第3章　动态规划

回顾：动态规划法 .VS. 分治法

- 动态规划法的实质也是将较大问题分解为较小的同类子问题，这一点上它与分治法类似。
- 分治法的子问题相互独立，相同的子问题被重复计算。
- 动态规划法利用问题的最优子结构特征，设计自底向上的计算过程，通过从子问题的最优解逐步构造出整个问题的最优解，避免重复计算。

回顾：动态规划基本步骤

- 设计一个动态规划算法，通常可以按以下几个步骤进行：
- **找出最优解的性质，并刻划其结构特征。**
- **递归地定义最优值。**
- **计算出最优值，通常采用自底向上的方式。**
- **根据计算最优值时得到的信息，构造最优解。**

3.7 图像压缩

在计算机中，常用像素点的灰度值序列$\{p_1,p_2,\ldots\ldots p_n\}$表示图像。其中整数$p_i$,$1<=i<=n$，表示像素点i的灰度值。通常灰度值的范围是0~255。因此最多需要8位表示一个像素。

- 一张分辨率为640 x 480的图片，那它的像素就达到了307200，也就是人们常说的30万像素

动机

- 图像由像素点构成，分辨率高，像素多，图像处理需要大的存储空间和高的处理速度，解决办法---图像压缩

- 压缩方法
- 前提:图片中连续区域中像素点的灰度值是接近的

方法:分段存储，值小，位数少，值大，位数多

图象的变位压缩存储格式将所给的像素点序列 $\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$, $0\le p_i\le 255$分割成m个连续段$S_1,S_2,\ldots,S_m$。

S_i：第i个像素段$(1\le i\le m)$
$l[i]$：第i段中像素个数
b[i]：第i段中每个像素位数

分段的过程就是要找出断点，让一段里面的像素的最大灰度值比较小，那么这一段像素(本来需要8位)就可以用较少的位(比如7位)来表示，从而减少存储空间。

设 $t[i]=\sum_{k=1}^{i-1} l[k]$ 则第i个像素段Si为

$$S_i=\{p_{t[i]+1},\cdots,p_{t[i]+l[i]}\}$$

图像压缩

本题中， $0 \le p_i \le 255$ ， 因此b[i]≤8，即需要用3位表示b[i]，如果限制每段不超过255个像素，即1≤l[i]≤255，则需要用8位表示l[i]。因此，第i个像素段所需的存储空间为l[i]*b[i]+8+3= l[i]*b[i]+11位。

按此格式存储像素序列$\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$，需要 $\sum_{i=1}^{m} l[i]*b[i]+11m$ 位的存储空间。

例:灰度值序列

P=<10,12,15,255,1,2,1,1,2,2,1,1>

分法1: S1=<10,12,15>，S2=<255>，S3=<1,2,1,1,2,2,1,1>

分法2: S1=<10,12,15,255,1,2,1,1,2,2,1,1>

分法3: 分成12组，每组一个数

存储空间

分法1: (4*3+11)+(8*1+11)+(2*8+11)=69

分法2: 11x1+8x12=107

分法3: 11x12+4x3+8x1+1x5+2x3=163

结论: 分法1是其中最优的分法。怎么获得最优分段?

图象压缩问题要求确定像素序列$\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$的最优分段，使得依此分段所需的存储空间最少。每个分段的像素不超过256个。

图像压缩

设$l[i]$，b[i]， $1\le i\le m$ ， 是$\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$的最优分段。显而易见$l[1]$,b[1]是$\{p_1,\ldots,p_{l[1]}\}$的最优分段， 且$l[i]$，b[i]， $2\le i\le m$是$\{p_{l[1]+1},\ldots,p_n\}$ 的最优分段。即图象压缩问题满足最优子结构性质。

设s[i]，$1\le i\le n$，是象素序列$\{p_1,\ldots,p_i\}$的最优分段所需的存储位数，**则s[i]为前i-k个的存储位数（已算过，是s[i-k]）加上后k个的存储位数（需再计算）**。由最优子结构性质易知：

$$s[i]=\min_{1\le k\le \min\{i,256\}}\{s[i-k]+k*b\max(i-k+1,i)\}+11$$

其中 $b\max(i,j)=\left\lceil \log\left(\max_{i\le k\le j}\{p_k\}+1\right)\right\rceil$ 为p_i到p_j中，最大的值需要的比特位数。

例：4，6，5，7，129，138，1的最优分段

$$s[1]=3+11=14 \qquad l[1]=1 \qquad b[1]=3$$

$$s[2]=\min\begin{cases} s[0]+2\times 3+11 \\ s[1]+3+11 \end{cases}=\min\{17,28\}=17 \qquad l[2]=2 \qquad b[2]=3$$

$$s[3]=\min\begin{cases} s[0]+3\times 3+11 \\ s[1]+2\times 3+11 \\ s[2]+3+11 \end{cases}=\min\{20,31,31\}=20 \qquad l[3]=3 \qquad b[3]=3$$

$$s[4]=\min\begin{cases} s[0]+4\times 3+11 \\ s[1]+3\times 3+11 \\ s[2]+2\times 3+11 \\ s[3]+3+11 \end{cases}=\min\{23,34,34,34\}=23 \qquad l[4]=4 \qquad b[4]=3$$

例：4，6，5，7，129，138，1的最优分段

$$s[5] = \min\{51, 57, 52, 47, 42\} = 42 \qquad l[5] = 1 \qquad b[5] = 8$$

$$s[6] = \min\{59, 65, 60, 55, 50, 61\} = 50 \qquad l[6] = 2 \qquad b[6] = 8$$

$$s[7] = \min\{67, 73, 68, 63, 58, 69, 62\} = 58$$

$$l[7] = 3 \qquad b[7] = 8$$

算法复杂度分析：
由于算法**compress**中对k的循环次数不超过256，故对每一个确定的i，可在时间O(1)内完成的计算。因此整个算法所需的计算时间为O(n)。

```
void Compress(int n, int p[], int s[], int l[], int b[])  //令s[i]为前i个段最优合并的存储位数
{
   int Lmax = 256, header = 11;
   s[0] = 0;
   for(int i=1; i<=n; i++)  //i表示前几段
   {
      b[i] = length(p[i]); //计算像素点p需要的存储位数
      int bmax = b[i];
      s[i] = s[i-1] + bmax;  //故下面j从2开始
      l[i] = 1;
      for(int j=2; j<=i && j<=Lmax; j++)
      //递推关系:s[i]=  min {s[i-j]+ lsum(i-j+1,i)*bmax(i-j+1,i) } + 11
      {
         if(bmax < b[i-j+1])
            bmax = b[i-j+1];
         if(s[i] > s[i-j] + j*bmax)
         //因为一开始所有序列并没有分段,所以可以看作每一段就是一个数,故lsum(i-j+1, i) = j;
         {
            s[i] = s[i-j] + j*bmax;
            l[i] = j;
             //最优断开位置,l[i]表示前i段的最优分段方案中应该是在i-j处断开
             //比如l[5] = 3,这表示前五段的最优分段应该是(5-3=2)处断开,s[5] = s[2] + 3*bmax
             //即 12 | 345,以此类推,得到l[n];之后构造最优解时再由l[n]向前回溯
         }
      }
      s[i] += header;
   }
}
```

3.9 流水作业调度

n个作业{1，2，…，n}要在由2台机器M_1和M_2组成的流水线上完成加工。每个作业加工的顺序都是先在M_1上加工，然后在M_2上加工。M_1和M_2加工作业i所需的时间分别为a_i和b_i。

流水作业调度问题要求确定这n个作业的最优加工顺序，使得从第一个作业在机器M_1上开始加工，到最后一个作业在机器M_2上加工完成所需的时间最少。

3.9 流水作业调度

分析：

•直观上，**一个最优调度应使机器M_1没有空闲时间，且机器M_2的空闲时间最少**。在一般情况下，机器M_2上会有机器空闲和作业积压2种情况。

•设全部作业的集合为N={1，2，…，n}。$S \subseteq N$是N的作业子集。在一般情况下，机器M1开始加工S中作业时，机器M_2还在加工其它作业，要等时间t后才可利用。将这种情况下完成S中作业所需的最短时间记为T(S,t)。流水作业调度问题的最优值为T(N,0)。

3.9 流水作业调度

设有3个作业

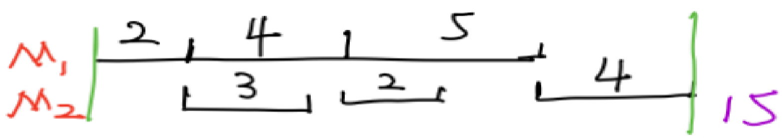
i	1	2	3
a_i	2	4	5
b_i	3	2	4

那么根据排列组合知识 按作业序号有

123，132，213，231，312，321共6种情况

选择123，321这两种情况来说明

123:

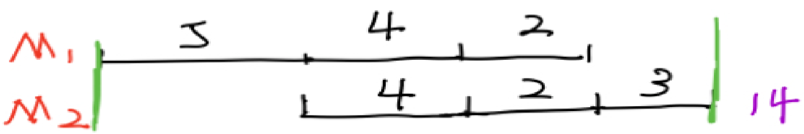


$T(\{1,2,3\},0)$

$T(\{2,3\},3)$

$T(\{3\},2)=9$

321:



$T(\{3,2,1\},0)$

$T(\{2,1\},4)$

$T(\{1\},2)=5$

流水作业调度

设π是所给n个流水作业的一个最优调度，它所需的加工时间为$a_{\pi(1)}$+T’。其中T’是在机器M_2的等待时间为$b_{\pi(1)}$时，安排作业π(2)，…，π(n)所需的时间。

记S=N-{π(1)}，则有$T' = T(S, b_{\pi(1)})$。

证明：事实上，由T的定义知$T' \geq T(S, b_{\pi(1)})$。若$T' > T(S, b_{\pi(1)})$，设π’是作业集S在机器M_2的等待时间为$b_{\pi(1)}$情况下的一个最优调度。则π(1)，π’(2)，…，π’(n)是N的一个调度，且该调度所需的时间为$a_{\pi(1)} + T(S, b_{\pi(1)}) < a_{\pi(1)} + T'$。这与π是N的最优调度矛盾。故$T' \leq T(S, b_{\pi(1)})$。从而$T' = T(S, b_{\pi(1)})$。这就证明了流水作业调度问题具有最优子结构的性质。

由流水作业调度问题的最优子结构性质可知，

$$T(N,0) = \min_{1 \leq i \leq n} \{a_i + T(N - \{i\}, b_i)\}$$

$$T(S,t) = \min_{i \in S} \{a_i + T(S - \{i\}, b_i + \max\{t - a_i, 0\})\}$$

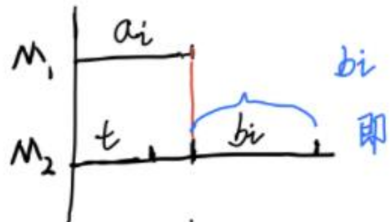
选定作业i为S中第一个加工作业之后，在机器M_2上开始对S-{i}中的作业进行加工之前，所需要的等待时间为$b_i + \max\{t-a_i,0\}$。

原因：若M_2在开始加工S中的作业之前需等待t个时间单位，且$t > a_i$，则作业i在M_1上加工完毕（需时a_i）之后，还要再等$t-a_i$个时间单位才能开始在M_2上加工；若$t \le a_i$，则作业i在M_1上加工完毕之后，立即可以在M_2上加工，等待时间为0。故M_2在开始对S-{i}中的作业进行加工之前，所需要的等待时间为$t' = b_i + \max\{t-a_i,0\}$。（$b_i$是作业i在$M_2$上加工所需的时间）。所以，假定$a_i$为已知的使得T(S,t)值最小的第一个执行的作业，可以得到

$$T(S,t)= a_i+ T(S-\{i\}, b_i + \max\{t-a_i,0\})$$

$T(S,t)$：M_1开始加工S中的作业i时，M_2要等待t时后可利用

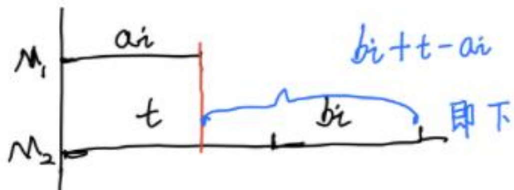
情形1：$a_i > t$



即下一个作业开始时 M_2要等b_i时间后才可以利用

则 $T(S,t) = \{a_i + T(S-\{i\}, b_i)\}$，$i \in S$ ①

情形2：$a_i < t$



即下一个作业开始 M_2要等 $b_i + t - a_i$时间后才可以利用

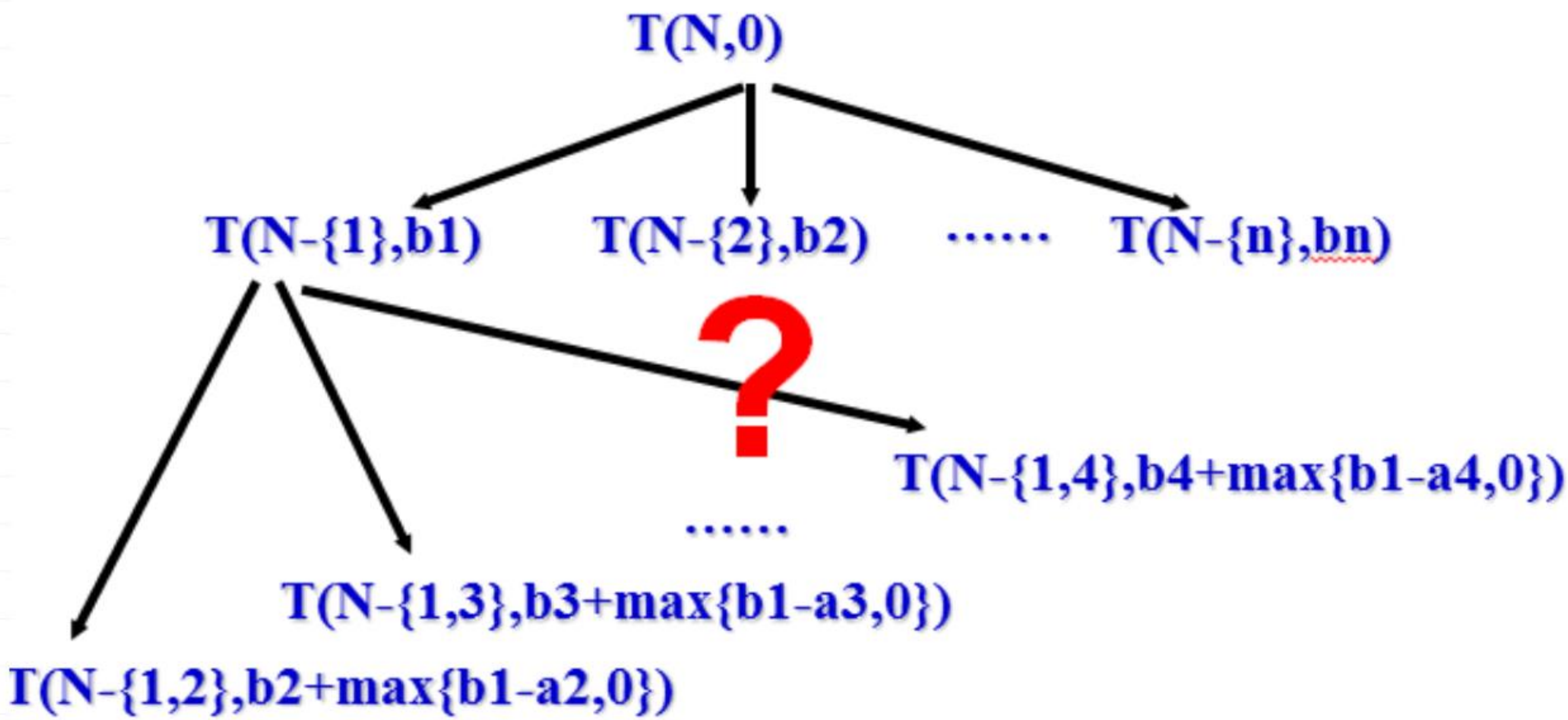
则 $T(S,t) = \{a_i + T(S-\{i\}, b_i + t - a_i)\}$ $i \in S$ ②

综合①②得

$$T(S,t) = \{a_i + T(S-\{i\}, b_i + \max(t-a_i, 0))\}$$

流水作业调度问题

- 子问题重叠性质



虽然满足最优子结构性质，也在一定程度满足子问题重叠性质。N的每个非空子集都计算一次，共2^n-1次，指数级的。
为了解决这个问题引入**Johnson不等式**

Johnson不等式

对递归式的深入分析表明，算法可进一步得到简化。

设π是作业集S在机器M_2的等待时间为t时的任一最优调度。若π(1)=i, π(2)=j。则由动态规划递归式可得:

$T(S,t)=a_i+T(S-\{i\},b_i+\max\{t-a_i,0\})=a_i+a_j+T(S-\{i,j\},t_{ij})$

其中，

$$
\begin{aligned}
t_{ij} &= b_j + \max\{b_i + \max\{t-a_i,0\} - a_j, 0\} \\
&= b_j + b_i - a_j + \max\{\max\{t-a_i,0\}, a_j - b_i\} \\
&= b_j + b_i - a_j + \max\{t-a_i, a_j - b_i, 0\} \\
&= b_j + b_i - a_j - a_i + \max\{t, a_i + a_j - b_i, a_i\}
\end{aligned}
$$

如果作业i和j满足$\min\{b_i,a_j\}\geq\min\{b_j,a_i\}$，则称作业i和j满足**Johnson**不等式。

流水作业调度的Johnson法则

$$t_{ij}=b_j+b_i-a_j-a_i+\max\{t,a_i+a_j-b_i,a_i\}$$

交换作业i和作业j的加工顺序，得到作业集S的另一调度，它所需的加工时间为T'(S,t)=a_i+a_j+T(S-{i,j},t_{ji})

其中，$t_{ji}=b_j+b_i-a_j-a_i+\max\{t,a_i+a_j-b_j,a_j\}$

当作业i和j满足Johnson不等式时，有

$$\max\{-b_i,-a_j\}\le\max\{-b_j,-a_i\}$$

$$a_i+a_j+\max\{-b_i,-a_j\}\le a_i+a_j+\max\{-b_j,-a_i\}$$

$$\max\{a_i+a_j-b_i,a_i\}\le\max\{a_i+a_j-b_j,a_j\}$$

$$\max\{t,a_i+a_j-b_i,a_i\}\le\max\{t,a_i+a_j-b_j,a_j\}$$

由此可见当作业i和作业j满足Johnson不等式时，交换它们的加工顺序后，会增加加工时间。对于流水作业调度问题，必存在最优调度π，使得任意i，作业π(i)和π(i+1)满足Johnson不等式。进一步还可以证明，调度满足Johnson法则当且仅当对任意i<j有

$$\min\{b_{\pi(i)},a_{\pi(j)}\}\ge\min\{b_{\pi(j)},a_{\pi(i)}\}$$

由此可知，**所有满足Johnson法则的调度均为最优调度。**

算法描述

流水作业调度问题的Johnson算法

(1)令 $N_1=\{i \mid a_i<b_i\}, N_2=\{i \mid a_i \geq b_i\};$

(2)将N_1中作业依a_i的非减序排序；将N_2中作业依b_i的非增序排序;

(3)N_1中作业接N_2中作业构成满足Johnson法则的最优调度。

算法复杂度分析：

算法的主要计算时间花在对作业集的排序。因此，在最坏情况下算法所需的计算时间为O(nlogn)。所需的空间为O(n)。

假设有5个作业

a_i	5	3	6	4	8	9	6
b_i	2	4	7	2	9	7	3

绿色在集合 N_1 中 $a_i < b_i$

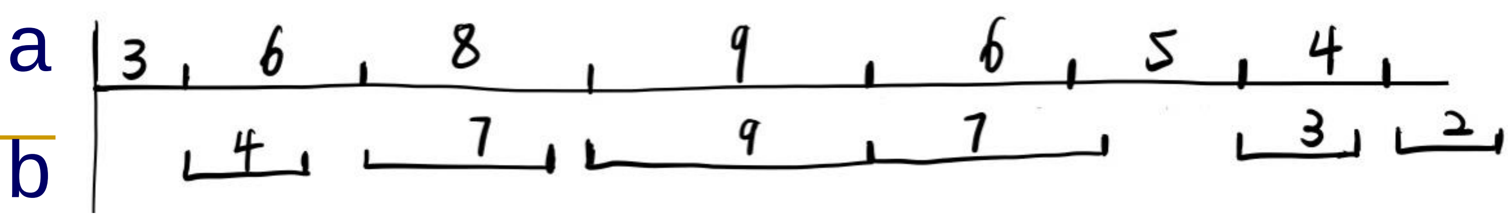
红色在集合 N_2 中 $a_i > b_i$

最终排序

3	6	8	9	6	5	4
4	7	9	7	3	2	2

$a_i \uparrow$ $b_i \downarrow$

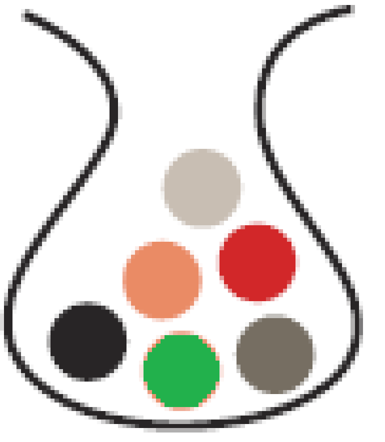
- 推测一下这个Johson法则为什么能够得到最小的作业时间?
- Johson法则分出的第一组都是b加工时间大于a的，且按a时间递增；分出的第二组都是a加工时间大于b的，且按b时间递减。
- 由于a加工是无间断的，决定时间长短的只是b。按照Johson法则会发现，中间部分都是一些b耗时大的作业，两头都是一些耗时小的作业，这样安排会很好填充b中的时间空隙。



3.10 0-1背包问题

给定n种物品和一背包。物品i的重量是w_i，其价值为v_i，背包的容量为C。问应如何选择装入背包的物品，使得装入背包中物品的总价值最大?

0-1背包问题是一个特殊的整数规划问题。



$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C \\ x_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n \end{cases}$$

0-1背包问题

设所给0-1背包问题的子问题

$$\max\sum_{i=2}^{n} v_i x_i$$

$$\begin{cases}\sum_{i=2}^{n} w_i x_i \le W - w_1 x_1 \\ x_i \in \{0,1\} \quad 2 \le i \le n\end{cases},$$

利用反证法，设(X2,…Xn)不是上述子问题的一个最优解，而(y2,…yn)是，则后者目标函数值要大于前者

$$\sum_{i=2}^{n} v_i y_i > \sum_{i=2}^{n} v_i x_i$$

又因为前者满足上述约束条件，说明(x1,y2,…,yn)是原问题的一个解

$$\sum_{i=2}^{n} v_i y_i + v_1 x_1 > \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

说明(x1,x2,…xn)非原问题最优解。这与(x1,x2,…,xn)是原问题最优解相悖。所以(x2,…,xn)是子问题最优解，最优子结构性质得证。

0-1背包问题

设所给0-1背包问题的子问题

$$\max \sum_{k=i}^{n} v_k x_k$$

$$\begin{cases} \sum_{k=i}^{n} w_k x_k \le j \\ x_k \in \{0,1\}, i \le k \le n \end{cases}$$

的最优值为m(i，j)，即m(i，j)是背包容量为j，可选择物品为i，i+1，…，n时0-1背包问题的最优值。由0-1背包问题的最优子结构性质，可以建立计算m(i，j)的递归式如下。

$$m(i,j) = \begin{cases} \max\{m(i+1,j), m(i+1,j-w_i)+v_i\} & j \ge w_i \\ m(i+1,j) & 0 \le j < w_i \end{cases}$$

- 若背包剩余容量大于第i个物品重量，则分别考虑装与不装两种情况的重量，取最大值

$$m(n,j) = \begin{cases} v_n & j \ge w_n \\ 0 & 0 \le j < w_n \end{cases}$$

- 若背包剩余容量小于第i个物品重量，则不考虑这个物品

```
void Knapsack(int v[],int w[],int c,int n,int m[][10])
{
    int jMax = min(w[n]-1,c);//背包剩余容量上限 范围[0~w[n]-1]
    for(int j=0; j<=jMax;j++)
    {
        m[n][j]=0;
    }

    for(int j=w[n]; j<=c; j++)//限制范围[w[n]~c]
    {
        m[n][j] = v[n];
    }

    for(int i=n-1; i>1; i--)
    {
        jMax = min(w[i]-1,c);
        for(int j=0; j<=jMax; j++)//背包不同剩余容量j<=jMax<c
        {
            m[i][j] = m[i+1][j];//没产生任何效益
        }
        for(int j=w[i]; j<=c; j++) //背包不同剩余容量j-wi >c
        {
            m[i][j] = max(m[i+1][j],m[i+1][j-w[i]]+v[i]);//效益值增长vi
        }
    }
    m[1][c] = m[2][c];
    if(c>=w[1])
    {
        m[1][c] = max(m[1][c],m[2][c-w[1]]+v[1]);
    }
}
```

```
//x[]数组存储对应物品0-1向量,0不装入背包，1表示装入背包
void Traceback(int m[][10],int w[],int c,int n,int x[])
{
    for(int i=1; i<n; i++)
    {
        if(m[i][c] == m[i+1][c])
        {
            x[i]=0;
        }
        else
        {
            x[i]=1;
            c-=w[i];
        }
    }
    x[n]=(m[n][c])?1:0;
}
```

n= 4 c=8

w[]={1,4,2,3} v[]={2,1,4,3}

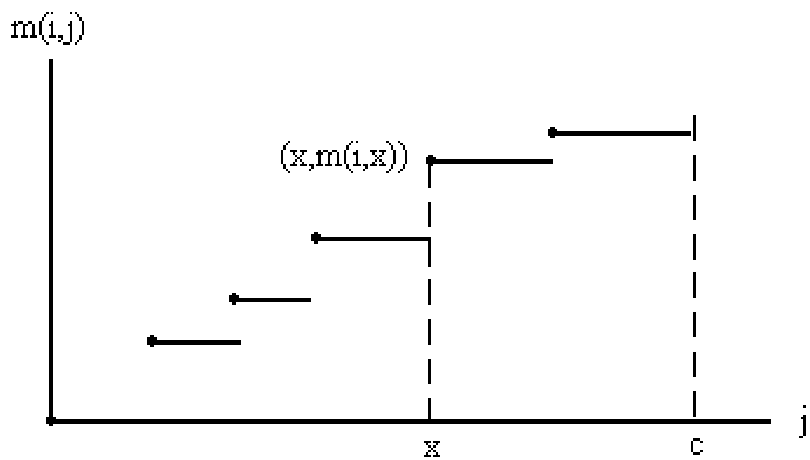
j / i	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
i=4	0	0	3	3	3	3	3	3
i=3	0	4	4	4	7	7	7	7
i=2	0	4	4	4	7	7	7	7
i=1								9

绿色框为方法 Traceback 的回溯过程 x[]={1,0,1,1}

算法复杂度分析：
从Knapsack容易看出，算法需要O(nc)计算时间。当背包容量c很大时，算法需要的计算时间较多。例如，当$c>2^n$时，算法需要$\Omega(n2^n)$计算时间。

算法改进

由m(i,j)的递归式容易证明，在一般情况下，对每一个确定的i(1≤i≤n)，函数m(i,j)是关于变量j的阶梯状单调不减函数。跳跃点是这一类函数的描述特征。在一般情况下，函数m(i,j)由其全部跳跃点唯一确定。如图所示。



对每一个确定的i(1≤i≤n)，用一个表p[i]存储函数m(i，j)的全部跳跃点。表p[i]可根据计算m(i，j)的递归式来递归地由表p[i+1]计算，初始时p[n+1]={(0，0)}。

算法改进

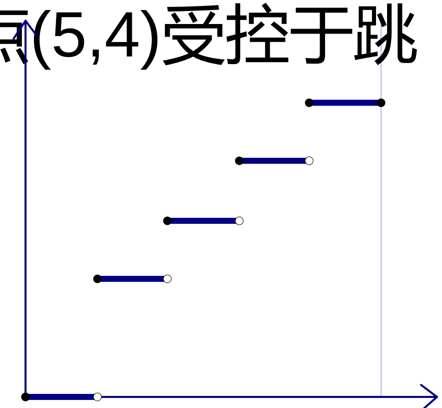
$$m(i,j)=\begin{cases}\max\{m(i+1,j),m(i+1,j-w_i)+v_i\} & j\ge w_i\\ m(i+1,j) & 0\le j<w_i\end{cases}$$

- 函数m(i,j)是由函数m(i+1,j)与函数m(i+1,j-wi)+vi作max运算得到的。因此，函数m(i,j)的全部跳跃点包含于函数m(i+1，j)的跳跃点集p[i+1]与函数m(i+1，j-wi)+vi的跳跃点集q[i+1]的并集中。
- 易知，(s,t)∈q[i+1]当且仅当wi≤s≤c且(s-wi,t-vi)∈p[i+1]。因此，容易由p[i+1]确定跳跃点集q[i+1]如下
  q[i+1]=p[i+1]⊕(wi,vi)={(j+wi,m(i,j)+vi)|(j,m(i,j))∈p[i+1]}
- 另一方面，设(a，b)和(c，d)是p[i+1]∪q[i+1]中的2个跳跃点，则当c≥a且d<b时，(c，d)受控于(a，b)，从而(c，d)不是p[i]中的跳跃点。除受控跳跃点外，p[i+1]∪q[i+1]中的其它跳跃点均为p[i]中的跳跃点。
- 由此可见，在递归地由表p[i+1]计算表p[i]时，可先由p[i+1]计算出q[i+1]，然后合并表p[i+1]和表q[i+1]，并清除其中的受控跳跃点得到表p[i]。

一个例子

n=5，c=10，w={2，2，6，5，4}，v={6，3，5，4，6}。

初始时p[6]={(0,0)}，(w5,v5)=(4,6)。因此，
q[6]=p[6]⊕(w5,v5)={(4,6)}。
p[5]={(0,0),(4,6)}。
q[5]=p[5]⊕(w4,v4)={(5,4),(9,10)}。从跳跃点集p[5]与q[5]的并集p[5]∪q[5]={(0,0),(4,6),(5,4),(9,10)}中看到跳跃点(5,4)受控于跳跃点(4,6)。将受控跳跃点(5,4)清除后，得到
p[4]={(0,0),(4,6),(9,10)}
q[4]=p[4]⊕(6，5)={(6，5)，(10，11)}
p[3]={(0，0)，(4，6)，(9，10)，(10，11)}
q[3]=p[3]⊕(2，3)={(2，3)，(6，9)}
p[2]={(0，0)，(2，3)，(4，6)，(6，9)，(9，10)，(10，11)}
q[2]=p[2]⊕(2，6)={(2，6)，(4，9)，(6，12)，(8，15)}
p[1]={(0，0)，(2，6)，(4，9)，(6，12)，(8，15)}
p[1]的最后的那个跳跃点(8,15)给出所求的最优值为m(1,c)=15。

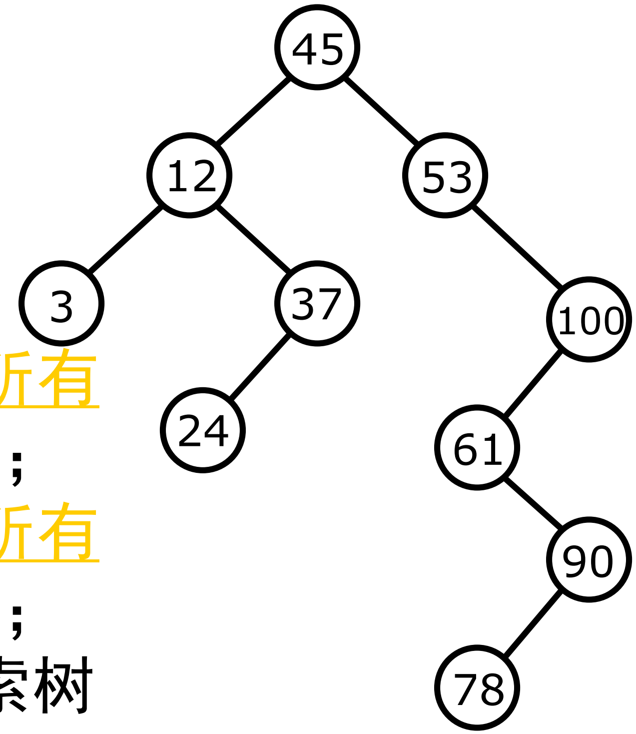


算法复杂度分析

上述算法的主要计算量在于计算跳跃点集p[i]($1\le i\le n$)。由于$q[i+1]=p[i+1]\oplus(w_i，v_i)$，故计算q[i+1]需要O(|p[i+1]|)计算时间。合并p[i+1]和q[i+1]并清除受控跳跃点也需要O(|p[i+1]|)计算时间。从跳跃点集p[i]的定义可以看出，p[i]中的跳跃点相应于$x_i,\ldots,x_n$的0/1赋值。因此，p[i]中跳跃点个数不超过2^{n-i+1}。由此可见，算法计算跳跃点集p[i]所花费的计算时间为 $O\left(\sum_{i=2}^{n}|p[i+1]|\right)=O\left(\sum_{i=2}^{n}2^{n-i}\right)=O\left(2^n\right)$
从而，改进后算法的计算时间复杂性为$O(2^n)$。当所给物品的重量w_i($1\le i\le n$)是整数时，$|p[i]|\le c+1$，($1\le i\le n$)。在这种情况下，改进后算法的计算时间复杂性为$O(\min\{nc,2^n\})$。

3.11 最优二叉搜索树

- 二叉搜索树



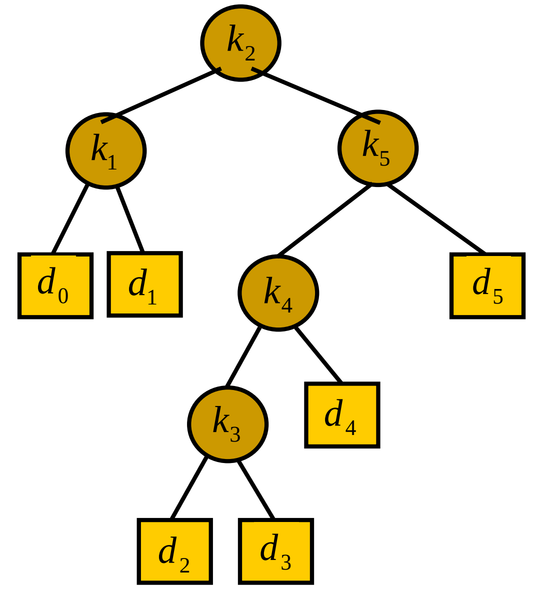
（1）若它的左子树不空，则左子树上所有节点的值均小于它的根节点的值；

（2）若它的右子树不空，则右子树上所有节点的值均大于它的根节点的值；

（3 它的左、右子树也分别为二叉搜索树

在随机的情况下，二叉查找树的平均查找长度和$\log n$是等数量级的

二叉查找树的期望耗费



- 设 S={k1<k2<...<kn}，二叉搜索树利用二叉树的结点来存储有序集中的元素。 二叉搜索树的叶结点是形如(k_i,k_{i+1})的开区间。
- 在二叉搜索树中搜索一个元素x，返回的结果有两种情形:1)在二叉搜索树的内结点中找到ki; 2)在搜索的叶结点中确定
- 查找成功与不成功的概率

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i = 1$$

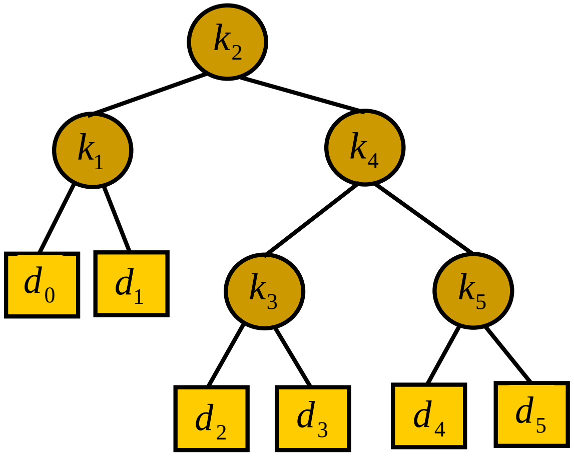
找到元素ki的概率为bi

在(k_i,k_{i+1})区间的概率为ai

- 二叉查找树的期望耗费（平均路长）

$$p = \sum_{i=1}^{n} (\text{depth}_T(k_i)+1) \cdot b_i + \sum_{i=0}^{n} \text{depth}_T(d_i) \cdot a_i$$

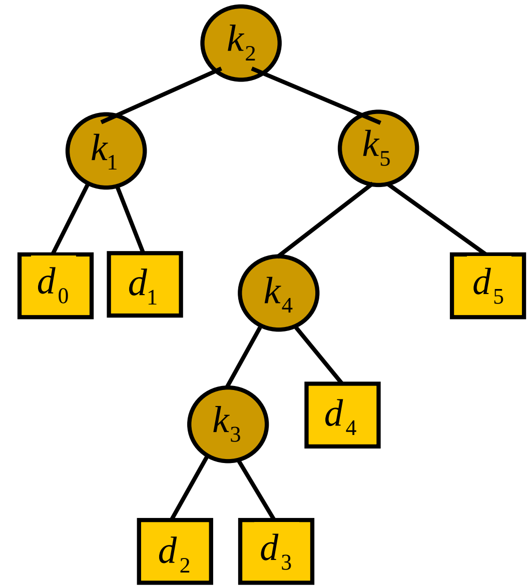
二叉查找树的期望耗费示例



node	depth	probability	contribution
k_1	1	0.15	0.30
k_2	0	0.10	0.10
k_3	2	0.05	0.15
k_4	1	0.10	0.20
k_5	2	0.20	0.60
d_0	2	0.05	0.10
d_1	2	0.10	0.20
d_2	3	0.05	0.15
d_3	3	0.05	0.15
d_4	3	0.05	0.15
d_5	3	0.10	0.30
Total			2.40

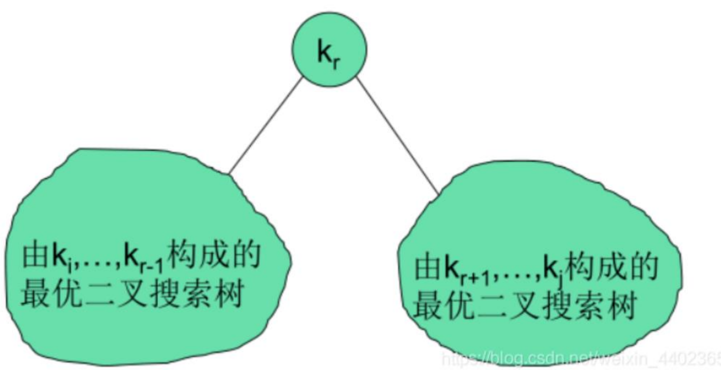
二叉查找树的期望耗费

$$p=\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{depth}_T(k_i)+1)\cdot b_i+\sum_{i=0}^{n}\mathrm{depth}_T(d_i)\cdot a_i$$



假设有一棵ai-1,bi....,bj,aj的树，接到另一个结点形成一颗新树，增加的代价（每个结点在新树中的深度都增加了1，所以其实就算所有结点频率之和）为：

$$w_{i,j}=a_{i-1}+b_i+\cdots+b_j+a_j$$



最优二叉搜索树

$$w_{i,j} = a_{i-1} + b_i + \cdots + b_j + a_j$$

最优二叉搜索树T_{ij}的平均路长为p_{ij}，则所求的最优值为$p_{1,n}$。由最优二叉搜索树问题的最优子结构性质可建立计算p_{ij}的递归式如下

$$w_{i,j}p_{i,j} = w_{i,j} + \min_{i \le k \le j}\{w_{i,k-1}p_{i,k-1} + w_{k+1,j}p_{k+1,j}\}$$

记$w_{i,j}p_{i,j}$为m(i,j)，则$m(1,n)=w_{1,n}p_{1,n}=p_{1,n}$为所求的最优值。计算m(i,j)的递归式为

$$m(i,j) = w_{i,j} + \min_{i \le k \le j}\{m(i,k-1) + m(k+1,j)\}, \quad i \le j$$

$$m(i,i-1) = 0, \quad 1 \le i \le n$$

注意到，

$$\min_{i \le k \le j}\{m(i,k-1) + m(k+1,j)\} = \min_{s[i][j-1] \le k \le s[i+1][j]}\{m(i,k-1) + m(k+1,j)\}$$

可以得到$O(n^2)$的算法