矩阵及其运算——矩阵的分块表示

知识点巩固练习

1. 设 A 分块表示为 $A=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{bmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} B_{11}^T & \cdots & B_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ B_{1r}^T & \cdots & B_{sr}^T \end{pmatrix}$

2. 设 A_n 为分块对角阵 $\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & A_s \end{bmatrix}$，则 $|A|=$ $A_1A_2\cdots A_s$

A_n 可逆 $\Leftrightarrow$ $|A_i|\neq 0\ (i=1,2\cdots s)$ 当 A_n 可逆时，$A_n^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s^{-1} \end{pmatrix}$.

练习题

1. 设 $A=\begin{bmatrix} 1&2&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2&0&0&0\\-2&1&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&-3 \end{bmatrix}$，求 A 及 $|A^5|$.

答 记 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$

$A_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$

$A_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$A_4=\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}$

$A_5=\begin{pmatrix}2&0\\-2&1\end{pmatrix}$

$A_6=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_3&0\\0&A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_5&0\\0&A_6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}A_1A_3A_5&0\\0&A_2A_4A_6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&2&0&0\\-4&2&0&0\\0&0&12&-9\\0&0&0&27\end{pmatrix}$

$|A^5|=|A|^5$

$=6^{20}$

2. 设 n 维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T$，$a<0$，$E$ 是 n 阶单位矩阵，矩阵 $A=E-\alpha\alpha^T$，$B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$，其中 A 的逆矩阵为 B，求 a.

$\therefore AB=E$

$\alpha\cdot\alpha^T=\begin{matrix} a^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 \\ a^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 \end{matrix}$

$\therefore E^2-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\cdot 2a^2\alpha\alpha^T=E$

$\because a<0$

$\therefore a=-1$

3. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，求 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\because \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = E$$

$\therefore$

思考题

设 $\boldsymbol{A}_i$ 是 n_i 阶方阵($i=1,\cdots,t$)，试讨论 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_t & \cdots & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 的可逆性；在 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，其逆阵是何形式？

当且仅当 $A_1A_2\cdots A_t \neq 0$ 时

可逆

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & A_t^{-1} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ A_1^{-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵及其运算——测验卷

1. 设 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{AB}=$ ___C___.

A. $\boldsymbol{O}$　　B. $-\boldsymbol{E}$　　C. $\boldsymbol{E}$　　D. $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\alpha}$

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{T}$，其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{T}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵．若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为___A___.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

3. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AC}$，则下面说法正确的是___A___.

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆　　B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆　　C. $\boldsymbol{C}$ 可逆　　D. $\boldsymbol{A}$ 可逆

4. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}+4\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}+9\boldsymbol{\gamma})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 均为 3×1 的列矩阵，又 $|\boldsymbol{A}|=m$，则 $|\boldsymbol{B}|=$ ___2m___.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，求 $\boldsymbol{B}^{2008}-2\boldsymbol{A}^{2}$.

$\because B=P^{-1}AP$

$\therefore B^{2008}=P^{-1}A^{2008}P$

$A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$

$\therefore A^{2008}=(A^4)^{502}=E$

$\therefore B^{2008}-2A^2=E-2A^2$

$=\mathrm{diag}(3,3,-1)$

6. 已知$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，矩阵$X$满足$A^*X=A^{-1}+2X$，其中$A^*$是$A$的伴随阵，求矩阵$X$.

$AA^*X=AA^{-1}+2AX$

$\therefore |A|X=2AX+E$

$\therefore (|A|-2A)X=E$

$|A|=4$

$\therefore X=(4E-2A)^{-1}$

$\therefore X=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}8 & 8 & 0\\ 0 & 8 & 8\\ 8 & 0 & 8\end{pmatrix}^T$

$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

7. 已知A为3阶方阵，矩阵$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，且$(A-E)^{-1}=B^*-E$，求$A^{-1}$.

$B^*-E=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$

$\therefore A-E=(B^*-E)^{-1}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1 & 0\\ \frac{3}{2} & 3 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

8. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明：

(1) 若 $|A|=0$，则 $|A^*|=0$；

(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明：(1) $A\cdot A^* = |A|E$

$\therefore |A|\cdot|A^*| = |A|^n$

$\therefore |A^*| = |A|^{n-1} = 0$

(2) $A\cdot A^* = |A|E$

$\therefore |A|\cdot|A^*| = |A|^n$

$\therefore |A^*| = |A|^{n-1}$

9. 设 A 为 n 阶非奇异矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵 $P=\begin{pmatrix} E & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$，

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 PQ；

(2) 证明：矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$.

(1) $PQ = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A + |A|\alpha^T & -\alpha^T A^*\alpha + |A|b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & -\alpha^T A^*\alpha + |A|b \end{pmatrix}$

(2) $|PQ| = A\cdot(-\alpha^T A^* \alpha + |A|b)$

$= A\cdot|A|(-\alpha^T A^{-1}\alpha + b)$

$= |P|\cdot|Q|$

充分性：$\because \alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$

$\therefore |PQ| \neq 0$

$\therefore |P|\cdot|Q| \neq 0$

$\therefore |Q| \neq 0$

$\therefore Q$ 可逆

必要性：$\because$ ~~由~~ Q 可逆

$\therefore |Q| \neq 0$

~~$\therefore |PQ$~~

$\because |P| = E\cdot|A| \neq 0$

$\therefore |PQ| \neq 0$

$\therefore \alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$

10. 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零实方阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,$ 2，3)，求 $|A|$.

$a_{ij} = -A_{ij}$

$\therefore A^T = -A^*$

$\therefore |A| = -|A^*|$

因 $A \cdot A^* = |A|E$

$\therefore |A| \cdot |A^*| = |A|^3$

$\therefore |A^*| = |A|^2$

$\therefore |A| = -|A|^2$

$\therefore |A| = 0$ 或 $|A| = -1$

$|A| = -a_{11}^2 + (-a_{12}^2) + (-a_{13}^2) < 0$

$\therefore |A| = -1$