武汉大学计算机学院2006-2007学年第一学期
2005级《离散数学》考试试题

学号：________　　姓名：________　　　　成绩：________

注意：所有答案请一律写在试卷纸上并请注明题目序号！计算题要求有计算过程！

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式：　(10分)

$$P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

二、　(12分，6+6)

(1) 试证明：$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x$Q(x);

(2) 试证明下列结论的有效性(**要求写证明序列**)：
前提：$\forall x(P(x) \vee Q(x))$, 结论：$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$。

三、 设集合$A = \{1, 2, \cdots, 10\}$。定义A上的二元关系"|"，$m|n$表示m整除$n(m, n \in A)$，完成下列各题：　(12分，4+4+4)

(1) 证明$\langle A, |\rangle$是偏序集；

(2) 设$B \subseteq A$，求下列元素（若存在）：

(i) $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$，求B的最大元和极大元；

(ii) $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$，求B的最大下界和最小上界;

(3) 求A的真子集C，使得$\langle C, |\rangle$是全序集，且使$|C|$为满足上述条件的最大值。

四、 设集合$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{a, b, c\}$，设$B^A = \{f \mid f : A \longrightarrow B\}$，设$X = \{f \big| f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{a, b\}\}$，$Y = \{f \big| f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{b, c\}\}$，$Z = \{f \big| f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{a, c\}\}$，$T = \{f \big| f \in B^A \wedge f$是满射$\}$　(16分，4+4+4+4)

(1) 试求$\big|B^A\big|$，$\big|X\big|$，$\big|Y\big|$和$\big|Z\big|$；

(2) 试用枚举法表示集合$X \cap Y, Y \cap Z$和$Z \cap X$；

(3) 证明：$T = B^A - (X \cup Y \cup Z)$；

(4) 试利用容斥原理求$\big|T\big|$；

五、 设$\langle G,*,e\rangle$是一个群，并且对群G中的任意两个元素a和b有: $(a*b)^3=a^3*b^3$: (18分，每小题3分)

(1) 试证明：$\forall a,b\in G$, $(a*b)^2=b^2*a^2$;

(2) 试证明：$\forall a,b\in G$, $a^3*b^2=b^2*a^3$;

(3) 试证明: 如果$c\in G$并且$|c|=n$，则$c^{n+1}=c$;

(4) 设$c\in G$, $\big|c\big|=5$, 则$\forall x\in G$, $c*x^2=x^2*c$;

(5) 设c如上题所述，则$\forall x\in G$, $c*x^3=x^3*c$;

(6) 设c如题(4)所述，则$\forall x\in G$, $c*x=x*c$。

六、 设$\langle G,*,e_G\rangle$和$\langle H,\cdot,e_H\rangle$是两个群, $h:G\longrightarrow H$是群G到群H的同态, 记h的同态核为$N=\{\,a\,|\,a\in G\wedge h(a)=e_H\,\}$, 设$K$是$G$的子群，试证明： (12分，6+6)

(1) $h^{-1}(h(K))=KN$, 其中, $KN=\{\,k*n\,|\,k\in K\wedge n\in N\,\}$;

(2) $h^{-1}(h(K))=K$, 当且仅当, N是K的子群。

七、 $G=\langle V,E\rangle$，G为简单连通平面图，$|V|=6$，$|E|=12$，证明：G的每个区域均由3条边围成。 (10分)

八、 设有向树T有17条边，12片树叶，4个4度内点（即入度为1出度大于0的顶点），1个3度内点，求T的树根的度数。 (10分)