线性空间与线性变换——线性空间

知识点巩固练习

1. 线性空间 V 的非空子集 L 构成 V 的子空间$\Leftrightarrow$ L对于V中的线性运算封闭.
2. 线性空间 V 的维数 n 是指 V中的一个基中所包含的向量个数.
3. 设线性空间 V_n 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 中的坐标为 x，在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 中的坐标为 y，若 $(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$，则有坐标变换公式 $y = xP$.

练习题

1. 验证所给矩阵集合对于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间，并写出各个空间的一个基.

   (1) 2 阶矩阵的全体 S_1；

   (2) 主对角线上的元素之和等于 0 的 2 阶矩阵的全体 S_2；

   (3) 2 阶对称矩阵的全体 S_3.

(1) 设 A.B 均为二阶矩阵

$\therefore (A+B) \in S_1$

$kA \in S_1$

$\therefore$ S_1 均成线性空间

一个基为 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

易知：当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ 时. $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0$

任给 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. 有 $A = a_{11} \cdot a_1 + a_{12} \cdot a_2 + a_{21} \cdot a_3 + a_{22} a_4$

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} -d & e \\ f & d \end{pmatrix}$ $A.B \in S_2$

$\therefore A+B = \begin{pmatrix} -(a+d) & e+b \\ c+f & a+d \end{pmatrix} \in S_2$

$kA \in S_2$

取基为 $\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) 设 $A.B \in S_2$

$A^T = A$

$B^T = B$

$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B \in S_2$

$(kA)^T = kA^T = kA \in S_2$

一个基为 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. 在$\mathbb{R}^4$中取基 $e_1=(1,0,0,0)^T$, $e_2=(0,1,0,0)^T$, $e_3=(0,0,1,0$

(1) 验证 $\alpha_1=(2,1,-1,1)^T$, $\alpha_2=(0,3,1,0)^T$, $\alpha_3=(5,3,2,1)^T$, $\alpha_4=(6,6,1,$

组基；

(2) 求由 e_1, e_2, e_3, e_4 到 α_1, α_2, α_3, α_4 的过渡矩阵；

(3) 求向量$(1,3,-1,2)^T$ 在基 α_1, α_2, α_3, α_4 下的坐标.

(1) 证明: ~~R~~

$$\alpha=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore R(\alpha)=4$

$\therefore$ 线性无关

$\alpha_1=2e_1+e_2-e_3+e_4$

同理：$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均可用 e_1,e_2,e_3,e_4 表示

$\therefore$ 也是一组基

(2) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)P$

$\therefore P=(e_1,e_2,e_3,e_4)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

$$\therefore P=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$$

(3) 在基 e_1,e_2,e_3,e_4 下的坐标为 $(1,3,-1,2)^T$

$\therefore (x_1',x_2',x_3',x_4')=(x_1,x_2,x_3,x_4)P$

$\therefore (x_1',x_2',x_3',x_4')=(0,0,-1,1)^T$

3. 验证 $\alpha_1=(1,2,1)^T$，$\alpha_2=(2,3,3)^T$，$\alpha_3=(3,7,10)^T$ 与 $\beta_1=(3,1,4)^T$，$\beta_2=(5,2,1)^T$，$\beta_3=(1,1,-6)^T$ 都可作为 $\mathbb{R}^3$ 的基，并求出 α_1，α_2，α_3 到 β_1，β_2，β_3 的过渡矩阵.

证明：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$$

$$\therefore P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)'(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$\therefore P=\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2} & 4 \\ \frac{9}{2} & \frac{13}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

思考题

任何 n 维线性空间均与 $\mathbb{R}^n$ 同构，为什么？

~~由于~~ 任何n维线性空间与 R^n 的维数均为n

由两个有限维线性空间同构的充要条件是它们有相同的维数

∴任何n维线性空间均为 R^n 同构

专业班级＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿

线性空间与线性变换——线性变换及其矩阵表示

知识点巩固练习

1. 若 T 是线性空间 V_n 到其自身的映射，且满足 任给 $\alpha_1,\alpha_2\in V_n$ 有 $T(\alpha_1+\alpha_2)=T(\alpha_1)+T(\alpha_2)$ 和 任意给 $\alpha\in V_n,\lambda\in R$ $T(\lambda\alpha)=\lambda T(\alpha)$，则称 T 为 V_n 中的线性变换.

2. 设线性空间 V_n 中有两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，且 $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$，设 V_n 中的线性变换 T 在两组基下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $B=P^{-1}AP$.

练习题

1. 设 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 为所有 2 阶实方阵关于矩阵的加法和数乘构成的实线性空间，在 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 上定义变换 T 如下：对任意 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times2}$，$T(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix}$，

(1) 证明：T 是 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 上的一个线性变换；

(2) 求 T 在 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 下的矩阵表示.

(1) 证明：$T(A+B)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(A+B)\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}=T(A)+T(B)$

$T(\lambda A)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\lambda A\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}=\lambda T(A)$

∴ $T(A)$ 为线性变换

(2) $T(E_{11})=E_{11}+0E_{12}+E_{21}+0E_{22}$

同理：得：矩阵表示为 $\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&2&0&0\\1&3&1&3\\0&2&0&2\end{pmatrix}$

2. 定义R^n中的映射，$T(x)=Ax,(x\in R^n)$，这里$A=(a_{ij})_n$为给定的n阶方阵，且$R(A)=r$

(1) 证明，T是R^n中的线性变换；

(2) 分别求T的像空间与核空间的维数。

(1) $T(x_1+x_2)=A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=T(x_1)+T(x_2)$

$T(\lambda x_1)=A(\lambda x_1)=\lambda Ax_1=\lambda T(x_1)$

$\therefore$ T为线性变换

(2) $\because T(x)=Ax$

$\therefore$ 像空间的维数与A的秩相等为r

$\therefore$ 核空间的维数为$n-1$

思考题

由上一题，你可否看出线性空间V_n中的线性变换T的像空间与核空间的维数之间有何关系？

线性空间V_n中的线性变换T的像空间与核空间的维数之和等于n

线性空间与线性变换——测验卷

1. 以 $sl(2,\mathbb{R})$ 记主对角线上元素之和等于零的 2 阶实矩阵全体所成的集合.

（1）试验证该集合对于矩阵的加法和数乘运算构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

（2）验证 $A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 为该空间的一组基，并写出 $M=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ 在这组基下的坐标.

（3）试再写出该空间的一组基，并求出由这组基到 A_1，A_2，A_3 的过渡矩阵.

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}d & e\\ f & -d\end{pmatrix}$ $\in sl(2,R)$

$\therefore A+B=\begin{pmatrix}a+d & b+e\\ c+f & -(a+d)\end{pmatrix}\in sl(2,R)$

$\lambda A=\lambda\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\in sl(2,R)$

∴ 构成线性空间

(2) 易知：A_1, A_2, A_3 线性无关

任取 $B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & -a_{11}\end{pmatrix}\Rightarrow B=-a_{11}A_1+a_{12}A_2+a_{21}A_3$

∴ 为一组基

坐标为 $(2,3,-1)^T$

(3) $B_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. $B_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$B_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

2. 函数集合 $V_3=\{(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x \mid a_0, a_1, a_2\in\mathbb{R}\}$ 对于函数的线性运算构成 3 维实线性空间. 证明：求导算子 D：$f\to f'$ 为 V_3 上的线性变换，并给出 D 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=x^2e^x$，$\boldsymbol{\alpha}_2=xe^x$，$\boldsymbol{\alpha}_3=e^x$ 下的矩阵.

$P(x)=(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x$

$q(x)=(a_5x^2+a_4x+a_3)e^x$

$D(P)=(a_2x^2+(a_1+2a_2)x+a_1+a_0)e^x$

$\therefore D(P+q)=D(P)+D(q)$

$D(\lambda P)=\lambda D(P)$

$D(x^2e^x)=x^2e^x+2xe^x=\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3$

同理：矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\t\end{pmatrix}$，由它们生成的向量空间为 V，$\mathbb{R}^3$ 为所有 3 维向量所成线性空间. 问：

(1) t 为何值时，$V\subset\mathbb{R}^3$，$V\neq\mathbb{R}^3$，为什么？

(2) t 为何值时，$V=\mathbb{R}^3$，为什么？

(1) $V=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&-1&3\\3&2&t\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&2\\2&-1&3\\0&0&t-5\end{pmatrix}$

$\therefore t=5 \quad R=2. \Rightarrow V\neq R^3$

(2) $t\neq5$. $R=3\Rightarrow V=R^3$

4. 设 A 为已知的 $m\times n$ 矩阵，集合 $V=\{\boldsymbol{X}\mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}，\boldsymbol{X}$ 为 n 阶方阵$\}$，

(1) 验证 V 对通常矩阵的加法和数乘构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间；

(2) 当 $A=(0, 1)$ 时，求线性空间 $V=\{\boldsymbol{X}\mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}，\boldsymbol{X}$ 为 2 阶方阵$\}$的一组基.

$AX_1=0 \qquad AX_1=0$

$AX_2=0 \qquad A(\lambda X_1)=\lambda AX_1=0$

$A(X_1+X_2)=0$

$\therefore$ 符合

(2) 一组基为 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

5. 设 V 是由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix}$ 所生成的向量空间，求 V 的维数与一组基.

$V=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(V)=3$

$\therefore$ 维数为 3. 可取 α_1. α_2. α_4 为基.

6. 记 2 阶实对称矩阵的全体为 S.

(1) 证明：S 对矩阵的线性运算构成 3 维实线性空间.

(2) 证明：合同变换 $T(A)=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 是 S 上的线性变换.

(3) 取 S 的一组基 $A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$, 求 T 在基 A_1、A_2、A_3 下的矩阵.

(1) 证明：一组基为 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

∴维数为3

(2) $T(A+B)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(A+B)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=T(A)+T(B)$

$T(\lambda A)=\lambda T(A)$

∴是线性变换

(3) $T(A_1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=A_1+A_2+A_3$

同理：矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$

7. 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为所有 n 阶实方阵关于矩阵加法和数乘构成的实线性空间，定义 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的变换 T 如下：对任意 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$T(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\frac{1}{n}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$，

(1) 证明：T 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的一个线性变换；

(2) 设 $n=2$，求 T 在的基 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 下的矩阵.

(1) $T(A+B)=A+B-\frac{1}{n}tr(A+B)E$

$=A-\frac{1}{n}tr(A)E+B-\frac{1}{n}tr(B)E$

$=T(A)+T(B)$

$T(\lambda A)=\lambda A-\frac{1}{n}tr(\lambda A)E$

$=\lambda(A-\frac{1}{n}tr(A)E)=\lambda T(A)$

∴是线性变换

(2) $T(E_{11})=\cancel{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}E_{11}\cancel{+}-\frac{1}{2}E_{22}$

∴同理：矩阵为 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

>>> 附加题

8. 定义映射 T：$\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ 为，$T(A)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}A$.

(1) 证明：T 为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换.

(2) 求在基 $E_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$E_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$E_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$E_4=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 下的矩阵.

(3) 已知 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的元素 A 在基 E_1、E_2、E_3、E_4 下的坐标为 $(1, 2, 3, 4)^T$，求 $T(A)$.

(4) 是否存在一组基，使得 T 在这组基下的矩阵为对角阵？如存在，求出这组基和相应的对角阵.

(1) 证明：$T(A+B)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}(A+B)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}A+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}B=T(A)+T(B)$

$T(\lambda A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\lambda A=\lambda\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}A=\lambda T(A)$

∴ 线性变换

(2) $T(E_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

同理：矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(3) $\therefore A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$

$\therefore T(A)=\begin{pmatrix}17 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(4) 记基为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$

∴ 令 $T(\varepsilon_1)=a\varepsilon_1$

$T(\varepsilon_2)=b\varepsilon_2$

$T(\varepsilon_3)=c\varepsilon_3$

$T(\varepsilon_4)=d\varepsilon_4$

记 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$

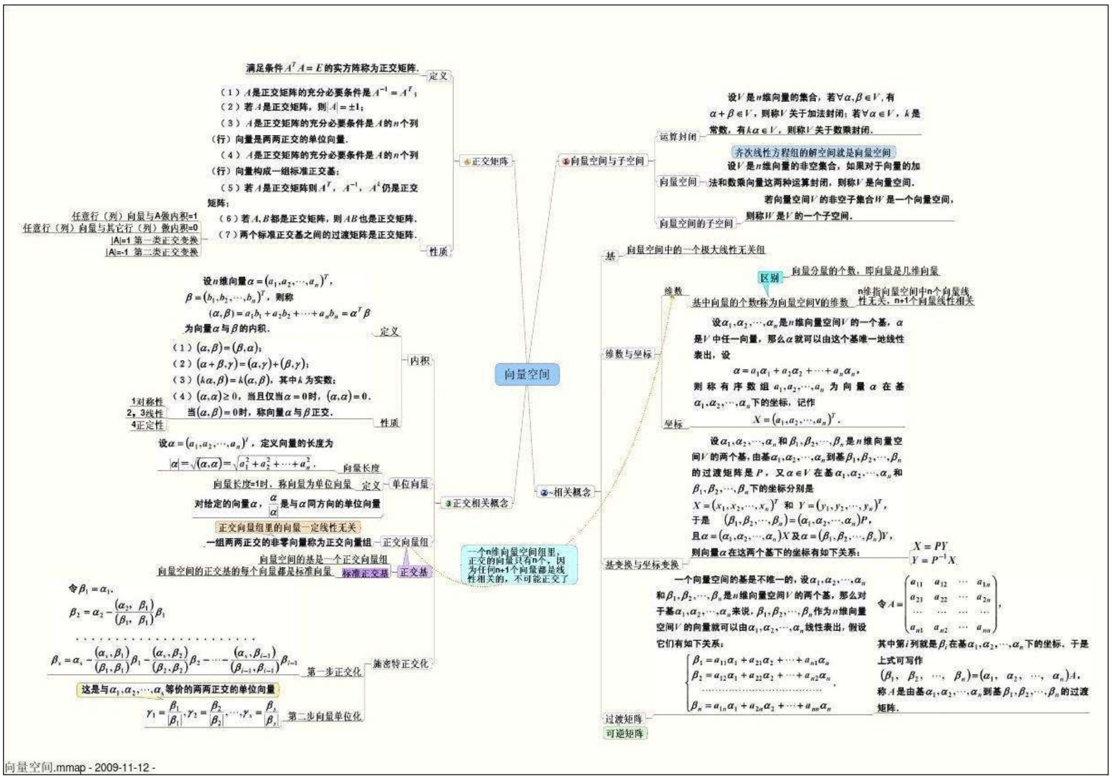
$T(\varepsilon_1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_3 & x_2+2x_4\\ 0 & 0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$

$\therefore a\neq 0$ 且 $x_3=x_4=0$ 或 $a=0$ 且 $x_1=-2x_3$，$x_2=-2x_4$

同理：基为 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_3=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$\varepsilon_4=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

∴ 对角阵为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$



向量空间
①向量空间与子空间
运算封闭
设V是n维向量的集合，若$\forall \alpha,\beta \in V$，有$\alpha+\beta \in V$，则称$V$关于加法封闭；若$\forall \alpha \in V$，$k$是常数，有$k\alpha \in V$，则称$V$关于数乘封闭.
齐次线性方程组的解空间就是向量空间
向量空间
设V是n维向量的非空集合，如果对于向量的加法和数乘向量这两种运算封闭，则称V是向量空间.
向量空间的子空间
若向量空间V的非空子集合W是一个向量空间，则称W是V的一个子空间.
②~相关概念
基
向量空间中的一个极大线性无关组
维数与坐标
维数
区别
向量分量的个数，即向量是几维向量
基中向量的个数r称为向量空间V的维数
n维指向量空间中n个向量线性无关，n+1个向量线性相关
坐标
设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$维向量空间$V$的一个基，$\alpha$是$V$中任一向量，那么$\alpha$就可以由这个基唯一地线性表出，设
$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$，
则称有序数组$a_1,a_2,\cdots,a_n$为向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标，记作
$X=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$.
基变换与坐标变换
设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是$n$维向量空间$V$的两个基，由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵是$P$，又$\alpha \in V$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标分别是
$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 和 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，
于是 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$，
且$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)X$及$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)Y$，
则向量α在这两个基下的坐标有如下关系：
$X=PY$
$Y=P^{-1}X$
过渡矩阵
一个向量空间的基是不唯一的，设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是$n$维向量空间$V$的两个基，那么对于基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$来说，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$作为$n$维向量空间$V$的向量就可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出，假设它们有如下关系：
$\begin{cases}\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n\\ \beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_n\\ \cdots\cdots\\ \beta_n=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n\end{cases}$，
令$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，
其中第i列就是β_i在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标，于是上式可写作
$(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)A$，
称A是由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵.
可逆矩阵
③正交相关概念
内积
定义
设n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则称
$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta$
为向量α与β的内积.
性质
（1）$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；
（2）$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$；
（3）$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$，其中$k$为实数；
（4）$(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当$\alpha=0$时，$(\alpha,\alpha)=0$.
当$(\alpha,\beta)=0$时，称向量α与β正交.
1对称性
2，3线性
4正定性
单位向量
向量长度
设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，定义向量的长度为
$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$.
定义
向量长度=1时，称向量为单位向量
对给定的向量α，$\frac{\alpha}{|\alpha|}$是与α同方向的单位向量
正交向量组
正交向量组里的向量一定线性无关
一组两两正交的非零向量称为正交向量组
正交基
向量空间的基是一个正交向量组
标准正交基
向量空间的正交基的每个向量都是标准向量
一个n维向量空间组里，正交的向量只有n个，因为任何n+1个向量都是线性相关的，不可能正交了
施密特正交化
第一步正交化
令$\beta_1=\alpha_1$，
$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1$
$\cdots\cdots$
$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{i-1})}{(\beta_{i-1},\beta_{i-1})}\beta_{i-1}$
第二步向量单位化
$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|},\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|},\cdots,\gamma_s=\frac{\beta_s}{|\beta_s|}$
这是与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价的两两正交的单位向量
④正交矩阵
定义
满足条件$A^TA=E$的实方阵称为正交矩阵.
性质
（1）A是正交矩阵的充分必要条件是$A^{-1}=A^T$；
（2）若A是正交矩阵，则$|A|=\pm 1$；
（3）A是正交矩阵的充分必要条件是A的n个列（行）向量是两两正交的单位向量.
（4）A是正交矩阵的充分必要条件是A的n个列（行）向量构成一组标准正交基；
（5）若A是正交矩阵则A^T，A^{-1}，A^k仍是正交矩阵；
（6）若A,B都是正交矩阵，则AB也是正交矩阵.
（7）两个标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵.
任意行（列）向量与A做内积=1
任意行（列）向量与其它行（列）做内积=0
|A|=1 第一类正交变换
|A|=-1 第二类正交变换
向量空间.mmap - 2009-11-12 -