Вывод системы уравнений

1. $\ddot{x} + 12x = 0$
   Система будет следующего вида:
   $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -12x \end{cases}$
2. $\ddot{x} + 10\dot{x} + 5x = 0$
   Система будет следующего вида:
   $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -10y - 5x \end{cases}$

3. $\ddot{x} + 7\dot{x} + 7x = 7sin(3t)$

   Система будет следующего вида:

   $$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -7y - 7x + 7sin(3t) \end{cases}$$

Построение

1. колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы.

   Код :

```
model lab4_1

constant Real w=sqrt(12);

Real x;
Real y;

initial equation
  x=1;
  y=2;

equation
  der(x)=y;
  der(y)=-w*w*x;

end lab4_1;
```

График (рис.1):

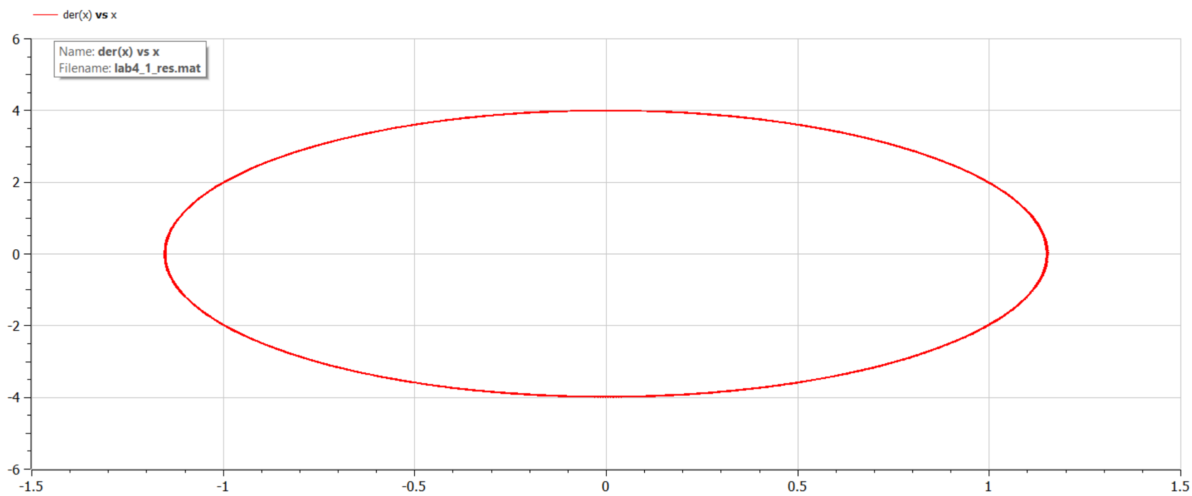

Рис.1. График колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы.

   Код:

```
model lab4_2

constant Real w=sqrt(5);
constant Real g=10;
```

```
Real x;
Real y;

initial equation
  x=1;
  y=2;

equation
  der(x)=y;
  der(y)=-g*y-w*w*x;

end lab4_2;
```

График (рис.2):

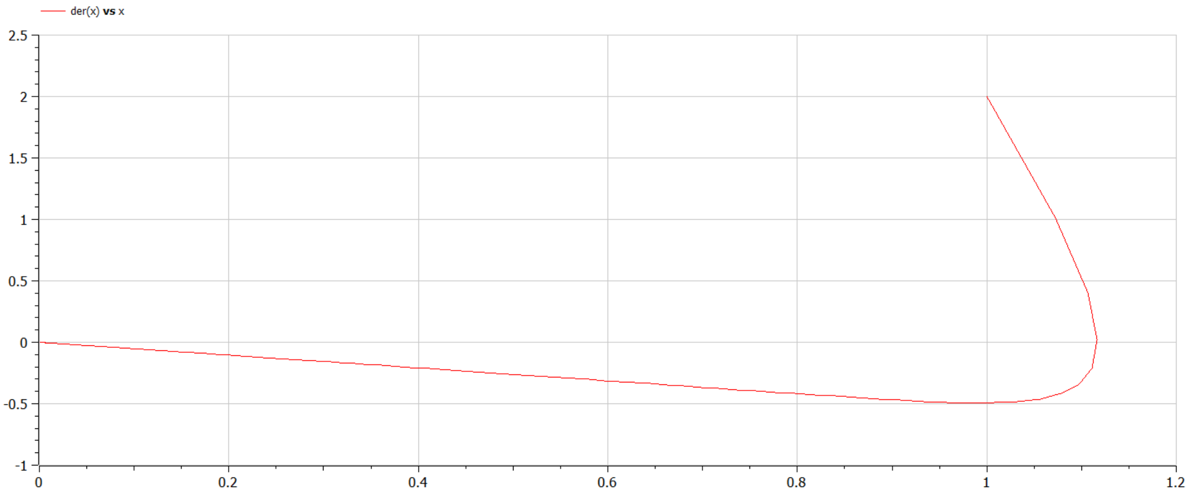

Рис.2. График гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы.
   Код:

```
model lab4_3

constant Real w=sqrt(5);
constant Real g=10;

Real x;
Real y;
Real f;

initial equation
  x=1;
  y=2;
  f=0;

equation
  f=7*sin(3*time);
  der(x)=y;
  der(y)=-g*y-w*w*x+f;

end lab4_3;
```

График (рис.3):

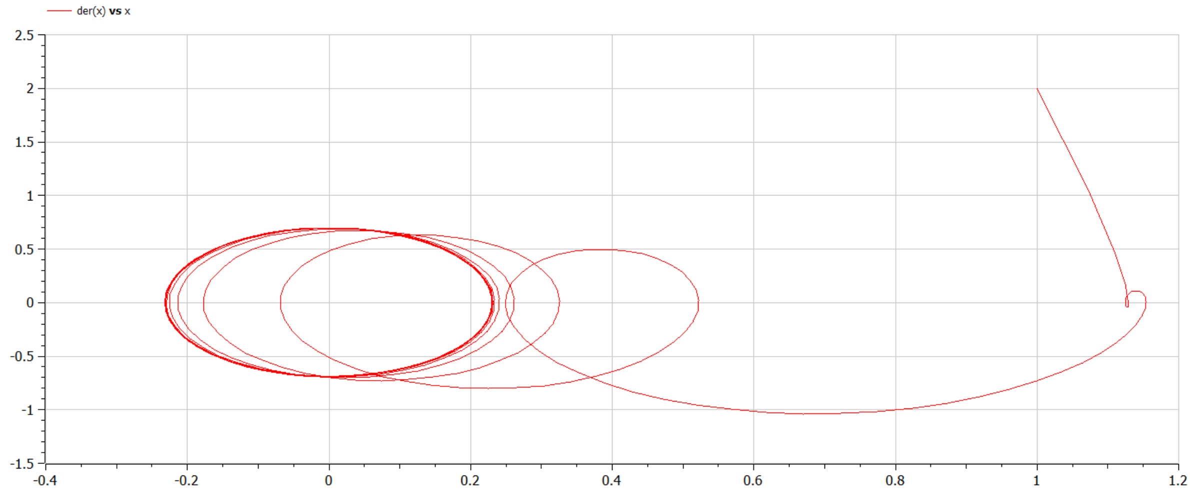

Рис.3. График гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Ответы на вопросы

- Запишите простейшую модель гармонических колебаний:

  $x = x_m cos(\omega t + \varphi 0)^{\cdot}$
- Дайте определение осциллятора:
  Система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.
- Запишите модель математического маятника:
  Уравнение динамики принимает вид: $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L} sin\alpha = 0$ В случае малых колебаний полагают $sin\alpha \approx \alpha$. В результате возникает линейное дифференциальное уравнение $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\alpha = 0$ или $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0$
- Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:
  Пусть у нас есть дифференциальное уравнение 2-го порядка: $\ddot{x} + w_0^2 x = f(t)$

Для перехода к системе уравнений первого порядка сделаем замену (это метод Ранге-Кутты): $y = \dot{x}$

Тогда получим систему уравнений: $\begin{cases} y = \dot{x} \\ \dot{y} = -w_0^2 x \end{cases}$

- Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?
  Фазовый портрет — это то, как величины, описывающие состояние системы (= динамические переменные, зависят друг от друга. Фазовая траектория — кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции.

Выводы

1. Изучила модель гармонического осциллятора.
2. Построила фазовый портрет гармонического осциллятора и решила уравнения гармонического осциллятора для случаев:

- Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
- Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

- Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

3. Научилась строить графики в openModelica с заданным интервалом и шагом.

Библиография

1. Методические материалы по гармоническому осциллятору. Кулябов Д.С.
2. Операции и значения в функциях Latex