矩阵的初等变换与线性方程组——线性方程组的求解

知识点巩固练习

1. n 元线性方程组 $Ax=b$ 无解⇔ $R(A) < R(A,b)$；
   有解⇔ $R(A) = R(A,b)$；
   有唯一解⇔ $R(A) = R(A,b) = n$；
   有无穷多解⇔ $R(A) = R(A,b) < n$.
2. n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解⇔ $R(A)=0$；
   有非零解⇔ $R(A)<n$.

练习题

1. 求解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0, \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0; \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1+2x_2-x_4=0 \\ -4x_3=0 \end{cases}$$

取 x_2, x_4 为自由未知数

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2 \in R)$$

(2) $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2, \\ 3x_1-x_2+2x_3=10, \\ 11x_1+3x_2=8. \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} & \frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 无解.

2. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b, \end{cases}$

（1）确定参数 a，b 的值，使得方程组无解；

（2）确定参数 a，b 的值，使得方程组有无穷多解，并求出其通解.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$\therefore b-2 \neq 0$ 或 $a \neq 0$

$\therefore b \neq 2$ 或 $a \neq 0$

(2) $b=2$, $a=0$

$\therefore x_1 = x_3+x_4+5x_5-2$

$x_2 = 3-2x_3-2x_4-6x_5$

$\therefore$ 通解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

矩阵的初等变换与线性方程组——测验卷

1. 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有__C__.

   A. $AP_1P_2=B$　　B. $AP_2P_1=B$　　C. $P_1P_2A=B$　　D. $P_2P_1A=B$

2. 设A为n阶方阵，α为n维列向量，若$R(A)=R\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$，则__D__.

   A. $Ax=\alpha$必有无穷多解　　B. $Ax=\alpha$必有唯一解

   C. $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$只有零解　　D. $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$必有非零解

3. 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，则__B__.

   A. $m>n$时，必有$|AB|\neq 0$　　B. $m>n$时，必有$|AB|=0$

   C. $n>m$时，必有$|AB|\neq 0$　　D. $n>m$时，必有$|AB|=0$

4. 设A，B为4阶方阵，$R(A)=4$，$R(B)=3$，则$R(AB)=$__3__.

5. 判断正误：若A可逆，则A一定可以表示成一些初等阵的乘积，此命题__正确__.

6. 设A为n阶方阵，且满足$A^2-2A-3E=O$，证明：$R(A+E)+R(A-3E)=n$.

证明：

$R(A+E+(3E-A))=R(4E)=n$

$\therefore R((A+E)+(3E-A))=n\leq R(A+E)+R[(A-3E)^T]=R(A+E)+R(A-3E)$

$(A+E)(A-3E)=A^2-2A-3E=0$

$\therefore R(A+E)+R(A-3E)\leq n$

$\therefore R(A+E)+R(A-3E)=n$

7. 求解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0, \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0; \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

∴ 解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ x-2y+4z=-5, \\ 3x+8y-2z=13, \\ 4x-y+9z=-6. \end{cases}$

曰

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∴ 设 z 为自由未知数

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (C \in R)$$

8. 设 $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 3 & -4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}$，求 X 使得 $XA=B$.

$(XA)^T = B^T$

$\therefore A^T X^T = B^T$

$$(A^T, B^T) = \begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -4 & 3 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\therefore X^T = \begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 7\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -4 & 7 & 4\end{pmatrix}$$

9. 当 λ 为何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1,\end{cases}$$

(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解，并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{pmatrix}2-\lambda & 2 & -2 & 1\\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda\\ 0 & 0 & \frac{(\lambda-10)(\lambda-1)}{2} & \frac{(\lambda-4)(\lambda-1)}{2}\end{pmatrix}$$

$\therefore$ (1) $\lambda \neq 10$ 且 $\lambda \neq 1$

(2) $\lambda = 10$

(3) $\lambda = 1$，通解 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，$(C_1, C_2 \in R)$

10. 已知$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$有无穷多个解，求 a 的值.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 2(a+2) \end{pmatrix}$$

$\therefore\ a=-2$

11. 已知 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 中第 3 行的 -2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{A}_1$，将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列与第 1 列互换得到 $\boldsymbol{B}_1$，若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_1=\cancel{AP}\ PA$

$B_1=BQ$

$\therefore A_1B_1=PABQ$

$\therefore P^{-1}A_1B_1Q^{-1}=AB$

$\therefore AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

附加题

12. 证明若存在非零列向量 α 及非零行向量 β^T，使 $A=\alpha\beta^T$，则 $R(A)=1$，反之是否成立？并给出理由.

成立

$\because A=\alpha\beta^T$

$\therefore R(A)\geq 1$

又 $\because R(\alpha)=1$

$R(\beta^T)=1$

$\therefore R(\alpha\beta^T)\leq 1$

$\therefore R(A)=1$

反之：$R(A)=1$

$\therefore A=P\begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(1\ 0\ \cdots\ 0)Q$

$\alpha=P\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$\beta^T=(1\ 0\ \cdots\ 0)Q$

$\therefore A=\alpha\beta^T$

13. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明：矩阵方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m$.

必：$R(A)=R(A,E_m)$

$m=R(E_m)\leq R(A,E_m)\leq m$

$\therefore R(A)=m$

14. 设 A，B 都是 n 阶方阵，且 $R(A)+R(B)<n$，证明：齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 有非零公共解

$\because \begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I\\ I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$

$\therefore R\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}\leq R\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=R(A)+R(B)<n$

$\therefore \begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}x=0$ 有非零解

$\therefore$ 成立

15. 设 $A_{m\times n}$，$B_{n\times m}$，$m>n$ 时，试证 $ABx=0$ 必有非零解.

$m>n$

$\therefore R(A_{m\times n})\leq n$

$R(B_{n\times m})\leq n$

$\therefore R(A_{m\times n}B_{n\times m})\leq n$

又 $\because A_{m\times n}B_{n\times m}$ 为 m 阶方阵

$R(A_{m\times n}B_{n\times m})\leq n<m$

$\therefore$ 必有非零解

16. 写出一个以 $x=c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\4\\0\\1\end{pmatrix}$，$c_1$，$c_2\in\mathbb{R}$ 为通解的齐次线性方程组.

$x_1=2x_3-2x_4$

$x_2=-3x_3+4x_4$

$\therefore\begin{cases}x_1-2x_3+2x_4=0\\x_2+3x_3-4x_4=0\end{cases}$

17. 设 A 为 n 阶矩阵($n\geqslant 2$)，A^* 为 A 的伴随阵，证明：$R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n,\\1, & R(A)=n-1,\\0, & R(A)\leqslant n-2.\end{cases}$

证明：1° $R(A)=n\Rightarrow|A|\neq0$

$|A|\cdot|A^*|=|A|^n$

$\therefore|A^*|=|A|^{n-1}\neq0$

$\therefore R(A^*)=n$

2° $R(A)=n-1$

$\therefore|A|=0$

$R(A\cdot A^*)=R(|A|E)=0$

$\therefore R(A)+R(A^*)\leq n$

$R(A)=n-1$

$\therefore R(A^*)\leq1$

$\because R(A^*)\geq1$

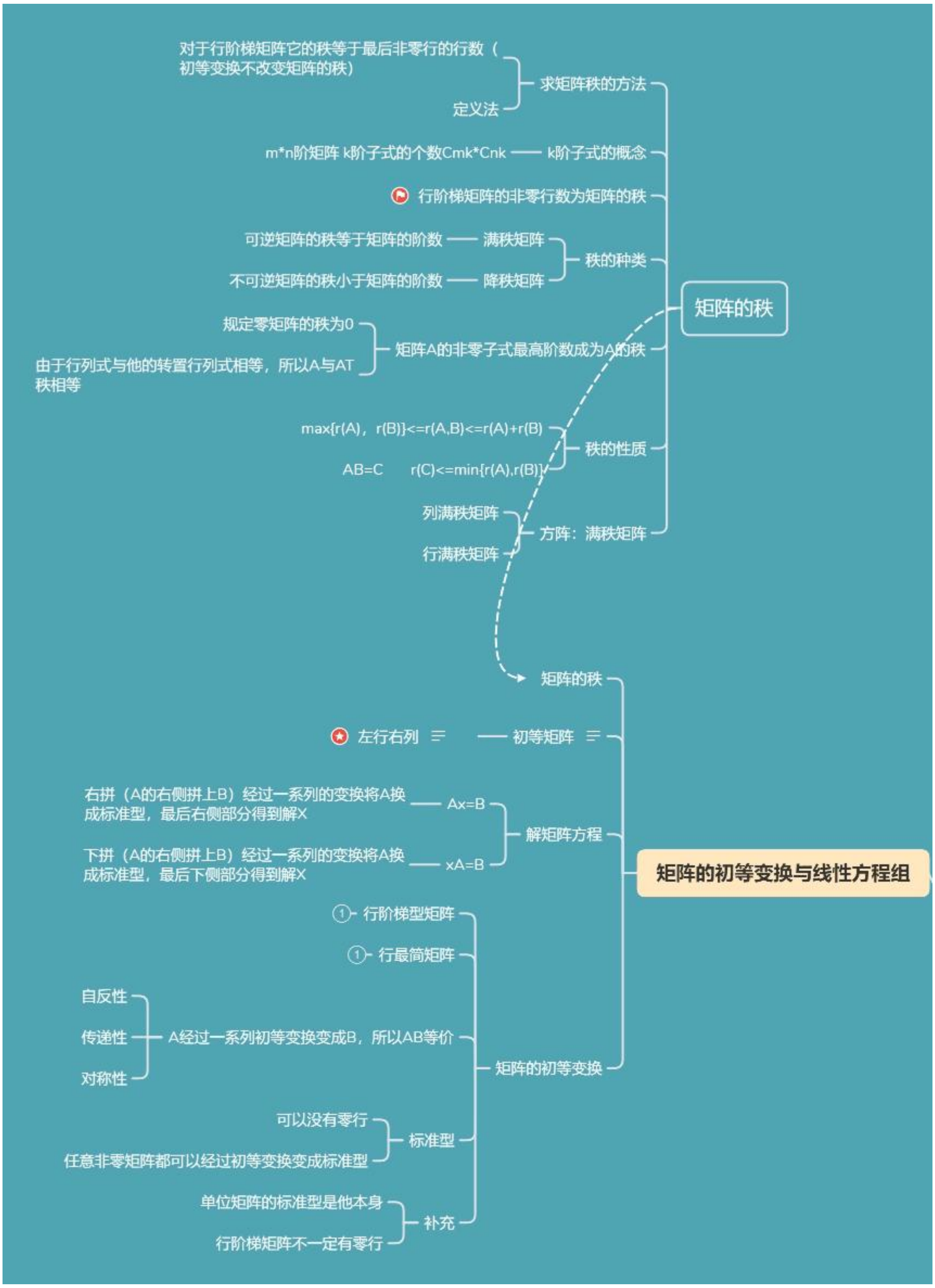
$\therefore R(A^*)=1$

3° $R(A)\leq n-2$

$\therefore A$ 的 $(n-1)$ 阶子式均为零

$\therefore A^*=0$

$\therefore R(A^*)=0$


矩阵的秩
求矩阵秩的方法
对于行阶梯矩阵它的秩等于最后非零行的行数（初等变换不改变矩阵的秩）
定义法
k阶子式的概念
m*n阶矩阵 k阶子式的个数Cmk*Cnk
行阶梯矩阵的非零行数为矩阵的秩
秩的种类
满秩矩阵
可逆矩阵的秩等于矩阵的阶数
降秩矩阵
不可逆矩阵的秩小于矩阵的阶数
矩阵A的非零子式最高阶数成为A的秩
规定零矩阵的秩为0
由于行列式与他的转置行列式相等，所以A与AT秩相等
秩的性质
max{r(A)，r(B)}<=r(A,B)<=r(A)+r(B)
AB=C r(C)<=min{r(A),r(B)}
方阵：满秩矩阵
列满秩矩阵
行满秩矩阵
矩阵的初等变换与线性方程组
矩阵的秩
初等矩阵
左行右列
解矩阵方程
Ax=B
右拼（A的右侧拼上B）经过一系列的变换将A换成标准型，最后右侧部分得到解X
xA=B
下拼（A的右侧拼上B）经过一系列的变换将A换成标准型，最后下侧部分得到解X
矩阵的初等变换
行阶梯型矩阵
行最简矩阵
A经过一系列初等变换变成B，所以AB等价
自反性
传递性
对称性
标准型
可以没有零行
任意非零矩阵都可以经过初等变换变成标准型
补充
单位矩阵的标准型是他本身
行阶梯矩阵不一定有零行

2. 已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b, \end{cases}$

（1）确定参数 a，b 的值，使得方程组无解；

（2）确定参数 a，b 的值，使得方程组有无穷多解，并求出其通解.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$\therefore b-2 \neq 0$ 或 $a \neq 0$

$\therefore b \neq 2$ 或 $a \neq 0$

(2) $b=2$, $a=0$

$\therefore x_1 = x_3+x_4+5x_5-2$

$x_2 = 3-2x_3-2x_4-6x_5$

$\therefore$ 通解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

矩阵的初等变换与线性方程组——测验卷

1. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则必有___C___.

A. $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　B. $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$　C. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

2. 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$为n维列向量，若$R(\boldsymbol{A})=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$，则___D___.

A. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$必有无穷多解　B. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$必有唯一解

C. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$只有零解　D. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$必有非零解

3. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$n\times m$矩阵，则___B___.

A. $m>n$时，必有$|\boldsymbol{AB}|\neq0$　B. $m>n$时，必有$|\boldsymbol{AB}|=0$

C. $n>m$时，必有$|\boldsymbol{AB}|\neq0$　D. $n>m$时，必有$|\boldsymbol{AB}|=0$

4. 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为4阶方阵，$R(\boldsymbol{A})=4$，$R(\boldsymbol{B})=3$，则$R(\boldsymbol{AB})=$___3___.

5. 判断正误：若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}$一定可以表示成一些初等阵的乘积，此命题___正确___.

6. 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，且满足$\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=n$.

证明：

$R(A+E+(3E-A))=R(4E)=n$

$\therefore R((A+E)+(3E-A))=n\le R(A+E)+R[(A-3E)^T]=R(A+E)+R(A-3E)$

$(A+E)(A-3E)=A^2-2A-3E=0$

$\therefore R(A+E)+R(A-3E)\le n$

$\therefore R(A+E)+R(A-3E)=n$

7. 求解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0, \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0; \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

∴ 解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ x-2y+4z=-5, \\ 3x+8y-2z=13, \\ 4x-y+9z=-6. \end{cases}$

曰

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∴ 设 z 为自由未知数

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C \in R)$$

8. 设$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 3 & -4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}$，求$X$使得$XA=B$.

$(XA)^T=B^T$

$\therefore A^TX^T=B^T$

$$(A^T,B^T)=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -4 & 3 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\therefore X^T=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 7\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -4 & 7 & 4\end{pmatrix}$$

9. 当λ为何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1,\end{cases}$$

(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解，并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{pmatrix}2-\lambda & 2 & -2 & 1\\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda\\ 0 & 0 & \frac{(\lambda-10)(\lambda-1)}{2} & \frac{(\lambda-4)(\lambda-1)}{2}\end{pmatrix}$$

$\therefore$ (1) $\lambda\neq 10$ 且 $\lambda\neq 1$

(2) $\lambda=10$

(3) $\lambda=1$，通解 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，$(C_1,C_2\in R)$

10. 已知$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$有无穷多个解，求 a 的值.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 2(a+2) \end{pmatrix}$$

$\therefore a=-2$

11. 已知 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 中第 3 行的 -2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{A}_1$，将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列与第 1 列互换得到 $\boldsymbol{B}_1$，若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_1=\cancel{AP}\ PA$

$B_1=BQ$

$\therefore A_1B_1=PABQ$

$\therefore P^{-1}A_1B_1Q^{-1}=AB$

$\therefore AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

附加题

12. 证明若存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 及非零行向量 $\boldsymbol{\beta}^T$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^T$，则 $R(\boldsymbol{A})=1$，反之是否成立？并给出理由.

成立

$\because A=\alpha\beta^T$

$\therefore R(A)\geq 1$

又 $\because R(\alpha)=1$

$R(\beta^T)=1$

$\therefore R(\alpha\beta^T)\leq 1$

$\therefore R(A)=1$

反之：$R(A)=1$

$\cancel{\therefore R=}$

$\therefore A=P\begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(1\ 0\ \cdots\ 0)Q$

$\alpha=P\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$\beta^T=(1\ 0\ \cdots\ 0)Q$

$\therefore A=\alpha\beta^T$

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，证明：矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}_m$ 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=m$.

证：$R(A)=R(A,E_m)$

$m=R(E_m)\leq R(A,E_m)\leq m$

$\therefore R(A)=m$

14. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，且 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})<n$，证明：齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有非零公共解

$\because \begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I\\ I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$

$\therefore R\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}\leq R\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=R(A)+R(B)<n$

$\therefore \begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}x=0$ 有非零解

$\therefore$ 成立