武汉大学计算机学院2005-2006学年第一学期
2004级《离散数学》考试标准答案

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$(P \to Q \wedge R) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$$

主析取范式: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$;
主合取范式: $(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$.

二、 试分别证明下列结论的有效性(**要求写证明序列**)： (14分，7+7)

(1) 前提：$P \wedge Q \to R, \neg R \vee S, \neg S$；
结论：$\neg P \vee \neg Q$;

反证法：设结论的否成立即$\neg(\neg P \vee \neg Q)$成立:

①	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	附加前提
②	$P \wedge Q$	①+$\mathbb{T}$
③	$P \wedge Q \to R$	引入前提
④	R	②+③+MP
⑤	$\neg R \vee S$	引入前提
⑥	$R \to S$	⑤+$\mathbb{T}$
⑦	S	④+⑥+MP
⑧	$\neg S$	引入前提
⑨	$\mathbb{F}$	⑦+⑧

直接证明:

①	$\neg R \vee S$	引入前提
②	$R \to S$	①+$\mathbb{T}$
③	$\neg S$	引入前提
④	$\neg R$	②+③+MT
⑤	$P \wedge Q \to R$	引入前提
⑥	$\neg(P \wedge Q)$	④+⑤+MT
⑦	$\neg P \vee \neg Q$	⑥+$\mathbb{T}$

(2) 前提：$\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$；
结论：$\neg \forall x(R(x) \to P(x))$。

直接证明:

①	$\exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$	引入前提
②	$R(a) \wedge \neg Q(a)$	①+ES
③	$R(a)$	②+简化
④	$\neg Q(a)$	②+简化
⑤	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	引入前提
⑥	$P(a) \to Q(a)$	⑤+US
⑦	$\neg P(a)$	④+⑥+MT
⑧	$R(a) \wedge \neg P(a)$	③+⑦+合取
⑨	$\neg(\neg R(a) \wedge P(a))$	⑧+$\mathbb{T}$
⑩	$\neg(R(a) \to P(a))$	⑨+$\mathbb{T}$
⑪	$\exists x(\neg(R(x) \to P(x)))$	⑩+EG
⑫	$\neg \forall x(R(x) \to P(x))$	⑪+$\mathbb{T}$

三、 设A、B和C是三个集合: (9分, 5+4)

(1) 设：

$$A \cap C = B \cap C \text{ 且 } A - C = B - C$$

试证明：$A = B$;

$$
\begin{aligned}
& A \\
= & A \cap U \\
= & A \cap (C \cup \overline{C}) \\
= & (A \cap C) \cup (A \cap \overline{C}) \\
= & (A \cap C) \cup (A - C) \\
= & (B \cap C) \cup (B - C) \\
= & (B \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) \\
= & B \cap (C \cup \overline{C}) \\
= & B \cap U \\
= & B
\end{aligned}
$$

(2) 试证明：$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$。

$$
\begin{aligned}
& (A-C)-(B-C) \\
= & (A \cap \overline{C}) - (B \cap \overline{C}) \\
= & (A \cap \overline{C}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})} \\
= & (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) \\
= & (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) \\
= & (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup \varnothing \\
= & (A-B) \cap \overline{C} \\
= & (A-B)-C
\end{aligned}
$$

四、 设集合$A=\{a,b,c,d\}$，$\mathcal{R}=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,a\rangle\}$是集合$A$上的二元关系： (10分，4+4+2)

(1) 求$\mathcal{R}^{2006}$；

$\mathcal{R}^2=\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,a\rangle,\langle d,b\rangle\}$;
$\mathcal{R}^3=\{\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,c\rangle\}$;
$\mathcal{R}^4=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}=\mathbb{1}_A$;
$\mathcal{R}^{2006}=\mathcal{R}^{2006 \bmod 4}=\mathcal{R}^2$;

(2) 求$t(\mathcal{R})$；

$t(\mathcal{R})=A^2$;

(3) 试求A上同时具有最大元素和最小元素的偏序关系的总数。

有最大元素和最小元素的偏序关系的$Hass$图只有直线$(|)$和菱形$(\Diamond)$两种可能，所以，总数$=4!+4*3=36.$

五、 设X和Y是两个非空集合，$f: X \longrightarrow Y$是X到Y的函数，设$A \subseteq X$，$B \subseteq X$：(12分，5+4+3)

(1) 试证明：$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$;

设$\forall y \in f(A\cap B)$，则$\exists x \in A\cap B$，$f(x)=y$. $\because x \in A\cap B$，$\therefore x \in A \wedge x \in B$，*So* $f(x)\in f(A) \wedge f(x)\in f(B)$，$\therefore f(x)\in f(A)\cap f(B)$，*hence* $y \in f(A)\cap f(B)$，即$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

(2) 试以集合$\{1,2\}$上的函数为例举反例证明：

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B);$$

设$f(1)=1 \wedge f(2)=1$, $A=\{1\} \wedge B=\{2\}$, 则$f(A \cap B)=\varnothing \wedge f(A) \cap f(B)=\{1\}$.

(3) 试证明: 如果f是单射, 则:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)。$$

设$\forall y \in f(A) \cap f(B)$, 则$y \in f(A) \wedge y \in f(B)$, 即$\exists x_1 \in A, f(x_1)=y \wedge \exists x_2 \in B, f(x_2)=y$, *but* $f(x_1)=f(x_2)=y$, $\because f$ 是单射, *so* $x_1=x_2$, 这样$x_1 \in A \cap B$, $f(x_1) \in f(A \cap B)$, 即$y \in f(A \cap B)$, 故$f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$, 由*(1)*得: $f(A \cap B)=f(A) \cap f(B)$.

六、 设$G=\{a,b,c,d\}$，G上的二元运算$*$定义如下：

$*$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

已知$\langle G, * \rangle$构成一个群: (18分，每小题3分)

(1) 试指出群G的幺元；并对每个元素求逆元；
幺元为d, $d^{-1}=d$, $a^{-1}=a$, $b^{-1}=b$, $c^{-1}=c$;

(2) 试求群G的**每个**元素的阶数；
$|d|=1$, $|a|=2$, $|b|=2$, $|c|=2$;

(3) 试写出群G的**所有**子群；
$\{d\}$, $\{d,a\}$, $\{d,b\}$, $\{d,c\}$, G;

(4) 群G与$\langle \mathbb{N}_4, +_4 \rangle$同构吗？为什么？
不同构，G不是循环群，没有阶数为4的元素;

(5) 群G是交换群吗？为什么？
是，运算表对称;

(6) 设$\langle H, \bullet, e \rangle$是一个群，并且$\forall a \in H$, $a^2=e$, 试证明H是 交换群。
$\because a^2=e$, $\therefore G$中每个元素的逆元是其自身；$\forall a,b \in H$, $\therefore (a \bullet b)^{-1} = a \bullet b$, 而$(a \bullet b)^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1} = b \bullet a$, *so* $a \bullet b = b \bullet a$, 故$G$是$Abelian$;

七、 设$\langle G, *, e_G \rangle$和$\langle H, \cdot, e_H \rangle$是两个群, $h: G \longrightarrow H$是群G到群H的同态, 试证明：(15分，5+5+3+2)

(1) 如果A是G的子群，则$h(A)$是H的子群；

i. $h(A) \neq \varnothing$: $\because e_G \in A$, *so* $e_H = h(e_G) \in h(A)$;

ii. $\forall x,y \in h(A)$, $x \cdot y^{-1} \in h(A)$:
$\exists a,b \in A, h(a)=x \wedge h(b)=y$, *so* $a * b^{-1} \in A \leqslant G$, $\therefore h(a * b^{-1}) \in h(A)$, *but h is homo*, $h(a * b^{-1}) = h(a) \cdot (h(b))^{-1} = x \cdot y^{-1}$, *hence* $x \cdot y^{-1} \in h(A)$;

(2) 如果B是H的子群，则$h^{-1}(B)$是G的子群；

i. $h^{-1}(B) \neq \varnothing$: $\because e_H \in B$, *so* $e_H = h(e_G) \in B$, $\therefore e_G \in h^{-1}(B)$;

ii. $\forall a, b \in h^{-1}(B)$, $a * b^{-1} \in h^{-1}(B)$:
$h(a) \in B \wedge h(b) \in B$, *so* $h(a) \cdot (h(b))^{-1} \in B \leqslant H$, $\because$ h *is homo*, $\therefore h(a * b^{-1}) = h(a) \cdot (h(b))^{-1} \in B$, *hence* $a * b^{-1} \in h^{-1}(B)$;

(3) 如果G和H都是有限群，$a \in G$，则$h(a)$的阶数是$|G|$和$|H|$的公因子；

设$|G| = m, |H| = n, |a| = p$; 则$a^p = e_G \wedge p \,\big|\, m$, *so* $(h(a))^p = h(a^p) = h(e_G) = e_H$, $\therefore |h(a)| \,\big|\, p$, *hence* $|h(a)| \,\big|\, m$, *but* $|h(a)| \,\big|\, n$, $\therefore |h(a)|$是m和n的公因子；

(4) 利用上题的结果说明$\langle \mathbb{N}_4, +_4 \rangle$到$\langle \mathbb{N}_5, +_5 \rangle$上共有多少个同态。
只有唯一的一个平凡同态$h : n \longmapsto 0$, 因为$h(n)$的阶数一定是4和5的公因子，而4和5互素，$\therefore |h(n)| = 1$, 阶数为1的元素只有幺元, $\therefore \forall n \in \mathbb{N}_4$, $h(n) = 0$.

八、 称一个有向图为无环路有向图，当且仅当，图中没有有向回路。设$G = \langle V, E \rangle$是一个无环路简单有向图(没有自回路和多重边)，试证明: (12分，6+6)

(1) G中至少有一个结点的出度为0;

反证法：设每个结点都有引出的边, 设$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 从$v_1$可引出边到$v_i$, 从$v_i$可引出边到$v_k$, ..., 这样可以构造一个长度为$n$经过$n+1$个结点的有向路径, 根据鸽巢原理，从$n$个不同的结点中选取$n+1$个结点，一定有两个结点是相同的，从而形成一个有向回路，与条件矛盾；

(2) 设$|V| = n$, $|E| = m$，则: $m \leqslant n(n-1)/2$。

无回路简单有向图每对结点只可能有一条有向边，所以总边数不超过C_n^2.