

武汉大学计算机学院2007-2008学年第一学期 2006级《离散数学》考试标准答案

一、试求下述命题公式 G 的主析取和主合取范式: (10分)

$$P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

主析取范式: $(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$;

主合取范式: $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$.

二、试证明下列结论的有效性(要求写证明序列): (12分, 6+6)

(1) 前提: $P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q, P \rightarrow R, R \rightarrow \neg S$, 结论: $S \rightarrow Q$;

用CP规则证明:

① S	附加前提	⑥ $\neg P \vee Q$	⑤+加法式
② $R \rightarrow \neg S$	引入前提	⑦ $\neg(P \wedge \neg Q)$	⑥+T
③ $\neg R$	②+②+MT	⑧ $P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q$	引入前提
④ $P \rightarrow R$	引入前提	⑨ $\neg P \wedge Q$	⑦+⑧+析取三段论
⑤ $\neg P$	③+④+MT	⑩ Q	⑨+化简规则

(2) 前提: $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))), \exists xP(x)$, 结论: $\exists x(P(x) \wedge R(x))$

Proof

① $\exists xP(x)$	引入前提	④ $P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge R(a))$	③+US
② $P(a)$	②+ES	⑤ $Q(a) \wedge R(a)$	②+④+MP
③ $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$	引入前提	⑥ $\exists x(P(x) \wedge R(x))$	⑤+EG

三、设集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 设 A 上的二元关系 $\mathcal{R} = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$: (12分, 4+4+4)

(1) 试问 \mathcal{R} 是否为自反关系, 反自反关系, 对称关系, 反对称关系和传递关系;

解: \mathcal{R} 为反自反关系, 反对称关系和传递关系。

(2) 试求集合 $\mathcal{B} = \{S \mid S \text{ 是 } A \text{ 上的偏序关系, 且 } \mathcal{R} \subseteq S\}$ 的基数;

解: 包含关系 \mathcal{R} 的偏序关系的Hasse图只可能形如“|”, “|.”, “◇”, “\”, “Y”, “V”或“^”, 并且3, 1, 2自底向上排列, 这样将“0”放置在上述三个Hasse图的可能性分别是4, 1, 1, 1, 1, 1和1, 故包含 \mathcal{R} 的偏序关系共有10个, 即 $|\mathcal{B}| = 10$ 。

(3) 试分别求出集合 A 上的对称关系和反对称关系的总数。

解:

- ① 对称关系: 考虑关系矩阵元素对 m_{ij} 和 m_{ji} ($i \neq j$) 取值的可能性为:
 $\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle$, 而 m_{ii} 的取值可能也是0, 1, 故可以定义的对称关系数为 $2^{4+3+2+1} = 1024$;
- ② 反对称关系: 考虑关系矩阵元素对 m_{ij} 和 m_{ji} ($i \neq j$) 取值的可能性为:
 $\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle$ 和 $\langle 0, 1 \rangle$, 而 m_{ii} 的取值可能是0, 1, 故可以定义的对称关系数为 $3^{3+2+1} \times 2^4 = 11664$ 。

四、 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群, \mathcal{R} 是 G 上的二元关系, $\mathcal{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists a \in G, \text{使得 } y = a * x * a^{-1} \}$, 试证明: \mathcal{R} 是 G 上的等价关系。 (6分)

Proof:

- ① 自反性: $x \mathcal{R} x$, $\because x = e * x * e^{-1}$;
- ② 对称性: 设 $x \mathcal{R} y$, 则 $\exists a \in G, y = a * x * a^{-1}$, $\therefore x = a^{-1} * y * a = a^{-1} * y * (a^{-1})^{-1}$, 故 $y \mathcal{R} x$;
- ③ 传递性: 设 $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z$, 则 $\exists a, b \in G \wedge y = a * x * a^{-1} \wedge z = b * y * b^{-1}$, $\therefore z = b * y * b^{-1} = b * a * x * a^{-1} * b^{-1} = (b * a) * x * (b * a)^{-1}$. 故 $x \mathcal{R} z$.

五、 设集合 $N_9 = \{0, 1, 2, \dots, 7, 8\}$, $+_9$ 是模9加法, 则 $\langle N_9, +_9 \rangle$ 是一个阶数为9的循环群: (14分, 5+5+4)

(1) 试求群 N_9 所有的子群;

解: $N_9, \{0, 3, 6\}$ 和 $\{0\}$;

(2) 试求群 N_9 每个元素的阶数

解: $|0| = 1, |1| = 9, |2| = 9, |3| = 3, |4| = 9, |5| = 9, |6| = 3, |7| = 9, |8| = 9$;

(3) 试求群 N_9 所有的生成元。

解: 6个生成元, 分别是1, 2, 4, 5, 7, 8。

六、 设 $G = \{ f \mid f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, \text{其中: } a, b \in \mathbb{R}, \text{且 } a \neq 0 \}$: (24分, 每小题4分)

(1) 试证明: $\langle G, \circ \rangle$ 是一个群, 其中 \circ 是函数的合成运算;

Proof:

- ① 运算是可结合的: 函数的合成运算是可结合的;
- ② 运算的封闭性: 设 $\forall f, g \in G, f(x) = ax + b, g(x) = cx + d$ ($a \neq 0, c \neq 0$), 则 $(f \circ g)(x) = acx + ad + b$, 即线性函数的合成还是线性函数, 故 $f \circ g \in G$;
- ③ 幺元: $1_{\mathbb{R}}(x) = x = 1 \times x + 0$, 故合成运算的幺元 $1_{\mathbb{R}} \in G$;
- ④ 逆元: $\forall f \in G, f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), 设函数 $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$, 则 $g \in G$, 且 $g \circ f = f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$, 故 G 中的每个元素都有逆元, 并且逆元在 G 中;

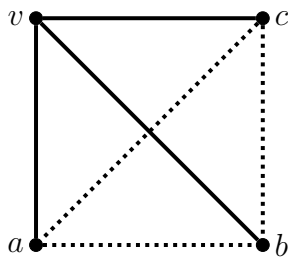
(2) 设 $N = \{ f \mid f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + b, \text{其中: } b \in \mathbb{R} \}$, 试证明 $\langle N, \circ \rangle$ 是 G 的子群;

Proof:

- ① 集合 N 非空: $1_{\mathbb{R}} \in N$;

- ② “差”运算的封闭性：设 $f(x) = x + b, g(x) = x + d$, 则 $g^{-1}(x) = x - d$,
 $\therefore f \circ g^{-1}(x) = x + b - d$, 故 $f \circ g^{-1} \in N$;
- ③ 根据子群的等价定义有 $N \leq G$.
- (3) 试证明: N 是 G 的正规子群; (提示: 证明 $\forall f \in G, fNf^{-1} \subseteq N$)
Proof:
- ① $\forall f \in G, fNf^{-1} \subseteq N$: $\forall f \in G, f(x) = ax + b, \forall g \in N, g(x) = x + d$;
 则 $(f \circ g \circ f^{-1})(x) = (f \circ g)(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}) = f(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} + d) = x - b + ad + d$,
 即 $f \circ g \circ f^{-1} \in N$, 故 $fNf^{-1} \subseteq N$;
- ② 根据正规子群的等价定义有 $N \triangleleft G$.
- (4) 试用性质法表示商群 G/N ;
解: $G/N = \{ \{ f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, b \in \mathbb{R} \} \mid a \in \mathbb{R}_+ \}$
- (5) 设 \mathbb{R}_+ 是非零实数集合, 则 $\langle \mathbb{R}_+, \times \rangle$ 构成一群, 设函数 $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}_+, \varphi(f) = a$, 其中 $f(x) = ax + b$, 试证明函数 φ 是群 $\langle G, \circ \rangle$ 到群 $\langle \mathbb{R}_+, \times \rangle$ 上的满同态(满射+同态);
Proof:
- ① 满射: $\forall t \in \mathbb{R}_+, \exists f \in G, f(x) = tx, \varphi(f) = t$;
- ② 同态: 设 $f, g \in G, f(x) = ax + b, g(x) = cx + d$, 则 $(f \circ g)(x) = acx + ad + b, \therefore \varphi(f \circ g) = ac = \varphi(f) \times \varphi(g)$.
- (6) 试证明 G/N 与 \mathbb{R}_+ 同构.
Proof: $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{1\}) = \{ f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + b, b \in \mathbb{R} \} = N$ (注: 也可用此来证 N 是正规子群), 根据同态标准分解定理: $G/\ker(\varphi) \cong \varphi(G)$, 而 φ 是满射, 即 $\varphi(G) = \mathbb{R}_+, \ker(\varphi) = N$, 故 $G/N \cong \mathbb{R}_+$.

七、 设 G 是6个结点的简单无向图, 证明: G 含有一个 K_3 子图, 或者 G 的补图含有一个 K_3 子图. (6分)



Proof:

- ① 设 v 是 K_6 中的任一结点; 则 $\deg(v) = 5$, 所以从 v 引出的5条边一定有三条边是属于 G 或三条边属于 \bar{G} , 不妨设三条边属于 G , 如上图实线所示, 记为 $(v, a), (v, b)$ 和 (v, c) ;
- ② if $(a, b), (b, c)$ 和 (c, a) 其中之一属于 G , 如 (a, b) , 则 (v, a, b, v) 是一条属于 G 的基本回路, 即 G 有 K_3 子图; 否则:
- ③ $(a, b), (b, c)$ 和 (c, a) 三边均不属于 G , 如上图用虚线表示, 则三角形 $\triangle abc$ 是 \bar{G} 的子图, 即 \bar{G} 有一个 K_3 的子图。

八、完全二元树是每个结点的出度恰好等于2或者0的有向树。试证明：若完全二元树的树叶数为 l ，边数为 m ，则 $m = 2(l - 1)$ 。(10分)

Proof1: 对树叶数 l 用归纳法：

- ① $l = 1$ ；完全二元树只可能是孤立点，即 $m = 0$ ，故 $m = 2(l - 1)$ ；
- ② 归纳假设：设树叶数小于 l 的完全二元树满足公式；
- ③ 设 T 是完全二元树， T 树叶数为 l ，边数为 m ，且 $l > 1$ ，则 T 的树根一定有左右儿子，设 T_1 和 T_2 分别是树根左右儿子对应的子树，则 T_1 和 T_2 也是完全二元树；设 l_1 和 l_2 分别是 T_1 和 T_2 对应树叶数，则 $l_1 < l \wedge l_2 < l$ ，且 $l_1 + l_2 = l$ ；设 m_1 和 m_2 分别是 T_1 和 T_2 对应边数，则 $m_1 + m_2 + 2 = m$ ；根据归纳假设有： $m_1 = 2(l_1 - 1)$ ， $m_2 = 2(l_2 - 1)$ ，两式左右分别相加有： $m_1 + m_2 = 2(l_1 + l_2 - 2)$ ，即 $m_1 + m_2 + 2 = 2(l_1 + l_2 - 1)$ ，故 $m = 2(l - 1)$ 。

Proof2: 用公式 $m = n - 1$ ：

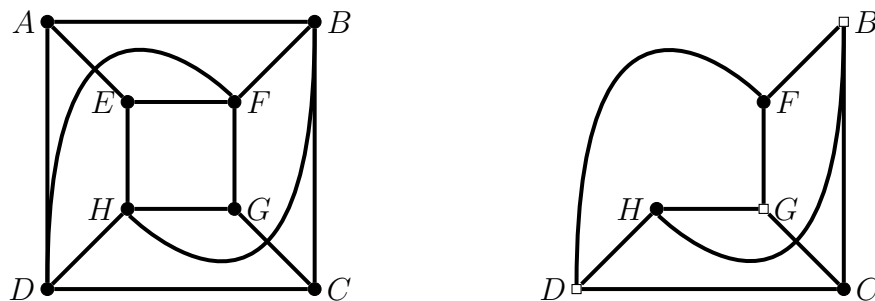
- ① $l = 1$ ；完全二元树只可能是孤立点，即 $m = 0$ ，故 $m = 2(l - 1)$ ；
- ② 设 $l > 1$ ，设完全二元树的内部结点数为 i ，则根结点的度数为2，内部结点的度数为3，叶结点的度数为1，故有：

$$2 \times 1 + 3i + l = 2m$$

而 $i + l + 1 = n = m + 1$ ，即 $i = m - l$ ，代入上式即有： $m = 2(l - 1)$ 。

九、试证明下图不是平面图：

(6分)



Proof1: 利用平面图的必要条件 $m < \frac{p}{p-2}(n - 2)$ （其中 p 是最小基本回路的长度），有原图中 $m = 14$ ， $n = 8$ ， $p = 4$ ，代入不等式有 $14 < 2(8 - 2) = 12$ ，不等式不成立，故原图不是平面图。

Proof2: 用Kuratowski定理，删除结点 A 和 E 后，该图两度同构 $K_{3,3}$ （如上图所示），故原图不是平面图。