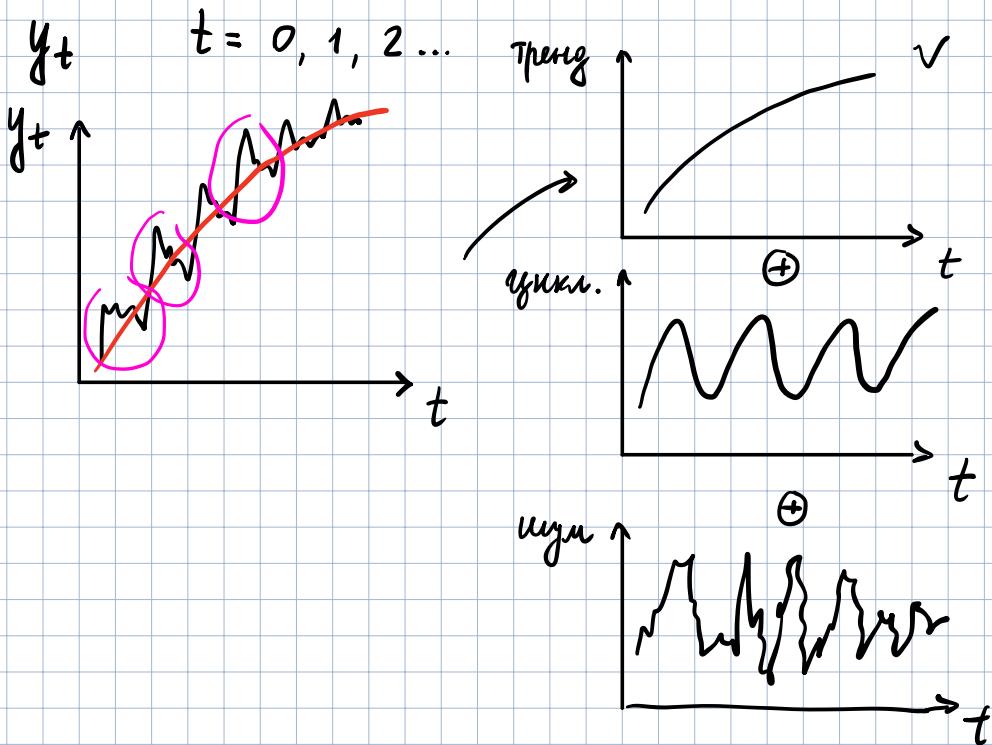
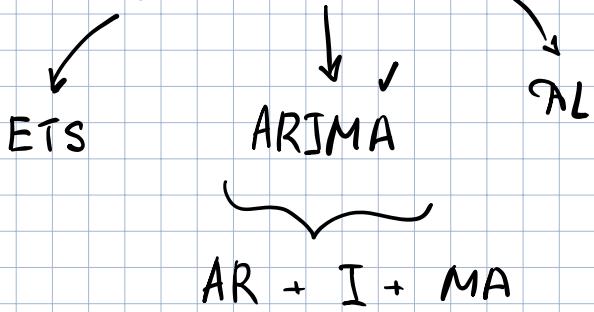


## Временное построение



Как моделировать?



AR( $p$ ) – модель автокоррессии

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$\underbrace{\phantom{y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p}}}_{\text{ст. авт.}}$

$$\text{AR}(1) : y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{AR}(2) : y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

## Стационарность.

$y_t$  - стацин. прог / процесс, если

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu$$

$$\text{Var}(y_t) = \sigma^2$$

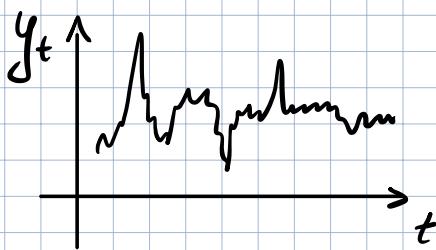
$$\rightarrow \text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \gamma_h \quad \forall t, h$$

Пример: Белый шум (WN)

$$\text{WN: } \mathbb{E}(y_t) = 0$$

$$\text{Var}(y_t) = \sigma^2$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = 0$$



$$y_t = \varepsilon_t \quad - \text{AR}(0) \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad \varepsilon_i \text{ и } \varepsilon_j \text{ незав.}$$

1. Невсе ассоц.

2. Могут раз. со стацин. п.

$y_0, y_1, y_2 \dots$  - врем. прог / процесс

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad - \text{ун-е процесса}$$

$$y_t = 0.7 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad - \text{ун-е процесса}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \text{ и незав.}$$

a)  $\underbrace{y_0 = 5}$

$$y_1 = 3.5 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = 0.7 \cdot 3.5 + 0.7 \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

...

$$\mathbb{E}(y_0) = 5$$

$$\mathbb{E}(y_1) = 3.5$$

не стацин.

$$\text{D) } \underbrace{y_0 = \varepsilon_0}_{\dots} \quad \underbrace{y_1 = 0.7\varepsilon_0 + \varepsilon_1}_{\dots}, \quad \underbrace{y_2 = 0.7 \cdot 0.7\varepsilon_0 + 0.7\varepsilon_1 + \varepsilon_2}_{\dots}$$

$\infty$  кесімдік. проц.

?  $\oplus$  стаци. проц.

Стабилитасы :  $y_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$

Как понять, есть ли у ур-я стаци. реш.?

$$y_{t-1} = L \cdot y_t$$

$$y_{t-2} = L \cdot y_{t-1} = L^2 \cdot y_t$$

$$y_{t-p} = L^p \cdot y_t$$

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$y_t = a_1 L \cdot y_t + \dots + a_p L^p y_t + \varepsilon_t$$

$$(1 - a_1 L - \dots - a_p L^p) y_t = \varepsilon_t \Rightarrow a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p - 1 = 0$$

лац. полином  $z_1, \dots, z_p$  - корни лац. пол.

a) есть хорд для фигуры  $|z_i| = 1 \Rightarrow$  все проц. не стаци.

D)  $|z_i| > 1$  где  $i \Rightarrow \infty$  кесімдік. и ростко 1 стаци. и стаб.

b) есъм ерм  $|z| < 1$  и кога  $|z| = 1$   
 $\Rightarrow \infty$  каскад. и робът 1  
 смаг., не смаг.

$$y_t = 0.7 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = 0.4 \cdot L y_t + \varepsilon_t$$

$$(1 - 0.4L) y_t = \varepsilon_t$$

$$\xrightarrow{1 - 0.4z = 0}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{0.4} = \frac{10}{7}$$

$$y_t = \underbrace{\frac{\varepsilon_t}{1 - 0.4L}}_{q = 0.71} = \varepsilon_t (1 + 0.4L + 0.4^2 L^2 + \dots) =$$

$$= (\varepsilon_t) + \underbrace{0.4 \varepsilon_{t-1}}_{\dots} + \underbrace{0.4^2 \varepsilon_{t-2}}_{\dots} + \dots$$

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$|a_1| < 1 \Rightarrow$  смаг. и смаг.

$|a_1| = 1 \Rightarrow$  смаг. нет

$|a_1| > 1 \Rightarrow$  смаг., но не смаг.

$$MA(q): y_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

Пример: MA(1):  $y_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1}$

MA(6):  $y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^6 b_i \varepsilon_{t-i}$

ARMA(p, q):

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

$\underbrace{\phantom{a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p}}}_{p}$        $\underbrace{\phantom{b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}}}_{q}$

$$y_t = a_1 L y_t + \dots + a_p L^p y_t + \varepsilon_t + b_1 L \varepsilon_t + \dots + b_q L^q \varepsilon_t$$

$$\underbrace{(1 - a_1 L - \dots - a_p L^p)}_{A(L)} y_t = \underbrace{(1 + b_1 L + \dots + b_q L^q)}_{B(L)} \varepsilon_t$$

$A(L)$                            $B(L)$

$$\boxed{A(L) y_t = B(L) \varepsilon_t}$$

$$\boxed{L \cdot y_t \equiv y_{t-1}}$$

AR(1):  $y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$

MA(1):  $y_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1}$

$\downarrow$  (\*)  $A(L)$  и  $B(L)$  не имеют общей корней.

$\Rightarrow$  сн.  $A(L)$

2 способ:

$$\textcircled{1} \quad y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

$\underbrace{\phantom{a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p}}}_{p?}$        $\underbrace{\phantom{b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}}}_{q?}$

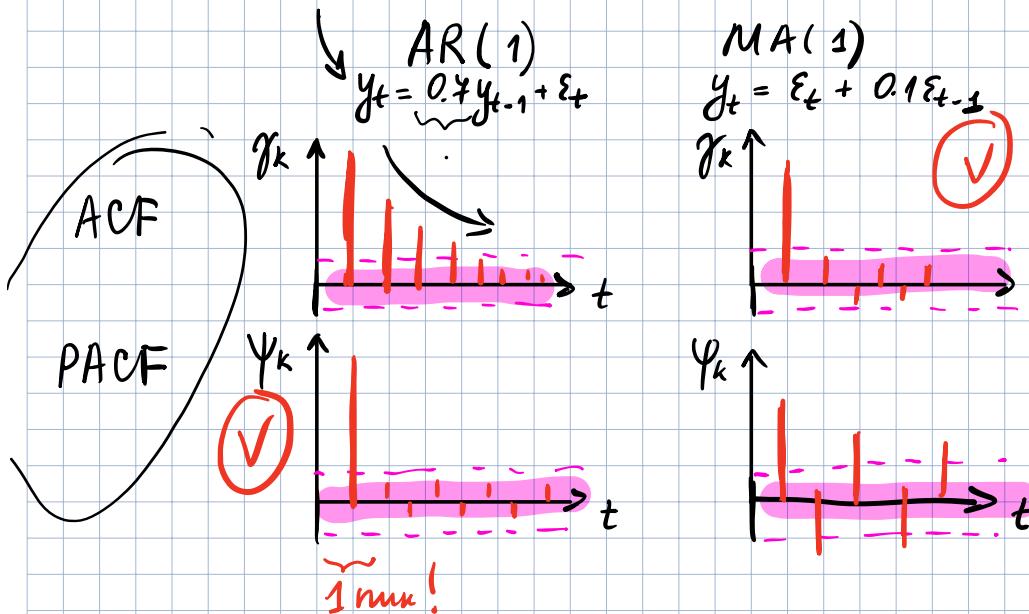
② как наука.  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_q$

① ACF - автокоррел. фн.

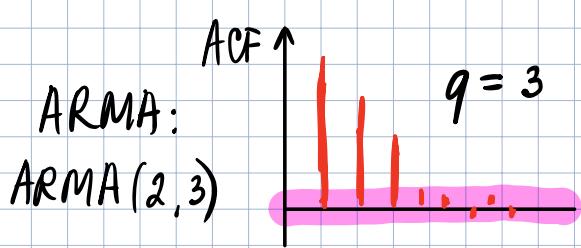
PACF - частн. а/к фн.

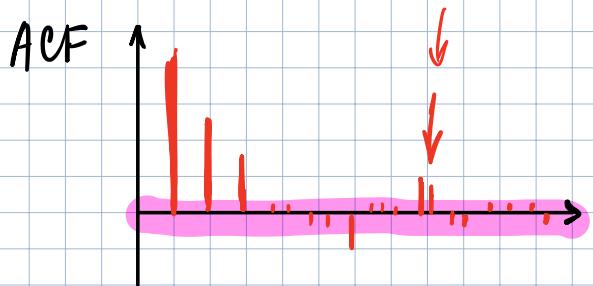
$$ACF(k) : \gamma_k : \boxed{\hat{y}_t = a_0 + \gamma_k y_{t-k}} \text{ MSE}$$

$$PACF(k) : \psi_k : \boxed{\hat{y}_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \dots + (\psi_k) y_{t-k}} \text{ MSE}$$



AR(2): 2 max!





②  $y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_2 \varepsilon_{t-2} + b_3 \varepsilon_{t-3}$

?

?

Max Lik

$$ARMA(p, q) = AR(p)$$

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

MSE  $\rightarrow \min$

Prognozup-e:

$$y_t = 4y_{t-1} + 7y_{t-2} + \varepsilon_t + 8\varepsilon_{t-1} + 9\varepsilon_{t-2}$$

ARMA(2, 2)

$y_1, \dots, y_{100}$

$$\hat{y}_{101} = 4 \cdot \check{y}_{100} + 7 \cdot \check{y}_{99} + \cancel{\varepsilon_{101}} +$$

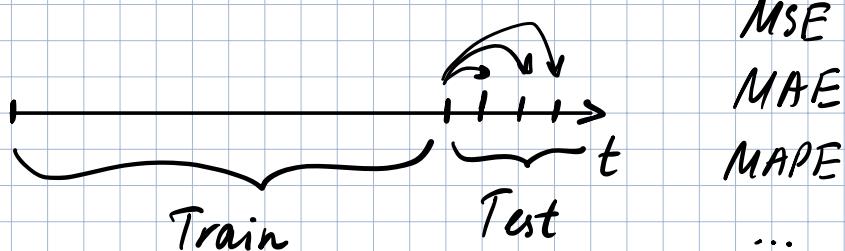
$$+ 8 \hat{\varepsilon}_{100} + 9 \hat{\varepsilon}_{99}$$



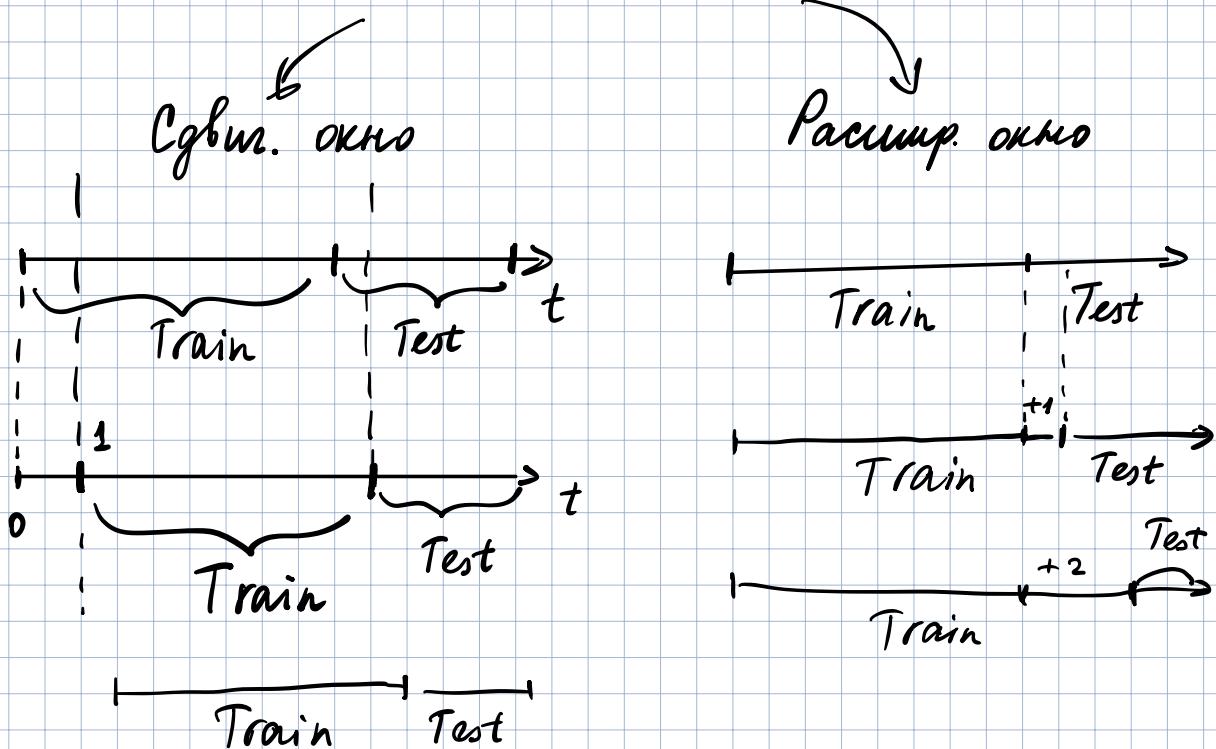
$$y_1 = \hat{\epsilon}_1$$

$$\checkmark y_2 = 4y_1 + \epsilon_2 + 8\hat{\epsilon}_1$$

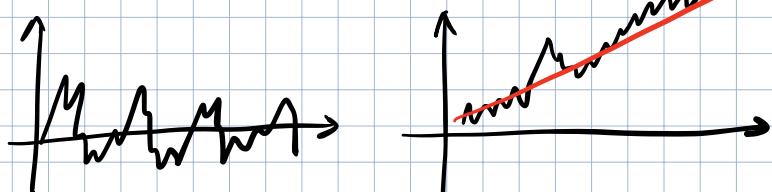
Как оц-мь кар-о модел?



Кросс-вал:



ARIMA(p, d, q)



Детермин. тренд

$$y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

$$\tilde{y}_t = y_t - a_1 t = a_0 + \varepsilon_t$$

Смеш. тренд

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$|a_1| = 1$$

сигр. динам.



$$\tilde{y}_t = \Delta y_t = \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1}$$

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2})$$

неп.линейк разн.

ARIMA ( $p, d, q$ )

→ Dickey-Fuller

→ KPSS