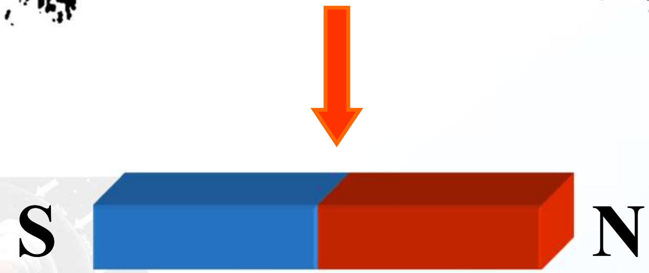
§7-2　恒定磁场和磁感应强度

一、磁的基本现象

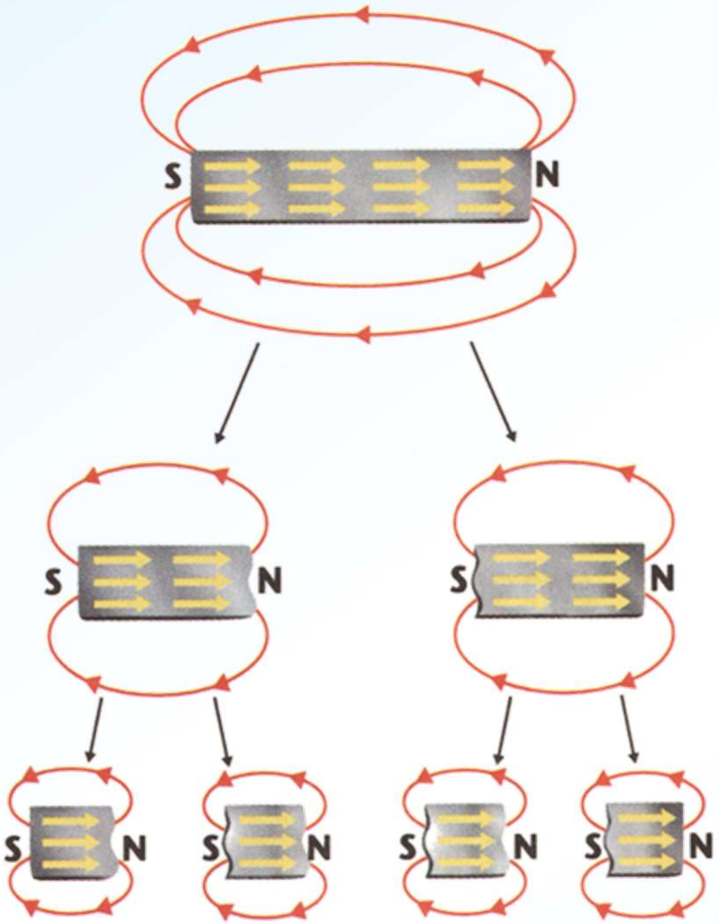
1. 磁铁的磁性(magnetism)

磁性：能吸引铁、钴、镍等物质的性质.

磁极(pole)：磁性最强的区域，分磁北极N和磁南极S.

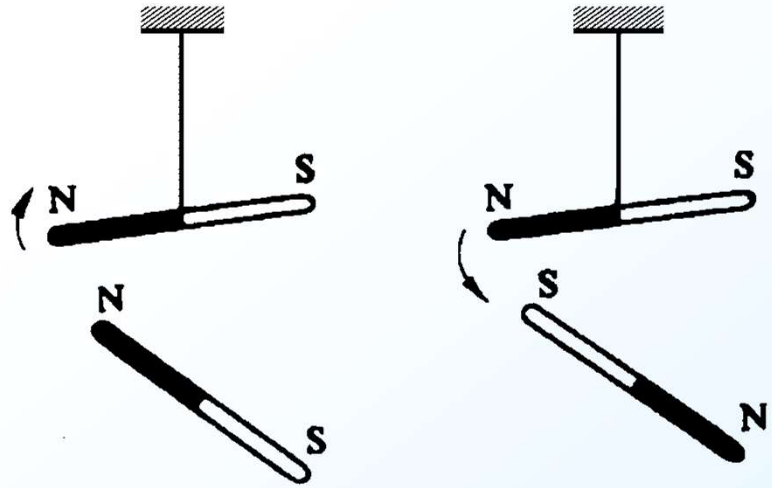


磁极不能单独存在.



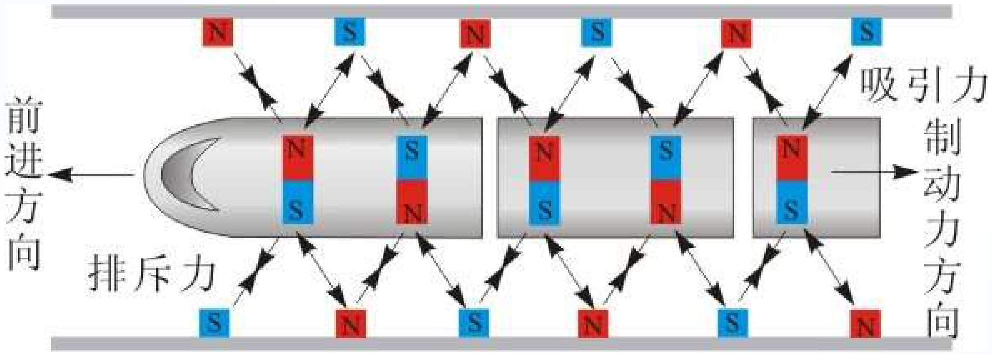
无论将磁体分割成多少段，所得到的每一段依旧有两个磁极。

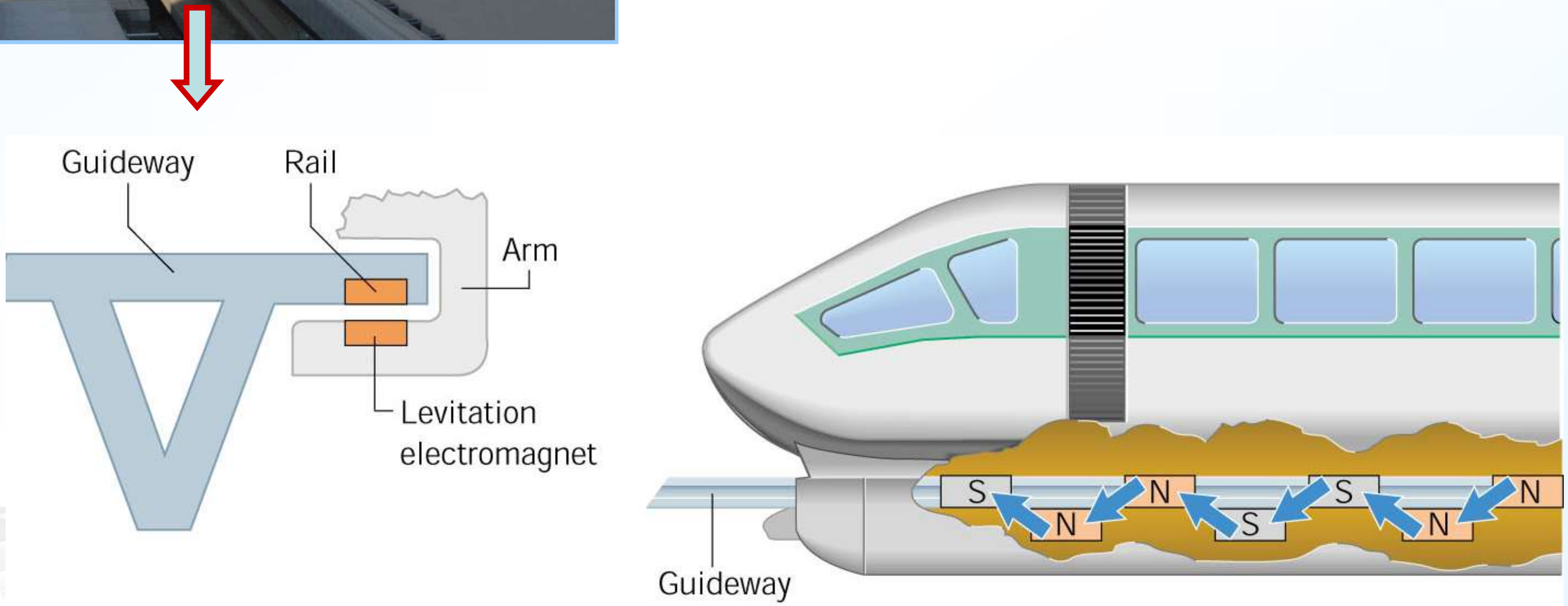
磁力(magnetic force)：
磁极间存在相互作用，
同号相斥，异号相吸.

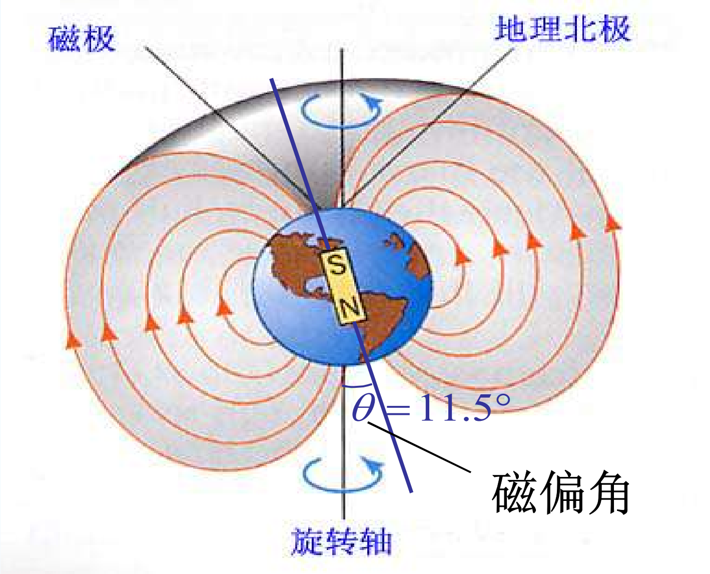


磁力的应用：磁悬浮列车


SMT


N
S
吸引力
前进方向
制动力方向
排斥力


Guideway
Rail
Arm
Levitation electromagnet
S
N
Guideway



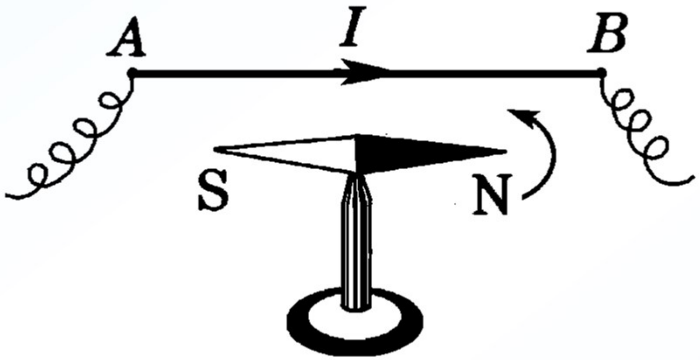
地球是一个巨大的永磁体

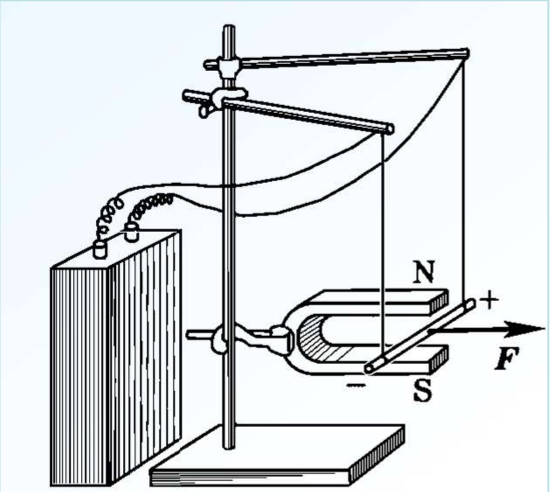
这是什么现象？

2. 电流的磁效应

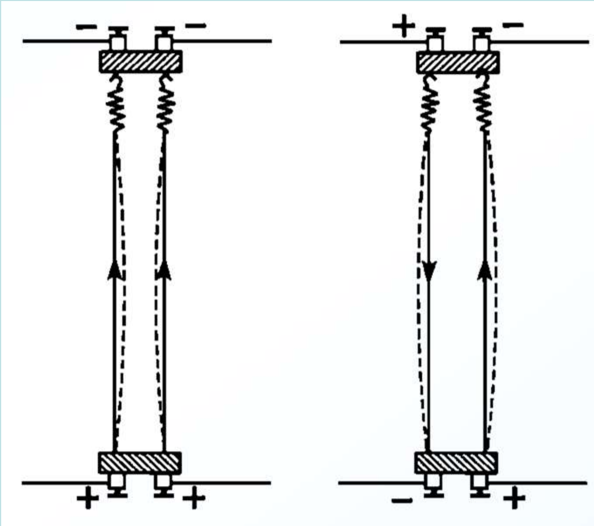
1819年奥斯特实验表明：

电流对磁极有力的作用

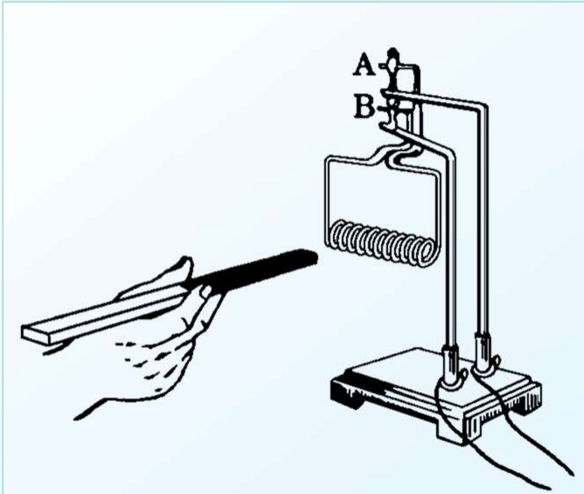




磁铁对电流有作用



电流间有相互作用



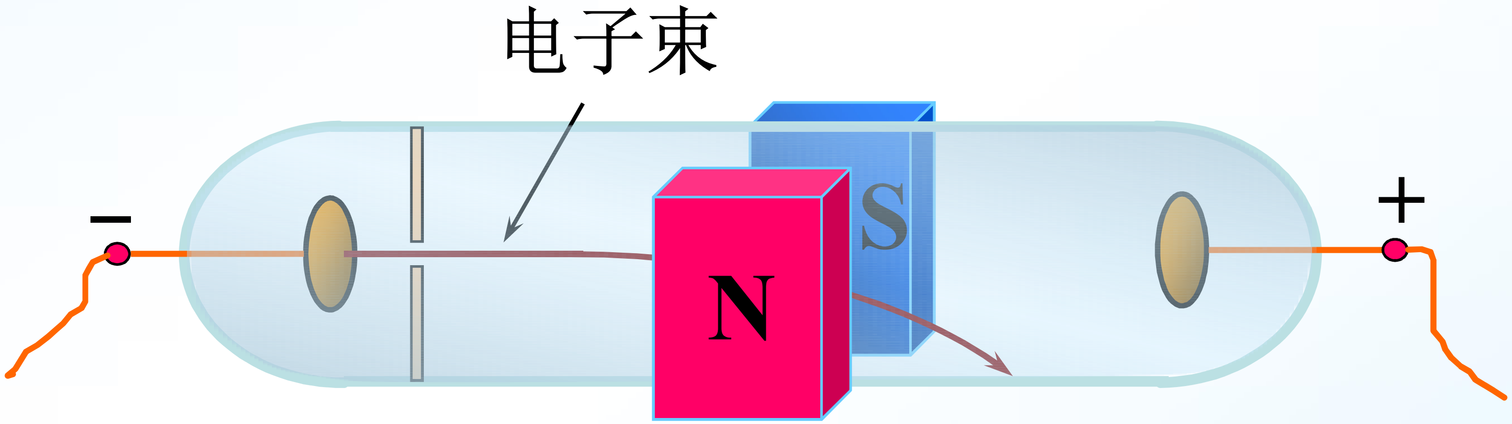
载流线圈的行为象一块磁铁

磁现象解释：近距作用观点

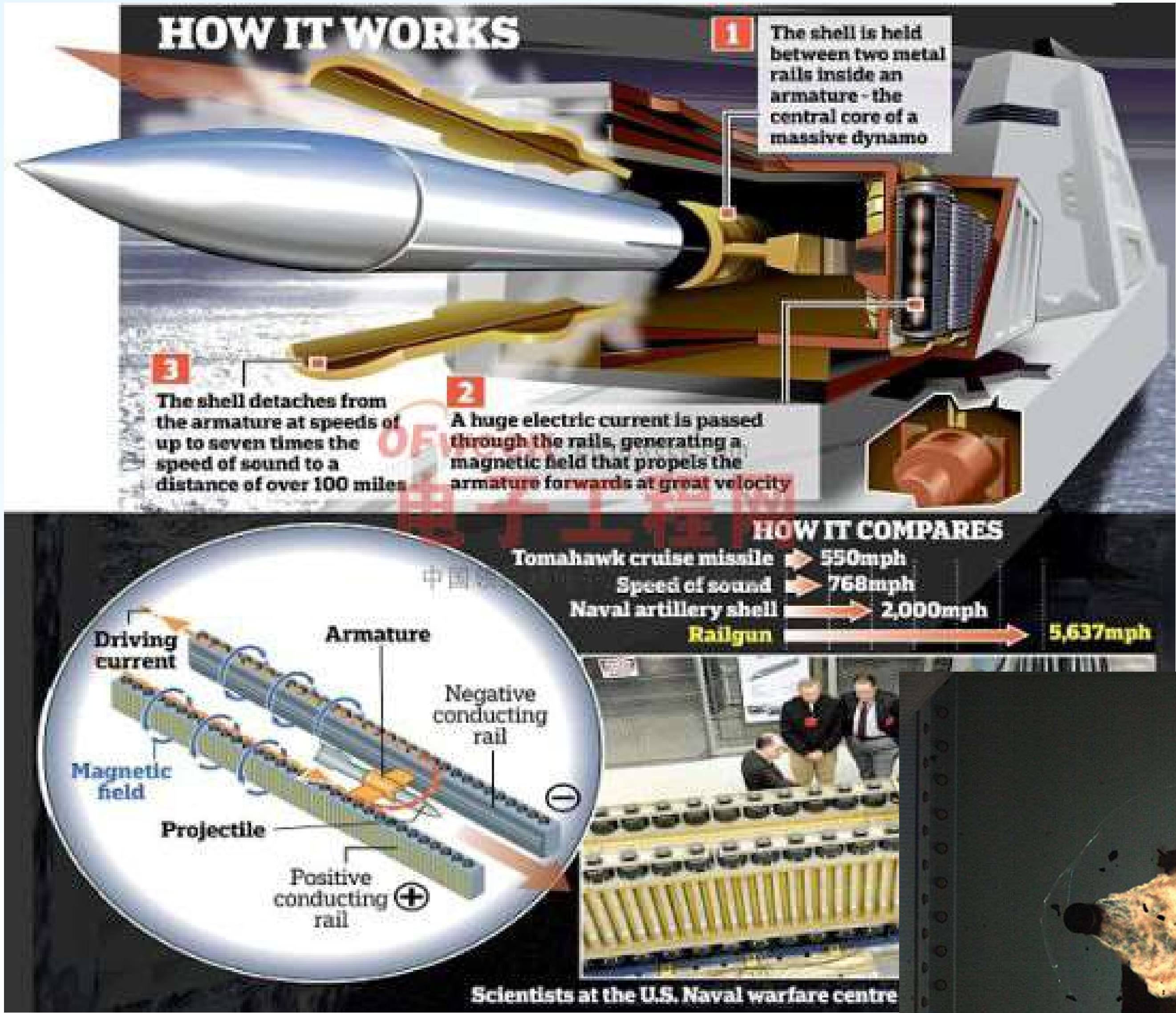
磁极 → 磁场 → 磁极

电流 ← 磁场 ← 电流

磁场对运动电荷的作用：



结论： 磁现象与电荷的运动有着密切的关系. 运动电荷既能产生磁效应, 也受到磁力的作用.



Naval Surface Warfare Center test firing railgun in January 2008

3.2kg，7 马赫，160km

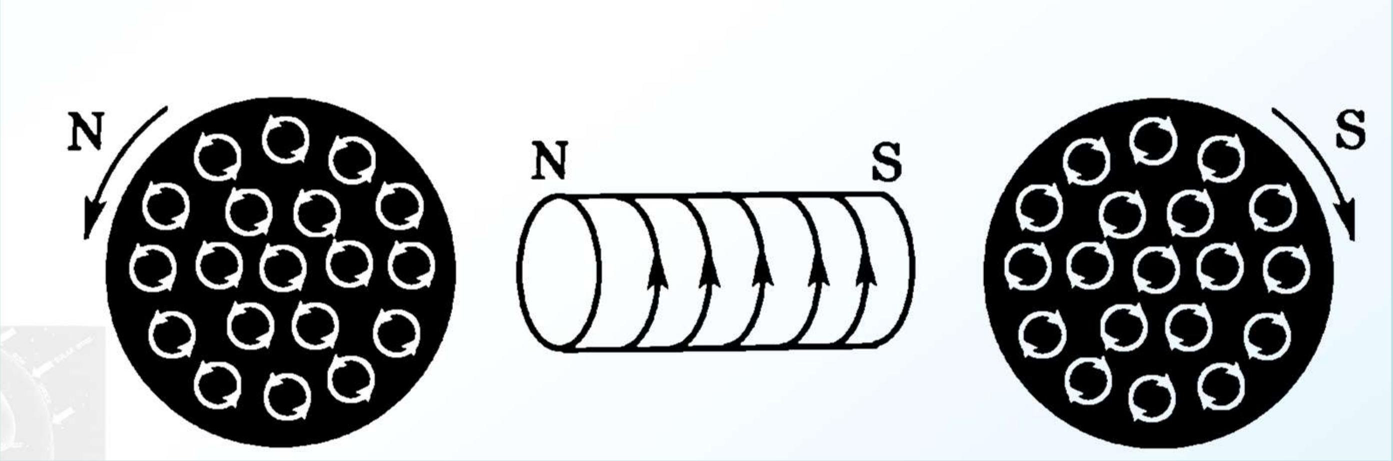
电磁轨道炮

NASA space elevator

3. 磁性起源于电荷的运动

安培分子电流(molecular current) 假说(1822年):

- 一切磁现象起源于电荷的运动
- 磁性物质的分子中存在着分子电流, 每个分子电流相当于一基元磁体.
- 物质的磁性取决于内部分子电流对外界磁效应(magnetic effect)的总和.
- 说明了磁极不能单独存在的原因.



二、磁场 磁感强度

1. 磁场(magnetic field)

运动电荷 ⇄ 磁场 ⇄ 运动电荷

磁场的对外表现：

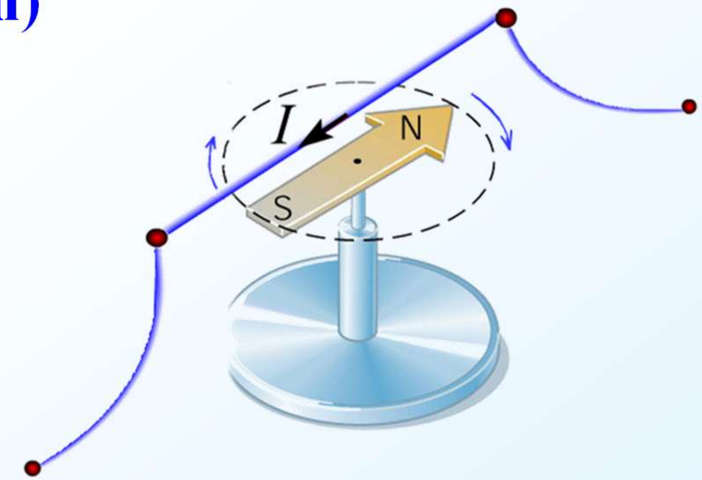
对磁场中的运动电荷和电流有作用力;

对在磁场中运动的载流导线作功.

2. 磁感应强度(magnetic induction)

定义之一：

$\vec{B}$ { 方向：小磁针N极指向
大小：单位磁极受力



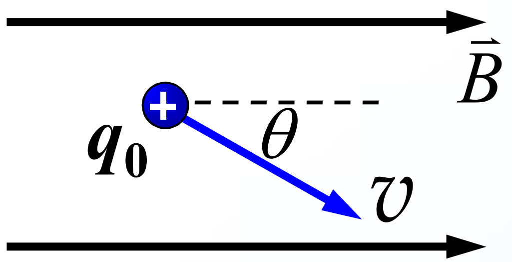
定义之二：正试验电荷q_0以速率v在场中沿不同方向运动受力.

实验结果: 1. $F \perp v$、B组成的平面

2. F大小正比于v、q_0、$\sin\theta$

3. q_0沿磁场方向运动, $F=0$

4. q_0垂直磁场方向运动, $F = F_{max}$



在垂直磁场方向改变速率v, 改变点电荷电量q_0

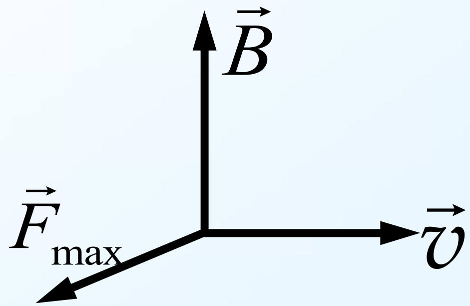
结论： 场中同一点, $F_{max}/(q_0 v)$有确定值;

场中不同点, $F_{max}/(q_0 v)$量值不同.

定义磁感强度 $\vec{B}$:

大小: $B = \dfrac{F_{max}}{q_0 v}$

方向: $\vec{F}_{max} \times \vec{v}$



单位: 特斯拉(T)

高斯(Gs)

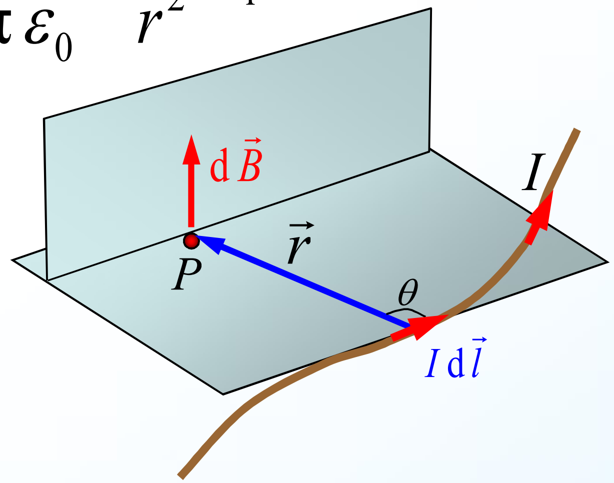
1T=10000Gs

§ 7-3 毕奥-萨伐尔定律

一、毕奥—萨伐尔定律(Biot-Savart law)

静电场：源(电荷) $\rightarrow \vec{E}$ $\quad \mathrm{d}\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_\mathrm{r}$

磁场：源(电流) $\rightarrow \vec{B}$



$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{e}_\mathrm{r}}{r^2}}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}\begin{cases}\text{大小：}\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2} \\ \text{方向：}I\mathrm{d}\vec{l} \xrightarrow{<\pi} \vec{r}\text{右旋前进方向}\end{cases}$$

真空中的磁导率(permeability):

$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$亨利·米$^{-1}$(H·m^{-1})

与点电荷电场公式比较：

相同之处： ❶ 都是元场源产生场的公式

❷ 场强都与 r^2 成反比

不同之处： ❶ 方向不同

二、毕奥—萨伐尔定律应用举例

恒定磁场的计算：

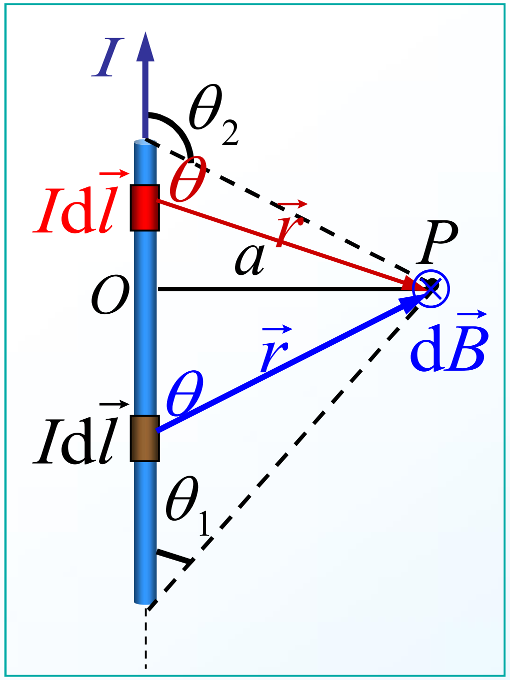
❶ 选取电流元或某些典型电流分布为积分元

❷ 由 毕-萨定律写出积分元的磁场 $\mathrm{d}\vec{B}$

❸ 建立坐标系，将$\mathrm{d}\vec{B}$分解为分量式，对每个分量积分(统一变量、确定上下积分限)

❹ 求出总磁感应强度大小、方向，对结果进行分析

例7-1. 一长度为L的载流直导线,电流强度为I, 导线两端到P点的连线与导线的夹角分别为θ_1和θ_2. 求距导线为a处P点的磁感应强度.



解: 在直电流上取电流元 $Id\vec{l}$

$$dB = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I dl \sin\theta}{4\pi r^2}$$ 方向 $\otimes$

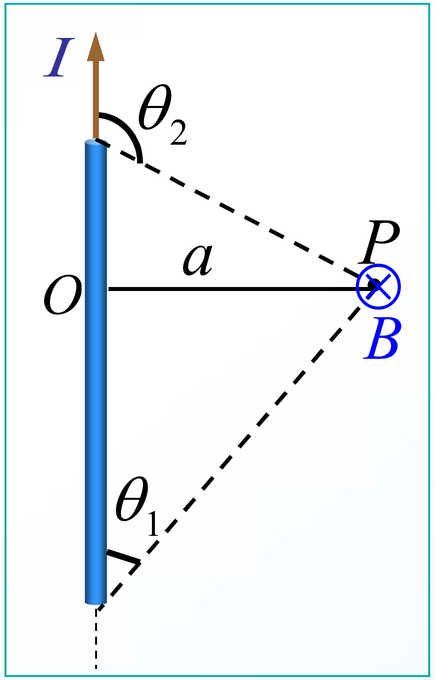
各电流元在P点$d\vec{B}$ 同向

$$B = \int dB = \int_L \frac{\mu_0 I dl \sin\theta}{4\pi r^2}$$

统一变量: $l = -a\,\mathrm{ctg}\,\theta$ $\quad dl = \dfrac{a\,d\theta}{\sin^2\theta}$ $\quad r = \dfrac{a}{\sin\theta}$

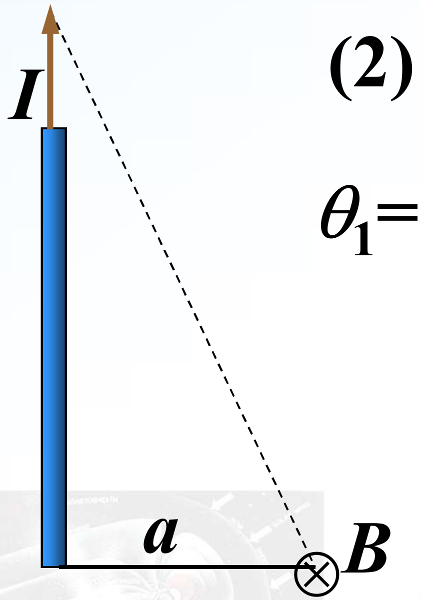
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$ 方向 $\otimes$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}$$



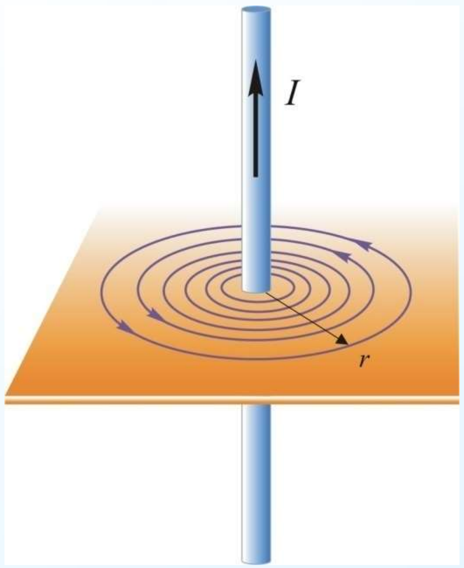
讨论: (1) “无限长” 载流导线

$\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ $\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$



(2) “半无限长” 载流导线

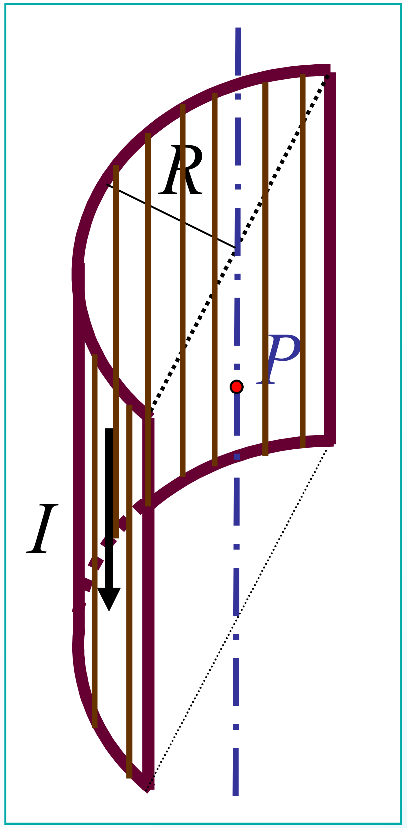
$\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = \pi$ $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$



(3) *P*点在导线的延长线上

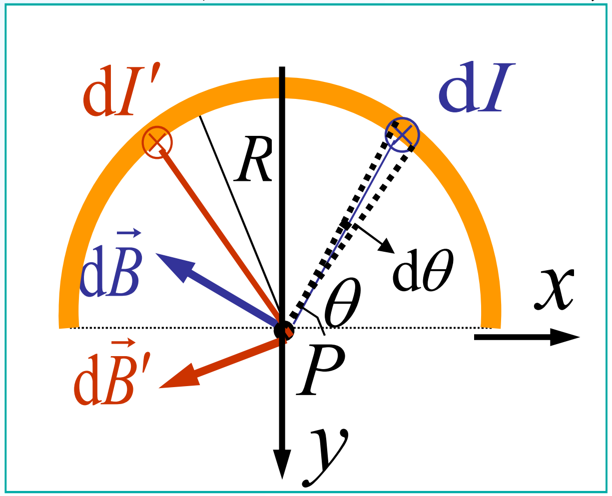
$$B = 0$$

练习： 半径R，无限长半圆柱金属面通电流 I，求轴线上 $\vec{B}$.



解： 通电半圆柱面 $\Rightarrow$

无限长直电流线集合



$$\mathrm{d}I=\frac{I}{\pi R}\cdot R\mathrm{d}\theta=\frac{I\mathrm{d}\theta}{\pi}$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}\theta}{2\pi^2 R}$$

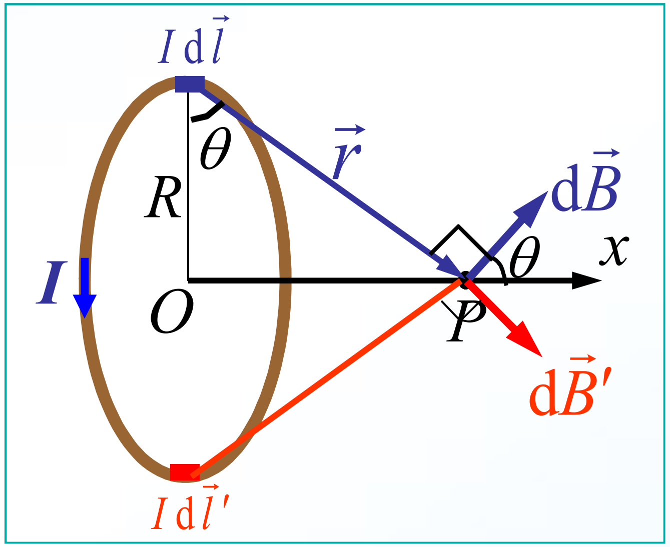
由对称性：$B_y=\int \mathrm{d}B_y=0$

$$B=B_x=\int \mathrm{d}B\sin\theta=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 I\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2\pi^2 R}=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

沿 $-x$ 方向

若是无限长完整通电圆柱面，轴线上 $\vec{B}$ 多大？

例7-2. 载流圆线圈半径为R, 电流强度为I. 求轴线上距圆心O为x处P点的磁感强度.

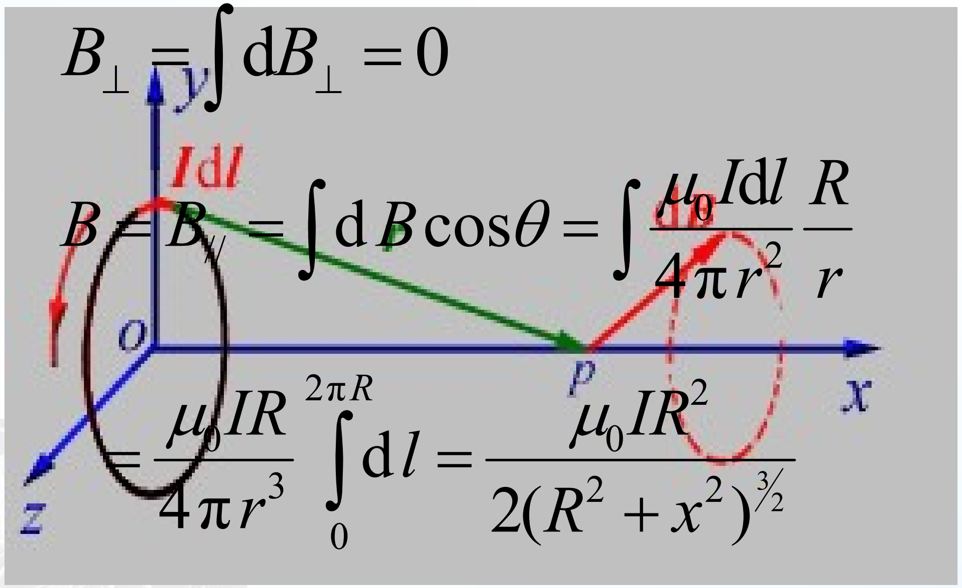


解: 在圆电流上取电流元 $Id\vec{l}$

$$dB=\frac{\mu_0 Idl\sin 90^\circ}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}$$

方向如图

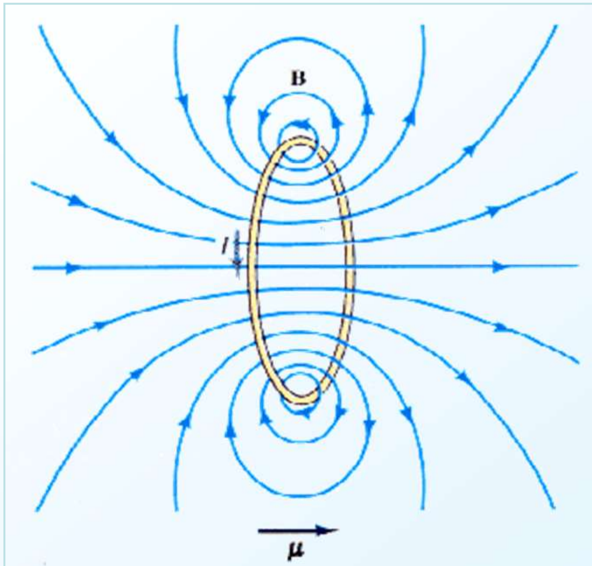
各电流元在P点$d\vec{B}$大小相等, 方向不同, 由对称性:



$$B_\perp=\int dB_\perp=0$$

$$B=B_{//}=\int dB\cos\theta=\int\frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}\frac{R}{r}$$

$$=\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R}dl=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$



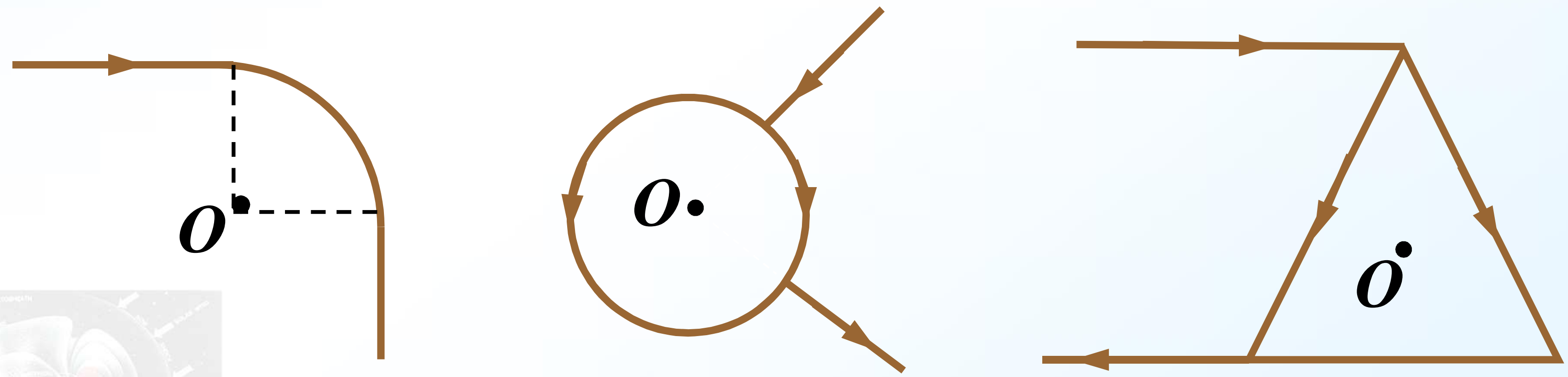
$$B=\int_0^{2\pi R}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\mathrm{d}l}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

1) 圆心处磁场

$$x=0 \qquad \boxed{B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}\ ;\quad N\text{匝}:\ B_0=\frac{N\mu_0 I}{2R}}$$

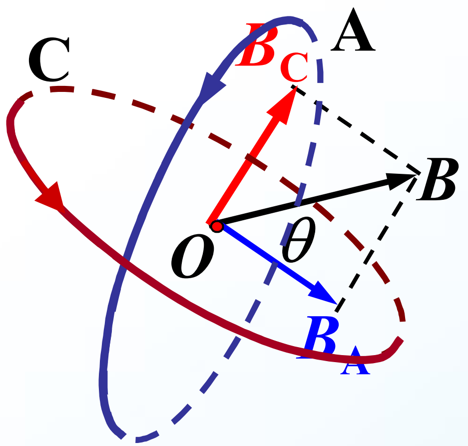
讨论：圆心的B (线圈平面)

整个圆线圈：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$　　部分圆线圈：$B=\dfrac{1}{n}\dfrac{\mu_0 I}{2R}$



自学：密绕螺线管

例7-3. A和C为两个正交放置的圆形线圈，其圆心相重合，A线圈半径为20.0cm，共10匝，通有电流10.0A；而C线圈的半径为10.0cm，共20匝，通有电流5.0A. 求两线圈公共中心*O*点的磁感应强度的大小和方向.



解：

$$B_A = \frac{\mu_0 N_A I_A}{2R_A} = \frac{\mu_0 \times 10 \times 10}{2 \times 0.20}$$

$$= 250\mu_0 \text{（方向垂直A面）}$$

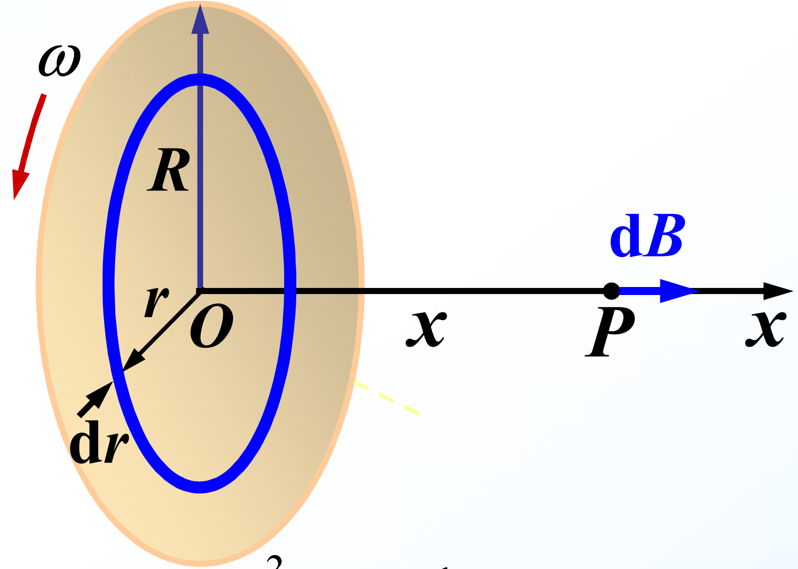
$$B_C = \frac{\mu_0 N_C I_C}{2R_C} = \frac{\mu_0 \times 20 \times 5}{2 \times 0.10}$$

$$= 500\mu_0 \text{（方向垂直C面）}$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ (\mathrm{H \cdot m^{-1}})$

$$\therefore\ B = \sqrt{B_A^2 + B_C^2} = 7.02 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}$$ 方向：$\theta = \tan^{-1}\dfrac{B_C}{B_A} = 63.4^\circ$

例7-4. 半径为R的圆盘均匀带电, 电荷面密度为σ. 若该圆盘以角速度ω绕圆心O旋转, 求轴线上距圆心x处的磁感应强度.



解: $$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 r^2\mathrm{d}I}{2(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}I=\mathrm{d}q/T=\frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q$$

$$\mathrm{d}q=\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r$$

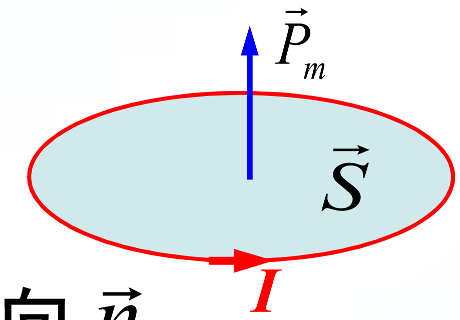
$$\mathrm{d}I=\omega\sigma r\mathrm{d}r$$

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_0^R\frac{\mu_0 r^3\omega\sigma\,\mathrm{d}r}{2(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\left(\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{R^2+x^2}}-2x\right)$$

方向沿x轴

2) 定义电流的磁矩(magnetic moment)

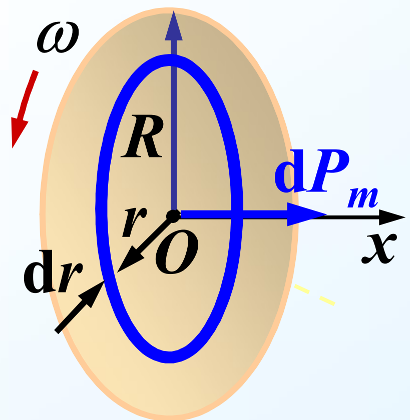


$$\boxed{\vec{P}_m = IS\vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

S*:** 电流所包围的面积, 规定正法线方向 $\vec{n}$ 与 ***I 指向成右旋关系；单位：安培·米²(A·m²)

圆电流磁矩：$\vec{P}_m = I\pi R^2\vec{n}$　　轴线上磁场：$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 \vec{P}_m}{2\pi(R^2+x^2)^{3/2}}$

练习. 由例7-4求转盘的磁矩.



解：

$$\mathrm{d}P_m = S\,\mathrm{d}I = \pi r^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

$$P_m = \int_0^R \pi r^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

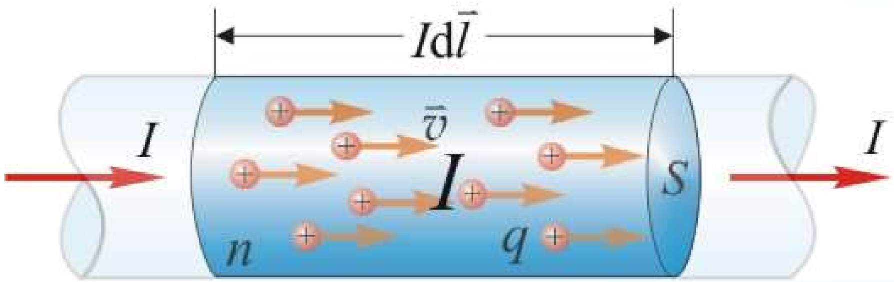
$$= \frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4$$　方向: 沿 x 轴

三、匀速运动电荷的磁场

电流的磁场本质是匀速运动电荷磁场

从毕萨定律导出匀速运动电荷的磁场

S：电流元横截面积
n：单位体积带电粒子数
q：每个粒子带电量
v：沿电流方向匀速运动

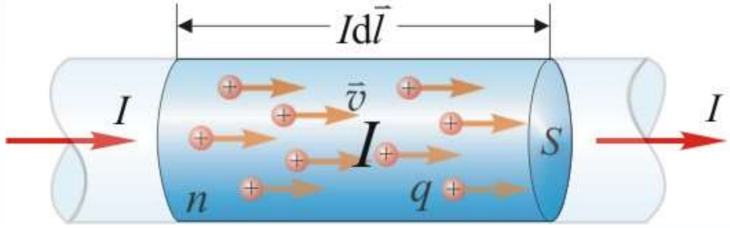


电流元 $Id\vec{l}$ 产生的磁场：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

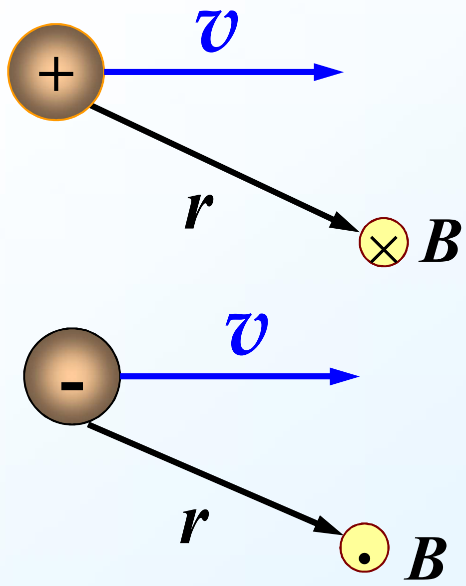
电流是单位时间通过S的电量：

$$I = nqvS$$



$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0\, nq\mathrm{d}lS\, \vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

电流元体积中粒子数：$\mathrm{d}N = nS\mathrm{d}l$



每个运动电荷产生的磁感强度：

$$\vec{B} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}N} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$