不确定性知识的表示与推理

第十三章 不确定性的量化

提纲

- **第十三章 不确定性的量化**
  - **13.1 不确定性的概述**
  - 13.2 不确定性与理性决策
  - 13.3 基本概率符号
  - 13.4 使用完全联合分布进行推理
  - 13.5 贝叶斯规则及其应用

不确定性

一个不确定性的例子：自动驾驶出租车智能体

目标：将乘客按时送到机场

规划：A_t = 在飞机起飞t分钟前出发，并以合理的速度驶向机场。

问题：A_t 规划能使乘客准时到达机场吗?

环境:

1. 部分可观测的 (路况, 其它驾驶员规划, etc.)
2. 不确定性(车辆爆胎, 引擎失灵, etc.)

不确定性

一个逻辑智能体可能给出的结论：

1. 有风险的断言: “规划A_{90} 将使我们及时到达机场”

2. 得出如下的弱一些的结论:

“规划A_{90} 将使我们及时到达机场，只要车不抛锚，汽油不耗尽，不遇到任何交通事故，桥上也没有交通事故，飞机不会提前起飞，而且没有陨星砸到我的车，……”

不确定性

一个不确定性推理的例子：诊断牙病患者的牙痛

我们试着用**命题逻辑**写出牙病诊断的规则，考虑下面的简单规则：

$$Toothache \Rightarrow Cavity$$ ×

更新规则：

$$Toothache \Rightarrow Cavity \vee GumProblem \vee Abscess \ldots\ldots$$

不幸的是：为了使规则正确，我们不得不增加一个无限长的可能原因的列表

不确定性

- 试图使用逻辑会失败，有以下三个原因:
  - 惰性: 无法列举出前提和结论的完整集合.
  - 无知: 缺乏相关事实、初始条件, etc.
    - 理论的无知: 对于该领域，缺少完整的理论.
    - 实践的无知: 即使我们知道所有的规则, 对于一个特定的病人我们也无法确定。

提纲

- **第十三章 不确定性的量化**
  - **13.1 不确定性的概述**
  - **13.2 不确定性与理性决策**
  - 13.3 基本概率符号
  - 13.4 使用完全联合分布进行推理
  - 13.5 贝叶斯规则及其应用

处理不确定性的方法

- 不确定环境下，智能体的知识提供相关语句的信念度(degree of belief)，处理信念度的主要工具是概率理论(probability theory)

- 概率提供了一种方法以概括由我们的惰性和无知产生的不确定性
  - 规划A_{25} 将使我们及时到达机场的概率(可能性)是0.04
  - 牙痛病人有牙洞的概率(可能性)是0.8

处理不确定性的方法

- 概率理论:
  - 没有关于世界的断言
  - 概率将命题与智能体自身的知识状态联系起来:

    e.g., $P(A_{25}$ | no reported accidents$)$ = 0.06

  - 命题的概率随新证据而变化:

    e.g., $P(A_{25}$ | no reported accidents, 5 a.m.$)$ = 0.15

不确定性与理性决策

- 再次考虑去机场的规划 A_t

  $P(A_{25}$ gets me there on time | …) = 0.04

  $P(A_{90}$ gets me there on time | …) = 0.70

  $P(A_{120}$ gets me there on time | …) = 0.95

  $P(A_{1440}$ gets me there on time | …) = 0.9999

我们该如何做选择?

- 效用理论(Utility theory) 对偏好进行表示和推理，每个状态具有“效用”度量值
  - 偏好: 及时到达机场、避免在机场长时间等待、避免路上超速罚单等

不确定性与理性决策

- 概率论： 用于处理信念度的理论
- 效用理论：对偏好进行表示和推理，是有效性的度量

- 决策理论 = 概率理论 + 效用理论
  - 基本思想：一个智能体是理性的，当且仅当它选择能产生最高期望效用(Maximum Expected Utility, MEU)的行动
    - 期望效用是行动的所有可能结果的平均

不确定性与理性决策

function DT-AGENT(*percept*) **returns** an *action*
  persistent: *belief_state*, probabilistic beliefs about the current state of the world
    action, the agent's action

  update *belief_state* based on *action* and *percept*
  calculate outcome probabilities for actions,
    given action descriptions and current *belief_state*
  select *action* with highest expected utility
    given probabilities of outcomes and utility information
  return *action*

Figure 13.1 A decision-theoretic agent that selects rational actions.

提纲

- **第十三章 不确定性的量化**
  - **13.1 不确定性的概述**
  - **13.2 不确定性与理性决策**
  - **13.3 基本概率符号**
  - 13.4 使用完全联合分布进行推理
  - 13.5 贝叶斯规则及其应用

基本概率符号

- 概率理论
  - 随机变量、事件
  - 概率公理
  - 无条件概率（先验概率）、条件概率（后验概率）
  - 完全联合概率分布
  - 乘法法则、链式法则

随机变量

- 随机变量 表示可能世界中的不确定性
  - R (Is it raining?)
- 与命题逻辑相似：
  - 可能世界是由对随机变量的赋值进行定义的， 随机变量以大写字母开头
- 布尔随机变量

  e.g., *Cavity* (do I have a cavity?) 定义域：<*true*， *false*>
- 离散随机变量

  e.g., *Weather* is one of <*sunny, rainy, cloudy, snow*> 变量的值总是用小写

随机变量

- 基本要素：随机变量
- 基本命题通过单个随机变量的赋值进行构造：
  - e.g., *Cavity = false* (abbreviated as $\neg$*cavity*)
  - *Weather = sunny* (abbreviated as *sunny*)
- 复合命题由基本命题的逻辑连接构造
  - e.g., *Weather = sunny* $\vee$ *Cavity = false*

概率分布

考虑随机变量*Weather*，其定义域为 <*sunny, rainy, cloudy, snow*>，每个可能取值的概率，可以写成：

$P(Weather = sunny) = 0.6$

$P(Weather = rain) = 0.1$

$P(Weather = cloudy) = 0.29$

$P(Weather = snow) = 0.01$

也可以简写为：

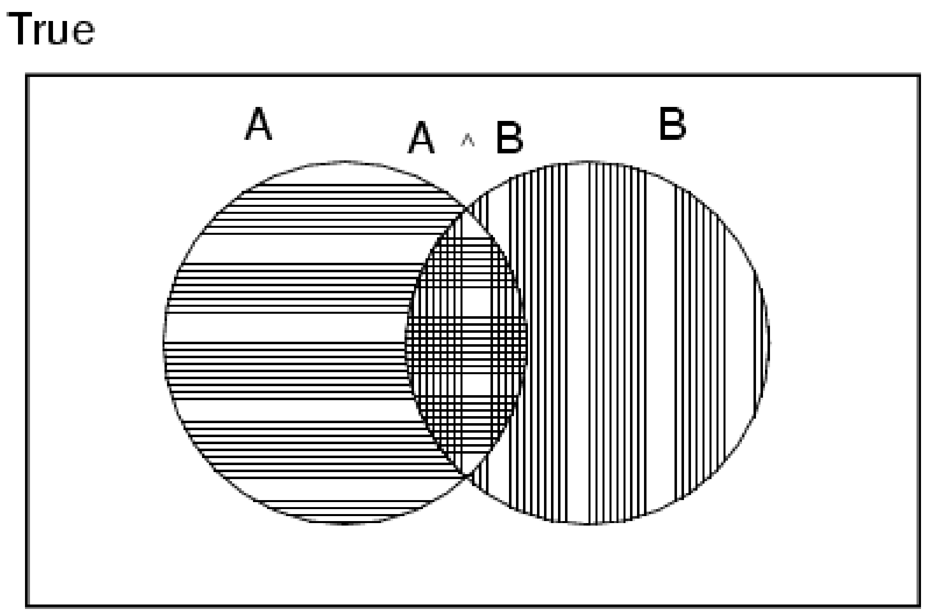
P(*Weather*) =<0.6, 0.1, 0.29, 0.01>

(normalized, i.e., sums to 1)

P定义了随机变量*Weather*的一个概率分布

概率公理

- 对给定的两个随机变量*A, B*
  - $0 \leq P(a) \leq 1$
  - $P(true) = 1$ and $P(false) = 0$
  - $P(\neg a) = 1 - P(a)$
  - $\mathbf{P}(A \vee B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \wedge B)$



先验概率

- 先验概率 或 无条件概率

  e.g., P(*Cavity* = true) = 0.1

  P(*Weather* = sunny) = 0.72

- 联合概率分布：多个变量取值的所有组合的概率

  P(*Weather*,*Cavity*) 是一个4*2的概率表:

Weather =	sunny	rainy	cloudy	snow
Cavity = true	0.144	0.02	0.016	0.02
Cavity = false	0.576	0.08	0.064	0.08

  - e.g., **P**(*sunny*,*Cavity*)

- 完全联合概率分布：
  - e.g., **P**(*Toothache*,*Weather*,*Cavity*)
  - 一个完全联合分布基本满足计算任何命题的概率的需求

条件概率

- 条件概率 或 后验概率
  - e.g., P(*cavity* | *toothache*) = 0.8
- 额外条件很重要
  - 如果获得进一步信息，*cavity*为真，条件概率将更新为：

  P(*cavity* | *toothache,cavity*) = 1
- 无关的证据，可以简化
  - e.g.,P(*cavity* | *toothache, sunny*) = P(*cavity* | *toothache*) = 0.8
- 条件概率是由无条件概率定义的：

$$P(a|b) = \frac{P(a,b)}{P(b)}$$

要求：*P*(*b*)>0

乘法法则和链式法则

- 乘法法则:

$$P(a \wedge b) = P(a \mid b)\, P(b) = P(b \mid a)\, P(a)$$

  - e.g., $\mathbf{P}(Weather, Cavity) = \mathbf{P}(Weather \mid Cavity)\, \mathbf{P}(Cavity)$

- 考虑有n个变量的联合分布：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) &= \mathbf{P}(X_1,\ldots,X_{n-1})\, \mathbf{P}(X_n \mid X_1,\ldots,X_{n-1}) && \text{(乘法法则)} \\ &= \mathbf{P}(X_1,\ldots,X_{n-2})\, \mathbf{P}(X_{n-1} \mid X_1,\ldots,X_{n-2})\, \mathbf{P}(X_n \mid X_1,\ldots,X_{n-1}) && \text{(乘法法则)} \\ &= \ldots \\ &= \prod_{i=1\sim n} \mathbf{P}(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) && \text{(乘法法则)} \end{aligned}$$

- 链式法则： $\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1\sim n} \mathbf{P}(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$

提纲

- **第十三章 不确定性的量化**
  - **13.1 不确定性的概述**
  - **13.2 不确定性与理性决策**
  - **13.3 基本概率符号**
  - **13.4 使用完全联合分布进行推理**
  - 13.5 贝叶斯规则及其应用

概率推理

- 使用完全联合概率分布作为“知识库”，从中可以导出所有问题的答案。
- 概率推理: 根据已观察到的证据，计算查询命题的后验概率。

- 例如，计算条件概率
  - $P(A_{100}$ on time | no reported accidents$) = 0.90$
  - 表示给定证据下的信念度

- 随着新的证据的出现，概率会发生变化
  - $P(A_{100}$ on time | no accidents, 5 a.m.$) = 0.95$
  - $P(A_{100}$ on time | no accidents, 5 a.m., raining$) = 0.80$
  - 观察新的证据，更新信念度

概率推理

- 一个简单的例子: 诊断牙病患者的牙痛
  - 问题域：由三个布尔变量*Toothache*，*Cavity*和*Catch*组成
  - *Catch*表示由于牙医的钢探针不洁而导致的牙龈感染
  - 给定完全联合分布，一个2*2*2的表格

	$toothache$		$\neg toothache$	
	$catch$	$\neg catch$	$catch$	$\neg catch$
$cavity$	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg cavity$	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 13.3 A full joint distribution for the *Toothache*, *Cavity*, *Catch* world.

枚举推理

- 给定完全联合分布:

	toothache		*¬toothache*	
	catch	*¬catch*	*catch*	*¬catch*
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 13.3 A full joint distribution for the *Toothache*, *Cavity*, *Catch* world.

- 对于任意命题φ, 其概率是使得该命题成立的可能世界的概率之和： $P(\phi) = \Sigma_{\omega:\omega \models \phi} P(\omega)$

- 一种计算任何命题概率的方法:
  - 识别命题为真的可能世界，然后把它们的概率加起来
  - 例如： $P(cavity \lor toothache) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 + 0.016 + 0.064 = 0.28$

枚举推理

- 给定完全联合分布:

	toothache		¬*toothache*	
	catch	¬*catch*	*catch*	¬*catch*
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬*cavity*	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 13.3 A full joint distribution for the *Toothache*, *Cavity*, *Catch* world.

- 一个特别常见的任务：提取某个变量的概率分布（无条件概率/边缘概率）
- 边缘化规则，或者称为求和消元:
  - P(*toothache*) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2

枚举推理

- 给定完全联合分布:

	toothache		*¬toothache*	
	catch	*¬catch*	*catch*	*¬catch*
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
¬cavity	0.016	0.064	0.144	0.576

Figure 13.3 A full joint distribution for the *Toothache*, *Cavity*, *Catch* world.

- 条件概率是由无条件概率定义的，可以计算条件概率:

$$P(\neg cavity \mid toothache) = \frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.016+0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

$$= 0.4$$

枚举推理

$$P(\neg cavity \mid toothache) = \frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.016+0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

$$= 0.4$$

这两个计算出来的值相加等于1。

分母是不变的，是常数。

$$P(cavity \mid toothache) = \frac{P(cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

$$= 0.6$$

枚举推理

- 例如：$\mathbf{P}(Cavity \mid toothache)$

  $= \alpha\ \mathbf{P}(Cavity, toothache)$

  $= \alpha\ [\mathbf{P}(Cavity, toothache, catch) + \mathbf{P}(Cavity, toothache, \neg catch)]$

  $= \alpha\ [\langle 0.108, 0.016\rangle + \langle 0.012, 0.064\rangle]$

  $= \alpha\ \langle 0.12, 0.08\rangle$

  $= \langle 0.6, 0.4\rangle$

归一化方法

基本思想：计算查询变量的概率分布，可以固定证据变量 (evidence variables)， 然后在隐变量 (hidden variables) 上求和并归一化

枚举推理

归一化方法:

假设查询变量为*X*；证据变量集合为 **E**，**e**表示其观察值；假设其余的未观测变量为**Y**。

计算查询变量:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{e}) = \alpha\, \mathbf{P}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e}) = \alpha\, \Sigma_{y}\, \mathbf{P}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{y})$$

- **问题：** 规模扩展性不好
  - 对于一个由n个布尔变量所描述的问题域，最坏情况下的时间复杂性$O(2^n)$，空间复杂性 $O(2^n)$

提纲

- 第十三章 不确定性的量化
  - 13.1 不确定性的概述
  - 13.2 不确定性与理性决策
  - 13.3 基本概率符号
  - 13.4 使用完全联合分布进行推理
  - 13.5 贝叶斯规则及其应用

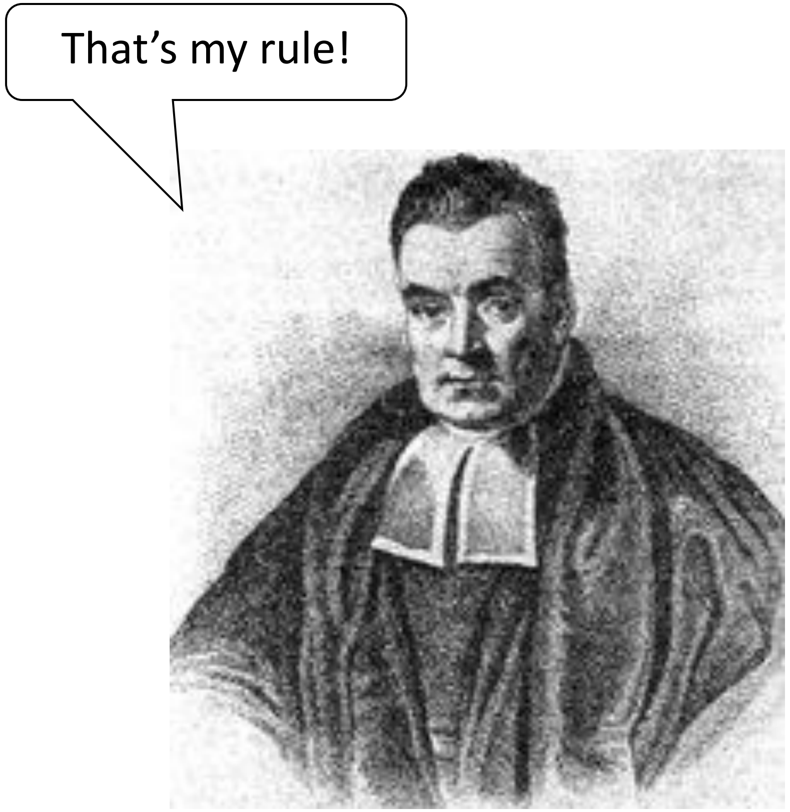
贝叶斯规则

- 根据乘法法则，联合分布可以表示为:

$$P(a,b) = P(a|b)P(b) \qquad P(a,b) = P(b|a)P(a)$$

- 同时除以P(a)，得到贝叶斯规则:

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)P(b)}{P(a)}$$



- 是大多数进行概率推理的人工智能系统的基础
- 贝叶斯规则在实践中很有用:
  - 很多情况下，前三项有很好的估计，而需要计算第4项

应用贝叶斯规则

- 简单示例: 医疗诊断

- 结果*effect*看作是证据，确定造成这一结果的未知因素*cause*，贝叶斯规则:

$$P(\text{cause}|\text{effect}) = \frac{P(\text{effect}|\text{cause})P(\text{cause})}{P(\text{effect})}$$

  - 条件概率*P*(*effect*|*cause*) 量化了因果方向上的关系
  - 条件概率*P*(*cause*|*effect*) 描述诊断方向上的关系
  - 实际中，经常有因果关系的条件概率，而想得出诊断关系。

应用贝叶斯规则

- 简单实例: 医疗诊断

  - 医生知道脑膜炎有70%的可能会引起病人脖子僵硬。医生还了解一些无条件的事实：病人患脑膜炎的先验概率为1/50,000，而任何一个病人脖子僵硬的概率为 1%。问：脖子僵硬的病人患脑膜炎的概率?

  - 令m表示”病人患有脑膜炎”的命题, s表示”病人脖子僵硬”的命题

  - 则有： $P(m) = 1/50000$　　$P(s|m) = 0.7$　　$P(s) = 0.01$

  - $P(m|s) = \frac{P(s|m) * P(m)}{P(s)}$ = (0.7* 1/50000) /0.01 = 0.0014

应用贝叶斯规则

- 简单实例: 医疗诊断
  - 医生知道脑膜炎有70%的可能会引起病人脖子僵硬。医生还了解一些无条件的事实：病人脖子僵硬的先验概率为1/50,000, 而任何一个病人脖子僵硬的概率为 1%。
  - 问题：计算$\mathbf{P}(M|s)$?
  - 归一化的方法:

$$\mathbf{P}(M|s) = < P(m|s), P(\neg m|s) >$$

$$= \alpha < P(s|m)P(m), P(s|\neg m)P(\neg m) >$$

应用贝叶斯规则

- 简单示例2：明天要举行户外运动会。近年来，每年仅下雨5天（5/365=0.014）。不幸的是，天气预报员预测明天会下雨。当真的下雨时，天气预报员准确地预测了90%的降雨。当不下雨时，他错误地预测了10%的降雨。明天下雨和不下雨的可能性分别有多大?

- 令rain表示明天下雨的概率，predict表示预测明天下雨的概率
- 则有：
  - $P(rain) = 0.014$；$P(\neg rain) = 0.986$ ；$P(predict|rain)= 0.9$；$P(predict|\neg rain) =0.1$
- 问题：计算$\boldsymbol{P}(Rain|predict)$?

应用贝叶斯规则

- 简单示例2：明天要举行户外运动会。近年来，每年仅下雨5天（5/365=0.014）。不幸的是，天气预报员预测明天会下雨。当真的下雨时，天气预报员准确地预测了90%的降雨。当不下雨时，他错误地预测了10%的降雨。明天下雨和不下雨的可能性分别有多大?

$$\mathbf{P}(Rain|predict) = < P(rain|predict), P(\neg rain|predict) >$$

$$= \alpha < P(predict|rain) * P(rain), P(predict|\neg rain) * P(\neg rain) >$$

$$= \alpha < 0.9 * 0.014, 0.1 * 0.986 >$$

$$= < 0.111，0.889 >$$

小结

- 由于环境可能是部分可观察的或不确定的，智能体需要处理不确定性。
- 概率是描述不确定知识的一种严格形式。通过条件概率，将命题与智能体自身的知识联系起来
- 给定一个完全联合分布可以计算该问题域中任何命题的概率，但对复杂领域，需要找到一种方法来降低联合概率的数目

作业

- 13.8
- 13.15