复习

➢库仑定律:

$$\boxed{\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}}$$

➢ 电场强度的定义:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

➢ 电场线、电通量、静电场的高斯定理

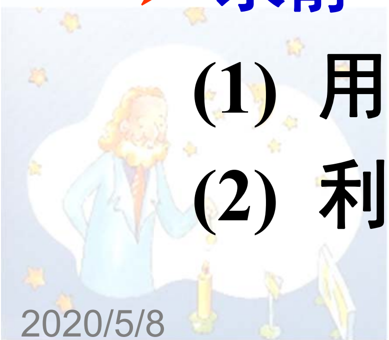
$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$$

静电场的重要性质之一 —— 静电场是有源场

➢ 求静电场的基本方法:

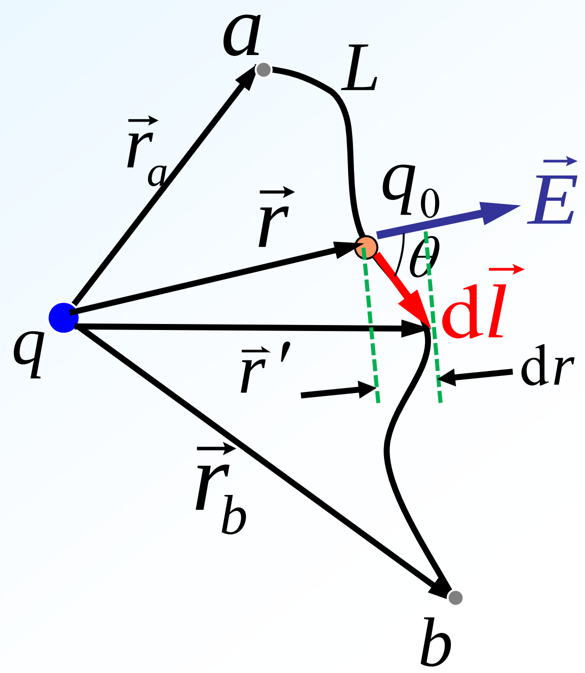
(1) 用点电荷电场公式和场强叠加原理求静电场

(2) 利用高斯定理可求解具有某些对称分布的静电场



§ 6-3 静电场的环路定理与电势

一、静电力的功



场源电荷：q

检验电荷：q_0

$$\vec{F} = q_0\vec{E}$$

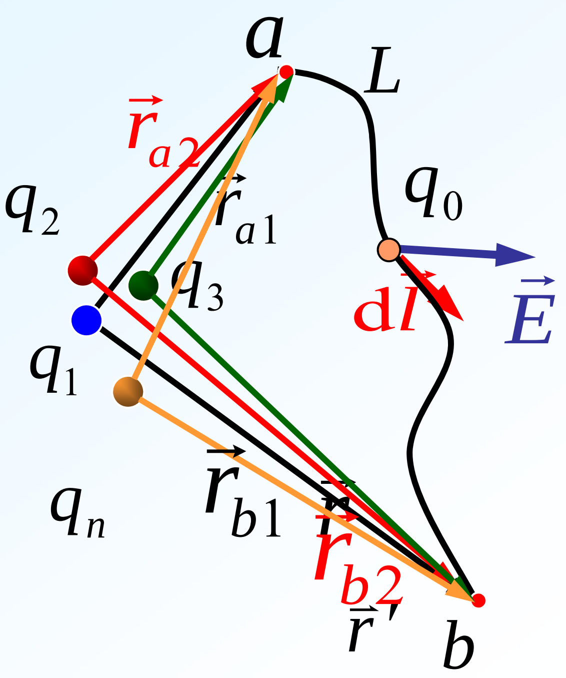
$$\mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0 E\cos\theta \mathrm{d}l \;= q_0 E\mathrm{d}r$$

$$A = \int_L \mathrm{d}A = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

场源为点电荷的静电场中，静电力做功只与检验电荷起点, 终点的位置有关, 与所通过的路径无关.

此结论可通过叠加原理推广到任意点电荷系的电场.

q_0在点电荷系中的电场中从a运动到b



场源电荷：$q_1,q_2,q_3,\cdots q_n$

检验电荷：q_0

$$\vec{F}=q_0\vec{E}$$

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\cdots\vec{F}_n)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=(\frac{q_0q_1\vec{r}_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}+\frac{q_0q_3\vec{r}_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}+\cdots)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q_1\vec{r}_1}{r_1^3}+\frac{q_2\vec{r}_2}{r_2^3}+\cdots)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$A=\int_L\mathrm{d}A=\int_{r_a}^{r_b}\sum_i\frac{q_0q_i\mathrm{d}r_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}=\sum_i\frac{q_0q_i}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_{ai}}-\frac{1}{r_{bi}})$$

静电力做功只与电场本身性质，检验电荷起点, 终点的位置有关, 与所通过的路径无关.

二、环路定理(circuital theorem of electrostatic field)

由于静电力做功只与检验电荷起点、终点的位置有关，与所通过的路径无关 —— **静电力是保守力.**

$$A=\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}l=\oint_L q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

静电场中任意闭合路径

静电场环路定理: $$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0}$$

路径上各点的场强

静电场强沿任意闭合路径的线积分为零. 反映了**静电场的保守性**. ——静电场是有源无旋场

凡保守力都有与其相关的势能, **静电场是有势场.**

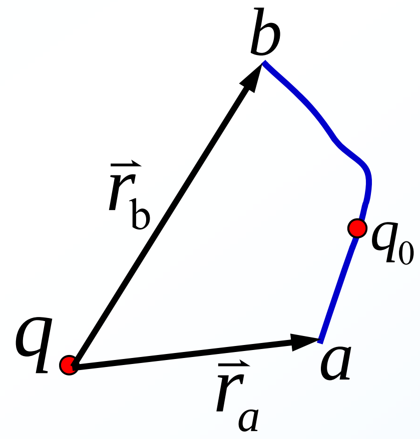
三、电势

1.电势能(electrostatic energy)

$$A_{ab}=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=-(W_b-W_a)=W_a-W_b$$

令 $W_b=0$ 得

$$\boxed{W_a=q_0\int_a^{\text{零势点}}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$



结论： 电势能在数值上等于将该试验电荷从该处移动到势能零点时电场力所做的功。单位：焦耳(J)

W_a： 静电场与场中电荷 q_0 共同拥有。
标量，可**正**可**负**

W_a/q_0：取决于电场分布，场点位置和零势点选取，与场中检验电荷 q_0 无关。因此，可用以描述静电场自身的特性。

2. 电势(electric potential)

$$\boxed{U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

静电场中a点的电势，在数值上等于将单位正电荷由a点移至零势点处电场力所做的功，即单位正电荷在a点具有的电势能。

3. 电势差(electric potential difference)，又称电压

$$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

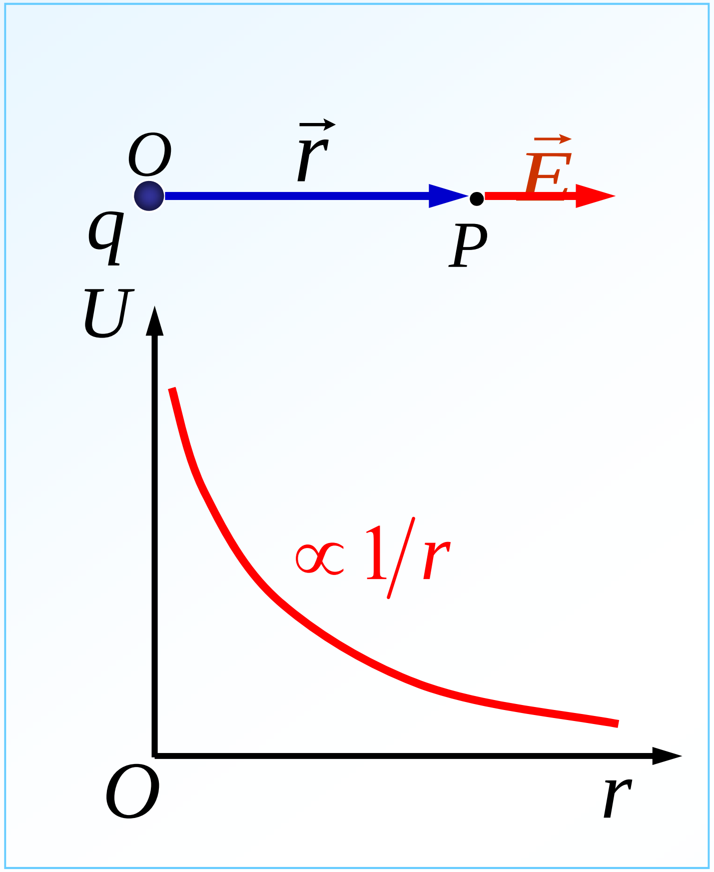
在SI中，电势差和电势的单位相同：

焦耳/库仑(J·C^{-1})，也称为伏特(V)，即 1V＝1J·C^{-1}

点电荷q在静电场中从a处沿任意路径移至b处，电场力做的功

$$A_{ab} = q\int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q(U_a - U_b) = qU_{ab}$$

例6-9. 求点电荷q场中的电势分布。



解： $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

$$U = \int_P^{\text{零势点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

令 $U_\infty = 0$ 沿径向积分

$$U = \int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^\infty \frac{q\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$= \int_r^\infty \frac{q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

注意 1. U 为空间标量函数。

2. U 具有相对意义，其值与零势点选取有关，但U_{ab}与零势点选取无关。

3. 电势遵从叠加原理：$U=\sum U_i$ (零势点相同)

点电荷系电场中任一点的电势，等于各点电荷单独存在时在该点产生的电势的代数和。

4. 由保守力与其相关势能的关系：

$$\vec{F}=q_0\vec{E}=-\nabla W$$

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=-\nabla\left(\frac{W}{q_0}\right)=-\nabla U=-\mathrm{grad}U$$

静电场中某点的场强等于该点电势梯度的负值。

即：$\vec{E}$是U沿电场线方向的空间变化率。电场指向U降低的方向。

四、电势的计算(两种基本方法)

常选地球电势为零。
电势差与电势的零点选取无关。

1.场强积分法(由定义求)

(1) 确定 $\vec{E}$ 分布

(2) 选零势点和便于计算的积分路径

(3) 由电势定义

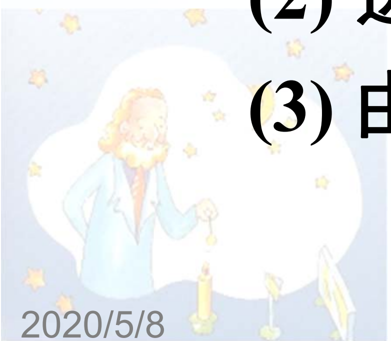
$$U_a = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^{\text{零势点}} E\cos\theta\,\mathrm{d}l \quad \text{计算 } U_a$$

2. 叠加法

(1) 将带电体划分为若干电荷元dq

(2) 选零势点，写出某一dq在场点的电势dU

(3) 由叠加原理得 $U=\sum U_i$ 或 $U=\int \mathrm{d}U$



例6-10. 一半径为R的均匀带电球体, 带电量为q. 求其电势分布.

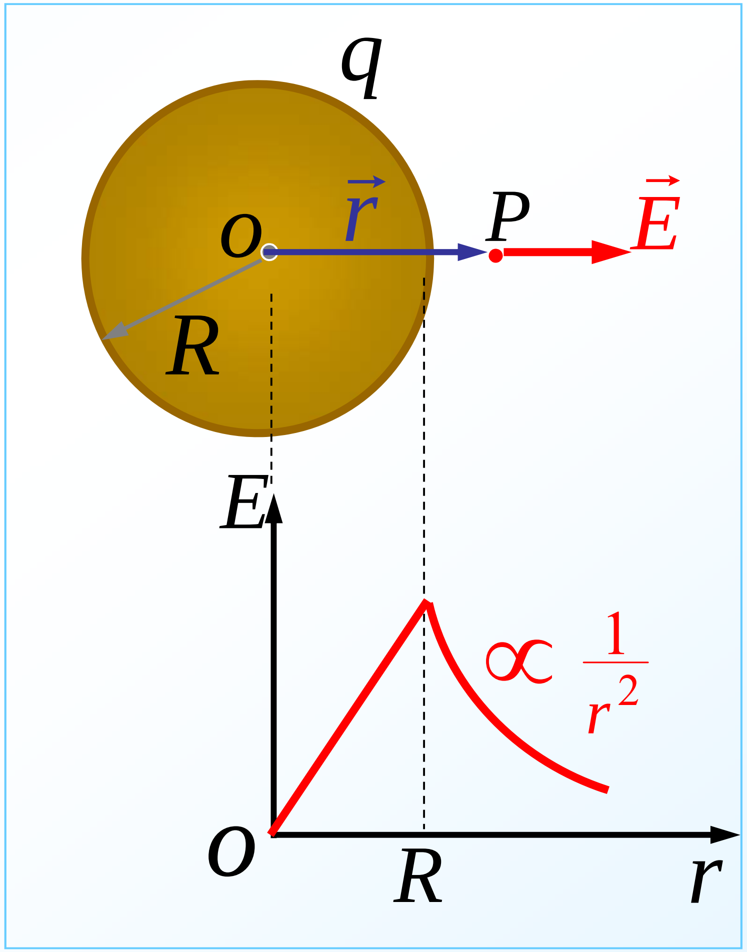
解： 由电荷分布可知，电场沿径向

由高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{4\pi R^3/3}\frac{4\pi r^3}{3}$$

$$E_1 = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad r < R$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad r > R$$



$r < R$

$$U_1 = \int_r^R E_1 \mathrm{d}r + \int_R^\infty E_2 \mathrm{d}r$$

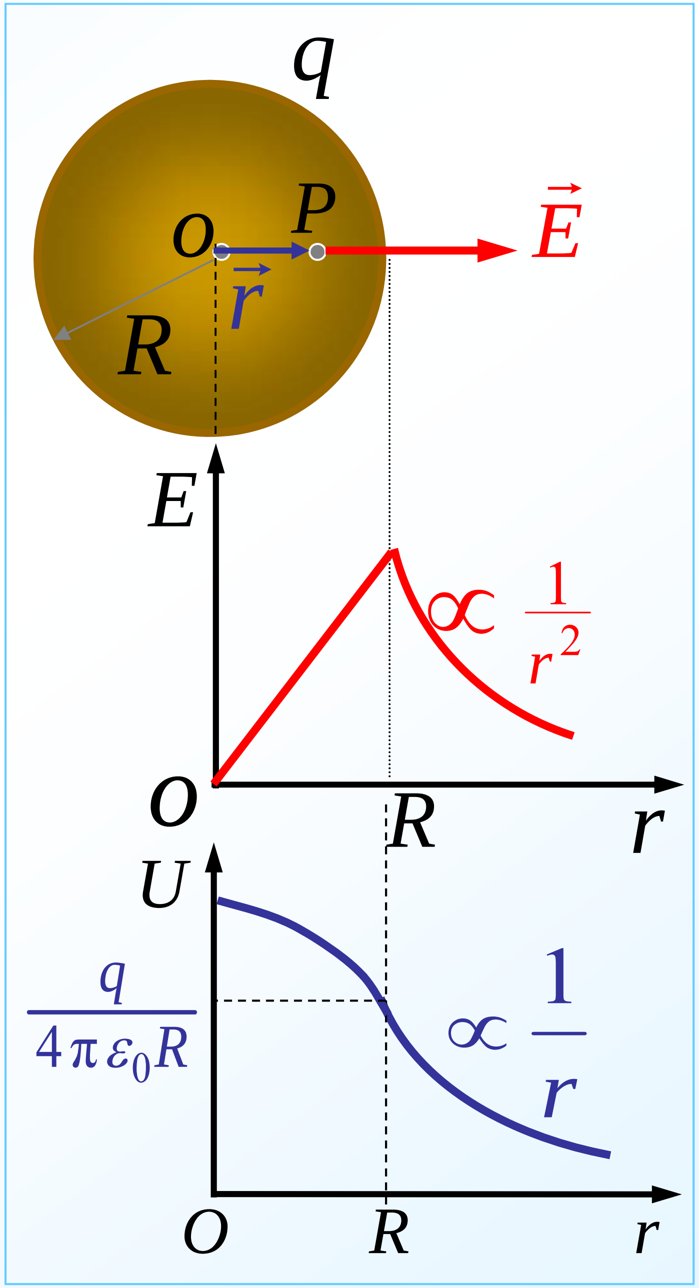
$$= \int_r^R \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

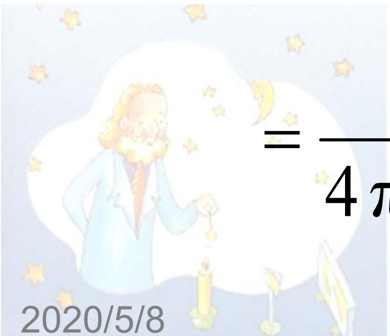
$$= \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$r > R$

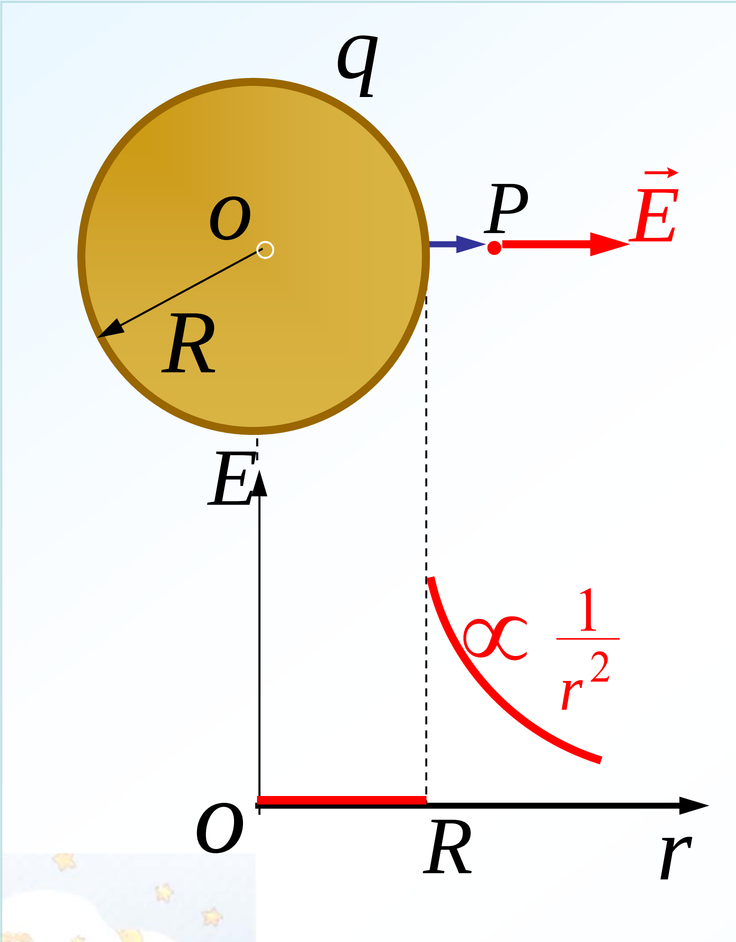
$$U_2 = \int_r^\infty E_2 \mathrm{d}r = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$





练习1. 求均匀带电球面场中电势分布$(q，R)$。



由高斯定理

$$\vec{E}=\begin{cases} 0 & (r<R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r>R) \end{cases}$$

令 $U_\infty=0$ 沿径向积分

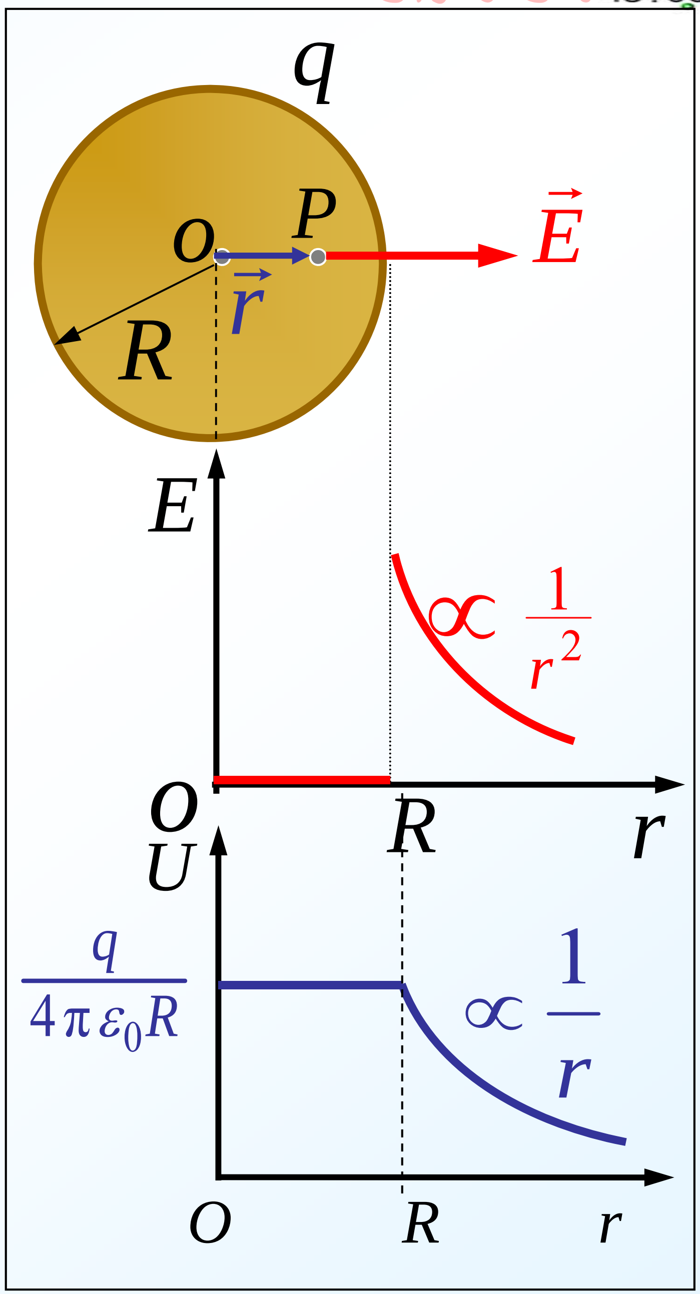
$$U_{外}=\int_P^\infty \vec{E}_{外}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^\infty \frac{q\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\propto\frac{1}{r}$$

$$U_{外} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}$$

$$U_{内} = \int_{P'}^{\infty} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{P'}^{R} \vec{E}_{内}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{R}^{\infty} \vec{E}_{外}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

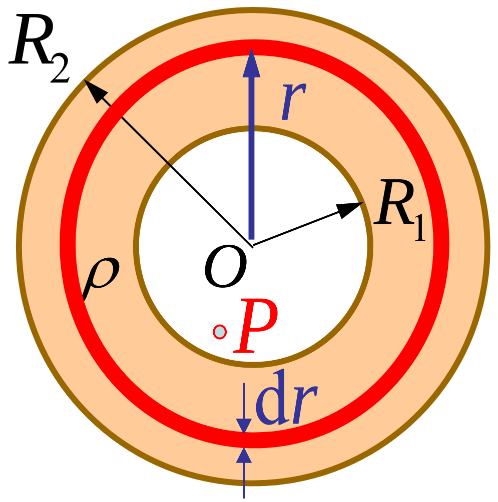
$$= \int_{R}^{\infty} \frac{q\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \text{恒量}$$



均匀带电球面内电势与球面处电势相等;

球面外电势与电量集中于球心的点电荷情况相同。

练习2.求均匀带电球壳腔内任意点电势



已知：R_1， R_2， ρ

求：U_P

解：将带电球壳视为许多均匀带电球面的集合

取半径r，厚$\mathrm{d}r$ 的球壳为电荷元：$\mathrm{d}q = \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot \mathrm{d}r$

令 $U_\infty = 0$，$\mathrm{d}q$ 在腔内产生的电势：

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho r \mathrm{d}r}{\varepsilon_0}$$

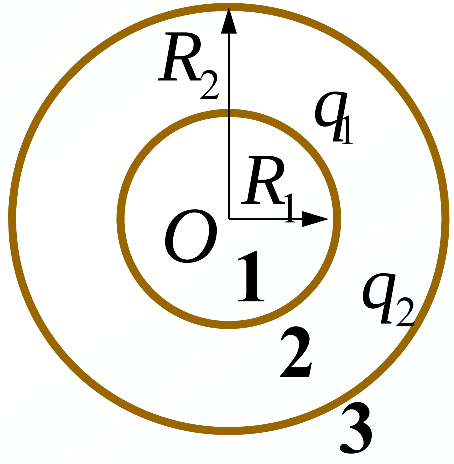
由叠加原理：$U = \int \mathrm{d}U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r \mathrm{d}r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2)$

即：腔内各点等势

已知带电球面各量：R_1, R_2, q_1, q_2

求①各区域电势： U_1, U_2, U_3

②两球面间的电势差：ΔU



带电球面的电势分布：$U_{内} = q/(4\pi\varepsilon_0 R)$

$$U_{外} = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$$

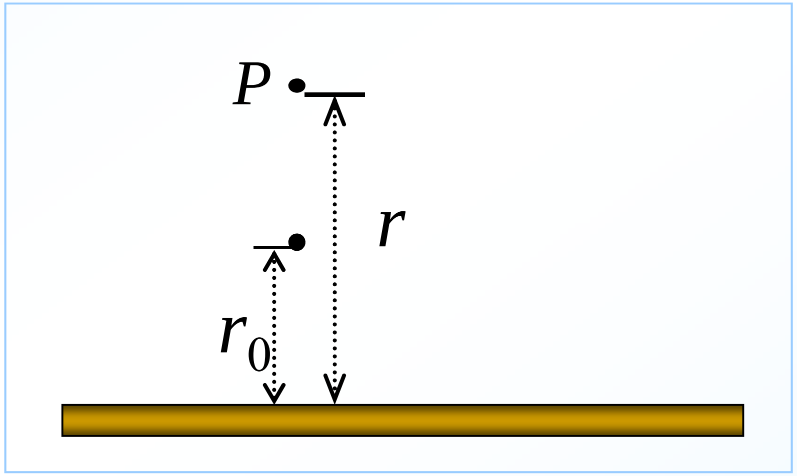
由叠加原理 $r \le R_1$： $U_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

$$R_1 < r < R_2: \quad U_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$r \ge R_2: \quad U_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Delta U = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

例6-11. 求无限长均匀带电直线外任一点P的电势。(电荷密度λ)



解： $$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

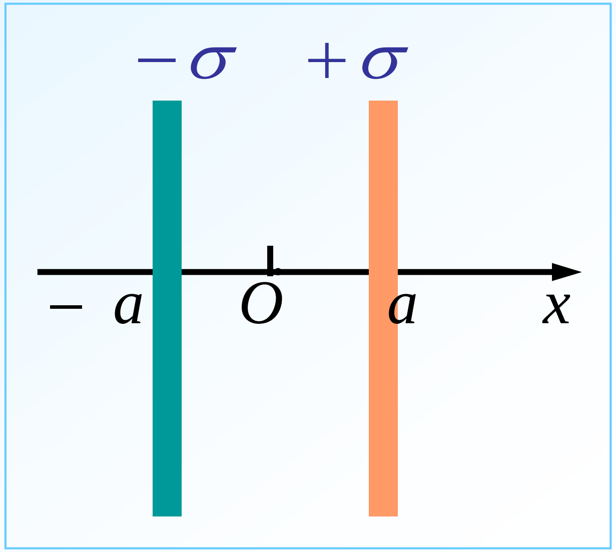
$$U=\int_r^{r_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_r^{r_0}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

选取势能零点在 r_0=1m处 $$U=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$$

由此例子看出，当电荷分布扩展到无穷远时，电势零点不能再选在无穷远处。

例6-12. 求无限大均匀带电平面($\pm\sigma$)场中电势分布。

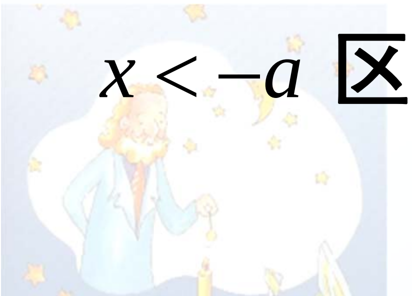


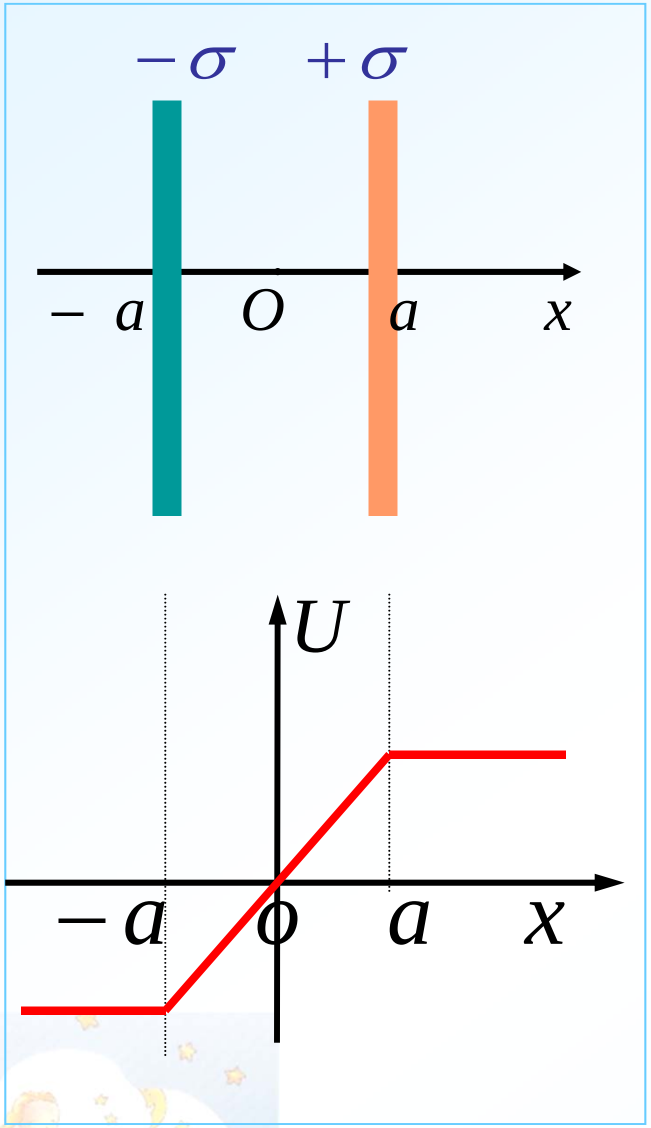
电场分布

$$E=\begin{cases}-\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & (-a<x<a)\\ 0 & (x<-a,\ \ x>a)\end{cases}$$

电荷无限分布，在有限远处选零势点. 令$U_o=0$，
沿 x 轴方向积分。

$x<-a$ 区域： $$U=\int_x^{-a}E\mathrm{d}x+\int_{-a}^{0}E\mathrm{d}x=0+(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0})a=-\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$





$-a \le x \le a$ **区域：**

$$U = \int_x^0 E\mathrm{d}x = \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)(-x) = \frac{\sigma x}{\varepsilon_0}$$

$x > a$ **区域：**

$$U = \int_x^a E\mathrm{d}x + \int_a^0 E\mathrm{d}x$$

$$= 0 + \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)(-a) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

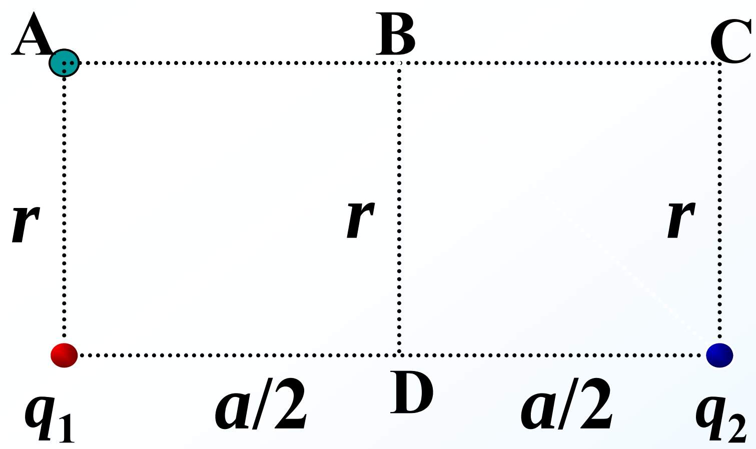
***U*—*x*曲线如图**

例13. 如图所示，已知两点电荷电量分别为$q_1=3.0\times10^{-8}$C，$q_2=-3.0\times10^{-8}$C. A、B、C、D为电场中四个点，图中a=8.0cm，r=6.0cm. 现移动电量为2.0×10^{-9}C的点电荷，问下例几种情况电场力作功多少？电势能增加多少？

(1) 从无限远处移到A点；

(2) 将此电荷从A点移到B点；

(3) 将此点电荷从C点移到D.



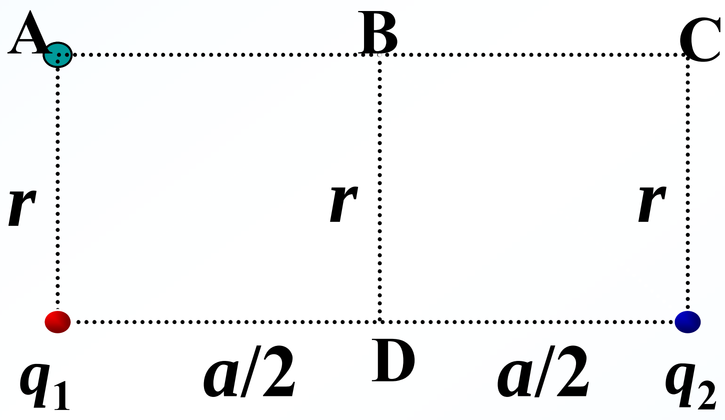
解： (1)

$$U_A=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+a^2}}$$

$$U_A=1800(\mathrm{V})$$

$$W_{pA}=qU_A=3.6\times10^{-6}(\mathrm{J})$$

$$A_{\infty A}=W_\infty-W_A=-3.6\times10^{-6}(\mathrm{J})\qquad \boxed{\Delta W=3.6\times10^{-6}(\mathrm{J})}$$



$$(2)\ U_{\mathrm{B}} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r'} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r'} = 0$$

$$A_{\mathrm{AB}} = q(U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}})$$

$$= 3.6\times10^{-6} - 0 = 3.6\times10^{-6}(\mathrm{J})$$

$$\boxed{\Delta W = -3.6\times10^{-6}(\mathrm{J})}$$

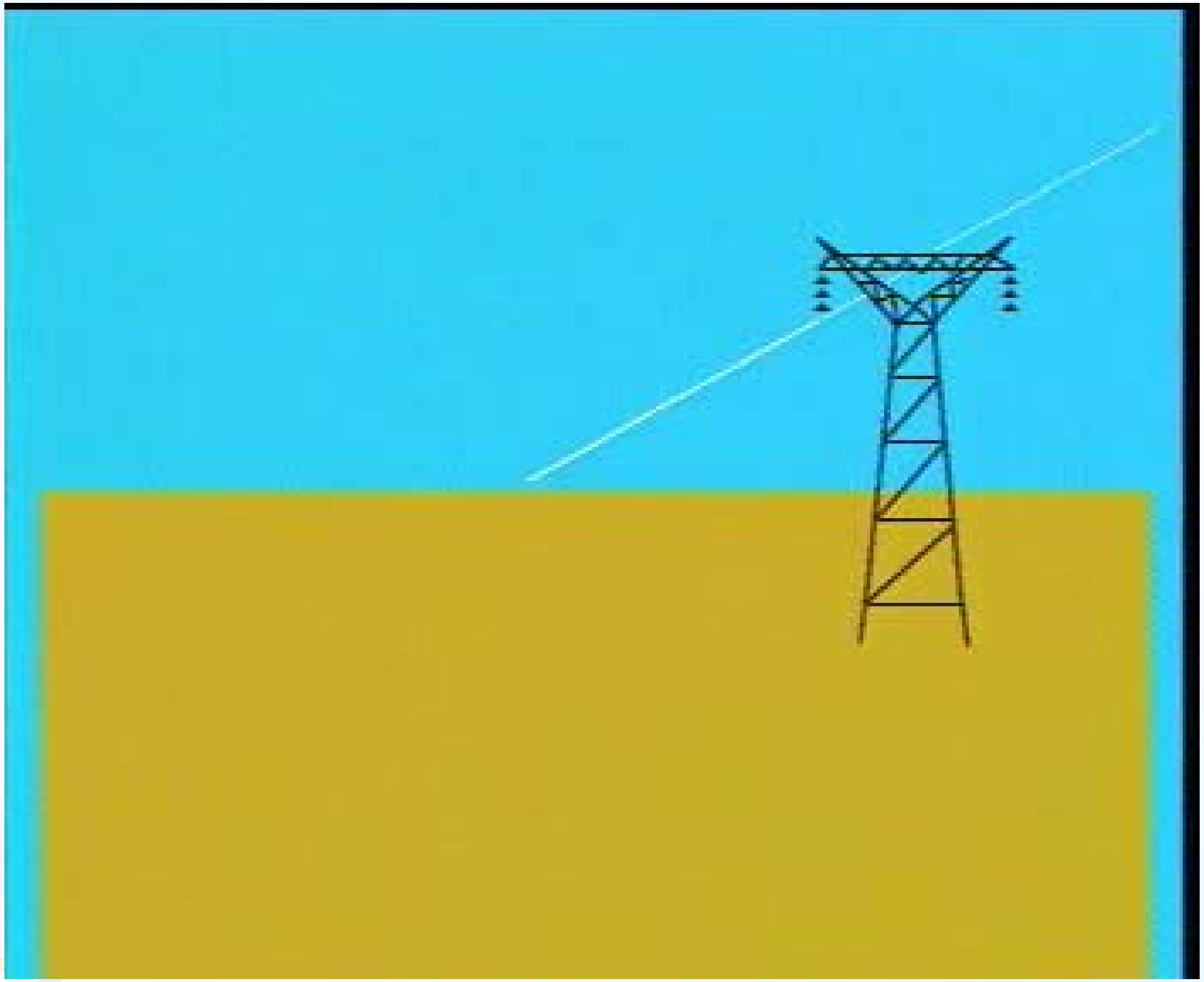
$$(3)\ U_{\mathrm{C}} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+r^2}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -1800(\mathrm{V})$$

$$U_{\mathrm{D}} = 0$$

$$A_{\mathrm{CD}} = W_{\mathrm{C}} - W_{\mathrm{D}} = q(U_{\mathrm{C}} - U_{\mathrm{D}}) = -3.6\times10^{-6}(\mathrm{J})$$

$$\Delta W = 3.6\times10^{-6}(\mathrm{J})$$

跨步电压



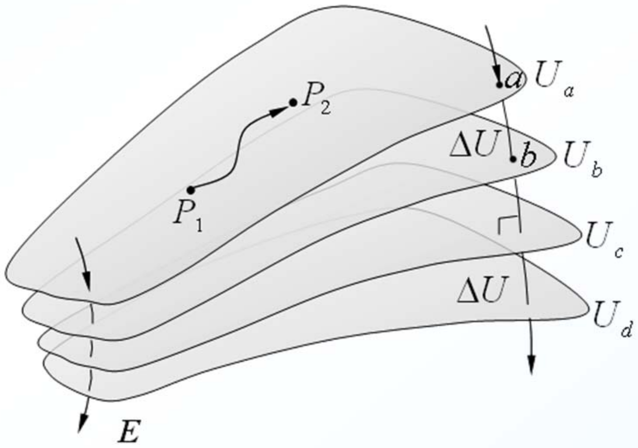
五、等势面 电势梯度

1. 等势面(equipotential surface)

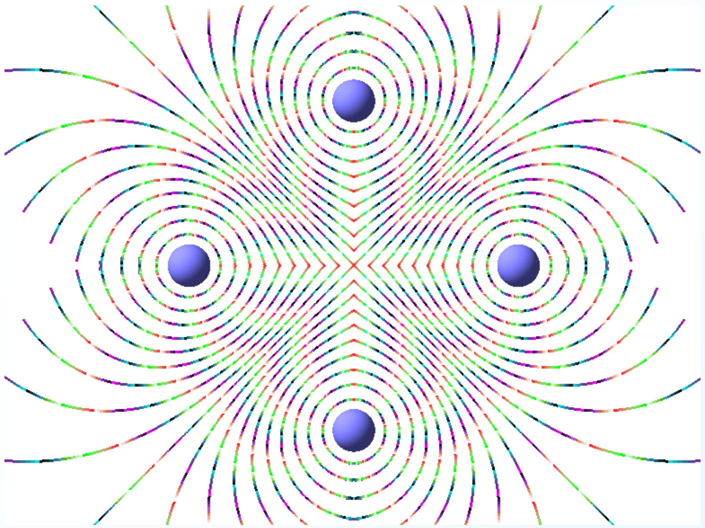
电场中电势相等的点组成的面叫等势面.

规定相邻等势面之间的电势差相等.

$$\Delta U_{ab}=\Delta U_{bc}=\Delta U_{cd}$$



等势面的疏密反映了场的强弱



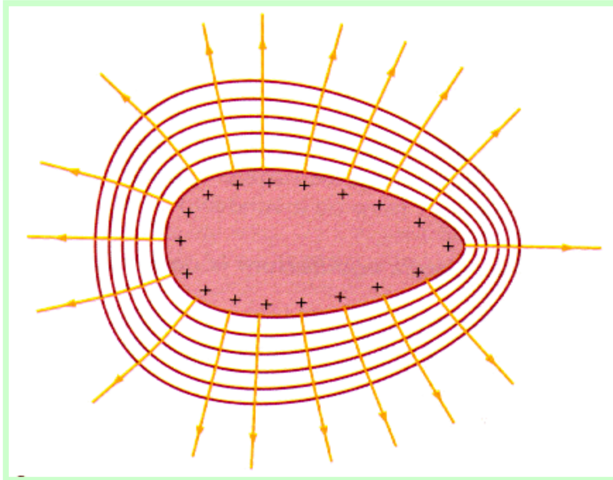
2. 电场线与等势面的关系

1) 电场线处处垂直于等势面

在等势面上任取两点P_1、P_2，则

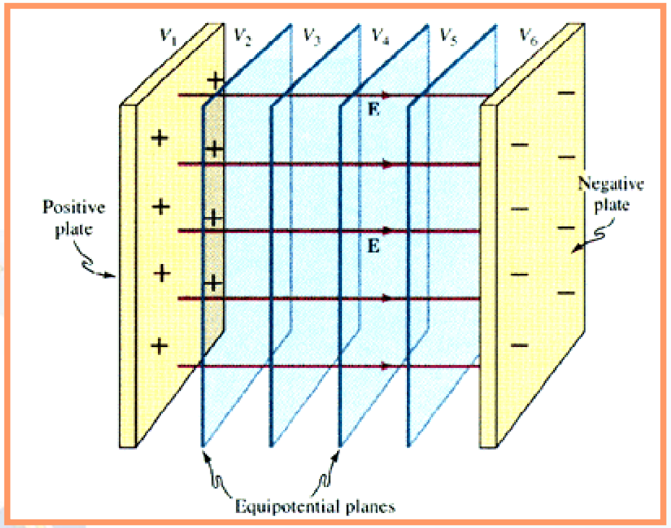
$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = U_{P_1} - U_{P_2} \xrightarrow{\text{等势}} = 0$$

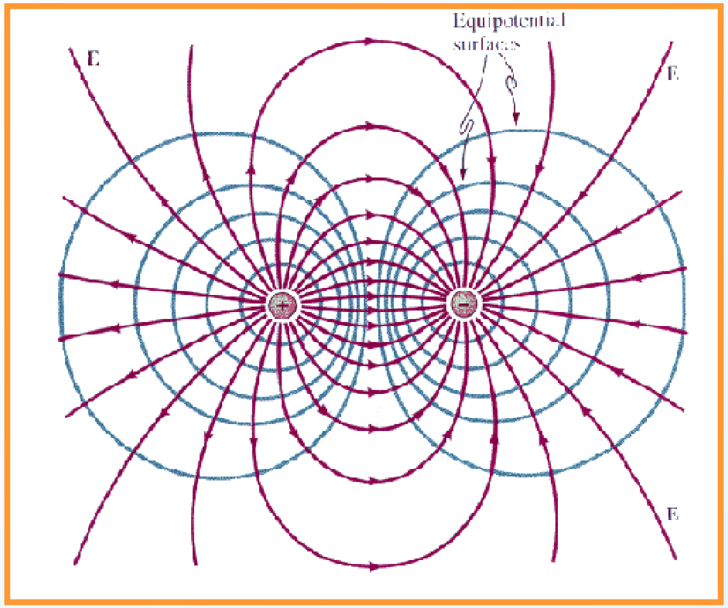
$$\cos\theta = 0, \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{l}$$

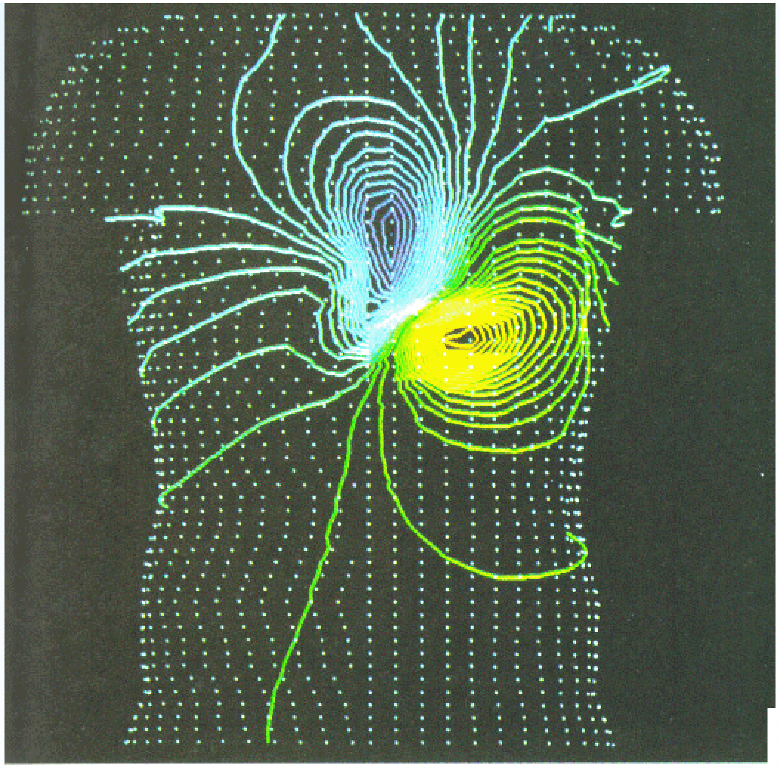


2) 电场线指向电势降的方向

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = U_{P_1} - U_{P_2}$$

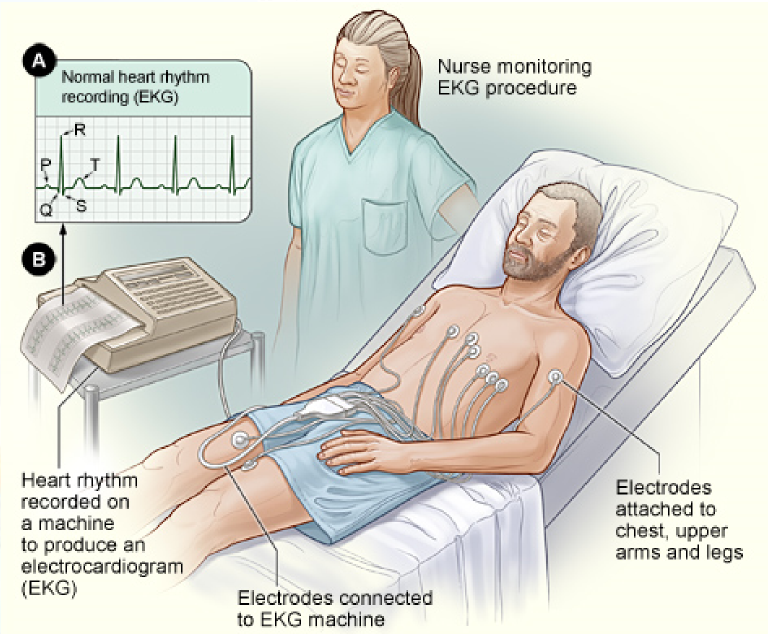


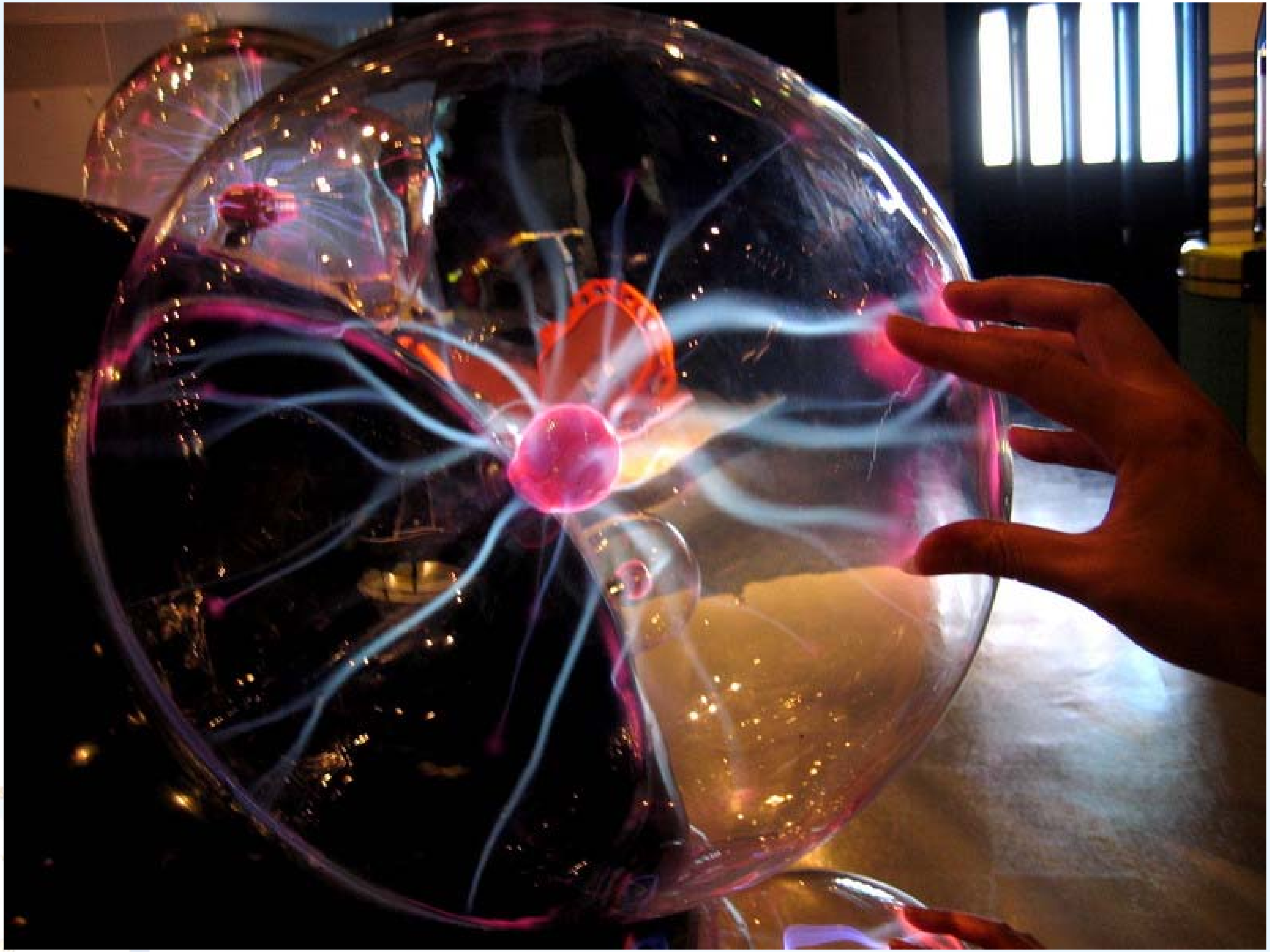




心脏周围的等势线

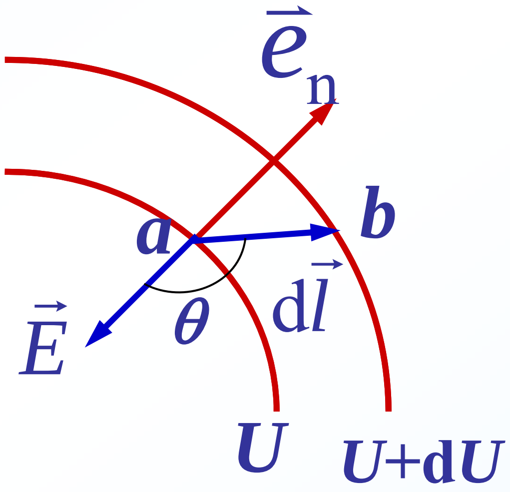
心电图





3. 电场强度与电势梯度的关系

电势分别为U和$U+\mathrm{d}U$的邻近等势面，$\vec{e}_{\mathrm{n}}$ 为等势面法向且指向电势升高的方向，如有正的试验电荷从a点移到b点，则电场力做功：



$$\mathrm{d}A_{ab} = q_0\left[U - (U + \mathrm{d}U)\right] = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$-\mathrm{d}U = E\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$E\cos\theta = E_l = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l} \qquad \vec{E}_{\mathrm{n}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

结论： 电场中某一点的电场强度沿任一方向的分量，等于这一点的电势沿该方向的变化率的负值.

$$\boxed{\vec{E}_{\mathrm{n}}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

$\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{e}_{\mathrm{n}}$ 称电势梯度矢量，记为 $\mathrm{grad}\,U$或 ∇U

电势梯度的大小等于电势在该点最大空间变化率；方向沿等势面法向, 指向电势增加的方向.

$$\boxed{\vec{E}=-\mathrm{grad}\,U=-\nabla U}$$

矢量式：
$$\mathrm{grad}\,U=\nabla U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

哈密顿算子：

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

拉普拉斯算子：

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

标量场梯度：

$$\operatorname{grad} U=\nabla U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

矢量场散度：

$$\operatorname{div}\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

矢量场旋度：

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)$$

矢量场旋度：

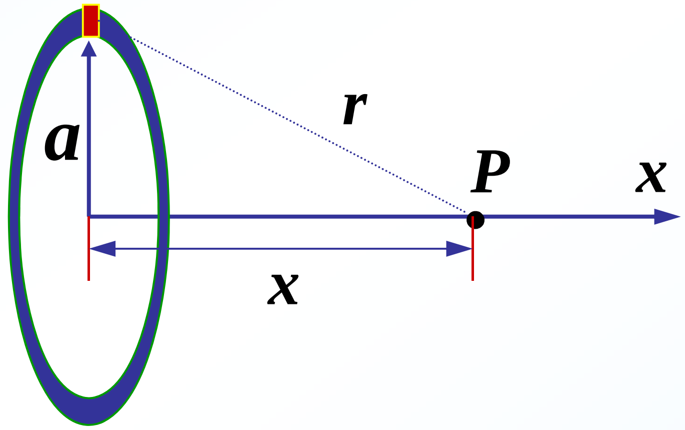
$$\operatorname{rot}\vec{A}=\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

行列式

例6-12. 均匀带电圆环, 带电量为q, 半径为a, 求轴线上任意一点的P电势和电场强度.



解: 在圆环上取点电荷dq, 令$U_\infty=0$

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l$$

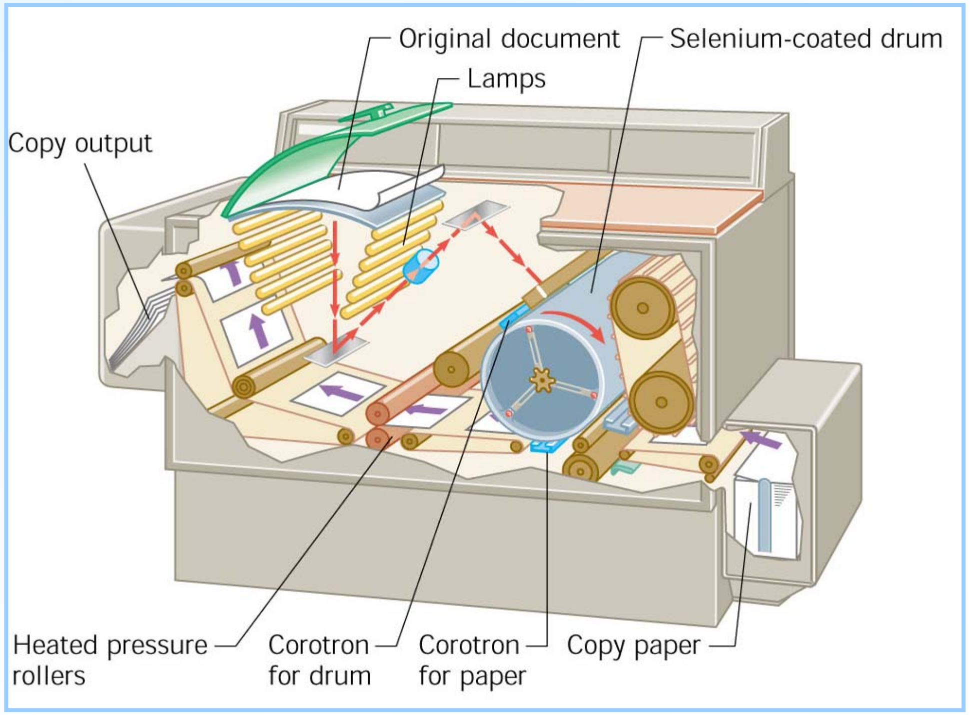
$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad U = \int \mathrm{d}U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{2\pi a}\lambda \mathrm{d}l = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}$$

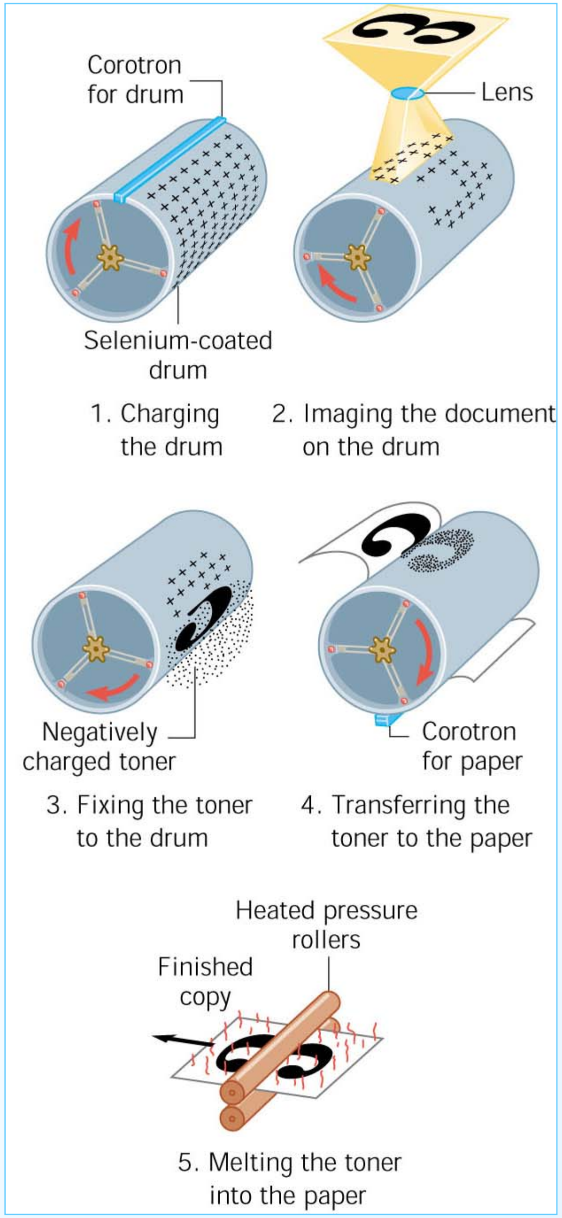
$$E = E_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}$$

结论: 某一点处电场强度沿某一方向的分量, 等于这一点的电势沿该方向的空间变化率的负值.

静电的应用

静电复印机原理





通过曝光、扫描将原稿的光学模拟图像通过光学系统直接投射到已被充电的感光鼓上产生**静电潜像**，再经过显影、转印、定影等步骤，完成复印过程.