同学们好！

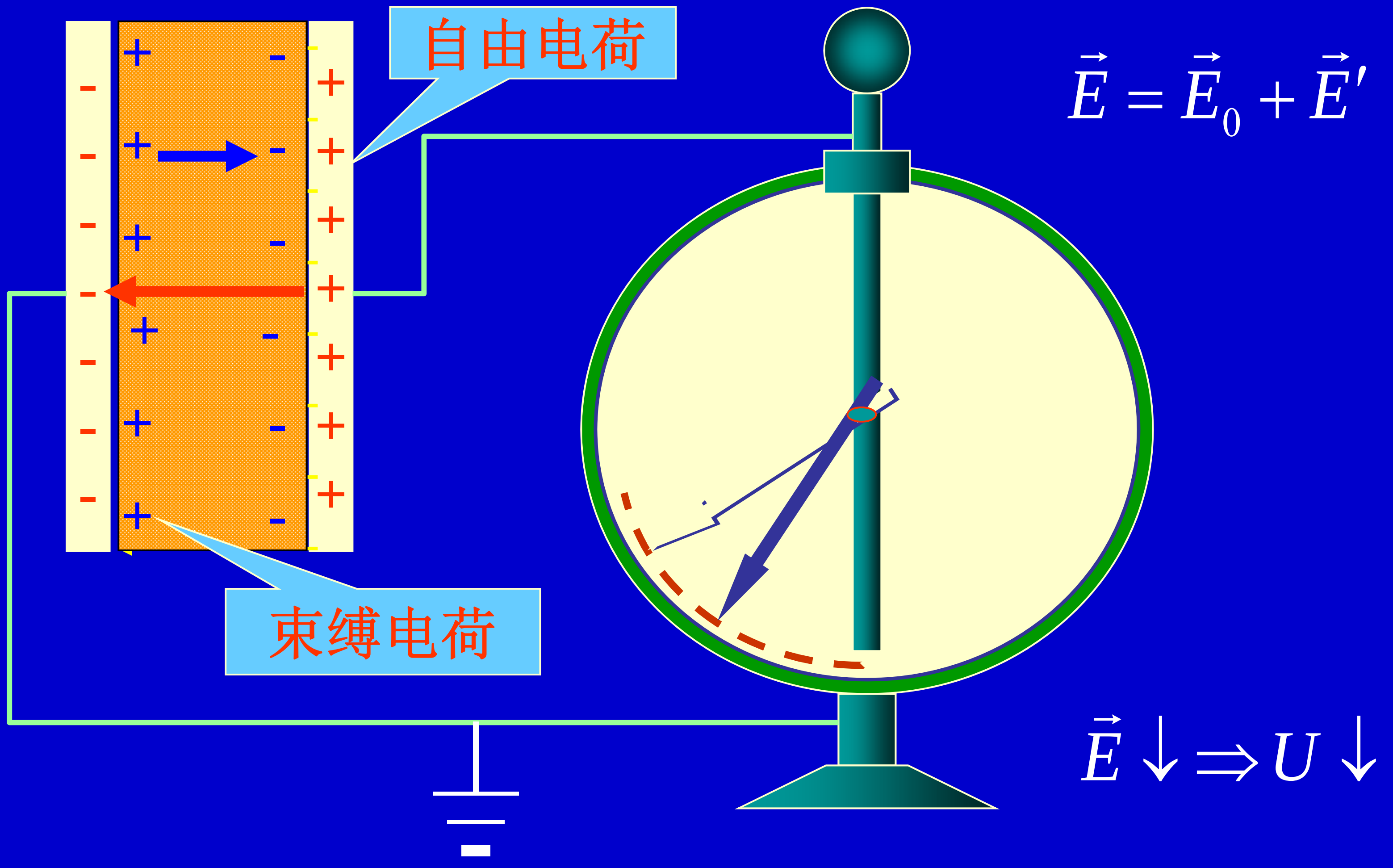
§6-5 静电场中的介质 介质中的高斯定理

一、电介质的电结构和电极化

1. 电介质的电结构

电介质(dielectric)： 电阻率(resistivity)很大, 导电能力很差的物质, 即绝缘体.

电结构特点： 分子中的正负电荷束缚的很紧, 介质内部几乎没有自由电荷.

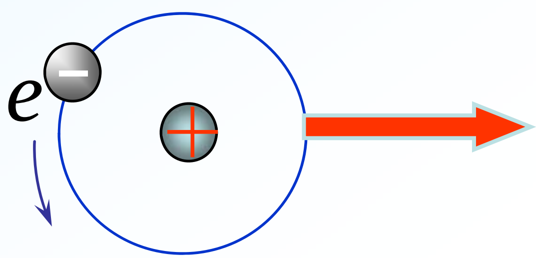

自由电荷
束缚电荷
$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$
$\vec{E}\downarrow\Rightarrow U\downarrow$
$C\uparrow$

演示实验图示

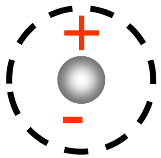
电介质极化: 在外电场的作用下, 介质表面产生电荷的现象.

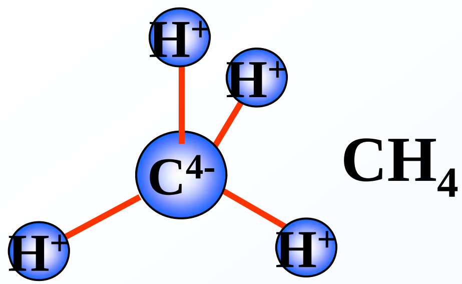
极化电荷或束缚电荷

两类电介质分子结构:

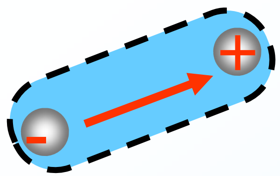


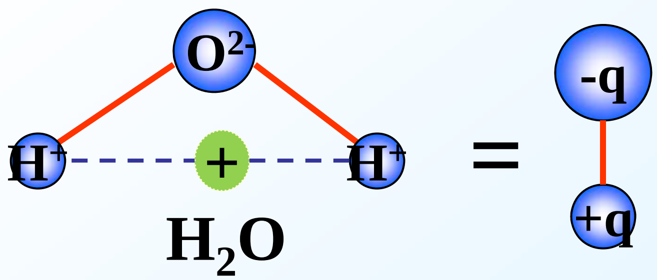
无极分子



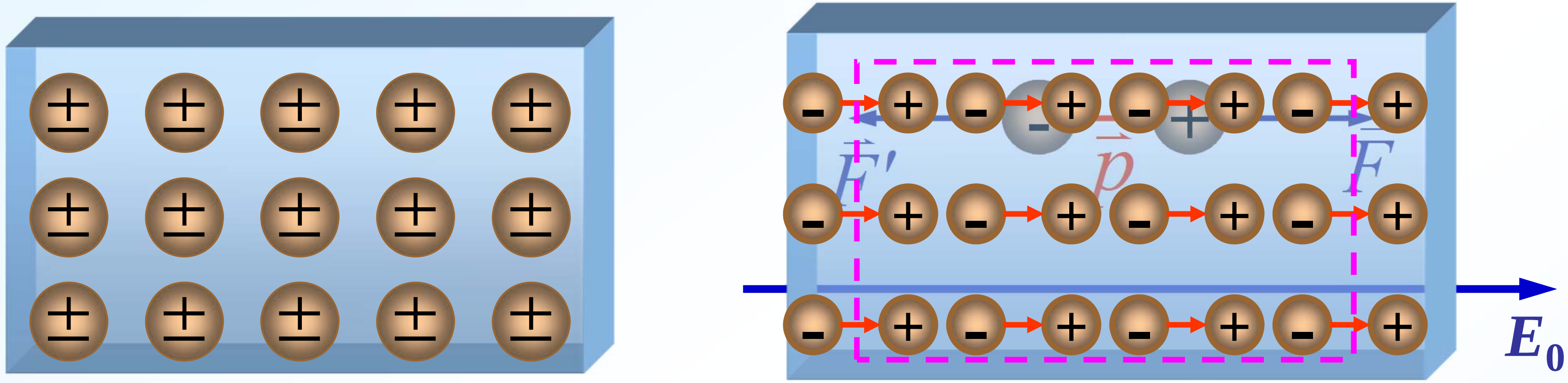


有极分子

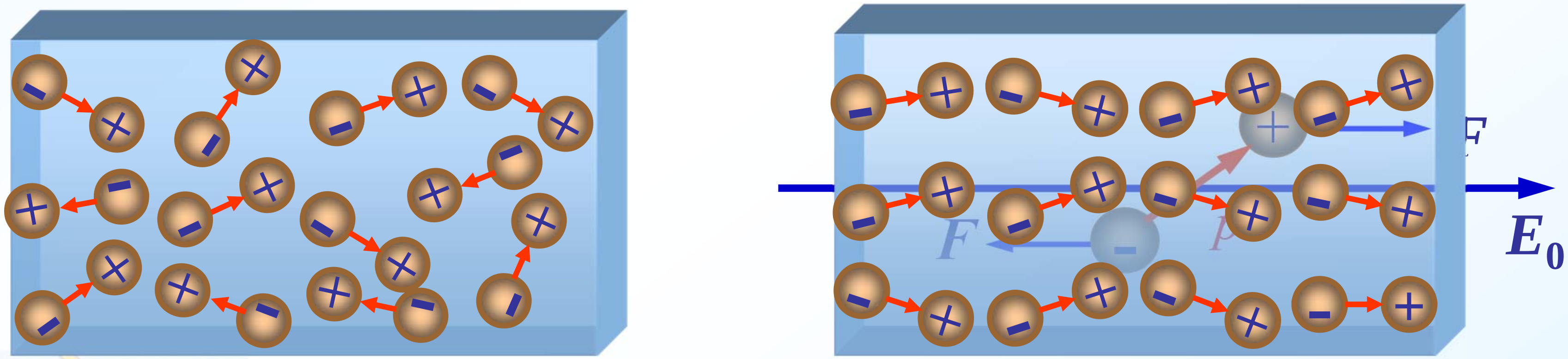




无极分子(nonpolar molecule)的位移极化(displacement polarization)



有极分子(polar molecule)的转向极化(orientation polarization)



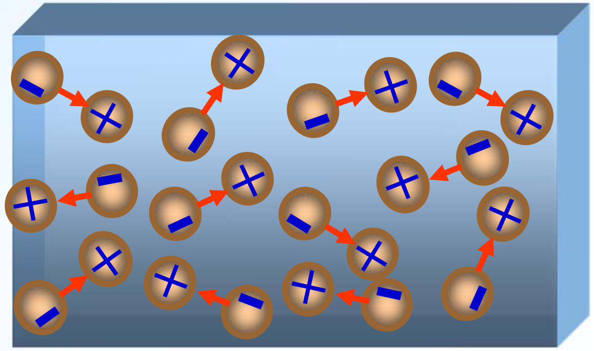
电介质极化: 在外电场的作用下, 介质表面产生电荷的现象.

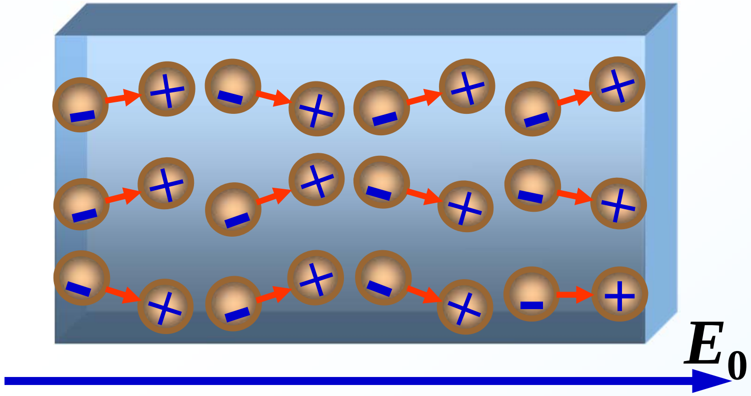
此时的表面电荷称为**极化电荷**或**束缚电荷**

二、电极化强度矢量

——描述介质的极化程度

1. 电极化强度(polarization intensity)定义





没极化：$\sum \vec{p} = 0$　　　　极化时：$\sum \vec{p} \neq 0$

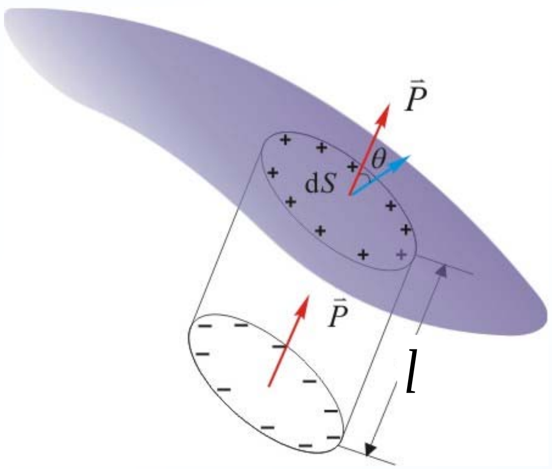
定义：电极化强度 $\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$　（库仑/米^2）

实验规律：$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

E不太强时，χ_e与E无关，取决于电介质的种类.

电极化率　　总场 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

2. 电极化强度矢量与极化电荷的关系



设在均匀电介质中截取一斜柱体，体积为ΔV.

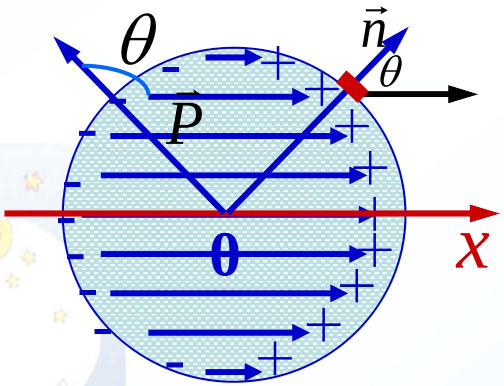
$$\Delta V = \Delta S \cdot l\cos\theta$$

$$\sum \vec{p}_i = \sigma' \Delta S \vec{l} = q'\vec{l}$$

$$\left|\vec{P}\right| = \frac{\left|\sum \vec{p}_i\right|}{\Delta V} = \frac{\sigma' \cdot \Delta S \cdot l}{\Delta S \cdot l\cos\theta} = \frac{\sigma'}{\cos\theta}$$

$$\boxed{\sigma' = \left|\vec{P}\right| \cdot \cos\theta = P_{\mathrm{n}}}$$

结论：均匀电介质表面产生的**极化电荷面密度**，等于该处**电极化强度沿表面外法线方向的投影**.



$\theta < \frac{\pi}{2}$: 极化电荷为正电

$\theta > \frac{\pi}{2}$: 极化电荷为负电

三、电介质中的电场强度

总场=外场+极化电荷附加电场

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$$

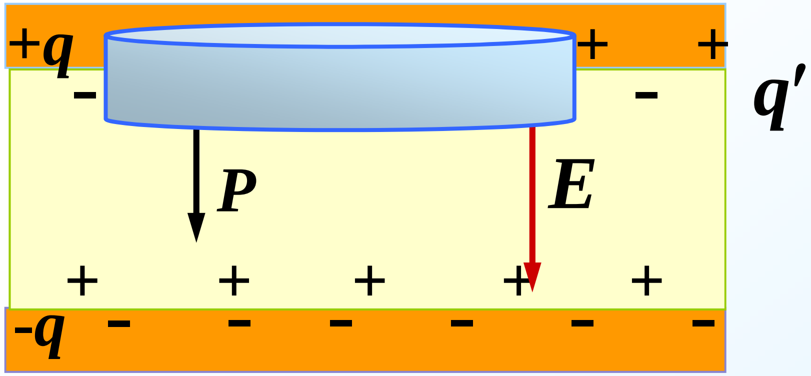
相比真空，电介质内部场强总是削弱

$$\text{外场}\rightarrow\vec{P}\rightarrow q'(\sigma',\rho')$$

$$\vec{E}\leftarrow\vec{E}_0+\vec{E}'$$

四、有电介质时静电场的高斯定理 电位移矢量

以平板电容器为例：



$$\oint_S\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_S\sigma'\mathrm{d}S$$

$$=-\sum_{内}q_i'$$

真空中的高斯定理： $\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$

介质中的高斯定理： $\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_i+\sum q_i'\right)$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i$$

定义电位移矢量(electric displacement vector)：

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$ （库仑/米^2）

介质中的高斯定理：在任何静电场中，通过任意闭合曲面的电位移通量等于该曲面所包围的自由电荷(free charge)的代数和.

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i}$$

说明：1. 介质中的高斯定理具有普适性.

2. 电位移矢量D是一个辅助量, 描写电场的基本物理量是电场强度E.

3. D是总场, 与q、q'有关, 其通量仅与q有关.

4.电位移线从正自由电荷出发，终止于负自由电荷

5. 特例：真空 —— 特殊介质

真空中：$\vec{P} = 0$　　所以：$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i$$

$$\xrightarrow{\text{真空}} \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$$

$\vec{D}$与$\vec{E}$的关系

对于各向同性的电介质：$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$

$$\vec{D}=\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)=\varepsilon_0\vec{E}+\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=\left(1+\chi_e\right)\varepsilon_0\vec{E}$$

令 $\varepsilon_r=1+\chi_e$ $\quad\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$

相对介电常数

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}}$$

$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$：介电常数

注： $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ 是定义式，普遍成立.

$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 只适用于各向同性的均匀介质.

真空中：$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0$ $\qquad$ 介质中：$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

法向D连续： $\varepsilon_0\vec{E}_0=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ $\qquad\vec{E}_0=\varepsilon_r\vec{E}$

五、有电介质时静电场的计算

1. 根据介质中的高斯定理计算出电位移矢量

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i$$

2. 根据电场强度与电位移矢量的关系计算场强

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$$

本课程只要求特殊情况：
- 各向同性电介质
- q_0, q'分布具有某些对称性

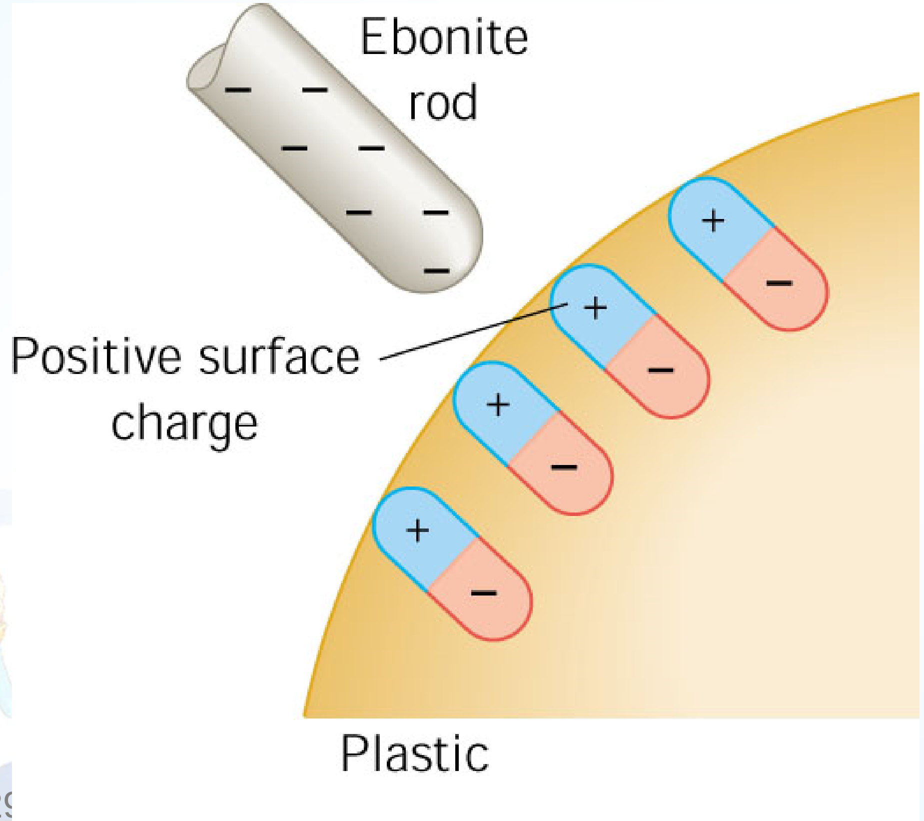
电介质分布的对称性：
- 均匀无限大介质充满全场
- 介质分界面为等势面
- 介质分界面与等势面垂直

3. 根据电场强度与电极化强度的关系计算电极化强度

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \vec{E}$$

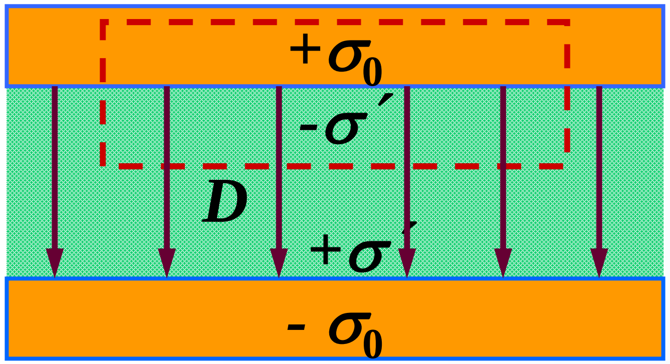
4. 根据电极化强度与束缚电荷的关系计算束缚电荷面密度。

$$\sigma' = P_n$$



束缚电荷的产生

例6-19. 平行板电容器，填充了相对介电常数为 ε_r 的电介质的，已知自由电荷面密度为 σ_0，其极化电荷面密度为多少？



解： 由介质中的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot S = \sigma_0 S \qquad D = \sigma_0$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0},\ E' = \frac{-\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$E = E_0 + E' \longrightarrow \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

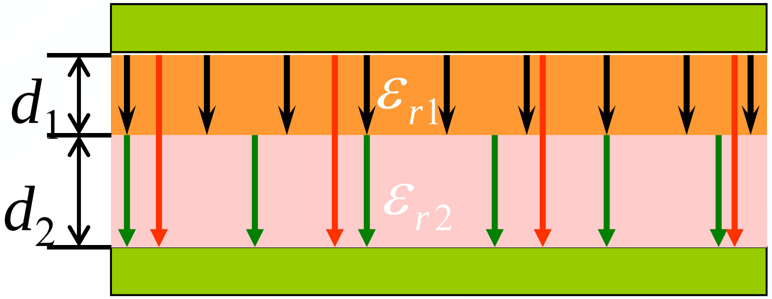
方法2：

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o\vec{E}$$

$$\sigma' = P_n$$

$$\boxed{\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0}$$

例.一平行板电容器，中间有两层厚度分别为d_1和d_2的电介质，它们的相对介电常数分别为ε_{r1}和ε_{r2}，极板面积为S。求电容。



解：

$$D=\sigma_o$$

$$E_1=\frac{\sigma_o}{\varepsilon_o\varepsilon_{r1}} \qquad E_2=\frac{\sigma_o}{\varepsilon_o\varepsilon_{r2}}$$

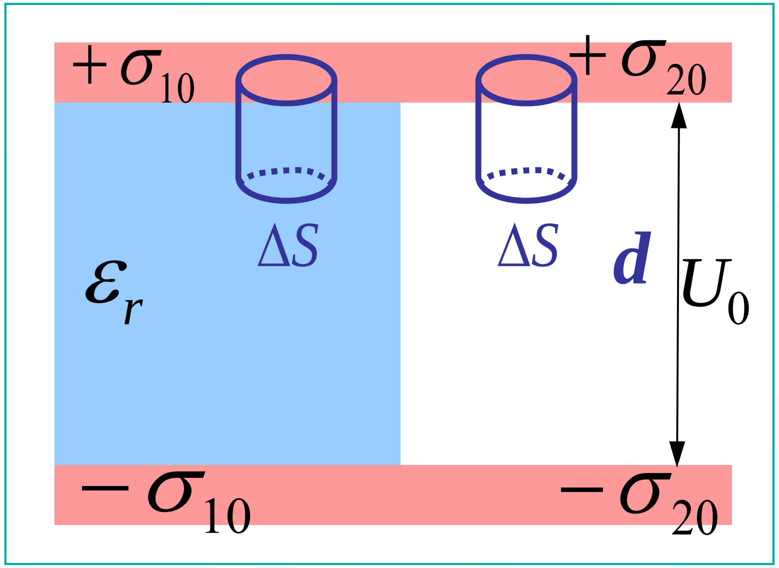
$$\Delta V=E_1d_1+E_2d_2=\frac{\sigma_o}{\varepsilon_o}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)$$

$$C=\frac{\sigma_oS}{\Delta V}=\frac{\varepsilon_oS}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\dfrac{d_2}{\varepsilon_{r2}}}$$

例6-20. 已知自由电荷面密度为$\pm\sigma_0$的两无限大金属平行板电势差U_0=300V. 现在其间充一半ε_r=5的电介质, **求:**

D_1, E_1, σ_{10}, σ_{20}

D_2, E_2, U



解: 介质表面⊥等势面, 未破坏各部分的面对称性, 选如图高斯面

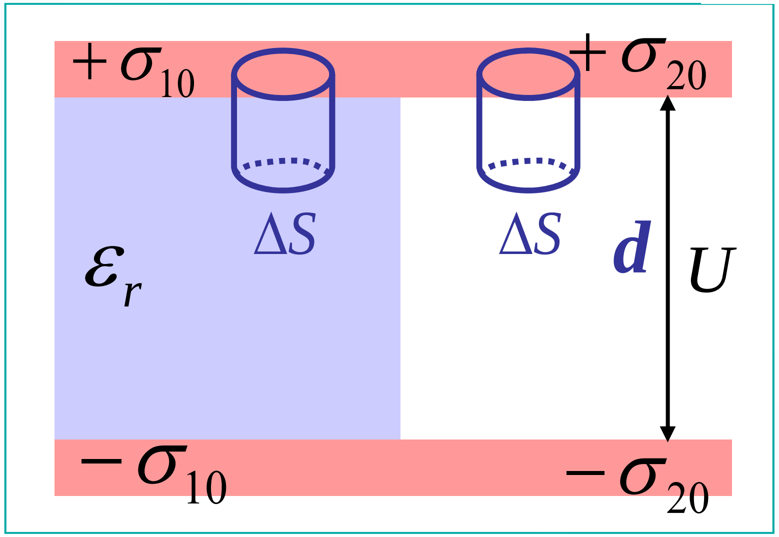
左边 $\sum\limits_{(S内)} q_0 = \sigma_{10} \cdot \Delta S$

$$\oint_S \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{上} \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{下} \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{侧} \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = D_1\Delta S$$

导体内$E = 0$　　　　$\cos\theta = 0$

由高斯定理 $\oint_S \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum\limits_{(S内)} q_0 \longrightarrow D_1\Delta S = \sigma_{10}\Delta S$

$$\therefore\ D_1=\sigma_{10}\qquad E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$



同理: $D_2=\sigma_{20}\qquad E_2=\frac{D_2}{\varepsilon_0}$

切向电场连续: $E_1=E_2$

电量守恒: $\sigma_{10}\cdot\frac{S}{2}+\sigma_{20}\cdot\frac{S}{2}=\sigma_0\cdot S$

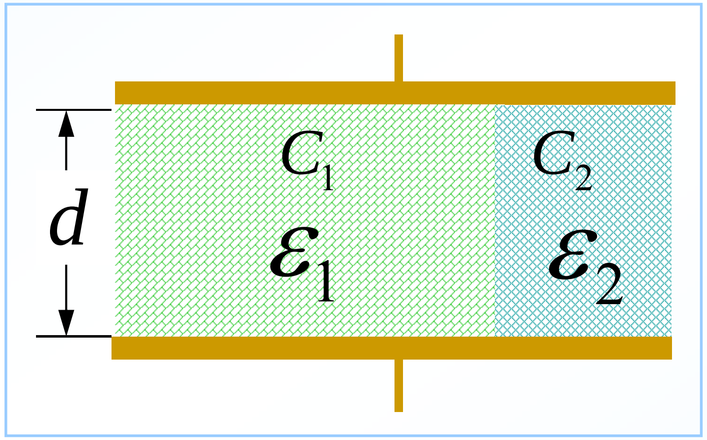
解得:

$$\sigma_{10}=D_1=\frac{5}{3}\sigma_0,\quad \sigma_{20}=D_2=\frac{1}{3}\sigma_0,\quad E_1=E_2=\frac{1}{3\varepsilon_0}\sigma_0$$

又: $E_1d=E_2d=U\qquad U_0=E_0d=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}d=300\text{V}$

$$U=E_1d=\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}d=\frac{U_0}{3}=100\text{V}$$

练习：求右图平板电容器电容



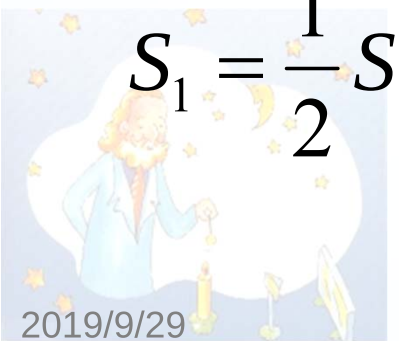
解：左右两电容器并联

$$C_1 = \varepsilon_1 \frac{S_1}{d}$$

$$C_2 = \varepsilon_2 \frac{(S - S_1)}{d}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 (S - S_1)}{d}$$

$S_1 = \frac{1}{2}S$时，$C = \frac{\varepsilon_1 S}{2d} + \frac{\varepsilon_2 (S - S/2)}{d} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)S}{2d}$



静电场与电介质——复习

电介质

电介质极化

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$$

电极化强度

$$\vec{P}=\frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$$

$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$$

电容

$$C=\frac{Q}{U}$$

平行板电容

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}$$

圆柱形电容

球形电容

串联

并联

组合

高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum_{内} q_i+\sum_{内} q_i'\right)$$

极化电荷

$$\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}=-\sum_{内} q_i'$$

$$\sigma'=\vec{P}\cdot\vec{e}_n=\left|\vec{P}\right|\cdot\cos\theta$$

电位移矢量

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

$$=\varepsilon\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

介质中的高斯定理

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_i}$$