武汉大学计算机学院2009-2010学年第一学期

2008级《离散数学》考试标准答案

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$(P \to Q) \to R$$

主析取范式: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$;
主合取范式: $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$.

二、 写出下列结论的证明序列： (20分，10+10)

(1) 前提：$P \to Q,\quad Q \to R,\quad \neg R \wedge S$.
结论：$\neg P$;
证明:

①	$\neg R \wedge S$	引入前提	④	$\neg Q$	② + ③+MT
②	$\neg R$	化简规则	⑤	$P \to Q$	引入前提
③	$Q \to R$	引入前提	⑥	$\neg P$	④ + ⑤+MT

(2) 前提：$\forall x(P(x) \to \neg Q(x)),\quad \forall x(Q(x) \vee R(x)),\quad \exists x \neg R(x)$.
结论：$\exists x \neg P(x)$.
证明:

①	$\exists x \neg R(x)$	引入前提	⑥	$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$	引入前提
②	$\neg R(a)$	①+ES	⑦	$P(a) \to \neg Q(a)$	⑥+US
③	$\forall x(Q(x) \vee R(x))$	引入前提	⑧	$\neg P(a)$	⑦ + ⑤+MT
④	$Q(a) \vee R(a)$	③+US	⑨	$\exists x \neg P(x)$	⑧+EG
⑤	$Q(a)$	② + ④+析取三段论			

三、 设有函数$f: A \to B$，定义函数$g: \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), \forall S \in \mathcal{P}(B)$ (注: $\mathcal{P}(A)$为集合A的幂集合)，有 (20分，10+5+5)

$$g(S) = \{\, a \,|\, a \in A \wedge f(a) \in S \,\} \text{ (即} f^{-1}(S))$$

(1) 试证明，如果f是单射，则$\forall X \subseteq A$，$f^{-1}(f(X)) = X$；
证明: 由定理有$X \subseteq f^{-1}(f(X))$，现需证$f^{-1}(f(X)) \subseteq X$，设$x \in f^{-1}(f(X))$，则$f(x) \in f(X)$，即$\exists x' \in X$，$f(x) = f(x')$. $\because$ f是单射，$\therefore$ $x = x'$，即$x \in X$. 故$f^{-1}(f(X)) \subseteq X$.

(2) 试证明，当f是单射时，g是满射；
证明: $\forall X \in \mathcal{P}(A)$，由(1)有$f^{-1}(f(X)) = X$，即$g(f(X)) = X$，$\therefore g(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(A)$. 故$g$是满射.

(3) 试以集合$A = \{a, b\}$到$B = \{c, d\}$上的函数为例说明当f不是单射时，g不是满射.
解: 设$f(a) = f(b) = c$，则$g(\mathcal{P}(B)) = \{\varnothing, \{a, b\}\} \subsetneq \mathcal{P}(A)$，故$g$不是满射.

四、 设A为集合，集合P是集合A上所有的划分组成的集合，即$P = \{S \mid S\text{是}A\text{的划分}\}$，定义关系$R \in P \times P$, $\forall S, T \in P$，$\langle S, T\rangle \in R$ iff 若$\forall u \in S$，则存在$v \in T$，使得$u \subseteq v$. 如$A = \{a, b, c\}$，设$S = \{\{a\}, \{b, c\}\}$，$T = \{\{a, b, c\}\}$，则$\langle S, T\rangle \in R$: (15分，5+5+5)

(1) 设$A = \{a, b, c\}$，试用枚举法表示集合A上所有的划分组成的集合P；

解：

$$\begin{aligned} P = \{ &\{\{a, b, c\}\}, \{\{a, b\}, \{c\}\}, \{\{b, c\}, \{a\}\}, \\ &\{\{a, c\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}\} \end{aligned}$$

(2) 证明：R是偏序关系；

证明：

① 自反性：$\forall S \in P$，$\forall u \in S$，$u \subseteq u$，$\therefore \langle S, S\rangle \in R$;

② 反对称性：设$\langle S, T\rangle \in R \wedge \langle T, S\rangle \in R$，需证明集合$S$和$T$相等. 设$u \in S$，$\therefore \exists v \in T, u \subseteq v$，$\because \langle T, S\rangle \in R$，$\therefore \exists u' \in S, v \subseteq u'$，这样$u \subseteq u'$，而$u$和$u'$同属于一个划分$S$，所以它们均非空且$u \cap u' \neq \varnothing$，$\therefore u = u'$，而$u \subseteq v \subseteq u'$，$\therefore u = v$，故$S \subseteq T$. 同理可证$T \subseteq S$. $\therefore S = T$.

③ 传递性：设$\langle S, T\rangle \in R \wedge \langle T, W\rangle \in R$，则$\forall u \in S, \exists u \in T, u \subseteq v$，$\because \langle T, W\rangle \in R$，$\therefore \exists w \in W, v \subseteq w$，这样$u \subseteq w$，故$\langle S, W\rangle \in R$.

(3) 试用性质法表示集合P的最大元素和最小元素.

解：最大元素$\{A\}$；最小元素$\{\{a\} \mid a \in A\}$.

五、 设$\langle G, *, e\rangle$是群，H，K是其子群，在G上定义二元关系R : $\forall a, b \in G$，aRb iff 存在$h \in H$，$k \in K$，使得$b = h * a * k$. 证明： (20分, 每小题5分)

(1) R是G上的等价关系;

证明：

① 自反性：$\because H, K \leqslant G$，$\therefore e \in H \cap K$. 这样$\forall a \in G$，$a = e * a * e$.

② 对称性：设aRb，即$\exists h \in H, k \in K$，$b = h * a * k$，即$a = h^{-1} * b * k^{-1}$，而$h^{-1} \in H$, $k^{-1} \in K$，故bRa.

③ 传递性：设$aRb \wedge bRc$，即$\exists h, h' \in H, k, k' \in K$，$b = h * a * k \wedge c = h' * b * k'$，这样$c = (h' * h) * a * (k * k')$. 而$h' * h \in H \wedge k * k' \in K$，故$aRc$.

(2) 试证明$\forall h, h' \in H$，$k, k' \in K$，hRh', kRk'；

证明：$h' = (h' * h^{-1}) * h * e$，而$h, h' \in H$，根据子群运算的封闭性有$h' * h^{-1} \in H$，又$e \in K$，故$hRh'$. 同理可证$kRk'$.

(3) 试证明$\forall a, b \in H \cup K$, aRb;

证明：如果$a, b \in H \vee a, b \in K$，这由题(2)有$aRb$.

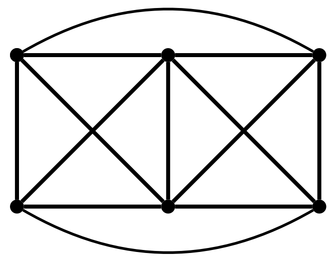
设$a \in H \wedge b \in K$，$\because e \in H \cap K$，由题(2)，$aRe \wedge eRb$，由于R是传递关系，故aRb.

(4) 若$|H| = m$，$|K| = n$，$|G| = mn$，m与n互素，$[a]_R$是R的某个等价类，且$[a]_R$是G的一个子群，则$R = G \times G$.

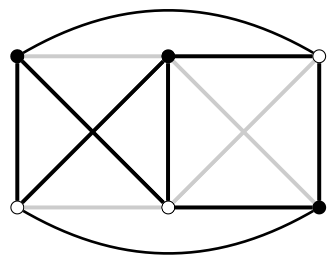
证明：$\because [a]_R \leqslant G$，$\therefore e \in [a]_R$. 这样$eRa$，由(2)，$\forall h \in H, eRh$，$\therefore hRa$，

即$h \in [a]_R$，由此$H \subseteq [a]_R$，$\therefore H \leqslant [a]_R$. 根据$Lagrange$定理，$|H| \mid |[a]_R|$，即 m 是 $|[a]_R|$ 的因子. 同理 n 也是 $|[a]_R|$ 的因子. 而 m 和 n 互素，这样 mn 是 $|[a]_R|$ 的因子. $\therefore mn = |G| \geqslant |[a]_R| \geqslant mn$. 故 $[a]_R = G$.

六、 设判别下面的简单无向图是否为平面图： (8分)



解*1*：不是平面图，因为其子图与$K_{3,3}$同构：



解*2*：$\because m = 13, n = 6$，$m = 13 > 12 = 3n - 6$，不满足平面图的必要条件$m \leqslant 3n - 6$.

七、 设无向图$G(n,m)$是树，其结点最大度数为$k(k \geqslant 2)$，证明：G中至少有k片树叶. (7分)

证明（反证法）：设仅有$k-1$个结点为树叶，这样图G有1个结点的度数$\geqslant k$，$n-k$个结点的度数$\geqslant 2$，$k-1$个结点的度数为1. $\therefore$所有结点的度数之和不小于下式：

$$k + 2(n-k) + k - 1$$

即$2n-1$. 但是n个结点的无向树的边数$m = n - 1$，其度数之和为$2n - 2 < 2n - 1$. 故矛盾. 同理对叶结点数小于$k-1$的情况也有上述矛盾.