向量组的线性相关性

——向量空间与线性方程组解的结构

知识点巩固练习

$(k_1, k_2 \cdots k_{n-r} \in R)$

1. 设 $R(A_{m\times n})=r$，则 n 元齐次线性方程组的解空间的维数为 $n-r$.
2. 若 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系为 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$，则方程组通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$；若 η^* 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个特解，则 $Ax=b$ 的通解为 $x=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$
3. 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的全体解 不能 (能或不能)构成向量空间. $(k_1, k_2 \cdots k_{n-r} \in R)$
4. 设向量空间 V 中有一组基是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，取 $x\in V$，若 $x=c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n$，则 x 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(c_1, c_2, \cdots c_n)$.

练习题

1. 设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 s 个解，$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为实数，满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明：$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 也是它的解.

证明：要证 $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$

即：$A(k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s)=b$

即 $b(k_1+\cdots+k_s)=b$

即：$k_1+\cdots+k_s=1$

∴成立

2. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量，且 $\eta_1=(2, 3, 4, 5)^T$，$\eta_2+\eta_3=(1, 2, 3, 4)^T$，求该方程组的通解.

$A(\eta_1-\eta_2-\eta_3)=0$

$2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=(3, 4, 5, 6)^T$

∴通解为：$x=c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ (c 为常数)

3. 设 η^* 是 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r} 是对应的齐次线性方程组的
础解系. 证明：

(1) η^*，ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r} 线性无关；

设 $k_1\eta^* + k_2\xi_1 + \cdots + k_{n-r+1}\xi_{n-r} = 0$

$A(k_1\eta^* + \cdots + k_{n-r+1}\xi_{n-r}) = 0$

$\therefore k_1 b = 0$

$\therefore k_1 = 0$

$\because$ 为基础解系

$\therefore k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r+1}$

$\therefore$ 线性无关

(2) η^*，$\eta^*+\xi_1$，$\eta^*+\xi_2$，…，$\eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关.

$k_1(\eta^*+\xi_1) + k_2(\eta^*+\xi_2) + \cdots + k_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r}) + k_{n-r+1}\eta^* = 0$

$\therefore (k_1 + \cdots + k_{n-r+1}) b = 0$

$\therefore k_1 + \cdots + k_{n-r+1} = 0$

$\because k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$

$\therefore k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = k_{n-r+1} = 0$

$\therefore$ 线性无关

次线性方程组的基础解系：

$$\begin{cases} x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0. \end{cases}$$

令 $A=\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=2$

$\therefore \begin{cases} x_1=-4x_3 \\ x_2=\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4 \end{cases}$

令 $\begin{matrix} x_3=1 \\ x_4=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=-4 \\ x_2=\frac{3}{4} \end{matrix}$

$\begin{matrix} x_3=0 \\ x_4=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=\frac{1}{4} \end{matrix}$

$\therefore$ 基础解系为 $\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. 求下列非齐次线性方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11, \\ 5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1, \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6. \end{cases}$$

令 $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 28 & -4 & 14 & -56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 28 & -4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 通解 $x=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （C_1，C_2 为常数）

6. 已知$\mathbb{R}^3$空间的两组基为：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$及$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$，求由基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$到$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$的过渡阵.

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 过渡阵 $P=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

思考题

设n元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的全体解所构成的解集为$S$，问向量组$S$的秩是多少？

S的秩即为基础解系的个数

$\therefore R(S)=n-R(A)$