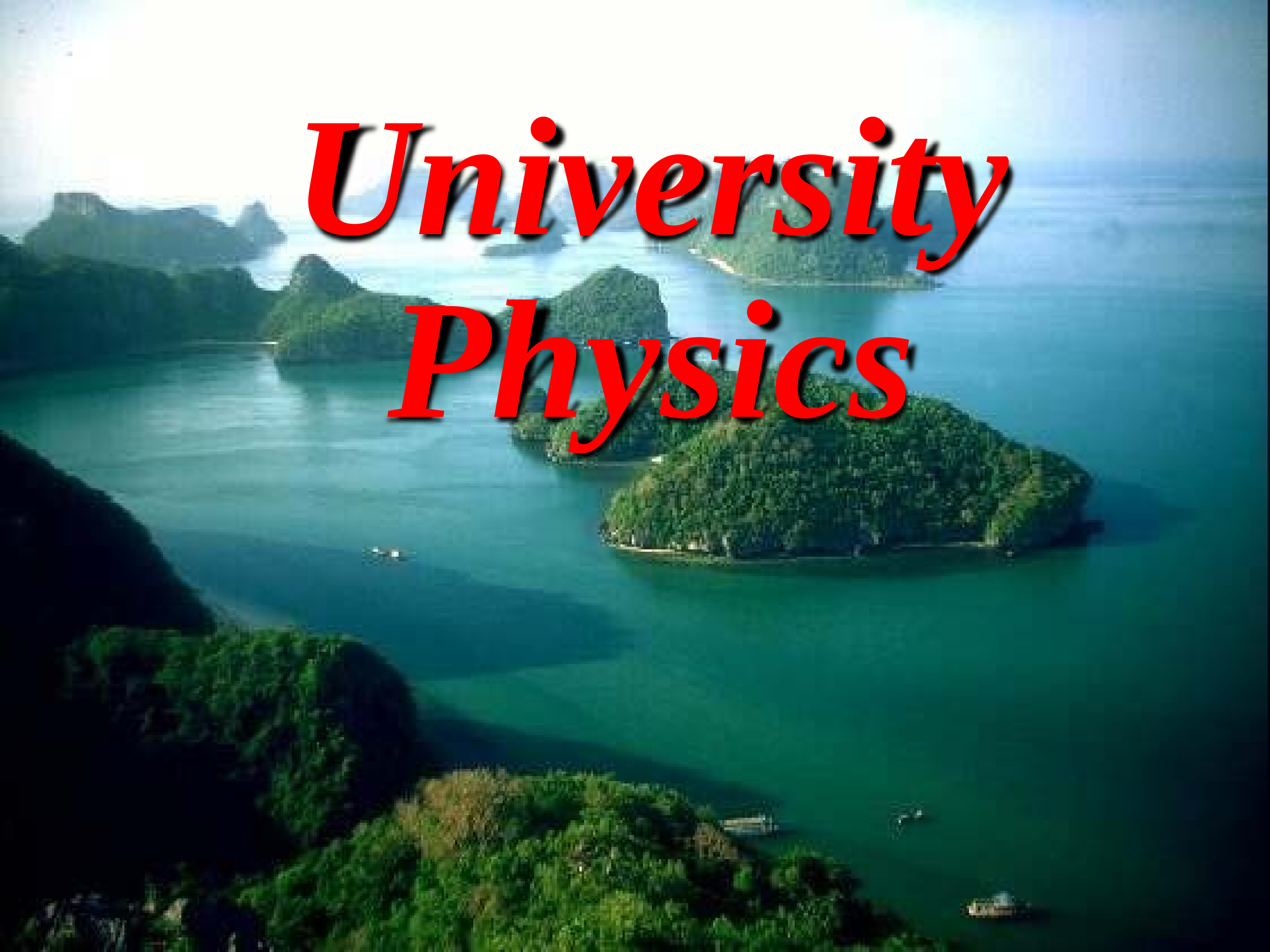
University Physics



复　习

一 复习要求

- 抓好对基本内容和基本要求的理解和掌握
- 注意各章解题思路和思考题
- 重视具有普遍性的问题

  矢量性　（力学、电学、磁学、电磁感应等）

  微元选取（元功、电荷元、电流元、面元等）

  叠加原理（力的叠加、场的叠加）　（补偿原理）

  适用条件（库仑、高斯、安培定理求场强条件等）

- 考试题目的类型

  选择、~~填空、计算~~

二 复习方法

1 对比法

$$\begin{cases} \text{静电场} \quad \boldsymbol{E}, \boldsymbol{D} \quad \text{电荷元} \quad \dfrac{1}{2}DE \quad \text{库仑力} \quad \oint E \cdot d\boldsymbol{S} \\ \text{静磁场} \quad \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H} \quad \text{电流元} \quad \dfrac{1}{2}BH \quad \text{安培力} \quad \oint H \cdot dl \end{cases}$$

2 串联法

$$Q \Rightarrow \boldsymbol{E} \Rightarrow u(\Delta u) \Rightarrow C \Rightarrow W_e$$

$$I \Rightarrow \boldsymbol{B} \Rightarrow \phi_m \Rightarrow L(M) \Rightarrow W_m = IL^2/2$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} \Rightarrow \varepsilon = \int_a^b \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \cdot dl$$

$$F_m(M_{\text{力矩}}) \Rightarrow f = qv \times B$$

三 静电场

- 库仑定律 → 库仑定律的直接运用

电场强度 $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$

$$\begin{cases} \vec{E} = \sum \vec{E}_i \\ \vec{E} = \int \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \end{cases}$$

- 常用的几个电场强度

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- 电通量、高斯定理（静电场的有源性）

$$\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i (S内)$$

$\vec{E} \Rightarrow u_P = \int_P^{"o"} \vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow \Delta u = \int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}$

已知电荷分布求电势

$$u = \sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \qquad u = \int_Q \frac{dq_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

电荷有限分布，电势零点取在无限远处

已知场强分布求电势

$\vec{E} = -\nabla u$

$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ （静电场的保守性）

- 导体的静电感应

导体的场强分布特征 $\vec{E}_{内} = 0,\ \vec{E}_{切} = 0 \quad E_{表} = \sigma / \varepsilon_0$

导体的电荷分布特征 （表面、与曲率相关等）

导体的电势分布特征 ⟶ 求解感应电荷分布

- 电容与电容器

$C = q / \Delta u$ → 三个典型电容器的电容 $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$

- 电容器的储能

$$W_e = \frac{1}{2} C \Delta u^2 = \frac{1}{2} Q \Delta u = \frac{Q^2}{2C}$$

- 静电场的能量

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} DE dV \quad W_e = \frac{1}{2} \sum q_i u_i \quad W_e = \int_Q u dq$$

- 电介质 ~~电介质分类~~ → ~~极化和束缚电荷~~ → ~~电荷面密度~~

电位移矢量 ← 含介质的高斯定理 ← $\sigma' = \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right) \sigma_0$

→ 电介质对电场、电势、电容、电场能量的影响

- 静电学中需注意的几个问题：

- 库仑定理应用的条件 —— 点电荷(非点电荷物体的相互作用力)
- 高斯定理求场强的条件 （球形对称、轴对称、面对称）

  注意：高斯定理 + 补偿原理
- 用静电场的环流定理分析给定电场的保守性
- 电势零点的选取问题 （有限带电体与无限大带电体，一致性）
- 在电场不连续的空间中求电势时需分步积分
- 求解电场强度的三种方法的应用和选择
- 导体与非导体间在场强分布、电势特点、电荷分布上的区别
- 会分析电容器串并联的问题
- 用场的观点和电容储能的观点求解电场能量

四 稳恒磁场

- 磁感应强度和磁场强度的确定
  - 毕 — 萨定律 → 电流元的选取，磁场的叠加原理

    注意：确定磁感应强度与电场强度方向的区别

几种常用载流体产生的磁感应强度

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\qquad B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R_2+x^2)^{3/2}}\qquad B=\mu_0 nI\qquad B=\frac{\mu_0 i}{2}$$

（运动电荷产生的磁场） $$B=\frac{\mu_0 q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$$

$$\vec{B}\begin{cases}\phi_m=\int_S B\cdot dS \longrightarrow \oint_S B\cdot dS=0 & \text{（磁场的无源性）}\\ \oint_L B\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\sum I_i(L\text{内}) \longrightarrow & \text{求电流对称分布的磁感应强度}\\ dF=Idl\times B \longrightarrow f=qv\times B \longrightarrow & \text{霍尔效应}\\ \boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}_m\times B \longrightarrow & \text{线圈在磁场中转动（分析趋势）}\end{cases}$$

- 磁介质　~~磁介质的分类~~ → ~~磁化的微观解释~~ → ~~磁化~~

~~铁磁质~~ ← 含介质的安培环路定理 ← ~~强度和束缚电流~~

~~铁磁质~~ → ~~磁滞回线（会分析和描述）~~

→ ~~磁化机理的微观解释~~

- 磁学中需注意的几个问题：
  - 安培环路定理 + 补偿原理 → 注意对称性，电流方向
  - 磁矩的概念和计算 → 磁力矩的计算
  - 运动带电体产生的磁场 → 分析电荷元 + 叠加原理
  - 用安培力公式和磁力矩公式分析载流体的运动趋势
  - 磁力的功与磁通量的关系
  - 洛伦兹力

$$f = qv \times B = q\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$f = q\boldsymbol{E} + qv \times B$$

→ 带电粒子在电场和磁场中的典型运动规律

- 磁介质磁化对磁场、能量的影响

五 电磁感应

❶ 感应电动势的计算

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{动} = \int (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} \\ \varepsilon_{感} = \int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \\ \varepsilon_{12} = -M\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \\ \varepsilon_{21} = -M\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

❷ *L*、*M* 的计算

❸ 磁场能量

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}LI^2 \qquad W_{\mathrm{m}} = \int_V \frac{1}{2}BH\mathrm{d}V = \int \frac{B^2}{2\mu}\mathrm{d}V$$

❹ ~~位移电流~~

$$I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{\delta}_D = \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}$$

~~麦克斯韦方程组四个方程的涵义~~

例1. 在真空中有两块相距为d ($d \ll \sqrt{S}$)的平行金属板，面积均为S，分别带有电量$+q$和$-q$，判断下列说法是否正确？

①根据库仑定律,两板之间的相互作用力为：$F=\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$；✗

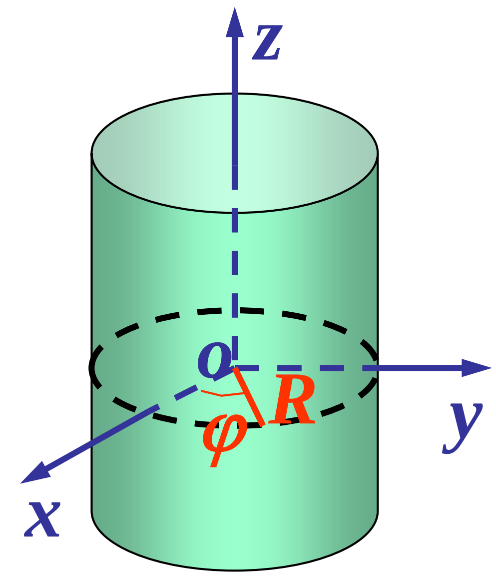
② 因为$F=qE$，而两板间场强 $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，其中 $\sigma=\dfrac{q}{S}$，✗

所以 $F=\dfrac{q^2}{\varepsilon_0 S}$；

③ 由于一个板上的电荷在另一个板处产生的电场为 ✓

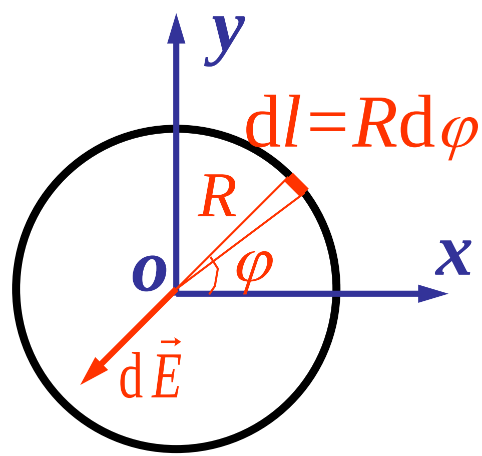
$E'=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，所以 $F=qE'=\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$

例2. 一无限长圆柱面电荷面密度为 $\sigma=\sigma_0\cos\varphi$, 式中 φ 为半径 R 与 x 轴之间的夹角. 求圆柱轴线上一点的场强.



解: 圆柱面 = Σ平行于轴的长直线

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma\,\mathrm{d}l}{2\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma_0\cos\varphi\,R\,\mathrm{d}\varphi}{2\pi\varepsilon_0 R}$$



$$E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int-\mathrm{d}E\cos\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}-\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

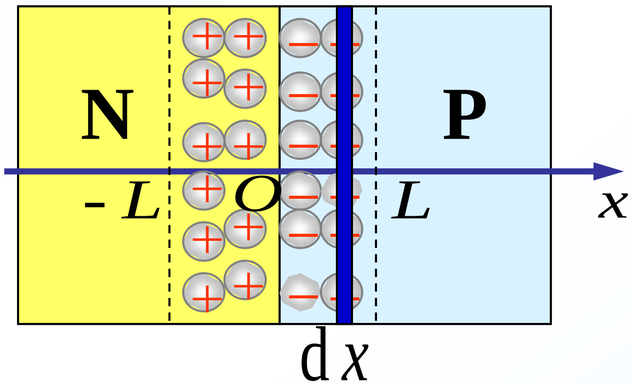
$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=\int-\mathrm{d}E\sin\varphi$$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=0$$

$$\boxed{\vec{E}=\vec{E}_x=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{i}}$$

例3. 已知PN结阻挡层内电荷体密度分布为

$$\rho(x)=\begin{cases}0 & (x>L,\ x<-L)\\ -ax & (-L\le x\le L)\end{cases}$$



求其阻挡层内外的电场.

解： 电荷分布的对称性分析——

电荷体密度 ρ 随 x 变化呈面对称分布

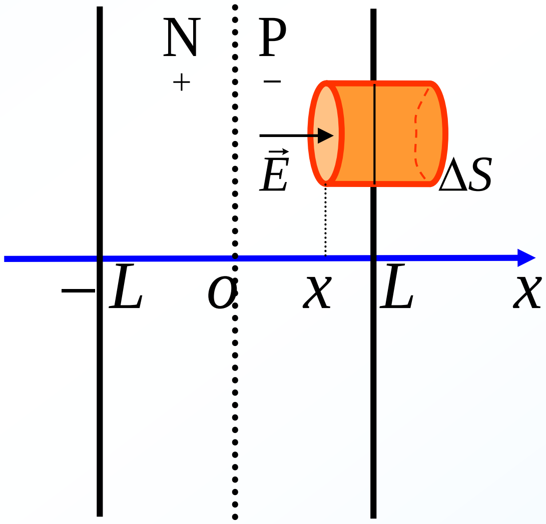
$|x|\ge L$ 区域：P、N区电荷的电场相互抵消：$E=0$

$|x|\le L$: 厚度dx的薄层, 电荷面密度dσ

$$\mathrm{d}\sigma=\rho\,\mathrm{d}x\ \Rightarrow\ \mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E=2\int\mathrm{d}E=\int\frac{\mathrm{d}\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{a}{\varepsilon_0}\int_x^L x\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2\varepsilon_0}(L^2-x^2)$$

$|x| \le L$：选如图高斯面



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

穿入

$$= \int_{左} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{右} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} = -E\cdot\Delta S$$

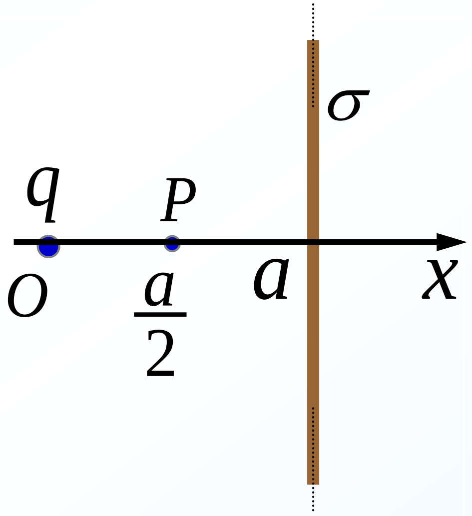
$$\vec{E} = 0 \qquad \cos\theta = 0$$

$$\sum q_{内} = \int \rho dV = \int_x^L -ax\cdot\Delta S dx = -a\Delta S\frac{1}{2}(L^2 - x^2)$$

由高斯定理： $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

$$\therefore \quad E = \frac{a}{2\varepsilon_0}(L^2 - x^2)$$ **方向沿** $+x$

例4. 在与面电荷密度为σ的“无限大”均匀带电平板相距a处有一点电荷q，求点电荷与平板垂线中点处的电势U_P.



解I： 点电荷q在P处电势：

$$U_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{a}{2}}$$

无限大带电平板在P处电势：

$$U_2 = Ed = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{a}{2}$$

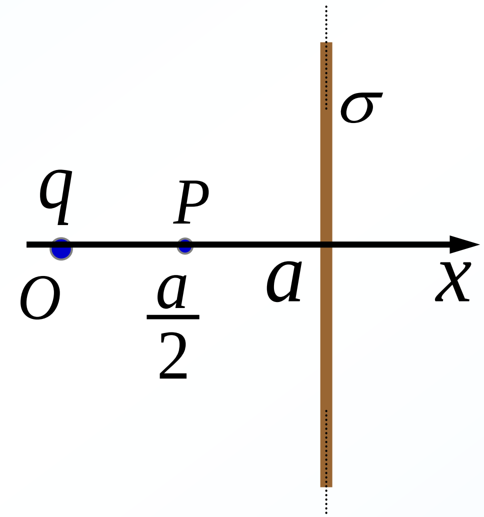
$$U_P = U_1 + U_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a} - \frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}$$

对不对？

错在哪里？ $U_1 \Rightarrow U_\infty = 0$

$U_2 \Rightarrow U_a = 0$

零电势点不统一不能叠加.



解II：选共同的零势点

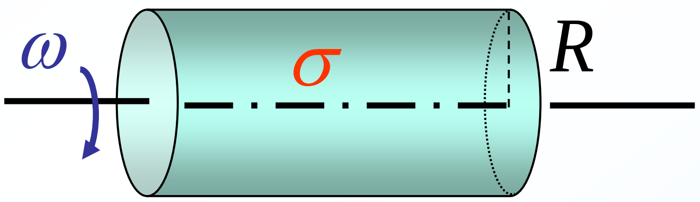
$$U_a = 0$$

场强积分法： $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$$U_P = \int_P^a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\frac{a}{2}}^a E_x \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac{a}{2}}^a \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}$$

例5. 一半径R，面电荷密度为σ的无限长均匀带电圆筒绕轴线以角速度ω匀速旋转，求圆筒内部的磁感应强度B.



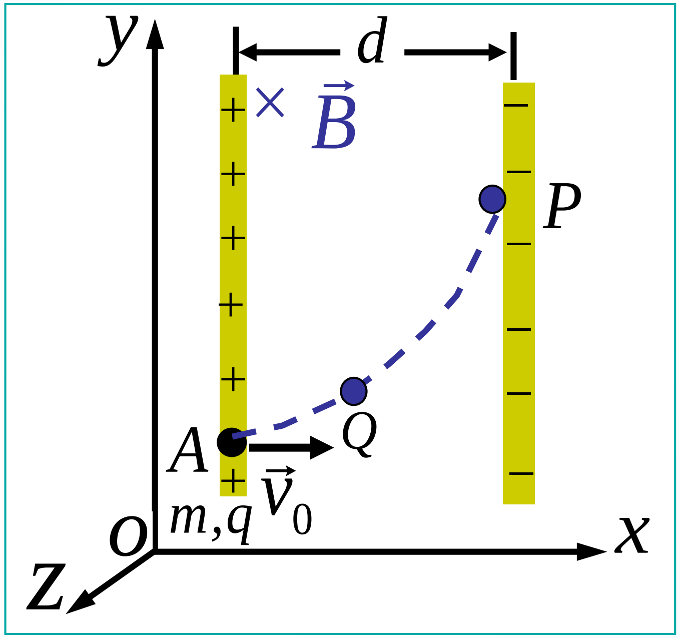
解： 等效于长直螺线管 $B = \mu_0 nI$

单位长度上电流 $nI = ?$

$$nI = \frac{NI}{L} = 2\pi R \cdot \sigma \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 R\sigma\omega$$

例6. 如图所示一空间区域，已知 $\vec{E}=E\vec{i}$, $\vec{B}=-B\vec{k}$. A处一个 $m,+q$ $(\beta=\frac{q}{m})$ 的粒子以 $\vec{v}_0=v_0\vec{i}$ 入射，为使粒子在P点不与板相碰，求P点处轨道曲率半径r_P.



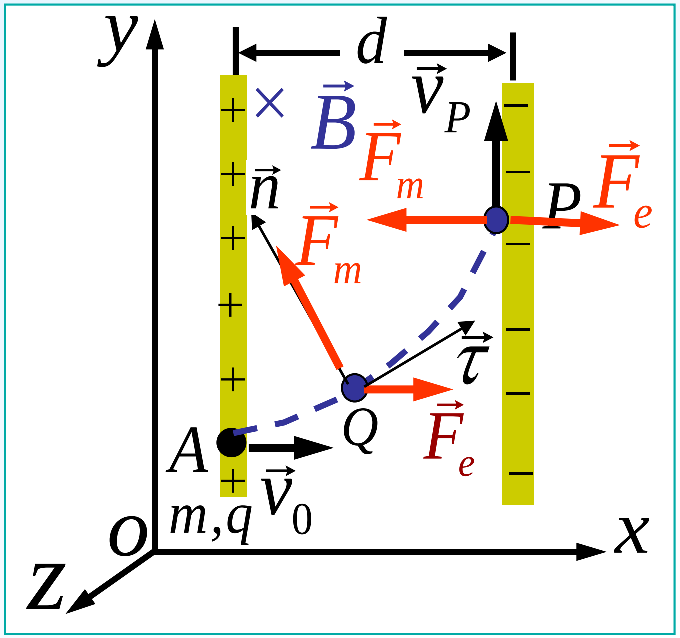
解 定性分析q在电磁场中的运动：

磁场使粒子匀速率圆周运动，

电场使粒子沿+x方向匀加速直线运动

由对称性原理：轨道为平面曲线

不与板相碰：$\vec{v}_P$ //板



q在任意位置Q和位置P受力如图

P点法向方程

$$Bqv_P - qE = m\frac{v_P^2}{r_P} \qquad \textbf{(1)}$$

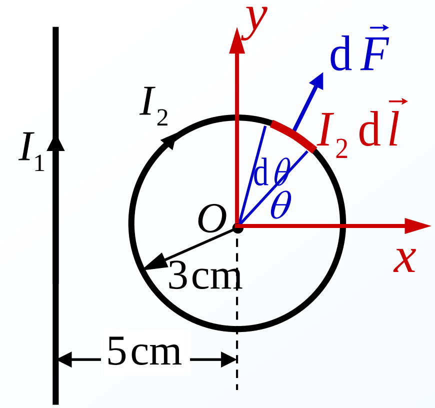
过程能量方程

$$qEd = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \textbf{(2)}$$

由 **(1) (2) 得:**

$$r_P = \frac{m(v_0^2 + 2\frac{q}{m}Ed)}{q(B\sqrt{2\frac{q}{m}Ed + v_0^2} - E)} = \frac{v_0^2 + 2\beta Ed}{\beta(B\sqrt{2\beta Ed + v_0^2} - E)}$$

3．如图所示, 在长直导线旁有一半径为3cm的圆型线圈, 圆心到直导线的距离为5cm, 导线中通有电流 I_1=6A, 圆线圈通有电流 I_2=10A. 求电流作用在圆线圈上力的大小和方向.



解：建立图示坐标, 电流元 $I_2\mathrm{d}l$ 受力

$$\mathrm{d}\vec{F} = I_2\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}_1$$

大小： $\mathrm{d}F = I_2\,\mathrm{d}l \cdot B_1 = I_2 R\,\mathrm{d}\theta \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi(5+x)}$ **方向如图**

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R\cos\theta}{2\pi(5+R\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$F_x = \int \mathrm{d}F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{5+3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(\frac{5}{\sqrt{5^2-3^3}}-1\right) = 1.88\times10^{-5}\ \mathrm{N} \qquad F_y = 0$$

Good luck

作 业 解 析

一、选择题

2．若用条形磁铁竖直插入木质圆环中，则环中[　　]

(A) 产生感应电动势，也产生感应电流

(B) 产生感应电动势，不产生感应电流

(C) 不产生感应电动势，也不产生感应电流

(D) 不产生感应电动势，产生感应电流

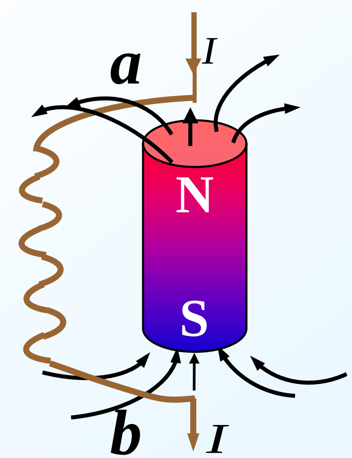
3. 在一个磁性很强的长的条形磁铁附近放一条可以自由弯曲的软导线，如图所示。当电流从上向下流经软导线时，软导线将[ ]

(A) 不动
(B) 被磁铁推至尽可能远
(C) 被磁铁吸引靠近它，但导线平行于磁棒
(D) 缠绕在磁铁上, 从上向下看, 电流是顺时针方向流动的
(E) 缠绕在磁铁上, 从上向下看, 电流是逆时针方向流动的

解：由安培定律可知, 导线上部*a*点处受力方向垂直向里

导线下部*b*点处受力方向垂直向外

导线将缠绕在磁铁上, 从上向下看, 电流是逆时针的



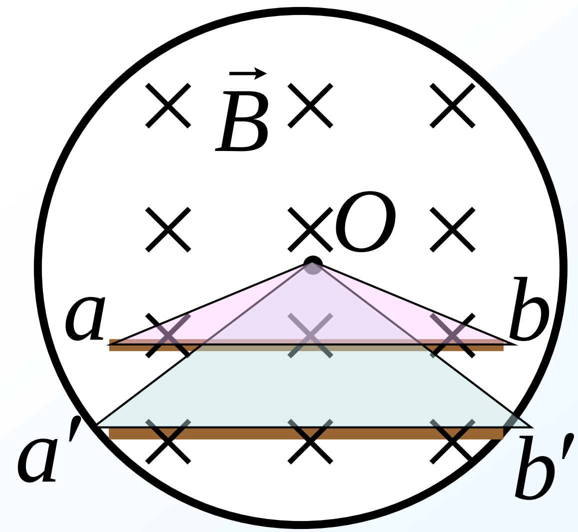
7．在圆柱形空间内有一磁感应强度为$\vec{B}$的均匀磁场，如图所示．$\vec{B}$的大小以速率$\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$变化．有一长度为$L_0$的金属棒先后放在磁场的两个不同位置*ab*和*a'b'*，那么，金属棒在这两个位置时棒内的感应电动势的大小关系为

(A) $\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{a'b'}\neq 0$

(B) $\varepsilon_{a'b'}>\varepsilon_{ab}$

(C) $\varepsilon_{a'b'}<\varepsilon_{ab}$

(D) $\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{a'b'}=0$



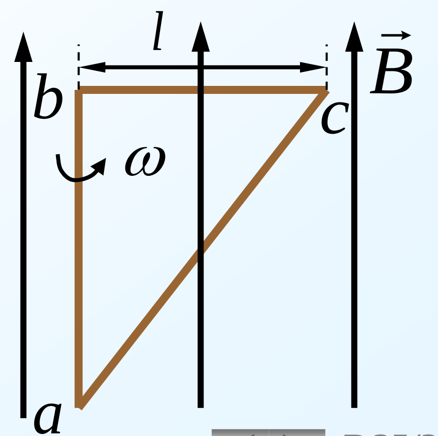
解： $\varepsilon=\int_S \dfrac{\partial B}{\partial t}\cdot \mathrm{d}S$

二、填空题

1．一根直导线在磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中以速度 $\vec{v}$ 切割磁力线运动，导线中对应于非静电力的场强(称作非静电场场强) $\vec{E}_{\mathrm{k}}=$ $\underline{\quad \vec{v}\times\vec{B} \quad}$。

解：$\varepsilon=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_l\vec{E}_{感}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

6．如图所示，直角三角形金属框架*abc*放在均匀磁场中，磁场 $\vec{B}$ 平行于*ab*边，*bc*的长度为*l*。当金属框架绕*ab*边以匀角速度ω转动时($\vec{\omega}$ 的方向为$\vec{B}$的方向)，*abc*回路中的感应电动势$\varepsilon=$____________；*a*、*c*两点之间的电势差U_a-U_c =______________。



解：*abc*回路Φ_{m}不变, ε=0

$$U_a-U_c=U_b-U_c=-\frac{1}{2}B\omega l^2$$

8．反映电磁场基本性质和规律的积分形式的麦克斯韦方程组为：

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_{i=0}^{n} q_i \qquad (1)$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \qquad (3)$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad (2)$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_{i=0}^{n} I_i+\frac{d\Phi_e}{dt} \qquad (4)$$

试判断下列结论是包含于或者等效于哪一个麦克斯韦方程式的，将你确定的方程式用代号填在相应结论后的空白处：

（1）变化的磁场一定伴随有电场：___2___；

（2）磁感应线是无头无尾的：___3___；

（3）电荷总伴随有电场：___1___。

三、计算题

1. 将等边三角形平面回路ACDA放在磁感应强度为 $\vec{B}=\vec{B}_0 t$ (其中 $\vec{B}_0$ 为常矢量)的均匀磁场中, 回路平面垂直于磁场方向, 如图6-9所示. 回路的CD段为滑动导线, 以匀速 $\vec{v}$ 远离A端运动, 且始终保持回路为等边三角形. 设滑动导线CD到A端的垂直距离为x, 且初始x=0. 试求回路ACDA中的感应电动势 ε 和时间 t 的关系.

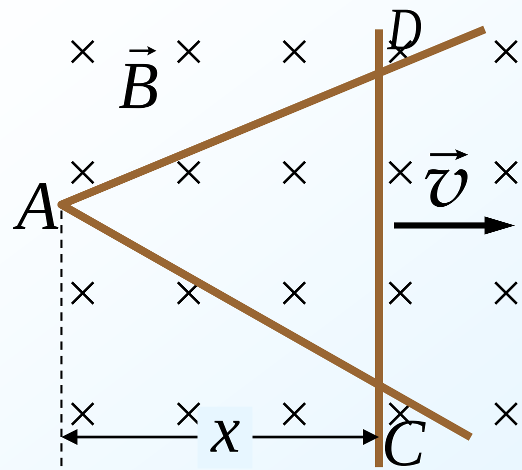
解:

$$\Phi_{\mathrm{m}}=\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_S B_0 t \mathrm{d}S$$

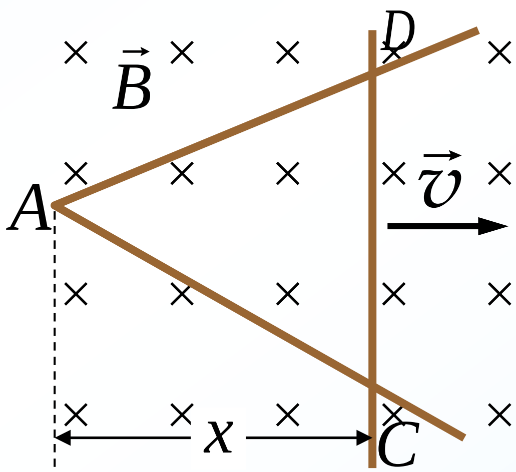
$$=B_0 t\int_S \mathrm{d}S=B_0 tS$$

$$=B_0 t x^2\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}B_0 v^2 t^3$$

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{3}B_0 v^2 t^2$$



另解:



$$\varepsilon_1 = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int \frac{\mathrm{d}(B_0 t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}S = \int B_0 \mathrm{d}S$$

$$= B_0 x^2 \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} B_0 v^2 t^2$$

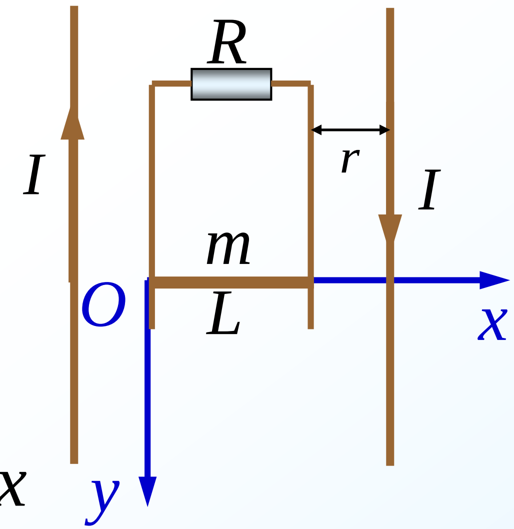
$$\varepsilon_2 = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{CD} = vB \cdot 2x \tan 30°$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} B_0 v^2 t^2$$

$$\therefore \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} B_0 v^2 t^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} B_0 v^2 t^2 = \sqrt{3} B_0 v^2 t^2$$

4. 如图所示, 在两载流均匀为I的长直导线中间放一固定倒U型支架, 支架由导线和电阻R串联成. 另一质量为m, 长为L的金属棒, 可在支架上无摩擦滑动, 现静止释放, 求能达到的最大速度.



解: 建立如图坐标, X处合场强为:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x+r} + \frac{1}{L+r-x}\right)$$

$$\Phi_m = \int_0^L By\mathrm{d}x = y\int_0^L \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x+r} + \frac{1}{L+r-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{r+l}{r}y = \alpha y \qquad \alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{r+l}{r}$$

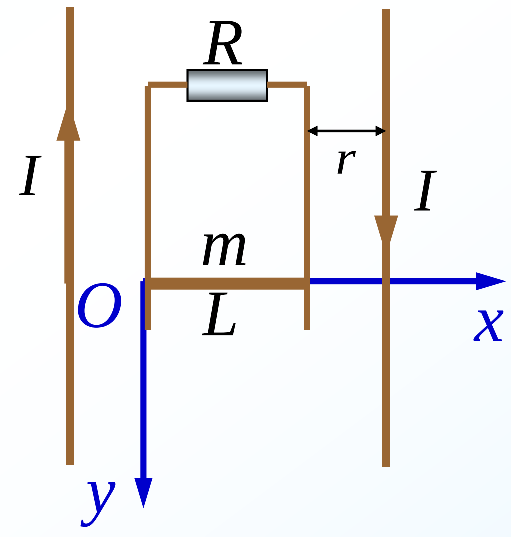
$$|\varepsilon| = \frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha y) = \alpha v \qquad i = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\alpha}{R}v$$

$$F=\int_0^L Bi\mathrm{d}x=\int_0^L\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x+r}+\frac{1}{L+r-x}\right)i\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{r+l}{r}i=\alpha i$$

$$mg-\alpha i=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\alpha^2}{mR}v=g$$



分离变量解方程： $$\int_0^v\frac{mR}{-\alpha^2 v+mRg}\mathrm{d}v=\int_0^t\mathrm{d}t$$

$$v=\frac{mgR}{\alpha^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{mR}t}\right)\qquad v_{\max}=\frac{mgR}{\alpha^2}$$