武汉大学计算机学院2007-2008学年第一学期 2006级《离散数学》考试试题

学号：__________ 姓名：__________ 成绩：__________

注意：所有答案请一律写在试卷纸上并请注明题目序号！计算题要求有计算过程！

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

二、 试证明下列结论的有效性(**要求写证明序列**)： (12分，6+6)

(1) 前提：$P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q$, $P \to R$, $R \to \neg S$, 结论：$S \to Q$;

(2) 前提：$\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge R(x))$, $\exists x P(x)$, 结论：$\forall x Q(x) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x))$。

三、 设集合$A = \{0,1,2,3\}$，设A上的二元关系$\mathcal{R} = \{\langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 1,2\rangle\}$：(12分，4+4+4)

(1) 试问$\mathcal{R}$是否为自反关系，反自反关系，对称关系，反对称关系和传递关系；

(2) 试求集合$\mathcal{B} = \{\, S \mid S\text{是}A\text{上的偏序关系}, \text{且}\mathcal{R} \subseteq S \,\}$的基数；

(3) 试分别求出集合A上的对称关系和反对称关系的总数。

四、 设$\langle G, *\rangle$是一个群，$\mathcal{R}$是G上的二元关系，$\mathcal{R} = \{\langle x,y\rangle \mid \exists a \in G$, 使得 $y = a * x * a^{-1}\}$，试证明：R是G上的等价关系。 (6分)

五、 设集合$N_9 = \{0,1,2,\cdot,7,8\}$, $+_9$是模9加法，则$\langle N_9, +_9\rangle$是一个阶数为9的循环群： (14分，5+5+4)

(1) 试求群N_9所有的子群；

(2) 试求群N_9每个元素的阶数；

(3) 试求群N_9所有的生成元。

六、 设$G = \{\, f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ax + b, \text{其中}: a,b \in \mathbb{R},\ \text{且}a \neq 0 \,\}$: (24分，每小题4分)

(1) 试证明：$\langle G, \circ\rangle$是一个群, 其中$\circ$是函数的合成运算;

(2) 设$N = \{ f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + b,$其中:$b \in \mathbb{R}\}$, 试证明$\langle N, \circ\rangle$ 是G的子群;

(3) 试证明: N是S的正规子群; (**提示**: 证明$\forall f \in G, fNf^{-1} \subseteq N$)

(4) 试用性质法表示商群G/N。

(5) 设$\mathbb{R}_+$是非零实数集合, 则$\langle \mathbb{R}_+, \times\rangle$构成一群, 设函数$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $\varphi(f) = a$, 其中$f(x) = ax + b$, 试证明函数φ是群$\langle G, \circ\rangle$到群$\langle \mathbb{R}_+, \times\rangle$上的满同态(满射+同态);

(6) 试证明G/N与$\mathbb{R}_+$同构。

七、 设G是6个结点的简单无向图，证明：G含有一个K_3子图，或者G的补图含有一个K_3子图。 (6分)

八、 完全二元树是每个结点的出度恰好等于2或者0的有向树。试证明：若完全二元树的树叶数为l，边数为m，则$m = 2(l - 1)$。(10分)

九、 试证明下图不是平面图： (6分)