武汉大学计算机学院2008-2009学年第一学期

2007级《离散数学》考试标准答案

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$(P \to Q \vee R) \wedge (R \to \neg P)$$

主析取范式: $(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$;

主合取范式: $(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$.

二、 试证明下列结论的有效性(**要求写证明序列**)： (10分，5+5)

(1) 前提：$P \to (Q \to R)$, $R \to (S \to T)$, $\neg U \to (S \wedge \neg T)$, 结论：$P \to (Q \to U)$ (提示：用CP规则);

用***CP***规则证明:

①	P	附加前提	⑦	$S \to T$	⑤ + ⑥+MP
②	Q	附加前提	⑧	$\neg S \vee T$	⑦ + T
③	$P \to (Q \to R)$	引入前提	⑨	$\neg(S \wedge \neg T)$	⑧ + T
④	$Q \to R$	① + ③+MP	⑩	$\neg U \to (S \wedge \neg T)$	引入前提
⑤	R	② + ④+MP	⑪	$\neg\neg U$	⑨ + ⑩+MT
⑥	$R \to (S \to T)$	引入前提	⑫	U	⑪ + T

(2) 前提：$\exists x \forall y Q(x,y)$, $\forall x(Q(x,x) \to \exists y R(x,y))$, 结论：$\exists x \exists y R(x,y)$。

Proof

①	$\exists x \forall y Q(x,y)$	引入前提		前提	
②	$\forall y Q(a,y)$	①+ES	⑤	$Q(a,a) \to \exists y R(a,y)$	④+US
③	$Q(a,a)$	②+US	⑥	$\exists y R(a,y)$	③ + ⑤+MP
④	$\forall x(Q(x,x) \to \exists y R(x,y))$	引入	⑦	$\exists x \exists y R(x,y)$	⑥+EG

三、 设A是非空集合，R是集合A上的二元关系： (20分，10+5+5)

(1) 试证明：如果R是传递关系，则$R^2 \subseteq R$；

Proof: $\forall \langle x,z \rangle \in R^2$, 根据关系合成的定义，$\exists y \in A$且$\langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,z \rangle \in R$，而关系$R$是传递关系，所以$\langle x,z \rangle \in R$，故$R^2 \subseteq R$.

(2) 试证明：如果R是传递和自反关系，则$R^2 = R$；

Proof1: $\forall \langle x,y \rangle \in R$, $\because$ R是自反关系，$\therefore$ $\langle x,x \rangle \in R \wedge \langle x,y \rangle \in R$，$\therefore$ $\langle x,y \rangle \in R^2$. *So* $R \subseteq R^2$. *By* (1), $R = R^2$.

Proof2: R是自反关系，$\therefore R = \mathbb{1}_A \cup R$，则：$R^2 = (\mathbb{1}_A \cup R)^2 = \mathbb{1}_A \cup R \cup R^2$, R是传递关系，由题(1)有$R^2 \subseteq R$，$\therefore \mathbb{1}_A \cup R \cup R^2 = R$，故$R^2 = R$.

(3) 设$A = \{0,1,2,3,4\}$, 设关系$R = \{\langle m,n \rangle \mid m,n \in A \wedge n - m \equiv 1 \pmod 5\}$，试求关系$R$的传递闭包$t(R)$。

解: 根据定义有$R = \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,0 \rangle\}$, 其关系图为一条经过每个结点的有向回路，故其传递闭包为全域关系，即$t(R) = A^2$.

四、 设X和Y是两个非空集合，$f: X \longrightarrow Y$是集合X到集合Y的函数：(16分，6+6+4)

(1) 试证明：$\forall B \subseteq Y$，有$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$；
Proof: $\forall y \in f(f^{-1}(B))$，则$\exists x \in f^{-1}(B) \wedge f(x) = y$. 根据逆像的定义，$x \in f^{-1}(B)$，则$f(x) \in B$，即$y \in B$，故$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(2) 试证明：如果f是满射，则$\forall B \subseteq Y$，有$B = f(f^{-1}(B))$；
Proof: 根据题(1)，只需证明$B \subseteq f(f^{-1}(B))$. $\forall y \in B$，由于f是满射，则$\exists x \in X \wedge f(x) = y$，根据逆像的定义$x \in f^{-1}(B)$，又根据像的定义有$f(x) \in f(f^{-1}(B))$，即$y \in f(f^{-1}(B))$. 故$B \subseteq f(f^{-1}(B))$.

(3) 设$X = \{0,1,2,3,4\}$, $Y = \{0,1,2\}$，函数$g: Y \longrightarrow X$, $g(y) = y$，试求集合$\{ f \mid f: X \to Y \wedge f \circ g = \mathbb{1}_Y \}$的基数，其中$\mathbb{1}_Y$是$Y$到$Y$上的恒等映射。
解: 如果$f \circ g = \mathbb{1}_Y$，则f有右逆元，即f是满射，且$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$，这样的f有多少，这要看3和4映射到$\{1,2,3\}$有多少可能性，即3^2，故该集合的基数为9.

五、 设$\langle G, *, e\rangle$是一个群，$|G| = 2009(41 \times 49)$；设H和K是G的两个**正规子群**且$|H| = 41 \wedge |K| = 49$。在集合$H \times K$上定义运算$\otimes$: $\langle h, k\rangle \otimes \langle h', k'\rangle = \langle h * h', k * k'\rangle$，试证明: (24分，每小题4分)

(1) $\langle H \times K, \otimes\rangle$是一个群并求出该群的阶数；
Proof:

- 运算的封闭性：$\forall \langle h,k\rangle, \langle h',k'\rangle \in H \times K$, $\because H \lhd G \wedge K \lhd G$, $\therefore h * h' \in H \wedge k * k' \in K$，故$\langle h,k\rangle \otimes \langle h',k'\rangle = \langle h * h', k * k'\rangle \in H \times K$.
- 运算的结合率：$\forall \langle h,k\rangle, \langle h',k'\rangle, \langle h'',k''\rangle \in H \times K$, 则：

$$
\begin{aligned}
\langle h,k\rangle \otimes (\langle h',k'\rangle \otimes \langle h'',k''\rangle) =& \langle h,k\rangle \otimes \langle h' * h'', k' * k''\rangle \\
=& \langle h * (h' * h''), k * (k' * k'')\rangle \\
=& \langle (h * h') * h'', (k * k') * k''\rangle \\
=& (\langle h * h', k * k'\rangle) \otimes \langle h'', k''\rangle \\
=& (\langle h,k\rangle \otimes \langle h',k'\rangle) \otimes \langle h'', k''\rangle
\end{aligned}
$$

- 幺元：$\langle e,e\rangle$为幺元：$\langle e,e\rangle \otimes \langle h,k\rangle = \langle e * h, e * k\rangle = \langle h,k\rangle = \langle h,k\rangle \otimes \langle e,e\rangle$.
- 逆元：$\langle h,k\rangle$的逆元为$\langle h^{-1}, k^{-1}\rangle$，$\langle h,k\rangle \otimes \langle h^{-1}, k^{-1}\rangle = \langle h * h^{-1}, k * k^{-1}\rangle = \langle e,e\rangle = \langle h^{-1}, k^{-1}\rangle \otimes \langle h,k\rangle$.
- 群的阶数即是集合的基数：$|H| \times |K| = 41 \times 49 = 2009$.

(2) 利用Langrange定理证明$H \cap K = \{e\}$；
Proof1: 设$a \in H \cap K$，则根据*Langrange*定理a的阶数是群H阶数的因子，也是群K阶数的因子，即是41和49的公因子，但是41与49互素，故a的阶数为1，即$a = e$，$\therefore H \cap K = \{e\}$.
Proof2: $\because H \cap K \leqslant H \wedge H \cap K \leqslant K$，则根据*Langrange*定理$H \cap K$的阶数是群$H$阶数的因子，也是群$K$阶数的因子，即是41和49的公因子，但是41与49互素，故$H \cap K$的阶数为1，即$\therefore H \cap K = \{e\}$.

(3) 利用(2)的结论证明$\forall h \in H, k \in K$, 有$h * k = k * h$ (提示：考虑$h * k * h^{-1} * k^{-1}$)；
Proof: $\because K \lhd G, \therefore h*k*h^{-1} \in K$, *So* $h*k*h^{-1}*k^{-1} \in K$, 同理，$\because H \lhd G$, $\therefore k*h^{-1}*k^{-1} \in H$, *So* $h*k*h^{-1}*k^{-1} \in H$, 这样$h*k*h^{-1}*k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$. $\therefore h * k * h^{-1} * k^{-1} = e$, 即$h * k * (k * h)^{-1} = e$，故$h * k = k * k$.

(4) 函数$f : H \times K \longrightarrow G$, $f(\langle h, k\rangle) = h * k$ 是群$\langle H \times K, \otimes\rangle$到群$\langle G, *\rangle$的同态；
Proof: 设$\langle h, k\rangle, \langle h', k'\rangle \in H \times K$ 则：

$$\begin{aligned} f(\langle h, k\rangle \otimes \langle h', k'\rangle) =& f(\langle h * h', k * k'\rangle) \\ =& h * h' * k * k' \qquad (by\ def) \\ =& h * k * h' * k' \qquad (by (3)) \\ =& f(\langle h, k\rangle) * f(\langle h', k'\rangle) \end{aligned}$$

故f是群$\langle H \times K, \otimes\rangle$到群$\langle G, *\rangle$的同态。

(5) 设f的同态核$\ker(f)$为集合$\{\langle h, k\rangle \mid \langle h, k\rangle \in H \times K \wedge f(\langle h, k\rangle) = e\}$, 则$\ker(f) = \{\langle e, e\rangle\}$；
Proof: 设$\langle h, k\rangle \in \ker(f)$，则$f(\langle h, k\rangle) = e$，即$h * k = e$，$\therefore h = k^{-1}$，*So* $h \in H \cap K$, 即$h = e$；同理$k = e$. 故$ker(f) = \{\langle e, e\rangle\}$.

(6) f是群$\langle H \times K, \otimes\rangle$到群$\langle G, *\rangle$的同构。
Proof:

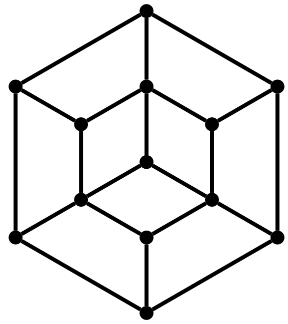
- f是同态：由题(4).
- f是单射：设$f(\langle h, k\rangle) = f(\langle h', k'\rangle)$，$\because f$是同态，$\therefore f(\langle h, k\rangle \otimes \langle h', k'\rangle^{-1}) = e$，由题(5)，$\langle h, k\rangle \otimes \langle h', k'\rangle^{-1} = \langle e, e\rangle$，即$\langle h, k\rangle = \langle h', k'\rangle$，故$f$是单射。
- f是满射：群$H \times K$和群G的阶数均为2009，而f是单射，所以$f(H \times K)$的基数也是2009，即$f(H \times K) = G$，故f是满射。

六、 设$G(n, m)$为n个结点m条边的简单无向图，如果图G的每个结点的度数均为r，且r是奇数，试证明n一定是偶数，且m是r的倍数。 (10分)
Proof: $\because$每个结点的度数均为r，$\therefore rn = 2m$, 而r是奇数，rn是偶数，所以n一定是偶数，且m一定是r的倍数。

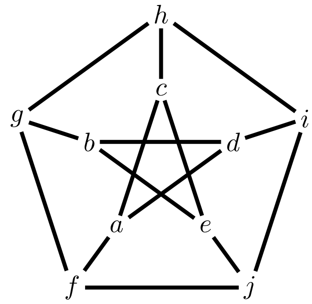
七、 设有如下三个简单无向图： (10分，5+5)

(1) 试利用结点着色的方法证明图(a)没有哈密顿回路；
Proof: 该图存在一将相邻节点着色不同的颜色A色与B色的方案，如下图所示。则哈密顿回路所经历的结点对应的颜色序列为$ABAB \ldots AB$(其中第一个A是回路的始点和终点)，但是A色结点有7个，B色节点只有6个，故不存在哈密顿回路。

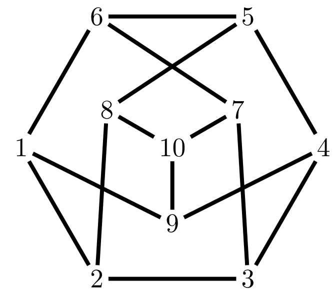
(2) 已知图(b)与图(c)同构，设Φ为图(b)的结点集合$\{a, b, \ldots, j\}$到图(c)的结点集合$\{1, 2, \ldots, 10\}$的同构函数，已知$\Phi(a) = 8$; $\Phi(b) = 6$。试写出剩余结点的对应关系。
解1: 图(c)经过移动结点后如图(e)所示，故同构Φ为：$\Phi(a) = 8, \Phi(b) =$



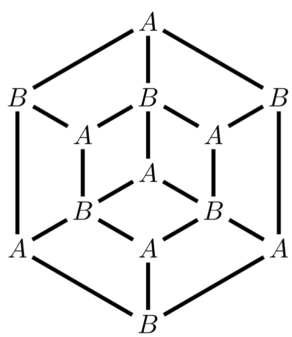
(a)



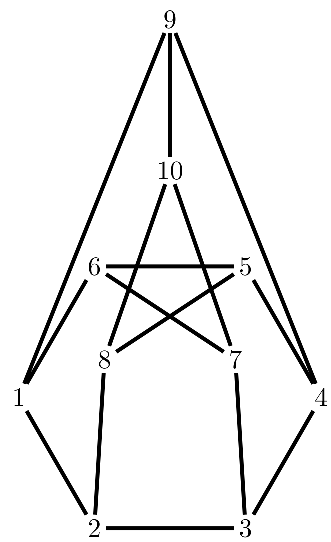
(b)



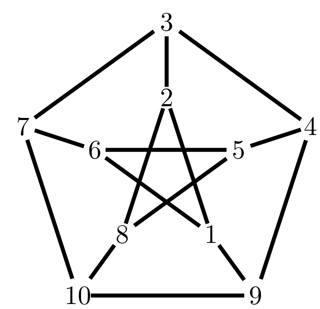
(c)



(d)



(e)



(f)

$6, \Phi(c) = 10, \Phi(d) = 5, \Phi(e) = 7, \Phi(f) = 2, \Phi(g) = 1, \Phi(h) = 9, \Phi(i) = 4, \Phi(j) = 3.$

解2: 图(c)经过移动结点后如图(f)所示，故同构f为：$\Phi(a) = 8, \Phi(b) = 6, \Phi(c) = 2, \Phi(d) = 5, \Phi(e) = 1, \Phi(f) = 10, \Phi(g) = 7, \Phi(h) = 3, \Phi(i) = 4, \Phi(j) = 9.$