向量组的线性相关性——向量的线性组合与线性表示

知识点巩固练习

1. 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $A=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性表示⇔ $R(A)=R(B)$ $(B=(a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \beta)$（用秩的语言）.
2. 向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 可由向量组 $A=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性表示⇔ $R(A)=R(A,B)$（用秩的语言）.
3. 向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 可由向量组 $A=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性表示⇒ $R(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)$ $\le$ $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$.
4. 向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 与向量组 $A=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 等价⇔ $R(A)=R(B)=R(A,B)$（用秩的语言）.

练习题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}$, 求向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

$$\alpha = \alpha_3-\alpha_1-2\alpha_2$$

$$\therefore \alpha=\begin{pmatrix}9\\-6\\0\end{pmatrix}$$

2. 已知向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, B: $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$.

证明：向量组 A 与向量组 B 等价.

证：$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=2$

$B=\begin{pmatrix}-1&1&3\\0&2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(B)=2$

$\cancel{R}$ $(A,B)=\begin{pmatrix}0&1&-1&1&3\\1&1&0&2&2\\1&0&1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&2&2\\0&-1&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(A,B)=\cancel{3}\ 2$

$\therefore R(A)=R(B)=R(A,B)$

$\therefore$ 向量组A与向量组B等价

3. 已知向量组

A: $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2,3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,0,1)^T$;

B: $\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,1,2)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,-2,1,1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(4,4,1,3)^T$.

证明：组 B 能由组 A 线性表示，但组 A 不能由组 B 线性表示.

证：$A=\begin{pmatrix}0&3&2\\1&0&3\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-6\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=3$

$B=\begin{pmatrix}2&0&4\\1&-2&4\\1&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-3&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(B)=2$

$(A,B)=\begin{pmatrix}0&3&2&2&0&4\\1&0&3&1&-2&4\\2&1&0&1&1&1\\3&2&1&2&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&0&4&1&-3&5\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(A,B)=3$

$\because R(A)=R(A,B)$

$\therefore$ 组 B 能由组 A 线性表示

$R(A,B)=R(B,A)$

$\because R(B)<R(B,A)$

$\therefore$ 组 A 不能由组 B 线性表示

4. 设有向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^T$ 及向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,b,-1)^T$，问参数 a, b 取何值时：

(1) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 A 线性表示；

(2) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式唯一；

(3) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式不唯一，并求一般表示式.

$A=\begin{pmatrix}a&-2&-1\\2&1&1\\10&5&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-2-\frac{a}{2}&-1-\frac{a}{2}\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$(A,\beta)=\begin{pmatrix}a&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}10&5&4&-1\\0&-2-\frac{a}{2}&-1-\frac{2}{5}a&1+\frac{a}{10}\\0&0&\frac{1}{5}&b+\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

$R(A)<R(A,\beta)\Rightarrow$ 不能

$\therefore\ a=-4,\ b\neq 0$

$a\neq -4$

$a=-4$ 且 $b=0$

一般表示式为 $\beta=(-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2})\alpha_1+c\alpha_2+\alpha_3$

c 为任意常数

思考题

如何从线性方程组的角度来看待“向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 可由向量组 $A=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性表示”？

$AX=B$

该方程有解

向量组的线性相关性——向量组的线性相关性

知识点巩固练习

1. 向量组 $A=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性相关 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ ___<___ n；线性无关 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ ___=___ n.
2. 若向量组 $A=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性无关，向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}\}$ 线性相关，则 向量β必能由向量组A线性表示.且表示式是唯一的
3. $n+1$ 个 n 维向量所形成的向量组 一定线性相关
4. 若向量组 $A=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 线性无关，则向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 一定线性无关.

练习题

1. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关：

(1) $(-1,3,1)^T$, $(2,1,0)^T$, $(1,4,1)^T$;

$$令A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&1&4\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore R(A)=2<3$

$\therefore$ 向量组线性相关

(2) $(2,3,0)^T$, $(1,4,0)^T$, $(0,0,2)^T$.

$$令A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&0\\0&\frac{5}{2}&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$\therefore R(A)=3$

$\therefore$ 向量组线性无关

2. n 维 $(n>3)$ 向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关的充要条件是___D___.

A. $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 中任意两个向量线性无关

~~B.~~ $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 全是非零向量

~~C.~~ 存在 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$，使得 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}\}$ 线性相关

D. $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 中任何一个向量都不能由其余两个向量线性表示

3. 问 a 取什么值时，向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$

令 $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & -1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ 0 & a+1 & -(a+1)\\ 0 & 0 & (a+1)(2-a)\end{pmatrix}$

∵ 线性相关

∴ $R(A)<3$

∴ $a=2$ 或 $a=-1$

4. 设 $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$, $\cdots$, $\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$，且向量组 α_1, α_2, $\cdots$, α_r 线性无关，证明向量组 β_1, β_2, $\cdots$, β_r 线性无关.

证明：∵ $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$ $\cdots$ $\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$

∴ 可对向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_r$ 作初等列变换

得到 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$

令 $A=(\beta_1, \cdots \beta_r)$

$B=(\alpha_1, \cdots \alpha_r)$

∴ $R(A)=R(B)$

∵ B 线性无关

∴ $R(B)=r$

∴ $R(A)=r$

∴ A 线性无关

∴ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_r$ 线性无关

向量组的线性相关性——向量组的秩

知识点巩固练习

1. 向量组 $A=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 的子组 $A_0=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 若满足 向量组A_0：$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$线性无关及向量组A中任意r+1个向量线性相关，则 A_0 为 A 的最大线性无关组.
2. 矩阵的秩 等于 它的列(行)向量组的秩.
3. 若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，则 R_B $\leq$ R_A.

练习题

1. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ 的秩和一个最大线性无关组，并把其余向量由最大线性无关组线性表示.

$$令A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore R(A)=3$

将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为最大无关组

$$\therefore A\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{3}{2}\\0&-2&0&-6&1\\0&0&-2&2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-6\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\end{pmatrix}=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$$

$$\alpha_5=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2$$

2. 设向量组$(a, 3, 1)^T$, $(1, 2, 1)^T$, $(2, 3, 1)^T$, $(2, b, 3)^T$ 的

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & b-9 \\ 0 & 1-a & 2-a & 2-3a \end{pmatrix}$$

$\therefore R(A)=2$

$$\therefore \begin{cases} 2-a=0 \Rightarrow a=2 \\ \frac{b-9}{-1}=\frac{2-3a}{1-a} \Rightarrow b=5 \end{cases}$$

$\therefore a=2, b=5$

思考题

全体 n 维向量所构成的向量组记为$\mathbb{R}^n$，求$\mathbb{R}^n$的一个最大线性无关组及$\mathbb{R}^n$的秩.

n组单位坐标向量构成的向量组A：$e_1, e_2, \cdots e_n$

~~A线~~ $R(A)=n$. A线性无关

且任意$n+1$个向量都线性相关

$\therefore$向量组A是R^n的一个最大线性无关组

R^n的秩等于n