武汉大学计算机学院2006-2007学年第一学期
2005级《离散数学》考试标准答案

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

主析取范式: $(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$;
主合取范式: $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$.

二、 (12分，6+6)

(1) 试证明：$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \to \exists x$Q(x);
Proof:

$$\begin{aligned} & \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \\ \Leftrightarrow\ & \neg\neg\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \\ \Leftrightarrow\ & \neg\exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\ \Leftrightarrow\ & \exists x \neg P(x) \to \exists x Q(x) \end{aligned}$$

(2) 试证明下列结论的有效性(**要求写证明序列**)：
前提：$\forall x(P(x) \vee Q(x))$, 结论：$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$。
***CP*规则：** 由(1) 结论等价于$\exists x \neg P(x) \to \exists x Q(x)$

①	$\exists x \neg P(x)$	引入前提
②	$\neg P(a)$	①$+ES$
③	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	引入前提
④	$P(a) \vee Q(a)$	③$+US$
⑤	$Q(a)$	② + ④+析取三段论
⑥	$\exists x Q(x)$	⑤$+EG$

三、 设集合$A = \{1, 2, \cdots, 10\}$。定义A上的二元关系“$|$”，$m|n$表示m整除$n(m, n \in A)$，完成下列各题： (12分，4+4+4)

(1) 证明$\langle A, | \rangle$是偏序集；
Proof:

① 自反性：$\because x = 1 \times x, \therefore x|x;$
② 反对称性：设$x|y \wedge y|x$, 则$\exists p, q \in \mathbb{N} \wedge x = py \wedge y = qx, \therefore x = y.$
③ 传递性：设$x|y \wedge y|z$, 则$\exists p, q \in \mathbb{N} \wedge x = py \wedge y = qz, \therefore x = pqz, x|z.$

(2) 设$B \subseteq A$，求下列元素（若存在）：

(i) $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$，求B的最大元和极大元；
解： 无最大元素，极大元素为：$6, 8, 10$.

(ii) $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$，求B的最大下界和最小上界;
解： 最大下界1，无最小上界。

(3) 求A的真子集C，使得$\langle C, | \rangle$是全序集，且使$|C|$为满足上述条件的最大值。

解： $C = \{1, 2, 4, 8\}$.

四、 设集合$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{a, b, c\}$，设$B^A = \{ f \mid f : A \longrightarrow B\}$，设$X = \{ f \mid f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{a, b\}\}$，$Y = \{ f \mid f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{b, c\}\}$，$Z = \{ f \mid f \in B^A \wedge f(A) \subseteq \{a, c\}\}$，$T = \{ f \mid f \in B^A \wedge f$是满射$\}$ (16分，4+4+4+4)

(1) 试求$|B^A|$，$|X|$，$|Y|$和$|Z|$；

解： $|B^A| = 3^5 = 243$，$|X| = |Y| = |Z| = 2^5 = 32$.

(2) 试用枚举法表示集合$A \cap B$, $B \cap C$和$C \cap A$；

解： $X \cap Y = \{\{\langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, b\rangle, \langle 5, b\rangle\}\}$,
$Y \cap Z = \{\{\langle 1, c\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, c\rangle, \langle 4, c\rangle, \langle 5, c\rangle\}\}$,
$Z \cap X = \{\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 4, a\rangle, \langle 5, a\rangle\}\}$.

(3) 证明：$T = B^A - (X \cup Y \cup Z)$；

***Proof*:** 设f是满射，则$f \notin X \wedge f \notin Y \wedge f \notin Z$, *so* $f \in B^A - X \wedge f \in B^A - Y \wedge f \in B^A - Z$, *hence* $f \in B^A - (X \cup Y \cup Z)$, 故$T \subseteq B^A - (X \cup Y \cup Z)$. 设$f$不是满射，则$f \in X \vee f \in Y \vee f \in Z$, *so* $f \in X \cup Y \cup Z$, 故$B^A - T \subseteq X \cup Y \cup B$, 即$B^A - (X \cup Y \cup Z) \subseteq T$

(4) 试利用容斥原理求$|T|$。

解： $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |Y \cap Z| - |Z \cap X| + |X \cap Y \cap Z| = 3 \times 2^5 - 3 = 93$
$|T| = 3^5 - 93 = 150$

五、 设$\langle G, *, e\rangle$是一个群，并且对群G中的任意两个元素a和b有: $(a * b)^3 = a^3 * b^3$: (18分，每小题3分)

(1) 试证明：$\forall a, b \in G$, $(a * b)^2 = b^2 * a^2$;

***Proof*:** $\forall a, b \in G$, $(b * a)^3 = b * (a * b)^2 * a$, 由条件有$b * (a * b)^2 * a = b^3 * a^3$; 由消去律有$(a * b)^2 = b^2 * a^2$.

(2) 试证明：$\forall a, b \in G$, $a^3 * b^2 = b^2 * a^3$；

***Proof*:**

$$\begin{aligned} & a^3 * b^2 \\ = \; & a * a^2 * b^2 \\ = \; & a * (b * a)^2 \\ = \; & (a * b)^2 * a \\ = \; & b^2 * a^2 * a \\ = \; & b^2 * a^3 \end{aligned}$$

(3) 试证明: 如果$c \in G$并且$|c| = n$，则$c^{n+1} = c$;

***Proof*:** *if* $|c| = n$, *then* $c^n = e$, *so* $c^{n+1} = c * c^n = c * e = c$.

(4) 设$c \in G$, $|c| = 5$, 则$\forall x \in G$, $c * x^2 = x^2 * c$;

***Proof*:** 由上题$c^6 = c$, *so* $c * x^2 = c^6 * x^2 = (c^2)^3 * x^2 = x^2 * (c^2)^3 = x^2 * c$

(5) 设c如上题所述，则$\forall x \in G$, $c * x^3 = x^3 * c$;

***Proof*:** 由题(3) $c^6 = c$, *so* $c * x^3 = c^6 * x^3 = (c^3)^2 * x^3 = x^3 * (c^3)^2 = x^3 * c$

(6) 设c如题(4)所述，则$\forall x \in G,\ c * x = x * c$。

***Proof*:** $\because$ 2和3互素，*so* $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, 即$\exists p, q \in \mathbb{Z} \wedge 2p + 3q = 1$, *so* $x = x^1 = x^{2p+3q} = (x^p)^2 * (x^q)^3$, *hence* $c * x = c * (x^p)^2 * (x^q)^3 = (x^p)^2 * c * (x^q)^3 = (x^p)^2 * (x^q)^3 * c = x * c$

六、 设$\langle G, *, e_G\rangle$和$\langle H, \cdot, e_H\rangle$是两个群, $h : G \longrightarrow H$是群G到群H的同态, 记h的同态核为$N = \{\, a \mid a \in G \wedge h(a) = e_H \,\}$, 设$K$是$G$的子群，试证明： (12分，6+6)

(1) $h^{-1}(h(K)) = KN$, 其中, $KN = \{\, k * n \mid k \in K \wedge n \in N \,\}$;

***Proof*:** $\forall x \in h^{-1}(h(K))$, *so* $h(x) \in h(K)$, *hence* $\exists k \in K \wedge h(x) = h(k)$. $\because$ h是同态，$\therefore h(k^{-1} * x) = (h(k))^{-1} \cdot h(x) = e_H$, *so* $k^{-1} * x \in N$, *hence* $\exists n \in N \wedge x = k * n \in KN$, 故$h^{-1}(h(K)) \subseteq KN$;
$\forall k * n \in KN$, *where* $k \in K \wedge n \in N$, *so* $h(k * n) = h(k) \cdot h(n) = h(k) \cdot e_H = h(k) \in h(K)$, *so* $k * n \in h^{-1}(h(K))$, 即$KN \subseteq h^{-1}(h(K))$; 故$h^{-1}(h(K)) = KN$.

(2) $h^{-1}(h(K)) = K$, 当且仅当, N是K的子群。

***Proof*:**
$\Longrightarrow$: $KN = K$, $e_G \in K$, $\forall n \in N$, *so* $n = e_G * n \in KN = K$, *hence* $N \subseteq K$;
$\Longleftarrow$: $\because N \subseteq K$, *so* $\forall n \in N, k \in K$, $k * n \in K$, *hence* $KN \subseteq K$, *but* $e_G \in N$, *so* $\forall k \in K$, $k = k * e_G \in KN$, *so* $K \subseteq KN$; 故$h^{-1}(h(K)) = KN = K$.

七、 $G = \langle V, E\rangle$，G为简单连通平面图，$|V| = 6$，$|E| = 12$，证明：G的每个区域均由3条边围成。 (10分)

***反证法*:** 设图G至少有一个面是有4条边或4条以上的边围成，设k为图G的面数，则根据*Euler*公式有：$6 - 12 + k = 2$, 即$k = 8$；又每个面至少由3条边围成，并且每条边最多围2个面，则$4 + 7 \times 3 \leqslant 2 \times 12$, 即$25 \leqslant 24$, 矛盾。

八、 设有向树T有17条边，12片树叶，4个4度内点（即入度为1出度大于0的顶点），1个3度内点，求T的树根的度数。 (10分)

***解*:** 设树根的度数为x, 则有：$x + 4 \times 4 + 1 \times 3 + 12 \times 1 = 2 \times 17$, $\therefore x = 3$.