第八章 空间解析几何与向量代数

第 8.1 节 向量及其线性运算

一. 向量的概念

1. 向量:既有大小又有方向的量,记为$\vec{a}$,$\overrightarrow{AB}$.

数学上研究的向量都是自由向量.

2. 模:向量的长度,记为$|\vec{a}|$.模为1的向量称为单位向量.

模为0的向量称为零向量,记为$\vec{0}$,规定它的方向是任意的.

3. 共线与共面:若$\vec{a},\vec{b}$的方向相同或相反,则称它们平行或共线,记为$\vec{a}//\vec{b}$.

三个以上的向量,若平移后可位于同一个平面上,则称它们共面.

4. 夹角:设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$,$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$,则$\varphi=\angle AOB\ (0\le\varphi\le\pi)$称为$\vec{a},\vec{b}$的夹角,记为$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{2}$;$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$或$\pi$.

二. 向量的线性运算

1. 向量的加减法

加法定义:平行四边形法则或三角形法则.

运算律. (1)交换律:$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

(2)结合律:$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

减法定义:$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$,其中$-\vec{b}$表示$\vec{b}$的负向量.

注. $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$,$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$.

三角不等式:$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$;当且仅当$\vec{a},\vec{b}$同向时等号成立.

例. 证明:平面上对角线互相平分的四边形为平行四边形.

证. 设对角线交点为M,则由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}$,得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,由$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}$,得$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,证毕.

2. 向量与数的乘法

定义. 设$\lambda\in\mathbb{R}$,则λ与$\vec{a}$的数乘$\lambda\vec{a}$表示这样的一个向量:(1)$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$;

(2)$\lambda\vec{a}//\vec{a}$,当$\lambda>0$时$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向,当$\lambda<0$时$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向.

注. $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$,$\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$,$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$,$(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

运算律. (1)结合律:$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;

(2)分配律:$\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$,$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

应用. (1)单位化:若$\vec{a}\ne\vec{0}$,则$\vec{e}_a=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$是与$\vec{a}$同向的单位向量,称为$\vec{a}$的单位化.

(2)平行的条件:设$\vec{a}\ne\vec{0}$,则$\vec{b}//\vec{a}\Leftrightarrow\exists!\lambda\in\mathbb{R}$,使得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

三. 空间直角坐标系

1. 坐标系的建立

给定点O, 称为坐标原点, 及三个互相垂直的单位向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, 称为基本单位向量, 它们确定了三根互相垂直的数轴, 分别称为x,y,z轴, 这样就构成了$Oxyz$坐标系, 也称为$\left[O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right]$系. 习惯上, 我们采用右手系, 即$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$的方向满足右手法则.

三根坐标轴确定了三个坐标平面. 三个坐标平面将空间分成八个卦限.

2. 向量的坐标

设$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, 则以$OM$为对角线, 以三根坐标轴为棱作长方体, 其位于$x,y,z$轴上的三个顶点分别为$P,Q,R$, 记$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\vec{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\vec{k}$, 则

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, 称为$\vec{r}$的坐标分解式, $x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$分别称为$\vec{r}$沿三根坐标轴方向的分向量, 而$x,y,z$称为它的分量, 或坐标, 记$\vec{r}=(x,y,z)$.

由于$M\leftrightarrow\vec{r}=\overrightarrow{OM}\leftrightarrow(x,y,z)$, 故$x,y,z$也称为$M$的坐标, 记$M(x,y,z)$.

四. 利用坐标作向量的线性运算

定理. 设$\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 则

(1) $\vec{a}\pm\vec{b}=\left(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\right)$; (2) $\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\right)$.

推论. 设$\vec{a}\neq\vec{0}$, 则$\vec{b}\,//\,\vec{a}\Leftrightarrow\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$.

推论. 设$\vec{r}=\overrightarrow{AB}$, 若$A=\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $B=\left(x_2,y_2,z_2\right)$, 则$\vec{r}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right)$.

例. 设$A\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $B\left(x_2,y_2,z_2\right)$, $\lambda\neq-1$, 在AB上求一点M, 使得$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解. 设$M(x,y,z)$, 则$\overrightarrow{AM}=\left(x-x_1,y-y_1,z-z_1\right)$, $\overrightarrow{MB}=\left(x_2-x,y_2-y,z_2-z\right)$, 故

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}\Rightarrow\begin{cases}x-x_1=\lambda\left(x_2-x\right)\\y-y_1=\lambda\left(y_2-y\right)\\z-z_1=\lambda\left(z_2-z\right)\end{cases}\Rightarrow x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

五. 向量的模, 方向角与投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

定理. 设$\vec{r}=(x,y,z)$, 则$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

推论(距离公式). 设$A\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $B\left(x_2,y_2,z_2\right)$, 则

$$|AB|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}.$$

例. 已知两点$A(4,0,5)$和$B(7,1,3)$, 求与$\overrightarrow{AB}$平行的单位向量.

解. $\overrightarrow{AB}=(3,1,-2)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{14}$, 故所求向量为$\vec{e}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$.

2. 方向角与方向余弦

定理. 设$\vec{r}=(x,y,z)$, 记$\alpha=(\widehat{\vec{a},\vec{i}})$, $\beta=(\widehat{\vec{a},\vec{j}})$, $\gamma=(\widehat{\vec{a},\vec{k}})$, 称为$\vec{r}$的**方向角**, 则

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

推论. $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\vec{e}_r$;特别地, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

注. 称$\vec{r}$的三个方向角的余弦为$\vec{r}$的**方向余弦**.

例. 已知两点$A\left(2,2,\sqrt{2}\right)$和$B(1,3,0)$, 求$\overrightarrow{AB}$的方向角.

解. $\overrightarrow{AB}=\left(-1,1,-\sqrt{2}\right)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$, $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{2}$, $\cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 故

$\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$, $\gamma=\dfrac{3\pi}{4}$.

例. 在第一卦限求一点A, 使得$\overrightarrow{OA}$与x, y轴的夹角分别为$\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{4}$, 且$\left|\overrightarrow{OA}\right|=6$.

解. $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$, $\overrightarrow{OA}=6\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\left(3,3\sqrt{2},3\right)$, 故

$A\left(3,3\sqrt{2},3\right)$.

3. 向量在轴上的投影

定义. 设$\vec{b}\neq\vec{0}$, 记$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, 称为$\vec{a}$在$\vec{b}$上的**投影**, 也记$(\vec{a})_{\vec{b}}$.

若点O及单位向量$\vec{e}$确定了u轴, 则$\vec{a}$在u轴上的**投影**$\mathrm{Prj}_u\,\vec{a}=\mathrm{Prj}_{\vec{e}}\,\vec{a}$, 也记为$(\vec{a})_u$.

定理. 设$\vec{c}\neq\vec{0}$, 则$\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\right)=\lambda\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\mu\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}$.

补充练习

1. 求以$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=-2\vec{j}+\vec{k}$为边的平行四边形的对角线长度.

解. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|(1,-1,1)\right|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|(1,3,-1)\right|=\sqrt{11}$.

2. 设$\vec{a}=(7,-4,-4)$, $\vec{b}=(-2,-1,2)$, 求$\vec{c}$, 使$|\vec{c}|=3\sqrt{42}$, 且$\vec{c}$位于$\vec{a}$, $\vec{b}$之间夹角的角平分线上.

解. $|\vec{a}|=9$, $\left|\vec{b}\right|=3$, 故$\vec{c}=\pm3\sqrt{42}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)_0=\pm\sqrt{7}(1,-7,2)$.

3. 设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$均为非零向量, 两两不共线, 但$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{c}$共线, $\vec{b}+\vec{c}$与$\vec{a}$共线, 证明: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

证. $\vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}=\mu\vec{a}$, 故$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\lambda\vec{c}+\vec{c}=\vec{a}+\mu\vec{a}\Rightarrow\lambda=\mu=-1$, 证毕.

第 8.2 节 数量积 向量积 混合积

一. 两向量的数量积

定义. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\mathrm{os}(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=|\vec{b}|\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$，称为 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的数量积(点积).

几何意义. $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

物理意义. 设物体在常力 $\vec{F}$ 作用下，沿直线从点 A 移动到点 B，则 $\vec{F}$ 所作的功为 $W=|\vec{F}|\cos\theta\cdot|\overrightarrow{AB}|=|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

性质. (1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$；(2) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

运算律. (1) 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

(2) 分配律：$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$；

(3) 结合律：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

注. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$，$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$.

定理(坐标表达式). 设 $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$，$\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

推论. $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$；$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

例. 证明三角形的余弦定理.

证. $a^2=|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=$
$|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2-2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle A=b^2+c^2-2bc\cos\angle A$，证毕.

例. 已知三点 $M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$，$B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

解. $\overrightarrow{MA}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$，故 $\cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$.

二. 两向量的向量积

定义. $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ 是这样一个向量：它的模 $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$，垂直于 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 所在平面，并且满足右手法则，称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的向量积(叉积).

几何意义. $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 等于以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积.

性质. (1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$；(2) $\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

运算律. (1) 反交换律：$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$；

(2) 分配律：$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$，$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$；

(3) 结合律：$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

注. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=-2\vec{a}\times\vec{b}$.

定理(坐标表达式). 设 $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

例. 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\neq\vec{0}$, 证明: $\vec{b}=\vec{c}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$.

证. 必要性: 显然. 充分性: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$, $\vec{a}\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$, 即 $\vec{b}-\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 垂直又平行, 故 $\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$, 即得, 证毕.

例. 设 $\vec{a}=(2,1,-1)$, $b=(1,-1,2)$, 求与 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均垂直的单位向量 $\vec{e}$.

解. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\left(1,-5,-3\right)$, 故 $\vec{e}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{35}}\left(1,-5,-3\right)$.

例. 已知三点 $A\left(1,2,3\right)$, $B\left(3,4,5\right)$, $C\left(2,4,7\right)$, 求三角形 ABC 的面积.

解. $S=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\left(2,2,2\right)\times\left(1,2,4\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|\left(4,-6,2\right)\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{56}=\sqrt{14}$.

三. 向量的混合积

定义. 称 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ 为 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的**混合积**, 记为 $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$.

定理(坐标表达式). 设 $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, $\vec{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right)$, 则

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

推论. $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=-\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right]=-\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right]$,

$\left[\vec{a},\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{b}\right]=0$, $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]=\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]$.

几何意义. 以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积 $V=\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|$;

以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为棱的四面体的体积 $V=\dfrac{1}{6}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|$.

推论. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$.

推论. 以 $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $B\left(x_2,y_2,z_2\right)$, $C\left(x_3,y_3,z_3\right)$, $D\left(x_4,y_4,z_4\right)$ 为顶点的四面体体积

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{matrix}\right\|.$$

例. 求 $A(1,2,0)$, $B(2,3,1)$, $C(4,2,2)$ 确定的平面 Π 的方程.

解. $\forall M(x,y,z)$, $M\in\Pi \Leftrightarrow A,B,C,M$ 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-1 & 3-2 & 1-0 \\ 4-1 & 2-2 & 2-0 \\ x-1 & y-2 & z-0 \end{vmatrix}=0$, 即

$2x+y-3z-4=0$.

补充练习

1. 设 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=2$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ 为钝角, 求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

解. $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=2\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-2$.

2. 设 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, 并且 $\vec{a}+3\vec{b}\perp 7\vec{a}-5\vec{b}$, $\vec{a}-4\vec{b}\perp 7\vec{a}-2\vec{b}$, 求 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

解. $\begin{cases}(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0\\(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|\vec{a}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}\\|\vec{b}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}\end{cases}$, 故 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.

3. 设 $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{4}$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$.

解. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\vec{a}|^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+x^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|)}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\vec{a}\cdot\vec{b}+x|\vec{b}|^2}{|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|}=\dfrac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{2|\vec{a}|}=|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 设 $\vec{a}=(2,-3,1)$, $\vec{b}=(1,-2,3)$, $\vec{c}=(2,1,2)$, 若 $\vec{r}\perp\vec{a}$, $\vec{r}\perp\vec{b}$, $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{r}=14$, 求 $\vec{r}$.

解. 设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 则 $\begin{cases}2x-3y+z=0\\x-2y+3z=0\\2x+y+2z=42\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=14\\y=10\\z=2\end{cases}$, 故 $\vec{r}=(14,10,2)$.

5. 已知 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$, 求 $\left[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解. $\left[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=4$.

6. 设 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$, 求 (1) $\mathrm{Prj}_{\vec{a}-\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})$; (2) $\cos(\widehat{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}})$.

解. $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=3+1+2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=7$,

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=3+1-2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=1$,

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=3-1=2$;

(1) $\mathrm{Prj}_{\vec{a}-\vec{b}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\dfrac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|}=\dfrac{2}{1}=2$;

(2) $\cos\left(\widehat{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}}\right)=\dfrac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{a}-\vec{b}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{7}\cdot 1}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

7. 设$\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=1$, 且$\vec{a}-2\vec{b}\perp 2\vec{a}-\vec{b}$, 求以$\vec{a}+3\vec{b}$和$2\vec{a}+\vec{b}$为边的三角形面积.

解. $A=\dfrac{1}{2}\left|\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right|=\dfrac{5}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\dfrac{5}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{5}{2}\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$,

$\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=0\Rightarrow 2\left|\vec{a}\right|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}+2\left|\vec{b}\right|^2=0\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{4}{5}$, 故

$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{3}{5}$, 故$A=\dfrac{3}{2}$.

8. 求位于$\vec{a}=\left(2,1,2\right)$, $\vec{b}=\left(1,-2,2\right)$所在平面, 与$\vec{a}$垂直的单位向量.

解. 设$\vec{e}=\left(x,y,z\right)$, 则$x^2+y^2+z^2=1$, $2x+y+2z=0$, $\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=0$, 解得

$\vec{e}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{585}}\left(1,-22,10\right)$.

第 8.3 节 平面及其方程

一. 曲面方程与空间曲线方程的概念

定义. 设有曲面 S 和方程 $F(x,y,z)=0$, 若 $(x,y,z)\in S \Leftrightarrow F(x,y,z)=0$, 则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为 S 的方程, 而 S 称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

定义. 设有空间曲线 Γ 和方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$, 若 $(x,y,z)\in\Gamma \Leftrightarrow \begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$, 则此方程组称为 Γ 的方程, 而 Γ 称为方程组的图形.

二. 平面的点法式方程

定理. 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 以非零向量 $\vec{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面 Π 是唯一的, 它的方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, 称为该平面的点法式方程.

注. 若平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 则 $\vec{n}=(A,B,C)$ 为其法向量.

例. 求过点 $(2,-3,0)$, 且平行于平面 $x-2y+3z+1=0$ 的平面方程.

解. $\vec{n}=(1,-2,3)$, 故所求方程为 $(x-2)-2(y+3)+3z=0$, 即 $x-2y+3z-8=0$.

例. 求过点 $(1,1,1)$, 垂直于平面 $x-y+z=0$, $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

解. $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(1,-1,1)\times(3,2,-12)=(10,15,5)=5(2,3,1)$, 故

$2\cdot(x-1)+3\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0$, 即 $2x+3y+z-6=0$.

例. 求过三点 $M_1(2,-1,4)$, $M_2(-1,3,-2)$, $M_3(0,2,3)$ 的平面方程.

解. 取 $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=(-3,4,-6)\times(-2,3,-1)=(14,9,-1)$, 故

$14\cdot(x-2)+9\cdot(y+1)-(z-4)=0$, 即 $14x+9y-z-15=0$.

注. 一般地, 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 与不共线的向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均平行的平面方程为

$$\left[\overrightarrow{MM_0},\vec{a},\vec{b}\right]=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=0$$;过三点 M_1,M_2,M_3 的平面方程为

$$\left[\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{M_2M_1},\overrightarrow{M_3M_1}\right]=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

三. 平面的一般方程

三元一次方程(线性方程) $Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面的一般方程, 其中

(1) 若 $D=0$, 则平面过原点;

(2) 若 $A=0$, 则平面平行于 x 轴, 因为 $\vec{n}=(0,B,C)$ 垂直于 x 轴; 若 $B=0$, 则平面平行于 y 轴; 若 $C=0$, 则平面平行于 z 轴.

(3) 若 $A=B=0$, 则平面平行于 x,y 轴, 即平行于 xOy 面.

例. 求过点 $M(4,-3,-1)$ 与 x 轴的平面 Π 的方程.

解一. 设 $\Pi: By+Cz=0$, 由 $(4,-3,-1)\in\Pi$, 得 $B(-3)+C(-1)=0 \Rightarrow C=-3B$, 故 $\Pi: y-3z=0$.

解二. $\overrightarrow{OM}=(4,-3,-1)//\Pi$, $\vec{i}=(1,0,0)//\Pi$, 可取 $\vec{n}=\vec{i}\times\overrightarrow{OM}=(0,1,-3)$, 故 $0\cdot(x-4)+(y+3)-3\cdot(z+1)=0$, 即 $\Pi: y-3z=0$.

例. 求过点 $(1,1,1)$, 并且垂直于平面 $x-y+z=0$, $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

解一. 设 $Ax+By+Cz+D=0$, 则 $\begin{cases}A+B+C+D=0\\A-B+C=0\\3A+2B-12C=0\end{cases}$, 解得

$A=-\dfrac{D}{3}$, $B=-\dfrac{D}{2}$, $C=-\dfrac{D}{6}$, 故 $2x+3y+z-6=0$.

解二. 取 $\vec{n}=(1,-1,1)\times(3,2,-12)=(10,15,5)=5(2,3,1)$, 故 $2\cdot(x-1)+3\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0$, 即 $2x+3y+z-6=0$.

例. 求过两点 $A(1,1,1)$, $B(0,1,-1)$, 且垂直于平面 $x+y+z=0$ 的平面方程.

解一. 设 $Ax+By+Cz+D=0$, 则

$$\begin{cases}A+B+C+D=0\\B-C+D=0\\A+B+C=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-2C\\B=C\\D=0\end{cases}$$, 即 $-2x+y+z=0$.

解二. 取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{n}_1=(-1,0,-2)\times(1,1,1)=(2,-1,-1)$, 于是 $2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$, 即 $2x-y-z=0$.

四. 平面的截距式方程

定理. 在三根坐标轴上的截距分别为 a, b, c 的平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

例. 求在 y 轴和 z 轴上截距分别为 30 和 10, 并且与 $\vec{r}=(2,1,3)$ 平行的平面方程.

解. 设 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{z}{10}=1$, 则 $\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{30},\dfrac{1}{10}\right)\perp(2,1,3)\Rightarrow\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{3}{10}=0\Rightarrow a=-6$, 故 $\dfrac{x}{-6}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{z}{10}=1$, 即 $5x-y-3z+30=0$.

例. 求平行于平面 $2x+y+2z+5=0$, 并且与三个坐标面构成的四面体体积为 1 的平面方程.

解. 设 $2x+y+2z+D=0$, 即 $\dfrac{x}{-D/2}+\dfrac{y}{-D}+\dfrac{z}{-D/2}=1$, 于是 $\dfrac{1}{6}\left|-\dfrac{D^3}{4}\right|=1$, 得 $D=\pm\sqrt[3]{24}$, 故 $2x+y+2z\pm\sqrt[3]{24}=0$.

五. 两平面的夹角

定义. 两平面的法向量的夹角$\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$称为两平面的**夹角**, 即

若$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 则两者的夹角为

$$\theta=\arccos\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

例. 求通过x轴, 且与平面$x-y=0$成$\frac{\pi}{3}$夹角的平面方程.

解. 设$By+Cz=0$, 由$\frac{|(0,B,C)\cdot(1,-1,0)|}{\sqrt{0+B^2+C^2}\cdot\sqrt{1+1+0}}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{B^2}{B^2+C^2}=\frac{1}{2}$, 得$B=\pm C$, 故所求平面方程为$y\pm z=0$.

六. 点到平面的距离

定理. 点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$\Pi: Ax+By+Cz+D=0$的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

推论. 两平面$\Pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$, $\Pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$之间的距离

$$d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

例. 求平面$x+y+z=1$与坐标面构成四面体的内切球球心坐标.

解. 设球心为(x_0,y_0,z_0), 则由它到四面体的四个面距离相等, 即

$$x_0=y_0=z_0=\frac{1-(x_0+y_0+z_0)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\Rightarrow\sqrt{3}z_0=1-3z_0, \text{故 } x_0=y_0=z_0=\frac{1}{3+\sqrt{3}}.$$

例. 求两平面$x+2y+3z+1=0$, $2x+3y+z-4=0$的角平分面方程.

解. $M(x,y,z)\in\Pi\Leftrightarrow\frac{|x+2y+3z+1|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{|2x+3y+z-4|}{\sqrt{4+9+1}}$, 即

$3x+5y+4z-3=0$, 或者$x+y-2z-5=0$.

补充练习

1. 求与球面$x^2+y^2+z^2-2x+6z+6=0$切于$M(2,\sqrt{2},-4)$的平面方程.

解. $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=4$, 球心为$A(1,0,-3)$, $\vec{n}=\overrightarrow{AM}=(1,\sqrt{2},-1)$, 故

$1\cdot(x-2)+\sqrt{2}\cdot(y-\sqrt{2})-1\cdot(z+4)=0$, 即$x+\sqrt{2}y-z-8=0$.

2. 求与原点的距离为6, 三个截距之比为$1:3:2$的平面方程.

解. 设$\frac{x}{k}+\frac{y}{3k}+\frac{z}{2k}=1\Rightarrow 6x+2y+3z-6k=0$, 由$\frac{|-6k|}{\sqrt{36+4+9}}=6\Rightarrow k=\pm7$, 故

$6x+2y+3z\pm42=0$.

3. 求圆$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=20 \\ 2x+y-2z=3 \end{cases}$的面积.

解. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=34$, 球心$(1,-2,3)$到$2x+y-2z=3$的距离$d=3$, 故上述圆的半径$r=\sqrt{34-9}=5$, 于是$A=25\pi$.

4. 已知$A(1,0,2)$, $B(-1,1,1)$, $C(3,0,4)$, 求平行于三点所在平面, 并且与该平面的距离为2的平面方程.

解. 三点所在平面为$x+y-z+1=0$, 设所求平面为$x+y-z+D=0$, 则

$$\frac{|D-1|}{\sqrt{1+1+1}}=2 \Rightarrow D=1\pm 2\sqrt{3}$$, 故$x+y-z+1\pm 2\sqrt{3}=0$.

第 8.4 节 空间直线及其方程

一. 空间直线的一般方程

方程组 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 称为空间直线的一般方程.

例. 求过点 $(-3,2,5)$, 且与直线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2x-y-5z=1 \end{cases}$ 平行的直线方程.

解. 过 $(-3,2,5)$, 平行于 $x-4z=3$ 的平面为 $x-4z+23=0$; 过 $(-3,2,5)$, 平行于 $2x-y-5z=1$ 的平面为 $2x-y-5z+33=0$, 故所求直线为 $\begin{cases} x-4z+23=0 \\ 2x-y-5z+33=0 \end{cases}$.

二. 平面束方程

定理. 设平面 Π 过 $L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$, 则存在 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 使得 Π 可表示为

$\mu(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$.

推论. 若 Π 不是平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ ($\mu\neq0$), 则它的方程可以表示为

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$.

例. 求过点 $(1,2,1)$ 和直线 $\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ x-z=6 \end{cases}$ 的平面方程.

解. 设 $x-2y-3z+\lambda(x-z-6)=0$, 代入 $(1,2,1)$, 得 $\lambda=-1$, 故 $y+z=3$.

例. 求 $L:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在 $\Pi_1: x+y+z=0$ 上的投影直线 L' 的方程; 并求过 L', 且与 Π_1 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$ 的平面 Π 的方程.

解. 设过 L 且垂直于 Π_1 的平面为 $x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$, 由

$(1+\lambda,1-\lambda,\lambda-1)\cdot(1,1,1)=0\Rightarrow\lambda=-1$, 即 $y-z-1=0$, 故 $L':\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$;

设 $\Pi: y-z-1+\lambda(x+y+z)=0$, 则 $\vec{n}=(\lambda,1+\lambda,\lambda-1)$, 由

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{|(\lambda,1+\lambda,\lambda-1)\cdot(1,1,1)|}{|(\lambda,1+\lambda,\lambda-1)||(1,1,1)|}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{|3\lambda|}{\sqrt{3\lambda^2+2}\cdot\sqrt{3}}\Rightarrow\lambda=\pm\sqrt{2}$, 故 Π 的方程为

$\sqrt{2}x+(1+\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-1)z-1=0$ 或 $-\sqrt{2}x+(1-\sqrt{2})y+(-\sqrt{2}-1)z-1=0$.

三. 空间直线的对称式方程

定理. 设直线 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 且平行于非零向量 $\vec{s}=(m,n,p)$, 则它满足方程

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, 称为 L 的对称式方程.

注. $\vec{s}=(m,n,p)$ 称为 L 的方向向量, m, n, p 称为 L 的方向数.

推论. 过两点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$ 的直线方程为 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

例. 求过点 $(-3,2,5)$，且平行于直线 $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{0}$ 的直线方程.

解. $\vec{s}=(-1,2,0)$，故 $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-5}{0}$.

例. 求过点 $(1,-2,4)$，且垂直于平面 $2x-3y+z-4=0$ 的直线方程.

解. $\vec{s}=(2,-3,1)$，故 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$.

例. 求过点 $(1,0,-3)$，且与平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 平行的直线方程.

解. $\vec{s}=(1,0,-4)\times(2,-1,-5)=(-4,-3,-1)$，故 $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z+3}{1}$.

例. 求直线 $L:\begin{cases}x+y+z+1=0\\2x-y+3z+4=0\end{cases}$ 的对称式方程.

解. 令 $x=1$，由 $\begin{cases}y+z=-2\\y-3z=6\end{cases}\Rightarrow y=0$，$z=-2$，故 $M(1,0,-2)\in L$；

再取 $\vec{s}=(1,1,1)\times(2,-1,3)=(4,-1,-3)$，得 $L:\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}$.

四. 空间直线的参数方程

定理. 过点 (x_0,y_0,z_0)，且平行于非零向量 (m,n,p) 的直线可表示为 $\begin{cases}x=mt+x_0\\y=nt+y_0\\z=pt+z_0\end{cases}$.

例. 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

解. 设交点为 $Q(t+2,t+3,2t+4)$，代入 $2x+y+z-6=0$，得 $t=-1$，故 $Q(1,2,2)$.

例. 求点 $P(-1,2,-2)$ 关于平面 $\Pi:x+2y-z+1=0$ 的对称点 P_1 的坐标.

解. 过 P，垂直于 Π 的直线 $L:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-1}$，设 $L\cap\Pi=Q(t-1,2t+2,-t-2)$，

代入 $x+2y-z+1=0$，得 $t=-1$，故 $Q(-2,0,-1)$，于是 $P_1(-3,-2,0)$.

例. 设一束光线由 $P(3,-5,2)$ 出发，沿直线 $\begin{cases}9x+2y-17=0\\z=2\end{cases}$ 射向 $x-y-3z+9=0$，

求反射光线的方程.

解. 光线与平面的交点为 $Q(1,4,2)$，而 P 关于平面的对称点为 $P_1(1,-3,8)$，故

反射光线即为直线 $\overline{P_1Q}:\frac{x-1}{0}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-2}{-6}$.

例. 求过点 $P(2,-1,3)$, 且与直线 $L:\frac{x}{3}=\frac{y+7}{5}=\frac{z-2}{2}$ 垂直相交的直线方程.

解. 设两直线交点为 $Q(3t,5t-7,2t+2)$, 则 $\overrightarrow{PQ}=(3t-2,5t-6,2t-1)$, 由

$\overrightarrow{PQ}\cdot(3,5,2)=0\Rightarrow t=1$, 得交点 $Q(3,-2,4)$, 故 $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

例. 求过点 $P(1,2,3)$, 且与直线 $L:\begin{cases}x+y-z+1=0\\x-y+2z-1=0\end{cases}$ 垂直相交的直线方程.

解. 过 P 且垂直于 L 的平面方程为 $x-3y-2z+11=0$, 由

$\begin{cases}x+y-z+1=0\\x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+11=0\end{cases}$, 得交点 $Q(-1,2,2)$, 故 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$.

例. 求过 $P(2,1,0)$, 平行于 $\Pi:3x-2y-2z=1$, 与 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{-1}$ 相交的直线方程.

解. 设两直线交点为 $Q(2t,3t+1,-t-1)$, 则 $\overrightarrow{PQ}=(2t-2,3t,-t-1)$, 由

$\overrightarrow{PQ}\cdot(3,-2,-2)=0\Rightarrow t=2\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=(2,6,-3)$, 故 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{6}=\frac{z}{-3}$.

例. 求过 $M(-1,0,4)$, 与 $L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$, $L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 均相交的直线方程.

解一. 过 M 与 L_1 的平面为 $8x-7y+2z=0$ (过 L), 过 M 与 L_2 的平面为

$9x-10y-2z+17=0$ (也过 L), 故所求直线为 $\begin{cases}8x-7y+2z=0\\9x-10y-2z+17=0\end{cases}$.

解二. $M_1(0,0,0)\in L_1$, $M_2(1,2,3)\in L_2$, 设 $\vec{s}=(m,n,p)$, 则由

$\left[\overrightarrow{MM_1},\vec{s}_1,\vec{s}\right]=\left[\overrightarrow{MM_2},\vec{s}_2,\vec{s}\right]=0\Rightarrow\begin{cases}8m-7n+2p=0\\9m-10n-2p=0\end{cases}\Rightarrow m=n=-2p$, 故

所求直线为 $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{1}$.

五. 两直线的夹角

两直线方向向量的夹角 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ 称为两直线的**夹角**. 因此, 若

$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$, $L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$, 则夹角余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

例. 求直线 $L_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-5}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=5\\2y+z=4\end{cases}$ 的夹角余弦.

解. $\vec{s}_1=(1,-2,1)$, $\vec{s}_2=(1,-1,0)\times(0,2,1)=(-1,-1,2)$, 故 $\cos\theta=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{1}{2}$.

六. 直线与平面的夹角

定义. 直线$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$与它在平面$Ax+By+Cz+D=0$上的投影直线之间的夹角$\varphi\left(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$, 称为该直线与平面的夹角, 因此

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

七. 点到直线的距离

例. 求点$M(1,2,3)$到直线$L:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$的距离.

解. 设M到L的垂足为$N(t,-3t+4,2t+3)$, 则$\overrightarrow{MN}=(t-1,-3t+2,2t)$, 由

$\overrightarrow{MN}\cdot(1,-3,2)=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$, 故$N\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2},4\right)$, 于是$d=|MN|=\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$.

注. 也可先求过M, 且垂直于L的平面Π, 然后再求出$N=L\cap\Pi$.

定理. 点M到直线L的距离$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}$, 其中$N\in L$.

定理. 异面直线L_1, L_2的距离$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)\right|}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}$, 其中$M_1\in L_1$, $M_2\in L_2$.

注. 直线L_1与L_2共面$\Leftrightarrow\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)=0$.

例. 设直线$L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$, $L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, (1) 证明它们为异面直线;
(2) 求公垂线的方程.

(1) 证. $M_1(0,0,0)\in L_1$, $M_2(1,-1,2)\in L_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)=-5\ne0$, 证毕.

(2) 解. $\vec{s}=(1,2,3)\times(1,1,1)=(-1,2,-1)$, 过$L_1$平行于$\vec{s}$的平面为

$4x+y-2z=0$, 过L_2平行于$\vec{s}$的平面为$x-z+1=0$, 故$\begin{cases}4x+y-2z=0\\x-z+1=0\end{cases}$.

补充练习

1. 证明: $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+1}{-3}$与$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$相交, 并求它们确定的平面方程.

解. $\begin{cases}\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{z+1}{-3}\\y=2\\\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=\dfrac{1}{2}\end{cases}$, 故有交点$\left(1,2,\dfrac{1}{2}\right)$, 即相交;

$\vec{n}=(4,0,-3)\times(2,2,-1)=(6,-2,8)$, 故$6\cdot(x-0)-2\cdot(y-1)+8\cdot(z-1)=0$.

2. 求过$L:\begin{cases}2x+y=0\\4x+2y+3z=6\end{cases}$，且与球面$x^2+y^2+z^2=4$相切的平面方程.

解. 设$4x+2y+3z-6+\lambda(2x+y)=0$，则$\dfrac{6}{\sqrt{(2\lambda+4)^2+(\lambda+2)^2+9}}=2\Rightarrow\lambda=-2$，

故$z=2$.

3. 求过$P(1,2,1)$，且与$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$垂直，与$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$相交的直线方程.

解. 设两直线的交点为$Q(2t,t,-t)$，由$\overrightarrow{PQ}=(2t-1,t-2,-t-1)\perp(3,2,1)$，得$t=\dfrac{8}{7}$，

即$\overrightarrow{PQ}=\left(\dfrac{9}{7},-\dfrac{6}{7},-\dfrac{15}{7}\right)$，于是$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{-5}$.

4. 求$\Pi:x+y+z=1$上与$L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$垂直相交的直线方程.

解. 设L与Π的交点为$M(t+1,t,-t-2)$，代入$x+y+z=1$，得$t=2$，故$M(3,2,-4)$，

而$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{n}=(1,1,-1)\times(1,1,1)=(2,-2,0)$，于是$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+4}{0}$.

5. 设直线L_1经过点$M(2,-3,5)$，并且与x轴以及y轴的夹角均为$\dfrac{\pi}{3}$，求L_1与直线$L_2:x=y=z$的距离.

解. $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\cos\gamma=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故$\vec{s}_1=(1,1,\sqrt{2})$，

取$M(2,-3,5)\in L_1$，$N(0,0,0)\in L_2$，则$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{NM}\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)\right|}{\left|\vec{s}_1\times\vec{s}_2\right|}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$.

6. 在平面$x-2y+2z=8$上求一点M，使得它到$P(1,0,-1)$与$Q(2,1,2)$的距离之和最小.

解. (1) 设$F(x,y,z)=x-2y+2z-8$，则$F(1,0,-1)=-9$，$F(2,1,2)=-4$，故两点在该平面的同一侧；

(2) 求得P关于平面的对称点为$P_1(3,-4,3)$；

(3) 直线P_1Q与平面的交点$M\left(\dfrac{30}{13},-\dfrac{7}{13},\dfrac{30}{13}\right)$即为所求.

第 8.5 节 曲面及其方程

一. 曲面的一般方程

设有曲面 S, 若 $(x,y,z)\in S \Leftrightarrow F(x,y,z)=0$, 则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为 S 的方程, 而 S 称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

例. 设点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,4)$, 求线段 AB 的垂直平分面方程.

解. $\forall M(x,y,z)\in S$, 则 $|AM|=|BM|$, 即 $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$, 因此 $2x-6y+2z-7=0$.

例. 求球心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 半径为 R 的球面方程.

解. $\forall M(x,y,z)\in S$, 则 $|MM_0|^2=R^2$, 即 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

例. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面?

解. $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$, 表示球心在 $(1,-2,0)$, 半径 $\sqrt{5}$ 的球面.

二. 旋转曲面

定义. 一条曲线绕定直线旋转一周, 所形成的曲面称为旋转曲面, 定直线称为它的旋转轴, 动曲线称为它的母线.

例. 设 $C:f(y,z)=0$ 为 yOz 面上的平面曲线, 把它绕 z 轴旋转一周, 得到旋转面 S, 求 S 的方程.

解. $\forall M(x,y,z)\in S$, $\exists M_1(0,y_1,z_1)\in C$, 使得它们位于同一个旋转圆上, 于是

$\begin{cases}|y_1|=\sqrt{x^2+y^2}\\ z_1=z\end{cases}$, 由 $f(y_1,z_1)=0$, 得 $S:f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$.

注. 若上述曲线绕 y 轴旋转, 则所得曲面方程为 $f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$.

类似地, 可以得到 xOy 面 (xOz 面) 上的曲线绕 x,y 轴 (x,z 轴) 旋转所得到的曲面方程.

例. 设 $C:z=ky$ 为 yOz 面上的直线, 它绕 z 轴旋转一周, 得到曲面 S, 它的方程为 $z=\pm k\sqrt{x^2+y^2}$, 即 $z^2=k^2\left(x^2+y^2\right)$, 称为圆锥面.

例. 设 $C:z=\dfrac{y^2}{a^2}$ 为 yOz 面上的抛物线, 绕 z 轴旋转一周, 得到曲面 S, 它的方程为 $z=\dfrac{x^2+y^2}{a^2}$, 称为旋转抛物面.

例. 设 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 为 xOz 面上的双曲线, 求: (1) 它绕 z 轴旋转一周形成的曲面方程; (2) 它绕 x 轴旋转一周形成的曲面方程.

解. (1) 绕 z 轴旋转: $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 单叶旋转双曲面;

(2) 绕 x 轴旋转: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$, 双叶旋转双曲面.

例. 设 $L:\begin{cases}x=1\\y=t\\z=2t\end{cases}$, 求 L 绕 z 轴旋转所得曲面的方程.

解. $\forall M(x,y,z)\in S$, $\exists M_1(1,t,2t)\in L$, 使得它们在一个旋转圆上, 于是

$\begin{cases}x^2+y^2=1+t^2\\z=2t\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=1+\left(\dfrac{z}{2}\right)^2\Rightarrow x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=1$, 单叶旋转双曲面.

三. 柱面

定义. 设动直线 L 沿曲线 Γ 平行移动, 则它所形成的轨迹称为柱面, 称 Γ 为准线, L 为母线.

例. 求平行于 z 轴, 以 xOy 面上 $C:f(x,y)=0$ 为准线的柱面方程.

解. $\forall M(x,y,z)\in S$, $M'(x,y,0)\in C$, 故 $f(x,y)=0$.

注. $f(x,z)=0$ 表示平行于 y 轴的柱面; $f(y,z)=0$ 表示平行于 x 轴的柱面.

例. 求平行于 $\vec{a}=(-3,4,1)$, 以 xOy 面上的曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 为准线的柱面方程.

解. $\forall M(x,y,z)\in S$, $\exists M'(x_1,y_1,0)\in C$, 使得 $\dfrac{x-x_1}{-3}=\dfrac{y-y_1}{4}=\dfrac{z-0}{1}$, 即

$\begin{cases}x_1=x+3z\\y_1=y-4z\end{cases}$, 故 $S:\dfrac{(x+3z)^2}{a^2}+\dfrac{(y-4z)^2}{b^2}=1$.

四. 二次曲面

三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面, 共有九大类.

椭圆柱面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 双曲柱面: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 抛物柱面: $x^2=ay$;

椭圆锥面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$; 椭球面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

单叶双曲面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$; 双叶双曲面: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

椭圆抛物面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$; 双曲抛物面: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$, 又称马鞍面.

补充练习

1. 求经过点 $(1,0,-2)$ 的平面与球面 $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=12$ 的交线的最小长度.

解. $(1,0,-2)$ 到球心的距离 $d=\sqrt{3}$, 故最小交线的半径 $r=\sqrt{12-3}=3$, 而 $l=6\pi$.

2. 求顶点在原点 O, 轴平行于 $\vec{a}=(m,n,p)$, 半顶角为 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的圆锥面方程.

解. $\forall M(x,y,z)\in S$, 则 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为 θ, 或者 $\pi-\theta$, 故

$$\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{a}}{\left|\overrightarrow{OM}\right||\vec{a}|}=\pm\cos\theta\Rightarrow\frac{(mx+ny+pz)^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(m^2+n^2+p^2\right)}=\cos^2\theta,$$ 即

$$(mx+ny+pz)^2=\cos^2\theta\left(m^2+n^2+p^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

3. 求半径为 R, 对称轴过原点且平行于 $\vec{a}=(m,n,p)$ 的圆柱面方程.

解. $\forall M(x,y,z)\in S$, 则 $\left(\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\overrightarrow{OM}\right)^2+R^2=\left|\overrightarrow{OM}\right|^2$, 故

$$\frac{(mx+ny+pz)^2}{m^2+n^2+p^2}+R^2=x^2+y^2+z^2.$$

4. 设 $L:\begin{cases}x=2t\\ y=2t-2\\ z=-t+1\end{cases}$, 求 L 绕 x 轴旋转所得曲面的方程.

解. $\forall M(x,y,z)\in S$, $\exists M_1(2t,2t-2,-t+1)\in L$, 它们在一个旋转圆上, 于是

$\begin{cases}y^2+z^2=(2t-2)^2+(-t+1)^2\\ x=2t\end{cases}$, 消去 t, 得 $y^2+z^2=(x-2)^2+\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^2$, 即

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{5}-\frac{z^2}{5}=0,$$ 圆锥面.

第 8.6 节 空间曲线及其方程

一. 空间曲线的一般方程

空间曲线Γ可视为两个曲面的交, 若已知两个曲面的方程分别为$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$, 则$(x,y,z)\in\Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, 此方程组称为$\Gamma$的一般方程.

二. 空间曲线的参数方程

空间曲线也可表示为$\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$, $t\in I$, 当t在I上变动时, 对应的(x,y,z)走过曲线上的所有点, 称为空间曲线的参数方程.

例. 设M位于柱面$x^2+y^2=a^2$上, 以角速度ω绕z轴旋转, 以线速度v沿z轴上升, 它的轨迹称为圆柱螺旋线, 求它的参数方程.

解. 取时间t为参数, 设$t=0$时M在点$A(a,0,0)$, 则轨迹的参数方程为

$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t\ (t\ge 0) \\ z=vt \end{cases}$, 也可以取$\theta=\omega t$为参数, 则$\Gamma:\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta\ (\theta\ge 0) \\ z=b\theta \end{cases}$.

例. 设$\Gamma:\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$, 求$\Gamma$绕$z$轴旋转所得曲面的方程.

解. $\forall M(x,y,z)\in S$, $\exists M_1(t,t^2,t^3)\in\Gamma$, 使得它们在一个旋转圆上, 于是

$\begin{cases} x^2+y^2=t^2+(t^2)^2 \\ z=t^3 \end{cases}$, 消去$t$, 得到$x^2+y^2=z^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{4}{3}}$.

三. 曲面的参数方程

曲面也可以表示为$S:\begin{cases} x=x(s,t) \\ y=y(s,t) \\ z=z(s,t) \end{cases}$, $(s,t)\in D$, 称为曲面的参数方程.

例. 设$\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$, $t\in[\alpha,\beta]$, 求Γ绕z轴旋转所得曲面的参数方程.

解. $\forall M(x,y,z)\in S$, $\exists M_1(x(t),y(t),z(t))\in\Gamma$, 它们在一个旋转圆上, 故

$$\begin{cases} x^2+y^2=x^2(t)+y^2(t) \\ z=z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\cos\theta \\ y=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\sin\theta \\ z=z(t) \end{cases}, \text{其中 } t\in[\alpha,\beta],\ \theta\in[0,2\pi].$$

例. 求半径为 a 的球面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ 的参数方程.

解. 取 yOz 面上半圆 $\Gamma: \begin{cases} x=0 \\ y=a\sin\varphi \\ z=a\cos\varphi \end{cases}$, $\varphi\in[0,\pi]$, 它绕 z 轴旋转一周形成球面 S, 故

$$S: \begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta \\ y=a\sin\varphi\sin\theta \\ z=a\cos\varphi \end{cases},\ \varphi\in[0,\pi],\ \theta\in[0,2\pi].$$

四. 空间曲线在坐标面上的投影

定义. 以空间曲线 Γ 为准线, 平行于 z 轴的柱面 S, 称为 Γ 关于 xOy 面的**投影柱面**, 它与 xOy 面的交线 Γ' 称为 Γ 在 xOy 面上的**投影曲线**.

设 $\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, 则 $\forall M(x,y,z)\in S$, 存在 z_1, 使得 $M_1(x,y,z_1)\in\Gamma$, 由

$\begin{cases} F(x,y,z_1)=0 \\ G(x,y,z_1)=0 \end{cases}$, 消去 z_1, 得 $S: H(x,y)=0$, 于是 $\Gamma': \begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$.

例. 设 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$, 求 Γ 在 xOy 面上的投影曲线的方程.

解. $y+z=1\Rightarrow z=1-y\Rightarrow x^2+y^2+(1-y)^2=1\Rightarrow x^2+2y^2-2y=0$, 即

$$\frac{x^2}{2}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

例. 求 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围立体在 xOy 面上的投影区域.

解. 由 $\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{3(x^2+y^2)}\Rightarrow x^2+y^2=1$, 故投影区域为 $x^2+y^2\le 1$.

五. 由空间曲线的一般方程建立参数方程

例. 设 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$, 求 Γ 的参数方程.

解. $\Gamma: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=2-\cos t+\sin t \end{cases}$.

例. 设 $\Gamma: \begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$, 求 Γ 的参数方程.

解. $x^2+y^2=2x\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1$, 于是 $\Gamma: \begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \\ z=\sqrt{2-2\cos t}=2\sin\dfrac{t}{2} \end{cases}$, $t\in[0,2\pi)$.

补充练习

1. 设$\Gamma:\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$，求$\Gamma$在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解. 消去z，得$x^2+y^2=x+y$，故在xOy面上的投影为$\begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ z=0 \end{cases}$；

消去y，得$z=2-x^2-(2-x-z)^2 \Rightarrow 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0$，故

在xOz面上的投影曲线为$\begin{cases} 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0 \\ y=0 \end{cases}$；

由对称性，在yOz面上的投影曲线为$\begin{cases} 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0 \\ x=0 \end{cases}$.

2. 求$z=x^2+2y^2$与$z=6-2x^2-y^2$所围立体在xOy面上的投影区域.

解. 由$\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2$，故投影区域为$x^2+y^2\le 2$.

第九章 多元函数微分法及其应用

第 9.1 节 多元函数的基本概念

一. 平面点集 n 维空间

1. 平面点集

建立了直角坐标系之后, 平面可以表示为$\mathbb{R}^2=\{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$, 称为坐标平面.

设$P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, 记$U(P_0,\delta)=\{P:|PP_0|<\delta\}=\left\{(x,y):\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$,

称为P_0的δ邻域, 简记为$U(P_0)$;

记$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P:0<|PP_0|<\delta\}$, 称为$P_0$的去心$\delta$邻域, 简记为$\mathring{U}(P_0)$.

定义. 设$E\subset\mathbb{R}^2$, $P_0\in\mathbb{R}^2$, (1) 若$\exists U(P_0)$, 使$U(P_0)\subset E$, 则称P_0为E的内点;

(2) 若$\exists U(P_0)$, 使$U(P_0)\cap E=\varnothing$, 则称P_0为E的外点;

(3) 若P_0既不是E的内点, 也不是外点, 则称P_0为E的边界点, 其全体构成的点集称为E的边界, 记为∂E;

(4) 若$\forall\mathring{U}(P_0)$, 均有$\mathring{U}(P_0)\cap E\neq\varnothing$, 则称$P_0$是$E$的聚点.

定义. 设$E\subset\mathbb{R}^2$, (1) 若$E\cap\partial E=\varnothing$, 则称$E$为开集;

(2) 若$E\supset\partial E$, 则称E为闭集.

例. $E=\{(x,y):1<x^2+y^2<2\}$是开集, $E=\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 2\}$是闭集,

$E=\{(x,y):1<x^2+y^2\le 2\}$即非开集, 也非闭集.

定义. 设$E\subset\mathbb{R}^2$, 若E中任何两点均可以用完全包含于E中的折线连结起来, 则称E是连通集.

定义. 连通的开集称为(开)区域;连通的闭集称为闭区域.

定义. 设$E\subset\mathbb{R}^2$, 若存在$R>0$, 使得$E\subset\{(x,y):x^2+y^2<R^2\}$, 则称$E$为有界集; 否则称为无界集.

2. n 维空间

定义. 记$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in\mathbb{R}\}$, 称为 n 维空间, 其中的元素$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为$n$维空间中的点, 或者 n 维向量.

对于n维向量, 也可以定义加法, 数乘, 数量积等运算.

定义. 设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 记$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, 称为$x$的模(长度).

设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 则两者之间的距离定义为

$\rho(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}$, 也记为$\|x-y\|$.

利用距离概念可以定义邻域, 由此得到开集, 闭集, 区域等概念.

二. 多元函数的概念

定义. 设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 上非空点集, 若按照法则 f, 使得 $\forall P(x,y)\in D$, 变量 z 均有唯一确定的(实数)值与之对应, 则称 z 为 x, y 的二元函数, 记为 $z=f(x,y)$, 或者 $z=f(P)$, 其中 x,y 为自变量, z 为因变量, 或函数值.

类似地, 可定义三元及三元以上的 n 元函数: $u=f(P)$, $P\in D\subset\mathbb{R}^n$.

例. 二元函数 $z=x^2+y^2$, 它的图形为旋转抛物面.

三. 多元函数的极限

定义. 给定 $f(P)$, 设 P_0 为 D_f 的聚点, 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $P\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时, $|f(P)-A|<\varepsilon$, 则称 A 为当 $P\to P_0$ 时, $f(P)$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$, 或者, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$, 也称为二重极限.

注. $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 存在的本质是当 D 中动点 P 以任何方式趋向 P_0 时, $f(P)$ 均趋向于同一个常数; 由于平面上 $P\to P_0$ 的方式有无限多种, 故这个要求是相当高的.

例. 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{xy}{x+y}$, 证明: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

证. $|f(x,y)-0|\le\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, 因此, $\forall\varepsilon>0$, 可取 $\delta=2\varepsilon$, 当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时, $|f(x,y)-0|<\varepsilon$, 证毕.

例. 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 证明: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

证. (x,y) 沿 $y=kx$ 趋向于 $(0,0)$ 时, $f(x,y)\to\dfrac{k}{1+k^2}$, 依 k 不同而不同, 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在, 证毕.

注. 若沿不同的路径, 当 $P\to P_0$ 时, $f(P)$ 趋向于不同的数, 则 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 不存在.

例. 设 $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, 证明: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

证. 当 (x,y) 沿 $y=kx$ 趋向 $(0,0)$ 时, $f(x,y)=\dfrac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}=\dfrac{k^2x}{1+k^4x^2}\to0$;

当 (x,y) 沿 $x=y^2$ 趋向 $(0,0)$ 时, $f(x,y)=\dfrac{y^4}{y^4+y^4}\to\dfrac{1}{2}$, 证毕.

例. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

例. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\sin x^2 y}{xy\left(2-x^2\right)} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x^2 y}{xy\left(2-x^2\right)} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x}{2-x^2} = 1$.

例. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(x^2 y\right)$.

解. $0 \le \left|f(x,y)\right| \le 2\left|\sin\left(x^2 y\right)\right| \le 2\left|x^2 y\right|$, 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(x^2 y\right) = 0$.

例. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^2}$.

解. $\left|f(x,y)\right| \le \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \cdot |x| + \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \left|y^3\right| \le |x| + |y|^3$, 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^2} = 0$.

例. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

解. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to 0^+} \dfrac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^2} = \lim\limits_{\rho\to 0^+} \rho \cos^2\theta \sin\theta = 0$.

四. 多元函数的连续性

定义. 给定 $f(P)$, $P_0 \in D_f$, P_0 是 D_f 的聚点, 若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$, 则称 P_0 为 $f(P)$ 的连续点, $f(P)$ 在 P_0 处连续.

定义. 若 $f(P)$ 在开或者闭区域 D (其中的点均是聚点) 上处处连续, 则称 $f(P)$ 为 D 上的连续函数.

定理. 多元连续函数的和差积商 (分母不为零) 以及复合仍连续.

定理. 多元初等函数在它的定义区域均连续.

定义. 由具有不同自变量的基本初等函数和常数函数经过有限多次四则运算以及复合所形成的, 并且可以用一个式子来表示的函数称为多元初等函数.

例. $f(x,y,z) = e^{x^2+\sin yz} + \ln(x+z+1)$ 是三元初等函数.

五. 有界闭区域上连续函数的性质

定理 (最大值最小值定理). 有界闭区域上的连续函数必有界, 并且能在该区域上取到最大值和最小值.

定理 (介值定理). 有界闭区域上的连续函数能够取到介于最大值和最小值之间的任何值.

定义. 设 $f(P)$ 为 D 上的函数, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $P_1, P_2 \in D$, 且 $\left|P_1 P_2\right| < \delta$ 时, 均有 $\left|f(P_1) - f(P_2)\right| < \varepsilon$, 则称 $f(P)$ 在 D 上一致连续.

定理. 有界闭区域上的连续函数必在该区域上一致连续.

第 9.2 节 偏导数

一. 偏导数的定义及其计算法

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内有定义, 固定 $y=y_0$, 则 $g(x)=f(x,y_0)$ 成为 x 的一元函数, 若 $g'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的**偏导数**, 记为 $z_x(x_0,y_0)$, $f_x(x_0,y_0)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, 等价地,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0};$$

类似地, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$.

若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内处处存在偏导数, 则得到它的**偏导函数**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

例. 设 $z=x^2+3xy+y^4$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x+4y^3$.

例. 设 $z=x^2\tan 2y$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\tan 2y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2\sec^2 2y$.

例. 设 $z=x^{\sin y}\ (x>0,x\neq 1)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin y\cdot x^{\sin y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^{\sin y}\ln x\cdot\cos y$.

例. 理想气体状态方程 $PV=RT$, 其中 R 为常数, 证明: $\dfrac{\partial P}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial P}=-1$.

证. $P=\dfrac{RT}{V}\Rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial V}=-\dfrac{RT}{V^2}$, $V=\dfrac{RT}{P}\Rightarrow\dfrac{\partial V}{\partial T}=\dfrac{R}{P}$, $T=\dfrac{PV}{R}\Rightarrow\dfrac{\partial T}{\partial P}=\dfrac{V}{R}$, 即得, 证毕.

例. 设 $f(x,y)=x^2e^{3y}+(x-1)\arctan\dfrac{y}{x}$, 求 $f_x(1,0)$, $f_y(1,0)$.

解. $f(x,0)=x^2$, 故 $f_x(x,0)=2x\Rightarrow f_x(1,0)=2$;

$f(1,y)=e^{3y}$, 故 $f_y(1,y)=3e^{3y}\Rightarrow f_y(1,0)=3$.

例. 设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 求 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

解. $f(x,0)=e^{|x|}$, $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{|x|}-e^0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$, 不存在;

$f(0,y)=e^{y^2}$, $f_y(0,y)=2ye^{y^2}\Rightarrow f_y(0,0)=0$.

例. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 求 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

解. $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$, 类似地,

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{y}=0$.

注. 上述函数在$(0,0)$处不连续, 故二元函数的偏导数存在不能推出连续性.

二. 高阶偏导数

二阶偏导数: (1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, 也记为$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xx}, z_{xx}, 也称纯偏导;

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$, 也记为$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, f_{xy}, z_{xy}, 也称混合偏导;

(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, 混合偏导; (4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, 纯偏导.

例. 设$z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$, 则$z_x=3x^2y^2-3y^3-y$, $z_y=2x^3y-9xy^2-x$,

$z_{xx}=6xy^2$, $z_{yy}=2x^3-18xy$, $z_{xy}=6x^2y-9y^2-1$, $z_{yx}=6x^2y-9y^2-1$.

例. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 求$f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$.

解. $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$, $f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0$,

$(x,y)\neq(0,0)$时, $f_x(x,y)=\dfrac{3x^2y(x^2+y^2)-x^3y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$,

$f_y(x,y)=\dfrac{x^3(x^2+y^2)-x^3y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$, 故

$f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y-0}=0$,

$f_{yx}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x-0}=1$.

定理. 设$z=f(x,y)$的混合偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$均在区域$D$内连续, 则在该区域内

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

注. 类似地, 若$z=f(x,y)$的三阶混合偏导$\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial x\partial y}$在区域$D$内

连续, 则必在D内相等, 可以统一记为$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$.

例. 验证 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足 Laplace 方程: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

证. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

类似地, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, 故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

例. 验证 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足 Laplace 方程: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

证. $u=\frac{1}{r}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{r^3-x\cdot 3r^2\cdot\partial r/\partial x}{r^6}=\frac{3x^2-r^2}{r^5}$,

类似地, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{3y^2-r^2}{r^5}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{3z^2-r^2}{r^5}$, 故 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, 证毕.

补充练习

1. 设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{e^{x-y}}{x\ln x}$, 求 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$.

解. 设 $u=x-y$, $v=\ln x$, 则 $x=e^v$, $y=e^v-u$, 故 $f(u,v)=\frac{u}{v}e^{u-2v}$, 即

$f(x,y)=\frac{x}{y}e^{x-2y}$, 于是 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1+x}{y}e^{x-2y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x(1+2y)}{y^2}e^{x-2y}$.

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 求 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

解. $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}\sin\frac{1}{x^2}$ 不存在, $f_y(0,0)$ 类似.

3. 设 $f(u)$ 二阶可导, 且 $z=f\left(e^x\sin y\right)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$, 求 $f(u)$.

解. 令 $u=e^x\sin y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y+f'(u)e^x\sin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y-f'(u)e^x\sin y$,

故 $f''(u)e^{2x}=f(u)e^{2x}$, 即 $z=f(u)$ 满足 $z''=z$, 解得 $f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$.

4. 设 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$, 求 $f(x)$.

解. 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{df}{dr}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}\frac{df}{dr}+\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2}$,

类似地, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3}\frac{df}{dr}+\frac{y^2}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2}$, 代入原方程, 得 $\frac{d^2 f}{dr^2}+f=r^2$, 解得

$f(r)=C_1\cos r+C_2\sin r+r^2-2$, 即 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$.

5. 设在区域 D 内 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 均存在且有界, 证明: $f(x,y)$ 在 D 内连续.

证. $|\Delta z|=|f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|\le$

$|f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)|+|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|=$

$|f_x(\xi,y+\Delta y)||\Delta x|+|f_y(x,\eta)||\Delta y|\le M|\Delta x|+N|\Delta y|$, 故 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时,

$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\to f(x,y)$, 证毕.

第 9.3 节 全微分

一. 全微分的定义

定义. 若 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处的**全增量** $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为 $\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o(\rho)$, 其中 A, B 不依赖于 Δx, Δy, 而 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 则称 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处**可微分**, $A\Delta x+B\Delta y$ 称为它在 (x,y) 处的**全微分**, 记为 dz.

例. 设 $z=xy$, 则 $\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=x\Delta x+y\Delta y+\Delta x\Delta y$, 而

$\dfrac{|\Delta x\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le\dfrac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 故 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta x\Delta y}{\rho}=0$, 可微, 且 $dz=x\Delta x+y\Delta y$.

二. 可微的条件

定理. 设 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微, 则它在该点处连续.

定理. 设 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微, 则它在 (x,y) 处的偏导数必存在, 并且

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, 即 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

注. $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\Delta z-\left[f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y\right]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$.

例. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 讨论它在 $(0,0)$ 处的可微性.

解. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$, $\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$,

$\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\Delta f-\left[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right]}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不存在, 不可微.

例. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 讨论它在 $(0,0)$ 处的可微性.

解. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$, $\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,

$\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\Delta f-\left[f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y\right]}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$, 可微.

定理. 设 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 的邻域内可偏导, 且偏导函数在 (x,y) 处连续, 则它在 (x,y) 处可微.

三. 全微分在近似计算中的应用

设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微, 且 $f_x(x_0,y_0)$ 与 $f_y(x_0,y_0)$ 不同时为零, 则当 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<<1$ 时, 有近似公式:

$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

例. 近似计算 $(1.04)^{2.02}$.

解. 设 $f(x,y)=x^y$, $f(1.04,2.02)\approx f(1,2)+f_x(1,2)\cdot 0.04+f_y(1,2)\cdot 0.02$,

$f_x(1,2)=yx^{y-1}\Big|_{(1,2)}=2$, $f_y(1,2)=x^y\ln x\Big|_{(1,2)}=0$, 故 $(1.04)^{2.02}\approx 1.08$.

课内练习

1. 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz=2dx+3dy$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+2h,2-3h)}{h}$.

解. $f_x(1,2)=2$, $f_y(1,2)=3$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2h,2-3h)-f(1,2)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f_x(1,2)\cdot 2h+f_y(1,2)\cdot(-3h)+o\left(\sqrt{4h^2+9h^2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2h+3\cdot(-3h)}{h}=-5.$$

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, 证明: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

证. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$, $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\Delta f(0,0)-\left[f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y\right]}{\rho}=$

$\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0$, 故可微, 证毕.

3. 证明: $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

证. $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=1$, $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\Delta f(0,0)-\left[f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y\right]}{\rho}=$

$\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-\Delta x-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在, 故不可微, 证毕.

4. 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 证明: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微 $\Leftrightarrow\varphi(0,0)=0$.

证. 必要性: 在 $(0,0)$ 处可微 $\Rightarrow f_x(0,0)$ 存在, 而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\varphi(x,0)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}\varphi(x,0)=\pm\varphi(0,0)$, 故只能 $\varphi(0,0)=0$;

充分性: $\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{f\left(\Delta x,\Delta y\right)-f\left(0,0\right)-\left[f_x\left(0,0\right)\Delta x-f_y\left(0,0\right)\Delta y\right]}{\rho}=$

$\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{f\left(\Delta x,\Delta y\right)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}\varphi\left(\Delta x,\Delta y\right)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\varphi\left(\Delta x,\Delta y\right)=\varphi\left(0,0\right)=0$, 故在 $\left(0,0\right)$ 处可微, 证毕.

第 9.4 节 多元复合函数的求导法则

一. 多元链式法则

定理. 设 $z=f(u,v)$ 有连续的偏导数, 且 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 可导, 则

$z=f[u(x),v(x)]$ 可导, 并且 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{dx}$.

注. 设 $z=f(u,v,w)$, $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$, 则

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}.$$

推论. 设 $z=f(u,v,x)$ 有连续的偏导数, 且 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 可导, 则

$z=f[u(x),v(x),x]$ 可导, 并且 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

例. 设 $z=uv+\sin x$, 其中 $u=e^x$, $v=\cos x$, 求 $\dfrac{dz}{dx}$.

解. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=ve^x-u\sin x+\cos x=e^x\cos x-e^x\sin x+\cos x$.

定理. 设 $z=f(u,v)$ 有连续的偏导数, 且 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 可偏导, 则

$z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 可偏导, 并且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

注. 设 $z=f(u,v,w)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, $w=w(x,y)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

推论. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的偏导数, 且 $z=z(x,y)$ 可偏导, 则

$u=f[x,y,z(x,y)]$ 可偏导, 并且 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

例. 设 $z=(2x+3y)^{xy}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解. 设 $z=u^v$, 其中 $u=2x+3y$, $v=xy$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=$

$vu^{v-1}\cdot 2+u^v\ln u\cdot y=xy(2x+3y)^{xy-1}\cdot 2+(2x+3y)^{xy}\ln(2x+3y)\cdot y$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=xy(2x+3y)^{xy-1}\cdot 3+(2x+3y)^{xy}\ln(2x+3y)\cdot x.$$

例. 设 $u=f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$, 其中 $z=x^2\sin y$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2+z^2}+2ze^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x\sin y$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2+z^2}+2ze^{x^2+y^2+z^2}\cdot x^2\cos y.$$

例. 求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 在极坐标 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ 下的形式.

解. $z-(\rho,\theta)-(x,y)$, 则 $\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{y}{\rho}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-y}{\rho^2}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{\rho^2}$, 故

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{x}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{-y}{\rho^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{y}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{x}{\rho^2}$, 代入 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 得 $\rho\frac{\partial z}{\partial\rho}=0$.

例. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 在极坐标 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ 下的形式.

解. $z-(\rho,\theta)-(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{x}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{-y}{\rho^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\cdot\frac{x}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{1\cdot\rho-x\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}}{\rho^2}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\cdot\frac{-y}{\rho^2}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{y\cdot2\rho\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}}{\rho^4}=$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\frac{x}{\rho}+\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}\frac{-y}{\rho^2}\right)\cdot\frac{x}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{\rho^2-x^2}{\rho^3}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial\rho}\frac{x}{\rho}+\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\frac{-y}{\rho^2}\right)\cdot\frac{-y}{\rho^2}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{2xy}{\rho^4}=$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\frac{x^2}{\rho^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}\frac{2xy}{\rho^3}+\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\frac{y^2}{\rho^4}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{\rho^2-x^2}{\rho^3}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{2xy}{\rho^4},$$

$z-(\rho,\theta)-(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{y}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{x}{\rho^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\cdot\frac{y}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{1\cdot\rho-y\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}}{\rho^2}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\cdot\frac{x}{\rho^2}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{-x\cdot2\rho\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}}{\rho^4}=$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\frac{y}{\rho}+\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}\frac{x}{\rho^2}\right)\cdot\frac{y}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{\rho^2-y^2}{\rho^3}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial\rho}\frac{y}{\rho}+\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\frac{x}{\rho^2}\right)\cdot\frac{x}{\rho^2}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{-2xy}{\rho^4}=$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\frac{y^2}{\rho^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}\frac{2xy}{\rho^3}+\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\frac{x^2}{\rho^4}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{\rho^2-y^2}{\rho^3}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{-2xy}{\rho^4},$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}$.

例. 设 $z=f(ax+by,cx+dy)$, 其中 f 有连续的二阶偏导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. 令 $u=ax+by$, $v=cx+dy$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}=af_u+cf_v=af_1+cf_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=a\left(f_{uu}\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uv}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+c\left(f_{vu}\frac{\partial u}{\partial y}+f_{vv}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=abf_{uu}+adf_{uv}+bcf_{vu}+cdf_{vv}=$$

$$abf_{uu}+(ad+bc)f_{uv}+cdf_{vv}=abf_{11}+(ad+bc)f_{12}+cdf_{22}.$$

例. 设 $w=f(x+y+z,xyz)$, 其中 f 有连续的二阶偏导, 求 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

解. 令 $u=x+y+z$, $v=xyz$, 则 $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=f_1+yzf_2$,

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial z}(f_1+yzf_2)=\dfrac{\partial f_1}{\partial z}+yf_2+yz\dfrac{\partial f_2}{\partial z}=(f_{11}+xyf_{12})+yf_2+yz(f_{21}+xyf_{22})=$

$f_{11}+y(x+z)f_{12}+xy^2zf_{22}+yf_2$.

二. 全微分的形式不变性

设 $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, 均有连续的偏导数, 则

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)dy=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$, 即

无论 u, v 是中间变量还是自变量, $dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$ 总是对的.

补充练习

1. 设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数, 且 $f(1,1)=1$, $f_x(1,1)=2$, $f_y(1,1)=3$, 令 $F(x)=f[x,f(x,x)]$, 求 $F'(1)$.

解. $F'(x)=f_1[x,f(x,x)]+f_2[x,f(x,x)][f_1(x,x)+f_2(x,x)]$, 故

$F'(1)=f_1(1,1)+f_2(1,1)[f_1(1,1)+f_2(1,1)]=17$.

2. 设 $z=f[\varphi(x)-y,\psi(y)+x]$, 其中 f 有连续的二阶偏导, φ 与 ψ 可导, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\varphi'(x)+f_2'$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\cdot\psi'(y)]\varphi'(x)+f_{21}''\cdot(-1)+$

$f_{22}''\cdot\psi'(y)=-\varphi'(x)f_{11}''+[\psi'(y)\varphi'(x)-1]f_{12}''+\psi'(y)f_{22}''$.

3. 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 f 有连续的二阶偏导, g 二阶可导, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1\cdot y+f_2\cdot\dfrac{1}{y}+g'\cdot\dfrac{-y}{x^2}=yf_1+\dfrac{1}{y}f_2-\dfrac{y}{x^2}g'$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1+y\left(f_{11}\cdot x+f_{12}\cdot\dfrac{-x}{y^2}\right)-\dfrac{1}{y^2}f_2+\dfrac{1}{y}\left(f_{21}\cdot x+f_{22}\cdot\dfrac{-x}{y^2}\right)-\dfrac{1}{x^2}g'-\dfrac{y}{x^2}g''\cdot\dfrac{1}{x}=$

$f_1-\dfrac{1}{y^2}f_2+xyf_{11}-\dfrac{x}{y^3}f_{22}-\dfrac{1}{x^2}g'-\dfrac{y}{x^3}g''$.

4. 设 $B^2-AC>0$, 且 $A\neq0$, 证明: 存在非奇异线性变换 $\begin{cases}\xi=\lambda x+y\\ \eta=\mu x+y\end{cases}$, 使得方程

$A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 可化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

证. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\mu\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\lambda\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)=\lambda^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\lambda\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\mu^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\lambda\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)=\lambda\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, 于是

$\left(A\lambda^2+2B\lambda+C\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\left[A\lambda\mu+B(\lambda+\mu)+C\right]\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\left(A\mu^2+2B\mu+C\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$,

故取 λ, μ 为 $Ax^2+2Bx+C=0$ 的两个不同的实根即可, 证毕.

第 9.5 节 隐函数的求导公式

一. 一个方程的情形

定理. 设 $F(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 的邻域内有连续偏导数, $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, 则方程 $F(x,y)=0$ 在 P 的某个邻域内唯一确定连续可导的函数 $y=y(x)$, 它满足 $F[x,y(x)]\equiv 0$, $y_0=y(x_0)$, 并且 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

定理. 设 $F(x,y,z)$ 在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某个邻域内有连续的偏导数, $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则 $F(x,y,z)=0$ 在 P 的某个邻域内唯一确定连续可偏导的函数 $z=z(x,y)$, 它满足 $F[x,y,z(x,y)]\equiv 0$, $z_0=z(x_0,y_0)$, 并且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$.

例. 设 $z=z(x,y)$ 是 $x^2+y^2+z^2-4z=0$ 确定的隐函数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{x}{2-z}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{(2-z)-x\cdot(-z_x)}{(2-z)^2}=\dfrac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$.

例. 设 $z=z(x,y)$ 是 $x=ze^{y+z}$ 确定的隐函数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. 两边对 x 求偏导 $\Rightarrow 1=\dfrac{\partial z}{\partial x}e^{y+z}+ze^{y+z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{(1+z)e^{y+z}}=\dfrac{z}{x(1+z)}$;

两边对 y 求偏导 $\Rightarrow 0=\dfrac{\partial z}{\partial y}e^{y+z}+ze^{y+z}\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-ze^{y+z}}{(1+z)e^{y+z}}=-\dfrac{z}{1+z}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{1+z}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{1+z}\right)=\frac{z_y}{x(1+z)^2}=-\frac{z}{x(1+z)^3}.$$

二. 方程组的情形

定理. 设 $\begin{cases}F(x,y,u,v)\\G(x,y,u,v)\end{cases}$ 在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某个邻域内具有连续的偏导数, 且 $\begin{cases}F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0\\G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0\end{cases}$, Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}$ 在 P 处不为 0, 则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在 P 的邻域内唯一确定一组有连续偏导数的函数 $\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$,

它满足 $\begin{cases}F[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0\\G[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0\end{cases}$, $\begin{cases}u_0=u(x_0,y_0)\\v_0=v(x_0,y_0)\end{cases}$, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

例. 设一组函数 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$, 满足 $\begin{cases} xu-yv=0 \\ yu+xv=1 \end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解. 方程组两边对 x 求偏导, $\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial x}=-u \\ y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial v}{\partial x}=-v \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-xu-yv}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2} \end{cases}$;

方程组两边对 y 求偏导, $\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial v}{\partial y}=v \\ y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial y}=-u \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-xu-yv}{x^2+y^2} \end{cases}$.

例. 设 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 是 $\begin{cases} x=u\cos\frac{v}{u} \\ y=u\sin\frac{v}{u} \end{cases}$ 的反函数组, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解. $\begin{cases} 1=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\frac{v}{u}-u\sin\frac{v}{u}\cdot\left(\frac{v}{u}\right)_x \\ 0=\frac{\partial u}{\partial x}\sin\frac{v}{u}+u\cos\frac{v}{u}\cdot\left(\frac{v}{u}\right)_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\sin\frac{v}{u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=1 \\ \left(\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\frac{v}{u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$, 得

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\cos\frac{v}{u} \\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u} \end{cases}$, 类似地, $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u} \\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}+\cos\frac{v}{u} \end{cases}$.

定理. 设 $\begin{cases} F(x,y,z) \\ G(x,y,z) \end{cases}$ 在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域内有连续的偏导数, $\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0 \\ G(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$, $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_P \neq 0$, 则方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在 P 的邻域内唯一确定一组连续可导的函数 $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$, 它满足 $\begin{cases} F[x,y(x),z(x)]\equiv 0 \\ G[x,y(x),z(x)]\equiv 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y_0=y(x_0) \\ z_0=z(x_0) \end{cases}$, 并且

$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$, $\frac{dz}{dx}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$.

例. 设 $y=f(x,t)$, 而 $t=t(x,y)$ 是由 $F(x,y,t)=0$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解一. $y\equiv f[x,t(x,y)] \Rightarrow \frac{dy}{dx}=f_x+f_t\left(\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{f_x+f_t\frac{\partial t}{\partial x}}{1-f_t\frac{\partial t}{\partial y}}$, 而

$F(x,y,t)=0 \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_t}$, $\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_t}$, 代入, 得 $\frac{dy}{dx}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}$;

解二. $\begin{cases} y=f(x,t) \\ F(x,y,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{dt}{dx} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{dt}{dx}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{\partial F}{\partial x} \end{cases}$, 解得

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}$.

补充练习

1. 设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数, $y=x^3$ 是 $f(x,y)$ 的一条等高线, 已知 $f_y(1,1)=-1$, 求 $f_x(1,1)$.

解. $f(x,x^3)=C \Rightarrow f_x(x,x^3)+f_y(x,x^3)\cdot 3x^2=0$, 代入 $x=1$, $y=1$, 得 $f_x(1,1)+f_y(1,1)\cdot 3=0$, 故 $f_x(1,1)=3$.

2. 设 $z=f(x+y+z,xyz)$, $f(x,y)$ 有连续的偏导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial x}{\partial y}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

解. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{f_1+yzf_2}{1-f_1-xyf_2}$, $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_x}=-\dfrac{f_1+xzf_2}{f_1+yzf_2}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{F_z}{F_y}=\dfrac{1-f_1-xyf_2}{f_1+xzf_2}$.

3. 设 $z=\ln f(x-y)+xy$, 其中 $y=y(x)$ 是 $e^{xy}-x+y=0$ 确定的隐函数, 已知 $f(1)=f'(1)=1$, 求 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}$.

解. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{f'(x-y)}{f(x-y)}\left(1-\dfrac{dy}{dx}\right)+y+x\dfrac{dy}{dx}$, 而 $x=0$ 时 $y=-1$, 代入得

$\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}=\dfrac{f'(1)}{f(1)}\left(1-\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}\right)-1+0=-\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$, 由 $e^{xy}-x+y=0$, 两边求导, 得

$e^{xy}\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)-1+\dfrac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-ye^{xy}}{1+xe^{xy}} \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=2$, 故 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}=-2$.

4. 设 $u=xy^2z^3$, 其中 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2+y^2+z^2=3xyz$, 求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}$.

解. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3+3xy^2z^2\dfrac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2+3\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}$, 由 $x^2+y^2+z^2=3xyz$,

两边求偏导, $2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=3xz+3xy\dfrac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-3xz}{3xy-2z} \Rightarrow \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=-1$, 故

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2-3=-1$.

5. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,z)=0$ 确定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. 令 $f\left(x,y,z\right)=F\left(x-y,z\right)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_x}{f_z}=-\dfrac{F_1}{F_2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{f_y}{f_z}=\dfrac{F_1}{F_2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\left(-\frac{F_1}{F_2}\right)=-\frac{\left[F_{11}\left(-1\right)+F_{12}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]F_2-F_1\left[F_{21}\left(-1\right)+F_{22}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]}{F_2^2}$$

$$=-\frac{\left[F_{11}\left(-1\right)+F_{12}\cdot\dfrac{F_1}{F_2}\right]F_2-F_1\left[F_{21}\left(-1\right)+F_{22}\cdot\dfrac{F_1}{F_2}\right]}{F_2^2}$$

$$=-\frac{\left[-F_{11}F_2+F_{12}F_1\right]F_2-F_1\left[-F_{21}F_2+F_{22}F_1\right]}{F_2^3}=\frac{F_{11}F_2^2-2F_{12}F_1F_2+F_{22}F_1^2}{F_2^3}.$$

第 9.6 节 多元函数微分学的几何应用

一. 一元向量值函数及其导数

1. 基本概念

定义. 设 $I\subset\mathbb{R}$, 则 $\vec{f}:I\to\mathbb{R}^3$ 称为(一元)向量值函数, 记为 $\vec{r}=\vec{f}(t)$, 其中 $\vec{f}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 为其分量.

定义. $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\left(\lim\limits_{t\to t_0}x(t),\lim\limits_{t\to t_0}y(t),\lim\limits_{t\to t_0}z(t)\right)$.

定义. 若 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0)$, 则称 $\vec{f}(t)$ 在 t_0 处连续.

定义. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)}{\Delta t}=(x'(t),y'(t),z'(t))$, 称为 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 的导数, 或导向量, 记为 $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, $\dfrac{d\vec{f}}{dt}$, $\vec{r}'(t)$, $\vec{f}'(t)$.

2. 几何意义

设 $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 若 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, 则 M 的轨迹是一条曲线 Γ, 称为 $\vec{r}(t)$ 的终端曲线, 或图形, 即 $\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$, 而 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 称为 Γ 的向量方程.

设 $\vec{r}(t)=\overrightarrow{OM}$, $\vec{r}(t+\Delta t)=\overrightarrow{OM'}$, 则 $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ 为 $\overrightarrow{MM'}$ 的方向向量, 而 $\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ 为 Γ 在 M 处切线的方向向量(假设不为零向量), 称为 Γ 的切向量, 记为 $\vec{T}$.

3. 物理意义

设 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 为动点 M 的位置向量, 则它的速度 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, 速率 $v=\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$;

加速度 $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, 加速度大小 $a=\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$.

4. 求导法则

(1) $\left[\alpha\vec{f}(t)+\beta\vec{g}(t)\right]'=\alpha\vec{f}'(t)+\beta\vec{g}'(t)$; (2) $\left[f(t)\vec{g}(t)\right]'=f'(t)\vec{g}(t)+f(t)\vec{g}'(t)$;

(3) $\left[\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)\right]'=\vec{f}'(t)\cdot\vec{g}(t)+\vec{f}(t)\cdot\vec{g}'(t)$;

(4) $\left[\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right]'=\vec{f}'(t)\times\vec{g}(t)+\vec{f}(t)\times\vec{g}'(t)$;

(5) $\left\{\vec{f}\left[g(t)\right]\right\}'=g'(t)\vec{f}'\left[g(t)\right]$.

二. 空间曲线的切线与法平面

情况 1. 参数方程

设空间曲线$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$, $M(x_0,y_0,z_0)$对应参数$t=t_0$, 则该点处的切线方程为:

$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$, 过$M$且与切线垂直的平面称为$\Gamma$在该点处的法平面.

例. 求$\Gamma:\begin{cases}x=t\\y=t^2\\z=t^3\end{cases}$在$(1,1,1)$处的切线与法平面方程.

解. $\vec{T}=(1,2t,3t^2)_{t=1}=(1,2,3)$, 故切线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$;

法平面方程为$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)+3\cdot(z-1)=0$.

情况 2. 一般方程

定理. 设$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$, 若在$M$处$(F_x,F_y,F_z)\times(G_x,G_y,G_z)\neq\vec{0}$, 则$\Gamma$在$M$处的切向量$\vec{T}=(F_x,F_y,F_z)\times(G_x,G_y,G_z)$.

例. 求$\Gamma:\begin{cases}xyz=-1\\x-y^2+2=0\end{cases}$垂直于$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$的法平面方程.

解. 设切点(x,y,z), 则$\vec{T}=(yz,xz,xy)\times(1,-2y,0)=(2xy^2,xy,-2y^2z-xz)$, 由

$\vec{T}\,//\,(2,1,1)\Rightarrow\dfrac{2xy^2}{2}=\dfrac{xy}{1}=\dfrac{-2y^2z-xz}{1}\Rightarrow y=1$, 由$\begin{cases}xyz=-1\\x-y^2+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\z=1\end{cases}$, 故

法平面方程为$2(x+1)+(y-1)+(z-1)=0$, 即$2x+y+z=0$.

三. 曲面的切平面与法线

在$\Sigma:F(x,y,z)=0$上任取过$M(x,y,z)$的光滑曲线$\Gamma:\vec{r}=\vec{r}(t)$, 则

$F[x(t),y(t),z(t)]=0$, 两边对t求导, 得到$(F_x,F_y,F_z)\cdot\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right)=0$, 其中

$\vec{T}=\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right)$是$\Gamma$的切向量, 而$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)$与$\Gamma$无关, 于是$\Sigma$上所有过$M$的曲线在$M$处的切线均垂直于$\vec{n}$, 它们构成一个平面, 称为$\Sigma$的切平面, 而$\vec{n}$为它的法向量, 称为曲面$\Sigma$的法向量; 过$M$, 垂直于切平面的直线称为该曲面的法线.

例. 求$z=x^2+y^2-1$在$(2,1,4)$处的切平面及法线方程.

解. $x^2+y^2-1-z=0$, $\vec{n}=(2x,2y,-1)\big|_{(2,1,4)}=(4,2,-1)$, 故切平面方程为

$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$; 法线方程为$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$.

例. 求$x^2+2y^2+3z^2=21$上平行于$x+4y+6z=0$的切平面方程.

解. 设切点为(x,y,z), 则$\vec{n}=(2x,4y,6z)//(1,4,6)\Rightarrow\frac{2x}{1}=\frac{4y}{4}=\frac{6z}{6}$, 得$2x=y=z$,

代入$x^2+2y^2+3z^2=21$, 得$x=\pm1$, 故切点为$(\pm1,\pm2,\pm2)$, 切平面方程为

$(x\pm1)+4\cdot(y\pm2)+6\cdot(z\pm2)=0$, 即$x+4y+6z=\pm21$.

例. 求过$L:\begin{cases}4x+y-z-3=0\\x+y-z=0\end{cases}$, 与$3x^2+y^2-z^2=3$相切的平面方程.

解. 设切点$P(x_0,y_0,z_0)$, 则$3x_0^2+y_0^2-z_0^2=3$, 由$\vec{n}=(3x_0,y_0,-z_0)$, 得切平面方程

$3x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)-z_0(z-z_0)=0$, 即$3x_0x+y_0y-z_0z-3=0$;

设切平面为$4x+y-z-3+\lambda(x+y-z)=0$, 则

$\frac{4+\lambda}{3x_0}=\frac{1+\lambda}{y_0}=\frac{-1-\lambda}{-z_0}=\frac{-3}{-3}\Rightarrow\begin{cases}3x_0=4+\lambda\\y_0=1+\lambda\\z_0=1+\lambda\end{cases}$, 代入$3x_0^2+y_0^2-z_0^2=3$, 解得$\lambda=-1$, -7,

即$P(1,0,0)$或$(-1,-6,-6)$, 故切平面方程为$x-1=0$, 或$x+2y-2z+1=0$.

例. 求过$L:\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}$, 与$x^2+2y^2+3z^2=21$相切的平面方程.

解. 设切点$P(x_0,y_0,z_0)$, 则$x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21$, 由$\vec{n}=(x_0,2y_0,3z_0)$, 得切平面方程

$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+3z_0(z-z_0)=0$, 即$x_0x+2y_0y+3z_0z-21=0$;

代入$\left(6,3,\frac{1}{2}\right)$, 得$6x_0+6y_0+\frac{3}{2}z_0-21=0$;

最后, $(2,1,-1)\cdot(x_0,2y_0,3z_0)=0\Rightarrow2x_0+2y_0-3z_0=0$, 得切点为

$(3,0,2)$, 或$(1,2,2)$, 故切平面为$x+4y+6z-21=0$, 或$x+2z-7=0$.

四. 全微分的几何意义

曲面$\Sigma:z=f(x,y)$在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面方程为

$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+(-1)(z-z_0)=0$, 即

$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$, 故$z=f(x,y)$的全微分是曲面

$\Sigma:z=f(x,y)$的切平面上点的纵坐标增量.

补充练习

1. 设$\Gamma:\begin{cases}x=t\\y=-t^2\\z=t^3\end{cases}$上与$ax+by+cz+d=0$平行的切线恰有二条, 求$a,b,c$应满足的条件.

解. $\vec{T}=(1,-2t,3t^2)\perp(a,b,c)\Rightarrow(1,-2t,3t^2)\cdot(a,b,c)=0\Rightarrow a-2bt+3ct^2=0$, 此方程恰有两个不同实根, 故$\Delta=4b^2-12ac>0$, 且$c\neq0$.

2. 求过$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x^2+2y^2+4z^2=4 \end{cases}$在$M\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$处的切线, 且垂直于$\sqrt{2}x+y+z=0$的平面方程.

解. $\vec{n}_1=\left(2x,2y,2z\right)\big|_M=\left(2,\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, $\vec{n}_2=\left(2x,4y,8z\right)\big|_M=\left(2,2\sqrt{2},4\sqrt{2}\right)$, 得

$\vec{T}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=2\left(2,-3\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, 故$\vec{n}=\left(2,-3\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{2},1,1\right)=-4\left(\sqrt{2},0,-2\right)$,

于是所求平面方程为$\sqrt{2}\cdot\left(x-1\right)+0\cdot\left(y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\cdot\left(z-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$, 即$\sqrt{2}x-2z=0$.

3. 设$z=x^2+y^2$在$\left(1,2,5\right)$处的切平面通过$L:\begin{cases} x+y=b \\ ax+y-z=3 \end{cases}$, 求$a,b$.

解. $\vec{n}=\left(2x,2y,-1\right)\big|_{(1,2,5)}=\left(2,4,-1\right)$, 设$\Pi: x+y-b+\lambda\left(ax+y-z-3\right)=0$, 则

$\dfrac{1+\lambda a}{2}=\dfrac{1+\lambda}{4}=\dfrac{-\lambda}{-1}=\dfrac{-b-3\lambda}{-5}\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{3}$, $a=-1$, $b=\dfrac{2}{3}$.

第 9.7 节 方向导数与梯度

一. 方向导数

设 $l:\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \end{cases}(t \ge 0)$ 是以 P_0 为始点, 以 α, β 为方向角的射线, 若 $f(x,y)$ 在某个 $U(P_0)$ 内有定义, 则 $f(x,y)$ 在 P_0 处沿方向 l 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = \lim_{P \to P_0(\text{沿着}l)} \frac{f(P)-f(P_0)}{|PP_0|} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

例. 求 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ 在 $O(0,0)$ 处沿 $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数.

解. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(t\cos\alpha,\ t\cos\beta) - f(0,0)}{t} = 1$.

定理. 设 $f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 处可微, 则它在该点沿任意方向 l 的方向导数均存在, 并且 $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{e}_l$, 其中 $\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\vec{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$.

例. 求 $z = xe^{2y}$ 在 $P(1,0)$ 处沿 $P(1,0)$ 到 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数.

解. $\operatorname{grad} z(1,0) = \left(e^{2y}, 2xe^{2y}\right)_{(1,0)} = (1,2)$, $\vec{l} = (1,-1)$, $\vec{e}_l = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 故

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)} = (1,2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

例. 求 $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ 在 $(1,1,2)$ 处沿 $\vec{l}$ 的方向导数, 其中 $\vec{l}$ 的方向角分别为 60°, 45°, 60°.

解. $\operatorname{grad} f(1,1,2) = (y+z, x+z, x+y)_{(1,1,2)} = (3,3,2)$,

$\vec{e}_l = (\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos 60^\circ) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1,2)} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{e}_l = \dfrac{5+3\sqrt{2}}{2}$.

例. 求 $u = \dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在 $P(1,1,1)$ 处沿曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在该点处指向内侧的法线方向的方向导数.

解. $\vec{n} = -(4x, 6y, 2z)_{(1,1,1)} = -(4,6,2)$, 故 $\vec{e}_n = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{14}}, \dfrac{-3}{\sqrt{14}}, \dfrac{-1}{\sqrt{14}}\right)$, 而

$\left.\operatorname{grad} u\right|_P = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_P = \left(\dfrac{6}{\sqrt{14}}, \dfrac{8}{\sqrt{14}}, -\sqrt{14}\right)$, 故 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_P = \left.\operatorname{grad} u\right|_P \cdot \vec{e}_n = -\dfrac{11}{7}$.

二. 梯度

设 $f(x,y)$ 在 (x,y) 的某个邻域内有连续偏导数, 记 $\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, 称为 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处的梯度, 也记为 $\vec{\nabla} f$, 其中 $\vec{\nabla}$ 称为向量微分算子.

设 $f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 的某个邻域内有连续偏导数, 则它在 (x,y,z) 处的**梯度**为

$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$, 也记为 $\vec{\nabla} f$.

几何意义: 曲线 $f(x,y)=c$ 称为 $f(x,y)$ 的**等值线**, $\operatorname{grad} f$ 是该曲线的法向量, 并且从数值较低的等值线指向数值较高的等值线, 沿该方向函数的变化率最大.

曲面 $f(x,y,z)=c$ 称为 $f(x,y,z)$ 的**等值面**, $\operatorname{grad} f$ 是该曲面的法向量, 并且从数值较低的等值面指向数值较高的等值面, 沿该方向函数的变化率最大.

定理. 设 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微, 则

(1) 当 $\vec{l}=\operatorname{grad} f(x,y)$ 时, $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\left|\operatorname{grad} f(x,y)\right|$ 最大;

(2) 当 $\vec{l}=-\operatorname{grad} f(x,y)$ 时, $\dfrac{\partial f}{\partial l}=-\left|\operatorname{grad} f(x,y)\right|$ 最小;

(3) 当 $\vec{l}\perp \operatorname{grad} f(x,y)$ 时, $\dfrac{\partial f}{\partial l}=0$.

例. 求 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ 在 $(1,1)$ 处方向导数的最大值与最小值, 以及使得方向导数为零的方向.

解. $\operatorname{grad} f(1,1)=(x,y)\big|_{(1,1)}=(1,1)$, 故 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 $-\sqrt{2}$;

沿 $\vec{l}=\pm(1,-1)$ 方向的方向导数为零.

例. 求 $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ 在 $(1,1,0)$ 处方向导数的最大值以及取到该最大值的方向.

解. $\operatorname{grad} f(1,1,0)=\left(3x^2-y^2,-2xy,-1\right)\big|_{(1,1,0)}=(2,-2,-1)$, 故当 $\vec{l}=(2,-2,-1)$ 时,

$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\left|(2,-2,-1)\right|=3$ 最大.

三. 数量场与向量场

定义. 区域 G 上的函数 $f(M)$ 称为 G 上的**数量场**, 如温度场; 区域 G 上的向量值函数 $\vec{F}(M)$ 称为 G 上的**向量场**, 如力场.

对于数量场 $f(M)$, 向量场 $\vec{F}=\operatorname{grad} f(M)$ 称为它的**梯度场**, 反之 $f(M)$ 称为这个向量场的**势函数**, 具有势函数的向量场称为**保守场**, **守恒场**, **位势场**, 例如引力场, 真空中的静电场.

例. 证明: 中心力场 $\vec{F}=f(r)\vec{e}_r=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\vec{e}_r$ 一定是保守场.

证. 设 $G'(r)=f(r)$, 则 $\operatorname{grad}G=G'(r)\operatorname{grad}r=G'(r)\dfrac{(x,y,z)}{r}=f(r)\vec{e}_r$, 证毕.

补充练习

1. 求$u=y^2\left(\dfrac{x}{z^2}\right)^{\arctan\frac{1}{y}}$在$(1,1,1)$处的最大方向导数.

解. $u(x,1,1)=x^{\frac{\pi}{4}}\Rightarrow u_x(1,1,1)=\dfrac{\pi}{4}$, $u(1,y,1)=y^2\Rightarrow u_y(1,1,1)=2$,

$u(1,1,z)=z^{-\frac{\pi}{2}}\Rightarrow u_z(1,1,1)=-\dfrac{\pi}{2}$, 故$\max\dfrac{\partial u}{\partial l}=\left|\left(\dfrac{\pi}{4},2,-\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=\sqrt{\dfrac{5\pi^2}{16}+4}$.

2. 求由$z^3+xz-y=0$确定的$z=z(x,y)$在$(0,1)$处的最大方向导数.

解. $x=0$, $y=1$时$z=1$, $\operatorname{grad}z(0,1)=\left.\left(\dfrac{-z}{3z^2+x},\dfrac{1}{3z^2+x}\right)\right|_{(0,1)}=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, 故

$\max\dfrac{\partial z}{\partial l}=\left|\operatorname{grad}z(0,1)\right|=\dfrac{1}{3}\sqrt{2}$.

3. 设$f(x,y)=x+y^2$在$M(x_0,y_0)$处沿$\vec{l}=(1,2)$方向有最大的增长率, 并且$f(x_0,y_0)=3$, 求$M(x_0,y_0)$.

解. $\operatorname{grad}f|_M=(1,2y_0)$与$(1,2)$同向$\Rightarrow y_0=1$, 又$f(x_0,y_0)=3\Rightarrow x_0=2$.

4. 设$f(x,y)=ye^{ax}+b(x+1)\ln y$在$(0,1)$处沿$\vec{l}=(1,1)$方向取得最大增长率$2\sqrt{2}$, 求$a$, b.

解. $\operatorname{grad}f(0,1)=(a,1+b)$与$(1,1)$同向, 故$\dfrac{a}{1}=\dfrac{b+1}{1}\Rightarrow a=b+1$, 且$a>0$, 又$|(a,b+1)|=2\sqrt{2}\Rightarrow a^2+a^2=8\Rightarrow a=2$, $b=1$.

5. 设xOy面上的一条曲线通过$(0,1)$, 并且平行于$f(x,y)=x^3-3xy^2$的梯度场, 求该曲线的方程.

解. $\operatorname{grad}f=(f_x,f_y)=(3x^2-3y^2,-6xy)$, 设曲线方程为$y=y(x)$, 于是

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-6xy}{3x^2-3y^2}$, 此为齐次方程, 解得$3x^2y-y^3=C$, $C=-1$.

第 9.8 节 多元函数的极值及其求法

一. 多元函数的极值

设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某个邻域内有定义, 若对该邻域内不同于 (x_0,y_0) 的点上均有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$, 则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极大值; 极小值类似.

极大极小值统称为极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

例. 设 $f(x,y)$ 连续, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$, 证明: $f(0,0)$ 不是极值.

证. $f(x,y)=xy+\left(x^2+y^2\right)^2+o\left[\left(x^2+y^2\right)^2\right]$, 故 $f(x,x)=x^2+o\left(x^2\right)$, 而 $f(x,-x)=-x^2+o\left(x^2\right)$, 而 $f(0,0)=0$, 即得, 证毕.

定理(必要条件). 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在, 且有极值, 则 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.

定理(充分条件). 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域内有连续的二阶偏导数, 且 (x_0,y_0) 是其驻点, 令 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$, 则

(1) $AC-B^2>0$ 时 (x_0,y_0) 为极值点, 且 $A<0$ 时为极大值, $A>0$ 时为极小值;

(2) $AC-B^2<0$ 时 (x_0,y_0) 不是极值点.

例. 求 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解. $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$, 解得驻点 $(1,0)$, $(1,2)$, $(-3,0)$, $(-3,2)$,

$A=f_{xx}=6x+6$, $B=f_{xy}=0$, $C=f_{yy}=-6y+6$, 列表如下

(x,y)	$(1,0)$	$(1,2)$	$(-3,0)$	$(-3,2)$
A	12	12	-12	-12
B	0	0	0	0
C	6	-6	6	-6
$AC-B^2$	72	-72	-72	72
$f(x,y)$	极小值	非极值	非极值	极大值

极小值 $f(1,0)=-5$, 极大值 $f(-3,2)=31$.

二. 多元函数的最大值最小值

方法: (1) 确定 $f(x,y)$ 在 D 内最大最小值的存在性;

(2) 列出 $f(x,y)$ 在 D 内的驻点以及偏导数不存在的点, 计算这些点处的函数值;

(3) 若 D 不是开区域, 求出 $f(x,y)$ 在 $\partial D\cap D$ 上的最大最小值;

(4) 比较上述值的大小, 最大者为最大值, 最小者为最小值.

例. 求体积为a的长方体的最小表面积.

解. 设长宽为x, y, 高为$\frac{a}{xy}$, 故表面积$S=2\left(xy+x\cdot\frac{a}{xy}+y\cdot\frac{a}{xy}\right)=$
$2\left(xy+\frac{a}{y}+\frac{a}{x}\right)(x>0,y>0)$, 由$S_x=2\left(y-\frac{a}{x^2}\right)=0$, $S_y=2\left(x-\frac{a}{y^2}\right)=0$, 得
$x=y=\sqrt[3]{a}$, 唯一驻点, 由实际情况, $S\left(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a}\right)=6\sqrt[3]{a^2}$ 为最小值.

例. 求$f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在由$x+y=6$, x轴和y轴所围成的闭区域D上的最大最小值.

解. D为有界闭区域, 故$f(x,y)$在D上存在最大最小值;

由$\begin{cases} f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=xy(8-3x-2y)=0 \\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=x^2(4-x-2y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=8 \\ x+2y=4 \end{cases}$, 得

唯一驻点$(2,1)$, 而$f(2,1)=4$; 在边界$x=0$和$y=0$上, $f(x,y)=0$;

在$x+y=6$上, $f(x,y)=-12x^2+2x^3$, $0\le x\le 6$, 最小值为$f(4,2)=-64$, 最大值为$f(0,6)=f(6,0)=0$; 故最大值为4, 最小值为-64.

三. 条件极值 拉格朗日乘数法

条件极值: 求目标函数$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的极值.

拉格朗日乘数法. 设(x_0,y_0)为上述条件极值问题的解, 则存在λ, 使得

$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0 \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$, 其中$\lambda$称为拉格朗日乘子.

注. 令$L=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, 称为拉格朗日函数, 则上述条件为$L_x=L_y=L_\lambda=0$.

注. 其它情况, 例如求$f(x,y,z,t)$在约束$\begin{cases} \varphi(x,y,z,t)=0 \\ \psi(x,y,z,t)=0 \end{cases}$下的极值, 则令

$L(x,y,z,t;\lambda,\mu)=f(x,y,z,t)+\lambda\cdot\varphi(x,y,z,t)+\mu\cdot\psi(x,y,z,t)$, 由

$L_x=L_y=L_z=L_t=0$及$\varphi=\psi=0$, 解出(x,y,z)即可.

例. 求$f(x,y)=x^2+2y^2$在$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}y-2\right)^2=9$上的最大最小值.

解. 令$L(x,y;\lambda)=x^2+2y^2+\lambda\left[\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}y-2\right)^2-9\right]$, 则

$\begin{cases} L_x=2x+\lambda\cdot 2\left(x-\sqrt{2}\right)=0 \\ L_y=4y+\lambda\cdot 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}y-2\right)=0 \\ \left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}y-2\right)^2=9 \end{cases}$, 解得$\begin{cases} x=\sqrt{2}\pm\sqrt{3} \\ y=\sqrt{2}\pm\sqrt{3} \end{cases}$, 而

$f\left(\sqrt{2}\pm\sqrt{3},\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\right)=15\pm 6\sqrt{6}$, 故最大值$15+6\sqrt{6}$, 最小值$15-6\sqrt{6}$.

例. 求周长为12的直角三角形的最大面积.

解. 设直角边长为x, y, 则$S=\frac{1}{2}xy$, 令$L=xy+\lambda\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}-12\right)$, 则

$$\begin{cases} L_x=y+\lambda\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0 \\ L_y=x+\lambda\left(1+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0 \\ x+y+\sqrt{x^2+y^2}=12 \end{cases}$$

, 由(1) (2), 得$\frac{y}{x}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow x=y$, 故

$x=y=12-6\sqrt{2}$, 于是$A_{\max}=108-72\sqrt{2}$.

例. 求表面积为a^2的长方体的最大体积.

解. 设长宽高为x,y,z, 则$V=xyz$, 令$L=xyz+\lambda\left(2xy+2yz+2zx-a^2\right)$, 则

$$\begin{cases} L_x=yz+2\lambda(y+z)=0 \\ L_y=xz+2\lambda(x+z)=0 \\ L_z=xy+2\lambda(y+x)=0 \\ 2xy+2yz+2xz=a^2 \end{cases}\Rightarrow x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}a, \text{ 故 } V_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3.$$

例. 求曲面$z=x^2+y^2$到平面$\Pi: x+y+z+1=0$的最短距离.

解. $d=\frac{|x+y+z+1|}{\sqrt{3}}$, 令$L=(x+y+z+1)^2+\lambda\left(z-x^2-y^2\right)$, 则

$$\begin{cases} L_x=2(x+y+z+1)-2\lambda x=0 \\ L_y=2(x+y+z+1)-2\lambda y=0 \\ L_z=2(x+y+z+1)+\lambda=0 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}\Rightarrow x=y=-\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{2}, \text{ 故 } d_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

例. 求原点到曲线$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$上点的最长与最短距离.

解. 令$L=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(z-x^2-y^2\right)+\mu(x+y+z-1)$, 由

$$\begin{cases} 2x-2\lambda x+\mu=0 \\ 2y-2\lambda y+\mu=0 \\ 2z+\lambda+\mu=0 \\ z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ z=2-\sqrt{3} \end{cases}\text{或}\begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ z=2+\sqrt{3} \end{cases}, \text{ 故}\begin{cases} d_{\max}=\sqrt{9+5\sqrt{3}} \\ d_{\min}=\sqrt{9-5\sqrt{3}} \end{cases}.$$

补充练习

1. 将正数a分解成三个正数x, y, z之和, 使得$u=x^m y^n z^p$最大, 其中m, n, p为已知正数.

解. 令 $L=x^m y^n z^p+\lambda(x+y+z-a)$, 则 $\begin{cases} L_x=mx^{m-1}y^n z^p+\lambda=0 \\ L_y=nx^m y^{n-1}z^p+\lambda=0 \\ L_z=px^m y^n z^{p-1}+\lambda=0 \\ x+y+z=a \end{cases}$, 解得 $\dfrac{x}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z}{p}$,

故 $x=\dfrac{m}{m+n+p}a$, $y=\dfrac{n}{m+n+p}a$, $z=\dfrac{p}{m+n+p}a$.

2. 欲做无盖长方体容器, 底部造价每平米 3 元, 侧面每平米 1 元, 设预算为 36 元, 求尺寸使得容积最大.

解. 设长宽高为 x, y, z, 令 $L=xyz+\lambda\left[3xy+1\cdot(2xz+2yz)-36\right]$, 则

$$\begin{cases} L_x=yz+\lambda(3y+2z)=0 \\ L_y=xz+\lambda(3x+2z)=0 \\ L_z=xy+\lambda(2x+2y)=0 \\ 3xy+1\cdot(2xz+2yz)=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}=\dfrac{3y+2z}{3x+2z} \\ \dfrac{z}{y}=\dfrac{3x+2z}{2x+2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=\dfrac{3}{2}y \end{cases}$$, 代入

$3xy+1\cdot(2xz+2yz)=36$, 得 $x=2$, $y=2$, $z=3$.

3. 设长方体的三个面在坐标面上, 一个顶点在平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1(a,b,c>0)$ 上, 求该长方体的最大体积.

解. 设长方体在平面上的那个顶点为 $A(x,y,z)$, 则 $V=xyz$, 令

$L=xyz+\lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1\right)$, 则 $\begin{cases} L_x=yz+\lambda\cdot\dfrac{1}{a}=0 \\ L_y=xz+\lambda\cdot\dfrac{1}{b}=0 \\ L_z=xy+\lambda\cdot\dfrac{1}{c}=0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{3} \\ y=\dfrac{b}{3} \\ z=\dfrac{c}{3} \end{cases}$, 故 $V_{\max}=\dfrac{abc}{27}$.

4. 求过 $\left(2,1,\dfrac{1}{3}\right)$ 的平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1(a,b,c>0)$, 使它与三个坐标面所围四面体的体积最小.

解. 设该平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, 其中 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{3c}=1$, 体积 $V=\dfrac{1}{6}abc$,

令 $L=abc+\lambda\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{3c}-1\right)$, 由 $L_a=L_b=L_c=L_\lambda=0$, 解得 $a=6$, $b=3$, $c=1$,

此时体积最小, 故所求方程为 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+z=1$.

5. 在曲面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点, 使得函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $\vec{l}=(1,-1,0)$ 的方向导数最大.

解. $\operatorname{grad} u=(2x,2y,2z)$, $\vec{e}_l=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\frac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad} u\cdot\vec{e}_l=\sqrt{2}x-\sqrt{2}y$,

令 $L=x-y+\lambda\left(2x^2+2y^2+z^2-1\right)$, 则 $\begin{cases}L_x=1+4\lambda x=0\\ L_y=-1+4\lambda y=0\\ L_z=2\lambda z=0\\ 2x^2+2y^2+z^2=1\end{cases}$, 解得

$x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\mp\frac{1}{2}$, $z=0$, 故 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)}=\sqrt{2}$ 最大, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}=-\sqrt{2}$ 最小.

第十章 重积分

第 10.1 节 二重积分的概念与性质

一. 二重积分的概念

1. 曲顶柱体的体积

2. 平面薄片的质量

3. 二重积分的定义

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有界, 将 D 任意分成 n 小块 $\Delta\sigma_i$, 作二重积分和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$, $\forall(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$, 若在无限细分 D 的过程中, 随 $\lambda\to 0$, 该和总是趋向于同一常数 I , 它只依赖于 $f(x,y)$ 和 D , 则称 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 记 $I=\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$, 称它为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分, 其中 $f(x,y)$ 为被积函数, $f(x,y)d\sigma$ 为被积表达式, $d\sigma$ 为面积元素, 在直角坐标下, 也可以记 $d\sigma=dxdy$, D 为积分区域, x,y 为积分变量.

定理. 平面有界闭区域上的二元连续函数必可积.

例. $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\frac{2}{3}\pi a^3$.

例. $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\pi a^2\cdot a-\frac{1}{3}\pi a^2\cdot a=\frac{2}{3}\pi a^3$.

二. 二重积分的性质

性质 1. $\iint\limits_{D}\left[\alpha f(x,y)\pm\beta g(x,y)\right]d\sigma=\alpha\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma\pm\beta\iint\limits_{D} g(x,y)d\sigma$;

性质 2. $\iint\limits_{D_1+D_2} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$;

性质 3. $\iint\limits_{D}1\cdot d\sigma=\sigma$, 即区域 D 的面积, 一般地, $\iint\limits_{D}k\cdot d\sigma=k\sigma$;

性质 4. 设在 D 上 $f(x,y)\le g(x,y)$, 则 $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma\le\iint\limits_{D} g(x,y)d\sigma$;

推论. $\left|\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma\right|\le\iint\limits_{D}\left|f(x,y)\right|d\sigma$.

性质 5(估值定理). 设在 D 上 $m\le f(x,y)\le M$, 则 $m\sigma\le\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma\le M\sigma$;

性质 6(积分中值定理). 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使得 $f(\xi,\eta)=\frac{1}{\sigma}\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$, 称为 $f(x,y)$ 在 D 上的平均值.

三. 对称性

1. 设 D 关于 y 轴对称, 即 $(x,y)\in D\Rightarrow(-x,y)\in D$, 则

(1) 当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 时, $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$;

(2) 当 $f(-x,y)=f(x,y)$ 时, $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D\cap\{x\geq0\}} f(x,y)d\sigma$.

2. 设 D 关于 x 轴对称, 即 $(x,y)\in D\Rightarrow(x,-y)\in D$, 则情况类似.

3. 设 D 关于直线 $y=x$ 对称, 即轮换对称: $(x,y)\in D\Rightarrow(y,x)\in D$, 则

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[f(x,y)+f(y,x)\right]d\sigma$; 特别地, 此时

$\iint\limits_D f(x)d\sigma=\iint\limits_D f(y)d\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[f(x)+f(y)\right]d\sigma$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\left(x^3+y^5+1\right)d\sigma$, 其中 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq1$.

解. $I=\iint\limits_D d\sigma=ab\pi=ab\pi$.

例. 求 $I=\iint\limits_D(x+y)^5d\sigma$, 其中 $D:|x|+|y|\leq1$.

解. $(x+y)^5$ 展开式里每一项均是 x 或 y 的奇函数, 故 $I=0$.

例. 求 $I=\iint\limits_D y\left[(x+1)e^x+(x-1)e^{-x}\right]d\sigma$, 其中 $D:x^3\leq y\leq1$, $-1\leq x\leq1$.

解. $I=\iint\limits_D xy\left(e^x+e^{-x}\right)d\sigma+\iint\limits_D y\left(e^x-e^{-x}\right)d\sigma=0$.

例. 求 $I=\iint\limits_D xd\sigma$, 其中 $D:(x-3)^2+(y-2)^2\leq1$.

解. $I=\iint\limits_D(x-3+3)d\sigma=\iint\limits_D(x-3)d\sigma+3\iint\limits_D d\sigma=0+3\pi=3\pi$.

例. 求 $I=\iint\limits_D yd\sigma$, 其中 D 由 $x=-\sqrt{2y-y^2}$, $x=-2$, $y=2$, $y=0$ 围成.

解. $I=\iint\limits_D(y-1+1)d\sigma=\iint\limits_D(y-1)d\sigma+\iint\limits_D d\sigma=\iint\limits_D d\sigma=4-\frac{\pi}{2}$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\left(x^2-y^2\right)dxdy$, 其中 $D:x^2+y^2\leq x+y$.

解. $I=\iint\limits_D x^2dxdy-\iint\limits_D y^2dxdy=0$, 或者 $I=\iint\limits_D\left(y^2-x^2\right)dxdy=0$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}d\sigma$, 其中 $D:x^2+y^2\leq1$.

解. $I=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}+\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\right]d\sigma=\frac{a+b}{2}\iint\limits_D d\sigma=\frac{a+b}{2}\pi$.

例. 证明: $I=\iint\limits_D \frac{1+e^{x^2}}{1+e^{y^2}}d\sigma \ge \pi$, 其中 $D: x^2+y^2 \le 1$.

证. 若 $f(x)>0$, 则 $\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}d\sigma = \frac{1}{2}\iint\limits_D \left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]d\sigma \ge \iint\limits_D d\sigma$, 证毕.

补充练习

1. 设 $f(x,y)$ 连续, 求 $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2} f(x,y)d\sigma$.

解. 上式 $=\lim\limits_{r\to 0^+} f(\xi,\eta) = \lim\limits_{(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)} f(\xi,\eta) = f(x_0,y_0)$.

2. 设 $f(x,y)=3\sqrt{1-x^2-y^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)d\sigma$, 求 $f(x,y)$.

解. 设 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = A$, 则 $f(x,y)=3\sqrt{1-x^2-y^2}+A$, 于是

$$A=3\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma + A\pi = 2\pi + A\pi \Rightarrow A=\frac{2\pi}{1-\pi}.$$

3. 求 $I=\iint\limits_D [f(x)-f(-y)]d\sigma$, 其中 $D: |x|+|y|\le 1$.

解. $I=\frac{1}{2}\iint\limits_D [f(x)-f(-x)+f(y)-f(-y)]d\sigma = 0$.

第 10.2 节 二重积分的计算法

一. 利用直角坐标计算二重积分

公式 1. 设 D 为 X-型区域: $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy .$$

公式 2. 设 D 为 Y-型区域: $c \le y \le d$, $x_1(y) \le x \le x_2(y)$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right] dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx .$$

推论. $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \varphi(x)\cdot\psi(y)dxdy = \int_a^b \varphi(x)dx \cdot \int_c^d \psi(y)dy$.

例. 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x)>0$, 证明: $\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2$.

证. 左式 $= \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} \frac{f(x)}{f(y)}d\sigma = \frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right] d\sigma \ge \iint\limits_D d\sigma$, 证毕.

例. 将 $I = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 化作两种顺序的二次积分, 其中

(1) D 由 $y = x^2$, $y = x$ 围成;

解. $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

(2) D 由 $y^2 = 4-x$, $x+2y-4=0$ 围成;

解. $I = \int_0^4 dx \int_{\frac{4-x}{2}}^{\sqrt{4-x}} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_{4-2y}^{4-y^2} f(x,y)dx$.

(3) D 由 $y^2 = x$, $y = x-2$ 围成;

解. $I = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx$.

(4) D 由 $x+y=2$, $x-y=0$, $x=0$ 围成.

解. $I = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$.

(5) D 由 $y = \ln x$, $y = e+1-x$, $y=0$ 围成.

解. $I = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy + \int_e^{e+1} dx \int_0^{e+1-x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^{e+1-y} f(x,y)dx$.

(6) D 由 $y = x$, $y = x+1$, $y=1$, $y=3$ 围成.

解. $I=\int_0^1 dx\int_1^{x+1} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_x^{x+1} f(x,y)dy+\int_2^3 dx\int_x^3 f(x,y)dy=\int_1^3 dy\int_{y-1}^{y} f(x,y)dx$.

例. 求 $I=\iint\limits_D y^2 d\sigma$, 其中 D 由 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴围成.

解. $I=\int_0^{2\pi a} dx\int_0^{y(x)} y^2 dy=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi a} y^3 dx=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 d(t-\sin t)=\frac{35}{12}\pi a^4$.

例. 求 $I=\iint\limits_D \arctan y d\sigma$, 其中 D 由 $y=x$, $y=1$, $x=0$ 围成.

解. $I=\int_0^1 dy\int_0^y \arctan y dx=\int_0^1 y\arctan y dy=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

例. 求 $I=\iint\limits_D x^2 e^{-y^2} d\sigma$, 其中 D 由 $y=x$, $y=1$, $x=0$ 围成.

解. $I=\int_0^1 dy\int_0^y x^2 e^{-y^2} dx=\int_0^1 \frac{y^3}{3} e^{-y^2} dy=\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

例. $\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 \frac{\sin x}{x} dx=\iint\limits_D \frac{\sin x}{x} d\sigma=\int_0^1 dx\int_1^{x+1}\frac{\sin x}{x} dy=\int_0^1 \sin x dx=1-\cos 1$.

例. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^4-y^2} dx=\iint\limits_D \sqrt{x^4-y^2} d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^4-y^2} dy=\int_0^1 \frac{\pi x^4}{4} dx=\frac{\pi}{20}$.

例. 设 $f(x)=\int_x^{2x} e^{-y^2} dy$, 求 $I=\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

解. $I=\int_0^{+\infty} dx\int_x^{2x} e^{-y^2} dy=\int_0^{+\infty} dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} e^{-y^2} dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} ye^{-y^2} dy=\frac{1}{4}$.

例. 交换积分顺序: (1) $\int_{-1}^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy=\int_{-1}^1 dy\int_{-1}^y f(x,y)dx$;

(2) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$;

(3) $\int_1^2 dy\int_y^{y^2} f(x,y)dx=\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^x f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)dy$;

(4) $\int_0^2 dy\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)dy+\int_2^{2\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy$;

(5) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$;

(6) $\int_0^1 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{1} f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\sqrt{\left|y-x^2\right|}d\sigma$, 其中 $D:|x|\le 1$, $0\le y\le 2$.

解. $I=\int_{-1}^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy+\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}dy=\frac{2}{3}\int_{-1}^1\left(x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx+\frac{2}{3}\int_{-1}^1\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=$

$\frac{2}{3}\int_{-1}^1|x|^3dx+\frac{2}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(2-2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}d\sqrt{2}\sin t=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\left|\cos(x+y)\right|d\sigma$, 其中 D 由 $y=0$, $y=x$, $x=\frac{\pi}{2}$ 围成.

解. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dy\int_y^{\frac{\pi}{2}-y}\cos(x+y)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{x}\cos(x+y)dy=\frac{\pi}{2}-1$.

例. 求 $I=\iint\limits_D(xy+\sin y)d\sigma$, 其中 D 由 $x=-\pi$, $y=\pi$, $y=x$ 围成.

解. $I=2\iint\limits_{D_1}\sin y dxdy=2\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}\sin y dy=2\int_0^{\pi}(1+\cos x)dx=2\pi$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\left(y^2+xy\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)d\sigma$, 其中 D 由 $y=x^3$, $y=1$, $x=-1$ 围成.

解. $I=2\iint\limits_{D_2+D_3}y^2d\sigma=2\int_{-1}^0 dx\int_0^1 y^2dy=\frac{2}{3}$.

二. 利用极坐标计算二重积分

公式 3. 设 D 为曲边扇形: $\alpha\le\theta\le\beta$, $\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_{\alpha}^{\beta}d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

例. 求 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=6-2x^2-y^2$ 所围立体的体积.

解. $V=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\left[\left(6-2x^2-y^2\right)-\left(x^2+2y^2\right)\right]d\sigma=3\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\left(2-x^2-y^2\right)d\sigma=$

$3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-\rho^2\right)\rho d\rho=6\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-\rho^2\right)\rho d\rho=6\pi$.

例. 求 $I=\iint\limits_D(3x+y)^2d\sigma$, 其中 $D:1\le x^2+y^2\le 4$.

解. $I=\iint\limits_D\left(9x^2+y^2\right)d\sigma=5\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)d\sigma=5\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{75\pi}{2}$.

例. $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2 d\sigma=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)d\sigma=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\left(x^2+y^2\right)d\sigma$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\pi R^4$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\left(xy+x\sqrt{x^2+y^2}+y^3\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma$, 其中 $D:x^2+y^2\le 2ax$.

解. $I=\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\rho d\rho=4a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=\dfrac{64}{15}a^4$.

例. 求 $x^2+y^2+z^2\le 4$ 被 $x^2+y^2=2x$ 截得立体的体积.

解. $V=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{4-\rho^2}\cdot\rho d\rho=\dfrac{32}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}\right)$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\left(|x|+x\right)yd\sigma$, 其中 $D:ay\le x^2+y^2\le 2ay$.

解. $I=2\iint\limits_{D_1}xyd\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\sin\theta}^{2a\sin\theta}\rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\rho d\rho=\dfrac{15}{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos\theta d\theta=\dfrac{5}{4}a^4$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\sqrt{4-x^2-y^2}d\sigma$, 其中 $D:x^2+y^2\le 1$, $x^2+y^2\le 2y$.

解. $I=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho+2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho=\dfrac{8-2\sqrt{3}}{3}\pi-\dfrac{22}{9}$.

例. 求 $I=\iint\limits_D xyd\sigma$, 其中 D 由 $y=2$, $y=0$, $x=-2$, $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 围成.

解. $I=\int_{-2}^{0}dx\int_0^2 xydy-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\rho d\rho=-4-\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{10}{3}$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, 其中 $D:-2x\le x^2+y^2\le 4$.

解. $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho\cdot\rho d\rho-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-2\cos\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\dfrac{16}{3}\pi-\dfrac{32}{9}$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\left|x^2+y^2+2y\right|d\sigma$, 其中 $D:x^2+y^2\le 4$.

解. $I=\iint\limits_{-2y\le x^2+y^2\le 4}\left(x^2+y^2+2y\right)d\sigma-\iint\limits_{x^2+y^2\le -2y}\left(x^2+y^2+2y\right)d\sigma=$

$\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\left(x^2+y^2+2y\right)d\sigma-2\iint\limits_{x^2+y^2\le -2y}\left(x^2+y^2+2y\right)d\sigma=9\pi$.

例. 求 $I=\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma$, 其中 D 由 $y=x$, $y=0$, $x=2$ 围成.

解. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}}\theta\cdot\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\tan\theta=\frac{\pi}{2}-\ln 2$.

例. 求 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, 其中 D 由 $y=x$, $y=x^2$ 围成.

解. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}\rho\cdot\rho d\rho=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3\theta}{\cos^6\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\sec^2\theta d\sec\theta=\frac{2}{45}\left(\sqrt{2}+1\right)$.

例. 求 $I=\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}d\sigma$, 其中 D 由 $x+y=1$ 与坐标轴围成.

解. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}e^{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}\frac{1}{\left(\cos\theta+\sin\theta\right)^2}d\theta=$

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}}\frac{d\tan\theta}{\left(1+\tan\theta\right)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{\frac{u-1}{u+1}}\frac{du}{\left(1+u\right)^2}=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{1-\frac{2}{u+1}}d\frac{1}{1+u}=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

例. 计算概率积分 $I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

解. $I^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho=$

$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\frac{\rho^2}{2}=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$, 故 $I=1$.

三. 化二次积分为定积分

例. 设 $f(x)=\sin x^4$, 令 $F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$, 求 $F'(2)$.

解. $F(t)=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^t f(x)(x-1)dx$, 故 $F'(2)=f(2)=\sin 16$.

例. 设 $f(x)$ 连续, 证明: $\int_a^b dy\int_a^y (y-x)^n f(x)dx=\frac{1}{n+1}\int_a^b (b-x)^{n+1}f(x)dx$.

证. 左式 $=\int_a^b dx\int_x^b (y-x)^n f(x)dy=\frac{1}{n+1}\int_a^b (b-x)^{n+1}f(x)dx$, 证毕.

例. 设 $f(x)$ 连续, 证明: $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$.

证. 左式 $=\int_0^1 dy\int_y^1 f(y)f(x)dx=\frac{1}{2}\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}f(x)f(y)dxdy$, 即得, 证毕.

例. 设 $f(u)$ 连续, 证明: $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{1} f(u)du$.

证. D 由 $x+y=\pm 1$, $x-y=\pm 1$ 围成, 令 $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$, $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\dfrac{1}{2}$, 则

$$\iint\limits_{D} f(x+y)dxdy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} du\int_{-1}^{1} f(u)dv=\int_{-1}^{1} f(u)du, \text{证毕.}$$

补充练习

1. 求 $I=\iint\limits_{D} y\left(1+xe^{x^2+y^2}\right)d\sigma$, 其中 D 由 $y=x$, $y=-1$, $x=1$ 围成.

解. $I=2\iint\limits_{D_3} yd\sigma=2\int_{-1}^{0} dy\int_{0}^{-y} ydx=-2\int_{-1}^{0} y^2dy=-\dfrac{2}{3}$.

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases} e^{x^2+y^2}, & 1\le x^2+y^2\le 4 \\ 1, & \text{其它} \end{cases}$, 求 $I=\iint\limits_{0\le x\le 2,0\le y\le 2} f(x,y)d\sigma$.

解. $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} d\sigma+\iint\limits_{x^2+y^2\ge 4} d\sigma+\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} e^{x^2+y^2}d\sigma=\dfrac{\pi}{4}+(4-\pi)+\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} e^{x^2+y^2}d\sigma=$

$$\frac{\pi}{4}+(4-\pi)+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{1}^{2} e^{\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{4}+(4-\pi)+\frac{\pi}{4}\left(e^4-e\right)=\frac{e^4-e-3}{4}\pi+4.$$

3. 求 $I=\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma$, 其中 $D:|x|\le 1$, $|y|\le 1$.

解. $I=4\iint\limits_{D_1}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=4\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(1-x^2-y^2\right)d\sigma+4\iint\limits_{x^2+y^2\ge 1}\left(x^2+y^2-1\right)d\sigma=$

$$4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{0}^{1}\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho+4\int_{0}^{1} dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1}\left(x^2+y^2-1\right)dy=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\right)=\pi-\frac{4}{3};$$

或者, $I=8\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_{0}^{1}\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho+8\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta}}\left(\rho^2-1\right)\rho d\rho=\pi-\dfrac{4}{3}$.

4. 求 $I=\iint\limits_{D}\dfrac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}d\sigma$, 其中 $D:0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

解. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta}}\dfrac{1}{(1+\rho)^2}\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{0}^{\frac{1}{\sin\theta}}\dfrac{1}{(1+\rho)^2}\rho d\rho$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{2}\right);$$

或者, $I=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta}}\dfrac{1}{(1+\rho)^2}\rho d\rho=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5. 设 $f(x,y)=x\iint\limits_{D}f(x,y)d\sigma+3y\int_{-1}^{1}f(x,x)dx+1$, 其中 D 由 $y=|x|$ 与 $y=1$ 围成, 求 $f(x,y)$.

解. 设 $A=\iint\limits_{D}f(x,y)d\sigma$, $B=\int_{-1}^{1}f(x,x)dx$, 则 $f(x,y)=Ax+3By+1$, 于是

$A=\iint\limits_{D}(Ax+3By+1)d\sigma=3B\iint\limits_{D}yd\sigma+1=2B+1$, $B=\int_{-1}^{1}(Ax+3Bx+1)dx=2$, 故

故 $A=5$, 因此 $f(x,y)=5x+6y+1$.

6. 设 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma$, 求 $f(t)$.

解. $f(t)=e^{4\pi t^2}+\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{2t}f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\rho d\rho=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_{0}^{2t}f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\rho d\rho$, 两边求导,

$f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)\Rightarrow f'(t)-8\pi tf(t)=8\pi te^{4\pi t^2}$, 又 $f(0)=1$, 解得

$f(t)=e^{4\pi t^2}\left(4\pi t^2+1\right)$.

7. 设 $f(x,y)$ 连续, 且 $f(0,0)=1$, 求 $I=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\int_{0}^{x}dt\int_{0}^{x-t}f(t,u)du$.

解. $I=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\iint\limits_{D}f(t,u)dtdu}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(\xi,\eta)\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{f(0,0)}{2}=\frac{1}{2}$.

8. 设 $f(x,y)$ 连续, 且 $f(0,0)=1$, 求 $I=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\int_{0}^{2x}dt\int_{0}^{\sqrt{2tx-t^2}}f(t,u)du$.

解. $I=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\iint\limits_{t^2+u^2\le 2tx,u\ge 0}f(t,u)dtdu}{x^2}=\frac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}f(\xi,\eta)=\frac{\pi}{2}$.

9. 设 $f(x,y)$ 连续, 且 $f(0,0)=1$, 求 $I=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_{0}^{x^2}dt\int_{\sqrt{t}}^{x}f(t,u)du$.

解. $I=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_{0}^{x}du\int_{0}^{u^2}f(t,u)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_{0}^{x^2}f(t,x)dt}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(\xi,x)}{3}=\frac{f(0,0)}{3}=\frac{1}{3}$.

10. 证明: $\left(\int_{0}^{1}e^{-x^2}dx\right)^2>\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

证. $\left(\int_{0}^{1}e^{-x^2}dx\right)^2=\int_{0}^{1}e^{-x^2}dx\int_{0}^{1}e^{-y^2}dy=\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}e^{-x^2-y^2}d\sigma>\iint\limits_{x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0}e^{-x^2-y^2}d\sigma=$

$\int_{0}^{\pi/2}d\theta\int_{0}^{1}e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)$, 证毕.

11. 设 $f\left(x\right)$ 连续, 证明: $\int_a^b f^2\left(x\right)dx \geq \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f\left(x\right)dx\right)^2$.

证. $\left(b-a\right)\int_a^b f^2\left(x\right)dx = \int_a^b dy\int_a^b f^2\left(x\right)dx = \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} f^2\left(x\right)d\sigma = \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} f^2\left(y\right)d\sigma =$

$\frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}\left[f^2\left(x\right)+f^2\left(y\right)\right]d\sigma \geq \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} f\left(x\right)f\left(y\right)d\sigma = \left(\int_a^b f\left(x\right)dx\right)^2$, 证毕.

12. 设 $p\left(x\right)$, $f\left(x\right)$, $g\left(x\right)\in C\left[a,b\right]$, 且 $p\left(x\right)\geq 0$, $f\left(x\right)$, $g\left(x\right)$ 单增, 证明:

$\int_a^b p\left(x\right)f\left(x\right)dx\int_a^b p\left(x\right)g\left(x\right)dx \leq \int_a^b p\left(x\right)dx\int_a^b f\left(x\right)p\left(x\right)g\left(x\right)dx$.

证. 即证 $\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} p\left(x\right)f\left(x\right)p\left(y\right)g\left(y\right)d\sigma \leq \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} p\left(x\right)f\left(y\right)p\left(y\right)g\left(y\right)d\sigma$,

左式-右式 $= \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} p\left(x\right)p\left(y\right)g\left(y\right)\left[f\left(x\right)-f\left(y\right)\right]d\sigma =$

$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} p\left(y\right)p\left(x\right)g\left(x\right)\left[f\left(y\right)-f\left(x\right)\right]d\sigma =$

$\frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} p\left(x\right)p\left(y\right)\left[g\left(y\right)-g\left(x\right)\right]\left[f\left(x\right)-f\left(y\right)\right]d\sigma \leq 0$, 证毕.

13. 设 $f\left(x\right)>0$, 连续, 单调减少, 证明: $\frac{\int_0^1 xf^2\left(x\right)dx}{\int_0^1 xf\left(x\right)dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2\left(x\right)dx}{\int_0^1 f\left(x\right)dx}$.

证. 即证 $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xf^2\left(x\right)f\left(y\right)d\sigma \leq \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} yf^2\left(x\right)f\left(y\right)d\sigma$,

左式-右式 $= \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}\left(x-y\right)f^2\left(x\right)f\left(y\right)d\sigma = \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}\left(y-x\right)f^2\left(y\right)f\left(x\right)d\sigma =$

$\frac{1}{2}\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}\left(x-y\right)\left[f\left(x\right)-f\left(y\right)\right]f\left(y\right)f\left(x\right)d\sigma \leq 0$, 证毕.

第 10.3 节 三重积分

一. 三重积分的定义

设 $f(x,y,z)$ 为有界闭区域 Ω 上的有界函数, 将 Ω 任意分成 n 小块 Δv_i, 直径为 λ_i, 作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$, $\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta v_i$, 其中 Δv_i 表示体积, 若在无限细分 Ω 的过程中, 随着 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}\to 0$, 该积分和总是趋向于同一个常数 I, 它只依赖于 $f(x,y,z)$ 和 Ω, 则称 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上**可积**, 记 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$, 称为 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的**三重积分**.

注. dv 为**体积元素**, 在直角坐标系下也记 $dv=dxdydz$.

定理. 设 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续, 则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 存在.

物理意义. 设 Ω 具有连续密度 $f(x,y,z)$, 则 $M=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$.

二. 三重积分的性质

性质 1. $\iiint\limits_{\Omega}(\alpha f\pm\beta g)dv=\alpha\iiint\limits_{\Omega} f\cdot dv\pm\beta\iiint\limits_{\Omega} g\cdot dv$;

性质 2. $\iiint\limits_{\Omega_1+\Omega_2} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv+\iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$;

性质 3. $\iiint\limits_{\Omega}1\cdot dv=\Omega$, 一般地, $\iiint\limits_{\Omega}k\cdot dv=k\Omega$;

性质 4. 设 Ω 上 $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$, 则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv\le\iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dv$;

推论. $\left|\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv\right|\le\iiint\limits_{\Omega}|f(x,y,z)|dv$.

性质 5(估值定理). 设 Ω 上 $m\le f\le M$, 则 $m\cdot\Omega\le\iiint\limits_{\Omega} f\,dv\le M\cdot\Omega$;

性质 6(积分中值定理). 设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续, 则 $\exists(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 使得 $f(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{\Omega}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$, 称为 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的**平均值**.

三. 对称性

1. 若 Ω 关于 xOy 面(上下)对称, 则当 $f(x,y,z)$ 关于 z 为奇函数时, $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=0$; 关于 z 为偶函数时, $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=2\iiint\limits_{\Omega\cap\{z\ge 0\}} f(x,y,z)dv$.

2. 若 Ω 关于 yOz 面(前后)对称, 则当 $f(x,y,z)$ 关于 x 为奇函数时, $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=0$; 关于 x 为偶函数时, $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=2\iiint\limits_{\Omega\cap\{x\ge 0\}} f(x,y,z)dv$.

3. 若Ω关于xOz面(左右)对称, 则当$f(x,y,z)$关于y为奇函数时,

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=0$; 关于$y$为偶函数时, $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=2\iiint\limits_{\Omega\cap\{y\ge 0\}} f(x,y,z)dv$.

4. 若Ω关于x, y具有轮换对称性, 即当$(x,y,z)\in\Omega$时, $(y,x,z)\in\Omega$, 则

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(y,x,z)dv$, 特别地, $\iiint\limits_{\Omega} f(x)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(y)dv$.

5. 若Ω关于y, z具有轮换对称性, 则$\iiint\limits_{\Omega} f(y)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$.

6. 若Ω关于x, z具有轮换对称性, 则$\iiint\limits_{\Omega} f(x)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$.

7. 若Ω关于x, y, z具有轮换对称性(不变性), 即当$(x,y,z)\in\Omega$时, 其所有轮换

$(x',y',z')\in\Omega$, 则$\iiint\limits_{\Omega} f(x)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(y)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$.

例. 设$\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2$, 记$\Omega_1$为$\Omega$位于第一卦限的部分, 则有

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dv=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=8\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)dv=24\iiint\limits_{\Omega_1}x^2dv.$$

例. 求$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv$, 其中$\Omega:(x-2)^2+(y-1)^2+z^2\le 1$.

解. $I=\iiint\limits_{\Omega}xdv+\iiint\limits_{\Omega}ydv=\iiint\limits_{\Omega}(x-2+2)dv+\iiint\limits_{\Omega}(y-1+1)dv=3\iiint\limits_{\Omega}dv=4\pi$.

例. 求$I=\iiint\limits_{\Omega}(ax+by+cz)dv$, 其中$\Omega: z\le x^2+y^2+z^2\le 2z$.

解. $I=c\iiint\limits_{\Omega}zdv=c\iiint\limits_{\Omega_1}zdv-c\iiint\limits_{\Omega_2}zdv=c\iiint\limits_{\Omega_1}dv-c\iiint\limits_{\Omega_2}\frac{1}{2}dv=\frac{5}{4}\pi c$.

四. 直角坐标下的计算

1. 投影法(坐标面投影法, 先一后二)

设$\Omega=\{(x,y,z): z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$为 XY-型区域, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

例. 求$I=\iiint\limits_{\Omega}zdv$, 其中$\Omega$由$x=1$, $y=1$, $z=x^2+y^2$和坐标面围成.

解. $I=\iint\limits_{0\le x\le 1,0\le y\le 1}dxdy\int_0^{x^2+y^2}zdz=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^{x^2+y^2}zdz=\frac{1}{2}\int_0^1dx\int_0^1(x^2+y^2)^2dy=\frac{14}{45}$.

例. 求$I=\iiint\limits_{\Omega}zdv$, 其中$\Omega$由$x+2y+z=1$和三个坐标面围成.

解. $I=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_0^{1-x-2y}xdz=\int_0^1dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_0^{1-x-2y}xdz=\int_0^1dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}x(1-x-2y)dy=\frac{1}{48}$.

例. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+3y)^2\,dv$, 其中 $\Omega: x^2+y^2\le 2z$, $2\le z\le 8$.

解. $I=5\iint\limits_{x^2+y^2\le 16}dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{8}\left(x^2+y^2\right)dz-5\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2}\left(x^2+y^2\right)dz=$

$5\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}\rho^2dz-5\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2}\rho^2dz=1680\pi$;

或者, $I=5\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}dxdy\int_2^8\left(x^2+y^2\right)dz+5\iint\limits_{4\le x^2+y^2\le 16}dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{8}\left(x^2+y^2\right)dz=$

$5\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_2^8\rho^2dz+5\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^4\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}\rho^2dz=1680\pi$.

例. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{x^2dv}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 其中 Ω 由 $z=1$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ 围成.

解. $I=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}dxdy\int_{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dz-\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dz=$

$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho}{2}}^{1}\rho dz-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho}^{1}\rho dz=\frac{7}{12}\pi$;

或者, $I=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}dz+\frac{1}{2}\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}dxdy\int_{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dz=$

$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\frac{\rho}{2}}^{\rho}\rho dz+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho}{2}}^{1}\rho dz=\frac{7}{12}\pi$.

例. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dv$, 其中 Ω 由 $z=x^2+2y^2$, $z=2-x^2$ 围成.

解. $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}\left(x^2+y^2\right)dz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2\right)\left(2-2x^2-2y^2\right)dxdy=\frac{\pi}{3}$.

例. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{y\sin z}{z}dv$, 其中 Ω 由 $y=\sqrt{z}$, $x+z=\frac{\pi}{2}$, $x=0$, $y=0$ 围成.

解. $I=\iint\limits_{D_{yz}}dydz\int_0^{\frac{\pi}{2}-z}\frac{y\sin z}{z}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dz\int_0^{\sqrt{z}}dy\int_0^{\frac{\pi}{2}-z}\frac{y\sin z}{z}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$;

或者, $I=\iint\limits_{D_{xz}}dxdz\int_0^{\sqrt{z}}\frac{y\sin z}{z}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}dz\int_0^{\sqrt{z}}\frac{y\sin z}{z}dy=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

2. 截面法(坐标轴投影法, 先二后一)

设$\Omega=\{(x,y,z):z_1\le z\le z_2,(x,y)\in D_z\}$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{z_1}^{z_2}\left[\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right]dz=\int_{z_1}^{z_2}dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy.$$

例. 求$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $z=1$围成立体的体积.

解. $V=\iiint\limits_{\Omega}1\cdot dv=\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le e^{2z}}1\cdot dxdy=\int_0^1 \pi e^{2z}dz=\dfrac{e^2-1}{2}\pi$.

例. 求$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, 其中$\Omega:x^2+y^2\le 2z$, $2\le z\le 8$.

解. $I=\int_2^8 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)dxdy=\int_2^8 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho d\rho=336\pi$.

例. 求$I=\iiint\limits_{\Omega}x^2dv$, 其中$\Omega$由$z=1$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$围成.

解. $I=\dfrac{1}{2}\int_0^1 dz\iint\limits_{z^2\le x^2+y^2\le 4z^2}(x^2+y^2)d\sigma=\dfrac{1}{2}\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_z^{2z}\rho^2\cdot\rho d\rho=\dfrac{3}{4}\pi$.

例. 求$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dv$, 其中$\Omega$由$x+y+z=2$和三个坐标面围成.

解. $I=6\iiint\limits_{\Omega}zdv=6\int_0^2 dz\iint\limits_{x+y\le 2-z,x\ge 0,y\ge 0}zdxdy=6\int_0^2 z\cdot\dfrac{1}{2}(2-z)^2dz=4$.

例. 求$I=\iiint\limits_{\Omega}z^2dv$, 其中$\Omega:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$.

解. $I=\int_{-c}^{c}dz\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}}z^2dxdy=ab\pi\int_{-c}^{c}\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)z^2dz=\dfrac{4}{15}\pi abc^3$.

例. 求$I=\iiint\limits_{\Omega}\left|z-\sqrt{x^2+y^2}\right|dv$, 其中$\Omega$由$x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$围成.

解. $I=\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}\left(z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy+\int_0^1 dz\iint\limits_{z^2\le x^2+y^2\le 1}\left(\sqrt{x^2+y^2}-z\right)dxdy=$

$$\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z(z-\rho)\rho d\rho+\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_z^1(\rho-z)\rho d\rho=\frac{2\pi}{3}.$$

注. $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}-z\right)dz+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\left(z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dz=$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{\rho}(\rho-z)dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho}^{1}(z-\rho)dz=\frac{2\pi}{3}.$$

例. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)^2\,dv$, 其中 Ω 由 $z=x^2+y^2$, $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 围成.

解. $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=\sqrt{2-x^2-y^2} \end{cases} \Rightarrow z=2-z^2 \Rightarrow (z+2)(z-1)=0 \Rightarrow z=1$, 即 $x^2+y^2=1$,

故 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+4y^2+9z^2)\,dv=\dfrac{5}{2}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv+9\iiint\limits_{\Omega}z^2dv=\dfrac{5}{2}I_1+9I_2$, 而

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\,d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho^2dz=\frac{16}{15}\sqrt{2}\pi-\frac{19}{15}\pi,$$

$$I_2=\int_0^1dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}z^2dxdy+\int_1^{\sqrt{2}}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z^2}z^2dxdy=\int_0^1 z^2\cdot\pi z\,dz+\int_1^{\sqrt{2}}z^2\cdot\pi(2-z^2)\,dz=$$

$\dfrac{8}{15}\sqrt{2}\pi-\dfrac{13}{60}\pi$, 故 $I=\dfrac{112}{15}\sqrt{2}\pi-\dfrac{307}{60}\pi$.

3. 交换积分顺序

例. 证明: $\displaystyle\int_0^1dx\int_0^xdy\int_0^y f(z)\,dz=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^2f(z)\,dz$.

证. $\displaystyle\int_0^1dx\int_0^xdy\int_0^y f(z)\,dz=\int_0^1dx\int_0^xdz\int_z^x f(z)\,dy=\int_0^1dx\int_0^x(x-z)f(z)\,dz=$

$\displaystyle\int_0^1dz\int_z^1(x-z)f(z)\,dx=\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}-zx\right]_z^1 f(z)\,dz=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^2f(z)\,dz$, 证毕.

例. 求 $\displaystyle I=\int_0^1dx\int_x^1dy\int_y^1 y\sqrt{1+z^4}\,dz$.

解. $\displaystyle I=\int_0^1dx\int_x^1dz\int_x^z y\sqrt{1+z^4}\,dy=\int_0^1dz\int_0^zdx\int_x^z y\sqrt{1+z^4}\,dy=\int_0^1\sqrt{1+z^4}\,dz\int_0^zdx\int_x^z y\,dy=$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+z^4}\,dz\int_0^z\frac{z^2-x^2}{2}\,dx=\int_0^1\left(\frac{z^3}{2}-\frac{z^3}{6}\right)\sqrt{1+z^4}\,dz=\frac{1}{3}\int_0^1 z^3\sqrt{1+z^4}\,dz=\frac{1}{18}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

五. 柱面坐标下的计算

空间点 $M(x,y,z)$, 若它在 xOy 面上投影的极坐标为 (θ,ρ), 则称 (θ,ρ,z) 为 M 的**柱面坐标**, 并且有关系 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$.

若 $\Omega:\alpha\le\theta\le\beta,\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta),z_1(\theta,\rho)\le z\le z_2(\theta,\rho)$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,dv=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho\,d\rho\int_{z_1(\theta,\rho)}^{z_2(\theta,\rho)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\,dz.$$

例. (1) 设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$, 则 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz.$$

(2) 设 Ω 由 $x^2+y^2=2x$, $z=0$, $z=1$ 围成, 则 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x} dxdy\int_0^1 f(x,y,z)dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho d\rho\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz.$$

例. 设 $u(r,h)=\iiint\limits_{x^2+y^2\le r^2,0\le z\le h} f\left(\sqrt{x^2+y^2},z\right)dv$, 其中 f 连续, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial h}$.

解. $u(r,h)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r\rho d\rho\int_0^h f(\rho,z)dz=2\pi\int_0^r\rho d\rho\int_0^h f(\rho,z)dz$, 故

$\dfrac{\partial u}{\partial r}=2\pi r\int_0^h f(r,z)dz$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial h}=2\pi rf(r,h)$.

注. $u(r,h)=\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r f(\rho,z)\rho d\rho=2\pi\int_0^h dz\int_0^r f(\rho,z)\rho d\rho$, 故

$\dfrac{\partial u}{\partial h}=2\pi\int_0^r f(\rho,h)\rho d\rho$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial h\partial r}=2\pi rf(r,h)$.

六. 球面坐标下的计算

空间点 M 的经度, 纬度以及到原点的距离构成有序数组 (θ,φ,r), 它称为该点的

球面坐标, 有关系 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$.

若 $\Omega:\theta_1\le\theta\le\theta_2,\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2,r_1(\varphi,\theta)\le r\le r_2(\varphi,\theta)$, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\varphi d\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2dr.$$

例. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)^2dv$, 其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$.

解. $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+4y^2+9z^2)dv=14\iiint\limits_{\Omega}x^2dv=\dfrac{14}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=$

$$\frac{14}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2dr=\frac{14}{3}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^1 r^4dr=\frac{56}{15}\pi.$$

例. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|dv$, 其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$.

解. $I=\iiint\limits_{\Omega_1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dv+\iiint\limits_{\Omega_2}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right)dv=$

$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi d\varphi\int_0^1(1-r)r^2dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi d\varphi\int_1^2(r-1)r^2dr=\dfrac{2\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}$.

例. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv$, 其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\le x+y+z$.

解. $\Omega:\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2\le\dfrac{3}{4}$, 令 $x=x'+\dfrac{1}{2},y=y'+\dfrac{1}{2},z=z'+\dfrac{1}{2}$,

则 $I=\iiint\limits_{\Omega'}\left[\left(x'+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y'+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z'+\dfrac{1}{2}\right)^2\right]dv'=\iiint\limits_{\Omega'}\left(x'^2+y'^2+z'^2+\dfrac{3}{4}\right)dv'=$

$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^2\cdot r^2dr+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}\pi$.

例. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+3y)^2\,dv$, 其中 $\Omega:x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$.

解. $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+9y^2\right)dv=5\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dv=5\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin^2\varphi\cdot r^2dr=$

$64\pi a^5\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^5\varphi d\varphi=\dfrac{8}{3}\pi a^5$.

例. 求半径 a 的球面与半顶角为 α 的内接圆锥面所围立体体积.

解. $V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2dr=\dfrac{4\pi a^3}{3}\left(1-\cos^4\alpha\right)$.

例. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}z^2dv$, 其中 $\Omega:z\le x^2+y^2+z^2\le 2z$.

解. $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}(r\cos\varphi)^2\cdot r^2dr=\dfrac{31}{20}\pi$.

例. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}z^2dv$, 其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\le1,\ x^2+y^2+z^2\le 2z$.

解. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x^2+y^2+z^2=2z\end{cases}\Rightarrow z=\dfrac{1}{2},\ x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$, 在两曲面交线处 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$, 故

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/3}\sin\varphi d\varphi\int_0^1(r\cos\varphi)^2r^2dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}(r\cos\varphi)^2r^2dr=\dfrac{59}{480}\pi$.

补充练习

1. 将 $\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$ 化为先 x, 再 z, 后 y 的三次积分.

解. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dx\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz=$

$\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_y^1 dz\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx$.

2. 两种方法计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z^3 dv$, 其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$, $z+1\ge\sqrt{x^2+y^2}$.

解. $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}-1}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^3dz=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho d\rho\int_{\rho-1}^{\sqrt{1-\rho^2}} z^3dz=\frac{\pi}{15}$;

$I=\int_{-1}^0 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le(z+1)^2} z^3dxdy+\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2} z^3dxdy=\frac{\pi}{15}$.

3. 两种方法计算 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=2-x^2-y^2$ 所围立体的体积.

解. $V=\iiint\limits_{\Omega} 1\cdot dv=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} 1\cdot dz=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \left(2-\rho^2-\rho\right)\rho d\rho=\frac{5}{6}\pi$;

$V=\iiint\limits_{\Omega} 1\cdot dv=\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} d\sigma+\int_1^2 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z} d\sigma=\int_0^1 \pi z^2dz+\int_1^2 \pi(2-z)dz=\frac{5}{6}\pi$.

4. 两种方法计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} zdv$, 其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$, $x^2+y^2+z^2\le 2z$.

解. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=2z \end{cases}\Rightarrow 1=2z\Rightarrow z=\frac{1}{2}$, 即 $x^2+y^2=\frac{3}{4}$, 故

$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 3/4} dxdy\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 3/4}\left(2\sqrt{1-x^2-y^2}-1\right)dxdy=\frac{5}{24}\pi$;

$I=\int_0^{1/2} dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z-z^2} zdxdy+\int_{1/2}^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2} zdxdy=\frac{5}{24}\pi$.

5. 设 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, 求 $I=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2t\cdot z} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dv$.

解. $I=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}f\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)\cdot\frac{4}{3}\pi t^3=\frac{4}{3}\pi f(0)=0$.

6. 设 $D_t: x^2+y^2\le t^2$, $\Omega_t: x^2+y^2+z^2\le t^2$, $f(x)\in C(0,+\infty)$, 且 $f(x)>0$, 求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\iiint\limits_{\Omega_t} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dv}{t\iint\limits_{D_t} f\left(x^2+y^2\right)d\sigma}.$$

解. 原式 $=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f\left(\xi^2+\zeta^2+\eta^2\right)\cdot\frac{4}{3}\pi t^3}{f\left(u^2+v^2\right)\cdot\pi t^3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{f(0)}{f(0)}=\frac{4}{3}$.

第 10.4 节 重积分的应用

一. 曲面的面积

定理. 设光滑曲面 $\Sigma: z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$, 其中 D_{xy} 为有界闭区域, 则它的面积

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma.$$

例. 求半径为 R 的球的表面积.

解. $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 故 $A=2\iint_{x^2+y^2\le R^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}d\sigma=4\pi R^2$.

例. 求 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在 $x^2+y^2=ax$ 内部分的面积.

解. $A=2\iint_{x^2+y^2\le ax}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}d\sigma=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho=2a^2(\pi-2)$.

例. 求 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z^2=2x$ 所割下部分的面积.

解. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z=\sqrt{2x}\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=2x$, 故 $A=\iint_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{2}\cdot d\sigma=\sqrt{2}\pi$.

例. 求 $\Sigma_1: z=x^2+y^2$ 与 $\Sigma_2: z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 围成立体的表面积.

解. $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ z=2-\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=1$, 故 $A=A_1+A_2=$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{2}d\sigma+\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}d\sigma=\left(\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\right)\pi.$$

例. 某屋顶由两个半径分别为1和2的半球叠加而成, 求表面积.

解. $A=2\pi+\iint_{1\le x^2+y^2\le 4}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}d\sigma=2\pi+4\sqrt{3}\pi$.

二. 质心与形心

1. 质点系

设 xOy 平面上有 n 个位于 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ 处的质点, 质量为 $m_1,\cdots,m_n$, 则该质点系的质心坐标为 $(\bar{x},\bar{y})$, 其中

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum_{i=1}^n m_ix_i}{\sum_{i=1}^n m_i}=\sum_{i=1}^n\frac{m_i}{M}x_i,\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum_{i=1}^n m_iy_i}{\sum_{i=1}^n m_i}=\sum_{i=1}^n\frac{m_i}{M}y_i.$$

若 $m_i=m$, 则 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, 此时 $(\bar{x},\bar{y})$ 也称为质点系的形心.

2. 平面薄片

设平面薄片占有 xOy 面上有界闭区域 D，密度为 $\mu(x,y)$，连续，则它的质心坐标

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma},\ \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma}.$$

若薄片均匀，则 $\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D xd\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_D yd\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}$，此时 $(\bar{x},\bar{y})$ 也称为 D 的形心.

例. 求位于两圆 $\rho=2\sin\theta$ 和 $\rho=4\sin\theta$ 之间的均匀薄片的质心.

解. $\bar{x}=0$，$\bar{y}=\dfrac{1}{A}\iint\limits_D yd\sigma=\dfrac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho=\dfrac{7}{3}$，故为 $\left(0,\dfrac{7}{3}\right)$.

例. 在均匀半圆形薄板下接一个宽与圆直径相同的长方形的均匀薄板，要求质心在圆心处，求圆半径与长方形的高之比.

解. 以半圆直径边为 x 轴，对称轴为 y 轴，则质心为原点，故 $\bar{y}=0$，

于是 $M_x=\iint\limits_{D_1}\mu_1 yd\sigma+\iint\limits_{D_2}\mu_2 yd\sigma=\mu_1\int_0^{\pi}d\theta\int_0^R\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho+\mu_2\int_{-R}^{R}dx\int_{-h}^{0}ydy=0\Rightarrow$

$\dfrac{2}{3}\mu_1R^3-\mu_2Rh^2=0\Rightarrow R:h=\sqrt{3\mu_2}:\sqrt{2\mu_1}$.

3. 空间立体

设物体占有空间有界闭区域 Ω，密度为 $\rho(x,y,z)$，连续，则质心坐标

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_\Omega x\rho dv}{\iiint\limits_\Omega \rho dv},\ \bar{y}=\frac{\iiint\limits_\Omega y\rho dv}{\iiint\limits_\Omega \rho dv},\ \bar{z}=\frac{\iiint\limits_\Omega z\rho dv}{\iiint\limits_\Omega \rho dv}.$$

若 Ω 均匀，则 $\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega xdv}{\iiint\limits_\Omega dv}$，$\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega ydv}{\iiint\limits_\Omega dv}$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega zdv}{\iiint\limits_\Omega dv}$，此时 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 也称为 Ω 的形心.

例. 求均匀半球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2\ (z\ge 0)$ 的质心.

解. $\bar{x}=\bar{y}=0$，$\bar{z}=\dfrac{1}{V}\iiint\limits_\Omega zdv=\dfrac{1}{V}\int_0^a dz\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2-z^2}zdxdy=\dfrac{3}{2\pi a^3}\cdot\dfrac{\pi a^4}{4}=\dfrac{3}{8}a$.

例. 均匀半球，密度为 ρ_1，下接半径相同的均匀圆柱体，密度为 ρ_2，质心在球心处，求圆柱半径与高之比.

解. 以球心为原点，对称轴为 z 轴建立坐标系，设质心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由

$\bar{z}=0\Rightarrow\iiint\limits_\Omega z\rho dv=0\Rightarrow\rho_1\iiint\limits_{\Omega_1}zdv+\rho_2\iiint\limits_{\Omega_2}zdv=0$，于是

$$\rho_1\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^R r\cos\varphi\cdot r^2dr+\rho_2\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}dxdy\int_{-h}^{0}zdz=0\Rightarrow R:h=\sqrt{\frac{2\rho_2}{\rho_1}}.$$

三. 转动惯量(惯性矩)

1. 质点系

设 xOy 平面上有 n 个质点, 分别位于 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ 处, 则该质点系对于 x 轴及 y 轴的转动惯量分别为 $I_x=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i^2$, $I_y=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i^2$.

2. 平面薄片

设平面薄片占有 xOy 面上的有界闭区域 D, 密度为 $\mu(x,y)$, 连续, 则它对于 x 轴和 y 轴的转动惯量 $I_x=\iint\limits_D y^2\mu(x,y)d\sigma$, $I_y=\iint\limits_D x^2\mu(x,y)d\sigma$.

例. 求半径为 a, 密度为 μ 的半圆薄片对其直径边的转动惯量.

解. $I_x=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2,y\ge 0}\mu y^2d\sigma=\mu\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a}\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho d\rho=\frac{1}{8}\pi\mu a^4$.

例. 求 $y=x^2$, $y=1$ 围成的密度为 μ 的薄片对 $y=-1$ 的转动惯量.

解. $I=\iint\limits_D(y+1)^2\mu d\sigma=\mu\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(y+1)^2dy=\frac{368}{105}\mu$.

3. 空间立体

设物体占有空间有界闭区域 Ω, 密度 $\rho(x,y,z)$, 连续, 则转动惯量为

$I_x=\iiint\limits_\Omega(y^2+z^2)\rho\cdot dv$, $I_y=\iiint\limits_\Omega(z^2+x^2)\rho\cdot dv$, $I_z=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)\rho\cdot dv$.

例. 设匀质立体 $\Omega:x^2+y^2-z^2\le 1(1\le z\le 2)$ 的密度为 ρ_0, 求 I_z.

解. $I_z=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)\rho_0dv=\rho_0\int_1^2dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2+1}(x^2+y^2)dxdy=\frac{89}{30}\pi\rho_0$.

例. 求密度为 ρ_0 的均匀球体关于过球心的轴的转动惯量.

解. $I_z=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)\rho_0dv=\frac{2}{3}\rho_0\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv=$

$\frac{2}{3}\rho_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{a}r^2\cdot r^2dr=\frac{8}{15}\pi\rho_0a^5$.

四. 引力

设物体占有空间有界闭域 Ω, 密度为 $\rho(x,y,z)$. 连续, 则它对 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处单位质点的引力为

$$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)=G\left(\iiint\limits_\Omega\frac{\rho(x-x_0)}{r^3}dv,\iiint\limits_\Omega\frac{\rho(y-y_0)}{r^3}dv,\iiint\limits_\Omega\frac{\rho(z-z_0)}{r^3}dv\right), \text{其中}$$

$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

例. 求密度为ρ_0的球体$\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$对位于点$M_0(0,0,a)(a>R)$处的单位质点的引力.

解. 由对称性, 设$\vec{F}=(0,0,F_z)$, 则$F_z=G\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho_0(z-a)}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{\frac{3}{2}}}dv=$

$$G\rho_0\int_{-R}^{R}(z-a)dz\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2-z^2}\frac{1}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{\frac{3}{2}}}dxdy=$$

$$G\rho_0\int_{-R}^{R}(z-a)dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{\rho d\rho}{\left[\rho^2+(z-a)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=-G\frac{4\pi R^3\rho_0}{3a^2}=-\frac{GM}{a^2}.$$

例. 设密度为ρ_0的均匀柱体$\Omega: x^2+y^2\le R^2(0\le z\le h)$, 求它对位于$M(0,0,a)(a>h)$处的单位质点的引力.

解. 设$\vec{F}=(0,0,F_z)$, 则$F_z=G\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho_0(z-a)}{\left[(x-0)^2+(y-0)^2+(z-a)^2\right]^{\frac{3}{2}}}dv=$

$$G\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}dxdy\int_0^h\frac{\rho_0(z-a)}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{\frac{3}{2}}}dz=G\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho d\rho\int_0^h\frac{\rho_0(z-a)}{\left[\rho^2+(z-a)^2\right]^{\frac{3}{2}}}dz=$$

$$-2\pi G\rho_0\left[h+\sqrt{R^2+(h-a)^2}-\sqrt{R^2+a^2}\right].$$

例. 求半径为R, 半顶角为α, 密度为ρ_0的均匀球锥体对顶点处单位质点的引力.

解. 取顶点为原点, 对称轴为z轴建立坐标系, 则$\vec{F}=(0,0,F_z)$, 其中

$$F_z=G\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho_0 zdv}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=G\rho_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}d\varphi\int_0^R\frac{r\cos\varphi}{r^3}\cdot r^2\sin\varphi dr=G\rho_0\pi R\sin^2\alpha.$$

例. 设顶点在原点, 半顶角为$\frac{\pi}{6}$的球面$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$的内接均匀正圆锥体Ω(密度为ρ_0)对原点处单位质点的引力.

解. $F_x=F_y=0$, $F_z=\iiint\limits_{\Omega}\frac{Gz\rho_0 dv}{r^3}$, Ω顶部高度$z_0=\left(2a\cos\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}a$, 于是

在球坐标中, Ω的顶面方程为$r\cos\varphi=\frac{3}{2}a$, 即$r=\frac{3a}{2\cos\varphi}$, 因此

$$F_z=G\rho_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{3a}{2\cos\varphi}}\frac{r\cos\varphi}{r^3}\cdot r^2dr=3aG\rho_0\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi.$$

例. 设有密度为μ的均匀半圆形薄片, 占有区域$D: x^2+y^2\le R^2$, $y\ge 0$, 圆心上方有一单位质点P, $|OP|=a$, 求薄片对该质点的引力.

解. 质点位于$(0,0,a)$, 设$\vec{F}=(0,F_y,F_z)$, 其中$F_y=G\iint\limits_D \frac{\mu(y-0)}{r^3}d\sigma=$

$G\mu\int_0^\pi d\theta\int_0^R \frac{\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=2G\mu\left(\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a}-\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$,

$F_z=G\iint\limits_D \frac{\mu(0-a)}{r^3}d\sigma=-G\mu a\int_0^\pi d\theta\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=-G\mu\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$.

第十一章 曲线积分与曲面积分

第 11.1 节 对弧长的曲线积分

一. 第一类曲线积分的定义

定义. 设 L 为 xOy 面内一段光滑曲线, $f(x,y)$ 在 L 上有界, 将 L 任意分成 n 段 Δs_i, 弧长也记为 Δs_i, $\forall(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$, 作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$, 若在无限细分 L 的过程中, 随 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}\to 0$, 该和总是趋向于同一个只依赖于 $f(x,y)$ 和 L 的常数 I, 则称 I 为 $f(x,y)$ 在 L 上对弧长的曲线积分, 记为 $\int\limits_{L} f(x,y)ds$, 若 L 是闭曲线, 也记为 $\oint\limits_{L} f(x,y)ds$; 称 $f(x,y)$ 为被积函数, L 为积分弧段.

物理意义: 设 L 为曲线型材料, 有连续密度 $\mu(x,y)$, 则 $M=\int\limits_{L}\mu(x,y)ds$.

几何意义: 设 $f(x,y)\ge 0$, 连续, 则以 L 为准线且平行 z 轴的柱面介于曲面 $z=0$, $z=f(x,y)$ 之间部分的面积为 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=\int\limits_{L} f(x,y)ds$, 例如: $\oint\limits_{x^2+y^2=ax}\sqrt{a^2-x^2-y^2}ds$ 为 $x^2+y^2=ax$ 含在 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内上半部分的面积.

定理. 设 $f(x,y)$ 在光滑曲线 L 上连续, 则 $\int\limits_{L} f(x,y)ds$ 存在.

注. 若 L 分段光滑, 则规定 $\int\limits_{L} f(x,y)ds=\int\limits_{L_1} f(x,y)ds+\int\limits_{L_2} f(x,y)ds$.

注. 对于分段光滑空间曲线 Γ 和 Γ 上的连续函数 $f(x,y,z)$, 也可以定义对弧长的曲线积分 $\int\limits_{\Gamma} f(x,y,z)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$.

二. 第一类曲线积分的性质

性质 1. $\int\limits_{L}[\alpha f(x,y)\pm\beta g(x,y)]ds=\alpha\int\limits_{L} f(x,y)ds\pm\beta\int\limits_{L} g(x,y)ds$;

性质 2. $\int\limits_{L_1+L_2} f(x,y)ds=\int\limits_{L_1} f(x,y)ds+\int\limits_{L_2} f(x,y)ds$;

性质 3. $\int\limits_{L} 1\cdot ds=s$, 一般地, $\int\limits_{L} k\cdot ds=k\cdot s$;

性质 4. 设在 L 上 $f(x,y)\le g(x,y)$, 则 $\int\limits_{L} f(x,y)ds\le\int\limits_{L} g(x,y)ds$;

推论. $\left|\int\limits_{L} f(x,y)ds\right|\le\int\limits_{L}|f(x,y)|ds$.

注. 也有类似于定积分的估值定理和积分中值定理.

例. 求 $I=\oint_L\left(x^2+y^2-2x-4y\right)ds$, 其中 $L:(x-1)^2+(y-2)^2=16$.

解. $I=\oint_L\left[(x-1)^2+(y-2)^2-5\right]ds=\oint_L 11\cdot ds=11\cdot 2\pi\cdot 4=88\pi$.

例. 求 $I=\oint_\Gamma\sqrt{2y^2+z^2}ds$, 其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\y=x\end{cases}$.

解. $I=\oint_\Gamma\sqrt{x^2+y^2+z^2}ds=\oint_\Gamma 1\cdot ds=2\pi$.

三. 对称性

1. 若积分曲线是平面曲线, 则参照二重积分;
2. 若积分曲线是空间曲线, 则参照三重积分.

例. 求 $I=\oint_L\left(x\cos y+ye^x+1\right)ds$, 其中 $L:|x|+|y|=1$.

解. $I=0+0+\oint_L 1\cdot ds=4\sqrt{2}$.

例. 求 $I=\oint_L\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 ds$, 其中 $L:x^2+y^2=R^2$.

解. $I=\oint_L\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)ds=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\oint_L\left(x^2+y^2\right)ds=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\pi R^3$.

例. 设 $L:\frac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$ 的周长为 a, 求 $I=\oint_L(x+2y)^2 ds$.

解. $L:x^2+4y^2=8y$, 故 $I=\oint_L 8yds=8\oint_L(y-1+1)ds=8\oint_L ds=8a$.

例. 求 $I=\oint_L\left[\left(y+\sqrt{x}\right)\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right]ds$, 其中 $L:x^2+y^2=2x$.

解. $I=\oint_L\left[\sqrt{x}\sqrt{2x}+2x\right]ds=\left(2+\sqrt{2}\right)\oint_L xds=\left(2+\sqrt{2}\right)\oint_L ds=\left(4+2\sqrt{2}\right)\pi$.

例. 求 $I=\oint_\Gamma(xy+z)ds$, 其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$.

解. $I=\oint_\Gamma xyds-\oint_\Gamma(x+y)ds=\frac{1}{3}\oint_\Gamma(xy+yz+zx)ds-\frac{2}{3}\oint_\Gamma(x+y+z)ds=$

$\frac{1}{6}\oint_\Gamma\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]ds-0=-\frac{1}{6}\oint_\Gamma ds=-\frac{1}{3}\pi$.

例. 求 $I=\oint_\Gamma(x+2y+3z)ds$, 其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y=0\end{cases}$.

解. $I=3\oint_\Gamma xds+3\oint_\Gamma zds=\frac{3}{2}\oint_\Gamma(x+y)ds+0=0$.

四. 计算法

定理. 设 $L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, $\alpha\le t\le\beta$, 其中 $x'(t)$, $y'(t)$ 均连续, 并且 $x'^2(t)+y'^2(t)\ne0$,

则 $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$.

推论. (1) 设 $L:y=y(x)(a\le x\le b)$, 则 $\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}dx$;

特别地, $L:y=y_0(a\le x\le b)$ 平行于 x 轴时, $\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y_0)dx$.

(2) 设 $L:x=x(y)(c\le y\le d)$, 则 $\int_L f(x,y)ds=\int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+x'^2(y)}dy$;

特别地, $L:x=x_0(c\le y\le d)$ 平行于 y 轴时, $\int_L f(x,y)ds=\int_c^d f(x_0,y)dy$.

(3) 设在极坐标下, $L:\rho=\rho(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$, 则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta]\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta.$$

例. 求 $I=\int_L\sqrt{y}ds$, 其中 L 为 $y=x^2$ 上 $O(0,0)$ 与 $B(1,1)$ 之间的一段弧.

解. $I=\int_0^1\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\left(x^2\right)'^2}dx=\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{12}\left(5\sqrt5-1\right)$.

例. 求 $I=\oint_L(x+y)e^{x^2+y^2}ds$, 其中 L 为 $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\pm x$ 所围区域边界.

解. $L_1:y=-x$, $-\frac{\sqrt2}{2}\le x\le0$, $L_2:\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$, $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$, $L_3:y=x$, $0\le x\le\frac{\sqrt2}{2}$,

$$I=\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^0(x-x)e^{2x^2}\sqrt2dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)e^1d\theta+\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}(x+x)e^{2x^2}\sqrt2dx=\frac32\sqrt2e-\frac{\sqrt2}{2}.$$

例. 求 $I=\oint_L|y|ds$, 其中 $L:\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$ 为双纽线.

解. $L:\rho^2=\cos2\theta$, 故 $I=4\int_{L_1}yds=4\int_0^{\pi/4}\rho\sin\theta\cdot\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta=$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\sqrt{\rho^4+(\rho\rho')^2}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\sqrt{\rho^4+\frac14\left[\left(\rho^2\right)'\right]^2}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=2\left(2-\sqrt2\right).$$

例. 求 $x^2+y^2=ax$ 位于 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部分的面积.

解. $A=2\oint\limits_L\sqrt{a^2-x^2-y^2}ds$，在极坐标下，$L:\rho=a\cos\theta$，$-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，故

$$A=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{a^2-\rho^2}\cdot\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\cos^2\theta}\cdot ad\theta=4a^2.$$

例. 求 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 位于 $x^2+y^2+z^2=1$ 内部分的面积.

解. $A=2\oint\limits_L\sqrt{1-x^2-y^2}ds$，其中 $L:\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$，$0\le t\le 2\pi$，故

$$A=8\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\cos^6 t-\sin^6 t}\cdot\sin t\cos tdt=24\int_0^{\pi/2}\sqrt{3\sin^2 t\cos^2 t}\cdot 3\sin t\cos tdt=\frac{3}{2}\sqrt{3}\pi.$$

注. 类似地, 设光滑空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$，$\alpha\le t\le\beta$，则

$$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f\left[x(t),y(t),z(t)\right]\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt.$$

例. 求 $I=\int\limits_\Gamma(x+2y+3z)ds$，其中 Γ 为 $A(1,1,1)$ 到 $B(2,3,4)$ 的直线段.

解. $\Gamma:\begin{cases}x=t+1\\ y=2t+1\\ z=3t+1\end{cases}$，$t\in[0,1]$，故 $I=\int_0^1(14t+6)\sqrt{1+4+9}dt=13\sqrt{14}$.

例. 求 $I=\oint\limits_\Gamma\dfrac{|y|}{x^2+y^2+z^2}ds$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ x^2+y^2=2x\end{cases}$.

解. $I=\oint\limits_\Gamma\dfrac{|y|}{4}ds=\oint\limits_{\Gamma_1}yds$，其中 $\Gamma_1:\begin{cases}x=1+\cos t\\ y=\sin t\\ z=\sqrt{4-2(1+\cos t)}=2\sin\dfrac{t}{2}\end{cases}$，$0\le t\le\pi$，故

$$I=\int_0^\pi\sin t\cdot\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}dt=-2\int_0^\pi\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}d\cos^2\frac{t}{2}=\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

五. 物理应用

设 Γ 为曲线型材料, 具有连续密度 $\mu(x,y,z)$，则

1. 质心坐标 $\bar{x}=\dfrac{\int\limits_\Gamma x\mu ds}{\int\limits_\Gamma\mu ds}$，$\bar{y}=\dfrac{\int\limits_\Gamma y\mu ds}{\int\limits_\Gamma\mu ds}$，$\bar{z}=\dfrac{\int\limits_\Gamma z\mu ds}{\int\limits_\Gamma\mu ds}$；

2. 对 l 的转动惯量 $I_l=\int\limits_\Gamma d^2\mu ds$，其中 $d(x,y,z)$ 为 (x,y,z) 到 l 的距离；

3. 对 (x_0, y_0, z_0) 处单位质点的引力

$$\vec{F} = G\left(\int_\Gamma \frac{\mu(x-x_0)}{r^3}ds, \int_\Gamma \frac{\mu(y-y_0)}{r^3}ds, \int_\Gamma \frac{\mu(z-z_0)}{r^3}ds\right).$$

例. 求半径为 R，中心角为 2α 的均匀圆弧关于对称轴的转动惯量.

解. 取 x 轴为对称轴, 原点为圆心建立坐标系, 则 $I_x = \int_L y^2 \mu ds =$

$$\mu\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\sin^2\theta\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\,d\theta = R^3\mu(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha).$$

补充练习

1. 求 $I = \oint_L \left(x\sin\sqrt{x^2+y^2}+4x^2+4y^2-7y\right)ds$，其中 $L: x^2+(y-1)^2=1$.

解. $I = \oint_L (4x^2+4y^2-7y)ds = \oint_L yds = \oint_L ds = 2\pi$.

2. 求 $I = \oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 $L: x^2+y^2=-2y$.

解. $L: x = \pm\sqrt{-2y-y^2}$，$\dfrac{dx}{dy} = \pm\dfrac{-1-y}{\sqrt{-2y-y^2}}$，$ds = \sqrt{1+x'^2}dy = \dfrac{dy}{\sqrt{-2y-y^2}}$，

故 $I = 2\int_{-2}^{0}\sqrt{-2y}\cdot\dfrac{dy}{\sqrt{-2y-y^2}} = 2\sqrt{2}\int_{-2}^{0}\dfrac{dy}{\sqrt{2+y}} = 4\sqrt{2}\left[\sqrt{2+y}\right]_{-2}^{0} = 8$；

或者，$L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = -1+\sin t \end{cases}$，故 $I = \int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\sin t}\cdot dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\dfrac{t}{2}-\cos\dfrac{t}{2}\right|dt = 8$；

或者，$L: \rho = -2\sin\theta$，$ds = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta = 2d\theta$，故

$$I = \int_{-\pi}^{0}\rho\cdot 2d\theta = \int_{-\pi}^{0}-2\sin\theta\cdot 2d\theta = 8.$$

第 11.2 节 对坐标的曲线积分

一. 变力沿曲线作功

设质点在变力 $\vec{F}=(P,Q)$ 的作用下沿有向曲线 $\Gamma=\overset{\frown}{AB}$ 移动, 将 L 任意分成 n 小段 $L_i=\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, 在每一小段上, 变力作功 $W_i\approx\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$, 其中 $\vec{r}_i=\overrightarrow{OM_i}=(x_i,y_i)$, 故 $W=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\vec{r}_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i\right]$,

其中 F_x 作的功为 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i$, F_y 作的功为 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i$, 分别记为 $\int\limits_L P(x,y)dx$, $\int\limits_L Q(x,y)dy$, 故 $W=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$.

二. 第二类曲线积分的定义

设 $L=\overset{\frown}{AB}$ 为光滑有向曲线, $f(x,y)$ 在 L 上有界, 将 L 任意分成 n 段 $L_i=\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, 其中 $M_i=(x_i,y_i)$, $\forall(\xi_i,\eta_i)\in L_i$, 作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$, 若在无限细分 L 的过程中, 随着 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}\to 0$, 该和总是趋向于一个只依赖于 $f(x,y)$ 和 L 的常数 I, 则称 I 为 $f(x,y)$ 在 L 上对坐标 x 的曲线积分, 记为 $\int\limits_L f(x,y)dx$;

称 $f(x,y)$ 为被积函数, L 为积分弧段.

类似地, 对坐标 y 的曲线积分 $\int\limits_L f(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$.

设 $\vec{F}=(P,Q)$ 为 $L=\overset{\frown}{AB}$ 上的有界向量值函数, 则它在 L 上对坐标的曲线积分为 $\int\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_L Pdx+Qdy$, 其中 $d\vec{r}=(dx,dy)$ 称为有向曲线元素.

定理. 设 $f(x,y)$ 在光滑有向曲线 L 上连续, 则它在 L 上对坐标的曲线积分存在.

注. 设 Γ 为空间光滑有向曲线, $f(x,y,z)$ 在 Γ 上的有界函数, 则

$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$, $\int\limits_\Gamma f(x,y,z)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i$,

$\int\limits_\Gamma f(x,y,z)dz=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i$;

设 $\vec{F}=(P,Q,R)$, 则 $\int\limits_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$, 其中 $d\vec{r}=(dx,dy,dz)$.

物理意义. 质点在变力 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 作用下沿有向曲线 $\Gamma=\overset{\frown}{AB}$ 移动, 则所做的功 $W=\int\limits_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$.

三. 第二类曲线积分的性质

性质 1. $\int\limits_L (\alpha \vec{F}_1 \pm \beta \vec{F}_2)\cdot d\vec{r} = \alpha \int\limits_L \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} \pm \beta \int\limits_L \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$;

性质 2. $\int\limits_{L_1+L_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{L_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{L_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$;

性质 3. $\int\limits_{-L} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int\limits_{L} \vec{F}\cdot d\vec{r}$;

性质 4. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} 1\cdot dx = x_B - x_A$, $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} 1\cdot dy = y_B - y_A$.

四. 计算法

定理. 设光滑曲线 $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t:\alpha \to \beta$, 则 $\int\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \left(\vec{F}\cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt$, 即

$$\int\limits_L P(x,y)dx = \int_\alpha^\beta P[x(t),y(t)]x'(t)dt,\ \int\limits_L Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta Q[x(t),y(t)]y'(t)dt.$$

推论. (1) 若 $L: y = y(x)$, $x: a \to b$, 则 $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$

$\int_a^b \{P[x,y(x)] + Q[x,y(x)]y'(x)\}dx$; (2) 若 $L: x = x(y)$, $y: c \to d$, 则

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d \{P[x(y),y]x'(y) + Q[x(y),y]\}dy.$$

例. 求 $I = \int\limits_L xydx$, 其中 L 为 $y^2 = x$ 上从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧.

解. $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AO}} xydx + \int\limits_{\overset{\frown}{OB}} xydx = \int_1^0 x(-\sqrt{x})dx + \int_0^1 x\sqrt{x}dx = 2\int_0^1 x\sqrt{x}dx = \frac{4}{5}$;

或者, $I = \int_{-1}^1 y^2 y dy^2 = 2\int_{-1}^1 y^4 dy = \frac{4}{5}$.

例. 设一质点在 $M(x,y)$ 处受到力 $\vec{F}$ 的作用, $\vec{F}$ 的大小与 M 到 O 的距离成正比, 方向指向 O, 现在质点由 $A(a,0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 按逆时针方向移动到 $B(0,b)$, 求力 $\vec{F}$ 所作的功.

解. $L:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t: 0 \to \frac{\pi}{2}$, $\vec{F} = -k(x,y)$, $W = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -k\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xdx + ydy =$

$$-k\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos td(a\cos t) + b\sin td(b\sin t) = -k(b^2 - a^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos tdt = -k\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right).$$

例. 求 $I = \oint\limits_L xydx$, 其中 L 为 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ 与 x 轴所围成的区域位于第一象限部分的整个边界, 取逆时针方向.

解. $I=\int\limits_{L_1}xydx+\int\limits_{L_2}xydx=\int\limits_0^{2a}(x\cdot 0)dx+\int\limits_0^{\pi}(a+a\cos t)a\sin t\cdot d(a+a\cos t)=$

$-a^3\int\limits_0^{\pi}(1+\cos t)\sin^2 tdt=-\dfrac{\pi a^3}{2}$.

例. 求 $I=\int\limits_{\Gamma}x^3dx+3zy^2dy-x^2ydz$, 其中 Γ 为 $A(3,2,1)$ 到 O 的有向线段.

解. $\Gamma:\begin{cases}x=3t\\y=2t\\z=t\end{cases}$, $t:1\to 0$, 故 $I=87\int\limits_1^0 t^3dt=-\dfrac{87}{4}$.

例. 求 $I=\oint\limits_{\Gamma}(z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$, 其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\x-y+z=2\end{cases}$, 从 z 轴正向看为顺时针方向.

解. $\Gamma:\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\\z=2-\cos t+\sin t\end{cases}$, $t:2\pi\to 0$, 故 $I=\int\limits_{2\pi}^{0}(4\cos^2 t-1)dt=-2\pi$.

五. 曲线积分与路径无关的例子

例. 求 $I=\int\limits_L 2xydx+x^2dy$, 其中 L 为 (1) $y=x^2$ 上 O 到 $B(1,1)$ 的一段弧;

(2) $x=y^2$ 上 O 到 $B(1,1)$ 的一段弧; (3) O 到 $A(1,0)$, 再到 B 的折线.

解. (1) $I=\int\limits_0^1 2x\cdot x^2dx+x^2\cdot dx^2=1$, (2) $I=\int\limits_0^1 2y^2\cdot y\cdot dy^2+(y^2)^2dy=1$,

(3) $I=\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}=\int\limits_0^1 P(x,0)dx+\int\limits_0^1 Q(1,y)dy=0+\int\limits_0^1 1^2dy=1$.

六. 两类曲线积分之间的联系

定理. 设 $\vec{T}$ 为有向曲线 L 的切向量(指向 L 的正方向), 则 $\int\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_L(\vec{F}\cdot\vec{e}_\tau)ds$,

例. 设 $L:y=\sqrt{2x-x^2}$, $(0,0)\to(1,1)$, 将 $\int\limits_L Pdx+Qdy$ 化为对弧长的曲线积分.

解. $\vec{T}=\left(1,\dfrac{dy}{dx}\right)=\left(1,\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)$, $\vec{e}_\tau=\left(\sqrt{2x-x^2},1-x\right)$, 故

$\int\limits_L Pdx+Qdy=\int\limits_L\left[\sqrt{2x-x^2}P(x,y)+(1-x)Q(x,y)\right]ds$.

例. 设 $L:x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t(0\le t\le 2\pi)$, 取逆时针方向, 证明:

$\left|\oint\limits_L\sin(x^2+y)dx+\cos(2xy^2)dy\right|\le 6\sqrt{2}$.

证. 由 $\left|\oint_L Pdx+Qdy\right|=\left|\oint_L (P,Q)\cdot\vec{e}_\tau ds\right|\le\oint_L\left|(P,Q)\cdot\vec{e}_\tau\right|ds\le\oint_L\sqrt{P^2+Q^2}ds$, 得到

$\left|\oint_L \sin\left(x^2+y\right)dx+\cos\left(2xy^2\right)dy\right|\le\sqrt{2}\oint_L ds=6\sqrt{2}$, 证毕.

补充练习

1. 求 $I=\int_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 L 从 $A(-1,0)$ 沿 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 到 $B(1,0)$, 然后再沿直线到 $D(-1,2)$ 的有向曲线.

解. $\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$, $t:-\pi\to 0$, $\overline{BD}:y=-x+1$, $x:1\to -1$, 故

$$I=\int_{-\pi}^{0}\frac{dt}{4\cos^2 t+\sin^2 t}+\int_{1}^{-1}\frac{-dx}{5x^2-2x+1}=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}=\frac{7\pi}{8}.$$

2. 求 $I=\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz$, 其中 Γ 为 $x+y+z=1$ 被三个坐标面截下三角形的边界, 从 z 轴正向看为逆时针方向.

解. 设 $\Gamma_1:\begin{cases}x=x\\ y=1-x\\ z=0\end{cases}$, $x:1\to 0$, 由于在轮换 $x\to y\to z\to x$ 下, I 不变, 故

$$I=3\int_{\Gamma_1} ydx+zdy+xdz=3\int_{\Gamma_1} ydx=3\int_1^0(1-x)\,dx=-\frac{3}{2}.$$

第 11.3 节 格林公式及其应用

一. Green 公式

定理. 设分段光滑曲线 L 为有界闭区域 D 的正向边界, $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数, 则 $\oint\limits_{L} Pdx+Qdy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

注. $L=\partial D$ 的正方向(诱导定向)为:当观察者在 L 上沿这个方向行走时, D 总是位于他的左侧, 即 D 的外边界逆时针, 内边界取顺时针. ∂D 的正向也记为 ∂D^{+}.

推论. $2\iint\limits_{D} dxdy=\oint\limits_{\partial D} xdy-ydx$, 或者 $\iint\limits_{D} dxdy=\frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D} xdy-ydx$.

例. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 围成图形的面积.

解. $\iint\limits_{D} dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} a\cos td\left(b\sin t\right)-b\sin td\left(a\cos t\right)=ab\pi$.

例. 求星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}\left(0\le t\le 2\pi\right)$ 围成图形的面积.

解. $A=\frac{1}{2}\oint\limits_{L} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left[a\cos^3 t\cdot\left(a\sin^3 t\right)'-a\sin^3 t\cdot\left(a\cos^3 t\right)'\right]dt=\frac{3\pi a^2}{8}$.

例. 求 $I=\oint\limits_{L}\left(y-x\right)dx+\left(3x+y\right)dy$, 其中 $L:\left(x-1\right)^2+\left(y-4\right)^2=9$, 逆时针.

解. $I=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_{D}\left(3-1\right)dxdy=18\pi$.

例. 求 $I=\int\limits_{L}\left(e^x\sin y-x-y\right)dx+\left(e^x\cos y+x\right)dy$, 其中 L 为半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的一段有向弧段.

解. $I=\oint\limits_{L+\overline{AO}}-\int\limits_{\overline{AO}}=-\iint\limits_{D}2dxdy-\int_{2}^{0}\left(-x\right)dx=-\pi-2$.

例. 求 $I=\int\limits_{L}\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$, 其中 L 为 $2x=\pi y^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的一段有向弧.

解. 设 $B\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, 则 $I=\oint\limits_{L+\overline{AB}+\overline{BO}}-\int\limits_{\overline{AB}}-\int\limits_{\overline{BO}}=-\int_{1}^{0}\left(1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2\right)dy=\frac{\pi^2}{4}$.

例. 求 $I=\int\limits_{L}\frac{\left(x-y\right)dx+\left(x+y\right)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 为 $y=\cos x$ 上从 $A\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 到 $B\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 的一段有向弧.

解. 取 $L_1: y=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}$ 上从 B 到 A 的一段, 则 $I=\oint\limits_{L+L_1}-\int\limits_{L_1}=-\int\limits_{L_1}=$

$$-\int\limits_{L_1}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{\frac{\pi^2}{4}}=-\frac{4}{\pi^2}\left(\oint\limits_{L_1+\overline{AB}}-\int\limits_{\overline{AB}}\right)=-\frac{4}{\pi^2}\left(\iint\limits_{D_1}2d\sigma-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xdx\right)=-\pi .$$

例. 求 $I=\int\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, 其中 L 从 $A\left(-\frac{3\pi}{4},0\right)$ 沿 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 到 $B\left(\frac{\pi}{4},0\right)$.

解. 取 L_1 为从 $M(r,0)$ 沿 $x^2+y^2=r^2$ 逆时针到 $N(-r,0)$ 的有向弧, 则

$$I=\oint\limits_{L+\overline{BM}+L_1+\overline{NA}}-\int\limits_{\overline{BM}}-\int\limits_{L_1}-\int\limits_{\overline{NA}}=-\int\limits_{L_1}=-\int\limits_{L_1}\frac{xdy-ydx}{r^2}=-\frac{1}{r^2}\left(\oint\limits_{L_1+\overline{NM}}-\int\limits_{\overline{NM}}\right)=$$

$$-\frac{1}{r^2}\iint\limits_D 2dxdy=-\frac{1}{r^2}\cdot\pi r^2=-\pi .$$

例. 求 $I=\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, 其中 $L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 逆时针方向.

解. 取 $C_r: x^2+y^2=r^2$, 逆时针, 则 $I=\oint\limits_{L+(-C_r)}-\oint\limits_{-C_r}=\oint\limits_{C_r}\frac{xdy-ydx}{r^2}=2\pi$.

例. 求 $I=\int\limits_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 L 为从 $A(-1,0)$ 沿 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 到 $B(1,0)$, 然后沿直线到 $D(-1,2)$ 的一段有向弧.

解. 取 $C: 4x^2+y^2=r^2$, 逆时针, 则 $I=\oint\limits_{L+\overline{DA}}-\int\limits_{\overline{DA}}=\oint\limits_{C}\frac{xdy-ydx}{r^2}-\int\limits_{\overline{DA}}=$

$$\frac{1}{r^2}\iint\limits_{4x^2+y^2\le r^2}2dxdy-\int_2^0\frac{-dy}{4+y^2}=\pi-\frac{1}{8}\pi=\frac{7}{8}\pi .$$

二. 积分与路径无关的条件

定理. 在区域 G 内, 积分值 $\int\limits_L Pdx+Qdy$ 与路径无关(只与起点终点有关) $\Leftrightarrow$ 对于 G 内的任意闭曲线 C, 恒有 $\oint\limits_C Pdx+Qdy=0$.

定义. 若平面区域 G 内任意闭曲线所围部分均包含于 G, 则称 G 为单连通区域, 即无"洞"的区域, 否则称为复连通区域.

定理. 设区域 G 单连通, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 G 内有连续偏导, 则在 G 内曲线积分 $\int\limits_L Pdx+Qdy$ 与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 处处成立.

例. 求 $I=\int\limits_L ye^{y^2}dx+x(1+2y^2)e^{y^2}dy$, 其中 L 为从 O 沿 $x=y^3$ 到 $A(1,1)$ 的有向弧.

解. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, xOy 面单连通, 故 I 与路径无关, 取 $B(1,0)$, 则

$I=\int\limits_{OB}+\int\limits_{BA}=\int_0^1 P(x,0)dx+\int_0^1 Q(1,y)dy=0+\int_0^1(1+2y^2)e^{y^2}dy$, 此路不通;

改取 $C(0,1)$, 则 $I=\int\limits_{OC}+\int\limits_{CA}=\int_0^1 Q(0,y)dy+\int_0^1 P(x,1)dx=0+\int_0^1 e\cdot dx=e$.

例. 求 $I=\int\limits_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 为从 $A(-1,0)$ 沿 $y=2x^2-2$ 到 $B(1,0)$ 的一段有向弧.

解. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 故 I 与路径无关, 取 L_1 为从 $A(-1,0)$ 沿 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 到 $B(1,0)$ 的一段圆弧, 则 $I=\int\limits_{L_1}=\int\limits_{L_1}(x-y)dx+(x+y)dy=\pi$.

例. 求 $I=\int\limits_L \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$, 其中 L 为 $y=\sqrt{1+x^2}$ 上从 $A(0,1)$ 到 $B(\sqrt{3},2)$ 的一段有向弧.

解. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, $\{y>x\}$ 单连通, 故 $I=\int_{(0,1)}^{(0,2)}+\int_{(0,2)}^{(\sqrt{3},2)}=0+\int_0^{\sqrt{3}}\frac{-2dx}{(x-2)^2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$.

三. 全微分求积

1. 可积的条件

定义. 若在平面区域 G 内 $Pdx+Qdy$ 是某个 $u(x,y)$ 的全微分, 则称它在 G 内可积, 称 $u(x,y)$ 为它的一个原函数.

定理. 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 均连续, 若 $\int\limits_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关, 则 $Pdx+Qdy$ 在 G 内可积, $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$ 为它的一个原函数.

定理. 设区域 G 单连通, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 G 内均有连续偏导数, 则在 G 内 $Pdx+Qdy$ 可积 $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 处处成立.

例. 验证 $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 在右半平面内可积, 并求它的一个原函数.

解. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, $\{x>0\}$ 单连通, 故可积, $u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy=$

$\int_{(1,0)}^{(x,0)} P(x,0)dx+\int_{(x,0)}^{(x,y)} Q(x,y)dy=\int_1^x \frac{-0\cdot dx}{x^2+0^2}+\int_0^y \frac{xdy}{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$.

定理. 设 G 为单连通区域, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 G 内有连续偏导数, 则下面的四个命题等价:

(1) 曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关;

(2) 对于 G 内任意闭曲线 C, 均有 $\oint_C Pdx+Qdy=0$;

(3) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 G 内处处成立;

(4) 微分形式 $Pdx+Qdy$ 在 G 内可积.

2. 分项组合法

例. 验证在 xOy 面内, $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy$ 可积, 求原函数.

解. $Pdx+Qdy=3x^2dx+(6xy^2dx+6x^2ydy)+4y^3dy=dx^3+d(3x^2y^2)+dy^4=$
$d(x^3+3x^2y^2+y^4)$, 故 $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4$.

例. 验证在上半平面内, $xydx+\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{y}\right)dy$ 可积, 求原函数.

解. $Pdx+Qdy=xydx+\dfrac{x^2}{2}dy+\dfrac{1}{y}dy=d\left(\dfrac{x^2y}{2}+\ln y\right)$, 故 $u(x,y)=\dfrac{x^2y}{2}+\ln y$.

四. 曲线积分的基本定理

定理. 设在 G 内 $Pdx+Qdy=du$, 则对 G 内任意分段光滑有向弧段 $L=\overset{\frown}{AB}$, 均有
$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy=\int_{\overset{\frown}{AB}} du=u(B)-u(A)$.

向量形式: 若 $\vec{F}=\operatorname{grad}u$, 则 $\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\overset{\frown}{AB}} du=u(B)-u(A)$.

注. 故当力场 $\vec{F}$ 为保守场, 即具有势函数 u 时, 它对在其中运动的质点作的功
$W=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_L \operatorname{grad}u\cdot d\vec{r}=\int_L du=u(B)-u(A)$, 与路径无关.

例. 设右半平面内有一个力场, 力的大小与点到原点的距离平方成正比, 方向指向原点, 证明: 这个力场对在其中运动的质点所作的功与质点的运动路径无关, 并求质点从 $(1,1)$ 到 $(2,2)$ 时力场对其所作的功.

解. $\vec{F}=-k\sqrt{x^2+y^2}\,(x,y)=-k\left(x\sqrt{x^2+y^2},y\sqrt{x^2+y^2}\right)=-\dfrac{k}{3}\operatorname{grad}(x^2+y^2)^{3/2}$, 故

$W=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 与路径无关, $W=-\dfrac{k}{3}\left[(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{(1,1)}^{(2,2)}=-\dfrac{14\sqrt{2}}{3}k$; 或者,

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $x>0$ 单连通, 故 $W=-k\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx-k\int_1^2 y\sqrt{4+y^2}dy=-\dfrac{14\sqrt{2}}{3}k$.

五. 全微分方程

定义. 一阶微分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 称为**全微分方程**, 若存在可微函数 $u(x,y)$, 使得 $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

定理. 若 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)$, 则全微分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的通解为 $u(x,y)=C$.

定理. 设在单连通区域内 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 均有连续的偏导数, 则微分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 是全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

例. 求 $\left(x^2-y\right)dx-(x-y)dy=0$ 通解.

解一. $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$, 又 xOy 面单连通, 故 $\left(x^2-y\right)dx-(x-y)dy$ 可积,

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(x^2-y\right)dx-(x-y)dy=\int_0^x\left(x^2-0\right)dx+\int_0^y\left[-(x-y)\right]dy=$$

$\dfrac{1}{3}x^3-xy+\dfrac{1}{2}y^2$, 故通解为 $\dfrac{1}{3}x^3-xy+\dfrac{1}{2}y^2=C$, 即 $2x^3-6xy+3y^2=C$;

解二. $\left(x^2-y\right)dx-(x-y)dy=x^2dx-ydx-xdy+ydy=$

$x^2dx-(ydx+xdy)+ydy=d\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)-d(xy)+d\left(\dfrac{1}{2}y^2\right)=d\left(\dfrac{1}{3}x^3-xy+\dfrac{1}{2}y^2\right)$,

故通解为 $\dfrac{1}{3}x^3-xy+\dfrac{1}{2}y^2=C$, 即 $2x^3-6xy+3y^2=C$;

解三. 设 $\left(x^2-y\right)dx-(x-y)dy=du$, 则

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=x^2-y\Rightarrow u=\int\left(x^2-y\right)dx=\dfrac{1}{3}x^3-yx+C(y)$, 而由 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=y-x$, 得

$-x+C'(y)=y-x\Rightarrow C'(y)=y\Rightarrow C(y)=\dfrac{1}{2}y^2+C$, 故

$u=\dfrac{1}{3}x^3-yx+\dfrac{1}{2}y^2+C$, 通解为 $\dfrac{1}{3}x^3-xy+\dfrac{1}{2}y^2=C$, 即 $2x^3-6xy+3y^2=C$.

例. 设 $L:x^2+y^2+x+y=0$, 逆时针, 证明: $\oint_L x\cos y^2dy-y\sin x^2dx\le\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

证. 左式 $=\iint_D\left(\cos y^2+\sin x^2\right)d\sigma\le\sqrt{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$, 证毕.

补充练习

1. 求 $I=\int_L\left(x^3+xy^2+1\right)dx+\left(e^y+x^2y\right)dy$, 其中 $L:y=\sqrt{1-x^2}$, $x:1\to 0$.

解. $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 故 $I=\int_1^0\left(x^3+1\right)dx+\int_0^1 e^ydy=e-\dfrac{9}{4}$.

2. 求 $I=\int_L\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(x^2-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$, 其中 L 为从 $A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 沿 $2x=\pi y^2$ 到 $B\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$ 的一段有向弧.

解. $I=\oint_{L+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}=\iint_D 2xdxdy-\int_1^{-1}\left(\frac{\pi^2}{4}-2y+\frac{3\pi^2y^2}{4}\right)dx=-\frac{3}{5}\pi^2$.

3. 求 $I=\int_L\frac{(3y-x)dx-(3x-y)dy}{(x+y)^3}$, 其中 L 从 $A(1,0)$ 沿 $y=\sqrt{1-x^2}$ 到 $B(0,1)$.

解. $I=\oint_{L+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}=\int_{\overline{AB}}(3y-x)dx-(3x-y)dy=\int_1^0 2\cdot dx=-2$.

4. 求 $I=\oint_L\sqrt{4x^2+y^2}\left(4xdx+ydy\right)$, 其中 $L:(x-1)^2+y^2=4$, 逆时针.

解. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 取 $C_r:4x^2+y^2=r^2$, 逆时针, 则 $I=\oint_{C_r}=r\oint_{C_r}4xdx+ydy=0$.

5. 设 $f(x)>0$ 有连续导数, 且 $f(1)=\frac{1}{2}$, 若在区域 $x>0$ 内, 曲线积分 $\int_L\left[ye^xf(x)-\frac{y}{x}\right]dx-\ln f(x)dy$ 与路径无关, 求 $f(x)$.

解. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Rightarrow f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-e^xf^2(x)$, 即 $y=f(x)$ 满足伯努利方程 $y'-\frac{1}{x}y=-e^xy^2$, 解得 $y=\frac{x}{xe^x-e^x+C}$, 又 $f(1)=\frac{1}{2}$, 得 $C=2$.

第 11.4 节 对面积的曲面积分

一. 第一类曲面积分的定义

定义. 设 Σ 为光滑曲面, $f(x,y,z)$ 在 Σ 上有界, 将 Σ 任意划分成 n 片 ΔS_i, 直径为 λ_i, 面积为 ΔS_i, 作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$, $\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$, 若在无限细分 Σ 的过程中, 随着 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}\to 0$, 该和趋向于一个只依赖 $f(x,y,z)$ 和 Σ 的常数 I, 则称 I 为 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上**对面积的曲面积分**, 记为 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$, $f(x,y,z)$ 为**被积函数**, Σ 为**积分曲面**.

定理. 设 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$ 存在.

物理意义. 设 Σ 为曲面型材料, 密度为 $\rho(x,y,z)$, 连续, 则 $M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,dS$.

二. 第一类曲面积分的性质

性质 1. $\iint\limits_{\Sigma}\left[\alpha f(x,y,z)\pm\beta g(x,y,z)\right]dS=\alpha\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS\pm\beta\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$.

性质 2. $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,dS+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,dS$.

性质 3. $\iint\limits_{\Sigma} 1\cdot dS=S$, 一般地, $\iint\limits_{\Sigma} k\cdot dS=kS$.

性质 4. 若 $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$, 则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS\le\iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)\,dS$.

推论. $\left|\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS\right|\le\iint\limits_{\Sigma}\left|f(x,y,z)\right|dS$.

注. 也有估值定理和积分中值定理.

三. 对称性

注. 参照三重积分.

例. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+xz)\,dS$, 其中 $\Sigma: x^2+y^2=2\,(0\le z\le 4)$.

解. $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2 dS=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,dS=\iint\limits_{\Sigma} dS=8\sqrt{2}\pi$.

例. 求 $I=\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\,dS$, 其中 $\Sigma: |x|+|y|+|z|=1$.

解. $I=\oiint\limits_{\Sigma}|y|\,dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\,dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} dS=\frac{1}{3}\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

例. 求 $I=\oiint\limits_{\Sigma}(x-2y+4z+5)^2\,dS$, 其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$.

解. $I=\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+4y^2+16z^2+25)\,dS=21\oiint\limits_{\Sigma} x^2 dS+25\oiint\limits_{\Sigma} dS=32\oiint\limits_{\Sigma} dS=128\pi$.

例. 求 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x+y+z)^2dS$, 其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2x$.

解. $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(2x+2xy+2yz+2zx)dS=$

$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}2xdS=2\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x-1+1)dS=2\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}dS=8\pi$.

例. 求 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)dS$, 其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2y$.

解. $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(4x^2+2y^2)dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(2x^2+2y^2+2z^2)dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}4ydS=4\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}dS=16\pi$.

例. 求 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x+y+z-1)^2dS$, 其中 $\Sigma:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

解. $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}[(x-1)+(y-1)+(z-1)+2]^2dS=$

$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+4\right]dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(1+4)dS=5\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}dS=20\pi$.

四. 计算法

定理(投影法). 设 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 记 $I=\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS$, 则

(1) 当 $\Sigma: z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$ 时, $I=\iint_{D_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$;

(2) 当 $\Sigma: y=y(x,z)$, $(x,z)\in D_{xz}$ 时, $I=\iint_{D_{xz}}f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$;

(3) 当 $\Sigma: x=x(y,z)$, $(y,z)\in D_{yz}$ 时, $I=\iint_{D_{yz}}f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz$.

例. 求 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}xyzdS$, 其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成四面体的表面.

解. $I=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}+\iint_{\Sigma_4}=\iint_{\Sigma_4}xyz\cdot dS=\iint_{x+y\le1,x\ge0,y\ge0}xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}dxdy=$

$\sqrt{3}\int_0^1dx\int_0^{1-x}xy(1-x-y)dy=\dfrac{\sqrt{3}}{120}$.

例. 求 $I=\iint_{\Sigma}xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)dS$, 其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (x,y,z\ge0)$ 位于.

解. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\Rightarrow dS=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}d\sigma$, 故 $I=3\iint_{\Sigma}xyz\cdot x^2y^2dS=$

$3\iint_{D_{xy}}x^3y^3\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}d\sigma=\dfrac{a^9}{32}$.

例. 求 $I=\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS$, 其中 Σ 为 $y+z=5$ 被 $x^2+y^2=25$ 截下部分.

解. $z=5-y\Rightarrow dS=\sqrt{2}d\sigma$, 故 $I=\iint_{\Sigma}(y+z)dS=\iint_{x^2+y^2\le25}5\cdot\sqrt{2}d\sigma=125\sqrt{2}\pi$.

例. 求$I=\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$, 其中$\Sigma$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$被$x^2+y^2=2ax$截下部分.

解. $I=\iint\limits_{\Sigma}zxdS=\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}d\sigma=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^3\cos\theta d\rho=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$.

例. 求$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, 其中$\Sigma$为$x^2+y^2=R^2\,(0\le z\le H)$.

解. 设$\Sigma_1:x=\sqrt{R^2-y^2}$, 则$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$,

$I=2\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz=2\int_{-R}^{R}\frac{Rdy}{\sqrt{R^2-y^2}}\cdot\int_0^H\frac{dz}{R^2+z^2}=$

$2\pi\arctan\frac{H}{R}$.

例. 求$I=\oiint\limits_{\Sigma}xdS$, 其中$\Sigma$为$x^2+y^2=1$, $z=x+2$, $z=0$围成立体的表面.

解. 设$\Sigma_1:z=x+2$, $\Sigma_2:z=0$, $\Sigma_3:y=\sqrt{1-x^2}$, 则$I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+2\iint\limits_{\Sigma_3}=$

$\iint\limits_{D_{xy}}x\cdot\sqrt{2}dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}x\cdot dxdy+2\iint\limits_{D_{xz}}x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dxdz=0+0+2\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x+2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dz=\pi$.

五. 物理应用

设Σ为曲面型材料, 密度为$\mu(x,y,z)$, 则

1. 质心坐标为$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}x\mu dS}{\iint\limits_{\Sigma}\mu dS}$, $\bar{y}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}y\mu dS}{\iint\limits_{\Sigma}\mu dS}$, $\bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}z\mu dS}{\iint\limits_{\Sigma}\mu dS}$;

2. 对l的转动惯量$I_l=\iint\limits_{\Sigma}d^2\mu dS$, 其中$d(x,y,z)$为$(x,y,z)$到$l$的距离;

3. 对位于(x_0,y_0,z_0)处的单位质点的引力

$\vec{F}=\left(G\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mu(x-x_0)}{r^3}dS,G\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mu(y-y_0)}{r^3}dS,G\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mu(z-z_0)}{r^3}dS\right)$, 其中

$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

例. 求密度为μ的均匀半球形壳$\Sigma:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$对位于原点处的单位质点的引力.

解. 由对称性, $F_x=F_y=0$, $F_z=\iint\limits_{\Sigma}\frac{G\mu(z-0)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dS=\frac{G\mu}{a^3}\iint\limits_{\Sigma}zdS=$

$\frac{G\mu}{a^3}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=G\mu\pi$.

补充练习

1. 求$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}$, 其中$\Sigma$是$x^2+y^2+z^2=4$被$z=1$截下的顶部.

解. $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 3}\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\rho d\rho}{a^2-\rho^2}=4\pi\ln 2$.

2. 求$I=\iint\limits_{\Sigma}|xyz|dS$, 其中$\Sigma: z=x^2+y^2\left(0\le z\le 1\right)$.

解. $I=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\cdot dS=4\iint\limits_{x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0}xy\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=$

$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$.

第 11.5 节 对坐标的曲面积分

一. 第二类曲面积分的定义

我们常见的曲面大都是**双侧的**, 选定一侧的双侧曲面称为**有向曲面**.

设 Σ 为光滑有向曲面, $R(x,y,z)$ 在 Σ 上有界, 将 Σ 任意分成 n 小片 ΔS_i, 直径为 λ_i, 作和 $\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$, $\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$, 其中 $(\Delta S_i)_{xy}$ 为 ΔS_i 在 xOy 平面上的投影, 若在无限细分 Σ 的过程中, 随着 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\lambda_i\}\to 0$, 该和趋向于一个只依赖于 $R(x,y,z)$ 和 Σ 的常数 I, 则称 I 为 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上**对坐标 x 与 y 的曲面积分**, 记为 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$; 称 $f(x,y,z)$ 为**被积函数**, Σ 为**积分曲面**.

类似地, $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$;

$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$.

设 $\vec{A}=(P,Q,R)$ 为 Σ 上的有界向量值函数(场), 则 $\vec{A}$ 在 Σ 上**对坐标的曲面积分**为 $\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$, 其中 $d\vec{S}=(dydz,dzdx,dxdy)$ 为**有向曲面元素**.

定理. 光滑有向曲面上的连续函数对坐标的曲面积分存在.

二. 两类曲面积分的联系

定理. 设光滑有向曲面 Σ 的单位法向量 $\vec{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则

$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz=\iint\limits_{\Sigma} P\cos\alpha\cdot dS$, $\iint\limits_{\Sigma} Qdzdx=\iint\limits_{\Sigma} Q\cos\beta\cdot dS$, $\iint\limits_{\Sigma} Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma} R\cos\gamma dS$, 即

$\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{\Sigma}(\vec{A}\cdot\vec{e}_n)dS=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$.

例. 设 Σ 为圆柱体 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le 4(1\le z\le 3)$ 的外表面, 证明:

$$\left|\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}\cos(x^2+y)dydz+\sin(2xy^2)dzdx+dxdy\right|\le 16\sqrt{3}\pi .$$

证. $\left|\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}\right|=\left|\iint\limits_{\Sigma}(\vec{A}\cdot\vec{e}_n)dS\right|\le\iint\limits_{\Sigma}\left|\vec{A}\cdot\vec{e}_n\right|dS\le\iint\limits_{\Sigma}\left|\vec{A}\right|dS\le\sqrt{3}\iint\limits_{\Sigma}dS$, 证毕.

三. 流过曲面一侧的流量

设 $\vec{A}=(P,Q,R)$ 为一稳定不可压缩流体的流速场, Σ 为一片有向曲面, 在 Σ 上任取 dS, 则单位时间内流过其指定一侧的流体构成了一个底面积为 dS, 斜高为 $\left|\vec{A}\right|$ 的斜柱体, 体积 $d\Phi=(\vec{A}\cdot\vec{e}_n)dS=\vec{A}\cdot d\vec{S}$, 故单位时间内流过 Σ 指定一侧的流量总量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}$, 也称为**通量**.

四. 第二类曲面积分的性质

性质 1. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\alpha\vec{A}\pm\beta\vec{B}\right)\cdot d\vec{S}=\alpha\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}\pm\beta\iint\limits_{\Sigma}\vec{B}\cdot dS$；

性质 2. $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{\Sigma_1}\vec{A}\cdot d\vec{S}+\iint\limits_{\Sigma_2}\vec{A}\cdot d\vec{S}$；

性质 3. $\iint\limits_{-\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=-\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}$.

五. 计算法

定理(投影法). 设 Σ 为光滑有向曲面, P,Q,R 为 Σ 上的有界函数.

(1) 设 $\Sigma: z=z(x,y)$, 上侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}Rdxdy=\iint\limits_{D_{xy}}R\left[x,y,z(x,y)\right]dxdy$；

(2) 设 $\Sigma: y=y(x,z)$, 右侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}Qdzdx=\iint\limits_{D_{xz}}Q\left[x,y(x,z),z\right]dzdx$；

(3) 设 $\Sigma: x=x(y,z)$, 前侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}Pdydz=\iint\limits_{D_{yz}}P\left[x(y,z),y,z\right]dydz$.

定理(合一公式). 设 $I=\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$, 则

(1) 当 $\Sigma: z=z(x,y)$ 时, $I=\iint\limits_{\Sigma}\left[P\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+Q\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+R\cdot 1\right]dxdy$；

(2) 当 $\Sigma: y=y(x,z)$ 时, $I=\iint\limits_{\Sigma}\left[P\cdot\left(-\frac{\partial y}{\partial x}\right)+Q\cdot 1+R\cdot\left(-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\right]dzdx$；

(3) 当 $\Sigma: x=x(y,z)$ 时, $I=\iint\limits_{\Sigma}\left[P\cdot 1+Q\cdot\left(-\frac{\partial x}{\partial y}\right)+R\cdot\left(-\frac{\partial x}{\partial z}\right)\right]dydz$.

例. 设 Σ 为 $\Omega=[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的外侧表面, 求 $I=\oiint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$.

解. $\oiint\limits_{\Sigma}z^2dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}=\iint\limits_{D_{xy}}c^2dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}0^2\,dxdy=c^2ab$, 同理,

$\oiint\limits_{\Sigma}y^2dzdx=b^2ac$, $\oiint\limits_{\Sigma}x^2dydz=a^2bc$, 故 $I=(a+b+c)abc$.

例. 求 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, 其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=1$, $z=2$ 围成立体的外表面.

解. 记 Σ 的上, 下, 侧面为 Σ_1, Σ_2, Σ_3, 则 $I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}=$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{e^1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy-\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=2\pi e^2.$$

例. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+xyz\right)dxdy$, 其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1(x\ge 0,y\ge 0)$ 外侧.

解. $I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}=\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+xy\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2-xy\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy=$

$2\iint\limits_{D_{xy}}xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho=\frac{2}{15}$.

例. 求 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 Σ 为 $\Omega=\left\{x^2+y^2\le1,|z|\le1\right\}$ 的外表面.

解. 记 Σ 的上下前后面为 Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, 则 $I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}+\iint\limits_{\Sigma_4}=$

$\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\frac{1^2\cdot dxdy}{x^2+y^2+1^2}-\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\frac{(-1)^2dxdy}{x^2+y^2+(-1)^2}+\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+z^2}dydz-\iint\limits_{D_{yz}}\frac{-\sqrt{1-y^2}}{1+z^2}dydz=$

$2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+z^2}dydz=2\int_{-1}^1dy\int_{-1}^1\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+z^2}dz=\frac{\pi^2}{2}$.

例. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2y-x+2\right)dydz+(z+1)dxdy$, 其中 Σ 为 $x^2+y^2=4$ 被 $z=0$, $y+z=2$ 截下部分的外侧.

解. 设 $\Sigma_1:x=\sqrt{4-y^2}$ 前侧, 则

$I=2\iint\limits_{\Sigma_1}(-x)dydz=2\iint\limits_{D_{yz}}\left(-\sqrt{4-y^2}\right)dydz=-2\int_{-2}^2dy\int_0^{2-y}\sqrt{4-y^2}dz=-8\pi$.

例. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}xdydz-zdxdy$, 其中 $\Sigma:z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)(0\le z\le2)$ 下侧.

解. $I=\iint\limits_{\Sigma}(x,0,-z)\cdot\left(-z_x,-z_y,1\right)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}(x,0,-z)\cdot(-x,-y,1)dxdy=$

$\iint\limits_{\Sigma}\left(-x^2-z\right)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le4}\left[x^2+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right]d\sigma=\iint\limits_{x^2+y^2\le4}\left(x^2+y^2\right)d\sigma=8\pi$.

例. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(x-y)dxdy$, 其中 Σ 为 $z=\sqrt{4x-x^2-y^2}$ 被 $x^2+y^2=2x$ 截下部分的上侧.

解. $x^2+y^2+z^2=4x\Rightarrow\begin{cases}2x+2zz_x=4\\2y+2zz_y=0\end{cases}\Rightarrow z_x=\frac{2-x}{z}$, $z_y=\frac{-y}{z}$, 故

$I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z,0,x-y)\cdot\left(-\frac{2-x}{z},-\frac{-y}{z},1\right)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}\left[(y-z)\frac{x-2}{z}+(x-y)\right]dxdy=$

$\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left(y-\sqrt{4x-x^2-y^2}\right)\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2-y^2}}+(x-y)\right]d\sigma=\iint\limits_{x^2+y^2\le2x}2\cdot d\sigma=2\pi$.

补充练习

1. 求$I=\iint\limits_{\Sigma} zdxdy+xdydz+y^2dzdx$, 其中$\Sigma: x^2+y^2=1\left(0\le z\le 3\right)$外侧.

解. 设$\Sigma_1: x=\sqrt{1-y^2}$ 前侧, 则

$$I=2\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}dydz=2\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{3}\sqrt{1-y^2}dz=3\pi.$$

2. 求$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(y+z\right)dydz+z^2dxdy$, 其中$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}\left(1\le z\le 2\right)$下侧.

解. $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(y+z,0,z^2\right)\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}\left(z^2-\frac{xy+xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy=$

$$-\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}\left(x^2+y^2\right)dxdy=-\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{1}^{2}\rho^2\cdot\rho d\rho=-\frac{15}{2}\pi.$$

3. 求$I=\iint\limits_{\Sigma} xe^zdydz+ye^zdzdx-e^zdxdy$, 其中$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}-1\left(0\le z\le 1\right)$下侧.

解. $I=-\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}\left(xe^z,ye^z,-e^z\right)\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)dxdy=$

$$\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}e^{\sqrt{x^2+y^2}-1}\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)d\sigma=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{1}^{2}e^{\rho-1}\left(\rho+1\right)\cdot\rho d\rho=2\pi\left(3e-1\right).$$

第 11.6 节 高斯公式

一. Gauss 公式

定义. 设向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$, 记 $\operatorname{div}\vec{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$, 称为 $\vec{A}$ 的**散度**.

定理. 设光滑有向闭曲面 Σ 为闭区域 Ω 的外侧边界, $\vec{A}=(P,Q,R)$ 为 Ω 上向量场, 其中 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 均在 Ω 上有连续偏导数, 则

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}\cdot dv .$$

推论. $\Omega=\dfrac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega}xdydz+ydzdx+zdxdy$.

例. 求 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(y-x)dxdy+x(y-z)dydz$, 其中 Σ 为 $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=3$ 所围成立体的内表面.

解. $I=-\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\left(x(y-z),0,y-x\right)dv=\iiint_{\Omega}(z-y)dv=\iiint_{\Omega}zdv=\iiint_{\Omega}\dfrac{3}{2}dv=\dfrac{9\pi}{2}$.

例. 设 $u(x,y,z)\in C^2(\Omega)$, 证明: $\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega}\dfrac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint_{\Omega}\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)dv$.

证. $\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega}\dfrac{\partial u}{\partial n}dS=\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega}(\operatorname{grad}u\cdot\vec{e}_n)dS=\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot d\vec{S}$, 即得, 证毕.

例. 求 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 $\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 外侧.

解. 取 $\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=r^2$, 外侧, $\Omega'=\Omega\setminus\left\{x^2+y^2+z^2\le r^2\right\}$, 则

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+(-\Sigma_1)}-\oint\!\!\!\oint_{-\Sigma_1}=\iiint_{\Omega'}0\cdot dv+\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\frac{1}{r^3}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi .$$

例. 求 $I=\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, 其中 $\Sigma:x^2+y^2=z^2\ (0\le z\le h)$, 下侧.

解. 取 $\Sigma_1:z=h\ (x^2+y^2\le h^2)$, 上侧, 则 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=$

$$2\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv-\iint_{x^2+y^2\le h^2}h^2dxdy=2\int_0^h dz\iint_{x^2+y^2\le z^2}zdxdy-\pi h^4=-\frac{\pi h^4}{2}.$$

例. 求 $I=\iint_{\Sigma}x(8y+1)dydz+2(1+z-y^2)dzdx-(4yz+2x+1)dxdy$, 其中 $\Sigma:y-1=x^2+z^2\ (1\le y\le 3)$, 外侧.

解. 取 $\Sigma_1:y=3\ (x^2+z^2\le 2)$, 右侧, 则 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=$

$$\iiint_{\Omega}dv-\iint_{x^2+z^2\le 2}2(1-3^2)dzdx=\int_1^3 dy\iint_{x^2+z^2\le y-1}dzdx+32\pi=34\pi .$$

例. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma} xe^{z}dydz+ye^{z}dzdx-2e^{z}dxdy$, 其中 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}-1\left(0\le z\le 1\right)$, 下侧.

解. 取 $\Sigma_1: z=1\left(x^2+y^2\le 4\right)$, 上侧, $\Sigma_2: z=0\left(x^2+y^2\le 1\right)$, 下侧, 则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}=0-\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\left(-2e\right)dxdy+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(-2\right)dxdy=-2\pi+8e\pi .$$

例. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 $\Sigma: 1-\dfrac{z}{2}=x^2+y^2\left(z\ge 0\right)$, 上侧.

解. 取 $\Sigma_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\le 1\right)$, 下侧, 则 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=0-\iint\limits_{\Sigma_1}=$

$\iint\limits_{-\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$, 再取 $\Sigma_2: z=0\left(x^2+y^2\le 1\right)$, 下侧, 则

$$I=\oiint\limits_{-\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_2}=3\iiint\limits_{\Omega}dv=3\cdot\frac{2\pi}{3}=2\pi .$$

例. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\Sigma: \dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}+\dfrac{z^2}{7}=1\left(z\ge 0\right)$, 上侧.

解. 取 $\Sigma_1: z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$, $\Sigma_2: z=0\left(x^2+y^2\ge r^2, \dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}\le 1\right)$, 下侧, 则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}=\frac{1}{r^3}\iint\limits_{-\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=2\pi .$$

二. 沿闭曲面积分为零的条件

定理. 设 G 为空间二维单连通区域, 即 G 内任意闭曲面所围区域均包含于 G, 则对于 G 内任意的闭曲面 Σ, $\oiint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=0\Leftrightarrow$ 在 G 内 $\mathrm{div}\vec{A}=0$.

推论. 设 G 为空间二维单连通区域, 则在 G 内, 积分值 $\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}$ 与积分曲面无关

$\Leftrightarrow$ 在 G 内 $\mathrm{div}\vec{A}=0$ 处处成立.

例. 设 $\Sigma: z=2\left(1-x^2-y^2\right)\left(z\ge 0\right)$, 上侧, 求 $I=$

$$\iint\limits_{\Sigma} yz\sqrt{x^2+y^2+z^2}dydz+xz\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdx+\left(x^2y^2-2xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdy .$$

解. 除原点外, $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$, 故取 $\Sigma_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 上侧, 则

$I=\iint\limits_{\Sigma_1} yzdydz+xzdzdx+\left(x^2y^2-2xy\right)dxdy$, 又 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$ 处处成立, 再取

$\Sigma_2: z=0\left(x^2+y^2\le 1\right)$, 上侧, 则 $I=\iint\limits_{\Sigma_2}\left(x^2y^2-2xy\right)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x^2y^2dxdy=\dfrac{\pi}{24}$.

三. 散度的物理意义

设 $\vec{A}$ 为一稳定不可压缩流体的流速场, 则 $\Phi=\oiint\limits_{\partial\Omega}\vec{A}\cdot d\vec{S}$ 为单位时间内该流体由 Ω 内部通过 $\partial\Omega$ 流向外部的流量(流出−流入), 也即 Ω 内产生新流体的总量, 于是,
$\operatorname{div}\vec{A}\big|_M=\lim\limits_{\Delta\Omega\to M}\dfrac{1}{|\Delta\Omega|}\iiint\limits_{\Delta\Omega}\operatorname{div}\vec{A}dv=\lim\limits_{\Delta\Omega\to M}\dfrac{1}{|\Delta\Omega|}\Phi$, 代表 M 处单位时间单位体积内产生新流体的量, 故当 $\operatorname{div}\vec{A}\big|_M>0$ 时, 称 M 为源, 当 $\operatorname{div}\vec{A}\big|_M>0$ 时, 称 M 为负源, 或汇, $\operatorname{div}\vec{A}$ 的大小反映了源的强度, 若处处 $\operatorname{div}\vec{A}=0$, 则称 $\vec{A}$ 为无源场.

补充练习

1. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}xzdydz+2ydzdx+yzdxdy$, 其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=1(x,z\ge0)$, 前侧.

解. 取 $\Sigma_1:x=0\left(y^2+z^2\le1,z\ge0\right)$, 后侧, $\Sigma_2:z=0\left(x^2+y^2\le1,x\ge0\right)$, 下侧, 则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\iiint\limits_{\Omega}(z+2+y)dv=\iiint\limits_{\Omega}(z+2)dv=\frac{19}{24}\pi.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导数, 对 $\{(x,y,z):x>0\}$ 内的任意闭曲面 Σ, 均有 $\oiint\limits_{\Sigma}xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-ze^{2x}dxdy=0$, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$, 求 $f(x)$.

解. $\operatorname{div}\left(xf(x),-xyf(x),-ze^{2x}\right)=xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0$, 即 $y=f(x)$ 满足 $y'+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)y=e^{2x}$, 解得 $f(x)=\dfrac{e^{2x}+Ce^x}{x}$, 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{2x}+Ce^x}{x}=1$, 得到 $C=-1$, 故 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$.

第 11.7 节 斯托克斯公式

一. Stokes 公式

定义. 向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$ 的散度为 $\operatorname{div}\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, 其中 $\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$, 又记

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$ 称为 $\vec{A}$ 的旋度.

有向曲面边界的定向: 当观察者站在有向曲面 Σ 选定一侧的边界上, 沿着该方向行走时, Σ 位于他的左侧; 或者, 从 Σ 内部看, 该方向为逆时针; 或者, Σ 的法向量与该方向之间满足右手法则. 选择了该方向的 Σ 的边界记为 $\partial\Sigma^+$.

定理. 设分段光滑有向闭曲线 Γ 是分片光滑有向曲面 Σ 的正向边界, 若 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 Σ 上有连续的偏导数, 则

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$ 即

$$\oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{r}=\iint_\Sigma \operatorname{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_\Sigma\left(\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{e}_n\right)dS,$$ 其中 $\vec{e}_n$ 为 Σ 的单位正法向量.

注. $\oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{r}$ 称为向量场 $\vec{A}$ 沿曲线 Γ 的环流量.

例. 证明: (1) $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)=0$; (2) $\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad} f\right)=\vec{0}$.

证. (1) 对于空间任意具有光滑边界的有界闭区域 Ω, 均有

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)dv=\oiint_{\partial\Omega}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\oint_{\partial\partial\Omega}\vec{A}\cdot d\vec{r}=0,$$ 故 $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)=0$;

(2) 对于空间任意具有光滑边界的光滑有向曲面 Σ, 均有

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot}\left(\operatorname{grad} f\right)\cdot d\vec{S}=\oint_{\partial\Sigma}\operatorname{grad} f\cdot d\vec{r}=\oint_{\partial\Sigma}df=0,$$ 故 $\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad} f\right)=\vec{0}$, 证毕.

例. 求 $I=\oint_\Gamma zdx+xdy+ydz$, 其中 Γ 为 $x+y+z=1$ 被三个坐标面截下的三角形的边界, 取向与三角形的上侧法向之间符合右手法则.

解. $I=\iint_\Sigma \operatorname{rot}(z,x,y)\cdot\vec{e}_n dS=\iint_\Sigma (1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)dS=\sqrt{3}\iint_\Sigma dS=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$;

或者, $I=\iint_\Sigma \operatorname{rot}(z,x,y)\cdot d\vec{S}=\iint_\Sigma dydz+dzdx+dxdy=3\iint_\Sigma dxdy=3\iint_{D_{xy}}d\sigma=\frac{3}{2}$.

例. 求 $I=\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz$, 其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2(x+y)\\ x+y=2\end{cases}$, 从 x 轴正向看为顺时针.

解. $I=\iint_\Sigma \operatorname{rot}(y,z,x)\cdot\vec{e}_n dS=\iint_\Sigma(-1,-1,-1)\cdot\frac{(-1,-1,0)}{\sqrt{2}}dS=\sqrt{2}\iint_\Sigma dS=2\sqrt{2}\pi$.

例. 求 $I=\oint_\Gamma (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, 其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+y+z=1\end{cases}$, 从 z 轴的正向看为逆时针.

解. $I=\iint_\Sigma \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{e}_n dS=\iint_\Sigma -2(y+z,z+x,x+y)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)dS=$ $-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{x^2+y^2\le1}\sqrt{3}dxdy=-4\pi$.

例. 求 $I=\oint_\Gamma xyzdz$, 其中 $\Gamma:\begin{cases}y-z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$, 从 z 轴正向看为逆时针.

解. $I=\iint_\Sigma \mathrm{rot}(0,0,xyz)\cdot\vec{e}_n dS=\iint_\Sigma (xz,-yz,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)dS=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma yzdS=$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{x^2+2y^2\le1} y^2\cdot\sqrt{2}dxdy=\iint_{x^2+2y^2\le1} y^2dxdy=\iint_{x'^2+y'^2\le1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dx'dy'=$ $\frac{\sqrt{2}}{8}\iint_{x'^2+y'^2\le1}(x'^2+y'^2)dx'dy'=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$.

例. 求 $I=\oint_\Gamma xzdx+x^2dy$, 其中 $\Gamma:\begin{cases}z=x^2+y^2\\x^2+y^2=2ax\end{cases}$, 从 z 轴正向看为顺时针.

解. $I=\iint_\Sigma \mathrm{rot}(xz,x^2,0)\cdot\vec{e}_n dS=\iint_\Sigma (0,x,2x)\cdot\frac{(2x,2y,-1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}dS=$ $\iint_{D_{xy}}\frac{(2xy-2x)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=\iint_{D_{xy}}(2xy-2x)dxdy=-2\iint_{D_{xy}}xdxdy=$ $-2\iint_{D_{xy}}(x-a+a)dxdy=-2a\iint_{D_{xy}}dxdy=-2\pi a^3$.

例. 求 $I=\oint_\Gamma y^2dx+z^2dy+x^2dz$, 其中 $\Gamma:\begin{cases}z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\\x^2+y^2=ax\end{cases}$, 从 z 轴正向看为逆时针.

解. $I=\iint_\Sigma \mathrm{rot}(y^2,z^2,x^2)\cdot\vec{e}_n dS=\iint_\Sigma (-2z,-2x,-2y)\cdot\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)dS=$ $-\frac{2}{a}\iint_\Sigma (xz+xy+yz)dS=-\frac{2}{a}\iint_\Sigma xzdS=-\frac{2}{a}\iint_{D_{xy}} x\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$ $-2\iint_{D_{xy}}xdxdy=-2\iint_{D_{xy}}\left(x-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)dxdy=-2\iint_{D_{xy}}\frac{a}{2}\cdot dxdy=-\frac{\pi}{4}a^3$.

二. 曲线积分与路径无关的条件

定义. 称空间区域 G 为一维单连通区域, 若 G 内每条闭曲线 C 均是包含于 G 内的某个曲面的边界.

定理. 设 G 为空间一维单连通区域, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 G 内均有连续的偏导数, 则下列四个条件等价:

(1) 在 G 内曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关;

(2) 对于 G 内任意闭曲线 C, 均有 $\oint_C Pdx+Qdy+Rdz=0$;

(3) 在 G 内 $\mathrm{rot}(P,Q,R)=\vec{0}$; (4) 在 G 内微分形式 $Pdx+Qdy+Rdz$ 可积.

注. 此时, $u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz$ 是它在 G 内的一个原函数.

例. 求 $I=\int_{\Gamma}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$, 其中 Γ 为 $\begin{cases} x=\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \\ z=\varphi \end{cases}$ 上从 $A(1,0,0)$ 到 $B(1,0,2\pi)$ 的一段有向弧.

解. $\mathrm{rot}(x^2-yz,y^2-xz,z^2-xy)=0$, 故 $I=\int_{\overset{\frown}{AB}} \quad =\int_0^{2\pi}(z^2-1\cdot 0)dz=\frac{8}{3}\pi^3$.

三. 曲线积分的基本定理

定理. 设在 G 内 $Pdx+Qdy+Rdz=du$, 则对 G 内分段光滑有向弧段 $L=\overset{\frown}{AB}$, 均有 $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{\overset{\frown}{AB}} du=u(B)-u(A)$.

向量形式. 若 $\vec{F}=\mathrm{grad}\,u$, 则 $\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\overset{\frown}{AB}} du=u(B)-u(A)$.

例. 设 Γ 为光滑闭曲线, 则 $\oint_{\Gamma} \mathrm{grad}\left[\sin(x+y+z)\right]\cdot d\vec{r}=0$.

例. 设 $A(0,0,1)$, $B(1,2,2)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求 $I=\int_{\overset{\frown}{AB}} r^3(xdx+ydy+zdz)$.

解. $I=\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{AB}} r^3dr^2=\int_{\overset{\frown}{AB}} r^4dr=\frac{1}{5}\int_{\overset{\frown}{AB}} dr^5=\frac{1}{5}(3^5-1^5)=\frac{242}{5}$.

第十二章 无穷级数

第 12.1 节 常数项级数的概念和性质

一. 常数项级数的概念

给定$\{u_n\}$, 表达式$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$称为常数项无穷级数, 简称为常数项级数, 记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 它是一个形式和, u_n称为一般项;

记$s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$称为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和, 数列$\{s_n\}$称为部分和数列;

若极限$\lim_{n\to\infty}s_n=s$存在, 则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, s为和, 也记$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$,

称$r_n=s-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$为余项, 若$\lim_{n\to\infty}s_n$不存在, 则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

注. 若$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$, 则记$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\infty$.

例. 考虑几何级数, 或等比级数, $\sum_{k=0}^{\infty}aq^k=a+aq+aq^2+\cdots$, 其中$a\neq 0$,

若$q\neq 1$, 则$s_n=\sum_{k=0}^{n-1}aq^k=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\dfrac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$;

(1) 当$|q|<1$时, $\lim_{n\to\infty}q^n=0$, 故$\lim_{n\to\infty}s_n=\dfrac{a}{1-q}$, 级数收敛, 和为$s=\dfrac{a}{1-q}$;

(2) 当$|q|>1$时, $\lim_{n\to\infty}q^n=\infty$, 故$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$, 级数发散;

(3) 当$|q|=1$时, $q=\pm 1$, 显然$\lim_{n\to\infty}s_n$不存在, 级数发散;

因此, 当$|q|<1$时, $\sum_{k=0}^{\infty}aq^k$收敛; 当$|q|\geq 1$时, $\sum_{k=0}^{\infty}aq^k$发散.

例. 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots$的敛散性.

解. $s_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$, 故$\lim_{n\to\infty}s_n=1$, 级数收敛.

例. 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$的收敛性.

解. $s_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)+\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)\right]=$

$\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)+\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}\right)$, 故

$\lim_{n\to\infty}s_n=\dfrac{3}{4}$, 级数收敛.

例. 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$的敛散性.

解. $s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)=$
$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, 级数收敛.

例. 设 $a_n\ge 0$, 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}$ 的敛散性.

解. 由 $u_n=\frac{a_n+1-1}{(a_1+1)\cdots(a_n+1)}=\frac{1}{(a_1+1)\cdots(a_{n-1}+1)}-\frac{1}{(a_1+1)\cdots(a_n+1)}$, 得
$s_n=1-\frac{1}{(a_1+1)\cdots(a_n+1)}\le 1$, 同时, $\{s_n\}$ 单调增加, 故级数收敛.

二. 常数项级数的性质

性质 1. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

性质 2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 且
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

注. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 发散.

例. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n+b^n}{(a+b)^n}(a,b>0)$ 的敛散性.

解. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a+b}\right)^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a+b}\right)^n$ 均收敛, 故级数收敛.

性质 3. 级数去掉, 加上或改变有限多项, 不改变其敛散性.

性质 4. 收敛级数的项任意加括号后仍收敛, 且和不变.

注. 加括号后发散的级数, 本身一定发散, 例如**调和级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 按如下方式加括号
$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\cdots=v_1+v_2+\cdots$,
则 $v_n>\frac{1}{2}$, 发散, 故原级数发散.

注. 加括号后收敛的级数, 本身不一定收敛, 例如 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛, 而
$1-1+1-1+\cdots$ 是发散的.

例. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证. $s_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{2k-1}+u_{2k})$ 收敛, 而 $s_{2n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{2k-1}+u_{2k})+u_{2n+1}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 故
$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}$ 也收敛, 证毕.

三. 收敛的必要条件

定理. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

注. 若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n}{(1+n)^n}$.

注. 反之不对, 例如**调和级数** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 但是 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

补充练习

1. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 的收敛性.

解. $u_n = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, 故 $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$, 级数收敛.

2. 讨论 $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$ 的敛散性.

解. 加括号, 得 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$, 故级数发散.

第 12.2 节 常数项级数的审敛法

一. 正项级数及其审敛法

定义. 若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

1. 基本定理

定理. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

推论(柯西积分判别法). 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的单调减少连续函数, 且 $f(x)>0$, 令 $u_n = f(n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 有相同的收敛性.

例. 讨论 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ 的收敛性.

解. 考虑 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 的收敛性, 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

例. 讨论对数级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ 的敛散性.

解. 因为 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^p} du$, 故当 $p>1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

2. 比较审敛法

定理. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数, (1) 若 $u_n \leq v_n \ (n>N)$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; (2) 若 $u_n \geq v_n \ (n>N)$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

推论. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\forall \alpha > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\alpha}$ 也收敛.

例. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \right]$ 的收敛性.

解. 利用 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \ (x>0)$ (见 3.1), 得 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 故

$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$, 级数收敛.

例. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 均收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛.

证. 由 $0 \leq |a_n b_n| \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$, 即得, 证毕.

注. 特别地, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

例. 讨论下列级数的收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{2^n}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}$.

解. (2) $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln n}}<\frac{1}{n^2}$, 收敛; (3) $\frac{1}{\ln n!}>\frac{1}{n\ln n}$, 发散;

(4) 当 $\alpha\le 1$ 时, $\frac{\ln n}{n^{\alpha}}>\frac{1}{n^{\alpha}}$, 发散; 当 $\alpha>1$ 时, 取 $\varepsilon>0$, 使得 $\alpha=1+2\varepsilon$, 则

$\frac{\ln n}{n^{\alpha}}=\frac{\ln n}{n^{1+2\varepsilon}}=\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\cdot\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\le\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}(n>N)$, 收敛.

例. 设 $v_n\le u_n\le w_n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 均收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证. $0\le u_n-v_n\le w_n-v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(w_n-v_n)$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ 收敛, 即得, 证毕.

推论. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均为正项级数.

(1) 若存在 $k>0$, 使得 $u_n\le kv_n\,(n>N)$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2) 若存在 $l>0$, 使得 $u_n\ge lv_n\,(n>N)$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散;

(3) 若存在 $k>0$, $l>0$, 使得 $kv_n\ge u_n\ge lv_n\,(n>N)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的收敛性相同.

3. 比较法的极限形式

定理. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 为正项级数, $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$.

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的收敛性相同;

(2) 当 $l=0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

推论. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 为正项级数, $u_n\sim v_n\,(n\to\infty)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的收敛性相同.

例. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 的收敛性.

解. 由于 $x-\ln(1+x)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\sim\frac{1}{2}x^2$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛.

例. 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)^{p}\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}$的收敛性.

解. $u_n\sim\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{p}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}$, 故当$p>0$时收敛, 当$p\le 0$时发散.

例. 讨论下列级数的收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^4-4n-\ln n}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2-3n+1\right)\sin\frac{1}{n^3}$,

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$.

解. (5) $n^{\frac{1}{n^2+1}}-1=e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1\sim\frac{\ln n}{n^2+1}\sim\frac{\ln n}{n^2}$, 收敛.

例. 设$a_n\ge 0$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n\right)=1$, 证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

证. 当$n\to\infty$时, $a_n\sim\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$, 而$\lim\limits_{n\to\infty}2n\sin\frac{1}{n}=2$, 故当$n>N$时, $\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 于是

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$收敛, 证毕.

推论(极限审敛法). 设$\lim\limits_{n\to\infty}n^{p}u_n=l$, (1) 若$0\le l<+\infty$, 且$p>1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

(2) 若$0<l\le+\infty$, 且$p\le 1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

4. 比值审敛法(达朗贝尔判别法)

定理. 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则 (1) 当$\rho<1$时, 级数收敛;

(2) 当$\rho>1$(包括$\rho=+\infty$)时, 级数发散, 此时$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$.

例. 讨论下列级数的收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}(a>1)$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}(a>0)$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n-2^n}$.

解. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k}=\frac{1}{a}$, 收敛; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0$, 收敛;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\frac{1}{e}$, 收敛; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}=\frac{1}{3}$, 收敛.

注. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$, 即$n\to\infty$时, $n^k\ll a^n\ll n!\ll n^n$.

例. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$ 的收敛性.

解. $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1$, 无法判断, 但是考虑到 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$, 即 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$, 故发散.

5. 根值审敛法(柯西判别法)

定理. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, 则(1)当 $\rho<1$时, 级数收敛;

(2)当 $\rho>1$(包括 $\rho=+\infty$)时, 级数发散, 此时 $\lim_{n\to\infty}u_n=\infty$.

例. 讨论下列级数的收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n n}{n^2}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n-2^n}$.

解. (1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{2}{3}$, 收敛; (2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$, 发散;

(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{e}{3}<1$, 收敛; (4) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3^n-2^n}}=\frac{1}{3}$, 收敛.

二. 交错级数及其审敛法

交错级数: 正负相间的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, 其中 $u_n>0$.

定理(莱布尼茨定理). 设 u_n 单调减少, 且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛, 且和 $s\leq u_1$, 余项 r_n 的绝对值 $|r_n|\leq u_{n+1}$.

例. 当 $p>0$时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots$ 收敛.

例. 讨论下列级数的收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$.

解. (1) $\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}<0\left(x>e^2\right)$, 又 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$, 收敛;

(2) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi\right)=(-1)^n\sin\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$, 收敛.

例. 设 u_n 为单调减少正数列, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n+1}\right)^n$ 收敛.

证. u_n 单调有界, 故收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \ge 0$, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 发散, 故 $a>0$, 于是

由根值法, 或者 $0 \le \left(\dfrac{1}{u_n+1}\right)^n \le \left(\dfrac{1}{a+1}\right)^n$, 即得, 证毕.

三. 绝对收敛与条件收敛

定义. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**, 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}(p>1)$;

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**, 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.

例. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}(\alpha>0)$ 的收敛性.

解. 当 $\alpha>1$ 时, 由 $\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}} \sim \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, 级数绝对收敛; 当 $\alpha \le 1$ 时, 级数条件收敛.

注. 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)(\alpha>0)$, 有类似的结论.

定理. 设 $|u_n| \le v_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

例. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛.

例. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 绝对收敛.

证. $|u_n \pm v_n| \le |u_n| + |v_n|$, 由比较法即得, 证毕.

例. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$ 的收敛性.

解. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 条件收敛, 故级数条件收敛.

定理. 绝对收敛的级数一定收敛.

证. 令 $u_n^+ = \dfrac{u_n+|u_n|}{2} = \begin{cases} u_n, & u_n \ge 0 \\ 0, & u_n < 0 \end{cases}$, 则 $0 \le u_n^+ \le |u_n|$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 收敛, 而 $u_n = 2u_n^+ - |u_n|$,

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 证毕.

注. 又令 $u_n^- = \dfrac{|u_n|-u_n}{2} = \begin{cases} 0, & u_n \ge 0 \\ -u_n, & u_n < 0 \end{cases}$, 则 $u_n = u_n^+ - u_n^-$, $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, 故

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 均收敛; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 均发散.

注. 一般地, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散不能推出 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 但是, 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散是由于比值法或根值法中的 $\rho>1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散, 因为此时 $\lim_{n\to\infty}u_n=\infty$.

例. 讨论下列级数的收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{n^2}{2^n}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n-1}n!}{n^n}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$,

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n^s}(s>0,\alpha>0)$.

解. (1) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{2}$, 或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{1}{2}<1$, 绝对收敛;

(2) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}3(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{3}{e}>1$, 发散;

(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1$, 发散;

(4) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\alpha$, 故 $0<\alpha<1$ 时绝对收敛, $\alpha>1$ 时发散, 而当 $\alpha=1$ 时,

若 $0<s\le 1$, 则条件收敛, 若 $s>1$, 则绝对收敛.

四. 绝对收敛级数的性质

1. 交换律

定理. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛, 则任意交换各项顺序所得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^*$ 仍绝对收敛, 且和不变.

注. 对于条件收敛的级数, 交换律不成立.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots=s$, 重排如下:

$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots$, 则

$s_{3n}^*=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=$

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}s_{2n}$, 故 $\lim_{n\to\infty}s_{3n}^*=\frac{1}{2}s$, 而 $s_{3n-1}^*=s_{3n}^*+\frac{1}{4n}$,

$s_{3n-2}^*=s_{3n}^*+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n}$, 故 $\lim_{n\to\infty}s_{3n-2}^*=\lim_{n\to\infty}s_{3n-1}^*=\frac{1}{2}s$, 级数收敛于 $\frac{1}{2}s$;

再重排如下:

$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{8k-4}-\frac{1}{8k}+\cdots$, 则

$s_{4n}^{*}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{8k-4}-\frac{1}{8k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{8k-4}-\frac{1}{8k}\right)=$

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{8k-4}-\frac{1}{8k}\right)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{4}s_{2n}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}s_{4n}^{*}=\frac{1}{4}s$, 而

$s_{4n-1}^{*}=\frac{1}{4}s_{2n}+\frac{1}{8n}$, $s_{4n-2}^{*}=\frac{s_{2n}}{4}+\frac{1}{8n-4}+\frac{1}{8n}$, $s_{4n-3}^{*}=\frac{s_{2n}}{4}+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{8n-4}+\frac{1}{8n}$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}s_{4n-3}^{*}=\lim\limits_{n\to\infty}s_{4n-2}^{*}=\lim\limits_{n\to\infty}s_{4n-1}^{*}=\frac{1}{4}s$, 级数收敛于 $\frac{1}{4}s$.

2. 级数的乘法

正方形法: $u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_3+u_3v_3+u_2v_3+u_1v_3)+\cdots$.

对角线法(柯西乘积): $u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots+(u_1v_n+\cdots+u_nv_1)+\cdots$.

定理. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛, 则其柯西乘积也绝对收敛, 和为 $s=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

补充练习

1. 设数列 na_n 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

证. na_n 有界, 设 $|na_n|\le M$, 则 $a_n^2\le\frac{M^2}{n^2}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, 证毕.

2. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{1}{3^n}$ 的收敛性.

解. $u_n\sim\frac{n^2}{3^n}$, 再由比值法, 级数收敛.

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n2^n$ 收敛, 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n a_n2^n=0$, 故 $|a_n2^n|\le M\Rightarrow|a_n|\le\frac{M}{2^n}$, 故绝对收敛.

4. 设 $f(x)\in C[0,2\pi]$, 记 $a_n=\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx$, $n=1,2,\cdots$, 证明:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有连续的一阶导数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛;

(2) 若 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有连续的二阶导数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

证. (1) $a_n=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f(x)d(\sin nx)=-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin nxdx$, 故 $|a_n|\le\frac{M}{n}$, 即得;

(2) $a_n=\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi}f'(x)d(\cos nx)=\frac{f'(2\pi)-f'(0)}{n^2}-\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi}f''(x)\cos nxdx$, 故 $|a_n|\le\frac{M}{n^2}$,

即得, 证毕.

5. 设 $a_n = a_0 + nd\left(d>0\right)$ 为等差数列, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散.

证. $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_0+nd}\sim\frac{1}{d}\frac{1}{n}$, 证毕.

6. 设 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, $\lim_{x\to0}\frac{f\left(x\right)}{x}=0$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证. $f\left(x\right)=f\left(0\right)+f'\left(0\right)x+\frac{f''\left(0\right)}{2}x^2+o\left(x^2\right)=\frac{f''\left(0\right)}{2}x^2+o\left(x^2\right)$, 于是

$\lim_{n\to\infty}n^2\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{\left|f''\left(0\right)\right|}{2}$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛, 证毕.

7. 设 $u_n\neq0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 的敛散性.

解. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{u_n}\cdot\frac{1}{n}\right)=0$, $s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+1}\left(\frac{1}{u_k}+\frac{1}{u_{k+1}}\right)=\frac{1}{u_1}\pm\frac{1}{u_{n+1}}\to\frac{1}{u_1}$, 故

级数收敛, 而 $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=2\Rightarrow\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\sim\frac{2}{n}$, 故级数条件收敛.

8. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\left(2n-1\right)}{2\cdot4\cdot6\cdots\left(2n\right)}$ 的收敛性.

解. 设 $u_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\left(2n-1\right)}{2\cdot4\cdot6\cdots\left(2n\right)}$, 则 $u_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}u_n<u_n$, 单调减少, 又利用

$2n=\frac{\left(2n-1\right)+\left(2n+1\right)}{2}>\sqrt{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}$, 得到

$u_n<\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\left(2n-1\right)}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}\cdots\sqrt{2n-1}\cdot\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to0$, 级数收敛;

$u_n=\frac{3\cdot5\cdot7\cdots\left(2n-1\right)}{2\cdot4\cdot6\cdots\left(2n-2\right)\cdot2n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2n+1}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 即

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}u_n$ 条件收敛.

第 12.3 节 幂级数

一. 函数项级数

设$\{u_n(x)\}$为I上函数序列, 则表达式$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$称为$I$上的**函数项(无穷)级数**;

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛, 则称$x_0$为级数的**收敛点**, 反之称为**发散点**, 收敛点全体构成的集合称为**收敛域**, 发散点全体构成的集合称为**发散域**, 在收敛域内

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$称为该函数项级数的**和函数**, $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$为**余项**.

例. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n+x^{-n}}{n^2}$的收敛域为$\{x=\pm 1\}$.

二. 幂级数及其收敛性

幂级数$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$是最常见的函数项级数,

我们只讨论特殊形式$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$, 其中$a_n$称为**系数**.

注. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=0$处必收敛, 故收敛域一定非空.

1. 幂级数收敛域的结构

例. 几何级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $s_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{1-x^n}{1-x}$, 当$|x|<1$时收敛, $s(x)=\frac{1}{1-x}$,

当$|x|\geq 1$时发散, 故其收敛域为$(-1,1)$.

定理(Abel 定理). (1) 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$收敛, 则当$|x|<|x_0|$时, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛;

(2) 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$发散, 则当$|x|>|x_0|$时, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散.

推论. 设A为$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域, 令$R=\sup\{|x|:x\in A\}$(可以为$\infty$), 则

(1) 当$|x|<R$时, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛; (2) 当$|x|>R$时, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散.

定义. 称R为$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的**收敛半径**, $(-R,R)$为**收敛区间**.

例. 几何级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$的收敛半径$R=1$, 收敛区间为$(-1,1)$.

注. 当$R=0$时只在$x=0$处收敛, $R=+\infty$时在$(-\infty,+\infty)$上处处收敛.

注. 一般地, 对于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, 也有收敛半径$R$的概念, 当$|x-x_0|<R$时, 级数绝对收敛, 当$|x-x_0|>R$时, 级数发散.

2. 收敛半径的求法

定理（系数模比值法）. 设有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若 $a_n \neq 0$，且 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则 $R = \frac{1}{\rho}$.

例. 求下列幂级数的收敛半径

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$，(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n}$.

解. (1) $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow R = 1$；

(2) $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = +\infty$；

(3) $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \Rightarrow R = 0$；

(4) 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n2^n}$，$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$.

例. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}x^{2n}$ 的收敛区间.

解. 令 $t = x^2$，则级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}t^n$，$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$，故收敛区间为 $-2 < t < 2$，即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

注. 一般地，对于 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$，可以由 $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1 \Rightarrow$ 收敛区间.

例. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x+1)^{2n}$ 的收敛区间.

解. $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot(x+1)^2 = \lim_{x\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\cdot(x+1)^2 = 4(x+1)^2$，故 $4(x+1)^2 < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$.

例. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^n\right]^n}{n}x^n$ 的收敛区间.

解. 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{2n}x^{2n}$，前者的 $R = \frac{1}{2}$，后者的 $R = \frac{1}{4}$，故当 $|x| < \frac{1}{4}$ 时，原级数 $= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{2n}x^{2n}$ 绝对收敛，而当 $|x| > \frac{1}{4}$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{2n}}{2n}x^{2n} = \infty$，故原级数发散，因此收敛区间为 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

定理(系数模根值法). 设有$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$, 则$R=\dfrac{1}{\rho}$.

例. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$的收敛区间.

解. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e\Rightarrow R=\dfrac{1}{e}$, 故收敛区间为$\left(-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)$.

例. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}(2x)^{2n+1}$的收敛区间.

解. 令$t=x^2$, 考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{n^n}t^n$, 则$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0\Rightarrow R=+\infty$, 故

$t\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow x\in(-\infty,+\infty)$.

三. 幂级数的运算

定理. 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛区间分别为$(-R_1,R_1)$, $(-R_2,R_2)$, 若

$|x|<R=\min\{R_1,R_2\}$, 则(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, 其中$c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

定理. 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数为$s(x)$, 则

(1) (连续性). $s(x)$在$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域内连续, 即$\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$;

(2) (逐项积分). $s(x)$在$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域内可积, 且$\int_0^x s(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^ndx$;

(3) (逐项求导). $s(x)$在$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间内可导, 且$s'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'$.

注. 幂级数通过逐项求导, 逐项积分后得到的新级数收敛半径不变, 但在收敛区间端点处的敛散性可能会有改变, 例如:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$的收敛域为$(-1,1]$, 而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$的收敛域为$(-1,1)$.

例. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)x^n$的和函数.

解. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2\Rightarrow R=\dfrac{1}{2}$, 收敛域为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 则在$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$上

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}2^nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{2x}{1-2x}-\frac{x}{1-x}=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

例. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数.

解. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1\Rightarrow R=1$, 收敛域为 $(-1,1)$, 设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$, 则在 $(-1,1)$ 上,

$$s(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

例. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ 的和函数.

解. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Rightarrow R=1$, 收敛域为 $(-1,1)$, 设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$, 则在 $(-1,1)$ 上,

$$s(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}-x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)''-x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'=$$

$$x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''-x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=x\left(\frac{1}{1-x}\right)''-x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{2x}{(1-x)^3}-\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

例. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots$ 的和函数.

解. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Rightarrow R=1$, 收敛域为 $[-1,1)$, 设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$, 则在 $(-1,1)$ 上,

$$xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Rightarrow[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, \text{故 } xs(x)-0s(0)=\int_0^x[xs(x)]'\,dx=$$

$$\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)\Rightarrow s(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}(x\neq 0), \text{而 } s(0)=1.$$

例. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和函数.

解. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Rightarrow R=1$, 收敛域为 $[-1,1]$, 设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, 则

在 $(-1,1)$ 上, $s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $s''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{1}{1+x}$,

故 $s'(x)-s'(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$, $s(x)-s(0)=\int_0^x\ln(1+x)dx=$

$(1+x)\ln(1+x)-x$, $x\in(-1,1]$, 而 $s(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}s(x)=1$.

注. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^n\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{2}s(2x)$.

例. 求$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$的和.

解. 考虑$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, 收敛域为$[-1,1]$, 设$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, 则在$(-1,1)$上,

$s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\frac{1}{1+x^2}$, 于是$s(x)-s(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$, 故

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=s(1)=\frac{\pi}{4}$.

例. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$的和.

解. 考虑$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$, 收敛域为$[-1,1]$, 设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$, 则在$(-1,1)$上,

$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$, $s''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{2}{x}\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{x}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{2x}{1-x^2}$, 于是

$s'(x)-s'(0)=\int_0^x\frac{2x}{1-x^2}dx=-\ln\left(1-x^2\right)$, $s(x)=s(0)-\int_0^x\ln\left(1-x^2\right)dx=$

$(1-x)\ln\left(1-x^2\right)+2x-2\ln(1+x)$, 故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=s(1)=2-2\ln 2$.

补充练习

1. 填空题

(1) 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$有收敛半径$3$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$的收敛区间为______.

(2) 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=3$处发散, $x=-1$处收敛, 则收敛域为______.

(3) 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n$在$x=3$处条件收敛, 则收敛区间为______.

解. (1) $R=3$, $(-2,4)$; (2) $R=2$, $[-1,3)$; (3) $R=4$, $(-5,3)$.

2. 求$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$的和函数.

解. 令$t=x^2$, 级数为$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$, 收敛域为$[-1,1]$, 设$s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$, 则

在$(-1,1)$内, $s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(t^{n+1}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1}\right)'=\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{1}{(1-t)^2}$, 故$-1<x<1$时,

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}=\frac{1}{\left(1-x^2\right)^2}$.

3. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n}x^n$的和函数.

解. 设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n}x^n$，$x\in(-1,1)$，则$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=s_1+s_2$，

$s_1(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{x}{(1-x)^2}$，$s_2'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$，故

$s_2(x)-s_2(0)=\int_0^x\dfrac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$，于是$s(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}-\ln(1-x)$.

4. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)(n+2)}$的和函数.

解. 收敛域为$[-1,1]$，设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)(n+2)}$，$x\in(-1,1)$，则

$x^2s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=s_1(x)$，而$s_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$，$s_1''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$，

故$s_1'(x)=s_1'(x)-s_1'(0)=\int_0^x\dfrac{x}{1-x}dx=-\ln(1-x)-x$，$s_1(x)-s_1(0)=$

$-\int_0^x[\ln(1-x)+x]dx=(1-x)\ln(1-x)+x-\dfrac{x^2}{2}$，$s(x)=\dfrac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$，

$s(0)=\lim\limits_{x\to0}s(x)=0$，$s(1)=\lim\limits_{x\to1^-}s(x)=\dfrac{1}{2}$.

5. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$的和函数.

解. 收敛域为$(-\infty,+\infty)$，设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$，则

$s''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=s(x)+1\Rightarrow s''(x)-s(x)=1\Rightarrow s(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x-1$，

$\begin{cases}s(0)=0\\s'(0)=0\end{cases}\Rightarrow C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})-1$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

6. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$的和函数.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}=1$，收敛区间$(-1,1)$，设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$，则

$s(x)-xs(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\Rightarrow s(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$，$|x|<1$.

7. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$ 的和.

解. 考虑 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$，设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$，$x\in(-1,1)$，则 $s(x)=$

$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'-\frac{1}{1-x}=2\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{1}{1-x}=\frac{2}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}$，于是

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}=s\left(\frac{1}{2}\right)=8-2=6$.

8. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 的和.

解. 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$，设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$，$x\in[-1,1]$，则

$s'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，$s''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2}$，故 $s'(x)-s'(0)=$

$\int_0^x\frac{2}{1+x^2}dx=2\arctan x$，$s(x)-s(0)=2\int_0^x\arctan x\,dx=2x\arctan x-\ln\left(1+x^2\right)$，于是

$s(1)=\frac{\pi}{2}-\ln 2$.

第 12.4 节 函数展开成幂级数

一. Taylor 级数

在上一节, 我们研究了如何求一个幂级数的和函数, 现在讨论相反的问题, 即如何把一个给定的函数 $f(x)$ 展开为幂级数.

若在 I 内, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, 则称 $f(x)$ 在 I 内可以展开为 $x-x_0$ 的幂级数.

定理(唯一性). 设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内可以展开为 $x-x_0$ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, 则

$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n=0,1,2,\cdots$, 即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

定义. 称 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数;

若它在 $U(x_0)$ 内收敛, 且以 $f(x)$ 为和函数, 称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒展开式;

特别地, $x_0=0$ 时称 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 为 $f(x)$ 的麦克劳林级数;

若它在 $U(0)$ 内收敛, 且以 $f(x)$ 为和函数, 则称它为 $f(x)$ 的麦克劳林展开式.

定理. 设 $f(x)$ 在 x_0 处任意阶可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 邻的域内可展开为 $x-x_0$ 的幂级数 $\Leftrightarrow$ 在该邻域内, $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, 其中 $R_n(x)$ 为 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[x_0+\theta(x-x_0)\right]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

二. 函数展开成幂级数

1. 直接展开法

分两步: (1) 写出 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, 求收敛半径 R; (2) 在 $(-R,R)$ 内估计余项

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\,(0<\theta<1)$, 验证是否 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

例. 将 $f(x)=e^x$ 展开为 x 的幂级数.

解. $f^{(n)}(0)=1$, 得 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $R=+\infty$, 而 $|R_n(x)|=\left|\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le e^{|x|}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, 于是

$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, 故 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

例. 将 $f(x)=\sin x$ 展开为 x 的幂级数.

解. $f^{(n)}(0)=\sin\dfrac{n\pi}{2}$, 得 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=+\infty$, 而

$\left|R_n(x)\right| = \left|\dfrac{\sin\left(\theta x + \dfrac{n\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$，故

$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$x \in (-\infty, +\infty)$.

例(牛顿二项展开式). 将 $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ 展开成 x 的幂级数.

解. 不妨设 $n \notin \mathbb{N}$，$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$，得 $f(0)=1$，

$f'(0) = \alpha$，$f''(0) = \alpha(\alpha-1)$，$\cdots$，$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$，得麦克劳林级数

$1 + \dfrac{\alpha}{1!}\cdot x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dbinom{\alpha}{n}\cdot x^n$，其中

$\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$，$\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1 \Rightarrow R = 1$；

设 $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dbinom{\alpha}{n}\cdot x^n$，$x \in (-1,1)$，则 $(1+x)s'(x) = \alpha s(x) \Rightarrow s(x) = C(1+x)^{\alpha}$，且

$s(0) = 1 \Rightarrow C = 1$，故 $(1+x)^{\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dbinom{\alpha}{n}\cdot x^n$，$x \in (-1,1)$.

2. 间接展开法

例. 将 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开为 x 的幂级数.

解. $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-(-x)} - \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} =$

$\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n - \dfrac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x}{3}\right)^n = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1 - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$，$-1 < x < 1$.

例. 将 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数.

解. 设 $t = x-1$，则 $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x+1)} = \dfrac{1}{(t+4)(t+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t+2} - \dfrac{1}{t+4}\right) =$

$\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{t}{4}} = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{t}{2}\right)^n - \dfrac{1}{8}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{t}{4}\right)^n \ (-2 < t < 2) =$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+2}} - \dfrac{1}{2^{2n+3}}\right)t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+2}} - \dfrac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n$，$-1 < x < 3$.

注. $\dfrac{1}{1-u} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}u^n$，$\dfrac{1}{1+u} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n$，其中 $|u| < 1$.

例. 将 $f(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}$ 展开为 x 的幂级数.

解. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2-x}\right)'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right]'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n+1}}x^{n-1}$, $-2<x<2$.

例. 将 $f(x)=\cos x$ 展开为 x 的幂级数.

解. $f(x)=(\sin x)'=\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

例. 将 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开为 x 的幂级数.

解. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-(-x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $-1<x<1$, 故

$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $x\in(-1,1]$.

例. 将 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开为 x 的幂级数.

解一. $f'(x)=-1+\dfrac{2}{1+x}-\ln(1+x)=-1+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}=$

$1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n}x^n$, $-1<x<1$, 故

$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}x^{n+1}$, $x\in(-1,1]$.

解二. $f(x)=(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1}x^{n+2}=$

$x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^{n+1}=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}x^{n+1}$, $x\in(-1,1]$.

例. 将 $f(x)=\arctan x$ 展开为 x 的幂级数.

解. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1-(-x^2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $-1<x<1$, 故

$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in[-1,1]$.

例. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

解. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1-(-x^2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, 故

$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in[-1,1)$.

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，求 $f^{(n)}(0)$，$n=1,2,3,\cdots$.

解. 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$，由连续性，当 $x=0$ 时也成立，故

由展开的唯一性，$f^{(2n-1)}(0)=0$，$f^{(2n)}(0)=\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot(2n)!=\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

补充练习

1. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n$ 的和函数.

解. $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n!}x^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=xe^x+e^x-1$，$-\infty<x<\infty$；

或者，$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}\right)'=\left[x\left(e^x-1\right)\right]'=xe^x+e^x-1$.

2. 将 $f(x)=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ 展开为 x 的幂级数.

解. $f(x)=\dfrac{1+x-1}{(1+2x)(1-x)}=\dfrac{2}{(1+2x)(2-2x)}-\dfrac{1}{1+2x}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+2x}\right)=$

$\dfrac{1}{3}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2x)^n\right]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1-(-2)^n}{3}x^n$，$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$.

3. 将 $f(x)=\ln\dfrac{x}{1+x}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数.

解. $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-(1-x)}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^n-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x-1}{2}\right)^n=$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n$，故 $f(x)=f(1)+\int_1^x f'(x)dx=$

$\ln\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^{n+1}$，$|x-1|<1\Leftrightarrow 0<x<2$.

4. 设 $f(x)=x^5\sin x$，求 $f^{(10)}(0)$.

解. $f(x)=x^5\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots\right)=x^6-\dfrac{x^8}{3!}+\dfrac{x^{10}}{5!}-\cdots$，故 $f^{(10)}(0)=\dfrac{10!}{5!}$.

第 12.7 节 傅里叶级数

一. 三角函数系的正交性

定义. 称 $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$ 为三角函数系.

定理. 三角函数系在 $[-\pi,\pi]$ 上正交, 即其中任何两个不同函数的积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于零.

定义. 称 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ 为以 2π 为周期的三角级数; 一般地,

称 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ 为以 $2l$ 为周期的三角级数.

二. 函数展开成傅里叶级数

定义. 记 $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\,(n\ge 0)$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\,(n\ge 1)$, 称为 $f(x)$ 的傅里叶系数, 此时三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶级数, 部分和 $F_n(x)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶多项式.

三. 收敛的一个充分条件

定理(收敛定理---狄利克雷充分条件). 设 $f(x)$ 具有周期 2π, 若它在一个周期内满足 (1) 连续, 或者只有有限多个第一类间断点; (2) 只有至多有限多个极值点, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 其和函数为

$$\tilde{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right];$$

特别地, 在连续点处, $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

例. 设 $f(x)$ 具有周期 2π, 且 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数.

解. $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot\cos nxdx=0$,

$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nxdx=$

$\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos n\pi}{n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n}$, 故

$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots\right]$, 其中 $x\ne k\pi$.

注. 在 $x=k\pi$ 处, $\tilde{f}(x)=\frac{-1+1}{2}=0$.

例. 设 $f(x)$ 具有周期 2π , 且 $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数.

解. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} xd\sin nx=$

$\frac{1}{n\pi}\left(0-\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx\right)=\frac{1}{n\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$,

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} xdx=-\frac{\pi}{2}$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nxdx=$

$-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} xd\cos nx=-\frac{1}{n\pi}\left(\pi\cos n\pi-\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx\right)=-\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 故

$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\left(\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)-\frac{1}{4}\sin 4x+$

$\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)-\frac{1}{6}\sin 6x+\cdots$, 其中 $x\ne(2k+1)\pi$.

例. 设 $f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开为具有周期 2π 的傅里叶级数.

解. 将 $f(x)$ 延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 2π 的函数, 它是连续偶函数, 则

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx=\pi$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=0$,

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx=$

$\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi} xd\sin nx=\frac{2}{n\pi}\left(0-\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{\cos n\pi-1}{n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}$, 故

$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$, $-\pi\le x\le\pi$.

注. 令 $x=0$, 则 $0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)\Rightarrow\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$.

例. 求和 $\sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$ 与 $\tau=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$.

解. 记 $\sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$, $\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{1}{4}\sigma$, 则

$\sigma=\sigma_1+\sigma_2=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sigma\Rightarrow\sigma=\frac{\pi^2}{6}$, 而 $\sigma_2=\frac{1}{4}\sigma=\frac{\pi^2}{24}$, 故

$\tau=\sigma_1-\sigma_2=\frac{\pi^2}{12}$.

四. 正弦级数和余弦级数

若 $f(x)$ 是具有周期 2π 的奇函数, 则 $a_n=0$, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx$, 此时, 它的傅立叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, 称为正弦级数;

若 $f(x)$ 是具有周期 2π 的偶函数, 则 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx$, $b_n=0$, 此时, 它的傅立叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, 称为余弦级数.

例. 设 $f(x)$ 具有周期 2π, 且在 $[-\pi,\pi)$ 上 $f(x)=x$, 将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数.

解. 若不计 $x=(2k+1)\pi$ (对定积分没有影响), 则 $f(x)$ 是奇函数, 故

$$a_n=0,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}xd\cos nx=$$

$$-\frac{2}{n\pi}\left(\pi\cos n\pi+\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n-1},\ 故$$

$$f(x)=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\right),\ x\neq(2k+1)\pi.$$

注. 在 $x=(2k+1)\pi$ 处, $\tilde{f}(x)=\frac{\pi-\pi}{2}=0$.

例. 将 $f(x)=E\left|\sin\frac{x}{2}\right|(-\pi\le x\le\pi)$ 展开为具有周期 2π 的傅里叶级数, 其中 $E>0$.

解. 将 $f(x)$ 延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 2π 的函数, 它是连续偶函数, 则

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin\frac{x}{2}\cos nxdt=-\frac{4E}{(4n^2-1)\pi},\ b_n=0,\ 故$$

$$f(x)=\frac{4E}{2\pi}-\frac{4E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx,\ -\pi\le x\le\pi.$$

例. 将 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}(0\le x\le\pi)$ 分别展开为具有周期 2π 的正弦级数和余弦级数.

解. 奇延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-2}{2}\sin nxdx=\frac{1}{n}$, 故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ x\in(0,\pi];$$

偶延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上, $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{\pi}{2}$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi},\ 故$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)\pi\text{ , }0\le x\le\pi\text{ .}$$

补充练习

1. 设 $f(x)$ 具有周期 2π，且 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$，它的傅里叶系数为 a_0，a_n，b_n，求 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

解. $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\tilde{f}(0)=\frac{1}{2}\left[f(0^-)+f(0^+)\right]=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

2. 将 $f(x)=x+1(0\le x\le\pi)$ 分别展开为具有周期 2π 的正弦级数和余弦级数.

解. 奇延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上，$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nxdx=$

$-\frac{2}{n\pi}\left[(\pi+1)\cos n\pi-1\right]=-\frac{2}{n\pi}\left[(\pi+1)(-1)^n-1\right]$，故

$$x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right],\ 0<x<\pi\text{ ;}$$

偶延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上，$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nxdx=$

$\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(x+1)d\sin nx=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{\cos n\pi-1}{n}=\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n}$，

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2$，故

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x+\cdots\right),\ 0\le x\le\pi\text{ .}$$

第 12.8 节 一般周期函数的傅里叶级数

定理. 设 $f(x)$ 是 $T=2l$ 的周期函数, 且满足收敛定理的条件, 则在连续点处

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\ 其中$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,(n=0,1,2,\cdots),\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,(n=1,2,\cdots);$$

而在间断点处, 该级数收敛到 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

注. 上述积分区间可以换为任何长 $2l$ 的区间, 例如 $[0,2l]$.

注. 当 $f(x)$ 为奇函数时, $a_n=0$, $b_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$;

当 $f(x)$ 为偶函数时, $a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $b_n=0$.

例. 设 $f(x)$ 具有周期 4, 并且 $f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x<0\\ 1, & 0\le x<2\end{cases}$, 将它展开为傅里叶级数.

解. $a_0=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 dx=1$, $a_n=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=0$,

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right],$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}+\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3\pi x}{2}+\dfrac{1}{5}\sin\dfrac{5\pi x}{2}+\cdots\right)$, $x\ne 2k$.

例. 将 $f(x)=x^2\,(0\le x\le 2)$ 分别展开为正弦级数和余弦级数.

解. 奇延拓到 $[-2,2]$ 上, 得到 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2}$, $0\le x<2$, 其中

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{16}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n-1\right];$$

偶延拓到 $[-2,2]$ 上, 得到 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}$, $0\le x\le 2$, 其中

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3},\ a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=(-1)^n\frac{16}{n^2\pi^2}.$$

补充练习

1. 设 $f(x)$ 具有周期 2, 且 $f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x\le\dfrac{1}{2}\\ x, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$, 则其傅里叶级数在 $x=-\dfrac{7}{2}$ 处的和为______.

解. $s\left(-\frac{7}{2}\right)=s\left(-\frac{7}{2}+4\right)=s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

2. 设 $f(x)=x^2+1$, $0\le x<1$, 而 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, $x\in(-\infty,\infty)$, 其中

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx\,(n=1,2,\cdots)$, 则 $s\left(-\frac{1}{6}\right)=$______.

解. $s\left(-\frac{1}{6}\right)=-s\left(\frac{1}{6}\right)=-f\left(\frac{1}{6}\right)=-\frac{37}{36}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$, 而 $s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$, $x\in(-\infty,\infty)$, 其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx$, 则 $s\left(-\frac{5}{2}\right)=$______.

解. $s\left(-\frac{5}{2}\right)=s\left(-\frac{5}{2}+2\right)=s\left(-\frac{1}{2}\right)=s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}$.