形式语言与自动机理论

Formal Languages and Automata Theory

2024年9月

同济大学
TONGJI UNIVERSITY

1.1 课程介绍

课程性质：

- **专业基础；**
- **计算理论：** 研究理论计算机的科学。理论计算机研究计算机的理论模型，研究计算机的本征，把计算机看成一个数学系统进行研究。

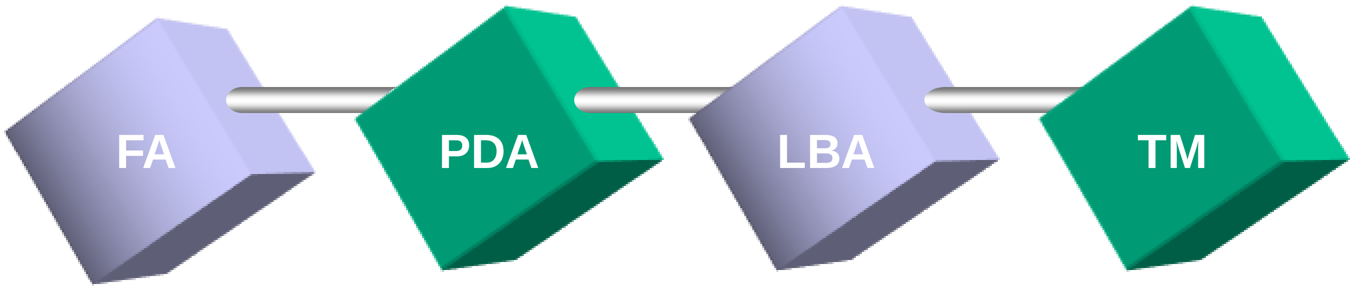
研究内容：

- 自动机与语言（Automata Theory）
- 可计算性（Computability Theory）
- 计算复杂性（Complexity Theory）

计算理论的发展简史

- 1900，David Hilbert，23个数学问题数学完备吗？数学一致吗？数学可判定吗？
- 1931，哥德尔不完备定理
- 1936，Alan Turing，On Computable Numbers，with an Application to the Entscheidungsproblem 中提出“图灵机”的设想，美国数学家Alonzo Church提出 λ 演算，Church- Turing 论题，通用图灵机
- 1937，Atanasoff-Berry Computer，简称ABC计算机，不可编程，且非图灵完全。
- 1946，ENIAC（Electronic Numerical Integrator And Computer），世界上第一台通用计算机，图灵完备的电子计算机，能够编程。
- 1951，EDVAC（Electronic Discrete Variable Automatic Computer），与ENIAC不同，EDVAC采用二进制，而且是一台冯·诺伊曼结构的计算机。
- 1950， Chomsky文法体系
- 1960s，计算复杂性
- 1970s，NP完全问题（千禧年大奖难题，Millennium Prize Problems），P vs NP，

自动机理论（Automata Theory）



•正则语言（RL），3型语言

前后文无关语言（CFL），2型语言

前后文有关语言（CSL），1型语言

递归可枚举（r.e.），0型语言

FA：有穷自动机，PDA：下推自动机，LBA：线性有界自动机，TM：图灵机，它们都是**计算模型**。

图灵与图灵机（Turing Machine）

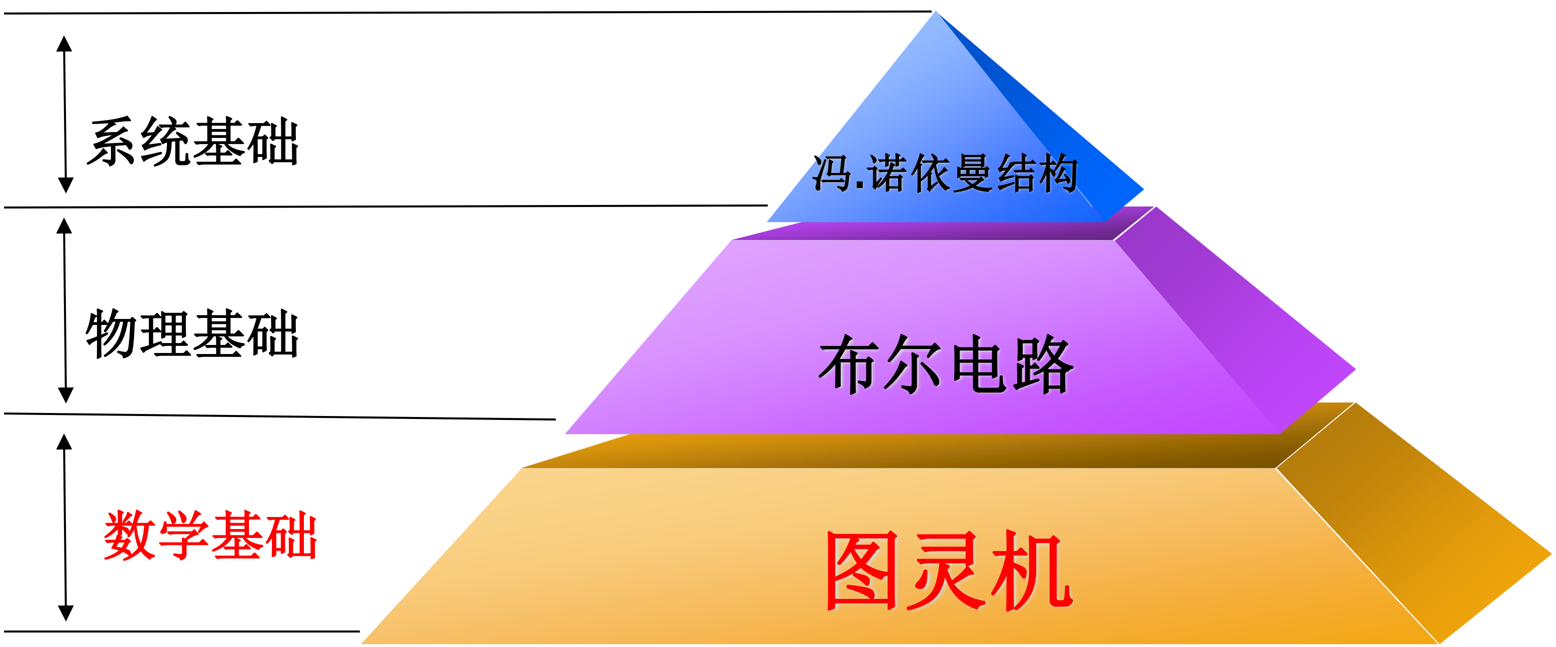
- On computable Number, 1936
  - 这篇奠基之作其实是回答德国大数学家David Hilbert在世界数学家大会上提出的“23个数学难题”中的一个问题：“**是否所有的数学问题在原则上都是可解的**”
  - 图灵认为“有些数学问题是不可解的”
  - **图灵机**只是在这篇论文的一个**脚注**中顺便提出的

Endnotes

8. It is most natural to construct first a choice machine (§2) to do this. But it then easy to construct the required automatic machine. We can suppose that the choices are always choices between two possibilities 0 and 1. Each proof will then be determined by a sequence of choices i1, i2, …, in (i1 = 0 or 1, i2 = 0 or 1, …, in = 0 or 1), and hence the number 2n + i1 25+1 + i2 25-2+...+ in, completely determines the proof. The automatic machine carries out successively proof 1, proof 2, proof 3, ….

图灵机与计算机的关系

■ 图灵机概念的引入



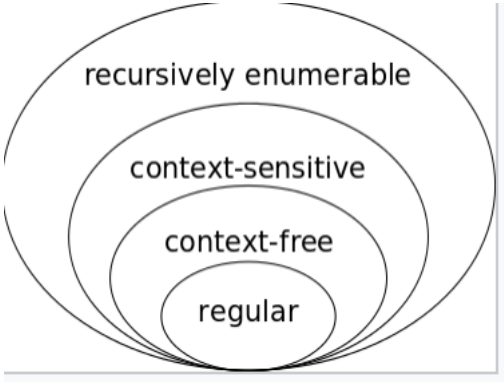
电子计算机的三大基础

今天所有的计算机，都是图灵机的实例，都建立在冯.诺依曼结构之上，都由若干电子器件组合而成的。

形式语言（Formal Language）

Avram Noam Chomsky (born December 7, 1928) is an American linguist, philosopher, cognitive scientist, historian, social critic, and political activist. Sometimes described as "the father of modern linguistics", Chomsky is also a major figure in analytic philosophy, and one of the founders of the field of cognitive science.

研究语言语法的数学和计算机科学分支叫做形式语言理论，不致力于语言的语义研究。



乔姆斯基文法体系

- 1956年， Chomsky，从语言产生的角度，定义了语言与文法；
- 1951-1956，Kleene提出了有穷状态自动机（FA），从语言识别的角度，定义了语言；
- 1959年，Chomsky证明了语言与自动机的等价性，形式语言从此诞生；

2. Computability Theory

In computability theory, the classification of problems is by those that are solvable and those that are not. （solvable means computable）

3. Complexity Theory

In complexity theory, the objective is to classify problems as easy and hard ones.

课程特点与应用

课程特点：

- 高度抽象和形式化---计算思维能力
- **不易理解，难于联系实际**

典型应用：

- 程序语言与设计
- 编译理论与技术
- 模式识别（Pattern Recognition）
- 自然语言理解（Nature Language Process）
- 现在密码学

形式语言与自动机理论不仅是计算机学科重要的理论基础，有着广泛的应用，而且非常有利于培养计算机学科人员的计算思维能力：问题的形式化和模型化描述、抽象思维能力、逻辑思维能力。

课程考核与参考教材

课程考核：

1. 平时作业占30分，共5次作业；
2. 出勤占10分，随机点名5次次；
3. 期末考试占60分，采用闭卷形式；

设计软件：

- JFLAP：http://www.jflap.org
- **大部分作业，要求使用JFLAP完成**

参考教材：

1. （美）霍普克罗夫特等著，孙家骕译,自动机理论、语言和计算导论，北京：机械工业出版社，2022
2. Michael Sipser, Introduction to the Theory of Computation(Third Edition), Cengage Learning, 2013

1.2 Mathematical Notions and Terminology

集合

- Union: $A \cup B$
- Intersection: $A \cap B$
- Complement: $\overline{A}$
- Cartesian Product: $A \times B$
- Power set: P (A) 或 2^A 幂集、超集

1.2 Mathematical Notions and Terminology

$\Sigma = \{0,1\}$ 字母表

$\Sigma \times \Sigma = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

Example: $A = \{x,y\}$

$P(A) = \{ S \mid S \subseteq A \}$ 一切**子集**的集合

$= \{ \{\}, \{x\}, \{y\}, \{x,y\} \}$ 其中 $\{\} = \Phi$

设 $A=\{x_1, x_2, \ldots, X_n\}$,

子集编码 0,0,0.,0,0

0,0,0.,0,1

0,0,0.,1,0

1,1,1… 1 共 2^n 个

Note the different sizes:

$|P(A)| = 2^{|A|}$ 个数是幂，名称的来源

$|A \times A| = |A|^2$

1.3 Strings and Languages

定义 1. 字母表： 符号的有穷非空集合，用 Σ 表示。

例 1.1 $\Sigma = \{a, b, ..., z\}$， $\Sigma = \{0, 1\}$ 。

定义 2. 字符串： 从某个字母表中选择的符号的有穷序列。

例 1.2 1101001 是从字母表 $\Sigma = \{0, 1\}$ 中选出的串。

注:空串记为 ε，在软件JFLAG中，记作λ。

定义 3. 串的长度： 串中符号的位数。串 w 的长度记为 $|w|$。

例 1.3 $|010|=3$, $|\varepsilon|=0$.

定义 4. 字母表的幂： 如果 Σ 是一个字母表，则用指数记号来表示这个字母表某个长度的所有串的集合。即 Σ^k 是长度为 k 的串的集合，这些串的每个符号都属 Σ。

例 1.4 Σ = {0,1}, 则

Σ^1 = {0,1},

Σ^2 = {00,01,10,11},

Σ^3 = {000,001,010,011,100,101,110,111}

注意：

Σ和Σ^1 的区别： Σ 是字母表，其元素是符号; Σ^1 是串的集合，其元素是串 0 和 1，每个串的长度为 1。

1.3 Strings and Languages

定义5. 克林闭包（Kleene Closure)

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

约定 $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$, ε 是长度为 0 的唯一的串。$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots$, 即字母表 Σ 上 所有串的集合。

定义6. 正闭包（Positive Closure)

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i$$

显然：$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^+$

1.3 Strings and Languages

定义 7. 语言： 若 Σ 是一个字母表，$L \subset \Sigma^*$，则 L 是 Σ 上的语言。（语言就是字符串的集合）

例1.5

$L = \{ x \mid x \text{ is a bit string with two zeros} \}$

$L = \{ a^n b^n \mid n \in N \}$

$L = \{1^n \mid n \text{ is prime}\}$ 每个字符串是素数个1连接而成的

语言连接 != 笛卡尔积

For example, let $A = \{0,00\}$ then

$A \bullet A = \{ 00, 000, 0000 \}$ with $|A \bullet A|=3$, 连接 一维

$A \times A = \{ (0,0), (0,00), (00,0), (00,00) \}$ 叉乘 二维

with $|A \times A|=4$

1.4 Types of Proof

- **Definitions, Theorems, and Proofs**
- **Type of Proof**
  - ■ Proof by Construction（构造法）
  - ■ Proof by contradiction（反证法）
  - ■ Proof by Induction(归纳法：整数归纳和结构归纳)
    - Basis:
    - Induction Step
    - Results
  - ■ Deduction Proof（演绎法）

1.4 举例：正则语言的泵引论

Show $E=\{0^i1^j \mid i > j\}$ is not Regular Language. *证明思路总结*

Step 1: 选择反证法；

Step 2：构造 string $s = 0^{p+1}1^p$;   利用泵长度p

Step 3：发现矛盾

s=xyz，由泵引论3）$|xy|\le p$知：y=0s， 令 $y=0^k$, k>0； y不可能包含1

$xy^iz = 0^{p-k}0^{k*i}1^p = 0^{p+k(i-1)}1^p$，当i=2时，显然 $xyyz \in E$; 可惜没矛盾，只好换一条路走

Pumping Down：The pumping lemma states that $xy^iz \in E$ even if when i=0, so lets consider the string $xy^0z=xz$.

结果怎么样呢？

$xz=0^p1^p \notin E$; 矛盾出现

Step 4：得出结论。

1.5 思考与总结

1. 集合Φ^0、$\{\varepsilon\}^0$、Φ^*、$\{\varepsilon\}^*$分别等于什么？

2. Σ^*一定不等于Σ^+吗？

3. $\varepsilon.A = A.\varepsilon = A$?

4. $\Phi.A = A.\Phi = \Phi$?

5. $\Sigma^* 1 \Sigma^* = \{ \omega |$ $\}$.

6. $(\Sigma\Sigma)^* = \{ \omega |$ $\}$.