



多传感器融合定位

第6讲 惯性导航解算及误差分析

主讲人 任 乾

北京理工大学本硕
自动驾驶从业者





目录



1. 三维运动描述基础知识



2. 三维运动的微分性质



3. 惯性导航解算



4. 惯性导航误差分析



目录



1. 三维运动描述基础知识



2. 三维运动的微分性质



3. 惯性导航解算



4. 惯性导航误差分析



三维运动描述基础知识

1. 概述

多传感器融合中三维运动的导航信息包含姿态、速度、位置，其中姿态的处理最为复杂，也最为核心。

姿态有三种表示形式：欧拉角、旋转矩阵、四元数，此外还有等效旋转矢量，但它一般在中间计算过程中使用。

注：本课程只介绍基于四元数和旋转矩阵的姿态更新，不介绍基于欧拉角的更新。

参考文献：

1. Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter
2. 《捷联惯导算法与组合导航原理》（严恭敏等著）

文献1属于机器人技术体系，文献2属于高精度惯性导航技术体系，因此，本章以文献1为核心，文献2中只借鉴部分推导过程。



三维运动描述基础知识

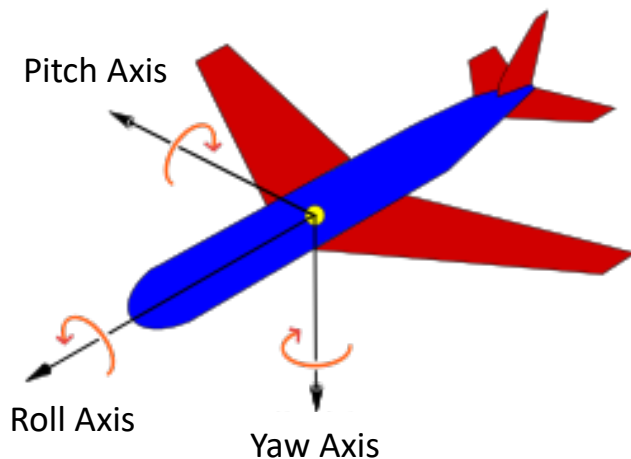
2. 姿态描述方法

1) 欧拉角

欧拉角等同于把姿态绕三次不同轴旋转。

不同的旋转顺序会得到不同的欧拉角，常见的有：

- a. 机器人坐标系：xyz分别对应前左上，旋转顺序为z-y-x；
- b. 惯性导航坐标系：xyz分别对应右前上，旋转顺序为z-x-y；
- c. 另一种惯性导航坐标系：xyz分别对应前右下，旋转顺序为z-y-x。



思考：为什么不同的坐标系定义下，会选择不同的旋转顺序？



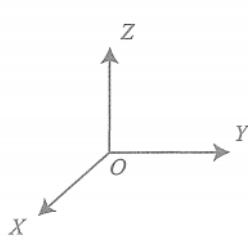
三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

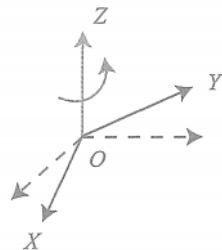
1) 欧拉角

万向锁：当载体处在某个姿态时，会产生奇异性问题，导致丢失一个自由度。

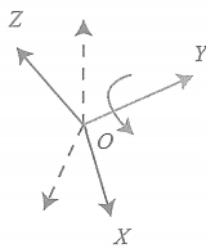
不同的旋转顺序下，产生万向锁时所处的姿态不同。下图展示了z-y-x的旋转顺序下的万向锁问题。



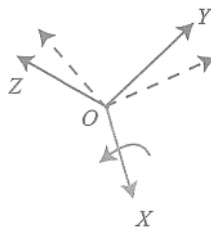
原始坐标系



第一次旋转（绕Z轴）

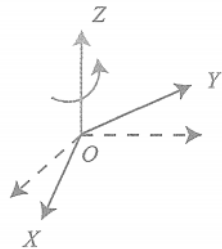


第二次旋转（绕Y轴）

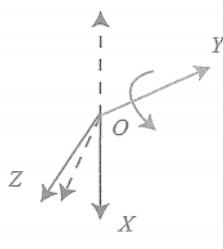


第三次旋转（绕X轴）

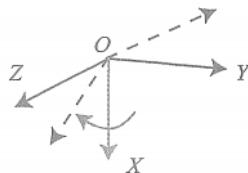
万向锁的情况



第一次旋转（绕Z轴）



第二次旋转为90°（绕Y轴）



第三次旋转变成和第一次相同



三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

1) 欧拉角

不同坐标系定义下，选择不同旋转顺序的原因：其本质都是按照“航向->俯仰->横滚”的顺序旋转，因为此时万向锁出现在俯仰为 90° 时的情况，而多数载体出现该姿态的几率最小。

需要注意的是，欧拉角有明确的物理意义，不随坐标系定义的不同而改变：

- a. 俯仰角：载体抬头为正，低头为负；
- b. 横滚角：向右滚为正，向左滚为负；
- c. 航向角：机器人中，一般以逆时针旋转为正，顺时针旋转为负。（在与地理系相关的惯性导航中，常以北偏东为正，北偏西为负，遇到时需要注意）

由于欧拉角必然产生奇异性，因此一般只用它做人机交互的显示，而不用来做姿态解算。



三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

2) 旋转矩阵

旋转矩阵是描述旋转的一个三维矩阵，一个真实姿态对应一个唯一的旋转矩阵。

假设旋转前，载体系(b系)的单位正交基为 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ，旋转后对应的单位正交基为 $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$

假设在世界坐标系(w系，不随载体的旋转而旋转)下有向量 \mathbf{a} ，它在旋转前后两个坐标系中的坐标分别为 $[a_1, a_2, a_3]^T$ 和 $[a'_1, a'_2, a'_3]^T$ ，那么有

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3] \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix}$$

由此可以得到

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_3^T \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_3^T \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_3^T \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R} \mathbf{a}'$$

其中 \mathbf{R} 便是旋转矩阵，在结合机器人模型推导时，记为 \mathbf{R}_{wb}



三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

2) 旋转矩阵

旋转矩阵是单位正交矩阵，即行列式为1，且满足 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{a}'$

优点：

a. 没有奇异性，适合用于解算；

缺点：

a. 用9个元素表示3个自由度，会增加计算复杂度；

b. 为了保持正交性，一般更新完毕后，要重新做正交化。



三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

3) 四元数

四元数是超复数，即“复数的复数”。

若有复数

$$A = a + bi$$

$$B = c + di$$

则复数的复数为

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= A + Bj \\ &= a + bi + cj + dij \end{aligned}$$

若令 $\mathbf{k} = ij$, 则有

$$\mathbf{q} = a + bi + cj + dk$$

此即为四元数。

一般四元数的常见表示符号为

$$\mathbf{q} = q_w + \mathbf{q}_v = q_w + q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}$$

共轭四元数(实部相同，虚部相反):

$$\mathbf{q}^* = q_w - \mathbf{q}_v = q_w - q_x \mathbf{i} - q_y \mathbf{j} - q_z \mathbf{k}$$

四元数的逆:

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|}$$

姿态运算时，四元数为单位四元数，此时有

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* = q_w - \mathbf{q}_v$$



三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

3) 四元数

四元数乘法

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w q_w - \mathbf{p}_v^T \mathbf{q}_v \\ p_w \mathbf{q}_v + q_w \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

若在四元数乘法中出现三维向量，指的是和三维向量构成的纯虚四元数相乘，比如

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{u} = \mathbf{p} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \mathbf{i} \\ u_2 \mathbf{j} \\ u_3 \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

乘法结合律

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r})$$

$$\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}$$



三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

3) 四元数

四元数相乘，可以展开为矩阵与向量相乘的形式

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = [\mathbf{p}]_L \mathbf{q}$$

其中

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}]_L &= \begin{bmatrix} p_w & -p_x & -p_y & -p_z \\ p_x & p_w & -p_z & p_y \\ p_y & p_z & p_w & -p_x \\ p_z & -p_y & p_x & p_w \end{bmatrix} \\ &= p_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{p}_v^T \\ \mathbf{p}_v & [\mathbf{p}_v]_{\times} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中，符号 $[\bullet]_{\times} = [\bullet]^{\wedge}$ ，同样表示反对称矩阵。

也可以展开为

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = [\mathbf{q}]_R \mathbf{p}$$

其中

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}]_R &= \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & q_z & -q_y \\ q_y & -q_z & q_w & q_x \\ q_z & q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix} \\ &= q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^T \\ \mathbf{q}_v & -[\mathbf{q}_v]_{\times} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由此，可以得出重要性质(后续推导时常用)：

$$(\mathbf{q} \otimes \mathbf{x}) \otimes \mathbf{p} = [\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L \mathbf{x}$$

$$\mathbf{q} \otimes (\mathbf{x} \otimes \mathbf{p}) = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R \mathbf{x}$$



三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

4) 等效旋转矢量

理解：把旋转当做绕空间一个固定轴转过一个角度。在不引起歧义的情况下可简称为旋转矢量或旋转向量。

直接用向量 ϕ 表示，其方向即为转轴方向，对应的单位向量记为 \mathbf{u} 它的长度 $\phi = |\phi|$ 即为转角。

等效旋转矢量的指数形式，可以表示为

$$\exp(\phi^\wedge) = \exp(\phi \mathbf{u}^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi \mathbf{u}^\wedge)^n$$

上式包含高次幂，为了便于后续计算，需要对高次幂进行化简。

由于反对称矩阵具有以下性质(可自行推导)，

$$(\phi^\wedge)^i = \begin{cases} (-1)^{(i-1)/2} \phi^{i-1} (\phi^\wedge) & i = 1, 3, 5, \dots \\ (-1)^{(i-2)/2} \phi^{i-2} (\phi^\wedge)^2 & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$



三维运动描述基础知识

2. 姿态描述方法

4) 等效旋转矢量

因此，等效旋转矢量的指数函数可以表示如下：

$$\begin{aligned}
\exp(\phi^\wedge) &= I + \phi(\mathbf{u}^\wedge) + \frac{1}{2!}\phi^2(\mathbf{u}^\wedge)^2 + \frac{1}{3!}\phi^3(\mathbf{u}^\wedge)^3 + \frac{1}{4!}\phi^4(\mathbf{u}^\wedge)^4 + \dots \\
&= I + \phi(\mathbf{u}^\wedge) + \frac{1}{2!}\phi^2(\mathbf{u}^\wedge)^2 - \frac{1}{3!}\phi^3(\mathbf{u}^\wedge) - \frac{1}{4!}\phi^4(\mathbf{u}^\wedge)^2 + \dots \\
&= I + (\mathbf{u}^\wedge)^2 + \underbrace{\left(\phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 - \dots\right)}_{\sin \phi} (\mathbf{u}^\wedge) - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4 - \dots\right)}_{\cos \phi} (\mathbf{u}^\wedge)^2 \\
&= I + \sin \phi (\mathbf{u}^\wedge) + (1 - \cos \phi) (\mathbf{u}^\wedge)^2 \\
&= I + \frac{\sin \phi}{\phi} (\phi^\wedge) + \frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} (\phi^\wedge)^2
\end{aligned}$$



三维运动描述基础知识

3. 各描述方法之间的关系

1) 欧拉角与旋转矩阵

按照机器人前(x)-左(y)-上(z)的坐标系定义，并令横滚角为 α 、俯仰角为 β 、航向角为 γ 。

a. 欧拉角转旋转矩阵

由于旋转矩阵是按照z-y-x的顺序旋转得来，因此可以表示为

$$\mathbf{R}_{wb} = (\mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(-\beta)\mathbf{R}_z(\gamma))^T$$

其中

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y(-\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



三维运动描述基础知识

3. 各描述方法之间的关系

1) 欧拉角与旋转矩阵

b. 旋转矩阵转欧拉角

由欧拉角得到的旋转矩阵，其完整形式为

$$\mathbf{R}_{wb} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\gamma - c\alpha s\beta c\gamma \\ c\beta s\gamma & c\alpha c\gamma - s\alpha s\beta s\gamma & -c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

其中符号： $s\bullet = \sin(\bullet)$ $c\bullet = \cos(\bullet)$

观察矩阵，可以看出

$$\alpha = \arctan2(\mathbf{R}_{wb}(3, 2), \mathbf{R}_{wb}(3, 3))$$

$$\beta = \arcsin(\mathbf{R}_{wb}(3, 1))$$

$$\gamma = \arctan2(\mathbf{R}_{wb}(2, 1), \mathbf{R}_{wb}(1, 1))$$



三维运动描述基础知识

3. 各描述方法之间的关系

2) 旋转矩阵与四元数

它们转换的推导过程较为复杂，此处直接给出结论。

四元数转旋转矩阵：

$$\mathbf{R}_{wb} = \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_x q_z + q_w q_y) \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & q_w^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_w q_x) \\ 2(q_x q_z - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & q_w^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{bmatrix}$$

旋转矩阵转四元数：

$$q_w = \frac{\sqrt{1 + R_{wb}(1,1) + R_{wb}(2,2) + R_{wb}(3,3)}}{2}$$

$$q_x = \frac{R_{wb}(3,2) - R_{wb}(2,3)}{4q_w}$$

$$q_y = \frac{R_{wb}(1,3) - R_{wb}(3,1)}{4q_w}$$

$$q_z = \frac{R_{wb}(2,1) - R_{wb}(1,2)}{4q_w}$$

需要注意的是，这需要满足

$$q_w \neq 0, 1 + R_{wb}(1,1) + R_{wb}(2,2) + R_{wb}(3,3) > 0$$

当不满足该条件时，转换步骤比较复杂，此处不讲述。



三维运动描述基础知识

3. 各描述方法之间的关系

3) 旋转矩阵与旋转矢量

a. 由旋转矢量计算旋转矩阵

$$\mathbf{R}_{wb} = \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi}(\phi^\wedge) + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2}(\phi^\wedge)^2$$

此公式也被称为罗德里格斯公式，并且与旋转矢量的指数运算结果相同。

b. 由旋转矩阵计算旋转矢量

$$\phi = \arccos \frac{\text{tr}(\mathbf{R}_{wb}) - 1}{2}$$

$$\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{R}_{wb} - (\mathbf{R}_{wb})^T)^\vee}{2 \sin \phi}$$

其中，符号 \bullet^\vee 表示由反对称矩阵得到对应的矢量。



三维运动描述基础知识

3. 各描述方法之间的关系

4) 四元数与旋转矢量

a. 由旋转矢量计算四元数

$$\mathbf{q} = \cos \frac{\phi}{2} + \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\phi} \boldsymbol{\phi}$$

思考：为什么角度是旋转矢量转角的一半？

三维空间中的一个矢量，使用四元数对它进行旋转，得到新的矢量时，其计算过程为 $\mathbf{a}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{q}^*$

原因是矢量是三维的，四元数与矢量(对应的纯虚四元数)直接相乘是四维(即实部不为零)，而用上式计算出的结果则能保证永远是三维。

可以理解为两次旋转，第一次转到四维，第二次再转回三维，每次转总角度的一半。

b. 由四元数计算旋转矢量

$$\phi = 2 \arctan (\|\mathbf{q}_v\|, q_w)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{q}_v / \|\mathbf{q}_v\|$$



目录



1. 三维运动描述基础知识



2. 三维运动的微分性质



3. 惯性导航解算



4. 惯性导航误差分析



三维运动的微分性质

1. 旋转矩阵微分方程

假设世界坐标系(w系)中有一个固定不动的矢量 \mathbf{r}^w ，它因此在载体坐标系(b系)下的表示为 \mathbf{r}^b ，则有

$$\mathbf{r}^w = \mathbf{R}_{wb}\mathbf{r}^b$$

两边同时微分，可得

$$\dot{\mathbf{r}}^w = \mathbf{R}_{wb}\dot{\mathbf{r}}^b + \dot{\mathbf{R}}_{wb}\mathbf{r}^b$$

由于

$$\dot{\mathbf{r}}^w = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{r}}^b = -\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \times \mathbf{r}^b$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{wb}^b$ 代表载体旋转角速度在b系下的表示，实际使用时，指的就是陀螺仪的角速度输出(暂不考虑误差)。

因此有

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_{wb}(-\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \times \mathbf{r}^b) + \dot{\mathbf{R}}_{wb}\mathbf{r}^b$$

移项可得

$$\mathbf{R}_{wb}(\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \times \mathbf{r}^b) = \dot{\mathbf{R}}_{wb}\mathbf{r}^b$$

变换可得

$$\mathbf{R}_{wb}([\boldsymbol{\omega}_{wb}^b]_{\times}\mathbf{r}^b) = \dot{\mathbf{R}}_{wb}\mathbf{r}^b$$

因此有

$$\dot{\mathbf{R}}_{wb} = \mathbf{R}_{wb}[\boldsymbol{\omega}_{wb}^b]_{\times}$$



三维运动的微分性质

2. 四元数微分方程

\mathbf{r}^w 和 \mathbf{r}^b 两个矢量之间可以用四元数转换如下

$$\mathbf{r}^w = \mathbf{q}_{wb} \otimes \mathbf{r}^b \otimes \mathbf{q}_{wb}^*$$

等式两边同时右乘 \mathbf{q}_{wb} , 可得

$$\mathbf{r}^w \otimes \mathbf{q}_{wb} = \mathbf{q}_{wb} \otimes \mathbf{r}^b$$

上式两边同时求微分, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}^w \otimes \mathbf{q}_{wb} + \mathbf{r}^w \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb} \\ = \dot{\mathbf{q}}_{wb} \otimes \mathbf{r}^b + \mathbf{q}_{wb} \otimes \dot{\mathbf{r}}^b \end{aligned}$$

由于

$$\dot{\mathbf{r}}^b = -\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \times \mathbf{r}^b = -\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \otimes \mathbf{r}^b$$

$$\dot{\mathbf{r}}^w = \mathbf{0}$$

则有

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^w \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb} \\ = (\mathbf{q}_{wb} \otimes \mathbf{r}^b \otimes \mathbf{q}_{wb}^*) \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb} \\ = \dot{\mathbf{q}}_{wb} \otimes \mathbf{r}^b - \mathbf{q}_{wb} \otimes \boldsymbol{\omega}_{wb}^b \otimes \mathbf{r}^b \end{aligned}$$

等式两边同时左乘 \mathbf{q}_{wb}^* , 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^b \otimes \mathbf{q}_{wb}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb} \\ = \mathbf{q}_{wb}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb} \otimes \mathbf{r}^b - \boldsymbol{\omega}_{wb}^b \otimes \mathbf{r}^b \end{aligned}$$

移项可得

$$\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \otimes \mathbf{r}^b = (\mathbf{q}_{wb}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb}) \otimes \mathbf{r}^b - \mathbf{r}^b \otimes (\mathbf{q}_{wb}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb})$$



三维运动的微分性质

2. 四元数微分方程

利用前面四元数相乘展开成矩阵与向量相乘的公式,

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = [\mathbf{p}]_L \mathbf{q}$$

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = [\mathbf{q}]_R \mathbf{p}$$

$$\text{其中, } [\mathbf{p}]_L = p_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{p}_v^T \\ \mathbf{p}_v & [\mathbf{p}_v]_{\times} \end{bmatrix}$$

$$\text{其中, } [\mathbf{q}]_R = q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^T \\ \mathbf{q}_v & -[\mathbf{q}_v]_{\times} \end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{\omega}_{wb}^b \otimes \mathbf{r}^b = (\mathbf{q}_{wb}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb}) \otimes \mathbf{r}^b - \mathbf{r}^b \otimes (\mathbf{q}_{wb}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb})$ 展开得,

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & [\boldsymbol{\omega}_{wb}^b]_{\times} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{r}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & 2 [(\mathbf{q}_{wb}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb})_v]_{\times} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{r}^b \end{bmatrix}$$

$$\text{因此有 } (\mathbf{q}_{wb}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb})_v = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{wb}^b$$

即虚部求解完毕。



三维运动的微分性质

2. 四元数微分方程

根据四元数与旋转矢量的关系，有

$$\mathbf{q}_{wb}^* = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ -\mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}_{wb} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\phi}}{2} \sin \frac{\phi}{2} \\ \dot{\mathbf{u}} \sin \frac{\phi}{2} + \mathbf{u} \frac{\dot{\phi}}{2} \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

因此有

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{wb}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb} &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ -\mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\phi}}{2} \sin \frac{\phi}{2} \\ \dot{\mathbf{u}} \sin \frac{\phi}{2} + \mathbf{u} \frac{\dot{\phi}}{2} \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\phi}}{2} \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} + (\mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2})^T \left(\dot{\mathbf{u}} \sin \frac{\phi}{2} + \mathbf{u} \frac{\dot{\phi}}{2} \cos \frac{\phi}{2} \right) \\ \cos \frac{\phi}{2} \left(\dot{\mathbf{u}} \sin \frac{\phi}{2} + \mathbf{u} \frac{\dot{\phi}}{2} \cos \frac{\phi}{2} \right) + \mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2} \cdot \frac{\dot{\phi}}{2} \sin \frac{\phi}{2} - (\mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2}) \times \left(\dot{\mathbf{u}} \sin \frac{\phi}{2} + \mathbf{u} \frac{\dot{\phi}}{2} \cos \frac{\phi}{2} \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{u}} \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} + \mathbf{u} \frac{\dot{\phi}}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2} \times \dot{\mathbf{u}} \sin \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可以看出实部为0

因此有

$$\mathbf{q}_{wb}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_{wb} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{wb}^b \end{bmatrix} \longrightarrow \dot{\mathbf{q}}_{wb} = \mathbf{q}_{wb} \otimes \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{wb}^b \end{bmatrix}$$



三维运动的微分性质

3. 等效旋转矢量微分方程

在旋转矩阵微分方程中，把旋转矩阵用等效旋转矢量表示，则可以求出等效旋转矢量的微分方程。同样地，在四元数微分方程中也可以按此方式得到。

此处直接给出结论

$$\dot{\phi} = \omega_{wb}^b + \frac{1}{2}\phi \times \omega_{wb}^b + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2}\right) (\phi \times)^2 \omega_{wb}^b$$

形式较为复杂，为了化简，对三角函数泰勒展开，并去除高阶项，可得

$$\dot{\phi} = \omega_{wb}^b + \frac{1}{2}\phi \times \omega_{wb}^b$$



目录



1. 三维运动描述基础知识



2. 三维运动的微分性质



3. 惯性导航解算



4. 惯性导航误差分析



惯性导航解算

1. 惯性导航解算概述

1)目的：利用IMU测量的角速度、加速度，根据上一时刻导航信息，推算出当前时刻导航信息，包括姿态解算、速度解算、位置解算。

2)方法：由姿态、速度、位置的微分方程，推导出它们的解，并转变成离散时间下的近似形式，从而可以在离散时间采样下，完成导航信息求解。

3)优点：IMU不受外界信号干扰，可以得到稳定、平滑的导航结果。

4)缺点：误差随时间累计，一般时间越长，累计误差越大。因此需要融合，而导航解算(本小节)及其误差分析(下一小节)，是融合的基础。



惯性导航解算

2. 姿态更新

1) 基于旋转矩阵的姿态更新

根据前面推导，旋转矩阵的微分方程为

$$\dot{\mathbf{R}}_{wb} = \mathbf{R}_{wb}[\boldsymbol{\omega}]_{\times}$$

根据微分方程的求解方法，可以写出由k-1时刻求解k时刻旋转矩阵的公式为

$$\mathbf{R}_{wb_k} = \mathbf{R}_{wb_{k-1}} e^{\int_{t_{k-1}}^{t_k} [\boldsymbol{\omega}]_{\times} d\tau}$$

指数上的积分结果其实就是k-1时刻到k时刻之间的相对旋转对应的等效旋转矢量构成的反对称矩阵。

因此上式可以重新写为

$$\mathbf{R}_{wb_k} = \mathbf{R}_{wb_{k-1}} e^{\boldsymbol{\phi}_{\times}}$$

由于反对称矩阵的指数函数前面已经推导完毕，因此上式又可以写为

$$\mathbf{R}_{wb_k} = \mathbf{R}_{wb_{k-1}} \mathbf{R}_{b_{k-1}b_k}$$

其中

$$\mathbf{R}_{b_{k-1}b_k} = \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} (\boldsymbol{\phi}_{\times}) + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} (\boldsymbol{\phi}_{\times})^2$$



惯性导航解算

2. 姿态更新

1) 基于旋转矩阵的姿态更新

可以看出，解算过程中需要求解等效旋转矢量，需要借助其微分方程实现。

在旋转矢量的微分方程 $\dot{\phi} \approx \omega + \frac{1}{2}\phi \times \omega$ 中，对于右侧第二项，根据叉乘的定义可知，当叉乘的两个矢量之间方向重合时，则结果为0，在k-1时刻到k时刻的极短时间内，可认为接近重合，因此，旋转矢量微分方程可进一步简化为

$$\dot{\phi} \approx \omega \quad \rightarrow \quad \phi \approx \int_{t_{k-1}}^{t_k} \omega(\tau) d\tau$$

a. 欧拉法: $\phi = \omega_{k-1}(t_k - t_{k-1})$

b. 中值法: $\phi = \frac{\omega_{k-1} + \omega_k}{2}(t_k - t_{k-1})$

中值法精度大于欧拉法，后续本课程解算全部采用中值法进行。

另有四阶龙格库塔法，在IMU采样频率较高(> 100HZ)时，收益不大，此处不做介绍。



惯性导航解算

2. 姿态更新

2) 基于四元数的姿态更新

根据前面推导，四元数的微分方程为

$$\dot{\mathbf{q}}_{wb} = \mathbf{q}_{wb} \otimes \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$

其矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}_{wb} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_R \mathbf{q}_{wb}$$

同样按照解微分方程的方法，并对指数项做积分，可以得到

$$\dot{\mathbf{q}}_{wb} = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}} \mathbf{q}_{wb}$$

其中

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_x & -\phi_y & -\phi_z \\ \phi_x & 0 & \phi_z & -\phi_y \\ \phi_y & -\phi_z & 0 & \phi_x \\ \phi_z & \phi_y & -\phi_x & 0 \end{bmatrix}$$

为了求解该方程，要对指数函数进行泰勒展开，同样包含高次幂，展开方法与前述方法相同（可以自行推导，此处直接给出结论）：

$$e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}(T)} = I \cos \frac{\phi}{2} + \frac{\boldsymbol{\Theta}}{\phi} \sin \frac{\phi}{2}$$



惯性导航解算

2. 姿态更新

2) 基于四元数的姿态更新

因此有

$$\mathbf{q}_{wb_k} = \left[I \cos \frac{\phi}{2} + \frac{\mathbf{\Theta}}{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \right] \mathbf{q}_{wb_{k-1}}$$

由于

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \frac{\phi}{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}_R = \left[I \cos \frac{\phi}{2} + \frac{\mathbf{\Theta}}{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \right]$$

令

$$\mathbf{q}_{b_{k-1}b_k} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \frac{\phi}{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } \mathbf{q}_{wb_k} = \mathbf{q}_{wb_{k-1}} \otimes \mathbf{q}_{b_{k-1}b_k}$$

旋转矢量的计算仍采用中值法进行。



惯性导航解算

3. 速度更新

速度微分方程为

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}_{wb}\mathbf{a} - \mathbf{g}$$

其中 $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]$ 为测量加速度,

$\mathbf{g} = [0 \ 0 \ g_0]$ 为重力加速度。

该微分方程的通解形式为

$$\Delta \mathbf{v} = (\mathbf{R}_{wb}\mathbf{a} - \mathbf{g}) \Delta t$$

对应的基于中值法的速度更新形式为

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} + \left(\frac{\mathbf{R}_{wb_k}\mathbf{a}_k + \mathbf{R}_{wb_{k-1}}\mathbf{a}_{k-1}}{2} - \mathbf{g} \right) (t_k - t_{k-1})$$

4. 位置更新

位置微分方程为

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}$$

其通解形式为 $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{v} \Delta t$

此处 \mathbf{v} 指的是该时间段内的平均速度, 该形式对应的基于中值法的离散形式为

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} + \frac{\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}}{2} (t_k - t_{k-1})$$

另外, 通解还可以写为

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{v} \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a} \Delta t^2$$

需要注意的是, 此处的 \mathbf{v} 指的是该时间段起始时刻速度, 该形式对应的基于中值法的离散形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k = & \mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} (t_k - t_{k-1}) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{R}_{wb_k}\mathbf{a}_k + \mathbf{R}_{wb_{k-1}}\mathbf{a}_{k-1}}{2} - \mathbf{g} \right) (t_k - t_{k-1})^2 \end{aligned}$$



惯性导航解算

5. 惯性导航解算总结

1) 姿态解算

a. 基于旋转矩阵

$$\mathbf{R}_{wb_k} = \mathbf{R}_{wb_{k-1}} \left(\mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} (\boldsymbol{\phi} \times) + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} (\boldsymbol{\phi} \times)^2 \right) \quad \text{其中 } \phi = \frac{\boldsymbol{\omega}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_k}{2} (t_k - t_{k-1})$$

b. 基于四元数

$$\mathbf{q}_{wb_k} = \mathbf{q}_{wb_{k-1}} \otimes \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \frac{\phi}{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \quad \text{其中 } \phi = \frac{\boldsymbol{\omega}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_k}{2} (t_k - t_{k-1})$$

2) 速度解算

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} + \left(\frac{\mathbf{R}_{wb_k} \mathbf{a}_k + \mathbf{R}_{wb_{k-1}} \mathbf{a}_{k-1}}{2} - \mathbf{g} \right) (t_k - t_{k-1})$$

3) 位置解算

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} + \frac{\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}}{2} (t_k - t_{k-1}) \quad \text{或} \quad \mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} (t_k - t_{k-1}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{R}_{wb_k} \mathbf{a}_k + \mathbf{R}_{wb_{k-1}} \mathbf{a}_{k-1}}{2} - \mathbf{g} \right) (t_k - t_{k-1})^2$$



目录



1. 三维运动描述基础知识



2. 三维运动的微分性质



3. 惯性导航解算



4. 惯性导航误差分析



惯性导航误差分析

1. 误差方程推导方法

误差方程：状态量(速度误差、位置误差、姿态误差、bias误差等)误差形式的表示。

误差方程及其推导方法，是后续滤波、图优化等融合方案的基础，是重中之重。

误差方程的推导有固定的套路，举例说明具体步骤：

1) 写出不考虑误差时的微分方程

$$\dot{z} = x + y$$

2) 写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{x} + \tilde{y}$$

3) 写出真实值与理想值之间的关系

$$\tilde{z} = z + \delta z$$

$$\tilde{x} = x + \delta x$$

$$\tilde{y} = y + \delta y$$

4) 把3)中的关系，带入2)

$$\dot{\tilde{z}} + \delta \dot{z} = x + \delta x + y + \delta y$$

5) 把1)中的关系，带入4)

$$x + y + \delta \dot{z} = x + \delta x + y + \delta y$$

6) 化简方程

$$\delta \dot{z} = \delta x + \delta y$$



惯性导航误差分析

2. 姿态误差方程

1) 写出不考虑误差的微分方程

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t - \mathbf{b}_{\omega_t} \end{bmatrix}$$

2) 写出考虑误差的微分方程

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_t = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_t \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_t - \tilde{\mathbf{b}}_{\omega_t} \end{bmatrix}$$

3) 写出带误差的值与理想值之间的关系

$$\tilde{\mathbf{q}}_t = \mathbf{q}_t \otimes \delta \mathbf{q}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_t = \boldsymbol{\omega}_t + \mathbf{n}_{\omega}$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{\omega_t} = \mathbf{b}_{\omega_t} + \delta \mathbf{b}_{\omega_t}$$

其中 \mathbf{n}_{ω} 为陀螺仪白噪声。

其中

$$\delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{|\delta \theta|}{2}) \\ \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{|\delta \theta|} \sin(\frac{|\delta \theta|}{2}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{2} \end{bmatrix}$$

$\delta \boldsymbol{\theta}$ 是姿态误差对应的旋转矢量(有时被称为失准角)。

4) 将3)中的关系带入2)

$$(\mathbf{q}_t \otimes \delta \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \delta \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_t + \mathbf{n}_{\omega} - \mathbf{b}_{\omega_t} - \delta \mathbf{b}_{\omega_t} \end{bmatrix}$$



惯性导航误差分析

2. 姿态误差方程

5) 把1)中的关系带入4)

$$\begin{aligned}
 & (q_t \otimes \dot{\delta} q) \\
 &= \dot{q}_t \otimes \delta q + q_t \otimes \delta \dot{q} \\
 &= \frac{1}{2} q_t \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_t - b_{\omega_t} \end{bmatrix} \otimes \delta q + q_t \otimes \delta \dot{q} \\
 &= \frac{1}{2} q_t \otimes \delta q \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_t + n_{\omega} - b_{\omega_t} - \delta b_{\omega_t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

6) 化简方程

首先把5)中最后两行左乘 $(q_t)^{-1}$ 并移项可得

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{q} &= \frac{1}{2} \delta q \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_t + n_{\omega} - b_{\omega_t} - \delta b_{\omega_t} \end{bmatrix} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_t - b_{\omega_t} \end{bmatrix} \otimes \delta q
 \end{aligned}$$

根据前面所讲，四元数相乘可以转换成矩阵与向量相乘

$$p \otimes q = [p]_L q = [q]_R p$$

$$[p]_L = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}_v^T \\ \mathbf{p}_v & p_0 \mathbf{I} + [\mathbf{p}_v]_{\times} \end{bmatrix}$$

$$[q]_R = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}_v^T \\ \mathbf{q}_v & q_0 \mathbf{I} - [\mathbf{q}_v]_{\times} \end{bmatrix}$$



惯性导航误差分析

2. 姿态误差方程

令

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_t + \mathbf{n}_\omega - \mathbf{b}_{\omega_t} - \delta \mathbf{b}_{\omega_t}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_t - \mathbf{b}_{\omega_t}$$

则

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \end{bmatrix}_R \delta \mathbf{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix}_L \delta \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) & -[\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2]_\times \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} \end{aligned}$$

由于融合时，状态量中往往不是使用四元数，而是使用失准角，因此要把上式转成失准角的微分形式。

由于

$$\delta \mathbf{q} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{2} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \delta \dot{\mathbf{q}} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\delta \dot{\boldsymbol{\theta}}}{2} \end{bmatrix}$$

把它代入上式，又可以得到

$$\begin{aligned} \delta \dot{\boldsymbol{\theta}} &= -[\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2]_\times \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{2} + (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \\ &= -[2\boldsymbol{\omega}_t + \mathbf{n}_\omega - 2\mathbf{b}_{\omega_t} - \delta \mathbf{b}_{\omega_t}]_\times \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{2} \\ &\quad + \mathbf{n}_\omega - \delta \mathbf{b}_{\omega_t} \end{aligned}$$

忽略其中的二阶小项，可得

$$\delta \dot{\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}_t - \mathbf{b}_{\omega_t}]_\times \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{n}_\omega - \delta \mathbf{b}_{\omega_t}$$



惯性导航误差分析

3. 速度误差方程

1) 写出不考虑误差时的微分方程

$$\dot{\mathbf{v}}_t = \mathbf{R}_t(\mathbf{a}_t - \mathbf{b}_{a_t})$$

2) 写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_t = \tilde{\mathbf{R}}_t(\tilde{\mathbf{a}}_t - \tilde{\mathbf{b}}_{a_t})$$

3) 写出真实值和理想值之间的关系

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_t &= \mathbf{R}_t \exp([\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}) \\ &\approx \mathbf{R}_t(\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times})\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_t = \mathbf{a}_t + \mathbf{n}_a$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{a_t} = \mathbf{b}_{a_t} + \delta\mathbf{b}_{a_t}$$

其中 \mathbf{n}_a 为加速度计白噪声

4) 将3)中的关系带入2)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} + \delta\dot{\mathbf{v}} \\ = \mathbf{R}_t(\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times})(\mathbf{a}_t + \mathbf{n}_a - \mathbf{b}_{a_t} - \delta\mathbf{b}_{a_t})\end{aligned}$$

5) 将1)中的关系带入4)

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_t(\mathbf{a}_t - \mathbf{b}_{a_t}) + \delta\dot{\mathbf{v}} \\ = \mathbf{R}_t(\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times})(\mathbf{a}_t + \mathbf{n}_a - \mathbf{b}_{a_t} - \delta\mathbf{b}_{a_t})\end{aligned}$$

6) 化简方程(忽略二阶小项)

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{v}} \\ = \mathbf{R}_t[\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}(\mathbf{a}_t - \mathbf{b}_{a_t}) + \mathbf{R}_t(\mathbf{n}_a - \delta\mathbf{b}_{a_t}) \\ = -\mathbf{R}_t[\mathbf{a}_t - \mathbf{b}_{a_t}]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta} + \mathbf{R}_t(\mathbf{n}_a - \delta\mathbf{b}_{a_t})\end{aligned}$$



惯性导航误差分析

4. 位置误差方程

1) 写出不考虑误差时的微分方程

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}$$

2) 写出考虑误差时的微分方程

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \tilde{\mathbf{v}}$$

3) 写出真实值与理想值之间的关系

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}$$

4) 将3)中的关系带入2)

$$\dot{\mathbf{p}} + \delta\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$$

5) 把1)中的关系带入4)

$$\mathbf{v} + \delta\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$$

6) 化简方程

$$\delta\dot{\mathbf{p}} = \delta\mathbf{v}$$



惯性导航误差分析

5. bias误差方程

在IMU精度较高时，bias认为是常值，即有

$$\delta \dot{\mathbf{b}}_{a_t} = 0$$

$$\delta \dot{\mathbf{b}}_{\omega_t} = 0$$

但自动驾驶和机器人领域所用的mems多数达不到这种精度，因为角速度随机游走和加速度随机游走较大，因此误差方程常写为

$$\delta \dot{\mathbf{b}}_{a_t} = \mathbf{n}_{b_a}$$

$$\delta \dot{\mathbf{b}}_{\omega_t} = \mathbf{n}_{b_\omega}$$

其中 \mathbf{n}_{b_a} 和 \mathbf{n}_{b_ω} 分别为加速度计和陀螺仪的随机游走对应的白噪声。

以上两种形式都很常见，没有绝对的对和错。



惯性导航误差分析

6. 惯性导航误差分析总结

$$\delta \dot{\mathbf{p}} = \delta \mathbf{v}$$

$$\delta \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{R}_t[\mathbf{a}_t - \mathbf{b}_{a_t}]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{R}_t(\mathbf{n}_a - \delta \mathbf{b}_{a_t})$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}_t - \mathbf{b}_{\omega_t}]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{n}_{\omega} - \delta \mathbf{b}_{\omega_t}$$

$$\delta \dot{\mathbf{b}}_{a_t} = \mathbf{n}_{b_a} \qquad \delta \dot{\mathbf{b}}_{a_t} = 0$$

$$\delta \dot{\mathbf{b}}_{\omega_t} = \mathbf{n}_{b_{\omega}} \qquad \text{或} \qquad \delta \dot{\mathbf{b}}_{\omega_t} = 0$$



作业

利用IMU仿真数据，进行惯性导航解算，并通过计算与ground truth之间的误差，对比欧拉法与中值法的精度差异。

评价标准：

- 1) 及格：根据课程给定的数据，完成基于中值法的解算；
- 2) 良好：根据课程给定的数据，完成基于中值法、欧拉法的解算，并对精度做对比分析；
- 3) 优秀：利用IMU仿真程序，自己生成不同运动状况(静止、匀速、加减速、快速转弯等)的仿真数据，对比两种解算方法精度差异与运动状况的关系，并给出原因分析。

IMU数据仿真程序地址：<https://github.com/Aceinna/gnss-ins-sim>



作业

附加题(不参与作业考核):

1. 四阶龙格库塔法也是一种导航解算方法，但多数情况下并没有必要，在剧烈运动情况下才会产生精度差异，所以本课程并没有讲解。

感兴趣或有疑问的，可以通过仿真证明这一点，即利用IMU仿真程序产生不同运动状况下的仿真数据，对比四阶龙格库塔方法与中值法的精度差异。

2. 从惯性导航的误差方程里，可以看出导航误差与器件误差(陀螺仪或加速度计bias等)以及初始导航误差(初始姿态误差、速度误差、位置误差等)的关系。

例如，假设初始姿态为单位阵，当 x 加速度计有零偏 b_{ax} ，且没有其他器件误差和初始导航误差时，x 方向的速度误差、位置误差随时间的变化分别为 $\delta v_x = b_{ax}t$ $\delta p_x = \frac{1}{2}b_{ax}t^2$ 。

请仿照上述例子，自行推导导航误差与其他器件误差和初始导航误差的关系函数，并用仿真数据证明该函数关系正确。

感谢聆听 !
Thanks for Listening

