第一章 函数与极限

第 1.1 节 映射与函数

一. 映射

1. 映射概念

定义. 设 X,Y 为非空集合, 则 X 到 Y 的对应法则 f 称为映射, 若 $\forall x\in X$, $\exists! y\in Y$ 与之对应, 记为 $f:X\to Y$, 其中 y 称为 x 的像, 记为 $f(x)$, x 称为 y 的一个原像.

称 X 为定义域, 记为 D_f, 像的全体称为值域, 记为 R_f, 或 $f(X)$.

若 $f(X)=Y$, 则称 f 为满射;

若 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, 即原像唯一, 则称 f 为单射;

即是单射又是满射的映射称为双射, 或一一映射.

2. 逆映射与复合映射

定义. 若 $f:X\to Y$ 是单射, 则 $\forall y\in R_f$, $\exists! x\in X$, 使得 $f(x)=y$, 由此得到对应关系 $f^{-1}:R_f\to X$, 称为 f 的逆映射.

定义. 设 $g:X\to Y_1$, $f:Y_2\to Z$, $Y_1\subset Y_2$, 则 $\forall x\in X$, $\exists! z=f(g(x))\in Z$ 与之对应, 由此得到对应关系 $f\circ g:X\to Z$, 称为 g 与 f 的复合映射.

二. 函数

1. 函数的概念

定义. 实数集之间的映射 $f:D\to\mathbb{R}$ 称为(实)函数, 习惯上记为 $y=f(x)$, $x\in D$, 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, 或者函数值.

2. 反函数与复合函数

定义. 设函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 是单射, 则逆映射 $f^{-1}:R_f\to D$ 称为 f 的反函数, 记为 $x=f^{-1}(y)$, 或者 $y=f^{-1}(x)$.

定义. 设有函数 $y=f(u)$, $u=g(x)$, 若 $R_g\subset D_f$, 则 g 与 f 的复合映射称为它们的复合函数, 其中 u 称为中间变量.

3. 函数的几种初等性质

(1) 有界性

定义. 若 $\exists M\in\mathbb{R}$, 使得当 $x\in D$ 时, 均有 $|f(x)|\leq M$, 则称 $f(x)$ 在 D 上有界; 否则, 称 $f(x)$ 在 D 上无界.

例. 证明: $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界.

证. 令 $x_n=\frac{1}{n\pi}$, 则 $|f(x_n)|=n\pi$, $\forall M>0$, 当 $n>\frac{M}{\pi}$ 时, $|f(x_n)|>M$, 证毕.

例. 证明: $f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界.

证. 令 $x_n=\frac{1}{n\pi}$, 则 $|f(x_n)|=n\pi$, $\forall M>0$, 当 $n>\frac{M}{\pi}$ 时, $|f(x_n)|>M$, 证毕.

(2) 单调性

定义. 若在区间 I 上, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加;

若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少.

例. 设 $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 单调增, 有反函数 $y = \arcsin x$, $x \in [-1,1]$;

设 $x = \cos y$, $y \in [0,\pi]$, 单调减, 有反函数 $y = \arccos x$, $x \in [-1,1]$;

设 $x = \tan y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 单调增, 有反函数 $y = \arctan x$, $x \in (-\infty,\infty)$;

设 $x = \cot y$, $y \in (0,\pi)$, 单调减, 有反函数 $y = \operatorname{arccot} x$, $x \in (-\infty,\infty)$.

(3) 奇偶性

定义. 设 D_f 关于原点对称, 若 $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$, 则称 $f(x)$ 为奇函数;

若 $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

(4) 周期性

定义. 若存在 $l > 0$, 使得 $f(x \pm l) = f(x)$, $\forall x \in D_f$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 称 l 为周期, 它不是唯一的, 通常说的周期是指最小正周期.

4. 初等函数

定义. 由常数函数及五类基本初等函数(幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数), 经过有限多次的四则运算, 复合所产生的, 可以用一个算式表示的函数, 称为初等函数.

例. $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $[x]$ 不是初等函数.

例. $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = \sqrt{x^2}$, 是初等函数.

5. 双曲函数

双曲正弦 $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; 双曲余弦 $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

双曲正切 $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

反双曲正弦 $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$;

反双曲余弦 $\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$;

反双曲正切 $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

第 1.2 节 数列的极限

一. 数列极限的定义

定义. 给定$\{x_n\}$, 若存在常数a, 使得$\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当$n>N$时, 有$|x_n-a|<\varepsilon$, 则称a为$\{x_n\}$的极限, 记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 或$x_n\to a(n\to\infty)$.

若$\{x_n\}$的极限存在, 则称该数列收敛, 否则称为发散.

二. 收敛极限的性质

1. 唯一性. 若$\{x_n\}$收敛, 则它的极限唯一.

2. 有界性. 若$\{x_n\}$收敛, 则它一定有界; 反之不对.

3. 保号性. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0(<0)$, 则$\exists N>0$, 当$n>N$时, $x_n>0(<0)$.

推论. 若除了有限多项之外, $x_n\ge 0(\le 0)$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则$a\ge 0(\le 0)$.

4. 归并性. 数列$\{x_n\}$收敛到$a\Leftrightarrow$它的所有子列均收敛到a.

注. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$.

三. 数列极限的例子

例. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n+2}=\dfrac{2}{3}$.

证. $\left|x_n-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{1}{3(3n+2)}<\dfrac{1}{9n}<\dfrac{1}{n}$, $\forall\varepsilon>0$, 要使$\left|x_n-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$, 只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 即$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 故取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 当$n>N$时, $\left|x_n-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$, 证毕.

例. 当$|q|<1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

证. $|x_n-0|=|q|^n$, $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 要使$|x_n-0|<\varepsilon$, 只要$|q|^n<\varepsilon$, 即$n\lg|q|<\lg\varepsilon$, 即$n>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$, 故取$N=\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]+1>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$, 当$n>N$时, $|x_n-0|<\varepsilon$, 证毕.

注. 当$a>0$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

四. 数列极限的有理运算法则

法则 1. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 而$\{y_n\}$是有界数列, 则$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

法则 2. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, 则 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$; (3) 当$b\ne 0$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$.

注. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在, 则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)$一定不存在.

推论. 设某项起$x_n\ge y_n$, 且$\{x_n\}$, $\{y_n\}$收敛, 则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ge\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

例. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^2(n+2)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sin^2(n+2)=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-4\sin n}{2n+5\sin n}=\dfrac{3}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-5^n}{3^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2/5)^n-1}{(3/5)^n+1}=-1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+3}{3n^2+2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-1/n+3/n^2}{3+2/n-1/n^2}=\dfrac{2}{3}$.

五. 无穷小与无穷大数列

定义. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 则称 $\{x_n\}$ 为无穷小.

若 $\forall M>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, $|x_n|>M$, 则称 $\{x_n\}$ 为无穷大, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

定理. 设 $x_n\neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$.

注. 无穷大数列一定是无界数列, 反之不一定.

补充练习

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{k(1+k)}=2$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+\cdots+n}-\sqrt{1+\cdots+(n-1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{\dfrac{(1+n)n}{2}}+\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1+n}{2n}}+\sqrt{\dfrac{n-1}{2n}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}-an-b\right)=0$, 求 a, b.

解. 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-a)n^2-(a+b)n-b}{n+1}=0\Rightarrow\begin{cases}1-a=0\\a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$.

第 1.3 节 函数的极限

一. 函数极限的定义

1. 当 $x\to x_0$ 时函数的极限

定义. 设 $f(x)$ 在某个 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义, 若存在常数 A, 使得 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 均有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称 A 为当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

注. (1) 这里 $x\to x_0$ 不包含 $x=x_0$ 的情况, 故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $f(x)$ 在 x_0 处的取值无关.

(2) 过程 "$x\to x_0$" 由两部分构成: $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$, 由此可以定义两个单侧极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, 称为左右极限.

(3) 左极限也记为 $f(x_0^-)$, $f(x_0-0)$; 右极限也记为 $f(x_0^+)$, $f(x_0+0)$.

定理. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

例. $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$, $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$.

例. 证明: 当 $x_0>0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

例. 证明: (1) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$; (2) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

证. (1) 由 $|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\dfrac{x-x_0}{2}\cos\dfrac{x+x_0}{2}\right|\le|x-x_0|$, 即得;

(2) 类似地, $|\cos x-\cos x_0|\le|x-x_0|$, 即得, 证毕.

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<\pi\\ \sqrt{x-\pi}, & x>\pi\end{cases}$, 讨论 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 的存在性.

解. $f(\pi^-)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\sin x=0$, $f(\pi^+)=\lim\limits_{x\to\pi^+}\sqrt{x-\pi}=0$, 故 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=0$, 存在.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$ 不存在, 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}x=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}x=1$.

类似地, $\lim\limits_{x\to 0}[x]$ 不存在, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$ 不存在.

2. 当 $x\to\infty$ 时函数的极限

定义. 若存在常数 A, 使得 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称 A 为当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

注. 过程 "$x\to\infty$" 由两部分构成: $x\to-\infty$, $x\to+\infty$, 故可以定义两个单向极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

定理. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

例. $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在, 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ 不存在, 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=+1$.

几何意义. 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, 则称直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

例. $y=0$ 是 $y=\dfrac{1}{x}$ 的水平渐近线; $y=\arctan x$ 有两条水平渐近线 $y=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

二. 函数极限的性质

1. 唯一性. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 则极限唯一.

2. 局部有界性. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 则在某个 $\mathring{U}(x_0)$ 中 $f(x)$ 有界.

3. 局部保号性. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0(<0)$, 则在某个 $\mathring{U}(x_0)$ 中 $f(x)>0(<0)$.

推论. 若在某个 $\mathring{U}(x_0)$ 内 $f(x)\geq 0(\leq 0)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 则 $A\geq 0(\leq 0)$.

例. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=a>0$, 证明: 在某个 $U(x_0)$ 内 $f(x_0)$ 为最小值.

证. 在某个 $\mathring{U}(x_0)$ 中 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}>0\Rightarrow f(x)>f(x_0)$, 证毕.

4. Heine 定理. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall x_n\to x_0\,(x_n\neq x_0)$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

例. 设 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$, 证明: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

证. 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1$, 再取 $y_n=\dfrac{1}{(2n-1)\pi}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=-1$, 证毕.

注. 类似地, (1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在, 则极限必唯一.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在, 则 $\exists X>0$, 使得 $f(x)$ 在 $|x|>X$ 上有界.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, $A>0(<0)$, 则 $\exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时 $f(x)>0(<0)$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall x_n\to\infty$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

例. 设 $f(x)$ 为周期函数, 证明: 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 为常数.

证. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, 若存在 x_0, 使得 $f(x_0)=B\neq A$, 令 $x_n=x_0+nT$, 则 $x_n\to\infty$, 而 $f(x_n)\to B\neq A$, 矛盾, 故 $f(x)\equiv A$, 证毕.

补充练习

1. 设 $f(x)=\sin x$, 证明: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

证. 取 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $y_n=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$, 则 $x_n\to\infty$, $y_n\to\infty$, 而

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=-1$, 证毕.

第 1.4 节 无穷小与无穷大

一. 无穷小

定义. 若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$, 则称 $f(x)$ 为当 $x\to\square$ 时的**无穷小量**.

例. 当 $x\to\infty$ 时, $\dfrac{1}{x}$ 为无穷小; 当 $x\to1^{+}$ 时, $\sqrt{x-1}$ 为无穷小;

当 $x\to-\infty$ 时, e^{x} 为无穷小.

定理. $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)=0$.

二. 无穷大

定义. 设 $f(x)$ 在某个 $\mathring{U}(x_0)$ 中有定义, 若 $\forall M>0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|>M$, 则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的**无穷大**, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

若 $\forall M>0$, $\exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, $|f(x)|>M$, 则称 $f(x)$ 为当 $x\to\infty$ 时的**无穷大**, 记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

例. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to0^{-}}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

例. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=\infty$, 或者 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$.

例. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 不存在: $\lim\limits_{x\to0^{-}} e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$, $\lim\limits_{x\to0^{+}} e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$, 故

$$\lim_{x\to0^{-}}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1,\ \lim_{x\to0^{+}}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=-1.$$

几何意义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^{-}} f(x)=\infty$, 或 $\lim\limits_{x\to x_0^{+}} f(x)=\infty$, 则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**铅直渐近线**.

例. 直线 $x=1$ 是 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的铅直渐近线.

三. 无穷大与无界量的关系

定理. $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall x_n\to\square\,(x_n\neq\square)$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$.

例. 证明: $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是 $x\to0$ 时的无穷大.

证. 取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$, 则 $x_n\to0$, 而 $f(x_n)=0$, 证毕.

例. 证明: $f(x)=e^{x}\sin x$ 不是 $x\to+\infty$ 时的无穷大.

证. 取 $x_n=n\pi$, 则 $x_n\to+\infty$, 而 $f(x_n)=0$, 证毕.

注. 无穷大量一定是无界量, 反之不一定.

四. 无穷大与无穷小的关系

定理. 设在 $x \to \square$ 的过程中 $f(x) \neq 0$, 则 $\lim\limits_{x \to \square} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \square} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

补充练习

1. 求曲线 $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ 的水平与铅直渐近线.

解. $y = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}$, $\lim\limits_{x \to -3} y = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+2}{x+3} = \infty$, 故有铅直渐近线 $x = -3$;

$\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+2}{x+3} = 1$, 故有水平渐近线 $y = 1$.

第 1.5 节 极限运算法则

一. 函数和差积商的极限运算法则

定理. (局部)有界函数与无穷小的积为无穷小.

(1) 设在 x_0 的某个去心邻域内 $g(x)$ 有界, 而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$.

(2) 设在某个 $\{x:|x|\ge X\}$ 上 $g(x)$ 有界, 而 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)=0$.

定理. 设 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\square} g(x)=B$ (存在), 则 (1) $\lim\limits_{x\to\square}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to\square}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B$; (3) 当 $B\ne 0$ 时, $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

注. 若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to\square} g(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to\square}\left[f(x)\pm g(x)\right]$ 不存在.

推论. $\lim\limits_{x\to\square}\left[k_1f_1(x)+\cdots+k_nf_n(x)\right]=k_1\lim\limits_{x\to\square} f_1(x)+\cdots+k_n\lim\limits_{x\to\square} f_n(x)$.

推论. $\lim\limits_{x\to\square}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to\square} f(x)\right]^n$.

推论. 设 $P(x)$ 为多项式, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$.

推论. 设 $\varphi(x)\ge\psi(x)$, 若 $\lim\limits_{x\to\square}\varphi(x)=a$, $\lim\limits_{x\to\square}\psi(x)=b$, 则 $a\ge b$.

例. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$.

例. (1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\dfrac{2^3-1}{2^2-5\cdot 2+3}=-\dfrac{7}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$, 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=\dfrac{0}{-1}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

例. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3/x-2/x^2-1/x^3}{2-1/x+5/x^3}=\dfrac{0-0-0}{2-0-0}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\dfrac{3}{2}$.

注. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0}\ (a_m,b_n\ne 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m}{b_nx^n}=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_n}{b_n}, & m=n\\ \infty, & m>n\end{cases}.$$

例. $$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^4(x-1)^6-5x\left(x^3+x\right)^3}{(x+2)^{10}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(16x^{10}+\cdots\right)-\left(5x^{10}+\cdots\right)}{x^{10}+\cdots}=11.$$

例. (1) 设 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$, 求 a, b.

解. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+ax+b\right)=4+2a+b=0$, 故 $b=-2a-4$, 于是

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2+a)}{(x-2)(x+1)}=\frac{4+a}{3}=2,\text{ 故 } a=2,\ b=-8.$$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{x+1}+ax+b\right)=3$, 求 a, b.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^2+(a+b)x+b-2}{x+1}=3\Rightarrow\begin{cases}1+a=0\\a+b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=4\end{cases}$.

二. 复合函数的极限运算法则

例. $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{u\to-\infty}\arctan u=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{u\to+\infty}\arctan u=\dfrac{\pi}{2}$.

例. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{3x^2+7}{x^2+1}}=\lim\limits_{u\to 5}\sqrt{u}=\sqrt{5}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{3x^2+7}{x^2+1}}=\lim\limits_{u\to 3}\sqrt{u}=\sqrt{3}$.

例. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{8x-2\sqrt{x}-1}{2x+\sqrt{x}-1}\overset{u=\sqrt{x}}{=}\lim\limits_{u\to\frac{1}{2}}\dfrac{8u^2-2u-1}{2u^2+u-1}=\lim\limits_{u\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2u-1)(4u+1)}{(2u-1)(u+1)}=2$.

定理. 设复合函数 $f\left[g(x)\right]$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, 并且, 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内 $g(x)\neq u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f\left[g(x)\right]\overset{u=g(x)}{=}\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

三. 幂指函数的极限运算法则

定理. 设 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A>0$, $\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$, 则 $\lim\limits_{x\to\square}\left[f(x)\right]^{g(x)}=A^B$.

四. 斜渐近线

定义. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$, 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$, 则称 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**斜渐近线**.

命题. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$.

例. 求曲线 $y=2x-\sqrt{x^2-x}$ 的斜渐近线.

解. (1) $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{x^2-x}}{x}=2-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}=2-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=1$,

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2-x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{1}{2}$, 故

$y=x+\dfrac{1}{2}$ 为斜渐近线;

(2) $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-\sqrt{x^2-x}}{x}=2-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}=2+\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=3$,

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{x^2-x}-3x\right)=-\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}-x}=-\dfrac{1}{2}$, 故

$y=3x-\dfrac{1}{2}$ 也为斜渐近线.

补充练习

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2 x-2\cos x-1}{2\cos^2 x+\cos x-1}=\lim\limits_{u\to\frac{1}{2}}\dfrac{8u^2-2u-1}{2u^2+u-1}=\lim\limits_{u\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2u-1)(4u+1)}{(2u-1)(u+1)}=2$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x+8}-\sqrt[3]{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}(x+8-x-1)}{\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x+8}\cdot\sqrt[3]{x+1}\right)+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}=\dfrac{7}{3}$.

4. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^4-x}{\sqrt{x-1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^4-x}{\sqrt{x-1}}=$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x(x-1)(x^2+x+1)}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x-1}=0$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 $x_n=\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+n}+2\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2+n}\right)+2a$, 故

$a=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3n}}=2$.

6. 设 $f(x)$ 为多项式, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=-1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=3$, 求 $f(x)$.

解. 设 $f(x)=2x^3-x^2+ax+b$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(a+\dfrac{b}{x}\right)=3\Rightarrow b=0$, $a=3$.

7. 设 $f(x)$ 为三次多项式, 且 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)}{x-4}=1$, 求 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}$.

解. 设 $f(x)=a(x-2)(x-4)(x-b)$, 则 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=-2a(2-b)=1$,

$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)}{x-4}=2a(4-b)=1$, 解得 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$, 故 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}=-\dfrac{1}{2}$.

第 1.6 节 极限存在准则 两个重要极限

一. 第一个重要极限

定理. (1) 设 $y_n \le x_n \le z_n$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$;

(2) 设 $g(x) \le f(x) \le h(x)$, 若 $\lim\limits_{x\to\square} g(x) = \lim\limits_{x\to\square} h(x) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to\square} f(x) = A$.

例. 设 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解. $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \cdot n \le x_n \le \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cdot n$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

例. 设 $x_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$, 其中 $a_i \ge 0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解. 记 $a_1 \le \cdots \le a_m$, 则 $\sqrt[n]{a_m^n} \le x_n \le \sqrt[n]{m \cdot a_m^n}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_m$.

重要极限 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

例. (1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} \overset{t=\arcsin x}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sin t} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} \overset{t=\arctan x}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\tan t} = 1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan 3x}{3x} \cdot \dfrac{2x}{\sin 2x} \cdot \dfrac{3x}{2x}\right) = \dfrac{3}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 x/2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 x/2}{4(x/2)^2} = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.

例. (1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(\tan\dfrac{1}{x} - \sin\dfrac{1}{x}\right) \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan t - \sin t}{t^3} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan t \cdot (1-\cos t)}{t^3} = \dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sin \pi x} \overset{t=x-1}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sin(\pi t + \pi)} = -\dfrac{1}{\pi} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\pi t}{\sin(\pi t)} = -\dfrac{1}{\pi}$.

(3) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx} \overset{t=x-\pi}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(mt + m\pi)}{\sin(nt + n\pi)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(-1)^m \sin mt}{(-1)^n \sin nt} = (-1)^{m-n} \dfrac{m}{n}$.

二. 第二个重要极限

定理. 单调有界数列必收敛.

例. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} (a > 0)$.

解. $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, 则 $x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{a}{n+1}$, 当 $n > a-1$ 时, $x_{n+1} < x_n$, 单减, 又 $x_n > 0$, 故有界, 因此收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, 则 $x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{a}{n+1} \Rightarrow x = x \cdot 0 = 0$.

例. 设 $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\cdots$, $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解. 显然 $x_1<x_2$, 而 $x_{n-1}<x_n\Rightarrow x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, 由归纳法, $\{x_n\}$ 单增;

显然 $x_1<2$, 而 $x_n<2\Rightarrow x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<2$, 由归纳法, $x_n<2$;

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 则 $x=\sqrt{2+x}$, 故 $x=2$.

定理. 设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 则 $\{x_n\}$ 单调有界, 因此收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e=2.71828\cdots$.

重要极限 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=e$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\sqrt{x-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}=e$.

例. (1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{x}\right)^{\frac{x}{-3}\cdot(-6)}=e^{-6}$.

例. (1) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}(1+x-1)^{\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{1-x}}=e^{-1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2x}{1-2x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1+2x}{1-2x}-1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{4x}{1-2x}\right)^{\frac{1-2x}{4x}\cdot\frac{4x}{1-2x}\cdot\frac{1}{x}}=e^4$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-2n^2}{3n-2n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1-3n}{3n-2n^2}\right)^{\frac{3n-2n^2}{1-3n}\cdot\frac{1-3n}{3n-2n^2}\cdot n}=e^{\frac{3}{2}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}}=e^2$.

例. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to e}\ln u=\ln e=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{(x+4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+4}\cdot\dfrac{\ln(1+x-1)}{x-1}=\dfrac{1}{5}$.

例. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{t=e^x-1}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{x^2}=e\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x-1}-1}{x^2}=e\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x-1}-1}{\cos x-1}\cdot\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{e}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

补充练习

1. 证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}=1$.

证. (1) $0<\dfrac{n!}{n^n}<\dfrac{1}{n}$；(2) $1<\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}<\sqrt[n]{n}$，证毕.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\tan 5x}{\sin 3x-\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 2x}{x}+\dfrac{\tan 5x}{x}}{\dfrac{\sin 3x}{x}-\dfrac{\tan 2x}{x}}=\dfrac{2+5}{3-2}=7$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos 2x}-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^2 2x}{x^2\left(\sqrt{\cos 2x}+\cos 2x\right)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=1$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$，求 $f(x)$.

解. 设 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=A$，则 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2A$，取极限，得 $A=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2A$，

$A=-\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}=-\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x-\pi+\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=1$，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2$.

5. 讨论 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$ 的存在性.

解. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=2-1=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=0+1=1$，故存在.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot n\sin\dfrac{1}{n}=e$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{x^3}}=e^{\frac{1}{2}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{e^{-x^2}-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{e^{-x^2}-1}}=e^{\frac{1}{2}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{\sin^2 x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\sin^2 x}}{x^2}=-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n+1}}\cdot n^2\left(e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(e^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)=$

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\dfrac{1}{n(n+1)}}=1$.

第 1.7 节 无穷小的比较

一. 无穷小的阶

定义. 设 α, β 为 $x\to\square$ 过程中的无穷小量, 则

(1) 当 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$ 时, 称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记为 $\beta=o(\alpha)$;

(2) 当 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$ 时, 称 β 是比 α 低阶的无穷小, 记为 $\alpha=o(\beta)$;

(3) 当 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$ 时, 称为同阶无穷小; 若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, 则称为等价, 记 $\beta\sim\alpha$;

注. 等价关系具有传递性, 即 $\alpha\sim\beta$, $\beta\sim\gamma\Rightarrow\alpha\sim\gamma$.

例. 当 $x\to 0$ 时, $\sin x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$,

$e^x-1\sim x$, $a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$, $(1+x)^\alpha-1=e^{\alpha\ln(1+x)}-1\sim\alpha\ln(1+x)\sim\alpha x$,

$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

二. 近似公式

定理. 当 $x\to\square$ 时, $\beta\sim\alpha\Leftrightarrow\beta=\alpha+o(\alpha)$, 此时称 α 为 β 的主部.

注. $\sin x=x+o(x)$, $\tan x=x+o(x)$, $\ln(1+x)=x+o(x)$, $e^x=1+x+o(x)$,

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x)$, $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

例. $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\left[1+\frac{1}{2}x+o(x)\right]-\left[1+\frac{1}{3}x+o(x)\right]}{2x+o(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x+o(x)}{2x+o(x)}=\frac{1}{12}.$$

例. $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\left[1+\frac{1}{2}x+o(x)\right]-\left[1-\frac{1}{2}x+o(x)\right]}{\left[1+\frac{1}{3}x+o(x)\right]-\left[1-\frac{1}{3}x+o(x)\right]}=\frac{3}{2}.$$

三. 等价无穷小的替换法则

定理. 设当 $x\to\square$ 时, $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$, 则 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

注(因式替代原则). 若当 $x\to\square$ 时, $\alpha\sim\alpha'$, 则 $\lim\limits_{x\to\square}\alpha f(x)=\lim\limits_{x\to\square}\alpha' f(x)$.

注. 经典的错误: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$;

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin^3 x}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^3}-\lim_{x\to0}\frac{x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0,$$

实际上: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

例. (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}$，$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\cdot\dfrac{x}{2^n}=x$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{3}{x}=3$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\left(e^{2x}-1\right)}{\ln\left(1-3x^2\right)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)^2}{-3x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2x)^2}{-3x^2}=-\dfrac{2}{3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+\cos x}-1}{x\ln(1-\tan x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3+\cos x-1}-1}{-x\tan x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+\cos x-1}{-x^2}=\dfrac{1}{6}$.

例. (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\tan 3x\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\overset{t=\frac{\pi}{6}-x}{=}\lim\limits_{t\to0}\tan 3\left(\dfrac{\pi}{6}-t\right)\tan t=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\tan t}{\tan 3t}=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x+8}-\sqrt[3]{x+1}\right)\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to0}\sqrt[3]{\dfrac{1}{t^2}}\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{t}+8}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{t}+1}\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+8t}-\sqrt[3]{1+t}}{t}=$

$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+8t}-1}{t}-\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t}=\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$.

例. (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}e^{\sin x}\cdot\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}3^x\dfrac{\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{3}\right)}{x}=\dfrac{1}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}}=e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}}=\sqrt{ab}$.

注. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+\cdots+a_k^x}{k}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\cdots+\sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^n=\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1\right)}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t+2^t-1}{t}}=e^{1+\ln 2}=2e$.

例. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{\sin x}}$.

解. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，故 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{\sin x}\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$；

或者，$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$.

补充练习

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2-1}}\sin\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2-1}}\cdot\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}=\dfrac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\cos x-1}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\cos x-1}=\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}-\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{3}$.

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x^2}-e}{x\ln x+(x-1)^3}=e\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{x\ln(1+x-1)+(x-1)^3}=e\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}=2e$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\sqrt{1-\sin\frac{1}{x}}}-e\right)\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{\sqrt{1-\sin t}}-e}{t}=e\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{\sqrt{1-\sin t}-1}-1}{t}=e\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt{1-\sin t}-1}{t}=$

$e\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-\sin t}{2t}=-\dfrac{e}{2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\,2^{\frac{1}{x+1}}\left(2^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x(x+1)}\ln2}-1\right)=\ln2$.

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x\ln\cos2x}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x(\cos2x-1)}\left[e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1\right]=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{2x^2}\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{2x^2}\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{2x^2}\cdot\dfrac{\cos x-1}{3}=\dfrac{1}{12}$.

第 1.8 节 函数的连续性与间断点

一. 函数的连续性

设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义, 记 $\Delta x=x-x_0$, 称为 x 的**增量**, 相应地, 有函数值的**增量** $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

定义. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 则称 $y=f(x)$ 在 x_0 处**连续**.

定理. $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$.

定义. 设 $f(x)$ 在 x_0 的左侧邻域 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有定义, 若 $f(x_0^-)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处**左连续**; 类似地, 可以定义**右连续**.

定义. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内处处连续, 则称 $f(x)$ 为 (a,b) 上的**连续函数**;

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内处处连续, 且在 $x=a$ 处右连续, 在 $x=b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的**连续函数**.

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & x\le 0\\ \dfrac{\ln(1+ax)}{x}, & x>0\end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a.

解. $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos 2x=1$, $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=a$, $f(0)=1$, 故 $a=1$.

二. 函数的间断点

定义. 设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义, 且在 x_0 处不连续, 即有以下三种情况之一发生:

(1) $f(x_0)$ 没有定义; (2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在; (3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ne f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的**间断点**.

第一类间断点: $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 均存在.

(1) 若 $f(x_0^-)\ne f(x_0^+)$, 则称 x_0 为**跳跃间断点**, 例如 $\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 处.

(2) 若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 则称 x_0 为**可去间断点**.

第二类间断点: $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 中至少有一个不存在.

特别地, 若 $f(x_0^-)$ 或 $f(x_0^+)=\infty$, 则称 x_0 为**无穷间断点**, 例如 $\tan x$ 在 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 处.

例. 讨论 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处的间断点类型.

解. $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义, 而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ 存在, 故为可去间断点;

若补充定义 $f(0)=1$, 则 $x=0$ 成为连续点.

例. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的间断点类型.

解. $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$, $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$, 故为跳跃间断点.

例. 讨论 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的间断点类型.

解. $f(0^-)=-\dfrac{\pi}{2}$, $f(0^+)=\dfrac{\pi}{2}$, 故 $x=0$ 为跳跃间断点.

例. 讨论 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的间断点类型.

解. $f(0^-)$ 与 $f(0^+)$ 均不存在, 故 $x=0$ 为第二类间断点.

例. 确定 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点及其类型.

解. $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$, 故 $x=1$ 为可去间断点, $x=2$ 为无穷间断点.

例. 确定 $f(x)=\dfrac{1}{1+\tan x}$ 的间断点及其类型.

解. $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 为可去间断点, $x=k\pi-\dfrac{\pi}{4}$ 为无穷间断点.

例. 确定 $f(x)=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点及其类型.

解. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-1$, 故 $x=0$ 为跳跃间断点.

例. 确定 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的间断点及其类型.

解. $f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\\ 1, & x=1\\ 0, & x=-1\end{cases}$, 故 $x=1$ 为跳跃间断点, $x=-1$ 为连续点.

补充练习

1. 确定 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的间断点及其类型.

解. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{x-1}}=e^0=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$, 故 $x=0$ 为无穷间断点;

$\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{x}{x-1}}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$, 故 $x=1$ 为跳跃间断点.

2. 确定 $f\left(x\right)=\dfrac{x\left|x+1\right|}{\ln\left|x\right|}$ 的间断点及其类型.

解. $x=1$ 为无穷间断点，$x=0$ 为可去间断点；

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x\left|x+1\right|}{\ln\left|x\right|}=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x\left(x+1\right)}{\ln\left(-x\right)}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x+1}{\ln\left(-x\right)}\overset{t=x+1}{=}\lim_{t\to0^-}\frac{t}{\ln\left(1-t\right)}=-1,$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x\left|x+1\right|}{\ln\left|x\right|}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x\left(x+1\right)}{\ln\left(-x\right)}=1,$$ 故 $x=-1$ 为跳跃间断点.

第 1.9 节 连续函数的运算与初等函数的连续性

一. 连续函数的四则运算

定理. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 x_0 处连续, 则它们的和差积商(分母不为零)也在 x_0 处连续.

注. 设在 x_0 处 $f(x)$ 连续, 而 $g(x)$ 间断, 则 $f(x)\pm g(x)$ 必在 x_0 处间断.

推论. 连续函数的和差积商在定义区间内均是连续函数.

二. 连续函数的反函数与复合函数

定理. 设 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调且连续, 则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应的区间 $J=R_f$ 上单调且连续.

定理. 设 $\lim\limits_{x\to\square} g(x)=u_0$, $f(u)$ 在 u_0 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to\square} f\left[g(x)\right]=f(u_0)=f\left[\lim\limits_{x\to\square} g(x)\right]$.

例. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\dfrac{1}{6}}$, $\lim\limits_{x\to 0} e^{2-\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{\sin x}{x}\right)}=e$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$.

定理. 设 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, $y=f(u)$ 在 $u=g(x_0)$ 处连续, 则 $y=f\left[g(x)\right]$ 在 $x=x_0$ 处连续.

推论. 连续函数的复合函数在定义区间内连续.

例. 证明: $f(x)$ 连续 $\Rightarrow \left|f(x)\right|$ 也连续.

证. $y=\left|f(x)\right|$ 由 $y=|u|$ 和 $u=f(x)$ 复合而成, 两者均连续, 即得, 证毕.

例. 设 $f(x)$, $g(x)$ 连续, 证明 $\max\left\{f(x),g(x)\right\}$, $\min\left\{f(x),g(x)\right\}$ 连续.

证. $\max\left\{f(x),g(x)\right\}=\dfrac{f(x)+g(x)+\left|f(x)-g(x)\right|}{2}$,

$\min\left\{f(x),g(x)\right\}=\dfrac{f(x)+g(x)-\left|f(x)-g(x)\right|}{2}$, 即得, 证毕.

三. 初等函数的连续性

定理. 所有初等函数在其定义区间内均为连续函数.

例. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\ln\arcsin x=\ln\arcsin\dfrac{1}{2}=\ln\dfrac{\pi}{6}$.

例. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1+2x-9}{x-4}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=2\cdot\dfrac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{1+8}+3}=\dfrac{4}{3}$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}+1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\dfrac{1}{2}$.

补充练习

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\pi=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(x)=f(2x)$, 证明: $f(x)$ 为常数函数.

证. $\forall x$, $f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)=f\left(\dfrac{x}{2^2}\right)=\cdots=f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$, 故 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=f(0)$, 即得, 证毕.

3. 设 $f(x+y)=f(x)f(y)$, $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$, 并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

证. $\forall x$, $f(x)=f(x)f(0)$, 故 (1) $f(0)=0\Rightarrow f(x)\equiv 0$; 或者

(2) $f(0)\neq 0\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)f(\Delta x)=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(x)f(0)=f(x)$, 即得, 证毕.

第 1.10 节 闭区间上连续函数的性质

一. 最大值最小值定理

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则存在 ξ_1, $\xi_2 \in [a,b]$, 使得 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $f(\xi_1) \le f(x) \le f(\xi_2)$.

推论. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

推论. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 且 $f(a^+)$ 与 $f(b^-)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

二. 零点定理与介值定理

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

例. 证明: 方程 $x^5-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 上至少有一个根.

证. 设 $f(x)=x^5-4x^2+1$, 则 $f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$, 即得, 证毕.

例. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $0\le f(x)\le 1$, 证明: $\exists \xi \in [0,1]$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

证. 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(0)=f(0)\ge 0$, $F(1)=f(1)-1\le 0$, 即得, 证毕.

例. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $f(0)=f(1)$, 证明: $\exists \xi \in [0,1]$, 使得 $f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)=f(\xi)$.

证. 令 $F(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f(x)$, 则 $F(0)+F\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 故 $F(0)\cdot F\left(\frac{1}{2}\right)\le 0$, 证毕.

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\ne B$, 则对介于 A,B 之间的任何数 C, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi)=C$.

推论. 有界闭区间上的连续函数能取到最大最小值之间的任何值.

推论. 设 $f(x)\in C[a,b]$, $x_i \in [a,b]$, $\lambda_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$, 使得
$$f(\xi)=\frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.$$

补充练习

1. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明: $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-2\xi$.

证. 令 $F(x)=f(x)-1+2x$, 则 $F(0)=-1$, $F(1)=2$, 即得, 证毕.

2. 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, 证明: 方程 $f(x)+x=0$ 存在实根.

证. 令 $F(x)=f(x)+x$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}=1>0$, 由保号性知, 当 $|x|>X$ 时, $\frac{F(x)}{x}>0$, 即当 $x>X$ 时 $F(x)>0$, 当 $x<-X$ 时 $F(x)<0$, 即得, 证毕.

第二章 导数与微分

第 2.1 节 导数概念

一. 引例

1. 直线运动的瞬时速度

2. 平面曲线的切线斜率

二. 导数的定义

1. 函数在一点处的导数与导函数

定义. 设 $y=f(x)$ 在某个 $U(x_0)$ 内有定义, 称它在 x_0 处可导, 若极限

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, 它反映了 $f(x)$ 在 x_0 处随 x 变化的快慢, 故也称为变化率, 它是平均变化率的极限.

定义. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内处处可导, 则称它为 (a,b) 上的可导函数, 记

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, 称为导函数, 简称导数, 也记为 y', $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx}$.

2. 求导举例

例. $(C)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C-C}{h}=0$, $(x)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h}=1$.

例. $\left(x^2\right)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

例. $\left(x^\mu\right)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^\mu-x^\mu}{h}=x^\mu\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\mu-1}{h}=x^\mu\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mu\cdot\frac{h}{x}}{h}=\mu x^{\mu-1}$.

注. 特别地, $\left(\sqrt{x}\right)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\dfrac{1}{x^2}$.

例. $(\sin x)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\cos x$;

类似地, $(\cos x)'=-\sin x$.

例. $\left(a^x\right)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=a^x\ln a$, 于是 $\left(e^x\right)'=e^x$.

例. $(\log_a x)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h\ln a}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h}{x}}{h\ln a}=\dfrac{1}{x\ln a}$, 于是 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

3. 导数的运动学意义

设$s=s(t)$为直线运动物体的位置函数, 则$v=\dfrac{ds}{dt}$为速度(位置对时间的变化率), 反映物体运动的快慢. $a=\dfrac{dv}{dt}$为加速度, 反映物体运动速度变化的快慢.

三. 导数的几何意义

平面曲线$C: y=f(x)$在$M(x_0,y_0)$处的切线斜率$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, 故切线方程为$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, 法线方程为$y=\dfrac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$.

例. 求曲线$y=x^{\frac{3}{2}}$上与直线$y=3x-1$平行的切线方程.

解. 设切点为(x_0,y_0), 则$\dfrac{3}{2}x_0^{\frac{1}{2}}=3\Rightarrow\begin{cases}x_0=4\\y_0=8\end{cases}$, 故切线方程为$y=3(x-4)+8$.

例. 求曲线$y=x^{\frac{3}{2}}$上通过$(0,-4)$的切线方程.

解. 设切点为$\left(x_0,x_0^{\frac{3}{2}}\right)$, 则$\dfrac{x_0^{\frac{3}{2}}-(-4)}{x_0-0}=\dfrac{3}{2}x_0^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x_0=4$, 故切线方程为$y=3(x-4)+8$.

四. 函数可导性与连续性的关系

定理. 设$f(x)$在x_0处可导, 则它在x_0处连续.

证. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$, 证毕.

注. 反之不对, 例如$f(x)=|x-x_0|$在x_0处连续, 但是在x_0处不可导.

例. 设$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 其中$n$为正整数. 讨论

(1) $f(x)$在$x=0$处的连续性; (2) $f(x)$在$x=0$处的可导性.

解. (1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^n\sin\dfrac{1}{x}=0$, 故连续;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$, 故当$n>1$时可导, 当$n=1$时不可导.

五. 单侧导数

定义. 记$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, 称为$f(x)$在$x_0$处的左导数;

记$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, 称为$f(x)$在$x_0$处的右导数.

定理. $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

例. 设 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 1 \\ 3x-2, & x>1 \end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的可导性.

解. $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$, $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(3x-2)-1}{x-1}=3$, 故可导.

例. 设 $f(x)=\begin{cases} a^x, & x\le 0 \\ \ln(x+e)+b, & x>0 \end{cases}$, 求 a, b, 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解. 可导 $\Rightarrow$ 连续, 由 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$, 得 $b=0$;

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a^x-1}{x-0}=\ln a$, $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+e)-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{x}{e}+1\right)=\dfrac{1}{e}$, 得 $a=e^{\frac{1}{e}}$.

定义. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 并且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 均存在, 则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的**可导函数**. 此时, 它一定在 $[a,b]$ 上连续.

六. 例题

例. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 求 $f'(1)$.

解. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)$, 故 $f'(1)=-2$.

例. 设 $f'(x_0)=A$, 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

解. 上式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right]=f'(x_0)=A$.

例. 设 $f(x)=|x-x_0|$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|-|-h|}{2h}=0$, 但是

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$, 不存在.

例. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且当 $x\to 0$ 时, $f(x)=o(x)$, 求 $f'(0)$.

解. $f(x)=o(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

例. 设 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x^2-9}=1$, 求 $f'(3)$.

解. $\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=6\Rightarrow f(3)=0$, $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=6$.

注. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$, 则 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $f'(x_0)=A$.

例. 设曲线 $y=f(x)$ 在原点处与正弦曲线相切, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

解. $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

例. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)=0$, 令 $F(x)=|f(x)|$, 证明: $F(x)$ 在 $x=a$ 处可导 $\Leftrightarrow f'(a)=0$.

证. $F'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{|f(x)|}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a^-}\left|\dfrac{f(x)}{x-a}\right|=-|f'(a)|$,

$F'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|f(x)|}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\left|\dfrac{f(x)}{x-a}\right|=|f'(a)|$, 证毕.

补充练习

1. 设 $f(x)=\begin{cases} g(x)\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0 \\ 0, & x=0\end{cases}$, 且 $g(0)=g'(0)=0$, 求 $f'(0)$.

解. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=0$, 故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}\cos\dfrac{1}{x}=0$.

2. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 令 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$, 证明: $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导 $\Leftrightarrow \varphi(a)=0$.

证. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|x-a|}{x-a}\varphi(x)=\pm\varphi(a)$, 即得, 证毕.

3. 设 $f'(0)=3$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-f(-\tan x)}{\ln(1+2x)}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)-\left[f(-\tan x)-f(0)\right]}{2x}=\dfrac{f'(0)}{2}+\dfrac{f'(0)}{2}=3$.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2-x)-3}{2\sin x}=5$, 求 $f'(2)$.

解. 由连续性, $f(2)=\lim\limits_{x\to0}f(2-x)=3$, 于是 $5=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2-x)-f(2)}{2x}=$

$-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2-x)-f(2)}{-x}=-\dfrac{1}{2}f'(2)$, 故 $f'(2)=-10$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-1}{2+\arctan\dfrac{1}{x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解. $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{3}{2-\dfrac{\pi}{2}}$，$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{3}{2+\dfrac{\pi}{2}}$，故不可导.

7. 设 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\right]^{\frac{x}{1-\cos x}}$.

解. $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\right]^{\frac{x}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x\ln f(x)}{1-\cos x}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}=e^{2f'(0)}=e^4$.

8. 设 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\sqrt{1-2x}-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，求 $f'(0)$.

解. $\dfrac{xf(x)+\sqrt{1-2x}-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}+o(1)\Rightarrow f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{x}+\dfrac{1}{2}x+o(x)$，故

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-2x}-x}{x^2}+\dfrac{1}{2}=1$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f_+'(a)\cdot f_-'(b)<0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证. 不妨设 $f_+'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，$f_-'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$，则

在 $x=a$ 的右侧邻域 $f(x)>f(a)$，在 $x=b$ 的左侧邻域 $f(x)>f(b)$，故

存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=\max\limits_{a\le x\le b}f(x)$；

由于 $f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$，$f_-'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$，故

$f'(x_0)=f_+'(x_0)=f_-'(x_0)=0$，证毕.

第 2.2 节 函数的求导法则

一. 函数和差积商的求导法则

定理. 设 $u(x)$ 及 $v(x)$ 在 x_0 处可导, 则它们的和差积商(分母非零)也在 x_0 处可导,

并且(1) $(u\pm v)'(x_0)=u'(x_0)\pm v'(x_0)$;

(2) $(uv)'(x_0)=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)$;

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x_0)=\dfrac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$, 特别地, $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(x_0)=\dfrac{-v'(x_0)}{v^2(x_0)}$.

推论. 设 $u(x)$, $v(x)$ 均在 I 上可导, 则在 I 上, 有(1) $(\alpha u\pm\beta v)'=\alpha u'\pm\beta v'$;

(2) $(uv)'=u'v+uv'$, $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$; (3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

例. $y=x^3+4\cos x-\sin\dfrac{\pi}{3}$, $y'=\left(x^3\right)'+4(\cos x)'-\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)'=3x^2-4\sin x$.

例. $\left(xe^x\ln x\right)'=(x)'e^x\ln x+x\left(e^x\right)'\ln x+xe^x(\ln x)'=e^x(1+\ln x+x\ln x)$.

例. $(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=\dfrac{0-(-\sin x)}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$, $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

例. $(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\sec^2 x$, $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

例. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 求 $f'(a)$.

解. $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$.

二. 反函数的求导法则

定理. 设 $x=f(y)$ 单调可导, 且 $f'(y)\neq 0$, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 也可导, 并且

$\left[f^{-1}(x)\right]'=\dfrac{1}{f'(y)}=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}$, 即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

例. 设 $y=f(x)$ 为 $x=y^5+2y^3+3y+2$ 的反函数, 求 $f'(2)$.

解. 当 $x=2$ 时, $y=0$, 故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}=\left.\dfrac{1}{5y^4+6y^2+3}\right|_{y=0}=\dfrac{1}{3}$.

例. $y=\arcsin x$, $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{(\sin y)'}=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

类似地, $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 或利用 $\arccos x=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$ 也可得.

例. $y=\arctan x$, $(\arctan x)'=\dfrac{1}{(\tan y)'}=\dfrac{1}{\sec^2 y}=\dfrac{1}{1+\tan^2 y}=\dfrac{1}{1+x^2}$;

类似地, $(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$, 或利用 $\operatorname{arc}\cot x=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$ 也可得.

三. 基本初等函数的导数公式

$(C)'=0$, $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$, $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$, $(\tan x)'=\sec^2 x$,

$(\cot x)'=-\csc^2 x$, $(\sec x)'=\sec x\tan x$, $(\csc x)'=-\csc x\cot x$, $(e^x)'=e^x$,

$(a^x)'=a^x\ln a$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

四. 复合函数的求导法则(链式法则)

定理. 设 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处可导, 而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处可导, 则 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处可导, 且 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x_0}=\left.\dfrac{dy}{du}\right|_{u_0}\cdot\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x_0}=f'[\varphi(x_0)]\varphi'(x_0)$.

推论. 设可导函数 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 可以复合, 则 $y=f[\varphi(x)]$ 可导, 并且

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x)=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$.

注. 设 $y=f(u)$, $u=g(v)$, $v=h(x)$ 可以复合, 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}=$

$f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$.

注. $[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)$, $\left[\sqrt{f(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$, $\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=\dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}$,

$[\sin f(x)]'=\cos f(x)\cdot f'(x)$, $\left[e^{f(x)}\right]'=f'(x)e^{f(x)}$, $[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$,

$[\arctan f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$, 等等.

例. $y=\tan^3 x$: $y=u^3$, $u=\tan x$, $y'=3\tan^2 x\cdot\sec^2 x$.

例. $y=\arcsin x^3$: $y=\arcsin u$, $u=x^3$, $y'=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.

例. $y=e^{\sqrt{x-\sin x}}$: $y=e^u$, $u=\sqrt{v}$, $v=x-\sin x$, $y'=e^{\sqrt{x-\sin x}}\cdot\dfrac{1-\cos x}{2\sqrt{x-\sin x}}$.

例. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $y'=\dfrac{-1}{x^2-a^2}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{-x}{(x^2-a^2)^{3/2}}$.

例. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

例. $y=a^{a^x}+a^{x^a}+x^{a^a}$, $y'=a^{a^x}\ln a\cdot\left(a^x\right)'+a^{x^a}\ln a\cdot\left(x^a\right)'+a^a x^{a^a-1}=$

$a^{a^x+x}\ln^2 a+a^{x^a+1}x^{a-1}\ln a+a^a x^{a^a-1}$.

例. $y=x^{\sin x}$, $y'=\left(e^{\sin x\ln x}\right)'=e^{\sin x\ln x}\cdot\left(\sin x\ln x\right)'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

例. $y=\ln\left[\ln\left(\ln\tan\dfrac{x}{2}\right)\right]$, $y'=\dfrac{1}{\ln\ln\tan\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{\ln\tan\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$.

例. $y=\ln^2\cos e^{2x}$, $y'=2\ln\cos e^{2x}\cdot\dfrac{-\sin e^{2x}}{\cos e^{2x}}\cdot e^{2x}\cdot 2=-4e^{2x}\tan e^{2x}\cdot\ln\cos e^{2x}$.

五. 双曲函数的导数

$(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x$; $(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x$; $(\operatorname{th}x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

$(\operatorname{arsh}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $(\operatorname{arch}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $(\operatorname{arth}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$.

补充练习

1. 设 $f(x)=\sin 2x$, 求 $f'\left[f(x)\right]$, $\left\{f\left[f(x)\right]\right\}'$.

解. $f'\left[f(x)\right]=2\cos(2\sin 2x)$, $\left\{f\left[f(x)\right]\right\}'=2\cos(2\sin 2x)\cdot 2\cos 2x$.

2. 设 $\dfrac{d}{dx}\left[f(\ln\tan x)\right]\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=1$, 求 $f'(0)$.

解. $\dfrac{d}{dx}\left[f(\ln\tan x)\right]\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=f'(\ln\tan x)\cdot\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2f'(0)=1$, 故 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

3. 设 $f(x)=\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}-1\right)\left(\tan\dfrac{\pi x^2}{4}-2\right)\cdots\left(\tan\dfrac{\pi x^{100}}{4}-100\right)$, 求 $f'(1)$.

解. $f(x)=\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}-1\right)\varphi(x)$, 故 $f'(x)=\dfrac{\pi}{4}\sec^2\dfrac{\pi x}{4}\cdot\varphi(x)+\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}-1\right)\varphi'(x)$,

$f'(1)=\dfrac{\pi}{4}\sec^2\dfrac{\pi}{4}\cdot\varphi(1)=-\dfrac{\pi}{2}\cdot 99!$.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=2$, $f'(0)=-1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^3(x)-8}{x}$.

解. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^3(x)-8}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^3(x)-f^3(0)}{x-0}=3f^2(0)f'(0)=-12$.

第 2.3 节 高阶导数

若 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 仍可导，则它的导数称为 $f(x)$ 的二阶导数，记为 $f''(x)$，y''，$\dfrac{d^2 f}{dx^2}$，$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$；二阶导数的导数称为三阶导数，记为 $f'''(x)$，y'''，$\dfrac{d^3 f}{dx^3}$，$\dfrac{d^3 y}{dx^3}$；

一般地，$n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数，记为 $f^{(n)}(x)$，$y^{(n)}$，$\dfrac{d^n f}{dx^n}$，$\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

法则 1（线性性）. $(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\cdots+\alpha_m u_m)^{(n)}=\alpha_1 u_1^{(n)}+\alpha_2 u_2^{(n)}+\cdots+\alpha_m u_m^{(n)}$.

法则 2（莱布尼茨）. $(uv)^{(n)}=uv^{(n)}+\binom{n}{1}u'v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u''v^{(n-2)}+\cdots+\binom{n}{n}u^{(n)}v=$ $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$，其中 $\binom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

例. 设 $y=x^2e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

解. $y^{(20)}=\left(x^2\cdot e^{2x}\right)^{(20)}=x^2\cdot\left(e^{2x}\right)^{(20)}+20\left(x^2\right)'\left(e^{2x}\right)^{(19)}+\dfrac{20\cdot 19}{2!}\left(x^2\right)''\left(e^{2x}\right)^{(18)}=$ $2^{20}x^2e^{2x}+20\cdot 2^{20}\cdot xe^{2x}+190\cdot 2^{19}\cdot e^{2x}=2^{20}\left(x^2+20x+95\right)e^{2x}$.

例. 设 $y=\left(1-x^m\right)^n$，求 $y^{(n)}(1)$.

解. 令 $y=(1-x)^n\left(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}\right)^n=u(x)v(x)$，由于 $u^{(k)}(1)=0$，$0\le k\le n-1$，

故 $y^{(n)}(1)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(1)v^{(n-k)}(1)=u^{(n)}(1)v(1)=(-1)^n n!\cdot m^n$.

法则 3. 设 $y=y(x)$ 二阶可导，且 $y'(x)\neq 0$，则 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{y'^3}$.

例. 设 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$.

解. $y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y''=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$，故 $y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

注. $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

例. 设 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$，求 $y^{(n)}$.

解. $y=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4x$，故

$y'=\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y''=4\cos\left(4x+2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

例. 设 $y=\dfrac{1}{x+a}$，求 $y^{(n)}$.

解. $y'=(-1)(x+a)^{-2}$，$y''=(-1)(-2)(x+a)^{-3}$，$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

例. 设 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, 求 $y^{(n)}$.

解. $y^{(n)}=\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$.

注. $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{5}{x-2}$.

例. 设 $f'(x)=f^2(x)$, $f(0)=1$, 求 $f^{(n)}(0)$.

解. $f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$, $f'''(x)=3!f^2(x)f'(x)=3!f^4(x)$,

$f^{(4)}(x)=4!f^5(x)$, 由归纳法, $f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$, 故 $f^{(n)}(0)=n!$.

例. 利用变换 $x=\cos t$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$.

解. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{-1}{\sin t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dt}{dx}=\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{-1}{\sin t}+\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\cdot\dfrac{-1}{\sin t}=$

$\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 t}-\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{\cos t}{\sin^3 t}$, 代入方程, 得 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$.

补充练习

1. 设 $f'(x)=e^{-f(x)}$, $f(0)=1$, 求 $f^{(n)}(0)$.

解. $f''(x)=-e^{-f(x)}\cdot f'(x)=-e^{-2f(x)}$, $f'''(x)=2!e^{-2f(x)}\cdot f'(x)=2!e^{-3f(x)}$,

$f^{(4)}(x)=-3!e^{-4f(x)}$, $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!e^{-n\cdot f(x)}$, 故 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!e^{-n}$.

2. 利用变换 $x=e^t$ 化简微分方程 $x^2y''+xy'-y=0$.

解. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy}{dt}e^{-t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}e^{-t}\right)\dfrac{dt}{dx}=\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}e^{-t}-\dfrac{dy}{dt}e^{-t}\right)e^{-t}=\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$,

代入方程, 得 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-y=0$.

第 2.4 节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率

一. 隐函数的导数

例. 设 $y=y(x)$ 是方程 $e^y+xy-e=0$ 确定的隐函数, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解. 方程两边对 x 求导, 得 $e^y\dfrac{dy}{dx}+y+x\dfrac{dy}{dx}=0$, 故 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x+e^y}$.

例. 设 $y=y(x)$ 是方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定的隐函数, 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解. $5y^4\dfrac{dy}{dx}+2\dfrac{dy}{dx}-1-21x^6=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+21x^6}{5y^4+2}$, 故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,0)}=\dfrac{1}{2}$.

例. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在 $\left(2,\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 处的切线斜率.

解. $\dfrac{2x}{16}+\dfrac{2y}{9}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{x}{y}$, 代入 $x=2$, $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$, 得 $k=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

例 (对数求导法). 求 $y=x^{\sin x}\ (x>0)$ 的导数.

解. $\ln y=\sin x\cdot\ln x$, 两边对 x 求导, 得 $\dfrac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\dfrac{1}{x}$, 故

$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

例. 设 $y=y(x)$ 是方程 $x^y+y^x=1$ 确定的隐函数, 求 y'.

解. $x^y+y^x=1\Leftrightarrow e^{y\ln x}+e^{x\ln y}=1\Rightarrow e^{y\ln x}\left(y'\ln x+\dfrac{y}{x}\right)+e^{x\ln y}\left(\ln y+x\cdot\dfrac{y'}{y}\right)=0$, 故

$$y'=-\frac{y^x\ln y+yx^{y-1}}{x^y\ln x+xy^{x-1}}.$$

例. 设 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$, 求 y'.

解. $\ln y=\dfrac{1}{2}\left(\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|\right)$, 两边对 x 求导, 得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right),\ 故\ y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).$$

例. 设 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$, 求 y'.

解. $\ln|y|=\dfrac{1}{2}\ln|x+2|+4\ln|3-x|-5\ln|x+1|$, $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{-4}{3-x}-\dfrac{5}{x+1}$, 故

$$y'=y\left(\frac{1}{2x+4}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1}\right)=\frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}\left(\frac{1}{2x+4}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1}\right).$$

例. 设 $y=y(x)$ 是方程 $2y-2x+\sin y=0$ 确定的隐函数, 求 y''.

解. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{2+\cos y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2(2+\cos y)'}{(2+\cos y)^2}=\dfrac{2\sin y\cdot y'}{(2+\cos y)^2}=\dfrac{4\sin y}{(2+\cos y)^3}$.

例. 设 $y=y(x)$ 是方程 $y=1-xe^y$ 确定的隐函数, 求 y''.

解. $y'=-\dfrac{e^y}{1+xe^y}$, $y''=-\dfrac{e^y\cdot y'(1+xe^y)-e^y(e^y+xe^y\cdot y')}{(1+xe^y)^2}=\dfrac{2e^{2y}+xe^{3y}}{(1+xe^y)^3}$.

二. 由参数方程所确定的函数的导数

公式. 设 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, 若 $x'(t)\neq 0$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

例. 设 $y=y(x)$ 是 $\begin{cases}x=1+t^2\\y=\cos t\end{cases}$ 确定的函数, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin t}{2t}$.

例. 求阿基米德螺线 $\rho=a\theta(a>0)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线斜率.

解. 由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$, 得 $\begin{cases}x=a\theta\cos\theta\\y=a\theta\sin\theta\end{cases}$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin\theta+a\theta\cos\theta}{a\cos\theta-a\theta\sin\theta}$, 故 $k=\dfrac{4+\pi}{4-\pi}$.

例. 设 $y=y(x)$ 是 $\begin{cases}x=t-\sin t\\y=1-\cos t\end{cases}$ 确定的函数, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{-1}{(1-\cos t)^2}$.

例. 设 $\begin{cases}x=f'(t)\\y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$, 其中 $f(t)$ 二阶可导, $f''(t)\neq 0$, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=1\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{f''(t)}$.

三. 相关变化率问题

例. 设气球从离观察员 500m 处垂直上升, 当气球高度为 500m 时, 测得上升速度为 140m/min, 问此时观察员视线仰角的增加率是多少?

解. 设气球上升 t 分钟后, 高度为 h 米, 观察员视线的仰角为 α, 则 $\tan\alpha=\dfrac{h}{500}$,

对 t 求导, 得 $\sec^2\alpha\cdot\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{500}\cdot\dfrac{dh}{dt}$, 代入 $\dfrac{dh}{dt}=140$, $\alpha=45^\circ$, 得 $2\cdot\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{500}\cdot 140$, 故

$\dfrac{d\alpha}{dt}=0.14$ (弧度/分).

例. 设有深8m顶部直径8m的正圆锥形容器, 现以$4\text{m}^3/\text{min}$的速度往其中注水, 求水深为5m时, 容器内水面上升的速度.

解. 当水深h时, 水面半径$r=\frac{1}{2}h$, 面积$S=\frac{1}{4}\pi h^2$, 故此时容器中水的体积为

$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{\pi}{12}h^3$, 两边对$t$求导, 得$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{12}\cdot 3h^2\cdot\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt}$, 代入

$h=5$, $\frac{dV}{dt}=4$, 得$\frac{dh}{dt}=\frac{16}{25\pi}(\text{m}/\text{min})$.

补充练习

1. 设$y=y(x)$是$\begin{cases}e^x=3t^2+2t+1\\ t\sin y-y+\frac{\pi}{2}=0\end{cases}$确定的函数, 求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

解. $\begin{cases}e^x\frac{dx}{dt}=6t+2\\ \sin y+t\cos y\frac{dy}{dt}-\frac{dy}{dt}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dx}{dt}=e^{-x}(6t+2)\\ \frac{dy}{dt}=\frac{\sin y}{1-t\cos y}\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{e^x\sin y}{(6t+2)(1-t\cos y)}$, 代入

$t=0$, $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$, 得$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}$.

第 2.5 节 函数的微分

一. 微分的定义

例. 边长 x 的正方形, 面积 $A=x^2$, 若 x 增加 Δx, 则相应的面积增量

$\Delta A=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2=2x\Delta x+o(\Delta x)$, 其中 $2x\Delta x$ 是 Δx 的线性函数, 并且是 ΔA 的主要部分, 因为两者之间的误差是 Δx 的高阶无穷小, 记 $dA=2x\Delta x$, 称为 x^2 在 x 处的微分.

定义. 设 $y=f(x)$ 在某个 $U(x)$ 内有定义, 若 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 可以表示为: $\Delta y=A(x)\Delta x+o(\Delta x)$, 即 Δx 的线性函数与高阶无穷小之和, 其中的 $A(x)$ 与 Δx 无关, 则称 $f(x)$ 在 x 处可微, 记 $dy=A(x)\Delta x$, 称为 $f(x)$ 在 x 处相对于自变量的增量 Δx 的微分, 也可记为 $df(x)$.

二. 可微的条件

定理. $y=f(x)$ 在 x 处可微 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$ 在 x 处可导.

注. 设 $y=f(x)$ 在 x 处可微, 则 $dy=df(x)=f'(x)\Delta x$.

注(有限增量公式). $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$, 其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$.

注. 若 $f'(x)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{dy}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{f'(x)\Delta x}=1$, 即当 $\Delta x\to 0$ 时, $\Delta y\sim dy$, 于是

$\Delta y=dy+o(dy)$, 称 dy 为 Δy 的线性主部.

定义. 若 $y=f(x)$ 在区间 I 上处处可微, 则称它为 I 上的可微函数; 此时, 记 $dy=df(x)=f'(x)\Delta x$, 称为函数的微分.

注. $dx=(x)'\Delta x=\Delta x$, 即自变量的微分等于它的增量, 故 $dy=f'(x)dx$.

例. 求 $y=x^4$ 在 $x=3$ 处当 $\Delta x=0.1$ 时的微分.

解. $dy=d(x^4)=4x^3\Delta x$, 故 $dy\big|_{x=3,\Delta x=0.1}=108\cdot 0.1=10.8$.

三. 微分的几何意义

曲线 $y=f(x)$ 上点 (x,y) 处对应于横坐标增量 Δx 的纵坐标增量为 Δy, 而曲线在 (x,y) 处的切线上相应的纵坐标增量为 dy, 当 Δx 很小时, 两者近似相等.

四. 微分运算法则

法则 1. $d(\alpha u\pm\beta v)=\alpha du\pm\beta dv$, $d(uv)=vdu+udv$, $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$.

法则 2. 设 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 均可微, 则 $dy=f'[g(x)]dg(x)=f'(u)du$.

注. 设 $y=f(u)$, 则无论 u 是自变量, 还是中间变量, 微分的表达式 $dy=f'(u)du$ 总是正确的, 这个性质称为一阶微分的形式不变性.

例. $d\sin\sqrt{2x+1}=\cos\sqrt{2x+1}d\sqrt{2x+1}=\dfrac{\cos\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}d(2x+1)=\dfrac{\cos\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$.

例. $d\ln\left(1+e^{x^2}\right)=\dfrac{1}{1+e^{x^2}}d\left(1+e^{x^2}\right)=\dfrac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}d\left(x^2\right)=\dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx$.

例. $d\left(e^{1-3x}\cos x\right)=\cos x\cdot de^{1-3x}+e^{1-3x}\cdot d\cos x=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx$.

例. 设 $y=y(x)$ 是 $y\sin x-\cos(x-y)=0$ 确定的隐函数, 求 dy.

解. $d(y\sin x)-d\cos(x-y)=0\Rightarrow \sin xdy+yd\sin x+\sin(x-y)d(x-y)=0$, 解得

$$dy=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}dx.$$

五. 函数的近似计算

公式. 设 $f'(x_0)\neq 0$, 则 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 误差为 $o(x-x_0)$.

注. 特别地, 若 $f'(0)\neq 0$, 则当 $|x|<<1$ 时, $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$.

例. 求 $\sqrt{0.97}$ 和 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$, $x=0.97$, $\Delta x=-0.03$, $f'(1)=\left.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$, 于是

$\sqrt{0.97}=f(0.97)\approx f(1)+f'(1)\Delta x=1-\dfrac{1}{2}\cdot 0.03=0.985$, 查表: 0.9849,

$\sqrt{1.05}=f(1.05)\approx f(1)+f'(1)\Delta x=1+\dfrac{1}{2}\cdot 0.05=1.025$, 查表: 1.0247.

例. 在半径为1cm的球上镀一层厚度为0.01cm的铜, 估计每个球需用铜多少 cm^3.

解. $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$, $R_0=1$, $\Delta R=0.01$, 故镀层体积 $\Delta V=V(R_0+\Delta R)-V(R_0)\approx$

$V'(R_0)\Delta R=4\cdot 3.14\cdot 1^2\cdot 0.01\approx 0.13\mathrm{cm}^3$.

补充练习

1. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是______.

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;　　(B) $f(x)-f(0)=Ax+o(x)$;

(C) $f'_-(0)$ 与 $f'_+(0)$ 均存在;　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 存在.

解. 选(B).

第三章 微分中值定理与导数的应用

第 3.1 节 微分中值定理

一. 罗尔定理

费马引理. 设在 $U(x_0)$ 内 $f(x)\le f(x_0)$ 或 $f(x)\ge f(x_0)$, 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0)=0$, 即 x_0 为 $f(x)$ 的**驻点**.

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 若 $f(a)=f(b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$, 其中 ξ 称为**中值**.

注. 我们约定本节的函数均满足: 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导.

例. 设 $2f(0)+3f(1)=10$, $f(2)=2$, 证明: $\exists\xi\in(0,2)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证. $\exists\eta\in[0,1]$, 使得 $f(\eta)=\dfrac{2f(0)+3f(1)}{5}=2$ (加权平均值), 证毕.

例. 设 $f(0)>f(1)$, $f(2)>f(1)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证. 不妨设 $f(2)>f(0)>f(1)$, 则 $\exists\eta\in(1,2)$, 使得 $f(\eta)=f(0)$, 即得;

或者, $\exists\xi\in(0,2)$, 使得 $f(\xi)=\min\limits_{0\le x\le 2}f(x)$, 由费马引理, 即得, 证毕.

例. 设 $f(0)=f(2)=0$, $f(1)=2$, 证明: 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $f'(\xi)=1$.

证. 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(0)=0$, $F(1)=1$, $F(2)=-2$, 故 $\exists\xi\in(0,2)$, 使得 $F(\xi)$ 为最大值, 于是 $F'(\xi)=0$, 证毕.

例. 设曲线 $y=f(x)$ 与某一条不平行于 y 轴的直线相交于三个点, 证明: 存在 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$.

证. 设直线方程为 $y=ax+b$, 令 $F(x)=f(x)-ax-b$, 则 $F(x)$ 有三个不同零点, 故存在 ξ, 使得 $F''(\xi)=0$, 证毕.

注. 若曲线 $y=f(x)$ 与一条抛物线交于四个点, 则存在 ξ, 使得 $f'''(\xi)=0$.

注. (1) 若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个零点, 则 $f'(x)$ 至少有 n 个零点, $f''(x)$ 至少有 $n-1$ 个, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ 至少有 1 个零点.

(2) 若 $f^{(n)}(x)\ne 0$, 例如 n 次多项式, 则 $f(x)$ 至多有 n 个零点.

例. 设 $f(x)=x(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$, 求 $f''(x)$ 的实零点个数.

解. $f(x)$ 有 $n+1$ 个零点, $f''(x)$ 至少有 $n-1$ 个零点, 由于 $f''(x)$ 为 $n-1$ 次多项式, 至多有 $n-1$ 个零点, 故恰有 $n-1$ 个零点.

例. 证明: 方程 $2^x-x^2=1$ 有且仅有 3 个实根.

证. 设 $f(x)=2^x-x^2-1$, 则 $f(0)=f(1)=0$, 又 $f(2)=-1$, $f(5)=6$, 故有 3 个实根, 同时 $f'''(x)=\left(2^x\right)'''=2^x\cdot\ln^3 2\ne 0$, 证毕.

例. 设 $f(1)=0$, $F(x)=x^2f(x)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F''(\xi)=0$.

证. $F(0)=F(1)=0\Rightarrow\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $F'(\eta)=0$, 又 $F'(0)=0$, 证毕.

例. 设 $f(0)=f(1)=0$, $F(x)=xf(x)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F''(\xi)=0$.

证. $F(0)=F(1)=0\Rightarrow\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $F'(\eta)=0$, 又 $F'(0)=0$, 证毕.

例. 设 $f(1)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证. 令 $F(x)=xf(x)$, 则 $F(0)=F(1)=0$, 而 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$, 证毕.

例. 设 $f(a)=f(b)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证. 令 $F(x)=e^xf(x)$, 则 $F(a)=F(b)=0$, 而 $F'(x)=e^x\left[f(x)+f'(x)\right]$, 证毕.

二. 拉格朗日中值定理

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

推论(增量公式). $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$, 其中 $0<\theta<1$.

推论. 设在 (a,b) 上 $|f'(x)|\le M$, 则在 (a,b) 上, $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$;

特别地, 当 $f'(x)$ 在 (a,b) 上有界时, $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

例. $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$, $|\cos x-\cos y|\le|x-y|$, $|\arctan x-\arctan y|\le|x-y|$.

例. 设 $a<b$, 则 $e^a(b-a)<e^b-e^a<e^b(b-a)$.

例. 当 $x>0$ 时, $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$; 特别地, $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$.

证. $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}=\dfrac{1}{1+\xi}<1$, 证毕.

推论. 设在区间 I 上 $f'(x)\equiv0$, 则在 I 上 $f(x)$ 为常数.

推论. 设在 (a,b) 内 $f'(x)\equiv g'(x)$, 则 $f(x)=g(x)+C$.

例. 设 $a<c<b$, $f(a)=f(b)<f(c)$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)<0$.

证. 由中值定理, $\exists\eta\in(a,c)$, 使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$, 同理, $\exists\zeta\in(c,b)$, 使得

$f'(\zeta)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$, 故 $\exists\xi\in(\eta,\zeta)$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{f'(\zeta)-f'(\eta)}{\zeta-\eta}<0$, 证毕.

例. 设 $f(a)=f(b)=1$, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $f'(\eta)+f(\eta)=e^{\xi-\eta}$.

证. $f'(\eta)+f(\eta)=e^{\xi-\eta}\Leftrightarrow e^\eta\left[f'(\eta)+f(\eta)\right]=e^\xi$, 令 $F(x)=e^xf(x)$, 则

$\exists\eta\in(a,b)$, $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\eta)=\dfrac{F(a)-F(b)}{a-b}=\dfrac{e^a-e^b}{a-b}=e^\xi$, 证毕.

例. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\cos\xi=0$.

例. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot 2^{\xi}\ln 2=\ln 2$.

例. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{1+\xi^2}=1$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x^3}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\sec^2\xi\cdot\frac{\tan x-\sin x}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

三. 柯西中值定理

定理. 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例. 设 $a>0$, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $abf'(\xi)=\eta^2 f'(\eta)$.

证. $\exists\xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, 上式 $\Leftrightarrow\frac{f(a)-f(b)}{1/a-1/b}=\frac{f'(\eta)}{-1/\eta^2}$, 令 $g(x)=\frac{1}{x}$,

则 $\exists\eta\in(a,b)$, 使得 $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$, 即得, 证毕.

例. 设 $a\cdot b>0$, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\frac{(a+b)f'(\eta)}{2\eta}$.

证. $\exists\xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, 上式 $\Leftrightarrow\frac{f(a)-f(b)}{a^2-b^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$, 令 $g(x)=x^2$,

则 $\exists\eta\in(a,b)$, 使得 $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$, 即得, 证毕.

补充练习

1. 设 $f(-2)=f(2)=0$, $f(0)=2$, 证明: 曲线 $y=f(x)$ 有一条切线, 它平行于直线 $x-2y+6=0$.

证. 令 $F(x)=f(x)-\frac{x}{2}$, 则 $F(-2)=1$, $F(0)=2$, $F(2)=-1$, 故 $F(x)$ 有最大值点 $\xi\in(-2,2)$, 于是 $F'(\xi)=0$, 证毕.

2. 证明: 方程 $x^5-5x+1=0$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个根.

证. 设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(0)=1$, $f(1)=-3$, 故在 $(0,1)$ 内有零点;

又在 $(0,1)$ 上 $f'(x)=5x^4-5\neq 0$, 故至多只有一个零点, 证毕.

3. 设 $f'(x)\neq 1$, $0<f(x)<1$, 证明:存在唯一的 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

证. 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(0)>0$, $F(1)<0$, 故存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F(\xi)=0$;

又在 $(0,1)$ 内 $F'(x)=f'(x)-1\neq 0$, 故 ξ 唯一, 证毕.

4. 证明:存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $\cot\xi\cdot f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证. $\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{f'(x)}{f(x)}=0\Leftrightarrow\left[\ln\sin x+\ln f(x)\right]'=0\Leftrightarrow\left[\sin x\cdot f(x)\right]'=0$;

令 $F(x)=\sin x\cdot f(x)$, 则 $F(0)=F(\pi)=0$, 证毕.

5. 设 $f(x)$ 有界, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$, 证明: $A=0$.

证. $f'(\xi_n)=\dfrac{f(2n)-f(n)}{n}$, 其中 $\xi_n\in(n,2n)$, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$, 于是 $A=0$. 证毕.

6. 设 $f'(x)\neq 0$, 证明:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^a-e^b}{a-b}e^{-\eta}$.

证. $\exists\xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$, 上式 $\Leftrightarrow\dfrac{f(a)-f(b)}{e^a-e^b}=\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$, 令 $g(x)=e^x$,

则 $\exists\eta\in(a,b)$, $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\dfrac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$, 即得, 证毕.

第 3.2 节 洛必达法则

一. 无穷小或无穷大的商

定理. 设(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$; (2) 在某个 $\mathring{U}(a)$ 内, $f(x)$ 与 $g(x)$ 均可导, 且 $g'(x)\neq 0$; (3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 或为 ∞, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

定理. 设(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$; (2) 当 $|x|>X$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 均可导, 且 $g'(x)\neq 0$, (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 或为 ∞, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

注. 对于 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 或为 ∞, 则 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

例. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$.

例. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin x}=0$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sec^2 x\tan x}{6x}=-\dfrac{1}{3}$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\arcsin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin u-u}{\sin^3 u}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin u-u}{u^3}=-\dfrac{1}{6}$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{(1+\sin x)\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}+e^{-x}}{2x}=\infty$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{x^4}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-\sin\sin x)\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{6x^2}=\dfrac{1}{6}$; 或者, 直接原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

例. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}(\alpha>0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^\alpha}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=1$.

例. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^{\lambda x}}(\alpha>0,\lambda>0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}=\cdots=0$.

例. 设 $f''(x_0)$ 存在, 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$.

解. $f''(x_0)$ 存在 $\Rightarrow f'(x)$ 在 x_0 的某个邻域内存在, 故

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}=$$
$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{h}=f''(x_0).$$

注. 最后一步不能用洛必达法则, 除非 $f''(x)$ 存在, 且在 $x=x_0$ 处连续.

例. 设 $f(0)=0$, $f'(0)=f''(0)=1$, 令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 求 $g'(0)$.

解. $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(0)=\dfrac{1}{2}$.

注. 最后一步不能用洛必达法则, 除非 $f''(x)$ 存在, 且在 $x=0$ 处连续.

例. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$, 不存在(非常数的周期函数), 而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}=1$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}$, 不存在, 而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$.

二. 其它未定式($0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0)

例. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$.

例. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha\ln x(\alpha>0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^\alpha}{\alpha}=0$;

或者, $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha\ln x(\alpha>0)\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-\ln t}{t^\alpha}=0$ (倒代换).

例. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=e^0=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{x\ln x}=e^0=1$.

例. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^ne^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t^n}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^n}{e^t}=0$.

例. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\dfrac{1}{2}$.

例. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{1}{t}-\ln\dfrac{1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1+t\ln t}{t}=+\infty$.

例. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\dfrac{1}{2}$.

例. $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)}=e^{\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1+x-1)\ln(1-x)}=e^{-\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x)}=e^0=1$.

例. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)}=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

例. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\tan x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)}=e^{\frac{\tan x-x}{x^3}}=e^{\frac{1}{3}}$.

例. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+t}}{1}}=e^0=1$.

补充练习

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin 6x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2-2\cos 4x}{12x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{8\sin 4x}{24x}=\frac{4}{3}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}-e^2\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}=e^2\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=-e^2$.

4. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(\sin x)^x-x^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$.

5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{x-1}-1}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{(x-1)\ln x}-1}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{1-x+\ln x}=-2$.

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2-2\cos x}\left(e^{x^2-2+2\cos x}-1\right)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\frac{1}{12}$.

7. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ax-b\right]=2$, 求 a, b.

解. $a=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $b+2=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ex\right]=\lim\limits_{t\to0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}=$

$\lim\limits_{t\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}-e}{t}=e\lim\limits_{t\to0^+}\frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1}{t}=e\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{e}{2}$, 故 $b=-\frac{e}{2}-2$.

8. 设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)+\sin 6x}{x^3}=2$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+6}{x^2}$.

解. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+6}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)+\sin 6x-\sin 6x+6x}{x^3}=2-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}=38$.

第 3.3 节 泰勒公式

一. 泰勒公式

设 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 记

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称为 n 阶泰勒多项式, 记 $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$.

定理. 设 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 则当 $x\to x_0$ 时, $R_n(x)=o\left[(x-x_0)^n\right]$.

注. $f(x)=P_n(x)+o\left[(x-x_0)^n\right]$, 称为 $f(x)$ 的带 Peano 型余项的 n 阶泰勒公式.

定理(泰勒中值定理). 设 $f(x)$ 在含 x_0 的 (a,b) 内 $n+1$ 阶可导, 则 $\forall x\in(a,b)$, 存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ, 使得 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

注. $f(x)=P_n(x)+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为 $f(x)$ 的带 Lagrange 型余项的 n 阶泰勒公式.

二. 麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{其中 } 0<\theta<1;$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

例. 设 $f(x)=e^x$, 则 $f^{(n)}(0)=1$, 故 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+R_n(x)$, 其中

$R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$, 特别地, $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+R_n$, 其中

$R_n<\dfrac{e}{(n+1)!}$, 于是, $\forall n>1$, $e\cdot n!$ 不可能是整数, 即 e 为无理数.

例. 设 $f(x)=\sin x$, 则 $f^{(n)}(0)=\sin\left(0+\dfrac{n\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{n\pi}{2}$, 故

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x), \text{其中}$$

$$R_{2m}(x)=\frac{\sin\left[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}\ (0<\theta<1)=o(x^{2m}).$$

注. 类似地, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$;

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$;

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

三. 泰勒公式的应用

例. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, 且 $f''(x)>0$, 证明: 当 $x\neq 0$ 时, $f(x)>x$.

证. $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 故 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2>x$, 证毕.

例(Jensen 不等式). $f''(x)\geq 0\Rightarrow \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\geq f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$.

证. 令 $x_0=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, 则 $f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\frac{f''(\xi_i)}{2}(x_i-x_0)^2$, 故

$f(x_i)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\geq nf(x_0)$, 即得, 证毕.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x\left[1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right]}{x^3}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln(1+x^2)-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-1-\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2-o(x^4)}{x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)-x^2}=\frac{1}{6}$.

例. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)+\sin 6x}{x^3}=2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+6}{x^2}$.

解. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)+\left[6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)\right]}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+6}{x^2}-36\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+6}{x^2}=38$.

例. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-ax+bx^2}{x^2}=2$, 求 a, b.

解. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-ax+bx^2}{x^2}=2\Rightarrow a=1$, $b=\frac{5}{2}$.

例. 设 $f''(0)$ 存在, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^3}=\frac{1}{3}$, 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

解. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right]-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}{x^3}=\frac{1}{3}$, 故

$f(0)=1$, $f'(0)=-\frac{1}{2}$, $f''(0)=\frac{4}{3}$.

第 3.4 节 函数的单调性与曲线的凹凸性

一. 函数的单调性

1. 单调性的判定

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则

(1) 当在 (a,b) 上 $f'(x)>0$ 时, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

(2) 当在 (a,b) 上 $f'(x)<0$ 时, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

推论. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (1) 若它在 (a,b) 上除了有限个点外满足 $f'(x)>0$, 则它在 $[a,b]$ 上单调增加; (2) 若它在 (a,b) 上除了有限个点外满足 $f'(x)<0$, 则它在 $[a,b]$ 上单调减少.

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 上可导, 且在 $[a,b]$ 的任何子区间上不为常数, 则 (1) 当在 (a,b) 上 $f'(x)\geq 0$ 时, $f(x)$ 单调增加;

(2) 当在 (a,b) 上 $f'(x)\leq 0$ 时, $f(x)$ 单调减少.

例. $y=x-\sin x$, $y'=1-\cos x\geq 0$, 故 $y=x-\sin x$ 单增.

例. 讨论 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解. $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, 故在 $(-\infty,0]$ 上单减, $[0,+\infty)$ 上单增, $x=0$ 为不可导点.

例. 讨论 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解. $y'=e^x-1$, 故在 $(-\infty,0]$ 上单减, 在 $[0,+\infty)$ 上单增, $x=0$ 为驻点.

注. 函数单调区间的分界点总是驻点或不可导点.

例. 确定 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解. $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)=0\Rightarrow x=1$, 2, 列表如下

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 和 $[2,+\infty)$ 上单调增加, 在 $[1,2]$ 上单调减少.

例. 确定 $f(x)=2x-\ln x^2$ 的单调区间.

解. $f'(x)=2-\frac{2}{x}=\frac{2}{x}(x-1)=0\Rightarrow x=1$, 加上间断点 $x=0$, 列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调增加, 在 $(0,1]$ 上单调减少, 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加.

2. 不等式的证明

例. 证明：当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

证. 令 $f(x)=2\sqrt{x}-\left(3-\frac{1}{x}\right)$，则 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$，由于当 $x>1$ 时，$\sqrt{x}<x<x^2$，$\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{1}{x^2}$，得 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单增，而 $f(1)=0$，证毕.

例. 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$.

证. $f(x)=\sin x+\tan x-2x$，$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2>\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-2=\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)^2>0$，故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单增，而 $f(0)=0$，证毕.

例. 证明：当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$.

证. $2^x>x^2 \Leftrightarrow x\ln 2>2\ln x$，令 $f(x)=x\ln 2-2\ln x$，则 $f'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}$，当 $x>4$ 时，$f'(x)>\ln 2-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{e}>0$，故 $f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 上单增，而 $f(4)=0$，证毕.

例. 证明：当 $0<x<y<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\tan y}{\tan x}>\frac{y}{x}$.

证. 只需证 $\frac{\tan y}{y}>\frac{\tan x}{x}$，即 $\frac{\tan x}{x}$ 单增；$\left(\frac{\tan x}{x}\right)'=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上，$g'(x)=2x\sec^2 x\tan x>0\Rightarrow g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单增，而 $g(0)=0$，故在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上 $g(x)>0$，即得，证毕.

例. 设 $f(x)$ 二阶可导，$f(0)=0$，$f''(x)>0$，证明：$\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

证. 设 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$，在 $(0,+\infty)$ 上，$g'(x)=xf''(x)>0\Rightarrow g(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上单增，而 $g(0)=0$，故在 $(0,+\infty)$ 上 $g(x)>0$，即得，证毕.

例. 证明：当 $x>0$ 时，$e^x\geq x^e$，当且仅当 $x=e$ 时，等号成立.

证. $e^x\geq x^e \Leftrightarrow x\geq e\ln x$，令 $f(x)=x-e\ln x$，则 $f'(x)=1-\frac{e}{x}$，在 $0<x<e$ 上 $f'(x)<0$，在 $x>e$ 上 $f'(x)>0$，故 $f(e)=0$ 为最小值，证毕.

3. 方程根的个数

例. 求方程 $e^x-|x+2|=0$ 的实根个数.

解. 设 $f(x)=e^x-|x+2|=\begin{cases} e^x+x+2, & x\le -2 \\ e^x-x-2, & x>-2 \end{cases}$, 则 $f'(x)=\begin{cases} e^x+1, & x<-2 \\ e^x-1, & x>-2 \end{cases}$, 于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上单增, 在 $[-2,0]$ 上单减, 在 $[0,+\infty)$ 上单增, 又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(-2)=\dfrac{1}{e^2}>0$, $f(0)=-1<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 故 $f(x)$ 有三个零点, 即 $e^x-|x+2|=0$ 有三个实根.

例. 确定曲线 $y=4x+\ln^4 x$ 与 $y=4\ln x+k$ 的交点个数.

解. 令 $f(x)=(4x+\ln^4 x)-(4\ln x+k)$, 则 $f'(x)=\dfrac{4(\ln^3 x+x-1)}{x}$, $f'(1)=0$, 当 $0<x<1$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$, 故 $f(1)=4-k$ 为最小值, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, (1) 当 $k<4$ 时, $f(x)$ 无零点, 故曲线无交点;

(2) 当 $k=4$ 时, $f(x)$ 有唯一零点, 故曲线有一个交点;

(3) 当 $k>4$ 时, $f(x)$ 有两个零点, 故曲线有两个交点.

二. 曲线的凹凸性与拐点

定义. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 若 $\forall x_1\ne x_2\in I$, 恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称曲线 $y=f(x)$ 为凹弧;

若 $\forall x_1\ne x_2\in I$, 恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称曲线 $y=f(x)$ 为凸弧.

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则

(1) 当在 (a,b) 上 $f'(x)$ 单调增加时, 曲线 $y=f(x)$ 是凹弧;

(2) 当在 (a,b) 上 $f'(x)$ 单调减少时, 曲线 $y=f(x)$ 是凸弧.

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二阶可导, 则

(1) 当在 (a,b) 上 $f''(x)>0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 是凹弧;

(2) 当在 (a,b) 上 $f''(x)<0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 是凸弧.

例. 判断曲线 $y=\ln x$ 的凹凸性.

解. $y''=-x^{-2}<0$, 故曲线 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凸的.

例. 判断曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解. $y'=3x^2$, $y''=6x$, 曲线在 $(-\infty,0]$ 上为凸, $[0,+\infty)$ 上为凹, $(0,0)$ 为拐点.

例. 判断曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的凹凸性.

解. $y''=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, 曲线在 $(-\infty,0]$ 上为凹, 在 $[0,+\infty)$ 上凸, $(0,0)$ 为拐点.

定义. 若连续曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 两侧有不同的凹凸性, 则称该点为曲线的**拐点**.

注. 在拐点 (x_0,y_0) 处总有 $f''(x_0)=0$, 或 $f''(x_0)$ 不存在; 反之不对.

例. 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

解. $y'=12x^3-12x^2$, $y''=36x^2-24x=36x\left(x-\frac{2}{3}\right)$, $y''=0\Rightarrow x=0,\ \frac{2}{3}$, 列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
图形	凹	拐点	凸	拐点	凹

故在 $(-\infty,0]$, $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上凹, 在 $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ 上凸, $(0,1)$ 和 $\left(\frac{2}{3},\frac{11}{27}\right)$ 为拐点.

例. 求曲线 $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ 的凹凸区间及拐点.

解. $y'=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $y''=\frac{6x}{(x-1)^4}$, $y''=0\Rightarrow x=0$, 又 $y''(1)$ 不存在, 列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	$\times$	$+$
图形	凸	拐点	凹	$\times$	凹

故凸区间为 $(-\infty,0]$, 凹区间为 $[0,1)$ 和 $(1,+\infty)$, 拐点为 $(0,0)$.

定理. 设 $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, 则 $(x_0,f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点.

例. 证明: $(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\leq x\ln x+y\ln y\,(x>0,y>0)$.

证. 只要证明 $\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}\leq\frac{x\ln x+y\ln y}{2}$, 令 $f(x)=x\ln x\,(x>0)$, 则

$f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\frac{1}{x}>0$, 故 $y=f(x)$ 是凹弧, 即得, 证毕.

补充练习

1. 证明: 当 $0<x<2\pi$ 时, $\sin x>x-\frac{1}{6}x^3$.

证. 令 $f(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$, 则 $f'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$, $f''(x)=-\sin x+x$,

在 $(0,2\pi)$ 上 $f''(x)>0\Rightarrow f'(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单增, $f'(0)=0$, 故在 $(0,2\pi)$ 上,

$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单增, 而 $f(0)=0$, 即得, 证毕.

2. 设 $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 证明: 当 $x>0$ 时, $\frac{x^p}{p}+\frac{1}{q}\ge x$.

证. 令 $f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{1}{q}-x$, 则 $f'(x)=x^{p-1}-1=0\Rightarrow x=1$, 又当 $0<x<1$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$, 故 $f(1)=0$ 为最小值, 证毕.

3. 设 $a^3>b^2>0$, $f(x)=x^3-3ax+2b$, 求方程 $f(x)=0$ 的实根个数.

解. $f'(x)=3x^2-3a=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$, 故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\sqrt{a}\right]$, $\left[\sqrt{a},\infty\right)$ 上单增, 在 $\left[-\sqrt{a},\sqrt{a}\right]$ 上单减; 又 $f\left(-\sqrt{a}\right)=2\left(b+a^{\frac{3}{2}}\right)>0$, $f\left(\sqrt{a}\right)=2\left(b-a^{\frac{3}{2}}\right)<0$, 并且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 故方程有 3 个实根.

第 3.5 节 函数的极值与最大值最小值

一. 函数的极值及其求法

定义. 设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义, 若在某 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内, $f(x)<f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值; 极小值类似. 极大值极小值统称为极值(看图).

例. 设 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=1$, 讨论 $f(0)$ 是否为极值.

解. $f(0)=0$, 在 0 的两侧邻域内, $f(x)$ 与 x^n 同号, 故当 n 为奇数时, $f(0)=0$ 不是极值, 当 n 为偶数时, $f(0)=0$ 是极小值.

定理(必要条件). 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且有极值, 则 $f'(x_0)=0$.

注. 因此, 极值点必是驻点或不可导点; 反之不对, 例如 $f(x)=x^3$.

定理(第一充分条件). 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内可导, 则

(1) 当在 x_0 的左侧 $f'(x)>0$, 右侧 $f'(x)<0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值;

(2) 当在 x_0 的左侧 $f'(x)<0$, 右侧 $f'(x)>0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值;

(3) 当在 x_0 的两侧 $f'(x)$ 的符号相同时, $f(x_0)$ 不是极值.

例. 设 $f(x)$ 二阶可导, $f'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$, 证明: $f(0)$ 为极小值.

证. 在 0 两侧邻域内, $f''(x)>0\Rightarrow f'(x)$ 在 $U(0)$ 内单增, 故在 0 的左侧 $f'(x)<0$, 右侧 $f'(x)>0$, 证毕.

例. 求 $f(x)=x^x(1-x)^{1-x}$ 在 $(0,1)$ 内的极值.

解. $f'(x)=x^x(1-x)^{1-x}\ln\dfrac{x}{1-x}$, 驻点 $x=\dfrac{1}{2}$, 当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时, $f'(x)>0$, 故 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ 为极小值, 无极大值.

例. 求 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值.

解. $f'(x)=\dfrac{5}{3}(x-1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}$, 驻点 $x=1$, 不可导点 $x=-1$, 列表如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不可导	−	0	+
$f(x)$	单增	极大 $f(-1)=0$	单减	极小 $f(1)=-3\sqrt[3]{4}$	单增

定理(第二充分条件). 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0)=0$, 则

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值; (2) 当 $f''(x_0)>0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值.

例. 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解. $f'(x)=6x(x^2-1)^2$, 驻点 $x=0$, ±1, $f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$, 而

$f''(0)=6>0$, 故 $f(0)=0$ 是极小值;

$f''(\pm1)=0$, 而在 ±1 两侧, $f'(x)$ 同号, 故 $f(\pm1)$ 不是极值点.

例. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导, 若 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)}{h^2}=2$, 证明:

$f(x)$ 在 x_0 处取到极小值.

证. $f'(x_0)=0$, 故 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(x_0+h)}{2h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h}=\dfrac{f''(x_0)}{2}=2>0$, 证毕.

二. 最大值最小值问题

例. 求 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值和最小值.

解. $f(x)$ 是闭区域上的连续函数, 故一定存在最大值和最小值;

设 $g(x)=(x^2-3x+2)^2$, 则 $g'(x)=2(x^2-3x+2)(2x-3)$, 驻点 $x=1$, 2, $\dfrac{3}{2}$,

$g(1)=0$, $g(2)=0$, $g\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{16}$, $g(-3)=400$, $g(4)=36$, 最大值 20, 最小值 0.

例. 铁路 AB 距离 100km, 工厂 C 距 A 处 20km, AC 垂直于 AB, 现在 AB 上选 D 向工厂修筑公路, 已知铁路与公路每公里运费之比为 $3:5$, 求 AD 距离, 使得货物从工厂运到 B 的运费最省.

解一. 设 $AD=x$, $DB=100-x$, $CD=\sqrt{20^2+x^2}=\sqrt{400+x^2}$, 铁路运费每公里 $3k$, 公路 $5k$, 总运费 $y=5k\sqrt{400+x^2}+3k(100-x)$, $0\le x\le100$;

$y'=k\left(\dfrac{5x}{\sqrt{400+x^2}}-3\right)$, 唯一驻点 $x=15$, 由 $y(15)=380k$, $y(0)=400k$,

$y(100)=500k\sqrt{\dfrac{26}{25}}$, 得当 $AD=15$ 时, 运费最省.

解二. $x=15$ 是唯一驻点, 而 $y''=\dfrac{2000k}{(400+x^2)^{3/2}}>0$, 故为最小值点.

例. 做一个容积为 V 的无盖圆柱形桶, 底面是铝板, 侧面是木板, 已知铝板价格是木板的 5 倍, 求底面半径使得费用最省.

解. 设底面半径为 r, 桶高为 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$, 则总费用 $y=5k\cdot\pi r^2+k\cdot2\pi r\cdot\dfrac{V}{\pi r^2}=$

$k\left(5\pi r^2+\dfrac{2V}{r}\right)(r>0)$, $\dfrac{dy}{dr}=k\left(10\pi r-\dfrac{2V}{r^2}\right)=0\Rightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{5\pi}}$ 唯一驻点, 而

$\dfrac{d^2y}{dr^2}=k\left(10\pi+\dfrac{4V}{r^3}\right)>0$, 故 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{5\pi}}$ 是极小值点, 也是最小值点.

补充练习

1. 设 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{(x-1)^3}=-1$, 证明: $f(1)$ 为极大值.

证. 在 $x=1$ 两侧邻域内 $f'(x)$ 与 $(x-1)^3$ 同号, 即得, 证毕.

2. 设 $f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq0$, 则 (1) 当 n 为偶数时, $f(x_0)$ 是极值, 且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时为极大值, 当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时为极小值;

(2) n 为奇数时, $f(x_0)$ 不是极值.

证. $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left[(x-x_0)^n\right]\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$,

当 n 为偶数 (奇数) 时, 在 x_0 两侧邻域内 $f(x)-f(x_0)$ 同号 (不同), 证毕.

3. 设 a 和 b 为两个满足 $a+b=1$ 的正数, 求 $a^mb^n\,(m,n>0)$ 的最大值.

解. 令 $x=a$, $b=1-x$, $f(x)=x^m(1-x)^n\,(0<x<1)$, 则

$f'(x)=x^{m-1}(1-x)^{n-1}\left[m(1-x)-nx\right]=(m+n)x^{m-1}(1-x)^{n-1}\left(\dfrac{m}{m+n}-x\right)$, 唯一驻点

$x=\dfrac{m}{m+n}$, 当 $x>\dfrac{m}{m+n}$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x<\dfrac{m}{m+n}$ 时, $f'(x)>0$, 故最大值为

$f\left(\dfrac{m}{m+n}\right)=\left(\dfrac{m}{m+n}\right)^m\left(\dfrac{n}{m+n}\right)^n$.

4. 设 a 和 b 为两个满足 $ab=1$ 的正数, 求 $a^m+b^n\,(m,n>0)$ 的最小值.

解. 令 $x=a$, $b=\dfrac{1}{x}$, $f(x)=x^m+x^{-n}\,(x>0)$, 则 $f'(x)=mx^{m-1}-nx^{-n-1}=$

$mx^{-n-1}\left(x^{m+n}-\dfrac{n}{m}\right)$, 唯一驻点 $x_0=\left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}$, 而当 $x<x_0$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x>x_0$ 时,

$f'(x)>0$, 故最小值为 $f(x_0)=\left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}+\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m+n}}$.

第 3.6 节 函数图形的描绘

借助一阶导数的符号,可以确定函数图形的上升下降区间,借助二阶导数的符号,可以确定函数图形的凹凸区间.

例. 描绘 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解. (1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

(2) $y'=(3x+1)(x-1)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$, 1; $y''=6\left(x-\frac{1}{3}\right)=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}$;

(3) 列表如下:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
图	升凸	极大	降凸	拐点	降凹	极小	升凹

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$;

(5) $\left(-\frac{1}{3},\frac{32}{27}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{16}{27}\right)$, $(1,0)$, 补充 $(-1,0)$, $(0,1)$.

例. 描绘 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解. (1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 偶函数, 且 $y>0$;

(2) $y'=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}=0\Rightarrow x=0$; $y''=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow x=\pm1$;

(3) 列表如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
图	升凹	拐点	升凸	极大	降凸	拐点	降凹

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$, 水平渐近线 $y=0$;

(5) $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, $\left(\pm1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$.

例. 描绘 $y=xe^{\frac{1}{x}}$ 的图形.

解. (1) 定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 间断点 $x=0$;

(2) $y'=\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}=0\Rightarrow x=1$; $y''=\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$;

(3) 列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
图	升凸	$\times$	降凹	极小	升凹

(4) $\lim\limits_{x\to0^-} y=0$, $\lim\limits_{x\to0^+} y=+\infty$, 铅直渐近线 $x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$;

(5) $(1,e)$.

例. 描绘 $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解. (1) 定义域 $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$, 间断点为 $x=-3$;

(2) $y'=\dfrac{36(3-x)}{(x+3)^3}=0\Rightarrow x=3$; $y''=\dfrac{72(x-6)}{(x+3)^4}=0\Rightarrow x=6$;

(3) 列表如下:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
y'	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$\times$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
图	降凸	$\times$	升凸	极大	降凸	拐点	降凹

(4) $\lim\limits_{x\to-3} y=-\infty$, 铅直渐近线 $x=-3$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$, 水平渐近线 $y=1$;

(5) $(3,4)$, $\left(6,\dfrac{11}{3}\right)$, 补充 $(0,1)$.

补充练习

1. 描绘 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的图形.

解. (1) 定义域 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, 间断点为 $x=1$;

(2) $y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0\Rightarrow x=0$, 3; $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}=0\Rightarrow x=0$, 1;

(3) 列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	$+$	$+$
图	升凸	拐点	升凹	$\times$	降凹	极小	升凹

(4) $\lim\limits_{x\to1} y=+\infty$, 铅直渐近线 $x=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$;

(5) $(0,0)$, $\left(3,\dfrac{27}{4}\right)$.

2. 描绘 $y=\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$ 的图形.

解. (1) 定义域 $\left(-\infty,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$, 间断点为 $x=1$;

(2) $y'=\frac{-2x}{\left(x-1\right)^3}=0\Rightarrow x=0$; $y''=\frac{2\left(2x+1\right)}{\left(x-1\right)^4}=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$;

(3) 列表如下:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$\left(0,1\right)$	1	$\left(1,+\infty\right)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\times$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\times$	$+$
图	降凸	拐点	降凹	极小	升凹	$\times$	降凹

(4) $\lim\limits_{x\to1}y=+\infty$, 铅直渐近线 $x=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$, 水平渐近线 $y=0$;

(5) $\left(-\frac{1}{2},-\frac{8}{9}\right)$, $\left(0,-1\right)$.

第 3.7 节 曲率

一. 弧微分

定义. 设 $L: y=f(x)$ 为光滑曲线, 取点 $M_0(x_0,y_0)\in L$, 以 x 增大的方向为曲线的正方向, $\forall M(x,y)\in L$, 令

$$s(x)=\begin{cases}-\left|\overset{\frown}{M_0M}\right|, & x<x_0\\ \left|\overset{\frown}{M_0M}\right|, & x\geq x_0\end{cases}$$, 称为有向弧段的值, 或长度, 简称为弧, 也记为 $\overset{\frown}{M_0M}$.

弧微分公式. $ds=\sqrt{1+f'(x)^2}dx$.

二. 曲率及其计算公式

定义. 设 L 为光滑曲线, 基点 M_0, $M(x,y)\in L$ 对应弧长 $s(x)$, 切线倾角为 $\alpha(x)$, $M'(x+\Delta x,y+\Delta y)\in L$, 对应弧长 $s(x+\Delta x)$, 切线倾角为 $\alpha(x+\Delta x)$, 则

$\bar{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\alpha(x+\Delta x)-\alpha(x)}{s(x+\Delta x)-s(x)}\right|$, 称为弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 的平均曲率, 而 M 处的曲率为

$K_M=\lim\limits_{M'\to M}\bar{K}=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$, 即切线方向角对弧长的变化率.

例. 对于直线, 任意两点之间的 $\Delta\alpha=0$, 故 $\bar{K}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=0$, 而 $K=0$.

例. 对于半径为 r 的圆, $\Delta s=2\pi r\cdot\frac{\Delta\alpha}{2\pi}=r\Delta\alpha$, 故 $\bar{K}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{1}{r}$, 而 $K=\frac{1}{r}$.

公式. 光滑曲线 $L: y=f(x)$ 在 (x,y) 处的曲率为 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

推论. 设光滑曲线 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, 若 $\varphi'^2+\psi'^2\neq 0$, 则 $K=\frac{|\varphi'\psi''-\varphi''\psi'|}{\left[\varphi'^2+\psi'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$.

例. 求双曲线 $xy=1$ 在 $(1,1)$ 处的曲率.

解. $y'=-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{2}{x^3}$, 故 $K=\frac{|2|}{\left[1+(-1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例. 求双曲线 $16y^2=x^2-2x$ 在 $(2,0)$ 处的曲率.

解. $32y\cdot\frac{dy}{dx}=2x-2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x-1}{16y}$, 故在 $(2,0)$ 处, $\frac{dy}{dx}$ 不存在, 而 $\frac{dx}{dy}=0$, $\frac{d^2x}{dy^2}=16$,

故 $K=\frac{|x''|}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{16}{(1+0)^{\frac{3}{2}}}=16$.

例. 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上曲率的最大值.

解. $K=\dfrac{|2a|}{\left[1+(2ax+b)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$, 当 $2ax+b=0$, 即 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时, $K_{\max}=|2a|$.

例. 求摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}(0<t<2\pi)$ 的最小曲率.

解. $K=\dfrac{|x'y''-x''y'|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{a\sqrt{8(1-\cos t)}}$, 当 $t=\pi$ 时, $K_{\min}=\dfrac{1}{4a}$.

三. 曲率半径与曲率圆

设曲线 L 在 M 处的曲率 $K\neq 0$, 则在它凹侧的法线上取一点 D, 使得 $|DM|=\dfrac{1}{K}$, 以 D 为圆心, $\dfrac{1}{K}$ 为半径作圆, 称为 L 在 M 处的**曲率圆**, D 为**曲率中心**, $\rho=\dfrac{1}{K}$ 为**曲率半径**.

例. 设 5 吨的汽车以每秒 6 米的速度在跨度 10 米, 拱高 0.25 米的抛物线型拱桥上行驶, 求它越过桥顶时对桥面的压力.

解. 设桥面的方程为 $y=ax^2$, 代入 $x=5$, $y=-0.25$, 得 $a=-0.01$, 桥顶处曲率 $K=|2a|=0.02$, 曲率半径 $R=\dfrac{1}{K}=50$ 米, 于是向心力为 $mg-F=\dfrac{mv^2}{R}$, 得 $F=mg-\dfrac{mv^2}{R}=45400(\mathrm{N})$.

第四章 不定积分

第 4.1 节 不定积分的概念与性质

一. 原函数与不定积分的概念

定义. 若在区间 I 上, $F'(x)=f(x)$, 即 $dF(x)=f(x)dx$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$, 或者 $f(x)dx$ 在 I 上的原函数.

例. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 是 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 的原函数, $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$ 也是.

注. (1) 连续函数必有原函数.

(2) 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 则对任意常数 C, $F(x)+C$ 也是.

(3) 若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 均为 $f(x)$ 的原函数, 则必有 $G(x)=F(x)+C$.

定义. $f(x)$ 在区间 I 上带有任意常数项的原函数称为它在 I 上的不定积分, 记为 $\int f(x)dx$, 即 $\int f(x)dx=F(x)+C \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$.

$f(x)$-被积函数, $f(x)dx$-被积表达式, x-积分变量, $\int$ -积分号, C-积分常数;

$\int f(x)dx$ 的图形构成一个彼此不相交的平行曲线族, 其中每条曲线 $y=F(x)+C$ 均称为 $f(x)$ 的积分曲线.

例. $\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}+C$, $\int \cos xdx=\sin x+C$, $\int \dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.

二. 不定积分与微分的关系

(1) $\int f(x)dx=F(x)+C \Leftrightarrow d\left[F(x)+C\right]=f(x)dx$;

(2) $\int d\left[F(x)+C\right]=F(x)+C$; $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$.

三. 基本积分表

$\int kdx=kx+C$, $\int x^\mu dx=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\,(\mu\neq -1)$, $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$, $\int \dfrac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$,

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$, $\int \cos xdx=\sin x+C$, $\int \sin xdx=-\cos x+C$,

$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$, $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C$, $\int \sec x\tan xdx=\sec x+C$,

$\int \csc x\cot xdx=-\csc x+C$, $\int e^xdx=e^x+C$, $\int a^xdx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, $\int \operatorname{sh} xdx=\operatorname{ch} x+C$,

$\int \operatorname{ch} xdx=\operatorname{sh} x+C$.

注. $\int xdx=\dfrac{1}{2}x^2+C$, $\int \dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x}+C$, $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$.

四. 直接积分法(分项积分法)

性质(线性性). $\int\left[\alpha f(x)\pm\beta g(x)\right]dx=\alpha\int f(x)dx\pm\beta\int g(x)dx$.

例. $\int\frac{(x-1)^3}{x^2}dx=\int\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}dx=\frac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C$.

例. $\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx=\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=\arctan x+\ln|x|+C$.

例. $\int\frac{3x^4+2x^2+3}{x^2+1}dx=\int\frac{3x^4+3x^2-x^2-1+4}{x^2+1}dx=\int\left(3x^2-1+\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$
$x^3-x+4\arctan x+C$.

例. $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int\frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C$.

例. $\int\frac{x^6}{x^2+1}dx=\int\frac{x^6+1-1}{x^2+1}dx=\int\left(x^4-x^2+1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x-\arctan x+C$.

例. $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)}=\int\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$.

例. $\int\tan^2 xdx=\int(\sec^2 x-1)dx=\int\sec^2 xdx-\int dx=\tan x-x+C$.

例. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$.

例. $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}=\int\frac{dx}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int\sec^2 xdx=\frac{1}{2}\tan x+C$.

例. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int(\sec^2 x+\csc^2 x)dx=\tan x-\cot x+C$.

例. $\int e^{-|x|}dx=\begin{cases}e^x+C_1, & x<0\\ -e^{-x}+C_2, & x>0\end{cases}=\begin{cases}e^x+C, & x\le 0\\ -e^{-x}+C+2, & x>0\end{cases}$.

补充练习

1. 设$\int f(x)dx=e^{-x}+C$, 求$I=\int x^2 f(\ln x)dx$.

解. $f(x)=\left(e^{-x}\right)'=-e^{-x}$, 故$I=\int x^2\left(-e^{-\ln x}\right)dx=-\int xdx=-\frac{1}{2}x^2+C$.

2. 设$f'(\ln x)=1+x$, 求$f(x)$.

解. 令$u=\ln x$, 于是$f'(u)=1+e^u$, 故$f(x)=\int(1+e^x)dx=x+e^x+C$.

3. 设$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=x^3$, 求$f(x)$.

解. $f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)=x^3\Rightarrow f'\left(\frac{1}{x}\right)=-x^5\Rightarrow f'(u)=\frac{-1}{u^5}\Rightarrow f(x)=-\int\frac{dx}{x^5}=\frac{1}{4x^4}+C$.

4. $\int x(x+1)^{100}dx=\int(x+1-1)(x+1)^{100}dx=\int(x+1)^{101}dx-\int(x+1)^{100}dx=$

$\frac{1}{102}(x+1)^{102}-\frac{1}{101}(x+1)^{101}+C$.

5. $\int\frac{x^2}{(x+2)^3}dx=\int\frac{(x+2-2)^2}{(x+2)^3}dx=\int\frac{dx}{x+2}-4\int\frac{dx}{(x+2)^2}+4\int\frac{dx}{(x+2)^3}=$

$\ln|x+2|+\frac{4}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}+C$.

第 4.2 节 换元积分法

一. 凑微分法(第一类换元法)

例. $\int\cos(3x+1)dx=\frac{1}{3}\int\cos(3x+1)(3x+1)'dx=\frac{1}{3}\int\cos(3x+1)d(3x+1)=$

$\frac{1}{3}\int\cos udu\Big|_{u=3x+1}=\frac{1}{3}\sin u+C=\frac{1}{3}\sin(3x+1)+C$.

例. $\int\frac{dx}{3+2x}=\frac{1}{2}\int\frac{(3+2x)'}{3+2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(3+2x)}{3+2x}=\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C$.

例. $\int\frac{dx}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\int\sec^2\frac{x}{2}dx=\int\sec^2\frac{x}{2}d\frac{x}{2}=\tan\frac{x}{2}+C$.

例. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)dx=\frac{1}{2a}\int\frac{d(a+x)}{a+x}-\frac{1}{2a}\int\frac{d(a-x)}{a-x}=$

$\frac{1}{2a}\ln|a+x|-\frac{1}{2a}\ln|a-x|+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$. (公式 16)

例. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{a}{a^2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\frac{x}{a}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$. (公式 17)

注. 类似地, $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$. (公式 18)

例. $\int x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

例. $\int\frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1+x^3-1}{\sqrt[3]{1+x^3}}d(x^3+1)=\frac{1}{5}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}(1+x^3)^{\frac{2}{3}}+C$.

例. $\int\frac{dx}{x+x^{n+1}}=\int\frac{dx}{x(1+x^n)}=\int\frac{x^{n-1}dx}{x^n(1+x^n)}=\frac{1}{n}\int\frac{dx^n}{x^n(1+x^n)}=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|+C$.

例. $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx=-\int\cos\frac{1}{x}d\frac{1}{x}=-\sin\frac{1}{x}+C$.

例. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}}=2\int\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$;或者,

$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$.

例. $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}=2\int\frac{\arctan u}{1+u^2}du=2\int\arctan ud\arctan u=$

$(\arctan\sqrt{x})^2+C$;或者, $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}=(\arctan\sqrt{x})^2+C$.

例. $\int \frac{xe^{-3\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \frac{e^{-3\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}d\left(1+x^2\right)=\int \frac{e^{-3\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}}du=\int e^{-3\sqrt{u}}d\sqrt{u}=-\frac{1}{3}e^{-3\sqrt{1+x^2}}+C$;

或者，$\int \frac{xe^{-3\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{e^{-3\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}d\left(1+x^2\right)=\int e^{-3\sqrt{1+x^2}}d\sqrt{1+x^2}=-\frac{1}{3}e^{-3\sqrt{1+x^2}}+C$.

例. $\int \frac{dx}{x\left(1+2\ln x\right)}=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+2\ln x\right)}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\ln\left|1+2\ln x\right|+C$.

例. $\int e^{e^x+x}dx=\int e^{e^x}de^x=e^{e^x}+C$.

例. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int \frac{de^x}{1+e^{2x}}=\arctan e^x+C$.

例. $\int \frac{dx}{1+e^{nx}}=\int \frac{de^x}{e^x\left(1+e^{nx}\right)}=\int \frac{du}{u\left(1+u^n\right)}=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{u^n}{1+u^n}\right|+C=\frac{1}{n}\ln\frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}+C$.

例. $\int \tan xdx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln\left|\cos x\right|+C$.（公式 19）

类似地，$\int \cot xdx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{d\sin x}{\sin x}=\ln\left|\sin x\right|+C$.（公式 20）

例. $\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int \sec^2 xdx+\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x}=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$.

例. $\int \sin^3 xdx=\int \sin^2 x\sin xdx=-\int\left(1-\cos^2 x\right)d\cos x=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$.

例. $\int \sin^2 x\cos^5 xdx=\int \sin^2 x\cos^4 xd\sin x=\int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)^2 d\sin x=$

$\int\left(\sin^2 x-2\sin^4 x+\sin^6 x\right)d\sin x=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$.

例. $\int \sec xdx=\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$;

或者，$\int \sec xdx=\int \frac{\sec x\left(\sec x+\tan x\right)}{\sec x+\tan x}dx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$.（公式 21）

类似地，$\int \csc xdx=\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$.（公式 22）

例. $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\sin x}}dx=\int \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{\sin x}}dx=\int \frac{\sin x}{\cos^2 x\sqrt{\sin x}}d\sin x=2\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}d\sqrt{\sin x}=$

$2\int \frac{u^2}{1-u^4}du=\int \frac{1}{1-u^2}du-\int \frac{1}{1+u^2}du=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}\right|-\arctan\sqrt{\sin x}+C$.

例. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}=\int \frac{\sin xdx}{\sin^2 x\cos^4 x}=\int \frac{-d\cos x}{\left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x}=-\int \frac{du}{\left(1-u^2\right)u^4}=$

$-\int\left(\frac{1}{u^4}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{1-u^2}\right)du=\frac{1}{3u^3}+\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+C$；或者，

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos^4 x}dx+\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}dx=$$

$$\int\frac{\sin x}{\cos^4 x}dx+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx++\int\frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C.$$

例. $\int\sin^2 x\cos^4 xdx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$

例. $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-2\sin^2 x+\sin^4 x}{\sin^2 x}dx=-\cot x-2x+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

例. $\int\frac{dx}{\cos^6 x}=\int\sec^6 xdx=\int\sec^4 x\sec^2 xdx=\int\left(1+\tan^2 x\right)^2 d\tan x=$

$\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C.$

例. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}=\int\frac{\sec^6 x}{\tan^2 x}dx=\int\frac{\sec^4 x}{\tan^2 x}d\left(\tan x\right)=\int\frac{\left(1+\tan^2 x\right)^2}{\tan^2 x}d\left(\tan x\right)=$

$-\frac{1}{\tan x}+2\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$；或者，$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^4 x}dx=$

$\int\frac{dx}{\cos^4 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\left(1+\tan^2 x\right)d\tan x+\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}.$

例. $\int\frac{dx}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}=\int\frac{\sec^2 xdx}{4\tan^2 x+9}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2\tan x\right)}{4\tan^2 x+9}=\frac{1}{6}\arctan\frac{2\tan x}{3}+C.$

例. $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{\sec^4 x}{\tan^4 x+1}dx=\int\frac{\tan^2 x+1}{\tan^4 x+1}d\tan x=\int\frac{u^2+1}{u^4+1}du=$

$\int\frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}}du=\int\frac{1}{\left(u-\frac{1}{u}\right)^2+2}d\left(u-\frac{1}{u}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x-\frac{1}{\tan x}}{\sqrt{2}}+C$，或者，

$\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{dx}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{d\left(2x\right)}{2-\sin^2 2x}=\int\frac{du}{\sin^2 u+2\cos^2 u}.$

例. $\int\tan^5 x\sec^3 xdx=\int\tan^4 x\sec^2 xd\left(\sec x\right)=\int\left(\sec^2 x-1\right)^2\sec^2 xd\left(\sec x\right)=$

$\frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x+C.$

二. 变量替换法(第二类换元法)

例. 求 $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

解. 令 $x=a\sin t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $I=a^2\int\cos td\sin t=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$

$\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$

例. 求 $I=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$.

解. 令 $x=\sin t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $I=\int\frac{d\sin t}{\left(1+\sin^2 t\right)\cos t}=\int\frac{dt}{1+\sin^2 t}=$

$$\int\frac{\sec^2 tdt}{\sec^2 t+\tan^2 t}=\int\frac{d\tan t}{1+2\tan^2 t}=\frac{\arctan\left(\sqrt{2}\tan t\right)}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+C.$$

例. 求 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$. (公式 23)

解. 令 $x=a\tan t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $I=\int\frac{d\left(a\tan t\right)}{a\sec t}=\int\sec tdt=$

$$\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

注. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+10}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2x-1\right)}{\sqrt{\left(2x-1\right)^2+3^2}}=\frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+10}\right|+C$.

例. 求 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$. (公式 24)

解. 当 $x>a$ 时, 令 $x=a\sec t$, $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $I=\int\frac{d\left(a\sec t\right)}{a\tan t}=\int\sec tdt=$

$$\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C;$$

当 $x<-a$ 时, $I\overset{u=-x}{=}\int\frac{-du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\ln\left|\frac{1}{u+\sqrt{u^2-a^2}}\right|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$.

例. 求 $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解. 令 $x=\sec t$, 则 $I=\int\frac{d\sec t}{\sec t\tan t}=\int 1\cdot dt=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C$;

或者, $I=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{d\sqrt{x^2-1}}{x^2-1+1}=\arctan\sqrt{x^2-1}+C$;

或者, $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d\frac{1}{x}=-\arcsin\frac{1}{x}+C$.

例. 求 $I=\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$.

解. 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $I=-\int t\sqrt{t^2-1}dt=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t^2-1}d\left(t^2-1\right)=-\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3x^3}+C$.

例. 求 $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

解. 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $I=-\int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}=-\sqrt{1+t^2}+C=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$.

补充练习

1. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\left(1+x^2-1\right)^2 d\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{5}\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{1+x^2}+C$.

2. $\int \frac{1+x^4}{1+x^6}dx=\int \frac{1+x^4-x^2+x^2}{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2+x^4\right)}dx=\int \frac{dx}{1+x^2}+\int \frac{x^2}{1+x^6}dx=$

$\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3+C$.

3. $\int \sqrt{\frac{x}{4-x^3}}dx=\frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{4-x^3}}dx^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\arcsin \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}+C$.

4. $\int \frac{xdx}{x^2+4x+7}=\int \frac{(x+2-2)d(x+2)}{(x+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+7\right)-2\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$

$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+7\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{x+2}{\sqrt{3}}+C$.

5. $\int \frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\int \frac{dx}{2\sin x(1+\cos x)}=\int \frac{dx}{4\sin x\cos^2 \frac{x}{2}}=\int \frac{dx}{8\sin \frac{x}{2}\cos^3 \frac{x}{2}}=$

$\int \frac{1}{8\tan \frac{x}{2}}\sec^4 \frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}}\left(\tan^2 \frac{x}{2}+1\right)d\left(\tan \frac{x}{2}\right)=\frac{1}{8}\tan^2 \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|+C$.

6. $\int \frac{\ln \tan x}{\sin x\cos x}dx=\int \frac{\ln \tan x}{\tan x}d\tan x=\frac{1}{2}\ln^2 \tan x+C$.

第 4. 3 节 分部积分法

公式. 设$u(x)$, $v(x)$连续可导, 则$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$, 即

$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$.

类型一. $\int P_n(x)\sin xdx$.

例. $\int(x^2+1)\cos xdx=\int(x^2+1)d\sin x=(x^2+1)\sin x-2\int x\sin xdx=$

$(x^2+1)\sin x+2\int xd\cos x=(x^2+1)\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$.

例. $\int x\tan^2 xdx=\int x(\sec^2 x-1)dx=\int xd(\tan x-x)=$

$x(\tan x-x)-\int(\tan x-x)dx=x\tan x+\ln|\cos x|-\dfrac{x^2}{2}+C$.

例. $\int\dfrac{x}{1+\cos x}dx=\int\dfrac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int xd\tan\dfrac{x}{2}=x\tan\dfrac{x}{2}+2\ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|+C$.

例. $\int x\sin^3 xdx=-\int x\sin^2 xd\cos x=\int xd\left(\dfrac{\cos^3 x}{3}-\cos x\right)=x\left(\dfrac{\cos^3 x}{3}-\cos x\right)-$

$\int\left(\dfrac{\cos^3 x}{3}-\cos x\right)dx=x\left(\dfrac{\cos^3 x}{3}-\cos x\right)-\dfrac{1}{3}\left(\sin x-\dfrac{\sin^3 x}{3}\right)+\sin x+C$.

注. $\int x\sin^3 xdx=\int xd\left(\int\sin^3 xdx\right)$.

例. $\int\dfrac{x}{1+\sin x}dx=\int x\cdot\dfrac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx=$

$\int x\cdot d\left(\tan x-\dfrac{1}{\cos x}\right)=x(\tan x-\sec x)+\ln|\cos x|+\ln|\sec x+\tan x|+C$.

注. $\int\dfrac{x}{1+\sin x}dx=\int xd\left(\int\dfrac{1}{1+\sin x}dx\right)$.

类型二. $\int P_n(x)e^x dx$.

例. $\int x^2e^xdx=\int x^2de^x=x^2e^x-\int e^xdx^2=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2\int x\cdot de^x=$

$x^2e^x-2xe^x+2\int e^xdx=(x^2-2x+2)e^x+C$.

例. $\int\dfrac{xe^xdx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\dfrac{x}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1)=2\int xd\sqrt{e^x-1}=2x\sqrt{e^x-1}-2\int\sqrt{e^x-1}dx=$

$2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$.

注. $\int\sqrt{e^x-1}dx=\int\dfrac{\sqrt{e^x-1}}{e^x}d(e^x-1)=\int\dfrac{\sqrt{u}}{u+1}du\Big|_{u=e^x-1}\overset{u=t^2}{=}\int\dfrac{t}{t^2+1}dt^2=$

$2\int\left(1-\dfrac{1}{t^2+1}\right)dt=2\sqrt{u}-2\arctan\sqrt{u}+C=2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C$.

例. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int xe^x d\frac{-1}{x+1} = -\frac{xe^x}{x+1} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C = \frac{e^x}{x+1} + C$;

或者, $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{e^x}{x+1}dx + \int e^x d\frac{1}{x+1} = \frac{e^x}{x+1} + C$.

类型三. $\int P_n(x)\ln x dx$.

例. $\int x^3 \ln x dx = \int \ln x d\frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^3}{4}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$.

例. $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \ln\cos x d(\tan x) = \tan x\ln\cos x - \int \tan x d(\ln\cos x) =$

$\tan x\ln\cos x + \int \tan^2 x dx = \tan x\ln\cos x + \tan x - x + C$.

例. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx =$

$x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C$.

例. $\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int x\cdot d(\ln^2 x) = x\ln^2 x - \int 2\ln x\cdot dx =$

$x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int x\cdot d(\ln x) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.

类型四. $\int P_n(x)\arcsin x dx$.

例. $\int x\arctan x\cdot dx = \int \arctan x\cdot d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}d\arctan x =$

$\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + C$.

例. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2) = -\int \arcsin x\cdot d\sqrt{1-x^2} =$

$-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$.

例. $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx = \int \arctan x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{\arctan x}{x^2}dx - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$,

而 $\int \frac{\arctan x}{x^2}dx = \int \arctan x\cdot d\frac{-1}{x} = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx =$

$-\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx^2 = -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C$.

例. $\int \arctan\frac{1}{x}dx = x\arctan\frac{1}{x} - \int x\cdot\frac{-1}{x^2+1}dx = x\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

例. $\int(\arccos x)^2dx=x(\arccos x)^2-2\int\arccos x\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

$x(\arccos x)^2-2\int\arccos x d\sqrt{1-x^2}=x(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x+C$.

例. $\int\arcsin\sqrt{x}dx=\int ud\sin^2u=u\sin^2u-\int\sin^2udu=u\sin^2u-\dfrac{u}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2u+C=$

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}+C$.

例. $\int\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}dx=\int ud\left(\tan^2u\right)=u\tan^2u-\int\left(\sec^2u-1\right)du=$

$\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\tan^2\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}-\tan\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}+C$.

注. 以上两题也可以直接分部, 但是会比较繁琐, 故先换元简化, 又例如:

$\int\dfrac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\dfrac{t\cos^3t}{\sin t}d\cos t=-\int t\cos^3t\cdot dt=-\int td\left(\sin t-\dfrac{\sin^3t}{3}\right)$.

注. $\int\sin\sqrt{x}dx\overset{t=\sqrt{x}}{=}2\int t\sin tdt$, $\int\cos\left(\sqrt{x}-1\right)dx\overset{t=\sqrt{x}-1}{=}2\int(t+1)\cos tdt$,

$\int e^{\sqrt[3]{x+1}}dx\overset{t=\sqrt[3]{x+1}}{=}3\int t^2e^tdt$, $\int\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x}}dx\overset{t=\sqrt{1+x}}{=}2\int\ln\left(t^2-1\right)dt$. (先换元, 再分部)

类型五(回归法, 循环法). $\int e^x\sin xdx$.

例. $\int e^x\sin xdx=\int\sin xde^x=e^x\sin x-\int e^x\cos xdx=e^x\sin x-\int\cos xde^x=$

$e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin xdx$, 故 $\int e^x\sin xdx=\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

例. $\int\sin(\ln x)dx\overset{t=\ln x}{=}\int\sin t\cdot de^t=\int e^t\sin t\cdot dt=\dfrac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$.

例. $\int\sqrt{1-x^2}dx=x\sqrt{1-x^2}+\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx+\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin x+C$.

例. $\int\sec^nxdx=\int\sec^{n-2}xd\tan x=\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)\int\tan^2x\sec^{n-2}xdx=$

$\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)\int\left(\sec^nx-\sec^{n-2}x\right)dx$, 故得递推公式:

$\int\sec^nxdx=\dfrac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x+\dfrac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}xdx$.

例. $\int\dfrac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\dfrac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\dfrac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\dfrac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\dfrac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}-$

$2na^2\int\dfrac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}\Rightarrow\int\dfrac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=\dfrac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n}+\dfrac{2n-1}{2na^2}\int\dfrac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$.

补充练习

1. 求 $I=\int\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\ln xdx$.（提示：$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}=\frac{x^2+1-2x+2x}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}$）

解. $I=\int\frac{\ln x}{x}dx+\int\frac{2\ln x}{(x-1)^2}dx=\frac{\ln^2 x}{2}+2\int\ln xd\frac{-1}{x-1}=\frac{\ln^2 x}{2}-\frac{2\ln x}{x-1}+2\int\frac{dx}{x(x-1)}=$

$\frac{\ln^2 x}{2}-\frac{2\ln x}{x-1}+2\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$.

2. 求 $I=\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.（提示：令 $t=\tan x$）

解. $I=\int\frac{e^t}{\sec^3 t}d\tan t=\int e^t\cos t\cdot dt=\frac{e^t}{2}(\sin t+\cos t)+C=\frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C$.

3. $\int\sqrt{1+x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=$

$\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

第 4.4 节 有理函数的积分

一. 有理函数的积分

称 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 为有理函数(分式), 当 $n<m$ 时, 称为真分式, 当 $n\geq m$ 时, 称为假分式.

有理函数总可以写成一个多项式与一个真分式的和, 例如:

$$\frac{x^3+2x+1}{x^2+1}=x+\frac{x+1}{x^2+1},\quad \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}=\frac{2x^4+2x^2-x^2-1+4}{x^2+1}=2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}.$$

对于真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 若 $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$, 其中 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 没有公因式, 则

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$, 其中 $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)},\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 均为真分式, 称为部分分式.

定理. 设 $Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}\left(x^2+px+q\right)^{\gamma}\cdots\left(x^2+rx+s\right)^{\mu}$, 则真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\cdots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\cdots+\frac{B_1}{x-b}+\cdots+\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}}+$$

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{M_{\gamma}x+N_{\gamma}}{\left(x^2+px+q\right)^{\gamma}}+\cdots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\cdots+\frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{\left(x^2+rx+s\right)^{\mu}}.$$

例. 求 $I=\displaystyle\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$.

解. 设 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$, 则 $\begin{cases}A+B=1\\-3A-2B=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-5\\B=6\end{cases}$, 因此, 得

$\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{-5}{x-2}+\dfrac{6}{x-3}$; 或者, $\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{x-2+5}{(x-2)(x-3)}=$

$\dfrac{1}{x-3}+5\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{5}{x-2}$, 故 $I=\displaystyle\int\frac{6}{x-3}dx-\int\frac{5}{x-2}dx=$

$6\ln|x-3|-5\ln|x-2|+C$.

例. 求 $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x(x-1)^2}$.

解. $\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$; 或者,

$\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{1-x+x}{x(x-1)^2}=-\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$, 故

$$I=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C.$$

例. 求 $I=\int\frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}dx$.

解. $\frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(2x+1)}{(2x+1)(x^2+x+1)}=$

$\frac{(A+2B)x^2+(A+B+2C)x+A+C}{(2x+1)(x^2+x+1)}$, 故 $\begin{cases}A+2B=0\\A+B+2C=1\\A+C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\\C=0\end{cases}$, 于是

$I=\int\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{x}{x^2+x+1}\right)dx$, 而 $\int\frac{x}{x^2+x+1}dx=\int\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)=$

$\int\frac{udu}{u^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$, 故 $I=\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

二. 三角有理式的积分

对于它的积分 $\int R(\sin x,\cos x)dx$, 可以通过换元: $t=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$, 以及

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, 转化成为有理函数的积分.

例. $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t)^2}{t}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+2+t\right)dt=\frac{1}{2}\left(\ln|t|+2t+\frac{1}{2}t^2\right)+C=$

$\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C$.

例. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-$

$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$, 而 $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\int\frac{2dt}{1+2t-t^2}=-2\int\frac{1}{(t-1)^2-2}dt=$

$\frac{2}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C$.

例. $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx=\int\frac{\tan^2 x}{\sec^2 x+\tan^2 x}dx=\int\frac{\tan^2 x}{1+2\tan^2 x}dx\overset{t=\tan x}{=}\int\frac{t^2}{1+2t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=$

$\int\frac{dt}{1+t^2}-\int\frac{dt}{1+2t^2}=\arctan t-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}t+C=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)+C$.

例. $\int\frac{\cos xdx}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{\sin x+\cos x+(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx=\frac{x}{2}+\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=$
$\frac{x}{2}+\ln|\sin x+\cos x|+C$.

例. 求 $I=\int\frac{\sin x+8\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$.

解. 设 $\sin x+8\cos x=A(2\sin x+3\cos x)+B(2\cos x-3\sin x)$, $\begin{cases}2A-3B=1\\3A+2B=8\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}A=2\\B=1\end{cases}$, 故 $I=\int\left(2+\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}\right)dx=2x+\ln|2\sin x+3\cos x|+C$.

三. 简单无理函数

对于它的积分 $\int R\left(x,\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, 可以通过换元: $t=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 转化为有理函数的积分.

例. $\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx\overset{\sqrt{x-1}=u}{=}\int\frac{u}{u^2+1}d\left(u^2+1\right)=2\int\frac{u^2}{u^2+1}du=2\int\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)du=$
$2u-2\arctan u+C=2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C$.

例. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}\overset{\sqrt[3]{x+2}=u}{=}\int\frac{d\left(u^3-2\right)}{1+u}=3\int\frac{u^2du}{1+u}=3\int\left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)du=$
$\frac{3}{2}u^2-3u+3\ln|1+u|+C=\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{2}{3}}-3(x+2)^{\frac{1}{3}}+3\ln\left|1+(x+2)^{\frac{1}{3}}\right|+C$.

例. $\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}\overset{x=t^6}{=}\int\frac{dt^6}{\left(1+t^2\right)t^3}=\int\frac{6t^5dt}{\left(1+t^2\right)t^3}=6\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$
$6(t-\arctan t)+C=6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+C$.

例. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}\left(\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[4]{1-x}\right)}\overset{1-x=t^{12}}{=}-\int\frac{d\left(1-t^{12}\right)}{t^6\left(t^4+t^3\right)}=\int\frac{-12t^{11}}{t^6\left(t^4+t^3\right)}dt=\int\frac{-12t^2}{t+1}dt=$
$-12\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=-6\sqrt[6]{1-x}+12\sqrt[12]{1-x}-12\ln\left(\sqrt[12]{1-x}+1\right)+C$.

例. $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx\overset{\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t}{=}\int\left(t^2-1\right)td\frac{1}{t^2-1}=\int\left(t^2-1\right)t\cdot\frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=$
$-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}+C$.

例. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{1}{\left(x^2-1\right)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx\overset{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t}{=}-\int\frac{3}{2}dt=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$.

例. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

例. 求 $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

解. 令 $\sqrt{x}+\sqrt{1+x}=t$, $x=\frac{t^4-2t^2+1}{4t^2}$, 则 $I=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt=$

$\frac{1}{2}\left(t-\ln|t|-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+C=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right|+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}+C$.

注. $\int\sqrt{e^x-1}dx\overset{t=\sqrt{e^x-1}}{=}\int td\ln\left(t^2+1\right)=\int\frac{2t^2}{t^2+1}dt=2t-2\arctan t+C=$

$2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C$.

补充练习

1. $\int\frac{dx}{2+\cos^2 x}=\int\frac{\sec^2 xdx}{2\sec^2 x+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\sqrt{2}\tan x}{2\tan^2 x+3}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\frac{\sqrt{2}\tan x}{\sqrt{3}}+C$.

2. $\int\frac{dx}{2+\cos x}\overset{u=\tan\frac{x}{2}}{=}\int\frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du=2\int\frac{du}{3+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C$.

第五章 定积分

第 5.1 节 定积分的概念与性质

一. 定积分问题举例

1. 曲边梯形的面积
2. 变速直线运动的路程
3. 细棒的质量

二. 定积分的定义

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数, 将 $[a,b]$ 任意分成 n 段 $[x_{i-1},x_i]$, 长度 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 令 $\lambda = \max\{\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n\}$, $\forall \xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, 作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, 若在无限细分 $[a,b]$ 的过程中, 随着 $\lambda \to 0$, 该和总是趋向于同一个常数 I, 它只依赖于 $f(x)$ 和 $[a,b]$, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并记 $I = \int_a^b f(x)dx$, 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分.

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为积分和, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)dx$ 为被积表达式, x 为积分变量, a 为积分下限, b 为积分上限, $[a,b]$ 为积分区间.

注. 定积分的值与积分变量的符号无关.

三. 可积的条件

定理. $[a,b]$ 上只有有限个间断点的有界函数必可积.

推论. $[a,b]$ 上的连续函数必可积.

四. 定积分与不定积分的关系

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $F'(x) = f(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

五. 定积分的几何与物理意义

1. 几何意义

(1) 当 $f(x) \ge 0$ 时, $\int_a^b f(x)dx = A$; (2) 当 $f(x) \le 0$ 时, $\int_a^b f(x)dx = -A$;

(3) 一般地, $\int_a^b f(x)dx = A^+ - A^-$, 即曲边梯形面积的代数和.

注. 当 $f(x)$ 为奇函数时 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, 为偶函数时 $\int_a^b f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

例. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2$, $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

例. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \tan x}{1+x^4}dx = 0$, $\int_{-1}^{1} x^3 \sin^2 x dx = 0$.

例. $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\cos^2 x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|dx=2\int_0^{\pi}\sin xdx=2[-\cos x]_0^{\pi}=4$.

例. $\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\int_{-1}^{1}|x|^3dx=2\int_0^1 x^3dx=2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{2}$.

2. 物理意义

(1) 若已知直线运动的速度 $v=v(t)$, 则位移 $S=\int_{T_1}^{T_2}v(t)dt$.

(2) 设细棒位于 $[a,b]$ 上, 有连续的线密度 $\rho(x)$, 则质量 $M=\int_a^b\rho(x)dx$.

六. 利用定积分计算数列极限

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 取 $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)=\int_a^b f(x)dx$;

特别地, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$.

例. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi xdx=\frac{2}{\pi}$.

例. 设 $a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+i-1)(n+i)}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解. $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\le a_n\le\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i-1}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$,

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i-1}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i-1}{n}}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln 2$.

七. 定积分的性质

规定: $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$, 例如: $\int_1^0 x^2dx=-\int_0^1 x^2dx=-\frac{1}{3}$.

性质 1 (线性性). $\int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)dx$.

性质 2 (对积分区间的可加性). $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

例. $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}dx=\int_0^{\pi}|\cos x-\sin x|dx=$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=2\sqrt{2}$.

例. $\int_{-1}^{2}\sqrt{x^2}dx=\int_{-1}^{2}|x|dx=-\int_{-1}^{0}xdx+\int_{0}^{2}xdx=\frac{3}{2}$.

性质 3. $\int_a^b k\cdot dx=k(b-a)$;特别地, $\int_a^b dx=\int_a^b 1\cdot dx=b-a$.

性质 4. 设在$[a,b]$上$f(x)\geq 0$, 则$\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

注. 若$f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\geq 0$, 且不恒为0, 则$\int_a^b f(x)dx>0$.

推论. 设在$[a,b]$上$f(x)\geq g(x)$, 则$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$.

例. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx=0$.

证. 由$0\leq\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx\leq\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$, 即得, 证毕.

推论. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$.

性质 5(估值定理). 设在$[a,b]$上$m\leq f(x)\leq M$, 则

$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$.

性质 6(积分中值定理). 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 则存在$\xi\in[a,b]$, 使得

$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$, 即$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$.

注. 该值称为$f(x)$在$[a,b]$上的平均值.

积分第一中值定理. 设$f(x)$, $g(x)$均在$[a,b]$上连续, 且$g(x)\geq 0$, 则

存在$\xi\in[a,b]$, 使得$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

注. "$\exists\xi\in[a,b]$" 可以改进为 "$\exists\xi\in(a,b)$".

例. 设$f(x)$可导, $f(0)=3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, 使得$f'(\xi)=0$.

证. $f(0)=3f(\eta)\cdot\frac{1}{3}=f(\eta)$, $\eta\in\left[\frac{2}{3},1\right]$, 即得, 证毕.

例. 设$f(x)$可导, $f(1)=\int_0^1 xf(x)dx$, 证明: 存在$\xi\in(0,1)$, 使得$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证. $f(1)=\eta f(\eta)$, $\eta\in(0,1)$, 令$F(x)=xf(x)$, 则$F(1)=F(\eta)$, 证毕.

八. 积分不等式

例. 设 $f(x)>0$, 连续, 证明: $\int_0^1 \ln f(x)dx \le \ln\int_0^1 f(x)dx$.

证. $\int_0^1 \ln f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)} \le \lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) =$

$\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \ln\int_0^1 f(x)dx$, 证毕.

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\ne 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 证明: $1\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \le \frac{\pi}{2}$.

证. $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少, 故 $\frac{2}{\pi}\le f(x)\le 1$, 即得, 证毕.

例. 设 $f(x)$ 可导, $f(a)=0$, $|f'(x)|\le M$, 证明: $\int_a^b |f(x)|dx \le \frac{M}{2}(b-a)^2$.

证. $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)-f(a)|dx = \int_a^b |f'(\xi)||x-a|dx \le M\int_a^b (x-a)dx$, 证毕.

例. 设 $f(x)$ 连续, 单调增加, $0<\lambda<1$, 证明: $\int_0^{\lambda} f(x)dx < \lambda\int_0^1 f(x)dx$.

证. $\int_0^{\lambda} f(x)dx - \lambda\int_0^1 f(x)dx = (1-\lambda)\int_0^{\lambda} f(x)dx - \lambda\int_{\lambda}^1 f(x)dx =$

$(1-\lambda)\lambda f(\xi_1) - \lambda f(\xi_2)(1-\lambda) = \lambda(1-\lambda)\left[f(\xi_1)-f(\xi_2)\right]<0$, 证毕.

例 (柯西积分不等式). 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx.$$

证. $\forall t\in(-\infty,+\infty)$, 均有 $\int_a^b\left[f(x)-tg(x)\right]^2 dx\ge 0$, 于是由

$t^2\int_a^b g^2(x)dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \ge 0 \Rightarrow \Delta\le 0$, 即得, 证毕.

注. (1) $\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 = \left[\int_a^b 1\cdot f(x)dx\right]^2 \le \int_a^b dx\cdot\int_a^b f^2(x)dx = (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$.

(1) 设 $f(x)>0$, 则 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge \left[\int_a^b \sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right]^2 = (b-a)^2$.

补充练习

1. 设 $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i^2}$，求 $\lim_{n\to\infty}a_n$.

解. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$.

2. 设 $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2+1}$，求 $\lim_{n\to\infty}a_n$.

解. $\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+\left(i+1\right)^2}\le a_n\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$，$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+\left(i+1\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i+1}{n}\right)^2}$，

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$，故 $\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

3. 比较 $P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$，$Q=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$，$R=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\sin x-\cos x\right)^2}{1+x^2}dx$ 的大小.

解. $R=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-2\sin x\cos x}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^2}dx>Q>0$，而 $P=0$，故 $R>Q>P$.

4. 设 $a_n=\int_{-1}^{1}x^n\sin x dx$，求 $\lim_{n\to\infty}a_n$.

解. $\left|a_n\right|\le\int_{-1}^{1}\left|x^n\right|dx=2\int_0^1 x^n dx=\frac{2}{n+1}$，故 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

5. 设 $f\left(x\right)$ 连续，$f\left(1\right)=1$，求 $\lim_{n\to\infty}n\int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n+2}{n}}f\left(x\right)dx$.

解. 原式 $=\lim_{n\to\infty}n\cdot f\left(\xi\right)\cdot\frac{3}{n}=3\lim_{\xi\to 1}f\left(\xi\right)=3f\left(1\right)=3$.

6. 设 $f\left(x\right)$ 有连续的导数，求 $\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}\left[f\left(x+a\right)-f\left(x-a\right)\right]dx$.

解. 上式 $=2\lim_{a\to 0}\frac{f\left(\xi+a\right)-f\left(\xi-a\right)}{a}=4\lim_{a\to 0}f'\left(\eta\right)=4f'\left(0\right)$.

7. 设 $f\left(x\right)$ 可导，$\int_0^1 f\left(x\right)dx=0$，证明：$\exists\xi\in\left(0,1\right)$，使得 $f\left(\xi\right)+\xi f'\left(\xi\right)=0$.

证. 存在 $c\in\left(0,1\right)$，使得 $f\left(c\right)=0$；令 $F\left(x\right)=xf\left(x\right)$，则 $F\left(0\right)=F\left(c\right)=0$，证毕.

8. 设 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+x^2\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$.

解. 设 $\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+Ax^2$，故 $A=\int_0^1\left(\sqrt{1-x^2}+Ax^2\right)dx=$

$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx+A\int_0^1 x^2dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}A\Rightarrow A=\frac{3}{8}\pi$，于是 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{8}\pi x^2$.

9. 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$.

解. 设 $\int_0^2 f(x)dx=A$，$\int_0^1 f(x)dx=B$，则 $f(x)=x^2-Ax+2B$，于是

$A=\int_0^2\left(x^2-Ax+2B\right)dx=\frac{8}{3}-2A+4B$，$B=\int_0^1\left(x^2-Ax+2B\right)dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}A+2B$，得

$A=\frac{4}{3}$，$B=\frac{1}{3}$，故 $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$.

第 5.2 节 微积分基本公式

一. 积分上限函数及其导数

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且

$\Phi'(x)=f(x)$, $\forall x\in(a,b)$, 而 $\Phi'_+(a)=f(a)$, $\Phi'_-(b)=f(b)$.

注. 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积时, $\Phi(x)$ 一定在 $[a,b]$ 上连续.

推论. 连续函数必有原函数.

推论. $\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right]'=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$, $\left[\int_{\psi(x)}^{b} f(t)dt\right]'=-f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)$; 一般地,

$$\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right]'=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)-f[\psi(x)]\cdot\psi'(x).$$

例. $\frac{d}{dx}\left(\int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2}dt\right)=\cos x\cdot e^{\sin^2 x}+\sin x\cdot e^{\cos^2 x}$.

例. $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x (x^2-t^2)\cos t\cdot dt\right]=\frac{d}{dx}\left(x^2\int_0^x \cos t\cdot dt-\int_0^x t^2\cos t\cdot dt\right)=2x\sin x$.

例. 设 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_x^{2x} e^{t^2}dt, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 证明: (1) $F(x)$ 连续; (2) $F(x)$ 可导.

解. $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x} e^{t^2}dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{4x^2}-e^{x^2}}{1}=1$,

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_x^{2x} e^{t^2}dt-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x} e^{t^2}dt-x}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{4x^2}-e^{x^2}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{16xe^{4x^2}-2xe^{x^2}}{2}=0.$$

例. 设 $f(x)$ 连续, $f(x)>0$, 证明: $F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在 $(0,\infty)$ 上单增.

证. $F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}>0$, 证毕.

例. 设 $f'(x)\ge 0$，令 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，证明：当 $x\ne a$ 时，$F'(x)\ge 0$.

证. $F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}=\dfrac{\int_a^x [f(x)-f(t)]dt}{(x-a)^2}$，即得，证毕.

注. $f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt=[f(x)-f(\xi)](x-a)$，其中 ξ 介于 a 与 x 之间.

二. 牛顿-莱布尼茨公式

定理. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

推论. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

补充练习

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$，$F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 上______.

(A) $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数；　(B) $F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数，但可导；

(C) $F(x)$ 不可导，但连续；　(D) $F(x)$ 不连续.

解. $F'_-(0)=f(0^-)=1$，$F'_+(0)=f(0^+)=0$，故选(C).

2. 设 $F(x)=\int_{-1}^1 |x-t|\sin t^4 dt\,(-1<x<1)$，求 $F''(x)$.

解. $F(x)=x\int_{-1}^x \sin t^4 dt-\int_{-1}^x t\sin t^4 dt+\int_x^1 t\sin t^4 dt-x\int_x^1 \sin t^4 dt$，故

$F'(x)=\int_{-1}^x \sin^4 t dt-\int_x^1 \sin^4 t dt$，$F''(x)=2\sin x^4$.

3. 将当 $x\to 0^+$ 时的无穷小量：$\alpha=\int_0^x \cos t^2 dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt$，按阶的由低到高的顺序排列.

解. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x^2}{kx^{k-1}}\Rightarrow k=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\beta}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\tan x}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^2}{kx^{k-1}}\Rightarrow k=3$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\gamma}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{kx^{k-1}}\Rightarrow k=2$，故排序是 α,γ,β.

4. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，令 $F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，讨论 $F'(x)$ 的连续性.

解. 当 $x\neq 0$ 时, $F'(x)=\dfrac{xf(x)\cdot x^2-2x\cdot\int_0^x tf(t)dt}{x^4}=\dfrac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$, 而

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{f'(0)}{3};$$

$\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xf(x)+x^2f'(x)-2xf(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{3}=\dfrac{f'(0)}{3}$, 故连续.

5. 设 $f(x)\in C[a,b]$, 单调减少, 证明: $\int_a^b xf(x)dx\leq\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

证. 令 $F(x)=2\int_a^x tf(t)dt-(a+x)\int_a^x f(t)dt$, $F'(x)=(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)dt=$

$\int_a^x[f(x)-f(t)]dt\leq 0$, 而 $F(a)=0$, 证毕.

6. 设 $f(x)$ 连续, $\int_0^1 f(x)dx=0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $\lambda\int_0^\xi f(x)dx+f(\xi)=0$.

证. 令 $F(x)=e^{\lambda x}\int_0^x f(t)dt$, 则 $F(0)=F(1)=0$, 即得, 证毕.

7. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx=g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx$.

证. 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt\cdot\int_x^b g(t)dt$, 则 $F(a)=F(b)=0$, 即得, 证毕.

第 5.3 节 定积分的换元法和分部积分法

一. 定积分的换元法

例. $\int_1^2 \sqrt{2x-x^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1-(x-1)^2}d(x-1) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{4}$.

例. $\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}dx = \int_0^\pi \sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos xdx - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos xdx =$

$\int_0^{\pi/2} \sin^{\frac{3}{2}} xd\sin x - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} xd\sin x = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}du - \int_1^0 u^{\frac{3}{2}}du = \frac{4}{5}$.

例. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx \overset{x=2\sin t}{=} \int_0^{\pi/6} \frac{4\sin^2 t}{2\cos t}d(2\sin t) = 4\int_0^{\pi/6} \sin^2 tdt = 4\int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

例. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \overset{x=\frac{1}{u}}{=} -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}du = -\left[\sqrt{1+u^2}\right]_1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

例. $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx \overset{t=\sqrt{2x+1}}{=} \int_1^3 \frac{t^2+3}{2t}d\left(\frac{t^2-1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)dt = \frac{22}{3}$.

例. $\int_1^{16} \sqrt{\sqrt{x}+1}dx \overset{t=\sqrt{\sqrt{x}+1}}{=} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t\cdot d(t^2-1)^2 = 4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} (t^4-t^2)dt = \frac{40}{3}\sqrt{5} - \frac{8}{15}\sqrt{2}$.

例. 求 $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin^n(x-t)dt$.

解. $\int_0^x \sin^n(x-t)dt \overset{u=x-t}{=} \int_x^0 \sin^n ud(x-u) = \int_0^x \sin^n udu$, 故 $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin^n(x-t)dt = \sin^n x$.

例. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x tf(x-t)dt = 1-\cos x$, 求 $f(x)$.

解. $\int_0^x tf(x-t)dt \overset{u=x-t}{=} -\int_x^0 (x-u)f(u)du = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du = 1-\cos x$, 故

$\int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \sin x \Rightarrow \int_0^x f(u)du = \sin x \Rightarrow f(x) = \cos x$.

例. 设 $f(x)$ 连续, 单调增加, $0<\lambda<1$, 证明: $\int_0^\lambda f(x)dx < \lambda\int_0^1 f(x)dx$.

证. $\int_0^\lambda f(x)dx = \lambda\int_0^1 f(\lambda t)dt < \lambda\int_0^1 f(t)dt$, 证毕.

二. 定积分的分部积分法

定理. 设 $u(x)$ 与 $v(x)$ 均在 $[a,b]$ 上有连续的导数, 则

$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$, 即 $\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$.

例. $\int_0^{\pi} x\cos xdx=\int_0^{\pi} xd\sin x=\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx=-2$.

例. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{1+\sin x}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x(1-\sin x)}{\cos^2 x}dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xd\cos x}{\cos^2 x}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}xd\frac{-1}{\cos x}=$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

例. $\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4\ln xd2\sqrt{x}=\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^4-\int_1^4\frac{2}{\sqrt{x}}dx=4\ln 4-\left[4\sqrt{x}\right]_1^4=4\ln 4-4$.

例. $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin xdx=\left[x\arcsin x\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$.

例. $\int_1^e\sin(\ln x)dx\overset{t=\ln x}{=}\int_0^1 e^t\sin tdt=\int_0^1\sin tde^t=e\sin 1-\int_0^1 e^t\cos tdt=e\sin 1-\int_0^1\cos tde^t=$

$e\sin 1-e\cos 1+1-\int_0^1 e^t\sin tdt=\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1)$.

例. 设 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$, 求 $I=\int_0^1 f(x)dx$.

解. $I=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=-\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right)$.

例. 设 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt$, 求 $I=\int_0^{\pi}f(x)dx$.

解. $I=\left[xf(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}xf'(x)dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}dt-\int_0^{\pi}x\frac{\sin x}{\pi-x}dx=\int_0^{\pi}\sin xdx=2$.

例. 求 $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx=\int_0^{\pi/2}\cos^n xdx$.

证. $I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd\cos x=-\left[\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\cos xdx=$

$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, 故

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=2k\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n=2k+1\end{cases}.$$

三. 定积分的特殊技巧

定理. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 则 (1) $f(-x)=-f(x)\Rightarrow\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$;

(2) $f(-x)=f(x)\Rightarrow\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$.

例. $\int_{-\pi}^{\pi}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\sqrt{1-\cos^2 x}\right]dx=\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|dx=2\int_{0}^{\pi}\sin xdx=4$.

例. $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_{0}^{1}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)dx=4-\pi$.

例. $\int_{0}^{4}x\sqrt{4x-x^2}dx=\int_{0}^{4}x\sqrt{4-(x-2)^2}dx=\int_{-2}^{2}(u+2)\sqrt{4-u^2}du=4\pi$.

例. 设 $f(x)$ 连续, 则 $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{b}f(a+b-x)dx$.

证. $\int_{a}^{b}f(x)dx\overset{x=a+b-t}{=}\int_{b}^{a}f(a+b-t)d(a+b-t)=\int_{a}^{b}f(a+b-t)dt$, 证毕.

例. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$.

例. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^n x}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx=\frac{\pi}{4}$.

例. $\int_{0}^{\pi}\frac{e^{\cos x}-e^{-\cos x}}{2}dx\overset{x=\pi-u}{=}\int_{0}^{\pi}\frac{e^{-\cos u}-e^{\cos u}}{2}du=0$.

例. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]du=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+1\cdot\tan u}\right)du=$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)du=\frac{\pi\ln 2}{4}-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

例. $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{e^x+e^{1-x}}=\int_{0}^{1}\frac{1-u}{e^{1-u}+e^u}du=\int_{0}^{1}\frac{du}{e^{1-u}+e^u}-\int_{0}^{1}\frac{udu}{e^{1-u}+e^u}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{du}{e^u+e^{1-u}}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{de^x}{e^{2x}+e}=$

$\frac{1}{2\sqrt{e}}\left[\arctan\frac{e^t}{\sqrt{e}}\right]_0^1=\frac{1}{2\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e}-\arctan\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

例. 设 $f(x)$ 连续, 则 $\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx$.

证. $\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx\overset{x=\pi-t}{=}\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)d(\pi-t)=\int_{0}^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$, 证毕.

例. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi^2}{2}$.

例. 设 $f(x)$ 连续, 则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a\left[f(x)+f(-x)\right]dx$.

例. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin^2 x}{1+e^x}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\right)dx=\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}$.

例. 设 $f(x)$ 连续, 则 $\int_0^a f(x)dx=\int_0^{a/2}\left[f(x)+f(a-x)\right]dx$.

证. $\int_0^a f(x)dx=\int_0^{a/2}f(x)dx+\int_{a/2}^{a}f(x)dx=\int_0^{a/2}f(x)dx+\int_{a/2}^{0}f(a-t)d(a-t)=$

$\int_0^{a/2}f(x)dx+\int_0^{a/2}f(a-t)dt$, 证毕.

例. $\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$.

例. $\int_0^{\pi}x\sin^n xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^n xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$.

3. 周期性

定理. 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 有周期 T, 则 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

例. 证明: $\int_0^{2\pi}e^{\sin x}\sin xdx>0$.

证. $\int_0^{2\pi}e^{\sin x}\sin xdx=\int_{-\pi}^{\pi}e^{\sin x}\sin xdx=\int_0^{\pi}\left[e^{\sin x}\sin x+e^{\sin(-x)}\sin(-x)\right]dx=$

$\int_0^{\pi}\left(e^{\sin x}-e^{-\sin x}\right)\sin xdx>0$, 证毕.

例. 设 $f(x)$ 为具有周期 T 的连续奇函数, 证明: $\int_0^x f(t)dt$ 也有周期 T.

证. $\int_0^{x+T}f(t)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_x^{x+T}f(t)dt=\int_0^x f(t)dx+\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt$, 证毕.

注. 设 $f(x)$ 具有周期 T, 则 $\int_a^{a+nT}f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$.

例. $\int_0^{10\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx=10\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\left|\cos x+\sin x\right|dx=10\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\cos x+\sin x)dx=20\sqrt{2}$.

例. $\int_0^{10\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx=10\int_{\pi/4}^{5\pi/4}|\sin x-\cos x|dx=10\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)dx=20\sqrt{2}$.

例. $\int_0^{10\pi}x|\sin x|dx\overset{x=10\pi-t}{=}\int_0^{10\pi}(10\pi-t)|\sin t|dt\Rightarrow\int_0^{10\pi}x|\sin x|dx=5\pi\int_0^{10\pi}|\sin x|dx=$

$50\pi\int_0^{\pi}|\sin x|dx=50\pi\int_0^{\pi}\sin xdx=100\pi$.

补充练习

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\cos x}, & -1\le x<0\\ xe^{-x^2}, & x\ge 0\end{cases}$，求 $I=\int_1^4 f(x-2)dx$.

解. $I=\int_{-1}^{2}f(t)dt=\int_{-1}^{0}\frac{dt}{1+\cos t}+\int_0^2 te^{-t^2}dt=\int_{-1}^{0}\cos^2\frac{t}{2}d\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}dt^2=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^4}+\frac{1}{2}$.

2. 设 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$, 令 $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$, 求 $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^4}$.

解. $F(x)\overset{u=x^2-t^2}{=}\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du$, 故 $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{F'(x)}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{2xf(x^2)}{4x^3}=\frac{1}{4}$.

3. 设 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$, $F(x)=\int_0^1 f(tx)dt$, 讨论 $F'(x)$ 的连续性.

解. $F(x)\overset{u=tx}{=}\frac{\int_0^x f(u)du}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}F'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=1-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}$,

$F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}$, 故连续.

4. 设 $f(x)$ 连续, $f(0)\ne0$, 求 $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

解. $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du+f(x)}=$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\xi)}{f(\xi)+f(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}$.

5. 设 $f(x)$ 连续, 证明: $\int_0^x\left[\int_0^t f(u)du\right]dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt$.

证一. 左式 $=\int_0^x\left[\int_0^t f(u)du\right]dt=\left[t\int_0^t f(u)du\right]_0^x-\int_0^x tf(t)dt=$ 右式.

证二. 当 $x=0$ 时成立; 左式求导 $=\int_0^x f(u)du$,

右式求导 $=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$, 即得, 证毕.

6. $\int_{-1}^1 x\left(1+x^{2007}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)dx=2\int_0^1 x\left(e^x-e^{-x}\right)dx=2\int_0^1 xd\left(e^x+e^{-x}\right)=\frac{4}{e}$.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+e^{\sin x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx=\frac{\pi}{4}$.

8. 求 $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\sin xdx=\frac{\pi}{2}$.

9. $\int_{\pi+1}^{4\pi+1}\sin^4 2x(\tan x+1)dx=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 2x(\tan x+1)dx=\frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 udu=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 udu=$

$6\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{8}$.

第 5.4 节 反常积分

一. 无穷限的反常积分

例. 考虑 $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$, 它的几何意义是曲线 $y=e^{-x}$ 与 x 正半轴间区域的面积 A, 而

$A=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-e^{-t}\right)=1$, 故 $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1$.

定义. 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ 存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 其积分值

$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$; 反之, 称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散;

类似地, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty} f(x)dx+\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$.

注. 设 $f(x)$ 连续, 并且 $F'(x)=f(x)$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^{+\infty}$,

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{-\infty}^{b}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}$. (假定极限均存在)

例(p-积分). 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 的敛散性.

解. 当 $p=1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$, 发散;

当 $p<1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}=+\infty$, 发散;

当 $p>1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p-1}$, 收敛.

注. 对 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{u^p}du$, 有相同的结果.

例. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+4}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+3}=\left[\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{x+1}{\sqrt3}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt3}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt3}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt3}$.

例. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}+\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{1+x^2}=\frac12\int_1^{+\infty}\frac{du}{u}+\frac12\int_{+\infty}^{1}\frac{du}{u}$, 发散.

例. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x)}=\int_1^{+\infty}\left(\frac1x-\frac{1}{1+x}\right)dx=\left[\ln\frac{x}{1+x}\right]_1^{+\infty}=\ln 2$.

例. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}\overset{x=\sec t}{=}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{d\sec t}{\sec^4 t\tan t}=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^3 tdt=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(1-\sin^2 t\right)d\sin t=\frac23-\frac38\sqrt3$.

例. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{1+t^4}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}d\left(x-\frac{1}{x}\right)=$

$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{u^2+2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

例. $\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}xde^{-2x}=-\frac{1}{2}\left[xe^{-2x}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\frac{1}{4}$.

例. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\int_1^{+\infty}\ln xd\left(-\frac{1}{x}\right)=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=0+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}=1$.

二. 无界函数的反常积分

例. 考虑$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$, 它的几何意义是$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$围成区域的面积, 而

$A=\lim\limits_{t\to0^+}\int_t^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim\limits_{t\to0^+}\left(2-2\sqrt{t}\right)=2$, 故$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2$.

定义. 若在$\forall U(c)$内$f(x)$均无界, 则称c为无界间断点, 或者瑕点.

定义. 设$f(x)\in C(a,b]$, $x=a$为其无界间断点(这无所谓), 若$\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$存在,

则称反常积分$\int_a^b f(x)dx$收敛, 其积分值$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$;

类似地, 若$x=b$为$f(x)$的无界间断点, 则$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$;

若$c\in(a,b)$为$f(x)$的无界间断点, 则$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

注. 设c为$f(x)$的无界间断点, $F'(x)=f(x)$, 则$\int_a^c f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^{c^-}$,

$\int_c^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_{c^+}^b$, $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b+\left[F(x)\right]_{c^+}^{c^-}$. (假定极限均存在)

例(p-积分). 讨论$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$的敛散性.

解. 当$p=1$时, $\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim\limits_{t\to0^+}\int_t^1\frac{dx}{x}=0-\lim\limits_{t\to0^+}\ln t=+\infty$, 发散;

当$p>1$时, $\int_0^1\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{t\to0^+}\int_t^1\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{1-p}-\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t^{1-p}}{1-p}=+\infty$, 发散;

当$p<1$时, $\int_0^1\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{t\to0^+}\int_t^1\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{1-p}-\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t^{1-p}}{1-p}=\frac{1}{1-p}$, 收敛.

例. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x} = 2\left[\arcsin\sqrt{x}\right]_{0^+}^{1^-} = \pi$.

例. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)^3}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2+1)^3}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tan t}{\sec^3 t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2$.

例. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{dx^2}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}\int_4^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-4}} \overset{u=\sqrt{t-4}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+4} = \left[\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$.

例. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} =$

$\left[\arcsin(2x-1)\right]_{\frac{1}{2}}^{1^-} + \left[\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x}\right)\right]_{1^+}^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

例. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right) - 1 + (-1) - \lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$, 发散.

例. $\int_0^1 \ln x dx = [x\ln x]_{0^+}^1 - \int_0^1 x d\ln x = 0 - \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x - 1 = -1$.

例. $\int_0^1 \ln\left(1-x^2\right)dx = \left[x\ln\left(1-x^2\right) + \int \frac{2x^2}{1-x^2}dx\right]_0^{1^-} =$

$\left[x\ln\left(1-x^2\right) + \ln\frac{1+x}{1-x} - 2x\right]_0^{1^-} = \ln 4 + \lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)\ln(1-x) - 2 = \ln 4 - 2$.

例. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{\ln\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}+1}d\frac{1}{t} = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln t}{t^2+1}dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$, 故 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx = 0$.

注. 这个解法有问题, 没有讨论收敛性.

补充练习

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}, & x > 0 \end{cases}$, 求 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

解. 当 $x \le 0$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x + \frac{\pi}{2}$;

当 $x > 0$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \frac{\pi}{2} + 2\int_0^x \frac{d\sqrt{t}}{(1+t)} = \frac{\pi}{2} + 2\arctan\sqrt{x}$.

2. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)}=\int_{1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right]_{1}^{+\infty}=1-\ln 2$.

3. $\int_{0}^{1}x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int_{0}^{1}\frac{x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t(1+\sin t)dt=1+\frac{\pi}{4}$.

4. $\int_{0}^{2}\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\int_{0}^{2}\frac{x^2}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(1+u)^2}{\sqrt{1-u^2}}du\overset{u=\sin t}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)^2dt=\frac{3}{2}\pi$.

5. $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}(\alpha\ge 0)\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\int_{0}^{+\infty}\frac{t^\alpha dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

6. 已知 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，求（1）$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx$；（2）$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

解.（1）$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d2x=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{4}$；

（2）$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_{0}^{+\infty}\sin^2 x d\frac{-1}{x}=\left[\frac{-\sin^2 x}{x}\right]_{0^+}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

第六章 定积分的应用

第 6.1 节 定积分的元素法(微元法)

一般地, 求一个与$\left[a,b\right]$有关的量U, 若它关于区间具有可加性, 即

$U_{[a,b]}=U_{[a,c]}+U_{[c,b]}$, 并且$\forall\left[x,x+\Delta x\right]$对应$\Delta U=U_{[x,x+\Delta x]}=f\left(x\right)\Delta x+o\left(\Delta x\right)$, 即

$dU=f\left(x\right)dx$, 则$U=\int_a^b f\left(x\right)dx$, 其中$dU=f\left(x\right)dx$称为$U$的元素.

例. 设一细棒位于$\left[0,3\right]$之间, 线密度$\rho\left(x\right)=1+x^2$, 求质量.

解. $\forall\left[x,x+dx\right]\subset\left[0,3\right]$, $dm=\rho\left(x\right)dx$, $M=\int_0^3\rho\left(x\right)dx=\int_0^3\left(1+x^2\right)dx=12$.

例. 设有半径为R的球体, 体密度为$\rho=r^2$, 求它的质量, 其中r为

(1) 点到球心的距离; (2) 点到对称轴的距离;

(3) 点到过球心的某个平面的距离.

解. (1) $M=\int_0^R r^2\cdot 4\pi r^2dr=\dfrac{4}{5}\pi R^5$;

(2) $M=\int_0^R r^2\cdot 2\pi r\cdot 2\sqrt{R^2-r^2}\,dr=\dfrac{8}{15}\pi R^5$;

(3) $M=2\int_0^R r^2\cdot\pi\left(R^2-r^2\right)dr=\dfrac{4}{15}\pi R^5$.

第 6.2 节 定积分在几何学上的应用

一. 平面图形的面积

1. 直角坐标下的计算

(1) 一般方程

情形 1. 设 $D: a \le x \le b$，$y_1(x) \le y \le y_2(x)$，则 $A=\int_a^b [y_2(x)-y_1(x)]dx$.

情形 2. 设 $D: c \le y \le d$，$x_1(y) \le x \le x_2(y)$，则 $A=\int_c^d [x_2(y)-x_1(y)]dy$.

例. 求 $y=x^3$ 和 $y^2=x$ 所围图形的面积.

解. 视为 X 型区域, 则 $A=\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^3\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{5}{12}$；

视为 Y 型区域, 则 $A=\int_0^1 \left(\sqrt[3]{y}-y^2\right)dy=\left[\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{3}y^3\right]_0^1=\frac{5}{12}$.

例. 求 $y=\frac{1}{x^2}$，$y=x$ 和 $x=2$ 所围图形的面积.

解. 视为 X 型区域, 则 $A=\int_1^2 \left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx=1$；

视为 Y 型区域, $A=\int_{\frac{1}{4}}^1 \left(2-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)dy+\int_1^2 (2-y)dy=1$.

例. 求 $y=x^2$，$y=\frac{1}{4}x^2$ 和 $y=1$ 所围图形的面积.

解. 视为 Y 型区域, $A=2\int_0^1 \left(\sqrt{4y}-\sqrt{y}\right)dy=\frac{4}{3}$；

视为 X 型区域, $A=2\int_0^1 \left(x^2-\frac{1}{4}x^2\right)dx+2\int_1^2 \left(1-\frac{1}{4}x^2\right)dx=\frac{4}{3}$.

例. 求 $y^2=2x$ 与 $y=x-4$ 所围图形的面积.

解. $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases} \Rightarrow x=2,8$，视为 Y 型区域, 则 $A=\int_{-2}^4 \left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy=18$；

视为 X 型区域, 则 $A=\int_0^2 \left[\sqrt{2x}-\left(-\sqrt{2x}\right)\right]dx+\int_2^8 \left[\sqrt{2x}-(x-4)\right]dx=18$.

(2) 参数方程

例. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积.

解. $A=4\int_0^a ydx=4\int_{\pi/2}^0 b\sin t\cdot d(a\cos t)=-4ab\int_{\pi/2}^0 \sin^2 tdt=\pi ab$.

例. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} (0 \le t \le 2\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积.

解. $A = \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t) d(at - a\sin t) = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = 3\pi a^2$.

例. 求星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} (0 \le t \le 2\pi)$ 所围图形的面积.

解. $A = 4\int_0^a y dx = 4\int_{\pi/2}^0 (a\sin^3 t) d(a\cos^3 t) = 12a^2 \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = \frac{3}{8}\pi a^2$.

2. 极坐标下的计算

定理. 设曲边扇形 $D: \alpha \le \theta \le \beta$, $0 \le \rho \le \varphi(\theta)$, 则它的面积 $A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta) d\theta$.

例. 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta (0 \le \theta \le 2\pi)$ 与极轴所围图形的面积.

解. $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2 \left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$.

例. 求心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)(0 \le \theta \le 2\pi)$ 所围图形的面积.

解. $A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi [a(1+\cos\theta)]^2 d\theta = a^2 \int_0^\pi (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2$.

例. 求双纽线 $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$ 所围图形的面积.

解. $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, 故 $A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\theta d\theta = 2a^2$.

例. 求圆 $\rho = \sqrt{2}\sin\theta$ 和双纽线 $\rho^2 = \cos 2\theta$ 所围图形的面积.

解. $\begin{cases} \rho = \sqrt{2}\sin\theta \\ \rho^2 = \cos 2\theta \end{cases} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$, 故 $A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sqrt{2}\sin\theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta =$

$\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

补充练习

1. 求 $y = \sin x$ 与 $y = \frac{2x}{\pi}$ 所围图形的面积.

解. $A = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

2. 求 $y = 3x^2$ 与 $y = -2x^2 + 5$ 所围图形的面积.

解. $\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = -2x^2 + 5 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1$, 故 $A = \int_{-1}^1 \left[(-2x^2 + 5) - 3x^2\right] dx = \frac{20}{3}$.

3. 求 $y^2=4x$ 与 $x+y=3$ 所围图形的面积.

解. $\begin{cases} y^2=4x \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow y=-6,\ 2$, 故 $A=\int_{-6}^{2}\left(3-y-\dfrac{y^2}{4}\right)dy=\dfrac{64}{3}$.

4. 求曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=e+1-x$ 及 $y=0$ 围成平面图形的面积.

解. $A=\int_1^e \ln x dx+\int_e^{e+1}(e+1-x)dx=\dfrac{3}{2}$; 或者, $A=\int_0^1\left(e+1-y-e^y\right)dy=\dfrac{3}{2}$.

5. 求 $y^2=2(1+x)$ 与 $y^2=2(1-x)$ 所围图形的面积.

解. $A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(1-\dfrac{y^2}{2}\right)dy-\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\dfrac{y^2}{2}-1\right)dy=2\left[y-\dfrac{y^3}{6}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$.

6. 求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 与圆 $\rho=\dfrac{3}{2}a$ 所围图形的面积.

解. $\begin{cases} \rho=a(1+\cos\theta) \\ \rho=\dfrac{3}{2}a \end{cases} \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{3}$, $A=2\left[\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2 d\theta+\dfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta\right]=$

$2\left(\dfrac{3}{8}\pi a^2+\dfrac{1}{2}\pi a^2-\dfrac{9\sqrt{3}}{16}a^2\right)=\left(\dfrac{7\pi}{4}-\dfrac{9\sqrt{3}}{8}\right)a^2$.

二. 体积

定理(截面法). 设立体 Ω 沿 x 轴分布在 $a\le x\le b$ 的范围内, 若与 x 轴垂直的平面截该立体所得的截面面积为 $A(x)$, 则 $V=\int_a^b A(x)dx$.

推论. $D=\{a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

注(薄壁桶法). 设 $a\ge 0$, 则上述图形绕 y 轴旋转所得立体体积 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

例. 求底面半径为 r, 高为 h 的圆锥体体积.

解. $V_x=\pi\int_0^h\left(\dfrac{r}{h}x\right)^2 dx=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

例. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ 分别绕 x, y 轴旋转所得旋转体的体积.

解. $V_x=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)dx=\dfrac{4}{3}\pi ab^2$; $V_y=\pi\int_{-b}^{b}a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)dy=\dfrac{4}{3}\pi a^2 b$.

例. 求圆 $x^2+(y-5)^2\le 1$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解. $V_x=\pi\int_{-1}^{1}\left(5+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx-\pi\int_{-1}^{1}\left(5-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx=20\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=10\pi^2$.

例. 求 $y=\sin x$ 与 $y=\dfrac{2x}{\pi}$ 所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解. $V_x=2\cdot\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2 xdx-2\cdot\pi\int_0^{\pi/2}\left(\dfrac{2x}{\pi}\right)^2dx=\dfrac{\pi^2}{6}$.

例. 求 $y^2=2x$ 与 $x=\dfrac{1}{2}$ 所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解. $V_y=\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot 2-\int_{-1}^{1}\pi\left(\dfrac{y^2}{2}\right)^2dy=\dfrac{2}{5}\pi$；或者，$V_y=2\cdot 2\pi\int_0^{1/2}x\sqrt{2x}dx=\dfrac{2}{5}\pi$.

例. 求 $y=\sin x\left(0\le x\le\pi\right)$ 绕 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线旋转所得旋转体的体积.

解. $V=\pi\int_0^{\pi}\left(1-\sin x\right)^2dx=\dfrac{3}{2}\pi^2-4\pi$.

例. 求 $y^2=2x$ 与 $x=\dfrac{1}{2}$ 所围图形绕 $y=-1$ 旋转所得旋转体的体积.

解. $V_{-1}=\int_0^{1/2}A\left(x\right)dx=\int_0^{1/2}\left[\pi\left(1+\sqrt{2x}\right)^2-\pi\left(1-\sqrt{2x}\right)^2\right]dx=4\pi\int_0^{1/2}\sqrt{2x}dx=\dfrac{4}{3}\pi$.

例. 求圆 $x^2+y^2\le 2x$ 绕 $x=3$ 旋转所得旋转体的体积.

解. $V=\pi\int_{-1}^{1}\left[3-\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)\right]^2-\left[3-\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)\right]^2dy=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy=4\pi^2$.

例. 求摆线 $\begin{cases}x=a\left(t-\sin t\right)\\ y=a\left(1-\cos t\right)\end{cases}\left(0\le t\le 2\pi\right)$ 与 x 轴所围图形分别绕 x 轴，y 轴旋转所得旋转体的体积.

解. $V_x=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx=\pi\int_0^{2\pi}a^2\left(1-\cos t\right)^2\cdot a\left(1-\cos t\right)dt=5\pi^2a^3$；

$V_y=2\pi\int_0^{2\pi a}xydx=2\pi\int_0^{2\pi}a\left(t-\sin t\right)\cdot a\left(1-\cos t\right)d\left[a\left(t-\sin t\right)\right]=6\pi^3a^3$.

例. 求经过半径为 R 的圆柱底面中心，与底面夹角为 α 的平面截圆柱所得体积.

解. $V=\int_{-R}^{R}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)\left(\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha\right)dx=\dfrac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

例. 求两个半径为 R 的直交圆柱体公共部分的体积.

解. $V=8\int_0^{R}A\left(x\right)dx=8\int_0^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=\dfrac{16}{3}R^3$.

补充练习

1. 从半径为 R 的球体上截取一个高为 h 的球冠，求球冠的体积.

解. $V_x=\pi\int_{R-h}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=\pi\left(R-\dfrac{h}{3}\right)h^2$.

2. 求 $y=3x^2$ 与 $y=-2x^2+5$ 所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解. $V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\left(-2x^2+5\right)^2-\left(3x^2\right)^2\right]dx=\frac{104}{3}\pi$.

3. 求 $y=x^3$，$x=1$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解. $V_y=\pi-\pi\int_0^1 y^{\frac{2}{3}}dy=\frac{2}{5}\pi$；或者，$V_y=2\pi\int_0^1 x\cdot x^3dx=\frac{2}{5}\pi$.

4. 求圆 $(x-5)^2+y^2\le 16$ 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解. $V_y=\pi\int_{-4}^{4}\left(5+\sqrt{16-y^2}\right)^2dy-\pi\int_{-4}^{4}\left(5-\sqrt{16-y^2}\right)^2dy=20\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{16-y^2}dy=160\pi^2$.

5. 求 $y=(x-1)(x-2)(1\le x\le 2)$ 与 x 轴所围图形分别绕 x，y 轴旋转所得体积.

解. $V_x=\pi\int_1^2(x-1)^2(x-2)^2dx=\frac{\pi}{30}$，$V_y=2\pi\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx=\frac{\pi}{2}$.

三. 平面曲线的弧长

定理. 设 $L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$，$\alpha\le t\le\beta$，光滑，则 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$.

推论. 设光滑弧段 $L:y=y(x)(a\le x\le b)$，则 $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}dx$.

推论. 设极坐标下 $L:\rho=\rho(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$，则 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$.

例. 求摆线 $\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}(0\le\theta\le 2\pi)$ 的长度.

解. $ds=\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}d\theta=a\sqrt{2(1-\cos\theta)}d\theta=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$，故

$$s=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta=2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8a.$$

例. 设半圆弧线材 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ 的线密度 $\rho=k-y$，求质量.

解. 对于 (x,y) 处的一小段圆弧，$dm=\rho ds=(k-y)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=$

$\left(k-\sqrt{R^2-x^2}\right)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx$，故 $M=R\int_{-R}^{R}\frac{k-\sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=kR\pi-2R^2$.

例. 求阿基米德螺线 $\rho=a\theta$ 对应 θ 从 0 到 2π 一段的长度.

解. $ds=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=\sqrt{a^2\theta^2+a^2}d\theta=a\sqrt{1+\theta^2}d\theta$，故

$$s=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1+\theta^2}d\theta=\frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right].$$

第 6.3 节 定积分在物理学上的应用

一. 作功问题

例. 求在位于原点的电荷量为 q 的点电荷所产生的静电场中将单位正电荷沿 x 轴正方向从 a 处移到 b 处时电场力所作的功.

解. 由库伦定律, $F(x)=k\dfrac{q\cdot 1}{x^2}$, 故 $W=\int_a^b k\dfrac{q}{x^2}dx=kq\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$.

例. 把弹簧由原长拉长 6cm 至少要作多少功?

解. 设平衡位置为原点, 则 $W=\int_0^{0.06}kxdx=\dfrac{1}{2}k\cdot 0.0036=0.0018k(J)$.

例. 圆柱形容器中有一定量气体, 在等温条件下气体膨胀, 把活塞从 a 处推到 b 处 $(a>b)$, 求移动过程中气体压力所作的功.

解. 设容器横向摆放在 $[0,a]$ 上, 底部在原点, 由于 $PV=k$, 故 x 处作用在活塞上的压力 $F(x)=PS=\dfrac{k}{V}S=\dfrac{k}{xS}S=\dfrac{k}{x}$, 于是 $W=\int_a^b F(x)dx=\int_a^b\dfrac{k}{x}dx=k\ln\dfrac{b}{a}$.

例. 设直径 20cm, 高 80cm 的圆柱体内充满压强为 $10\,N/\text{cm}^2$ 的气体, 等温条件下把气体体积压缩到一半, 问至少需要作多少功.

解. 设容器横向摆放在 $[0,0.8]$ 上, 底部在原点, 由于 $PV=k$, x 处作用在活塞上的压力 $F=PS=\dfrac{k}{V}S=\dfrac{k}{x}$, 故 $W=\int_{0.4}^{0.8}\dfrac{k}{x}dx=k\ln 2(J)$, 由 $P_0=10^5$, $V_0=\pi\times 0.1^2\times 0.8$, 得 $k=800\pi$, 故 $W=800\pi\ln 2(J)$.

例. 将水从高 5m, 底半径 3m 的圆柱形桶中吸出, 问至少需作多少功.

解. 以桶口为原点, 垂直向下为正向建立 x 轴, 则将位于 $[x,x+dx]$ 之间的一薄层水吸出需作的功为 $dW=x\cdot\rho g dV=x\cdot\rho g\cdot 9\pi dx$, 因此

$$W=\int_0^5 x\cdot\rho g\cdot 9\pi dx=\frac{225}{2}\rho g\pi(J)=\frac{225}{2}\gamma\pi(J),$$ 其中 $\gamma=\rho g$ 为水的比重.

例. 将水从半径 R 的半球形容器中吸出至少要作多少功?

解. $A(x)=\pi\left(R^2-x^2\right)$, 故 $W=\int_0^R x\cdot\rho g\cdot\pi\left(R^2-x^2\right)dx=\dfrac{1}{4}\rho g\pi R^4$.

例. 设半径为 R 的匀质球浮在水中, 球的上部与水面相切, 若将球从水中取出, 问至少需作多少功.

解. $W=\int_0^{2R}(2R-x)\cdot\rho g\pi\left[R^2-(R-x)^2\right]dx=\rho g\pi\int_0^{2R}(2R-x)\left(2Rx-x^2\right)dx=$

$$\rho g\pi\int_0^{2R}2R\left(2Rx-x^2\right)dx-\rho g\pi\int_0^{2R}x\left(2Rx-x^2\right)dx=\frac{4\pi}{3}\rho gR^4,$$ 注意 $\rho_{球}=\rho_{水}$.

二. 水压力

例. 横放的圆柱形水桶内盛有半桶水, 桶的底半径为R, 求桶的一端所受的压力.

解. 以水面为原点, 垂直向下为正向建立x轴, 则对位于$[x,x+dx]$之间的窄条,

$dF=\rho gx\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}dx$, 故$F=2\rho g\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}dx=\frac{2}{3}\rho gR^3$.

例. 一底边长$8\mathrm{m}$, 高$6\mathrm{m}$的等腰三角形铁板, 垂直地浸没在水中, 顶在上底在下, 顶离水面$3\mathrm{m}$, 求它所受压力.

解. 以水面为原点, 垂直向下为正向建立x轴, 则由三角形的相似,

$\frac{l(x)}{8}=\frac{x-3}{6}\Rightarrow l(x)=\frac{4}{3}(x-3)$, 故$F=\int_3^9 \rho gx\cdot\frac{4}{3}(x-3)dx=168\rho g$ (牛).

例. 设横放的椭圆柱型水箱高1.5米, 宽2米, 求当水箱装满水时, 它的一个端面所受到的水压力.

解. 设椭圆的方程为$x^2+\frac{y^2}{0.75^2}=1$, 故$F=\int_{-0.75}^{0.75}\rho g(0.75-y)\cdot 2xdy=$

$\int_{-0.75}^{0.75}2\rho g(0.75-y)\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}dy=1.5\rho g\cdot\frac{1}{2}\cdot 0.75\pi=\frac{9}{16}\rho g\pi$ (牛).

三. 引力

例. 设一单位质点位于长$2\mathrm{m}$, 线密度为$\mu\mathrm{kg/m}$的均匀细杆的中点上方$1\mathrm{m}$处, 求细杆对该质点的引力.

解. $dF_y=\cos\alpha\cdot dF=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot k\frac{1\cdot\mu dx}{1+x^2}$, 故$F_y=-\int_{-1}^{1}\frac{k\mu dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=-\sqrt{2}k\mu$ (牛),

由对称性, $F_x=0$ (牛).

例. 设圆弧型材的半径R, 中心角2φ, 线密度μ, 求它对圆心处单位质点的引力.

解. 圆心为极点, 对称轴为极轴建立极坐标系, 由对称性, $F_y=0$,

$dF_x=\cos\theta\cdot k\frac{1\cdot\mu Rd\theta}{R^2}=\frac{\mu k}{R}\cos\theta d\theta$, 故$F_x=\frac{\mu k}{R}\int_{-\varphi}^{\varphi}\cos\theta d\theta=\frac{2\mu k}{R}\sin\varphi$.

例. 设星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$上每一点处的线密度等于该点到原点距离的立方, 求星形线对原点处单位质点的引力.

解. $dF_x=\cos\alpha\cdot dF=\frac{x}{r}\cdot k\frac{1\cdot r^3ds}{r^2}=kxds=3ka^2\cos^4 t\sin tdt$, 故

$F_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3ka^2\cos^4 t\sin tdt=\frac{3}{5}ka^2$, 由对称性, $F_y=\frac{3}{5}ka^2$.

补充练习

1. 设装满水的容器内壁由曲线 $y=x^3\left(0\le x\le 2\right)$（单位:米）绕 y 轴旋转而成, 将水吸到容器上方 2 米处至少需要作多少功?

解. $W=\int_0^8 (10-y)\cdot \rho g\cdot \pi x^2 dy=\int_0^8 \rho g\pi\left(10y^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{5}{3}}\right)dy=96\rho g\pi(J)$.

2. 设一部挖掘机从30m深的井中挖出污泥, 设抓斗自身重40kg, 每次抓起的污泥重200kg, 且在提升过程中污泥以2kg/s的速度从抓斗缝隙中漏掉, 提升的速度为3m/s, 问抓斗每次抓满污泥后提升至井口至少需作多少功?

解. 设提升过程为时间段 $[0,10]$, 则在 $[t,t+dt]$ 间, 克服重力作功为

$dW=\left[40+(200-2t)\right]g\cdot 3dt$, 故 $W=\int_0^{10}\left[40+(200-2t)\right]g\cdot 3dt=6900g(J)$.

注. 若考虑到5kg/m的缆绳, 则 $dW=\left[40+(200-2t)+5(30-3t)\right]g\cdot 3dt$, 于是

$$W=\int_0^{10}\left[40+(200-2t)+5(30-3t)\right]g\cdot 3dt=9150g(J).$$

第七章 微分方程

第 7.1 节 微分方程的基本概念

一. 微分方程的例子

二. 微分方程的概念

1. 微分方程

表示未知函数, 未知函数的导数及自变量之间关系的等式称为微分方程;

微分方程中出现的未知函数导数的最高阶数称为该方程的阶.

例. $y'=2x$（一阶）, $s''=-0.4$（二阶）, $x^2y'''+xy''-4xy'=y\sin x$（三阶）.

一阶方程: $F(x,y,y')=0$, 或者 $y'=f(x,y)$.

n 阶方程: $F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0$, 或者 $y^{(n)}=f\left(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\right)$.

2. 通解与特解

通解: 含有 n 个相互独立的任意常数项的解.

特解: 不包含任意常数项的解.

例. $y=x^2+C$ 是 $y'=2x$ 的通解, $y=x^2+1$ 是它的特解.

例. $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$ 是 $s''=-0.4$ 的通解, $s=-0.2t^2+20t$ 是它的特解.

积分曲线: 方程的特解在坐标平面上代表的曲线.

例. 求方程 $y''=6x$ 的一条积分曲线, 使它与 $y=x^2$ 在 $(2,4)$ 处相切.

解. $y''=6x\Rightarrow y'=\int 6xdx=3x^2+C_1$, $y=\int\left(3x^2+C_1\right)dx=x^3+C_1x+C_2$, 代入 $y(2)=4$, $y'(2)=4$, 得 $C_1=-8$, $C_2=12$, 故 $y=x^3-8x+12$.

3. 初值问题

例. $\begin{cases} y'=2x \\ y(1)=2 \end{cases}$, 其中 $y(1)=2$ 称为初始条件.

例. $\begin{cases} s''=-0.4 \\ s(0)=0 \\ s'(0)=20 \end{cases}$, 其中 $s(0)=0$, $s'(0)=20$ 称为初始条件.

一阶初值问题: $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$, 二阶初值问题: $\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \\ y'\big|_{x=x_0}=y_1 \end{cases}$.

类似地, 还有 n 阶初值问题.

第 7.2 节 可分离变量的微分方程

定义. 形如 $g(y)dy=f(x)dx$ 的方程称为可分离变量的微分方程.

解法: 由 $\int g(y)dy=\int f(x)dx$，解得 $G(y)=F(x)+C$，称为隐式通解.

例. 求 $\dfrac{dy}{dx}=6xy$ 的通解.

解. $\int\dfrac{dy}{y}=\int 6xdx\Rightarrow \ln|y|=3x^2+C_1\Rightarrow y=Ce^{3x^2}$，其中 $C=\pm e^{C_1}$ 或 0.

注. 一般地, $\ln|y|=f(x)+C_1\Rightarrow y=Ce^{f(x)}$.

例. (人口模型) 考虑人口函数 $N(t)$，忽略政治，经济，环境等因素，人口增长率与人口基数成正比，即 $\dfrac{dN}{dt}=rN\Rightarrow\int\dfrac{dN}{N}=\int rdt\Rightarrow \ln N=rt+C_1$，即 $N=Ce^{rt}$，代入 $t=0$，$N=N_0$，得 $C=N_0$，故 $N=N_0e^{r\cdot t}$.

例. (阻滞增长人口模型) 设地球资源能容纳的最大人口数为 K，则

$\dfrac{1}{N}\dfrac{dN}{dt}=r(K-N)\Rightarrow\int\dfrac{dN}{N(K-N)}=\int rdt\Rightarrow\dfrac{1}{K}\ln\dfrac{N}{K-N}=rt+C_1$，即

$\dfrac{N}{K-N}=Ce^{rK\cdot t}$，由 $t=0$，$N=N_0$，得 $C=\dfrac{N_0}{K-N_0}$，故 $\dfrac{N}{K-N}=\dfrac{N_0}{K-N_0}e^{rK\cdot t}$，即

$N=\dfrac{KN_0}{N_0+(K-N_0)e^{-rK\cdot t}}$，称为 Logistic 函数.

例. 质量为 m 的降落伞在空中由静止开始下落，设下落过程中的空气阻力与速度成正比，试求下落速度与下落时间的关系.

解. 设下落 t 秒后速度 $v=v(t)$，则 $m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv\Rightarrow\int\dfrac{dv}{mg-kv}=\int\dfrac{1}{m}dt$，得

$-\dfrac{1}{k}\ln|mg-kv|=\dfrac{1}{m}t+C_1$，即 $mg-kv=Ce^{-\frac{k}{m}\cdot t}$，代入 $v(0)=0$，得 $C=mg$，故

$v=\dfrac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}\cdot t}\right)$，当 $t\to+\infty$ 时，$v\approx\dfrac{mg}{k}$.

补充练习

1. 求 $y'+xy^2-y^2=1-x$ 的通解.

解. $y'=(1+y^2)(1-x)\Rightarrow\dfrac{dy}{1+y^2}=(1-x)dx\Rightarrow \arctan y=x-\dfrac{1}{2}x^2+C$.

2. 求连续函数 $f(x)$，使它满足 $\int_0^x f(t)dt=x+\int_0^x tf(x-t)dt$.

解. 令 $u=x-t$，则 $\int_0^x tf(x-t)dt=\int_0^x(x-u)f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$，

故$\int_0^x f\left(t\right)dt = x + x\int_0^x f\left(u\right)du - \int_0^x uf\left(u\right)du \Rightarrow f\left(x\right) = 1 + \int_0^x f\left(u\right)du \Rightarrow$

$f'\left(x\right) = f\left(x\right)$，即$y = f\left(x\right)$满足$\dfrac{dy}{dx} = y$，解得$y = Ce^x$，由$x = 0$，$y = 1$，得$C = 1$，故$f\left(x\right) = e^x$.

第 7. 3 节 齐次方程

一. 变量替换

例. 求 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y+1}$ 的通解.

解. 引入未知函数 $u=x+y+1$, $\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$, 代入方程, 得 $\frac{du}{dx}=1+\frac{1}{u}$, 解得 $u-\ln|u+1|=x+C_1$, 即 $\ln|x+y+2|=y+C_2$, 故 $x+y+2=Ce^{y}$.

例. 求 $x\frac{dy}{dx}-y\left[\ln(xy)-1\right]=0$ 的通解.

解. $\frac{d(xy)}{dx}-y\ln(xy)=0$, 令 $u=xy$, $\frac{du}{dx}=\frac{u\ln u}{x}$, 解得 $\ln|\ln u|=\ln|x|+C_1$, 即 $\ln u=Cx\Rightarrow u=e^{Cx}$, 故 $xy=e^{Cx}$.

二. 齐次方程

定义. 形如 $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程称为齐次方程.

例. $\left(x^2y-xy^2\right)dx-\left(x^3+y^3\right)dy=0\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y-xy^2}{x^3+y^3}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}$.

解法: 令 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=xu$, $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$, 代入方程, 得 $u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$, 分离变量.

例. 求 $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$ 的通解.

解. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}$, 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=xu$, $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$, 代入方程, 得 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1}$, 解得 $u-\ln|u|=\ln|x|+C_1$, 即 $\ln|y|=\frac{y}{x}+C_2$, 故 $y=Ce^{\frac{y}{x}}$.

例. 求 $\frac{y}{y'}=x+\sqrt{x^2+y^2}$ 的通解.

解. 以 y 为自变量, 得

$\frac{dx}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}$, 令 $u=\frac{x}{y}$, 则 $x=yu$, $\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$, 代入方程, 得

$u+y\frac{du}{dy}=u+\sqrt{u^2+1}\Rightarrow\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\int\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=\ln y+C_1$, 得

$u+\sqrt{u^2+1}=Cy\Rightarrow u^2+1=(Cy-u)^2$, 故 $y^2=\frac{2x}{C}+\frac{1}{C^2}$.

补充练习

1. 求 $xy' + y = 2\sqrt{xy}$ 的通解.

解. $y' + \frac{y}{x} = 2\sqrt{\frac{y}{x}}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, 代入方程, 得

$u + x\frac{du}{dx} + u = 2\sqrt{u} \Rightarrow \frac{du}{2\left(\sqrt{u} - u\right)} = \frac{dx}{x}$, 解得 $\sqrt{xy} = x + C$.

第 7.4 节 一阶线性微分方程

一. 一阶线性方程

一阶线性方程: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$, 其中 $P(x)$ 为系数, $Q(x)$ 称为非齐次项;

若 $Q(x)\equiv 0$, 则称为齐次的线性方程; 否则称为非齐次的线性方程.

常数变易法. (一) 求对应的齐次线性方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 的通解:

$\frac{dy}{y}=-P(x)dx \Rightarrow y=Ce^{-\int P(x)dx}$, 其中 $\int P(x)dx$ 表示 $P(x)$ 的某个原函数;

(二) 令 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$, 代入方程, 得

$\frac{du}{dx}e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$, 故有通解公式: $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$.

例. 求 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解. (一) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0 \Rightarrow \frac{1}{y}dy=\frac{2}{x+1}dx \Rightarrow y=C(x+1)^2$;

(二) 令 $y=u(x+1)^2$, 代入方程, 得 $\frac{du}{dx}\cdot(x+1)^2=(x+1)^{\frac{5}{2}}$, 解得 $u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$, 故

$y=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}+C(x+1)^2$.

例. 求 $y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$ 的通解.

解. 以 y 为自变量, 则 $\frac{dx}{dy}-\cos y\cdot x=\sin 2y$, 故

$x=e^{-\int(-\cos y)dy}\left[\int \sin 2y\cdot e^{\int(-\cos y)dy}dy+C\right]=-2\sin y-2+Ce^{\sin y}$.

例. 容器内盛有盐水 100L, 初始含盐量 50g, 现注入浓度 $c_1=2\,\text{g/L}$ 的盐水, 速度为 $v_1=3\,\text{L/min}$, 同时又以 $v_2=2\,\text{L/min}$ 的速度放水, 求容器内的含盐量的变化规律.

解. 设 t 分钟后含盐量为 x 克, 盐水浓度 $c_2=\frac{x}{100+t}$, 故单位时间含盐量的变化为

$\frac{dx}{dt}=2\cdot 3-\frac{x}{100+t}\cdot 2$ (流入−流出), 即 $\frac{dx}{dt}+\frac{2}{100+t}x=6$, 由通解公式, 得

$x=e^{-\int\frac{2dt}{100+t}}\left(\int 6\cdot e^{\int\frac{2dt}{100+t}}dt+C\right)=2(100+t)+\frac{C}{(100+t)^2}$, 其中 $C=-1.5\times 10^6$.

二. 伯努利方程

例. 求 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=2y^2\ln x$ 的通解.

解. $y^{-2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y^{-1}}{x}=2\ln x \Leftrightarrow -\dfrac{d\left(y^{-1}\right)}{dx}+\dfrac{y^{-1}}{x}=2\ln x$, 令 $z=y^{-1}$, 得线性方程

$\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}\cdot z=-2\ln x$, 解得 $z=x\left(C-\ln^2 x\right)$, 故 $y=\dfrac{1}{x\left(C-\ln^2 x\right)}$.

定义. 形如 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\neq 0,1)$ 的方程称为伯努利方程.

解法: $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-n}\cdot\dfrac{d}{dx}y^{1-n}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$, 令 $z=y^{1-n}$, 则

$\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$, 为线性方程, 可解出 z.

例. 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $f(x)=1+\displaystyle\int_1^x\dfrac{f(t)}{t^2f(t)+t}dt$, 求 $f(x)$.

解. $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x^2f(x)+x}$, 即 $y=f(x)$ 满足 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x^2y+x}$, 以 y 为自变量, 得

$\dfrac{dx}{dy}=x^2+\dfrac{1}{y}x$, 即 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=x^2 \Rightarrow \dfrac{dx^{-1}}{dy}+\dfrac{1}{y}x^{-1}=-1$, 解得 $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{y}{2}+\dfrac{C}{y}$;

代入 $x=1$, $y=1$, 得 $C=\dfrac{3}{2}$, 故 $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{y}{2}+\dfrac{3}{2y} \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-1}{x}$.

补充练习

1. 设曲线 $y=y(x)$ 过 $(1,1)$, 它在 (x,y) 处的切线与坐标轴及过切点平行于 y 轴的直线所围成的梯形面积等于常数 $3a^2$, 求 $y=y(x)$.

解. $\dfrac{-y'\cdot x+y+y}{2}\cdot x=3a^2$, 即 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}y=-\dfrac{6a^2}{x^2}$, 解得 $y=\dfrac{2a^2}{x}+Cx^2$;

代入 $x=1$, $y=1$, 得 $C=1-2a^2$, 故 $y=\dfrac{2a^2}{x}+\left(1-2a^2\right)x^2$.

2. 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $f(x)=\sin x-\displaystyle\int_0^x f(x-t)dt$, 求 $f(x)$.

解. $f(x)=\sin x-\displaystyle\int_0^x f(u)du$, 求导得 $f'(x)=\cos x-f(x)$, 即 $y=f(x)$ 满足

$y'+y=\cos x$, 解得 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x)+Ce^{-x}$, $f(0)=0\Rightarrow C=-\dfrac{1}{2}$.

3. 设 $f(x)$ 可导, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(tx)dt=2f(x)+1\ (x>0)$, $f(1)=1$, 求 $f(x)$.

解. $\displaystyle\int_0^x f(u)du=2xf(x)+x$, 求导得 $f(x)=2f(x)+2xf'(x)+1$, 即

$f'(x)+\dfrac{1}{2x}f(x)=-\dfrac{1}{2x}$, 解得 $f(x)=\dfrac{C}{\sqrt{x}}-1$, $f(1)=1\Rightarrow C=2$.

4. 设 $f\left(x\right)$ 连续, 且满足 $f\left(x\right)=e^{x}-e^{x}\int_{0}^{x}f^{2}\left(t\right)dt$, 求 $f\left(x\right)$.

解. $f'\left(x\right)=e^{x}-e^{x}\int_{0}^{x}f^{2}\left(t\right)dt-e^{x}f^{2}\left(x\right)=f\left(x\right)-e^{x}f^{2}\left(x\right)$, 即 $y=f\left(x\right)$ 满足

$y'-y=-e^{x}y^{2}$, 解得 $f\left(x\right)=\dfrac{2}{e^{x}+Ce^{-x}}$, $f\left(0\right)=1\Rightarrow C=1$.

第 7.5 节 可降阶的高阶微分方程

类型一. $y^{(n)}=f(x)$.

解法: $y^{(n-1)}=\int y^{(n)}dx=\int f(x)dx$, 连续积分 n 次.

例. 求 $y'''=e^{2x}-\cos x$ 的通解.

解. 积分得 $y''=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1$, 再积分得 $y'=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2$, 再积分得

$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$.

类型二. $y''=f(x,y')$, 缺 y.

解法: 设 $\frac{dy}{dx}=p$, 则 $\frac{dp}{dx}=y''$, 代入方程, 得 $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$, 解出通解 $p=p(x,C_1)$, 即

$\frac{dy}{dx}=p(x,C_1)$, 于是 $y=\int p(x,C_1)dx+C_2$.

例. 求 $(1+x^2)y''=2xy'$ 的通解.

解. 设 $\frac{dy}{dx}=p$, 则 $(1+x^2)\frac{dp}{dx}=2xp\Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx\Rightarrow p=C_1(1+x^2)$, 即

$\frac{dy}{dx}=C_1(1+x^2)$, 故 $y=C_1\int(1+x^2)dx=C_1\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)+C_2$.

类型三. $y''=f(y,y')$, 缺 x.

解法: 设 $p=\frac{dy}{dx}$, 以 y 为自变量, 则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$, 代入方程, 得

$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$, 解出 $p=p(y,C_1)$, 即 $\frac{dy}{dx}=p(y,C_1)$, 再分离变量, 得

$\frac{dy}{p(y,C_1)}=dx$, 解出 $\int\frac{dy}{p(y,C_1)}=x+C_2$.

例. 求 $yy''-y'^2=0$ 的通解.

解. 设 $p=\frac{dy}{dx}$, 以 y 为自变量, 则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$, 代入方程, 得

$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0\Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln|p|=\ln|y|+C\Rightarrow p=C_1y$, 即 $\frac{dy}{dx}=C_1y\Rightarrow$

$\int\frac{1}{y}dy=\int C_1dx\Rightarrow\ln|y|=C_1x+C\Rightarrow y=C_2e^{C_1x}$.

例. 设地球质量为 M, 半径为 R, 一质量为 m 的火箭, 由地面以速度 $v_0=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$

垂直向上发射, 求火箭高度 r 与时间 t 的关系.

解. $m\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{GMm}{(R+r)^2}$, 令 $v=\frac{dr}{dt}$, 以 r 为自变量, 则 $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=v\frac{dv}{dr}$,

代入方程, 得 $v\frac{dv}{dr}=-\frac{GM}{(R+r)^2}\Rightarrow vdv=\frac{GM}{(R+r)^2}dr$, 解得 $\frac{v^2}{2}=\frac{GM}{R+r}+C_1$,

代入 $r=0$, $v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$, 得 $C_1=0$, 于是 $v^2=\frac{2GM}{R+r}$, 即 $v=\sqrt{\frac{2GM}{R+r}}$, 故

$\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2GM}{R+r}}\Rightarrow\sqrt{R+r}\,dr=\sqrt{2GM}\,dt$, 解得 $\frac{2}{3}(R+r)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2GM}\cdot t+C_2$,

代入 $t=0$, $r=0$, 得 $C_2=\frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}$, 因此 $\frac{2}{3}(R+r)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2GM}\cdot t+\frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}$.

第 7.6 节 高阶线性微分方程

二阶齐次线性方程: $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$------(1);

二阶非齐次线性方程: $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$------(2).

定理. 设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 均是(1)的解, 则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是(1)的解, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

定义. 若存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 使 $k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n\equiv 0$, 则称这 n 个函数线性相关, 否则称为线性无关.

定理. 设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是(1)的两个线性无关的特解, 则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是(1)的通解.

例. 已知 $y''-6y'+9y=0$ 有两个线性无关的解 $y_1=e^{3x}$ 和 $y_2=xe^{3x}$, 故它的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$.

注. 一般地, 若函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性微分方程 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 的 n 个线性无关的特解, 则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$ 是该方程的通解.

定理. 设 $\overline{y}(x)$ 是(1)的解, $y^*(x)$ 是(2)的解, 则 $y=\overline{y}(x)+y^*(x)$ 是(2)的解.

定理. 设 $\overline{y}(x;C_1,C_2)$ 是(1)的通解, $y^*(x)$ 是(2)的特解, 则 $y=\overline{y}+y^*$ 是(2)的通解.

例. $y''-6y'+9y=9$ 有特解 $y^*=1$, 故 $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+1$ 为它的通解.

定理. 设 $y_k^*(x)$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_k(x)\,(k=1,2)$ 的解, 则 $y=y_1^*(x)\pm y_2^*(x)$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)\pm f_2(x)$ 的解.

推论. 设 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 均是(2)的解, 则 $y_1^*(x)-y_2^*(x)$ 是(1)的解.

例. 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 及 $y_3(x)$ 均为(2)的解, 则该方程必有解______.

(A) $y_1+y_2+y_3$　　(B) $y_1+y_2-y_3$　　(C) $y_1-y_2-y_3$　　(D) $-y_1-y_2-y_3$

解. $y_1+y_2-y_3=(y_2-y_3)+y_1$ 是(2)的解, 故选(B).

例. 已知 $y_1=3$, $y_2=3+x^2$, $y_3=3+x^2+e^x$ 均为(2)的解, 求通解.

解. $y=C_1(y_3-y_2)+C_2(y_2-y_1)+y_1=C_1e^x+C_2x^2+3$.

第 7.7 节 常系数齐次线性微分方程

一. 二阶常系数齐次线性方程

(1) $y''+py'+qy=0$, 其中 p, q 为常数.

特征方程法: 由于 $e^{r\cdot x}$ 和它的各阶导数之间只差一个常数倍, 故假设(1)具有形如 $y=e^{r\cdot x}$ 的特解, 其中 r 待定, 则 $y''+py'+qy=0 \Leftrightarrow \left(r^2+pr+q\right)e^{rx}=0 \Leftrightarrow$ $r^2+pr+q=0$, 解出 $r_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$, 得(1)的两个特解 $y_1=e^{r_1x}$, $y_2=e^{r_2x}$.

定义. (2) $r^2+pr+q=0$, 称为(1)的特征方程, $r_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$ 称为特征根.

情形 1. $\Delta>0$, 即(2)有两个不相等的实根 r_1 与 r_2, 此时(1)有两个线性无关的解 $y_1=e^{r_1x}$, $y_2=e^{r_2x}$, 通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$;

情形 2. $\Delta=0$, 即(2)有两个相等实根 $r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$, 此时(1)有一个解 $y_1=e^{rx}$, 而 $y_2=xe^{rx}$ 是另一个解, 通解 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{rx}$;

情形 3. $\Delta<0$, 即(2)有一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, 此时(1)有两个线性无关的解 $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, 通解 $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$.

例. 求 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解. $r^2-2r-3=0\Rightarrow(r-3)(r+1)=0\Rightarrow r=-1$, 3, 故 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

例. 求 $y''+2y'+y=0$ 的通解.

解. $r^2+2r+1=0\Rightarrow(r+1)^2=0\Rightarrow r=-1$, -1, 故 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}$.

例. 求 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

解. $r^2-2r+5=0\Rightarrow(r-1)^2=-4\Rightarrow r=1\pm2i$, 故 $y=e^x\left(C_1\cos2x+C_2\sin2x\right)$.

例. 求以 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{2x}$ 为通解的二阶齐次线性微分方程.

解. 特征方程为 $(r-2)^2=r^2-4r+4$, 故所求方程为 $y''-4y'+4y=0$.

例. 求 $y''+9y=0$ 的在 $(\pi,-1)$ 处和直线 $y+1=x-\pi$ 相切的积分曲线.

解. $r^2+9=0\Rightarrow r=\pm3\cdot i$, 通解 $y=C_1\cos3x+C_2\sin3x$, 由 $\begin{cases}y|_{x=\pi}=-1\\ y'|_{x=\pi}=1\end{cases}$, 得

$$\begin{cases}C_1\cos3\pi+C_2\sin3\pi=-1\\ -3C_1\sin3\pi+3C_2\cos3\pi=1\end{cases}\Rightarrow C_1=1, C_2=-\frac{1}{3}, \text{ 故 } y=\cos3x-\frac{1}{3}\sin3x.$$

二. n 阶常系数齐次线性方程

(3) $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$, 其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为常数.

(4) $r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$ 称为(3)的特征方程.

若 r 是(4)的 k 重实根, 则(3)有一组特解 $y=x^m e^{rx}$, $0\le m\le k-1$;

若 $r=\alpha\pm i\beta$ 是(4)的 k 重共轭复根, 则(3)有两组特解:

$y=x^m e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y=x^m e^{\alpha x}\sin\beta x$, $0\le m\le k-1$.

例. 求 $y'''-6y''+3y'+10y=0$ 的通解.

解. $r^3-6r^2+3r+10=0\Rightarrow\left(r^2-7r+10\right)(r+1)=0\Rightarrow(r-2)(r-5)(r+1)=0$, 得 $r=-1$, 2, 5, 故 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{5x}$.

例. 求 $y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$ 的通解.

解. $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0\Rightarrow(r+1)\left(r^2+1\right)^2=0$, 得 $r=-1$, $\pm i$, $\pm i$, 故

$y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+C_4x\cos x+C_5x\sin x$.

例. 求具有特解 $y=xe^x$ 及 $y=e^{-x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程.

解. $(r-1)^2(r+1)=0\Rightarrow r^3-r^2-r+1=0$, 故方程为 $y'''-y''-y'+y=0$.

补充练习

1. 求 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

解. $r^4-2r^3+5r^2=0\Rightarrow r^2\left(r^2-2r+5\right)=0\Rightarrow r=0$, 0, $1\pm2i$, 故

$y=C_1+C_2x+C_3e^x\cos2x+C_4e^x\sin2x$.

2. 利用变换 $x=\cos t$ 化简方程 $\left(1-x^2\right)y''-xy'+y=0$, 并求通解.

解. $y'=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{dy}{dt}$, $y''=\dfrac{dy'}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\left(\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)\left(-\dfrac{1}{\sin t}\right)$,

代入方程, 得 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$, 解得 $y=C_1\cos t+C_2\sin t=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}$.

3. 设 $y=y(x)$ 满足方程 $y''+by'+cy=0$, 其中 $b,c>0$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$.

解. $r^2+br+c=0$, $r_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$.

(1) 当 $b^2-4c>0$ 时, $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$, 而 $r_{1,2}<0$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$;

(2) 当 $b^2-4c=0$ 时, $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-\frac{b}{2}x}$, 而 $r<0$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$;

(3) 当 $b^2-4c<0$ 时, $y=e^{-\frac{b}{2}x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

第 7.8 节 常系数非齐次线性方程

(1) $y''+py'+qy=f(x)$, 其中 p, q 为常数.

由于叠加原理, 求 (1) 的通解等价于求对应的齐次线性方程的通解 $\overline{y}(x;C_1,C_2)$ 和 (1) 的一个特解 $y^*(x)$, 而求 y^* 的方法为待定系数法.

情形一. $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$, 其中 $P_m(x)$ 为 m 次多项式.

设 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$, 其中 $Q_m(x)$ 为待定的 m 次多项式, 当 λ 不是特征根时, $k=0$, 当 λ 是单特征根时, $k=1$, 当 λ 是重特征根时, $k=2$.

例. 求 $y''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=(x^2+1)e^x$ 的通解.

解. (一) $r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0\Rightarrow r=-1$, $\frac{1}{2}$, 故 $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}$;

(二) $\lambda=1$ 不是特征根, 令 $y^*=(ax^2+bx+c)e^x$, 代入原方程, 得

$ax^2+(5a+b)x+\left(2a+\frac{5}{2}b+c\right)=x^2+1$, 于是 $a=1$, $b=-5$, $c=\frac{23}{2}$, 即

$y^*=\left(x^2-5x+\frac{23}{2}\right)e^x$, 故 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}+\left(x^2-5x+\frac{23}{2}\right)e^x$.

例. 求 $y''-y'-2y=(5-6x)e^{-x}$ 的通解.

解. (一) $r^2-r-2=0\Rightarrow r=-1$, 2, 故 $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$;

(二) $\lambda=-1$ 为单特征根, 令 $y^*=x(ax+b)e^{-x}$, 代入原方程, 得

$-6ax+(2a-3b)=-6x+5$, 于是 $a=1$, $b=-1$, 即 $y^*=(x^2-x)e^{-x}$, 故

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+(x^2-x)e^{-x}$.

例. 求 $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$ 的通解.

解. (一) $r^2-6r+9=0\Rightarrow r=3$, 3, 故 $\overline{y}=(C_1+C_2x)e^{3x}$;

(二) $\lambda=3$ 为重特征根, 令 $y^*=x^2(ax+b)e^{3x}$, 代入原方程, 得 $6ax+2b=x+1$, 于是

$a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{2}$, 即 $y^*=\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}$, 故 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}$.

情形二. $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right](\omega\neq 0)$, 其中 $P_l(x)$ 为 l 次多项式, $P_n(x)$ 为 n 次多项式.

设 $y^*=x^ke^{\lambda x}\left[Q_m(x)\cos\omega x+R_m(x)\sin\omega x\right]$, $m=\max(l,n)$, 其中 $Q_m(x)$, $R_m(x)$ 为待定的 m 次多项式, 当 $\lambda+\omega i$ 不是特征根时, $k=0$; 当 $\lambda+\omega i$ 是特征根时 $k=1$.

例. 求 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解.

解. (一) $r^2+1=0\Rightarrow r=\pm i$, 故 $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$;

(二) $\lambda+i\omega=2i$ 不是特征根, 令 $y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$, 代入原方程, 得 $(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$, 于是 $a=-\frac{1}{3}$, $b=0$, $c=0$, $d=\frac{4}{9}$, 即 $y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$, 故 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$.

例. 求 $y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$ 的通解.

解. (一) $r^2-2r+5=0\Rightarrow r=1\pm 2i$, 故 $\overline{y}=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;

(二) $\lambda+i\omega=1+2i$ 是特征根, 令 $y^*=x(a\cos 2x+b\sin 2x)e^x$, 代入方程, 得 $4b\cos 2x-4a\sin 2x=\cos 2x$, 于是 $a=0$, $b=\frac{1}{4}$, 即 $y^*=\frac{1}{4}xe^x\sin 2x$, 故 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{4}xe^x\sin 2x$.

例. 求 $y''+4y=\frac{1}{2}(x+\cos 2x)$ 的通解.

解. (一) $r^2+4=0\Rightarrow r=\pm 2i$, 故 $\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$;

(二) 设 $y^*=y_1^*+y_2^*$, 其中 (1) $y_1^*=ax+b$, 代入 $y''+4y=\frac{1}{2}x$, 得 $y_1^*=\frac{1}{8}x$;

(2) $y_2^*=x(a\cos 2x+b\sin 2x)$, 代入 $y''+4y=\frac{1}{2}\cos 2x$, 得 $y_2^*=\frac{1}{8}x\sin 2x$, 故 $y^*=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}x\sin 2x$, 因此 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}x\sin 2x$.

补充练习

1. 求以 $y=(C_1+x)e^x+C_2e^{-2x}$ 为通解的二阶常系数线性方程.

解. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$, 特征方程为 $(r-1)(r+2)=0\Leftrightarrow r^2+r-2=0$, 故 $y''+y'-2y=f(x)$, 代入 $y^*=xe^x$, 得 $f(x)=3e^x$, 故 $y''+y'-2y=3e^x$.

2. 求以 $y=(C_1\cos x+C_2\sin x+1)e^x$ 为通解的二阶常系数线性方程.

解. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^x$, $r=1+i$ 是特征根, 故特征方程为 $(r-1)^2=-1$, 即 $r^2-2r+2=0$, 故 $y''-2y'+2y=f(x)$, 代入 $y^*=e^x$, 得 $f(x)=e^x$, 故所求方程为 $y''-2y'+2y=e^x$.

3. 设 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^{2x}+e^{-x}$ 均为一个二阶常系数非齐次线性方程的特解, 求此方程.

解. $y_3-y_1=e^{-x}$, $y_3-y_2=e^{2x}$ 为对应齐次线性方程的解, 故特征方程 $(r-2)(r+1)=0$, 即 $r^2-r-2=0$, 故所求方程为 $y''-y-2y=f(x)$, 又代入 $y=xe^x$, 得 $f(x)=e^x(1-2x)$.

4. 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数, $f(x)=1+\frac{1}{3}\int_0^x\left[f''(t)+2f(t)-6te^{-t}\right]dt$, 且 $f'(0)=0$, 求 $f(x)$.

解. $f'(x)=\frac{1}{3}\left[f''(x)+2f(x)-6xe^{-x}\right]$, $y=f(x)$ 满足 $y''-3y'+2y=6xe^{-x}$;

(一) $r^2-3r+2=0\Rightarrow r=1$, 2, 故 $\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$;

(二) $\lambda=-1$ 不是特征根, 设 $y^*=(ax+b)e^{-x}$, 代入原方程, 得

$y^*=\left(x+\frac{5}{6}\right)e^{-x}$, 故 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left(x+\frac{5}{6}\right)e^{-x}$, 由 $x=0$, $y=1$, $y'=0$, 得

$C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=-\frac{1}{3}$, 故 $f(x)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{3}e^{2x}+\left(x+\frac{5}{6}\right)e^{-x}$.

5. 求 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解, 其中 $a>0$.

解. $r^2+a^2=0$, $r=\pm ai$; (1) 若 $a\neq 1$, 设 $y^*=A\cos x+B\sin x$, 代入方程, 得

$A=0$, $B=\frac{1}{a^2-1}$, 故 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{1}{a^2-1}\sin x$;

(2) 若 $a=1$, 设 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$, 代入方程, 得 $A=-\frac{1}{2}$, $B=0$, 故

$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$.

6. 求 $y''+4y=\cos^2 x$ 的通解.

解. (一) $r^2+4=0\Rightarrow r=\pm 2i$, 故 $\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$;

(二) $\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$, (1) $y''+4y=\frac{1}{2}$, $y_1^*=\frac{1}{8}$; (2) $y''+4y=\frac{1}{2}\cos 2x$,

令 $y_2^*=x(a\cos 2x+b\sin 2x)$, 代入方程, 得 $y_2^*=\frac{x}{8}\sin 2x$, 故

$y^*=\frac{1}{8}+\frac{x}{8}\sin 2x$, 于是 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{8}+\frac{x}{8}\sin 2x$.

7. 求 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 满足条件 $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

解. $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$, $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{y'^2}\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{y'^3}$, 代入方程, 得

$y''-y=\sin x$, 解得 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$, 由 $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{3}{2}$, 得

$C_1=1$, $C_2=-1$, 故 $y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$.

8. 利用变换 $x=\tan u$ 化简方程 $\left(1+x^2\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 并求通解.

解. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=\cos^2 u\cdot\dfrac{dy}{du}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(-2\cos u\sin u\cdot\dfrac{dy}{du}+\cos^2 u\cdot\dfrac{d^2y}{du^2}\right)\cos^2 u$,

代入方程, 得 $\dfrac{d^2y}{du^2}+y=\sin u$, 解得 $y=C_1\cos u+C_2\sin u-\dfrac{1}{2}u\cos u$, 即

$y=\dfrac{C_1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{C_2x}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{\arctan x}{2\sqrt{1+x^2}}$.