武汉大学计算机学院
2010-2011学年第一学期2009级
《离散数学》期末考试试卷（A）

姓名：__________ 学号：______________ 专业：______________

(注：①考试时间为120分钟；②所有的解答必须写在答题纸上。)

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$(P \leftrightarrow Q) \to R$$

二、 写出下列结论的证明序列： (16分，8+8)

(1) 前提：$\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S)$, $(Q \to P) \vee \neg R$, R.
结论：$P \leftrightarrow Q$;

(2) 前提：$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$, $\forall x(Q(x) \vee R(x))$, $\exists x \neg R(x)$.
结论：$\exists x \neg P(x)$.

三、 偏序集$\langle \{2,4,6,9,12,18,27,36,48,72\}, | \rangle$, $m \mid n$当且仅当m整除n. 完成下列各题 (15分，5+5+5)

(1) 求极大元素和极小元素；

(2) 求子集$\{48,72\}$的所有下界和最大下界；

(3) 证明：偏序集$\langle P, \leqslant \rangle$, 若$a$是$P$的最大元素，则$P$仅有一个极大元素。

四、 设A为非空集合，$A^A = \{ f \mid f : A \to A \}$，关系$\mathcal{R} \subseteq A^A \times A^A$, $\forall f, g \in A^A$, $f \,\mathcal{R}\, g \Leftrightarrow f(A) = g(A)$, 完成下列各题：(15分, 9+3+3)

(1) 证明$\mathcal{R}$是A^A上的等价关系；

(2) 若$|A| = n$, 求$|[\mathbb{1}_A]_{\mathcal{R}}|$, 其中$\mathbb{1}_A$是集合$A$上的恒等变换；

(3) 证明：集合$A^A/\mathcal{R}$和集合$2^A - \{\varnothing\}$存在双射.

五、 设$\langle S_n, \circ \rangle$是$n$次对称群，其中$S_n$是集合$\{1,2,\ldots,n\}$上所有置换的集合，$\circ$是函数的合成运算. 设$H \subseteq S_n$, $H = \{\pi \mid \pi \in S_n$,且$\pi$是保持元素1不变的置换$\}$: (12分, 8+4)

(1) 证明H是S_n的子群;

(2) 设P为H在S_n中的所有左陪集组成的集合，用性质法描述集合P, 并求$|P|$.

六、循环群$\langle N_m, +_m\rangle$，其中$N_m = \{0, 1, \ldots m-1\}(n \in \mathbb{N}, m > 0)$, $a +_m b = (a+b) \mod m$，完成下列各题：　(16分，6+2+6+2)

(1) 求$\langle N_6, +_6\rangle$的所有子群；

(2) 求$\langle N_6, +_6\rangle$到$\langle N_5, +_5\rangle$的所有同态；

(3) 设h是$\langle N_m, +_m\rangle$到$\langle N_k, +_k\rangle$上的同态，证明$h(N_m)$是N_k的循环子群;

(4) 证明$N_m \simeq N_k(m \geqslant k)$，当且仅当$k \mid m$.

七、简单无向图$G(n, m)$, 其中顶点数n为奇数. 证明：图G中奇数度数顶点的个数与图$\overline{G}$中奇数度数的顶点个数相等.　(8分)

八、设$G = \langle V, E\rangle$是无向连通图. 边$e \in E$称为桥边，当且仅当G删除边e后不再连通. 证明: e是桥边，当且仅当e属于图G的每颗生成树.　(8分)