



# Hénon map绘制程序

## Hénon map的定义

数学上，Hénon map是一种位于离散时间上的动态系统。它是被广泛研究的代表混沌现象的动态系统之一。其迭代表达式为：

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

该映射通过迭代产生轨迹。亦即，从一点  $u_0 = (x_0, y_0)$  开始代入上述表达式得到下一点坐标，如此迭代得到轨迹  $[u_0, u_1, \dots, u_N]$

## 程序功能

本程序通过 python 编程实现以下功能：

1. 计算 Hénon map 的函数：对任意输入  $a$ 、 $b$ 、初始值  $u_0$  以及轨迹长度  $N$ ，输出厄农映射的轨迹  $[u_0, u_1, \dots, u_N]$
2. 利用编写的函数计算经典 Hénon map 的轨迹：固定参数值为  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$ ,  $u_0 = (0, 0)$  时，输入  $N$  值，得到轨迹图。（以  $x$  为横坐标， $y$  为纵坐标）
3. 利用编写的函数计算 Hénon map 的 orbit digram，即固定  $b = 0.3$ ，改变  $a$  后获得一系列 Hénon map 的轨迹，然后以  $a$  为横轴， $x$  为纵轴绘制 orbit digram 图。
4. 分析上述画出的 orbit digram，找到 Hénon map 可以收敛到一条周期性轨道的  $a$  值，计算该  $a$  值对应的 Hénon map 的轨迹并绘图。

## 解答思路

1. 基于迭代表达式利用循环结构计算 Hénon map 的函数
2. 基于 1 的代码，利用 matplotlib 作出轨迹图
3. 基于上述代码，利用嵌套循环结构作出不同  $a$  值对应  $x$  值的图

4. 基于 3 的代码，增加  $N$  的大小作图，观察比较不同  $a$  中，不重合的  $x$  数据点数量的变换，其中数量不随  $N$  增加的即为可能的  $a$ ；不断缩小  $a$  的范围，得到收敛到周期性轨迹的  $a$  值为 0.8975。

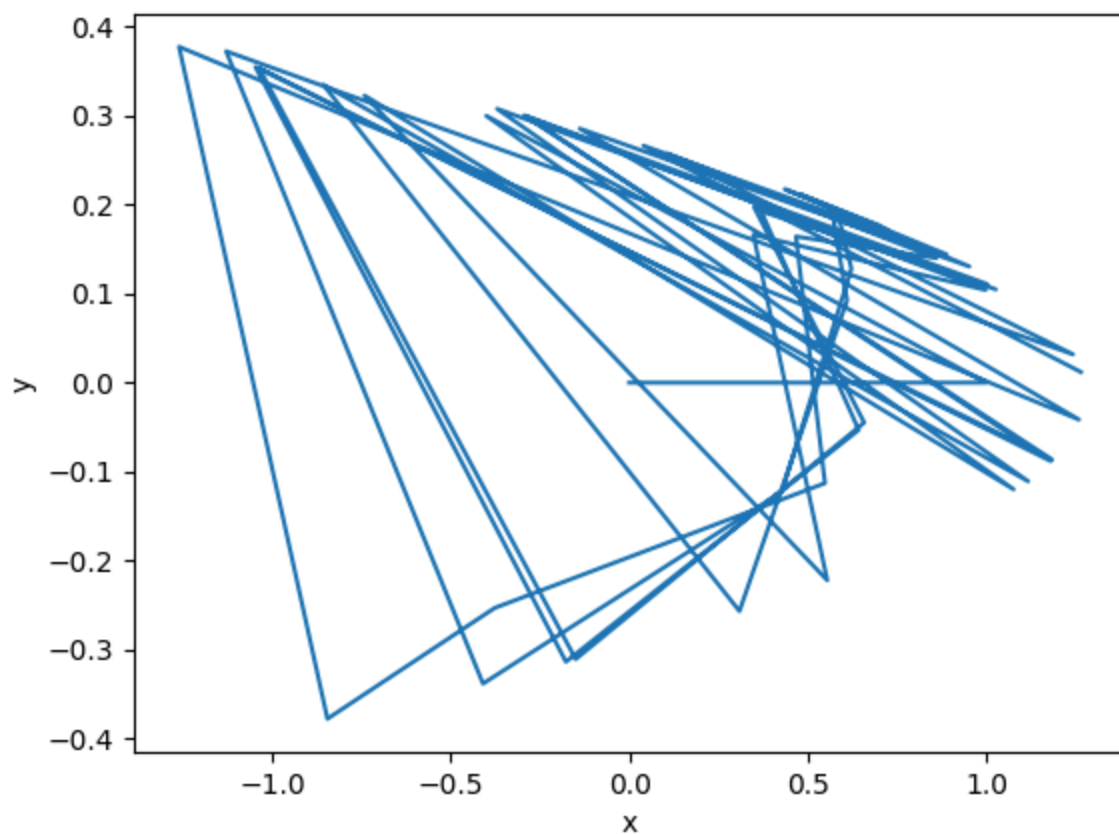
## 代码使用及结果示例

1. 计算 Hénon map 函数的代码文件名为：[henon\\_map1.py](#)，通过输入任意输入  $a$ 、 $b$ 、初始值  $u_0$  以及轨迹长度  $N$ ，可输出厄农映射的轨迹  $[u_0, u_1, \dots, u_N]$ 。其中初始值  $u_0$  的输入中应以空格隔开  $x$ 、 $y$  坐标。

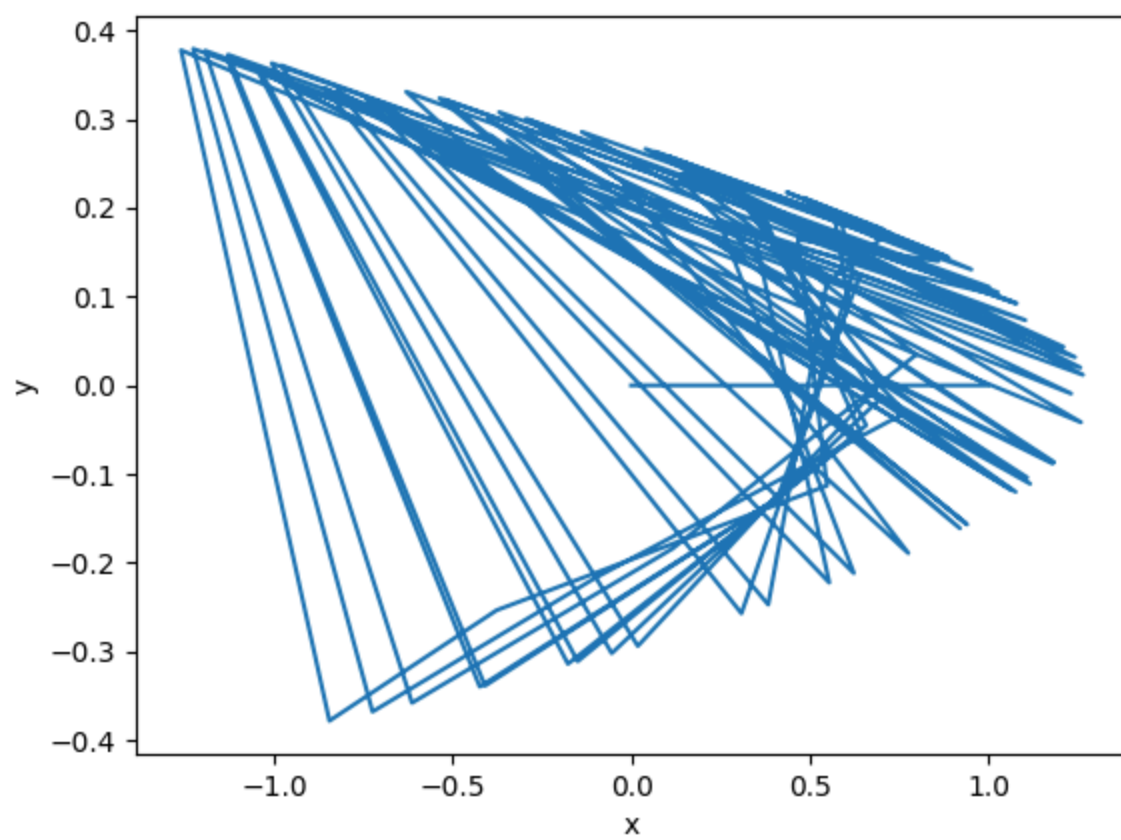
2. 绘制经典 Hénon map 轨迹图的代码文件名为：[henon\\_map2.py](#)，通过输入  $N$  值，即可得到轨迹图。

示例：

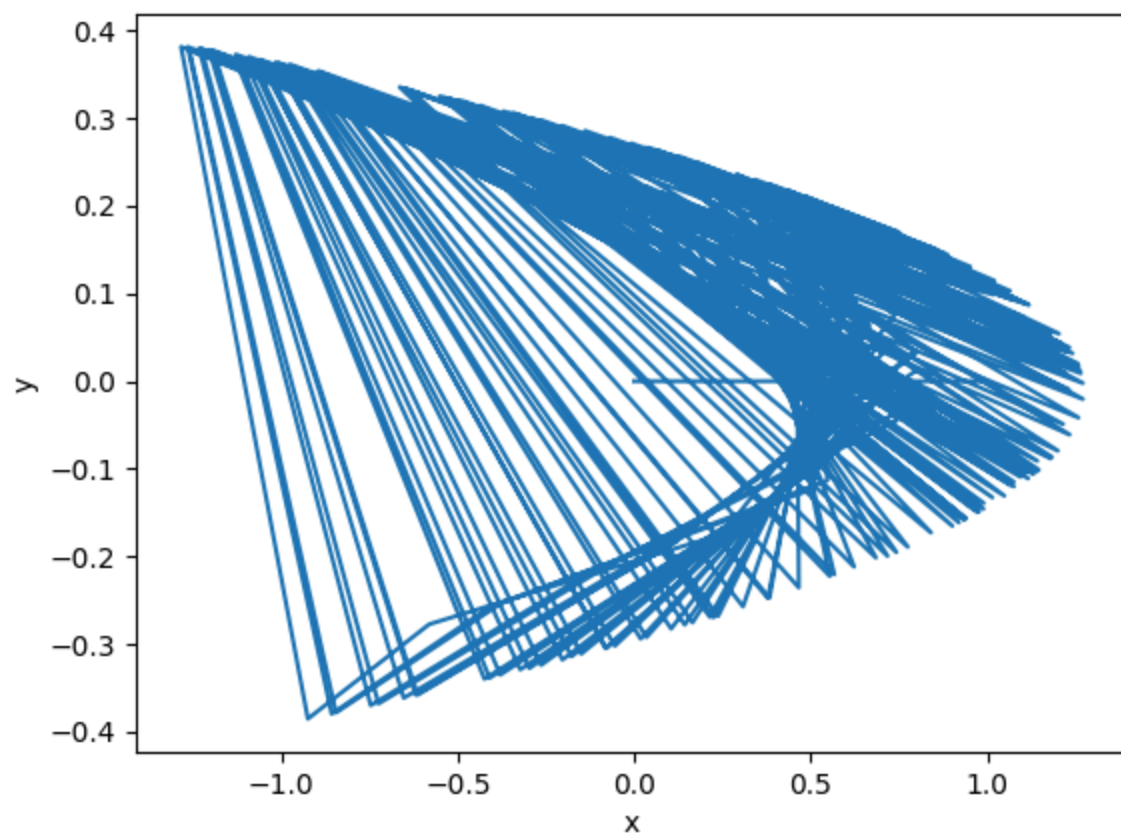
$N = 50$  时的轨迹图



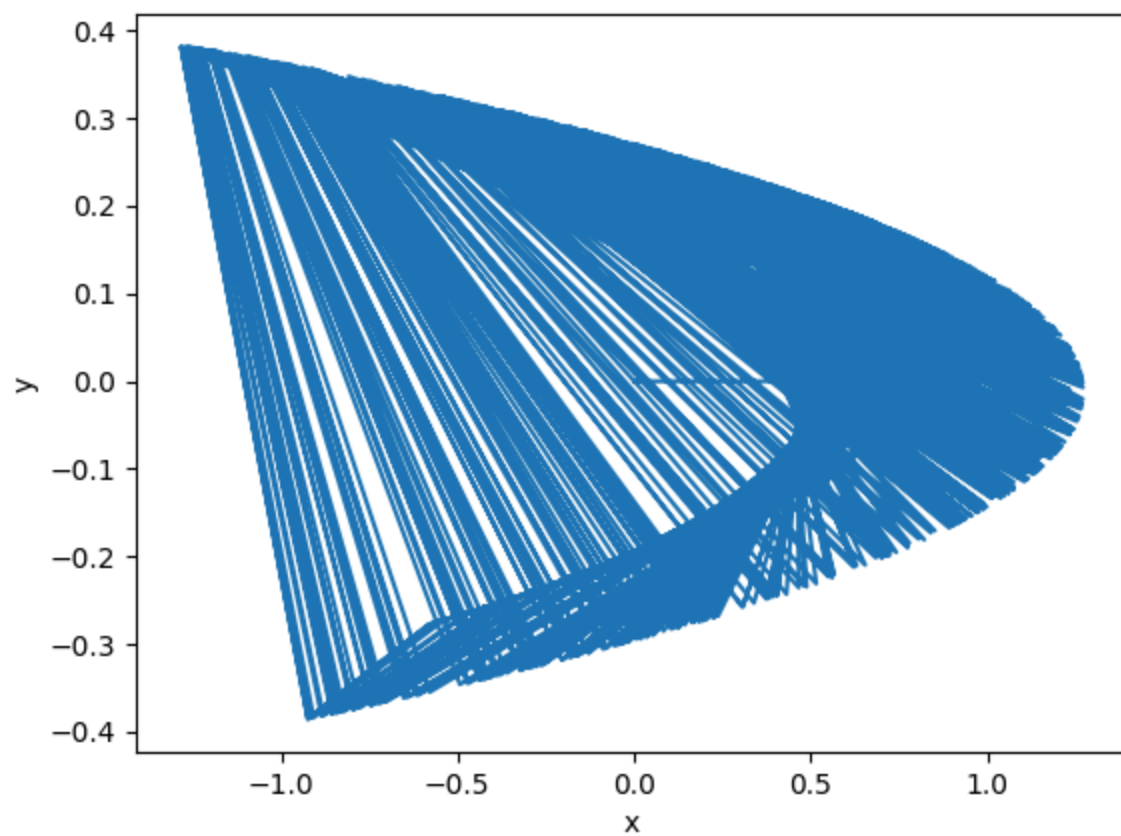
$N = 100$  时的轨迹图



$N = 300$ 时的轨迹图



$N = 1000$ 时的轨迹图

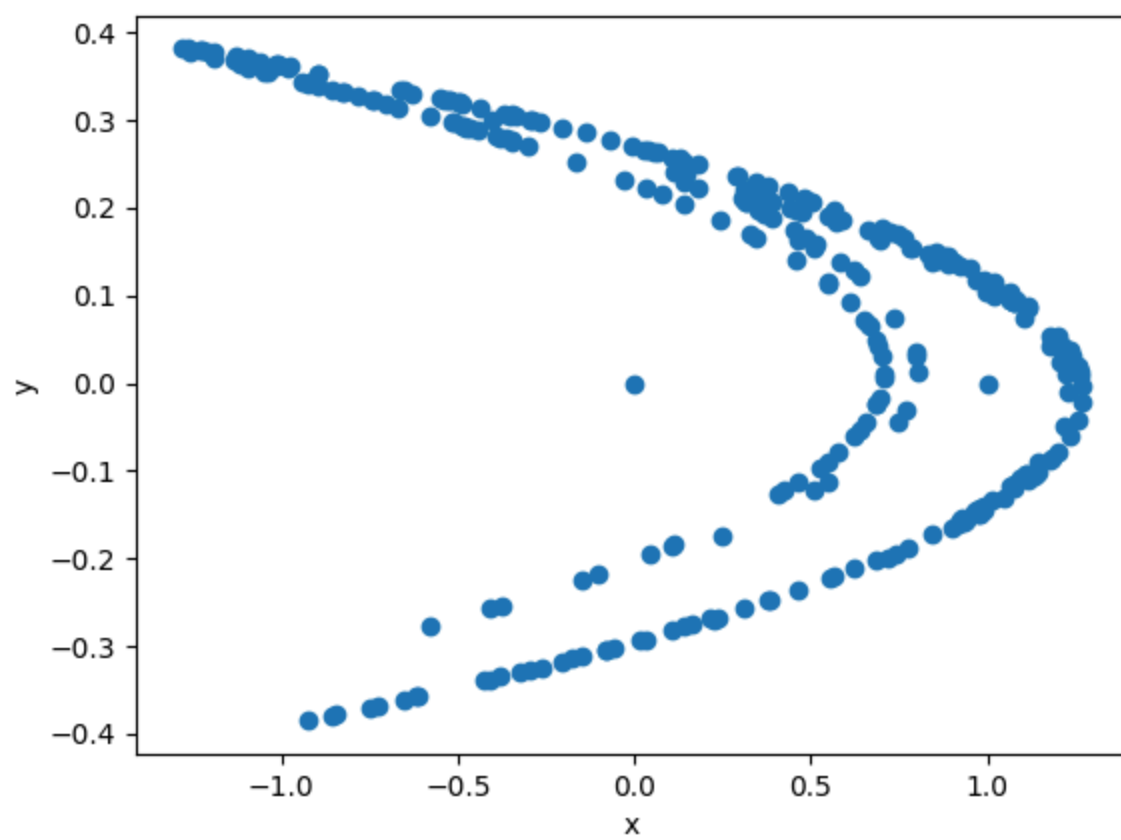


此外如下修改第18行代码，则可以绘制散点图

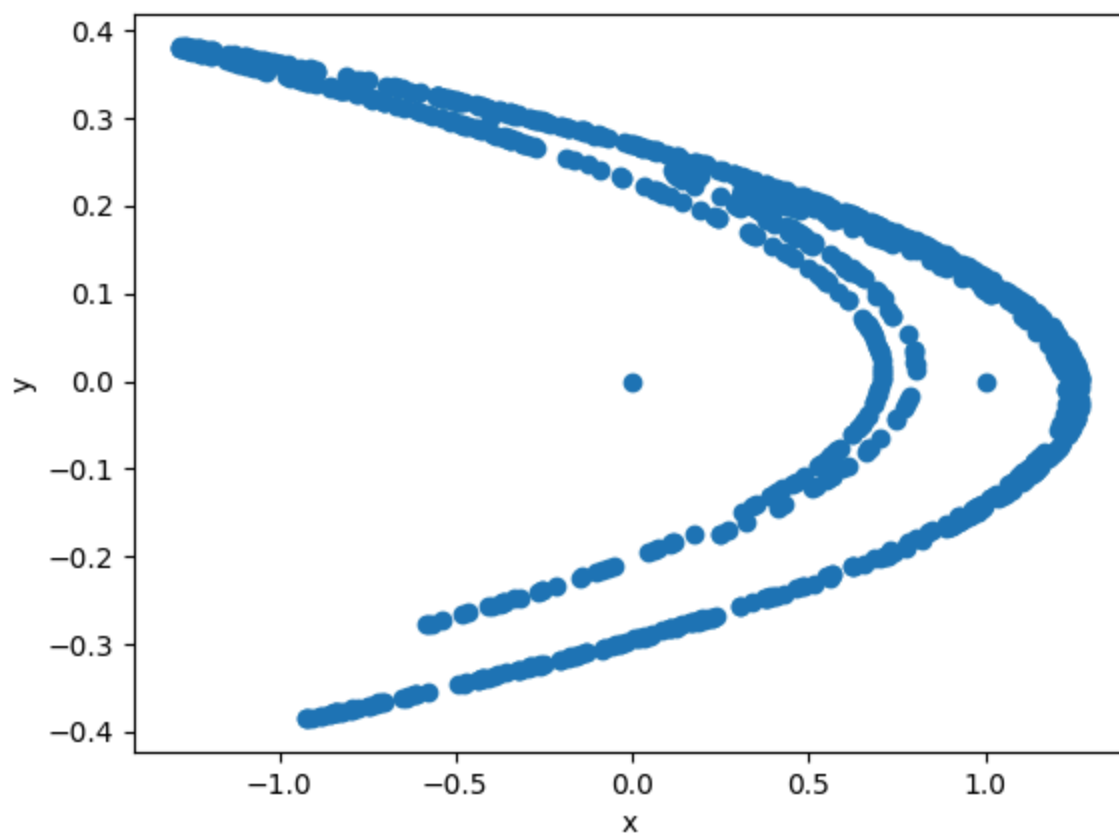
```
plt.scatter(x,y)
```

示例：

$N = 300$ 时的散点图



$N = 1000$ 时的散点图



3.绘制 Hénon map 的 orbit digram 的代码文件名为: [henon\\_map3.py](#), 通过输入  $a$  的最大最小值及步长, 以及  $N$  值, 即可得到 orbit digram 图。

示例:

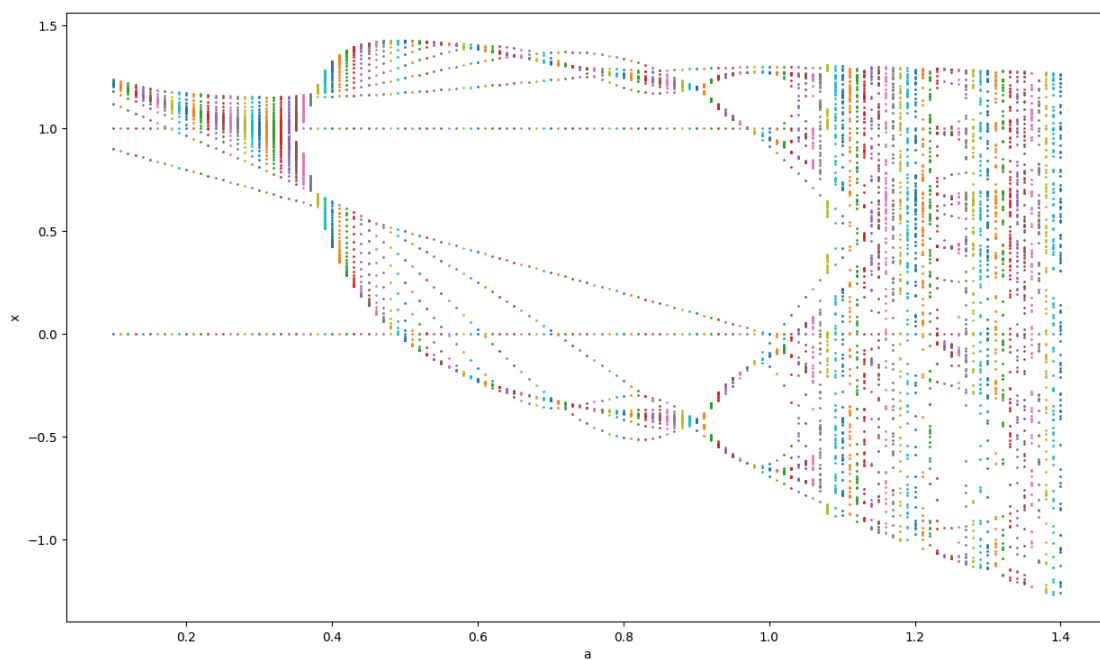
$0.1 \leq a \leq 1.5$ , 步长 0.1,  $N = 50$

![0.1≤a≤1.5,步长0.1, N=50] (3\_0.1-1.5\_50.png)

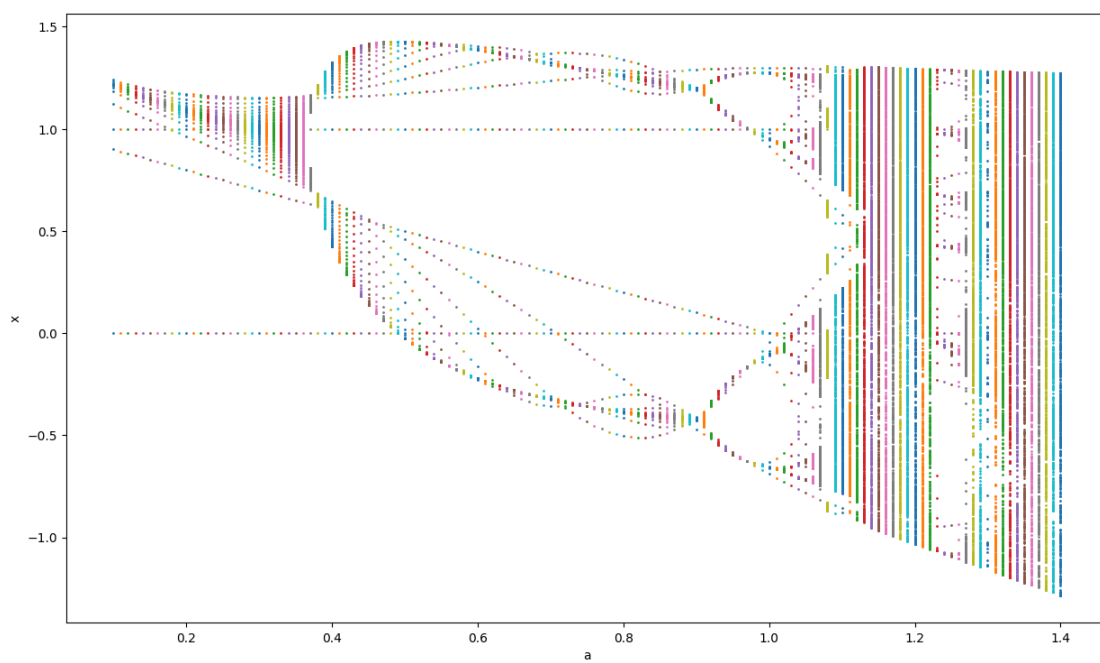
如需更细致观察点的重合情况, 可修改第21行代码如下, 改变  $s$  的值即为调节绘制点的大小。

```
plt.scatter([a]*(N+1),x,s=1)
```

$0.10 \leq a \leq 1.40$ , 步长 0.01,  $N = 100$ ,  $s = 1$



$0.10 \leq a \leq 1.40$ , 步长 0.01,  $N = 1000$ ,  $s = 1$



4. 观察上2张图, 区间 $[0.4, 1.2]$ 可能存在所求  $a$ . 利用3的代码, 不断缩小  $a$  的区间范围和步长, 可得到使轨迹收敛到周期性轨迹的一个  $a$  值, 以此为参数作图的代码文件名为:



[henon\\_map4.py](#), 得到结果如下:

$a=0.8975$ ,  $N=100$ 时的轨迹图

