	高斯定理	环路定理
静电场	$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$ 有源场	$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ 保守场、有势场
恒定磁场	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ 无源场	$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(穿过L)} I_i$ 非保守场、无势场 （涡旋场）

匀速直线运动的点电荷的磁场 $\vec{B} = \frac{\mu_0 q\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$

恒定电流的磁场 $\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0 I d\vec{l}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$

具有对称分布的磁场 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(穿过L)} I_i \longrightarrow \vec{B}$ 可求

§ 7-6 磁场对运动电荷和载流导线的作用

一、磁场对运动电荷的作用力——洛仑兹力

洛仑兹力(Lorentz force)表示为：

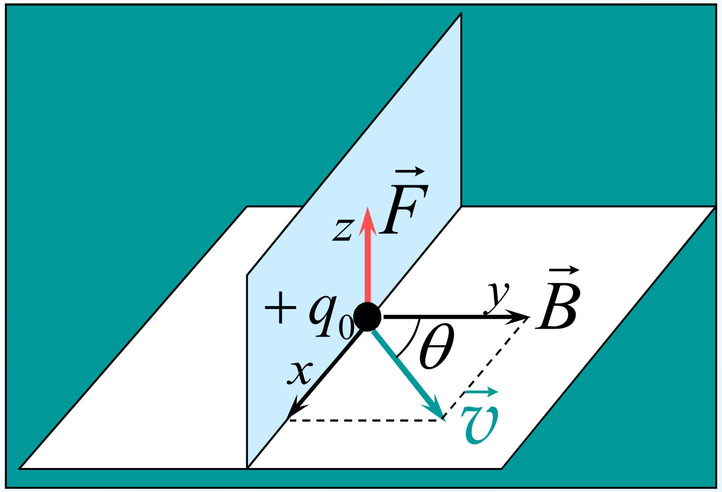
$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

大小：$F = qv\sin\theta B$

方向：$\vec{v} \rightarrow \vec{B}$ 右螺旋方向

$+q$： $\vec{v} \times \vec{B}$ 方向

$-q$： $-(\vec{v} \times \vec{B})$ 方向

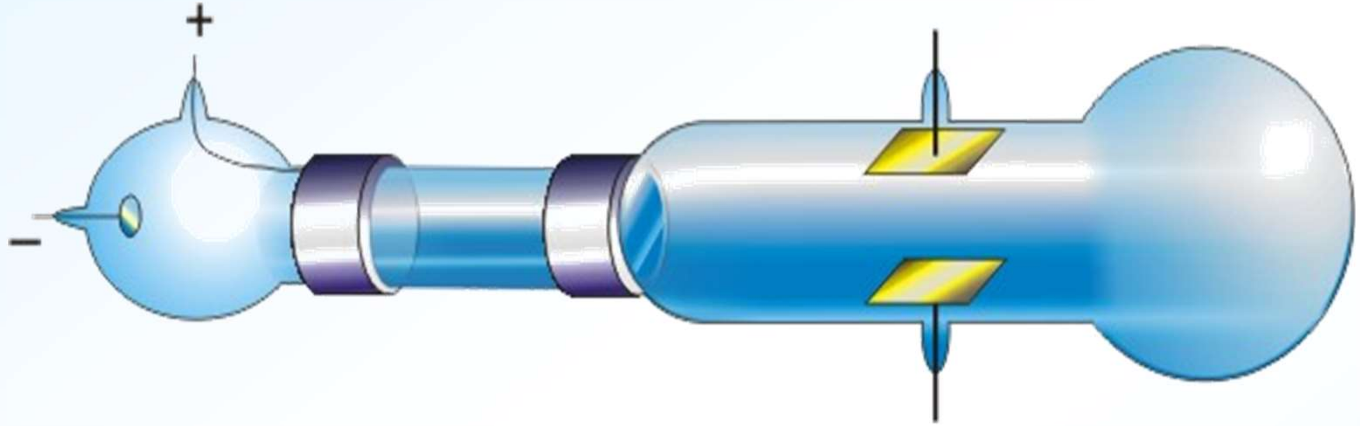


说明：

1. 力F方向垂直v和B确定的平面.

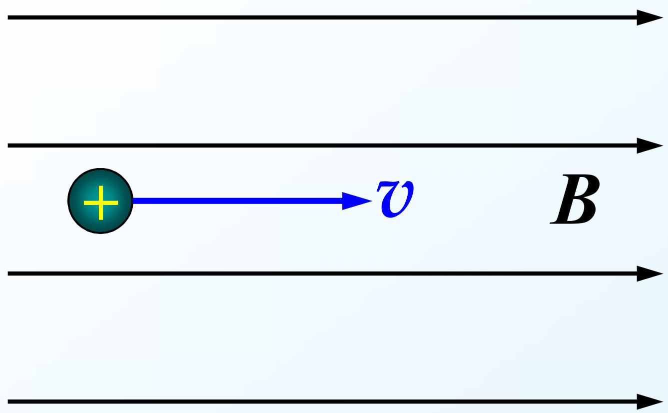
2. 力F改变速度v方向, 不改变大小, 不作功。

二、带电粒子在磁场中的运动



1. 运动方向与磁场方向平行

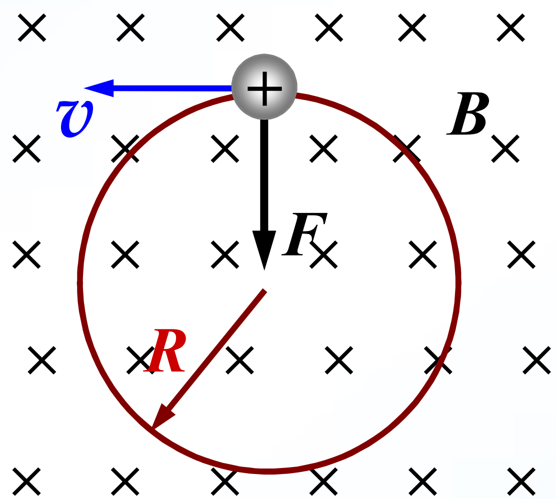
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad \theta = 0 \qquad F = 0$$



结论：

带电粒子作匀速直线运动

2. 运动方向与磁场方向垂直



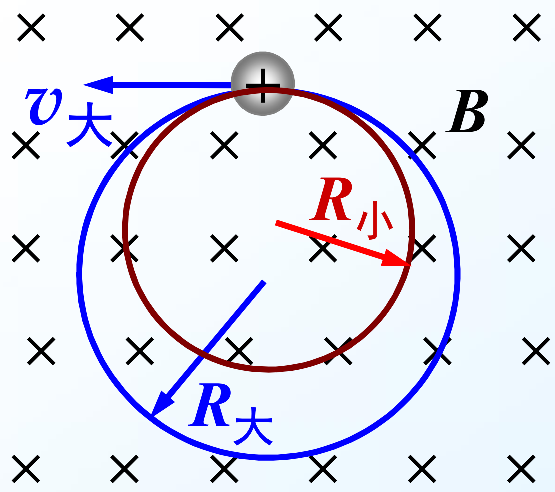
运动方程： $qvB = m\dfrac{v^2}{R}$

半径： $R = \dfrac{mv}{qB}$

周期： $T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{qB}$

频率： $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{qB}{2\pi m}$

结论： 带电粒子在磁场中作匀速圆周运动, 其周期和频率与速度无关.



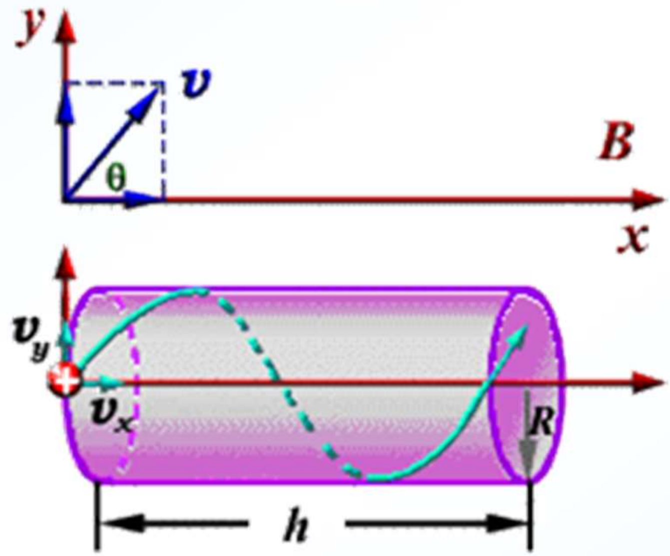
3. 初速度沿任意方向

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

v_y 匀速圆周运动

v_x 匀速直线运动

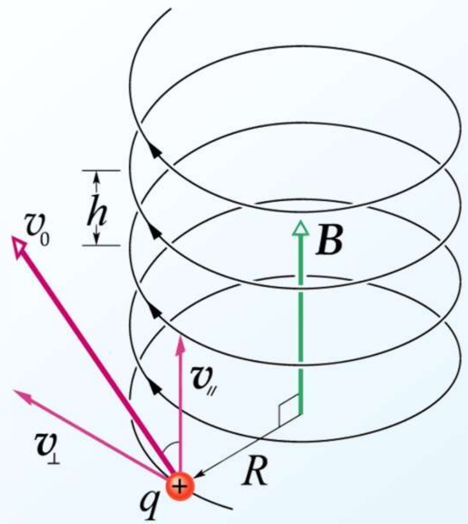
结论： 螺旋运动



半径： $$R = \frac{mv\sin\theta}{qB}$$

周期： $$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

螺距： $$h = v_y T = \frac{2\pi m}{qB} v\cos\theta$$



例7-10. 一由南指向北的均匀磁场, 磁感应强度B=1.5T. 如果有一个5.0MeV的质子沿竖直向下的方向通过磁场, 问作用在质子上的力有多大? (质子质量m=1.67×10^{-27}kg)

解:
$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 = 5.0\times10^6(\mathrm{eV}) = 8.0\times10^{-13}(\mathrm{J})$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}}}{m}} = \sqrt{\frac{2\times8.0\times10^{-13}}{1.67\times10^{-27}}} = 3.1\times10^7(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

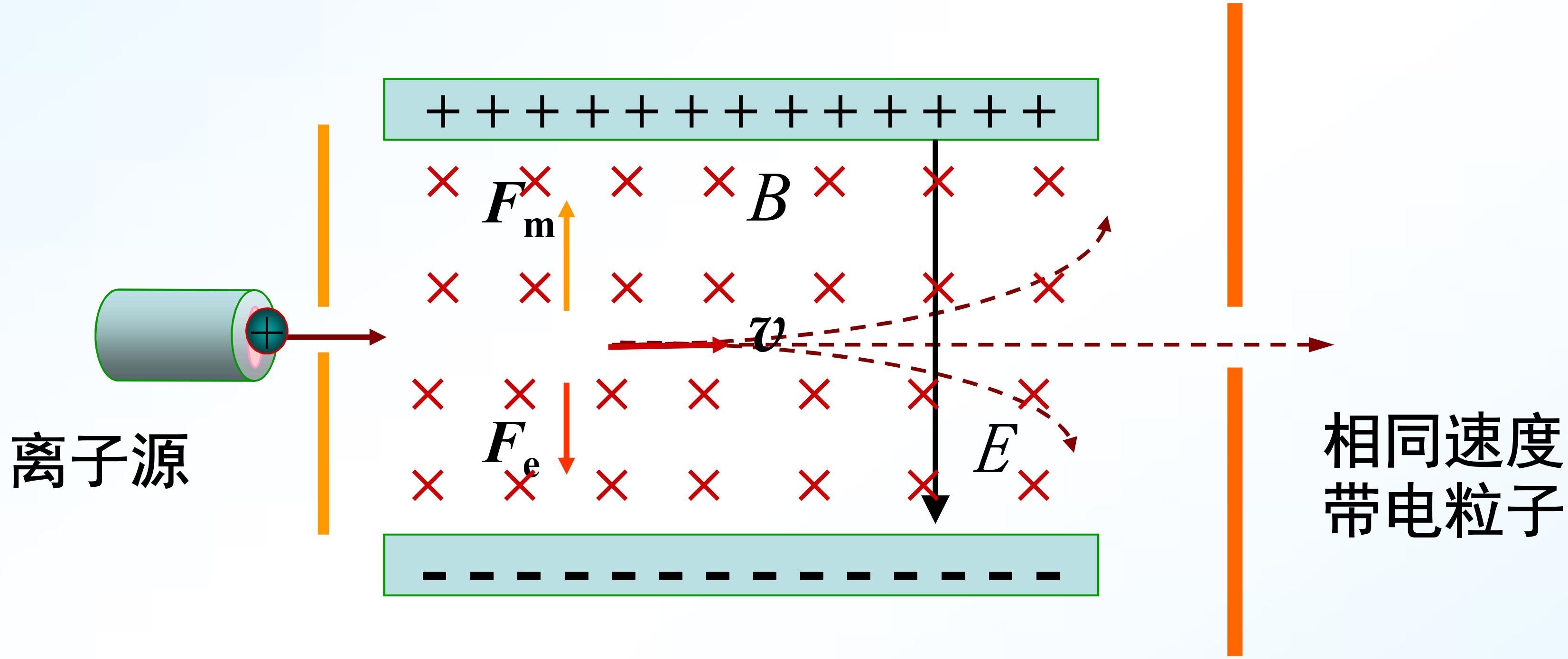
$$F = qvB\sin\theta = 1.6\times10^{-19}\times3.1\times10^7\times1.5\times\sin 90^\circ$$

$$= 7.4\times10^{-12}(\mathrm{N})$$

方向向东

三、电荷在电场和磁场中运动的实例

1. 速度选择器(selector of velocity)



$$qE = qvB$$

$$v = \frac{E}{B}$$

2. 质谱仪(mass spectrograph)

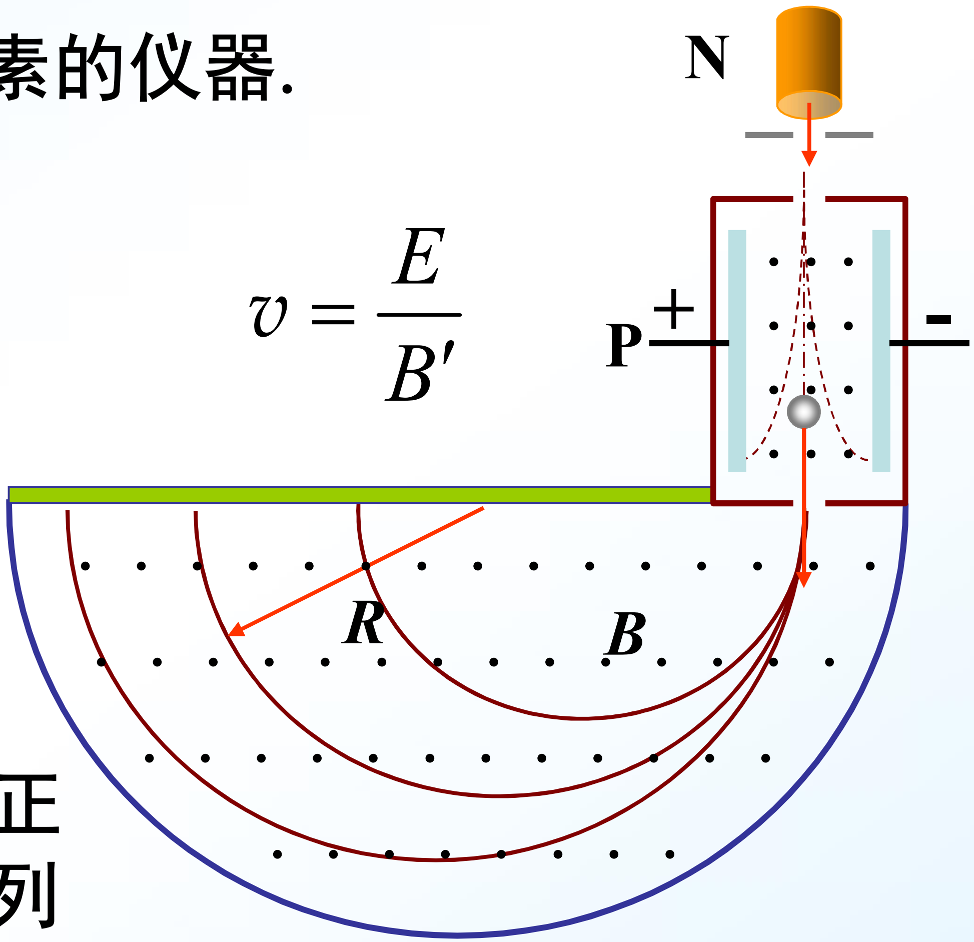
质谱仪是研究物质同位素的仪器.

N：离子源

P：速度选择器

$$v = \frac{E}{B'}$$

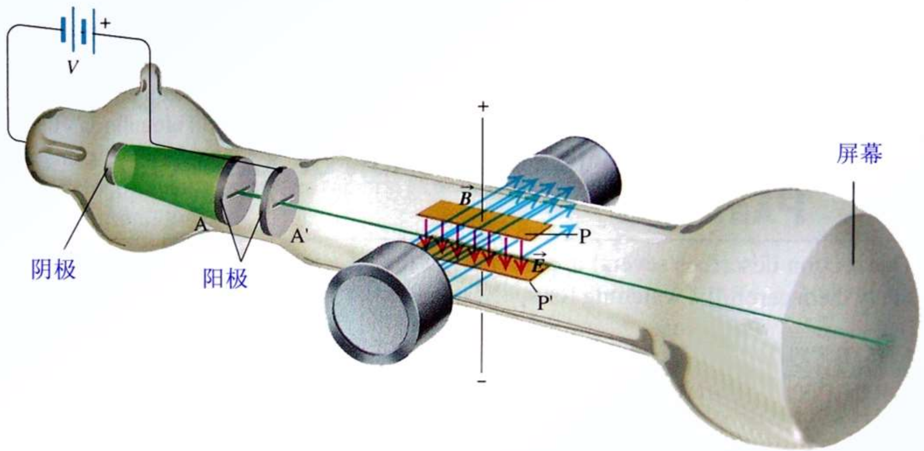
$$R = \frac{mv}{qB}$$



- q、v、B不变，R与m成正比，同位素按质量大小排列

- 荷质比(比荷)：$\dfrac{q}{m} = \dfrac{v}{BR} = \dfrac{E}{RBB'}$

汤姆孙实验



电子动能：$\dfrac{1}{2}mv^2 = eV$

$$\longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

电子束打在屏幕中央的条件：$v = \dfrac{E}{B}$

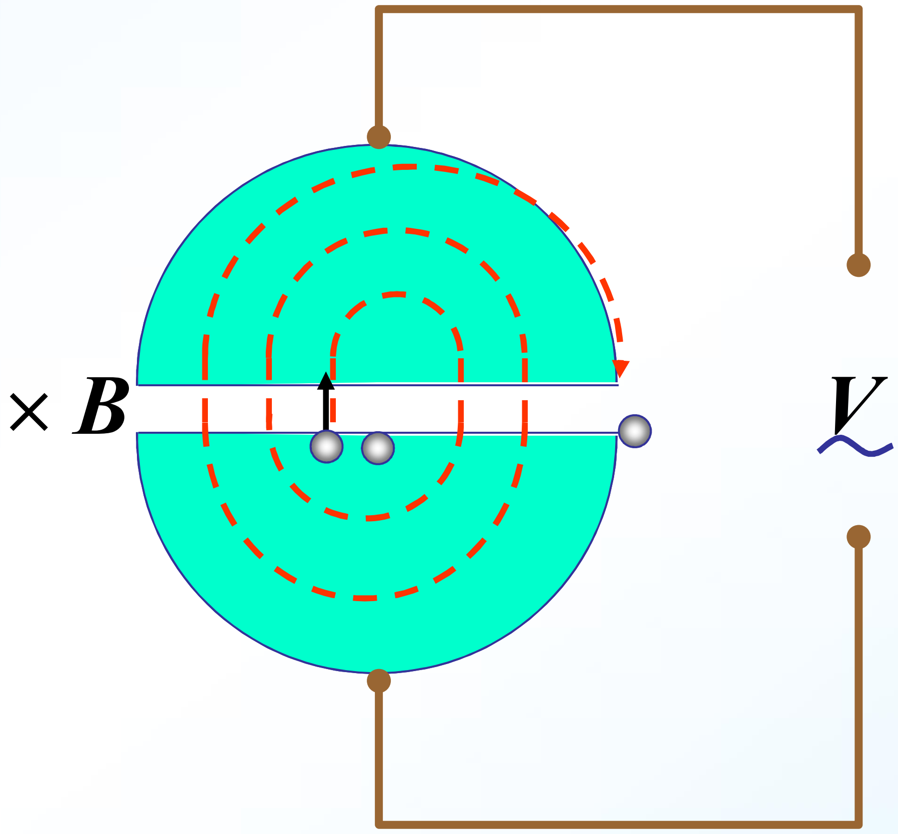
$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \qquad \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2}$$

电子的比荷：$\dfrac{e}{m} = 1.75881962(53)\times 10^{11}\ \mathrm{C\cdot kg^{-1}}$

电子的质量：$m = 9.1093897(54)\times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$

3. 回旋加速器(cyclotron)

回旋加速器是原子核物理、高能物理等实验研究的一种基本设备.



振荡周期：$T=2\tau=\dfrac{2m\pi}{qB}$

频率： $\nu=\dfrac{qB}{2m\pi}$

通过半圆盒的时间：

$$\tau=\frac{\pi R}{v}=\frac{\pi m}{qB}$$

粒子动能：

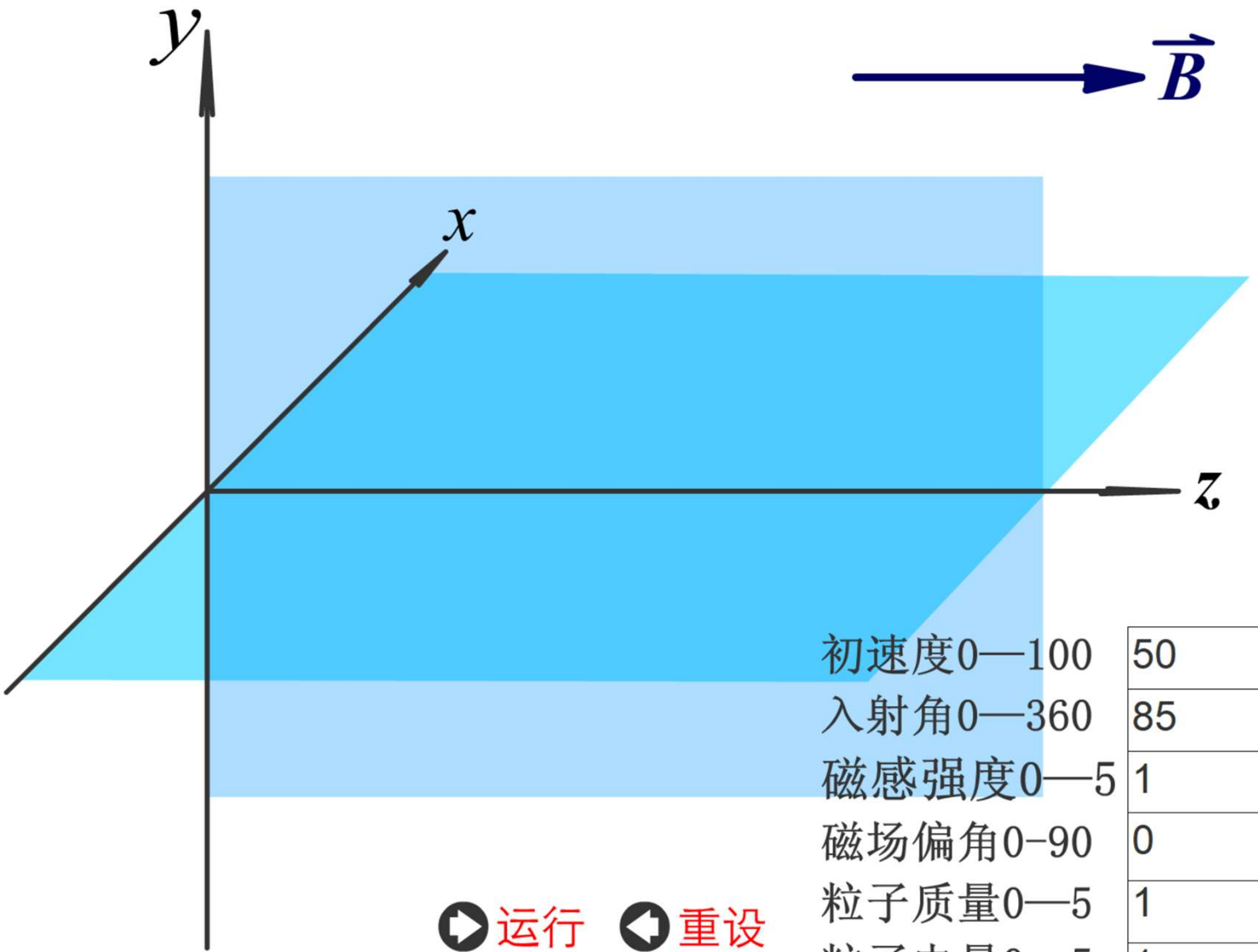
$$\boxed{E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{q^2B^2R^2}{2m}}$$

1939年诺贝尔物理奖：劳伦斯发明的
第一台回旋加速器

真空室直径：10.2cm

欧洲核子研究中心(CERN)座落在日内瓦郊外的加速器：大环是直径8.6km的强子对撞机，中环是质子同步加速器.

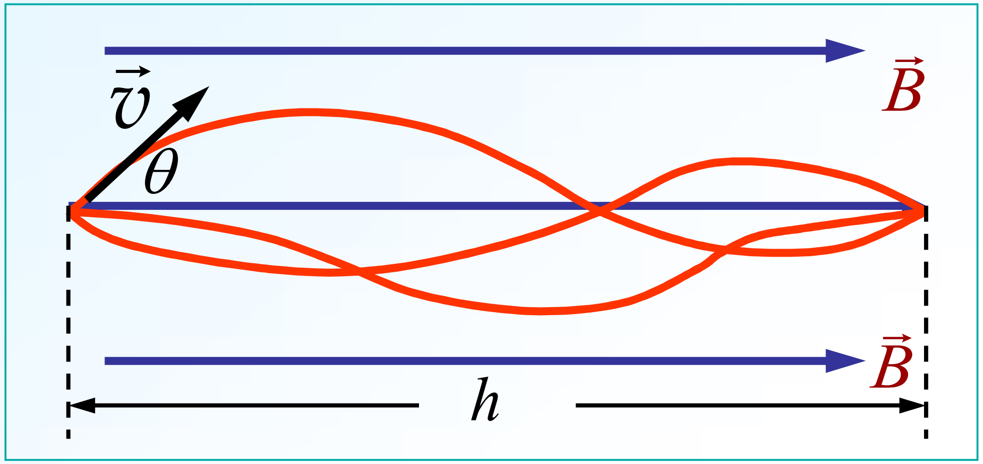
$$qv_{\perp}B = m\frac{v_{\perp}^2}{R} \qquad R = \frac{mv_{\perp}}{qB} \qquad T = \frac{2\pi m}{qB}$$



初速度0—100	50
入射角0—360	85
磁感强度0—5	1
磁场偏角0-90	0
粒子质量0—5	1
粒子电量0—5	1

运行 重设

4. 磁聚焦(magnetic focus)

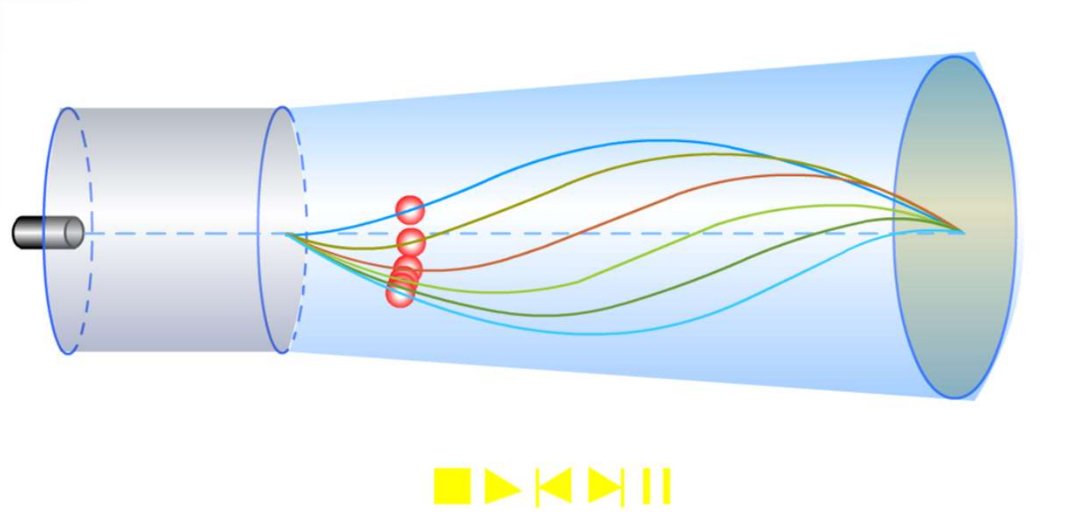


均匀磁场，且θ很小：

$$v_{//} = v\cos\theta \approx v$$

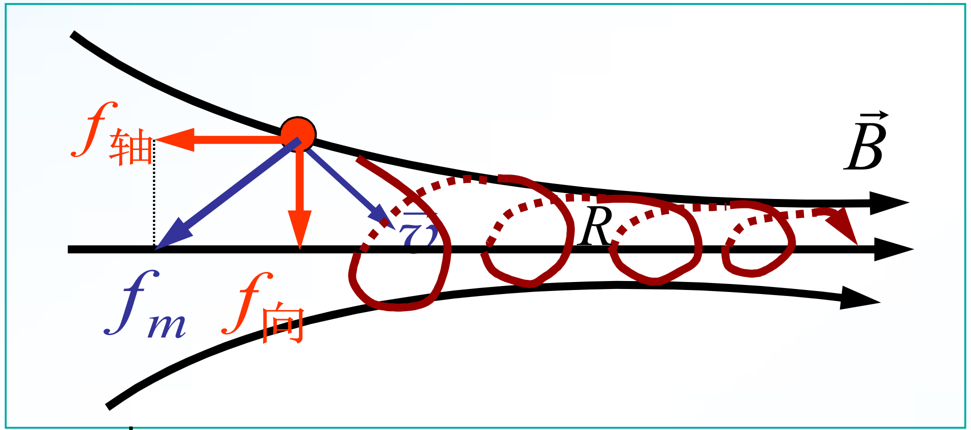
$$h = Tv_{//} = \frac{2\pi mv}{qB}$$

***h*近似相等**



轴对称磁场(短线圈) — 磁透镜(电子显微镜)

5. 磁约束(magnetic leash)



应用于受控热核聚变

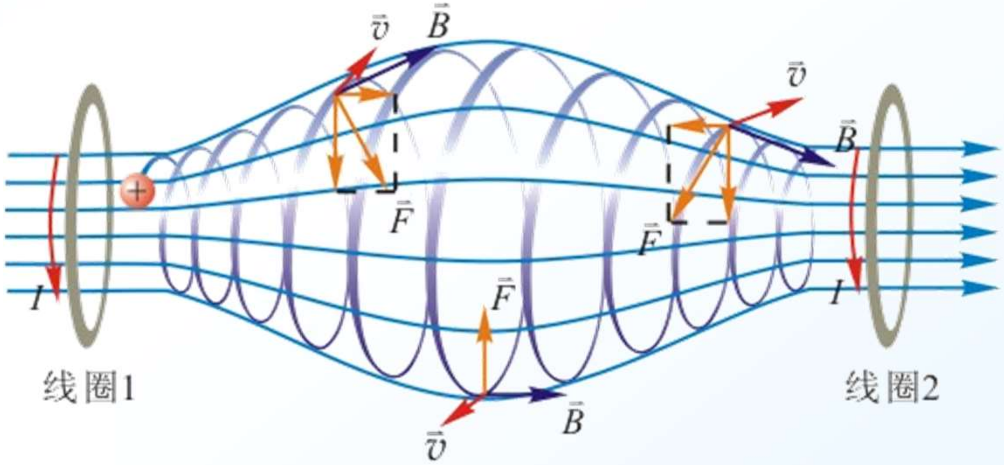
横向:

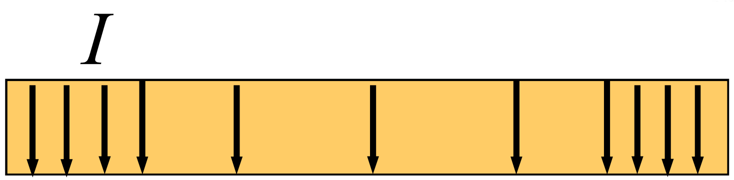
$$R = mv_0/qB \qquad B\uparrow,\ \ R\downarrow$$

纵向:非均匀磁场

$$B\uparrow,\ \ h\downarrow,\ \ h\to 0$$

反射—磁镜

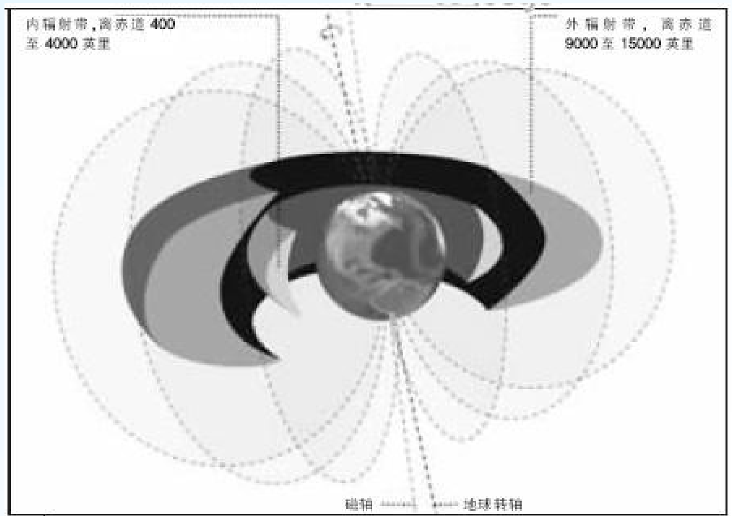


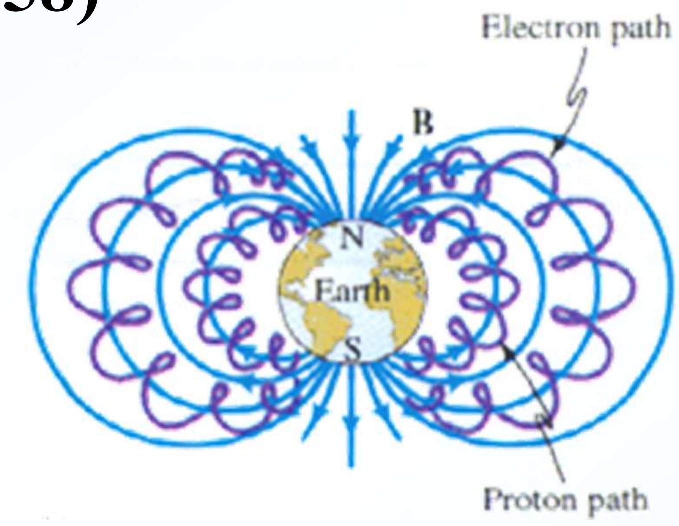


磁瓶:离子在两磁镜间振荡.

在强磁场中可以将离子约束在小范围,脱离器壁.

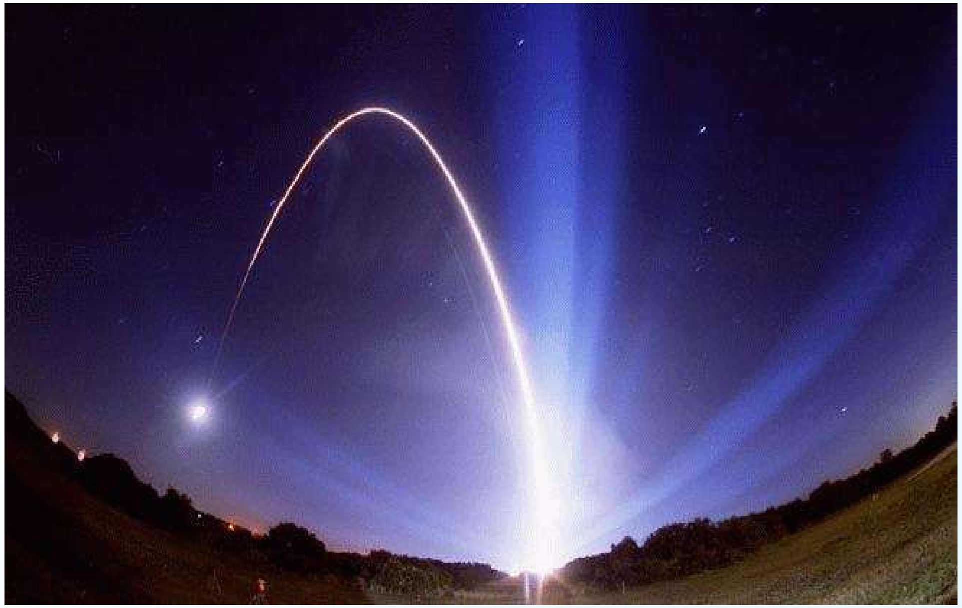
范艾伦带(Van Allen Belts 1958)



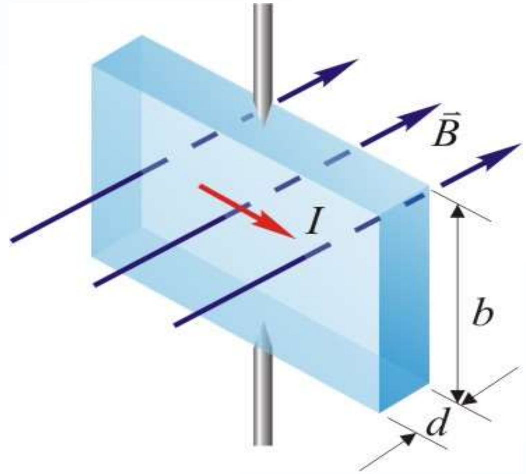


极光

100千米到500千米的高空



6. 霍尔效应(Hall effect)



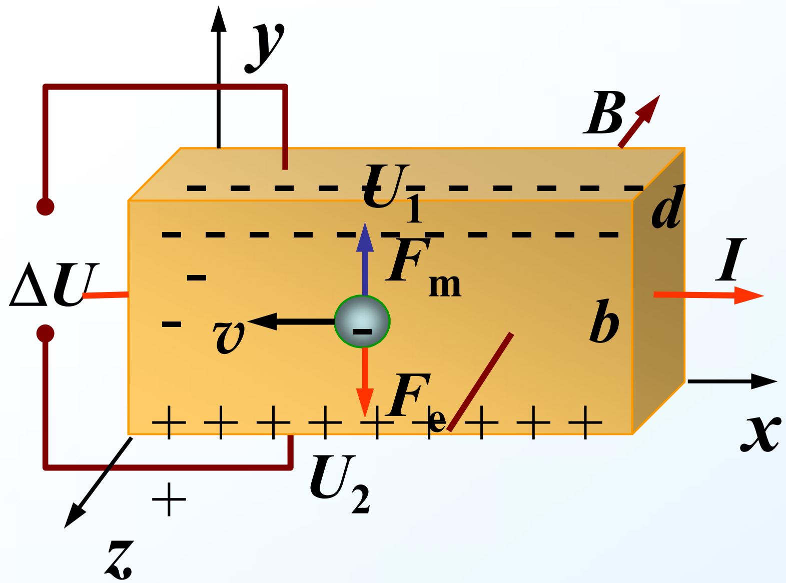
(1) 现象： 导体中通电流I, 磁场垂直于I, 在既垂直于I, 又垂直于 $\vec{B}$ 方向出现电势差ΔU.

(2) 用电子论解释

载流子$q = -e$, 漂移速率$\vec{v}$

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

方向向上，形成 ΔU



$$F_e = qE$$

动态平衡时：

$$qE = qvB \qquad E = vB$$

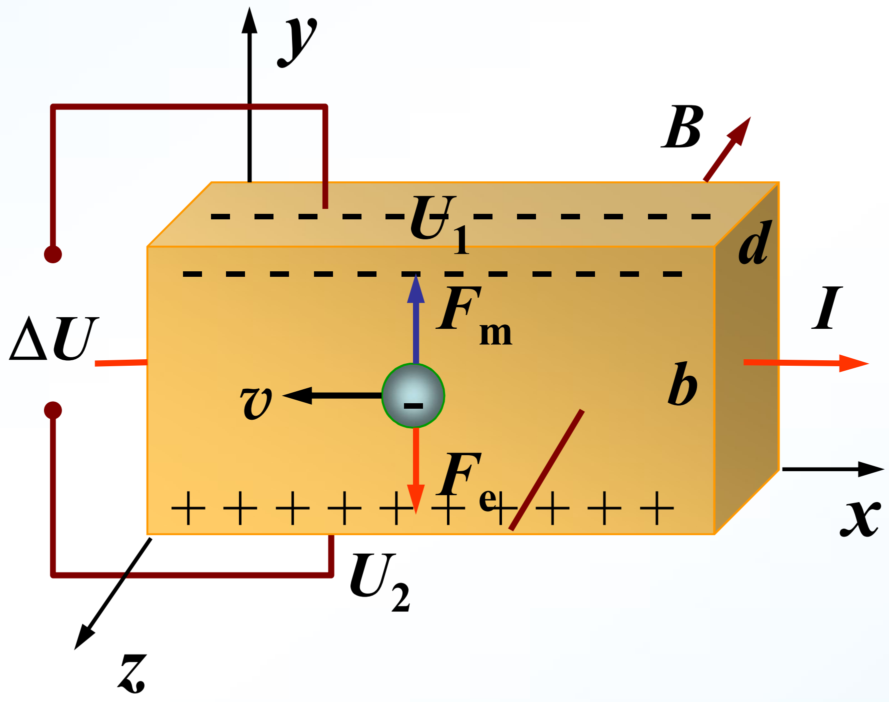
$$E = vB$$

$$U_H = Eb = vBb$$

$$\because \quad I = qnvbd$$

$$v = \frac{I}{qnbd}$$

$$U_H = \frac{1}{qn}\frac{IB}{d}$$

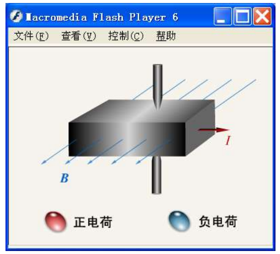


令霍尔系数 $R_H = \dfrac{1}{qn}$

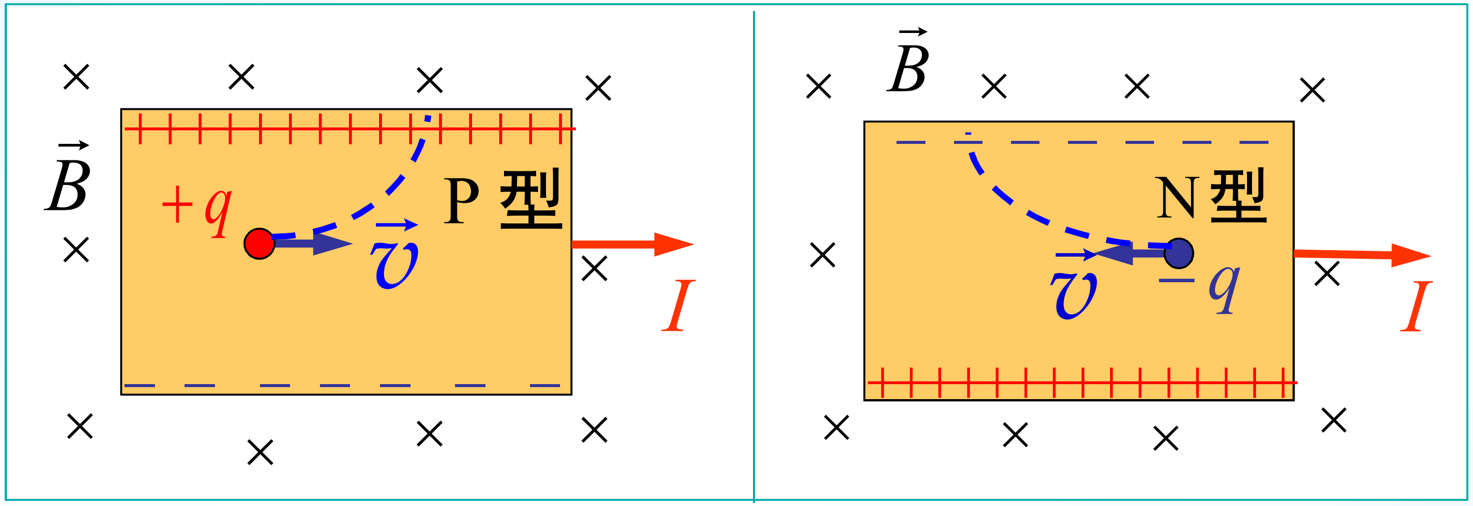
$$\boxed{U_H = R_H \frac{IB}{d}}$$

(3) 应用：

➢ 测载流子密度 $n = \dfrac{BI}{\Delta U \cdot q \cdot d}$

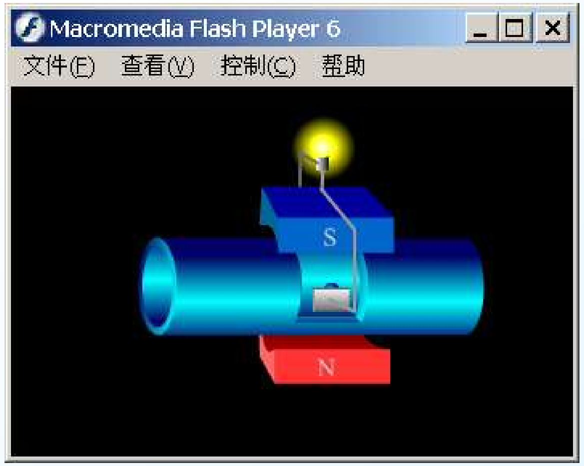


➢ 测载流子电性 — 半导体类型



➢ 测磁场 $\vec{B}$（霍耳元件）

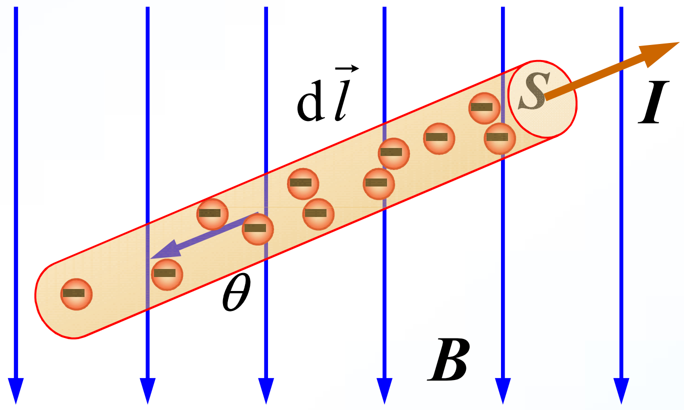
$$\boxed{U_{\mathrm{H}} = R_{\mathrm{H}} \frac{IB}{d}}$$



➢ 磁流体发电

四、安培力(Ampere force)

1. 载流导线在磁场中受力



洛仑兹力: $F = qvB \cdot \sin\theta$

设: 电子数密度 $\boldsymbol{n}$

电流元截面积 $\boldsymbol{S}$

电流元中的电子数: $\boldsymbol{nS}\mathbf{d}\boldsymbol{l}$

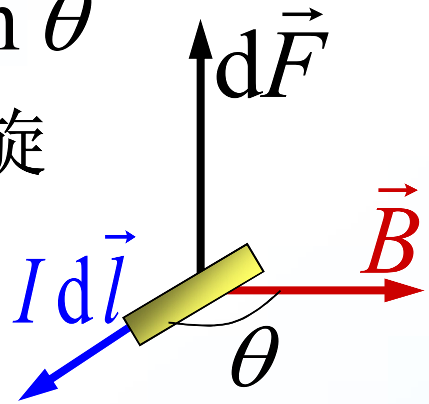
作用在电流元上的作用力: $\mathrm{d}F = (nS\mathrm{d}l)\cdot F$

$$\mathrm{d}F = nS\,\mathrm{d}l \cdot qvB\sin\theta$$

电流强度: $I = qnvS$ $\qquad$ $\mathrm{d}F = I\mathrm{d}l \cdot B\sin\theta$

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$$

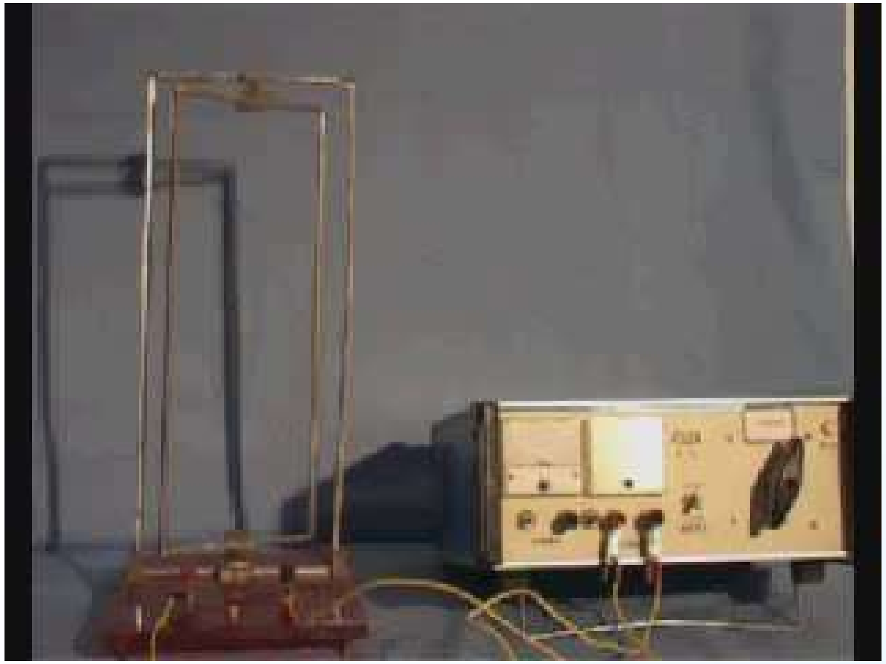
$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}} \begin{cases} \text{大小：} \quad \mathrm{d}F = I\mathrm{d}lB\sin\theta \\ \text{方向：} \quad I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} \text{ 右螺旋} \end{cases}$$



任意形状载流导线在磁场中受安培力：

$$\boxed{\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$$

实验验证:



计算安培力步骤：

(1) 在载流导线上取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

(2) 由安培定律得电流元所受安培力

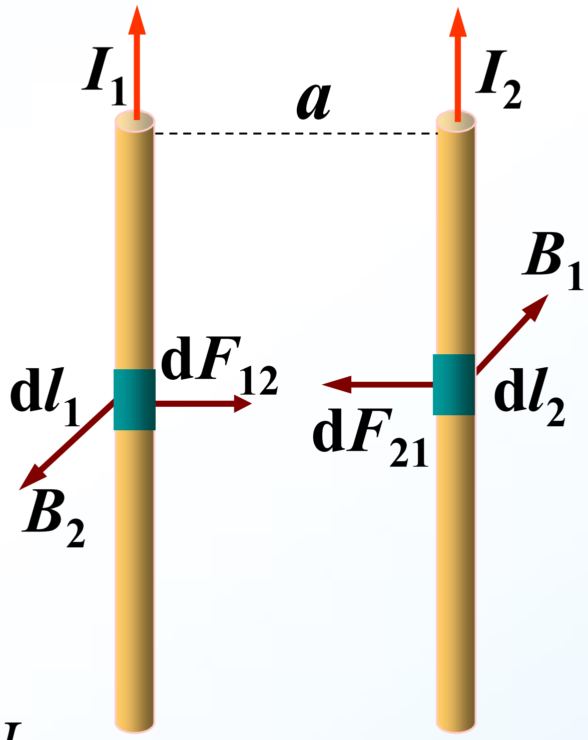
$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

(3) 由叠加原理求载流导线所受安培力

$$\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

$$F_x = \int_L \mathrm{d}F_x \quad F_y = \int_L \mathrm{d}F_y \quad F_z = \int_L \mathrm{d}F_z$$

平行长直电流间的相互作用——“安培”的定义



$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$$

$$\mathrm{d}F_{12} = I_1 B_2 \mathrm{d}l_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\mathrm{d}l_1$$

单位长度受力:

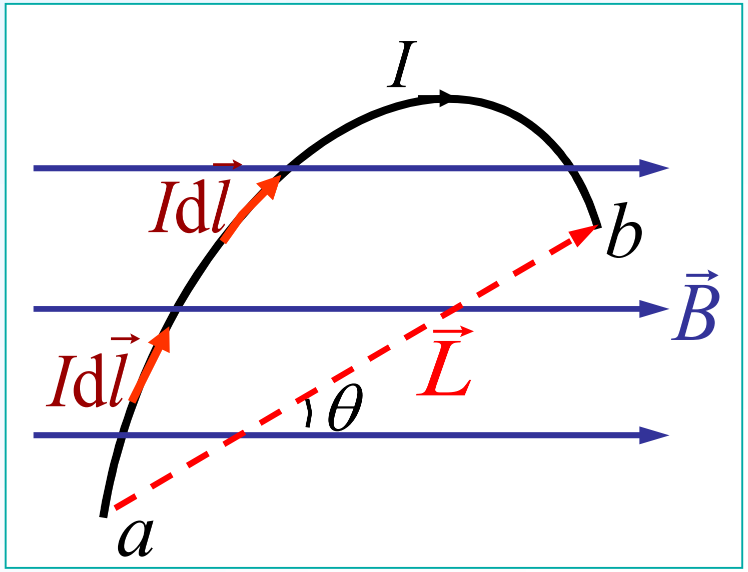
$$\frac{\mathrm{d}F_{12}}{\mathrm{d}l_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \qquad \frac{\mathrm{d}F_{21}}{\mathrm{d}l_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

设：$I_1=I_2=1(\mathrm{A})$，$a=1\mathrm{m}$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} = 2\times10^{-7}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

“安培”的定义： 两平行长直导线相距1m，通过大小相等的电流，如果这时它们之间单位长度导线受到的磁场力正好是$2\times10^{-7}\mathrm{N\cdot m^{-1}}$时，就把两导线中所通过的电流定义为“1安培”。

例11.求均匀磁场中弯曲载流导线ab所受磁场力.



在导线上取电流元$I\mathrm{d}\vec{l}$

其所受安培力

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} \quad \otimes$$

$$\vec{F} = \int_L \mathrm{d}\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I(\int \mathrm{d}\vec{l}) \times \vec{B}$$

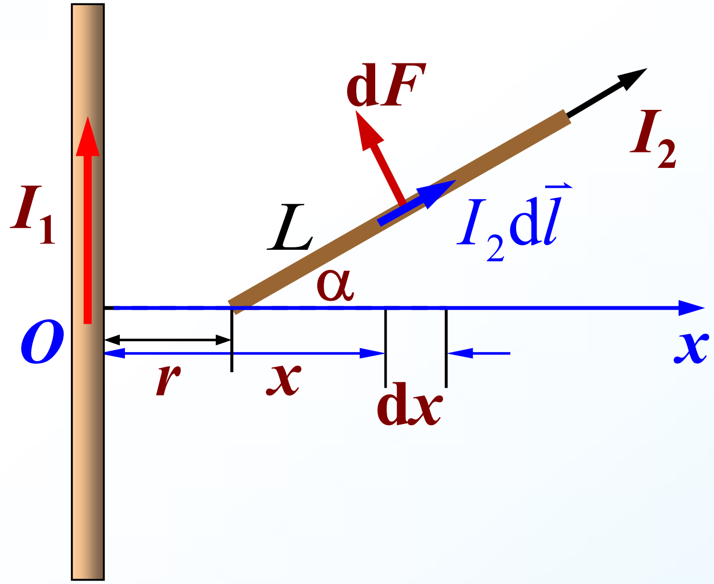
$$\because \int \mathrm{d}\vec{l} = \vec{L} \qquad \therefore \quad \vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

$$F = BIL\sin\theta \qquad \text{方向} \quad \otimes$$

均匀磁场中，弯曲载流导线所受磁场力与从起点到终点间载有同样电流的直导线所受的磁场力相同.

例7-12. 无限长直载流导线通有电流I_1, 在同一平面内有长为L的载流直导线, 通有电流I_2. 如图r、α已知, 求长为L的导线所受的磁场力.

解: 建立如图所示之坐标系



考察I_2上电流元$I_2\mathrm{d}l$受力

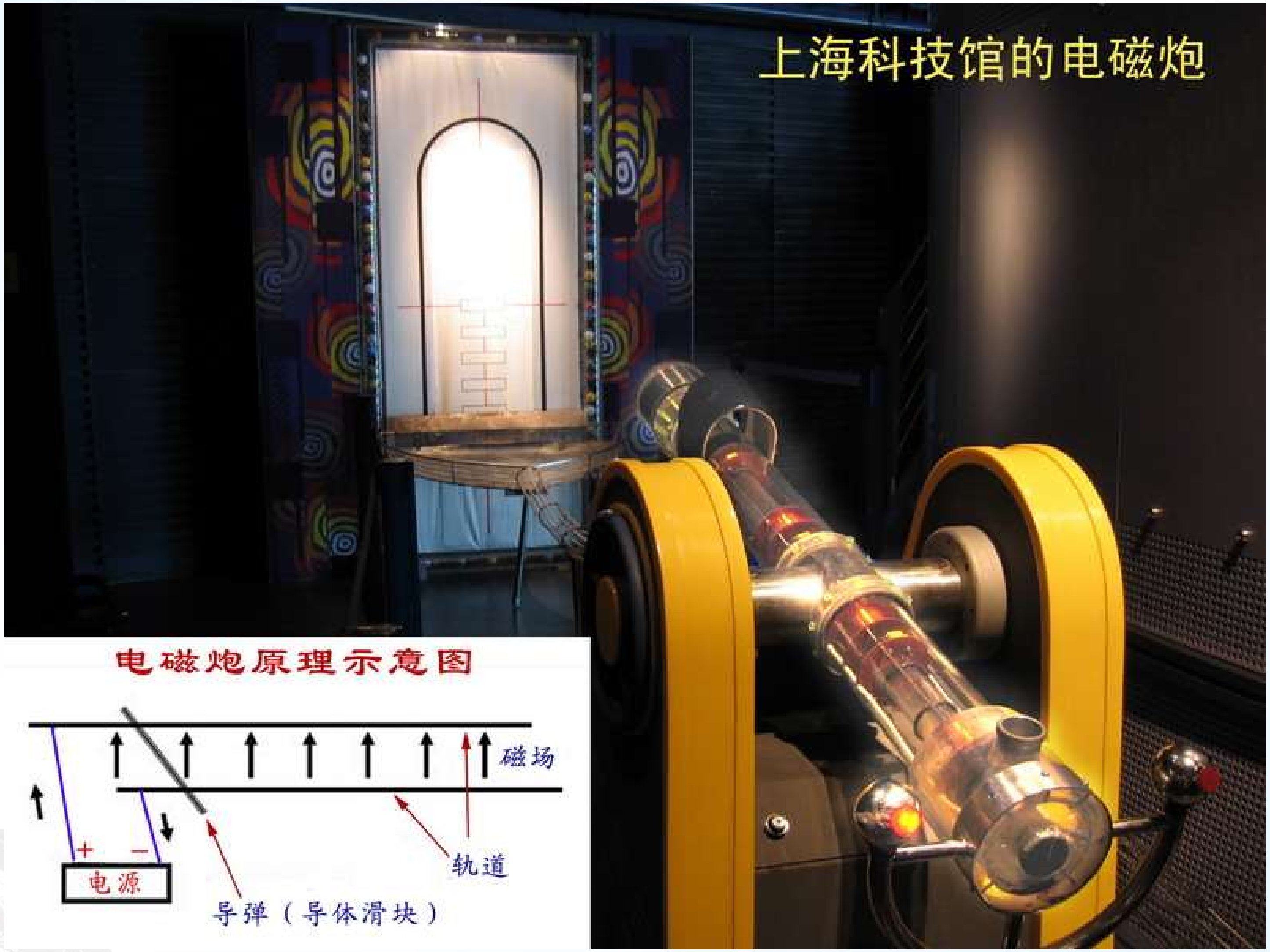
$$\mathrm{d}F = I_2\mathrm{d}lB = I_2\mathrm{d}l\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

$$x = r + l\cos\alpha \quad \Rightarrow \mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{d}F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}$$

$$F = \int \mathrm{d}F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha}\int_r^{r+L\cos\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha}\ln\frac{r+L\cos\alpha}{r}$$

轨道炮(电磁炮)原理：利用电流间相互作用的安培力将炮弹发射出去



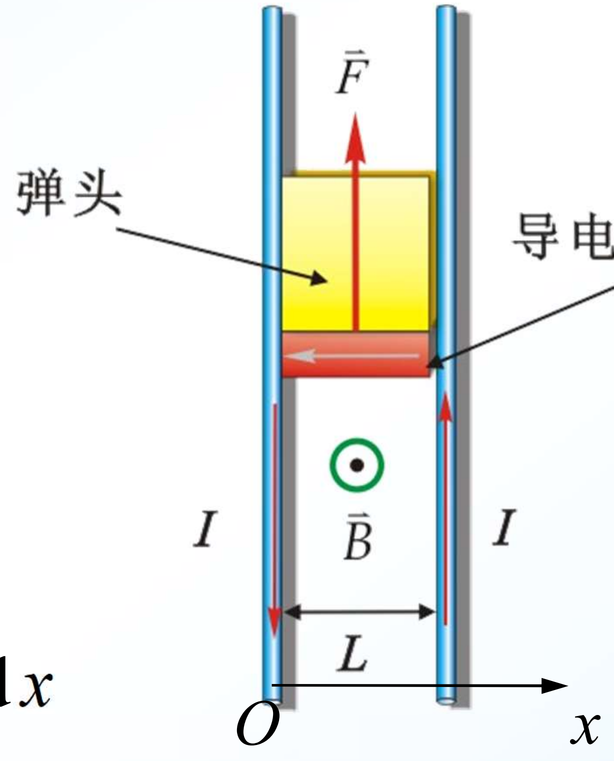
设圆柱面半径为R，弹头上一电流元距横向一端为x

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}+\frac{\mu_0 I}{4\pi(L-x)}$$

弹头上电流受力 $F=\int_R^{L-R} I\,\mathrm{d}x B$

$$=\int_R^{L-R} I\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi x}+\frac{\mu_0 I}{4\pi(L-x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{L-R}{R}$$



2. 载流线圈在磁场中受到的磁力矩

$$F_3 = BIl_1 \sin(\pi - \theta)$$

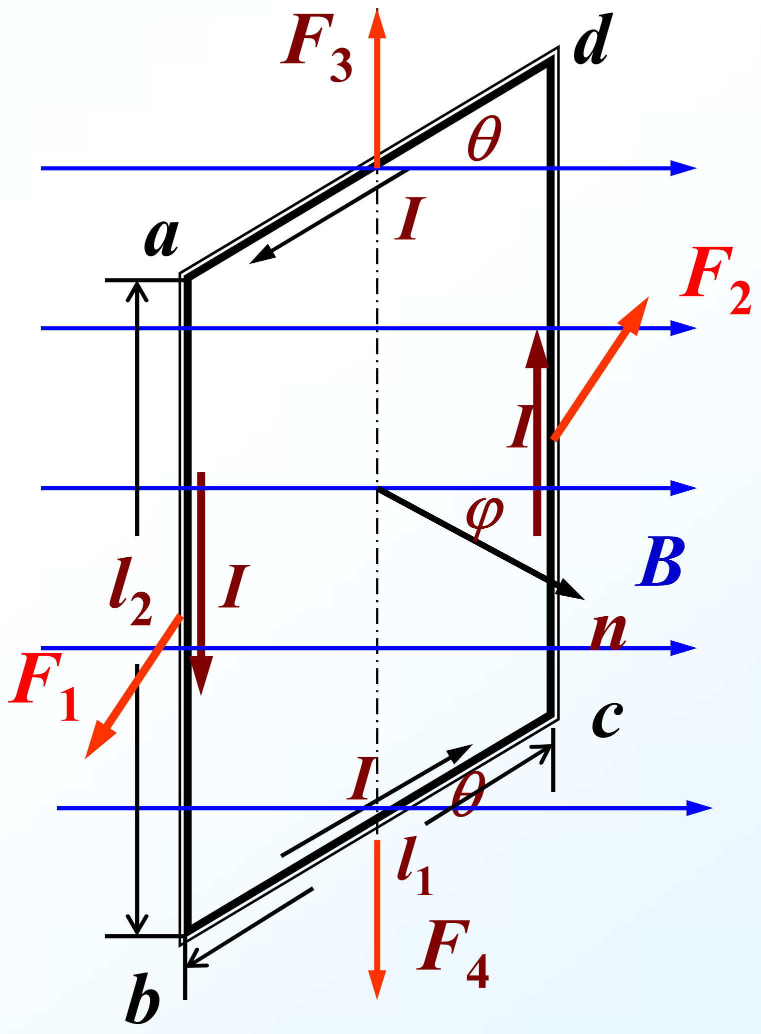
$$= BIl_1 \sin\theta$$

$$F_4 = BIl_1 \sin\theta$$

$$F_3 = F_4$$

$$F_1 = BIl_2 \qquad F_2 = BIl_2$$

$$F_1 = F_2$$

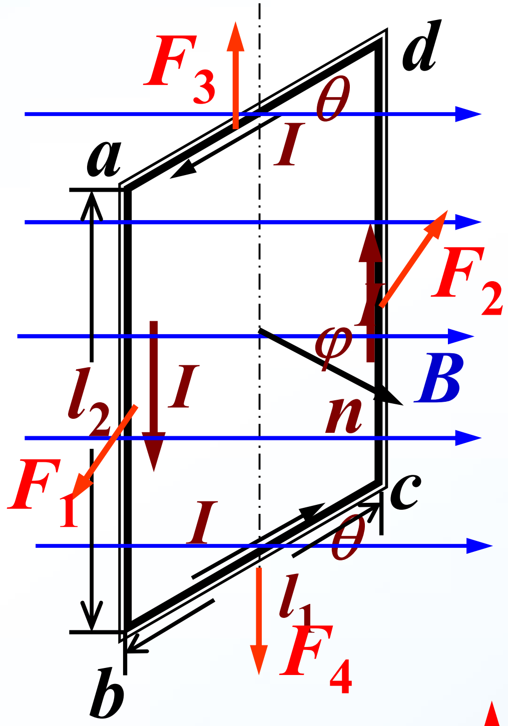


F_1和F_2形成一“力偶”

磁力矩：

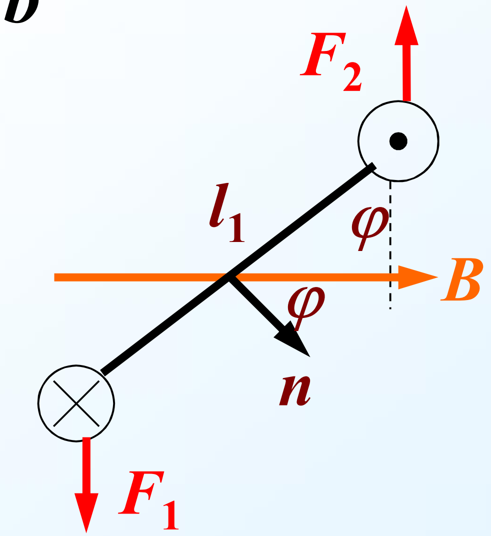
$$M = \frac{1}{2}F_1 l_1 \sin\varphi + \frac{1}{2}F_2 l_1 \sin\varphi$$

$$M = BIl_2 l_1 \sin\varphi = BIS\sin\varphi$$



注： 上式适合于任意形状的闭合载流线圈。

N 匝线圈的磁力矩： $M = NBIS\sin\varphi$

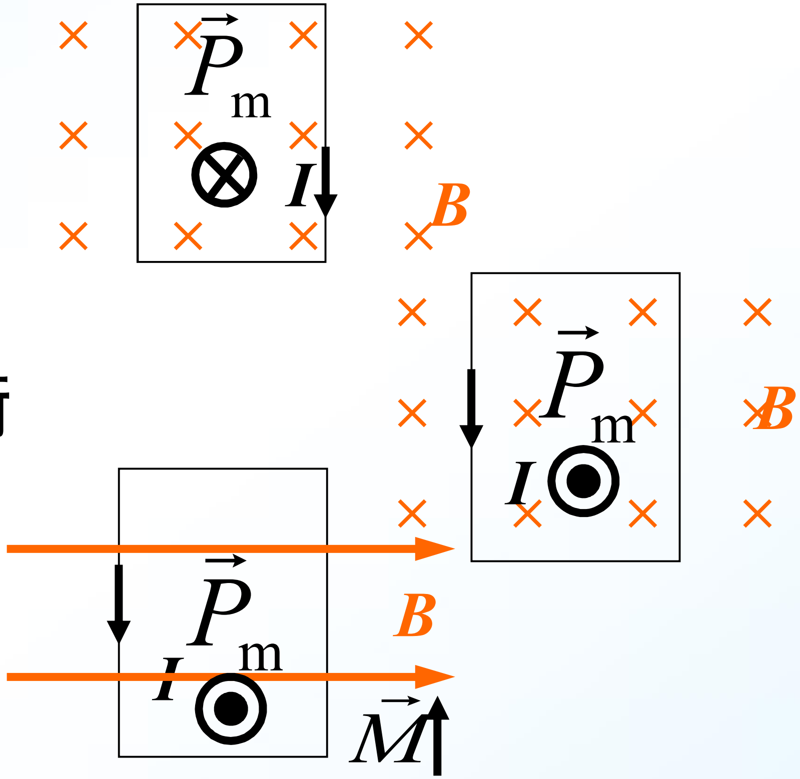


磁矩： $\vec{P}_m = NI\vec{S}$

磁力矩： $\boxed{\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}}$

不同φ角的磁力矩、磁通量

$$\varphi=\begin{cases}0^\circ\text{时}, M=0 \quad \text{稳定平衡}\\ 180^\circ\text{时}, M=0 \quad \text{非稳定平衡}\\ 90^\circ\text{时}, M=M_{max}=NBIS\end{cases}$$



在均匀磁场中，平面载流线圈的转动趋势是使其磁矩的方向与外磁场的方向一致，即 $\varphi=0^\circ$。