武汉大学 2010－2011 学年第一学期

《离散数学》(36 学时) 复习题

姓名______ 学号______

装 订 线

一、选择题

1. 下列公式为永真公式的是 【 】

   (A) $P \to (P \vee Q)$　(B) $(P \vee Q) \to R$

   (C) $(P \vee Q) \to (P \wedge Q)$　(D) $(P \wedge Q) \leftrightarrow R$

2. 图 $K_{3,3}$ 是 【 】

   (A) 欧拉图　(B) 平面图　(C) 完全图　(D) 汉密尔顿图

3. 设 $\mathbb{Q}$ 为有理数集, $\langle \mathbb{Q}, \times \rangle$ (其中 $\times$ 为普通乘法) 不能构成 【 】

   (A) 独异点　(B) 群　(C) 半群　(D) 交换半群

4. 下列命题不正确的是 【 】

   (A) 任何图中奇数度顶点的个数均为偶数;　(B) Petersen 图不是汉密尔顿图;

   (C) 图 $K_{3,3}$ 是汉密尔顿图;　(D) Petersen 图是平面图.

5. 设 $V = \langle \mathbb{N}, * \rangle$, 其中 $\mathbb{N}$ 为自然数的集合, $*$ 定义为: $\forall x, y \in \mathbb{N}$ 有 $x * y = x + y - xy$. 下面四个命题中为真的是 【 】

   (A) V 是代数系统　(B) V 是半群

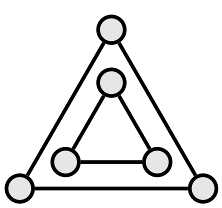
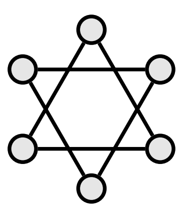
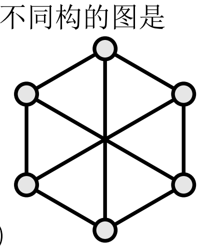
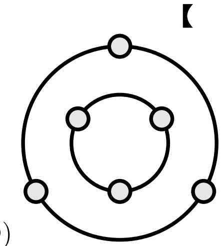
   (C) V 是群　(D) V 不是代数系统

6. 以下命题中不正确的结论是 【 】

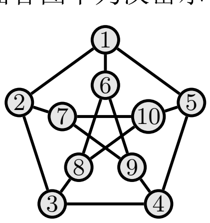
   (A) 素数阶群必为循环群;　(B) Abel 群必为循环群;

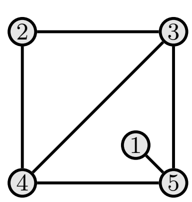
   (C) 循环群必为 Abel 群;　(D) 4 阶群必为 Abel 群.

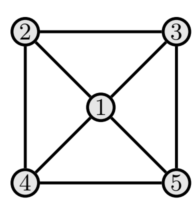
7. 下列四个图中, 有三个图是同构的, 与这三个图不同构的图是 【 】

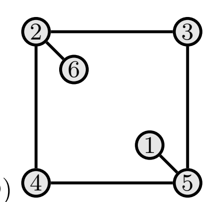
   (A) 
   (B) 
   (C) 
   (D) 

8. 下面各图中为汉密尔顿图的是 【 】

   (A) 

   (B) 

   (C) 

   (D) 

二、填空题

9. 设 $A=\{a,b,c\}$, R 为等价关系: $R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$, 则 A 关于 R 的商集 $A/R=$____.

10. 如果有向图 D 是欧拉图, 则 D 一定是强连通的. 此命题的真值为________.

11. 集合 $\mathscr{P}(\varnothing)$ 的幂集为____________________.

12. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$, A 上的等价关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}\cup I_A$, 则对应于关系 R 的集合 A 的划分是________.

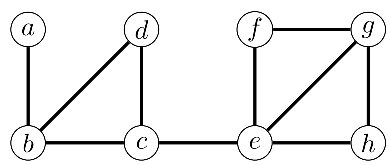
13. 在整数集合 $\mathbb{Z}$ 上定义二元运算 $*$: $a*b=a+b+1$. 其中 $+$ 是普通的加法. 则集合 $\mathbb{Z}$ 上关于运算 $*$ 的幺元(即单位元)是________.

14. 假定一个图有 8 个结点, 每个结点的度数都是 4. 则这个平面图有________条边.

15. 具有 n 个结点的无向完全图 K_n 的结点度数的总和为________.

16. 在 6 个结点 12 条边的连通平面简单图中, 每个面由________条边围成.

17. 下图所示的图 G 的所有割点为____________, 所有割边为____________.



18. 若 P、Q 的真值为 0, R、S 的真值为 1, 则 $(\neg P\to Q)\to(R\wedge S)$ 的真值是____.

19. 公式 $\neg(P\vee\neg Q)\wedge(S\to R)$ 的合取范式是____________________.

三、计算解答题

20. 已知一个环 $\langle\{a,b,c,d\},+,*\rangle$, 它的运算由下表给出:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

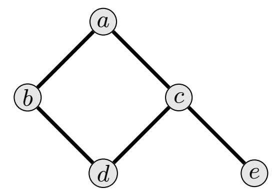
$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	c

它是一个交换环吗? 它有乘法幺元吗? 这个环中的零元是什么? 并求出每个元素的加法逆元.

21. 将公式 $G=\big((P\wedge Q)\vee\neg R\big)\to P$ 化为析取范式.

22. 设集合 $A=\{a,\,b,\,c,\,d,\,e\}$, 半序关系 R 的哈斯图如图所示. 若 A 的子集 $B=\{c,\,d,\,e\}$, 求:

(1) 用列举法写出半序关系 R 的集合表达式;
(2) 写出集合 B 的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最小上界、最大下界.
(用一张表表示, 不存在用 $\varnothing$ 表示)



23. 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\big\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\big\}$, 求 R 的自反、对称和传递闭包.

24. 化简集合表达式: $\big((A\cap B)\cup A\big)\oplus\big((B\cap\sim B)\oplus A\oplus(B\cup\sim B)\big)$.

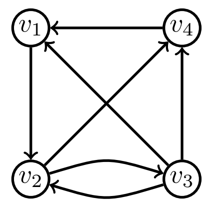
25. 已知 $A=\{a,b,c,d\}$, $R^{-1}=\big\{\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\big\}$, 求 $M(R)$, 及 R 的传递闭包 $t(R)$.

26. 已知有向图 D 的顶点集合 $V(D)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, 其邻接矩阵如下:

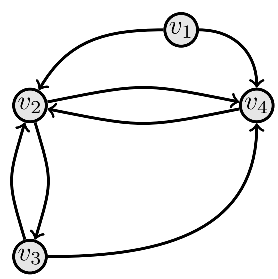
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求从 v_1 到 v_3 长度小于等于 3 的通路个数.

27. 求下图 G 的邻接矩阵, 并用 Warshall 算法求可达性矩阵.



28. 求如下有向图的邻接矩阵 A, 指出从 v_3 到 v_2 且长度为 2 和 4 的路. 并计算 A^2, A^4 来验证.



29. 设 $S\neq\varnothing$, 在 S 的幂集 $\mathscr{P}(S)$ 上定义对称差运算 $\oplus$:

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\big\{x\ \big|\ x\in A\,\overline{\vee}\,x\in B\big\},\quad A,B\in\mathscr{P}(S)$$

试问在 $\mathscr{P}(S)$ 上对于运算 $\oplus$ 是否有幺元? 是否有零元? $\mathscr{P}(S)$ 中的元素关于 $\oplus$ 是否有逆元? 如果有请求出.

30. 给定右图 G.

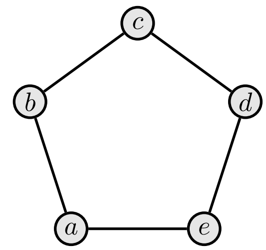
(i) 画出图 G 相对于完全图的补图 $\overline{G}$;

(ii) 给出 $\overline{G}$ 的邻接矩阵.

(iii) 说明 $\overline{G}$ 是否是欧拉图? 为什么?

(iv) 说明 $\overline{G}$ 是否是汉密尔顿图? 为什么?

(v) G 与 $\overline{G}$ 是否同构? 为什么?



31. 已知 $R = \{\langle x, y\rangle \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \equiv y \mod 3\}$, 证明 R 为等价关系, 并求 8 关于 R 的等价类.

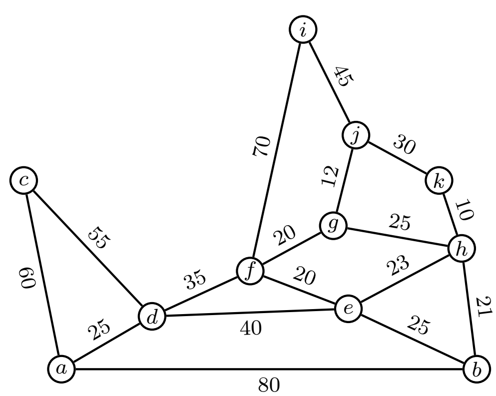
32. 设 G 刚好包含 $x^3 = 1$ 的三个根:
$$1, \qquad \varepsilon_1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$
对于普通乘法来说, G 构成一个群. 为什么? 是循环群吗? 请说明理由.

33. 下面两个矩阵分别是图 G_1, G_2 的邻接矩阵. 画出图 G_1, G_2, 并判断它们是否同构.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

四、证明题

34. 设 $\mathbb{Z}$ 为整数集合, k 为正整数, R 是同余模 k 的关系, 即
$$R = \big\{\langle x, y\rangle \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \pmod k\big\}.$$
试证: (1) R 是等价关系; (2) 全体等价类所构成的集合是有限循环群, 这里规定加法运算为 $[a]_R \oplus [b]_R \triangleq [a+b]_R$.

35. 下图中的连线表示的是尚未铺设的公路, 每条边上的权值代表连接两个小镇的公路长度. 问应该选择铺设哪些公路, 使得任意两个的小镇之间都有公路相通, 而且使得铺设公路的总长度最小?



36. 对下面的论述构造一个证明:

"甲、乙、丙、丁四人参加拳击比赛, 比赛结果只有胜负, 没有平局. 如果甲获胜, 则乙失败; 如果丙获胜, 则乙也获胜; 如果甲不获胜, 则丁不失败. 所以, 如果丙获胜, 则丁不失败."

37. 甲、乙、丙、丁四个人有且仅有两人参加围棋比赛. 关于谁参加比赛, 下列四种判断都是正确的: (1) 甲和乙只有一个人参加; (2) 丙参加, 则丁必参加; (3) 乙和丁至多有一人参加; (4) 丁不参加, 则甲也不会参加. 请推断是哪两个人参加比赛.

38. 设 T 是正则二叉树, 有 l 片树叶, i 个分枝点. 证明 T 的边数 $e = 2l - 2$.

39. 设 $V = \langle \mathscr{P}(B), \cap \rangle$ 是代数系统, B 是集合, 试判断 V 是否为半群、独异点、群? 为什么? 并求 $\mathscr{P}(B)$ 中的任意元素 x 的 n 次幂($n \in \mathbb{N}$).

40. 设 G 是群, $a, b \in G$, 且 $(ab)^2 = a^2b^2$, 证明 $ab = ba$.

41. "若 $a \cdot b = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$", 这条普通的计算规则, 在一般的环里并不一定成立. 设 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是环, θ 是零元, 如果存在 $a, b \in A$, 且 $a \neq \theta, b \neq \theta$, 使得 $a \cdot b = \theta$, 则称 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是含零因子环, a 和 b 称为零因子. 试给出一个含零因子环的例子, 并证明: 一个环 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 没有零因子, 当且仅当乘法满足消去律, 即对于 $c \cdot a = c \cdot b$ 且 $c \neq \theta$, 必有 $a = b$.

参考答案

1. A

2. D

3. B

4. D

5. A

6. B

7. C

8. C

9. $A/R = \big\{\{a\}, \{b, c\}\big\}$.

10. **T** (或 1)

11. $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\varnothing)\big) = \big\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\big\}$.

12. $\big\{\{a, b\}, \{c, d\}\big\}$.

13. -1

14. 16.

15. $n(n-1)$.

16. 3.

17. 割点: b, c, e. 割边: e_{ab}, e_{ce}

18. 1.

19. $\neg P \wedge Q \wedge (\neg S \vee R)$.

20. (i) 因为 $*$ 的运算表是对称的, 所以环 $\big\langle\{a, b, c, d\}, +, *\big\rangle$ 是交换环;

  (ii) 没有乘法幺元;

  (iii) 环中的零元是 a;

(iv) 由 $+$ 运算表可见: a 和 c 以自身为加法逆元; b 和 d 互为加法逆元.

21.

$$
\begin{aligned}
&\big((P\wedge Q)\vee\neg R\big)\to P\\
\Leftrightarrow&\neg\big((P\wedge Q)\vee\neg R\big)\vee P\\
\Leftrightarrow&\big(\neg(P\wedge Q)\wedge\neg\neg R\big)\vee P\\
\Leftrightarrow&\big((\neg P\vee\neg Q)\wedge R\big)\vee P\\
\Leftrightarrow&\big((\neg P\wedge R)\vee(\neg Q\wedge R)\big)\vee P\\
\Leftrightarrow&(\neg P\wedge R)\vee(\neg Q\wedge R)\vee P
\end{aligned}
$$

22. (1) $R=I_A\cup\{\langle d,\,b\rangle,\,\langle d,\,c\rangle,\,\langle d,\,a\rangle,\,\langle b,\,a\rangle,\,\langle c,\,a\rangle,\,\langle e,\,c\rangle,\,\langle e,\,a\rangle\}$

(2) 集合 B 的极大元: c; 极小元: d、e; 最大元: c; 最小元: 无; 上界: c、a; 最小上界: c; 下界: 无; 最大下界: 无.

23. $M_r=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $M_s=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $M_t=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

24.

$$
\begin{aligned}
&\big((A\cap B)\cup A\big)\oplus\big((B\cap\sim B)\oplus A\oplus(B\cup\sim B)\big)\\
=&A\oplus\varnothing\oplus A\oplus E\\
=&A\oplus A\oplus E\\
=&\varnothing\oplus E\\
=&E
\end{aligned}
$$

(E 表示全集)

25.

$$
M(R)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},
$$

$t(R)=\{\langle a,\,b\rangle,\,\langle b,\,c\rangle,\,\langle a,\,c\rangle\}$.

26.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 4 & 11 \\ 11 & 13 & 6 & 14 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 15 & 27 & 9 & 26 \end{pmatrix}$$

从 v_1 到 v_3 长度小于等于 3 的通路个数为

$$a_{13}^{(1)} + a_{13}^{(2)} + a_{13}^{(3)} = 0 + 1 + 4 = 5.$$

27. 图 G 的邻接矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

用 Warshall 算法计算: 逐列进行. 在第 i 列中若有 $a_{ji} = 1$, 则把第 i 行叠加到第 j 行.

$$M := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{i=1} := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{i=2}$$

$$:= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{i=3} := \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{i=4} = P.$$

28.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

29. $\varnothing$ 是幺元. 因为对任意 $A \in \mathscr{P}(S)$,

$$A \oplus \varnothing = (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A)$$

$$= A \cup \varnothing$$

$$= A$$

任意 $A \in \mathscr{P}(S)$, 其逆元就是 A 自身. 因为:

$$\begin{aligned} A \oplus A &= (A - A) \cup (A - A) \\ &= \varnothing \cup \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

30. (略)

31. 证明 R 是等价关系

(1) $\forall x \in \mathbb{N}, 3|(x-x) \Rightarrow x \equiv x \mod 3 \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$.

所以, R 具有自反性.

(2) $\forall x, y \in \mathbb{N}$, 若 $\langle x, y\rangle \in R$, 则$x \equiv y(\mod 3) \Rightarrow 3|(x-y) \Rightarrow 3|(y-x) \Rightarrow y \equiv x(\mod 3) \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$. 所以, R 具有对称性.

(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, 若 $\langle x, y\rangle \in R$, 且 $\langle y, z\rangle \in R$. 则$x \equiv y(\mod 3)$ 且 $y \equiv z(\mod 3) \Rightarrow 3|(x-y)$ 且 $3|(y-z) \Rightarrow 3|((x-y)+(y-z)) \Rightarrow 3|(x-z) \Rightarrow x \equiv z(\mod 3) \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$.

所以, R 具有传递性.

综上所述, R 是等价关系.

8 关于 R 的等价类 $[8] = \{y \mid y = 3x + 2, x \in \mathbb{N}\}$.

32. (1) $\langle G, \times\rangle$ 是一个群:

(i) 运算封闭. 注意, 其中

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1 + (-3) - 2\sqrt{-3}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \varepsilon_2.$$

(ii) 满足结合律.

(iii) 幺元是 1.

(iv) 逆元存在: ε_1 与 ε_2 互逆; 幺元 1 的逆元是自己.

(2) 是循环群: ε_1 与 ε_2 都是生成元.

33. 图 G_1, G_2 不同构.

34. 设任意 $a, b, c \in \mathbb{Z}$,

(i) 因 $(a-a)/k = 0$, 故 $\langle a, a\rangle \in R$, 即 R 是自反的.

(ii) 若 $\langle a,b\rangle \in R$, 可令 $a-b=kt$ (t 为整数), 则 $b-a=-kt$, 所以

$$b \equiv a \pmod{k}.$$

(iii) 若 $\langle a,b\rangle \in R$, $\langle b,c\rangle \in R$, 可令 $a-b=kt$, $b-c=ks$ (其中 t, s 为整数), 那么 $a-c=(a-b)+(b-c)=k(t+s)$, 即

$$a \equiv c \pmod{k}.$$

故 $\langle a,c\rangle \in R$.

综上所述, R 是等价关系.

记 $G=\big\{[0], [1], [2], \cdots, [n-1]\big\}$, 则 $\langle G, \oplus\rangle$ 是一个群. 易见 G 的幺元 $e=[0]$, 且 $[1]$ 是 G 的一个生成元.

任意 $[i] \in G$, 有

$$[i]=\underbrace{[1]\oplus[1]\oplus\cdots\oplus[1]}_{i} \triangleq [1]^i,$$

所以,

$$G=\big\{[1], [1]^2, [1]^3, \cdots, [1]^{n-1}, [1]^n=[0]=e\big\}.$$

即证等价类所构成的集合是有限循环群.

35. 用 Kruskal 算法求图的最小生成树. 选择的步骤可以用下面的表格表示:

步骤	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总权值
边	$\{h,k\}$	$\{g,j\}$	$\{f,g\}$	$\{e,f\}$	$\{b,h\}$	$\{e,h\}$	$\{a,d\}$	$\{d,f\}$	$\{i,j\}$	$\{c,d\}$	
权值	10	12	20	20	21	23	25	35	45	55	266

36. 设 A: 甲获胜. B: 乙获胜. C: 丙获胜. D: 丁获胜. 则问题归结为证:

$$A\to\neg B,\, C\to B,\, \neg A\to D \Longrightarrow C\to D.$$

列表证明如下:

(1)	$A\to\neg B$	P
(2)	$B\to\neg A$	T(1) E
(3)	$\neg A\to D$	P
(4)	$B\to D$	T(2),(3) I
(5)	$C\to B$	P
(6)	$C\to D$	T(4),(5) I

37. 设 A: 甲参加. B: 乙参加. C: 丙参加. D: 丁参加. 则题设的四个条件为: (1) $(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$; (2) $C\to D$; (3) $\neg B\vee\neg D$; (4) $\neg D\vee\neg A$.

已知有两人参加比赛, 则对 A, B, C, D 赋值, 且其中两个为 1, 两个为 0, 能使得题设条件真值都为 1 的赋值, 即是所求的结果.

所有可能的赋值一共有 6 种: 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011. 其中, 赋值 1100, 0011 使 $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ 真值为 0; 赋值 1010 使 $\neg D \vee \neg A$ 真值为 0; 0110 使 $C \to D$; 真值为 0; 0101 使 $\neg B \vee \neg D$ 真值为 0; 只有赋值 1001 使四个条件的真值都为 1.

所以, 可以推定是 A, D 两人参加了比赛.

38. 设 T 有 m 条边, 可得:

$$l + 3i - 1 = 2e \tag{1}$$

根据树的性质可得:

$$e = l + i - 1 \tag{2}$$

解由 (1), (2) 构成的方程组得: $e = 2l - 2$.

故结论成立.

39. 代数系统 $V = \langle \mathscr{P}(B), \cap \rangle$ 是半群, 因为集合的 $\cap$ 运算满足结合律.

代数系统 $V = \langle \mathscr{P}(B), \cap \rangle$ 是独异点, 因为代数系统 $V = \langle \mathscr{P}(B), \cap \rangle$ 是半群, 且 $\forall x \in \mathscr{P}(B)$, 均有 $x \subseteq B \Rightarrow x \cap B = B \cap x = x$. 因此, B 是幺元.

代数系统 $V = \langle \mathscr{P}(B), \cap \rangle$ 不是群, 因为: 如果 $x \subset B$, 则不存在 $y \in \mathscr{P}(B)$ 使得 $x \cap y = B$

$$x^n = \overbrace{x \cap x \cap \cdots \cap x}^{n} = x$$

40. 因为群满足消去律, 所以

$(ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow abab = aabb \Rightarrow bab = abb \Rightarrow ba = ab$

41. 解: 一个数域 F 上的一切 $n \times n$ 矩阵对于矩阵的加法和乘法来说, 构成一个环. 这个环是含零因子环.

设 $c \neq \theta$ 且 $c \cdot a = c \cdot b$, 则

$$\begin{aligned} c \cdot (a - b) &= c \cdot a - c \cdot b = c \cdot a + (-c \cdot b) \\ &= c \cdot a + (-c \cdot a) \\ &= \theta. \end{aligned}$$

若环无零因子, 由上式及 $c \neq \theta$, 得

$$a - b = \theta,$$

两边加 b, 得 $a = b$. 即证消去律成立.

反之, 设 $a \neq \theta$, $a \cdot b = \theta$, 因 $a \cdot \theta = \theta$, 得

$$a \cdot b = a \cdot \theta,$$

若消去律成立, 得 $b=\theta$. 这说明 $\langle A, +, \cdot\rangle$ 无零因子.