

武汉大学计算机学院
2009-2010学年第二学期2008级
《离散数学》期末考试试卷 (A)

学号: _____ 姓名: _____ 专业: _____ 成绩: _____

(注: ①考试时间为120分钟; ②所有的解答必须写在答题纸上, 并注明题号。)

一、 试求下述命题公式 G 的主析取和主合取范式: (10分)

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$$

二、 写出下列结论的证明序列: (20分, 10+10)

(1) 前提: $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \neg R \wedge S$.

结论: $\neg P$;

(2) 前提: $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x(Q(x) \vee R(x)), \exists x \neg R(x)$.

结论: $\exists x \neg P(x)$.

三、 设有函数 $f: A \rightarrow B$, 定义函数 $g: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), \forall S \in \mathcal{P}(B)$
(注: $\mathcal{P}(A)$ 为集合 A 的幂集合), 有 (20分, 10+5+5)

$$g(S) = \{a \mid a \in A \wedge f(a) \in S\} \text{ (即 } f^{-1}(S)\text{)}$$

(1) 试证明, 如果 f 是单射, 则 $\forall X \subseteq A, f^{-1}(f(X)) = X$;

(2) 试证明, 当 f 是单射时, g 是满射;

(3) 试以集合 $A = \{a, b\}$ 到 $B = \{c, d\}$ 上的函数为例说明当 f 不是单射时, g 不是是满射.

四、 设 A 为集合, 集合 P 是集合 A 上所有的划分组成的集合, 即 $P = \{S \mid S \text{ 是 } A \text{ 的划分}\}$, 定义关系 $R \in P \times P, \forall S, T \in P, \langle S, T \rangle \in R$ iff 若 $\forall u \in S$, 则存在 $v \in T$, 使得 $u \subseteq v$. 如 $A = \{a, b, c\}$, 设 $S = \{\{a\}, \{b, c\}\}$, $T = \{\{a, b, c\}\}$, 则 $\langle S, T \rangle \in R$: (15分, 5+5+5)

(1) 设 $A = \{a, b, c\}$, 试用枚举法表示集合 A 上所有的划分组成的集合 P ;

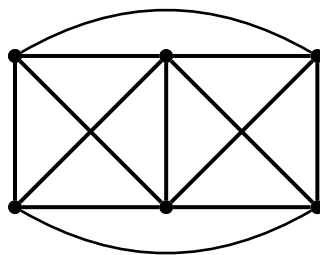
(2) 证明: R 是偏序关系;

(3) 试用性质法表示集合 P 的最大元素和最小元素.

五、 设 $\langle G, *, e \rangle$ 是群， H, K 是其子群，在 G 上定义二元关系 $R: \forall a, b \in G, aRb$ iff 存在 $h \in H, k \in K$ ，使得 $b = h * a * k$. 证明： (20分，每小题5分)

- (1) R 是 G 上的等价关系;
- (2) 试证明 $\forall h, h' \in H, k, k' \in K, hRh', kRk'$;
- (3) 试证明 $\forall a, b \in H \cup K, aRb$;
- (4) 若 $|H| = m, |K| = n, |G| = mn, m$ 与 n 互素， $[a]_R$ 是 R 的某个等价类，且 $[a]_R$ 是 G 的一个子群，则 $R = G \times G$.

六、 设判别下面的简单无向图是否为平面图： (8分)



七、 设无向图 $G(n, m)$ 是树，其结点最大度数为 $k(k \geq 2)$ ，证明： G 中至少有 k 片树叶. (7分)