

# 武汉大学计算机学院2006-2007学年第一学期

## 2005级《离散数学》考试试题

学号：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 成绩：\_\_\_\_\_

注意：所有答案请一律写在试卷纸上并注明题目序号！计算题要求有计算过程！

一、试求下述命题公式 $G$ 的主析取和主合取范式： (10分)

$$P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

二、 (12分，6+6)

(1) 试证明： $\forall xP(x) \vee \exists xQ(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x) \rightarrow \exists xQ(x)$ ;

(2) 试证明下列结论的有效性(要求写证明序列):

前提： $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ , 结论： $\forall xP(x) \vee \exists xQ(x)$ 。

三、设集合 $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ 。定义 $A$ 上的二元关系“ $|$ ”， $m|n$ 表示 $m$ 整除 $n$  ( $m, n \in A$ )，完成下列各题： (12分，4+4+4)

(1) 证明 $\langle A, | \rangle$ 是偏序集；

(2) 设 $B \subseteq A$ ，求下列元素（若存在）：

(i)  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ，求 $B$ 的最大元和极大元；

(ii)  $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ，求 $B$ 的最大下界和最小上界；

(3) 求 $A$ 的真子集 $C$ ，使得 $\langle C, | \rangle$ 是全序集，且使 $|C|$ 为满足上述条件的最大值。

四、设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $B = \{a, b, c\}$ ，设 $B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$ ，设 $X = \{f \mid f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{a, b\}\}$ ， $Y = \{f \mid f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{b, c\}\}$ ， $Z = \{f \mid f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{a, c\}\}$ ， $T = \{f \mid f \in B^A \wedge f \text{ 是满射} \}$  (16分，4+4+4+4)

(1) 试求 $|B^A|$ ， $|X|$ ， $|Y|$ 和 $|Z|$ ；

(2) 试用枚举法表示集合 $X \cap Y$ ， $Y \cap Z$ 和 $Z \cap X$ ；

(3) 证明： $T = B^A - (X \cup Y \cup Z)$ ；

(4) 试利用容斥原理求 $|T|$ ；

五、 设 $\langle G, *, e \rangle$ 是一个群, 并且对群 $G$ 中的任意两个元素 $a$ 和 $b$ 有:  $(a * b)^3 = a^3 * b^3$ : (18分, 每小题3分)

(1) 试证明:  $\forall a, b \in G, (a * b)^2 = b^2 * a^2$ ;

(2) 试证明:  $\forall a, b \in G, a^3 * b^2 = b^2 * a^3$ ;

(3) 试证明: 如果 $c \in G$ 并且 $|c| = n$ , 则 $c^{n+1} = c$ ;

(4) 设 $c \in G, |c| = 5$ , 则 $\forall x \in G, c * x^2 = x^2 * c$ ;

(5) 设 $c$ 如上题所述, 则 $\forall x \in G, c * x^3 = x^3 * c$ ;

(6) 设 $c$ 如题(4)所述, 则 $\forall x \in G, c * x = x * c$ 。

六、 设 $\langle G, *, e_G \rangle$ 和 $\langle H, \cdot, e_H \rangle$ 是两个群,  $h: G \rightarrow H$ 是群 $G$ 到群 $H$ 的同态, 记 $h$ 的同态核为 $N = \{a \mid a \in G \wedge h(a) = e_H\}$ , 设 $K$ 是 $G$ 的子群, 试证明: (12分, 6+6)

(1)  $h^{-1}(h(K)) = KN$ , 其中,  $KN = \{k * n \mid k \in K \wedge n \in N\}$ ;

(2)  $h^{-1}(h(K)) = K$ , 当且仅当,  $N$ 是 $K$ 的子群。

七、  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $G$ 为简单连通平面图,  $|V| = 6$ ,  $|E| = 12$ , 证明:  $G$ 的每个区域均由3条边围成。 (10分)

八、 设有向树 $T$ 有17条边, 12片树叶, 4个4度内点 (即入度为1出度大于0的顶点), 1个3度内点, 求 $T$ 的树根的度数。 (10分)