武汉大学计算机学院2005-2006学年第一学期 2004级《离散数学》考试试题

学号：__________ 姓名：__________ 成绩：__________

注意：所有答案请一律写在试卷纸上并请注明题目序号！计算题要求有计算过程！

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$(P \to Q \wedge R) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$$

二、 试分别证明下列结论的有效性(**要求写证明序列**)： (14分，7+7)

(1) 前提：$P \wedge Q \to R, \neg R \vee S, \neg S$；
结论：$\neg P \vee \neg Q$;

(2) 前提：$\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$；
结论：$\neg \forall x(R(x) \to P(x))$。

三、 设A、B和C是三个集合: (9分, 5+4)

(1) 设：

$$A \cap C = B \cap C \text{ 且 } A - C = B - C$$

试证明：$A = B$;

(2) 试证明：$(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$。

四、 设集合$A = \{a, b, c, d\}$，$\mathcal{R} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, a\rangle\}$是集合$A$上的二元关系： (10分，4+4+2)

(1) 求$\mathcal{R}^{2006}$；

(2) 求$t(\mathcal{R})$；

(3) 试求A上同时具有最大元素和最小元素的偏序关系的总数。

五、 设X和Y是两个非空集合, $f : X \longrightarrow Y$是X到Y的函数, 设$A \subseteq X$, $B \subseteq X$: (12分，5+4+3)

(1) 试证明：$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

(2) 试以集合$\{1, 2\}$上的函数为例举反例证明：

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B);$$

(3) 试证明: 如果f是单射, 则:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)。$$

六、 设$G = \{a, b, c, d\}$，G上的二元运算$*$定义如下：

$*$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

已知$\langle G, *\rangle$构成一个群: (18分，每小题3分)

(1) 试指出群G的幺元；并对每个元素求逆元；

(2) 试求群G的**每个**元素的阶数；

(3) 试写出群G的**所有**子群；

(4) 群G与$\langle \mathbb{N}_4, +_4\rangle$同构吗？为什么？

(5) 群G是交换群吗？为什么？

(6) 设$\langle H, \bullet, e\rangle$是一个群，并且$\forall a \in H$, $a^2 = e$, 试证明H是交换群。

七、 设$\langle G, *, e_G\rangle$和$\langle H, \cdot, e_H\rangle$是两个群, $h : G \longrightarrow H$是群G到群H的同态, 试证明： (15分，5+5+3+2)

(1) 如果A是G的子群，则$h(A)$是H的子群；

(2) 如果B是H的子群，则$h^{-1}(B)$是G的子群；

(3) 如果G和H都是有限群，$a \in G$，则$h(a)$的阶数是$|G|$和$|H|$的公因子；

(4) 利用上题的结果说明$\langle \mathbb{N}_4, +_4\rangle$到$\langle \mathbb{N}_5, +_5\rangle$上共有多少个同态。

八、 称一个有向图为*无环路有向图*，当且仅当，图中没有有向回路。设$G = \langle V, E\rangle$是一个无环路简单有向图(没有自回路和多重边)，试证明: (12分，6+6)

(1) G中至少有一个结点的出度为0;

(2) 设$|V| = n$, $|E| = m$，则: $m \leqslant n(n-1)/2$。