矩阵及其运算——矩阵的基本运算

知识点巩固练习

1. $A+(-A)=$ 0 .
2. 若 $kA=O$，这里 $k\in\mathbf{R}$，A 为矩阵，则 $k=$ 0 或 $A=$ 0 .
3. 只有满足 左矩阵的列数等于右矩阵的行数，两个矩阵才能相乘.
4. 一般情形下，矩阵乘法 不满足 交换律.
5. $A_{m\times n}O_{n\times s}=$ $O_{m\times s}$； $O_{t\times m}A_{m\times n}=$ $O_{t\times n}$.
6. $A_{m\times n}E_n=$ $A_{m\times n}$； $E_mA_{m\times n}=$ $A_{m\times n}$.

练习题

1. 计算下列乘积：

(1) $\overset{3\times 3}{\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\1 & -2 & 3\\5 & 7 & 0\end{pmatrix}}\overset{3\times 1}{\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}}$；

$=\begin{pmatrix}4\times 7+3\times 2+1\times 1\\1\times 7+(-2)\times 2+3\times 1\\5\times 7+7\times 2+1\times 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}35\\6\\49\end{pmatrix}$

(2) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$；

$=(x_1a_{11}+x_2a_{21}+x_3a_{31},\ x_1a_{12}+x_2a_{22}+x_3a_{32},\ x_1a_{31}+x_2a_{23}+x_3a_{33})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=(x_1a_{11}+x_2a_{21}+x_3a_{31})x_1+(x_1a_{12}+x_2a_{22}+x_3a_{32})x_2+(x_1a_{31}+x_2a_{23}+x_3a_{13})\cdot x_3$

(3) $\overset{3\times 1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}\overset{1\times 3}{(1,1,1)}$；

$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(4) $(1,1,1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$=1\times 1+1\times 1+1\times 1$

$=3$

2. 已知两个线性变换 $\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases}$

求从 z_1，z_2，z_3 到 x_1，x_2，x_3 的线性变换(用矩阵乘法形式表示).

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -2 & -1 & 16 \end{pmatrix}$$

3. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求(1) $(A+B)(A-B)$；(2) $A^2 - B^2$；(3)由此题你能得出什么结论?

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵运算不满足平方差公式

思考题

矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ 对应的线性变换 $\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$ 有什么几何意义?

记 xoy 平面上向量 $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

则线性变换即将 $\vec{OP}$ 变为 $\vec{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

设 $\vec{OP}$ 长度为 r. 辐角为 θ

则 $x = r\cos\theta$. $y = r\sin\theta$

$\therefore x_1 = r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi = r\cos(\theta+\varphi)$

$y_1 = r\cos\theta\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi = r\sin(\varphi+\theta)$

即将 $\vec{OP}$ 以点 P 为原点逆时针旋转 φ 角的旋转变换