向量组的线性相关性——测验卷

1. 已知 $A_{m\times n}B_{n\times m}=E_m$，则下列说法正确的是 B .
   A. 矩阵 A 的行向量组必定线性相关
   B. 矩阵 A 的行向量组必定线性无关
   C. 矩阵 A 的列向量组必定线性相关
   D. 矩阵 A 的列向量组必定线性无关
2. 给定两个 n 维向量组 A: $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 B: $\beta_1,\cdots,\beta_n$，若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 和 $k_1,\cdots,k_n$ 使得 $(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_n+k_n)\alpha_n+(\lambda_1-k_1)\beta_1+\cdots+(\lambda_n-k_n)\beta_n=0$，下面说法正确的是 C .
   A. 向量组 A 与向量组 B 都线性相关
   B. 向量组 A 与向量组 B 都线性无关
   C. 向量组 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_n-\beta_n$ 线性相关
   D. 向量组 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_n-\beta_n$ 线性无关
3. 设向量组Ⅰ：$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则 D .
   A. 当 $r<s$ 时必有向量组Ⅱ线性相关
   B. 当 $r>s$ 时必有向量组Ⅱ线性相关
   C. 当 $r<s$ 时必有向量组Ⅰ线性相关
   D. 当 $r>s$ 时必有向量组Ⅰ线性相关
4. 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，且 $AB=O$，则 B 的秩的取值范围是 $[0,n-r]$.
5. 已知 $R(A)=r$，则 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 最多有 $n-r$ 个线性无关的解.
6. 判断题：
   (1) 六元线性方程组 $Ax=b$ 有解，且对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系由 4 个解向量组成，则 $R(A)=4$. （×）
   (2) 若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，则对任何一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_r$，都有 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r\neq 0$. （√）
7. 已知 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$R(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，证明：
   (1) α_1 能由 α_2,α_3 线性表示；
   (2) α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(1) $R(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$

$\therefore$ $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

$\therefore$ α_2,α_3 线性无关

$\therefore R(\alpha_2,\alpha_3)=2$

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_2,\alpha_3)$

$\therefore$ α_1 能由 α_2,α_3 线性表示

(2) $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\geq R(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3>R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$\therefore$ α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

8. 设 A 为 4×5 矩阵，B 为 5×5 矩阵，$R(A)=2$，B 的列向量为 $Ax=0$ 的解，求 $R(B)$...

记 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$

$\therefore A\beta_1=0$

$A\beta_2=0$

$\vdots$

$A\beta_5=0$

$\therefore A(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)=0$

$\therefore AB=0$

$\therefore R(A)+R(B)\leq5$

$\because R(A)=2$

$\therefore R(B)\leq3$

$\therefore R(B)_{max}=3$

9. 问 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+kx_3=1,\\2x_1+kx_2+8x_3=3\end{cases}$ 有解？并求出通解.

$$令 A=\begin{pmatrix}1&2&k&1\\2&k&8&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&k&1\\0&k-4&8-2k&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&k+4&\frac{k-6}{k-4}\\0&k-4&8-2k&1\end{pmatrix}$$

$\therefore k\neq4$

$\therefore$ x_3 为自由未知量

$$X=\begin{pmatrix}k-6\\k-4\\0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}-(k+4)\\2\\1\end{pmatrix}\quad(C 为任意常数)$$

α_s 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系 $\begin{cases} \beta_1 = k\alpha_1 + l\alpha_2, \\ \beta_2 = k\alpha_2 + l\alpha_3, \\ \vdots \\ \beta_s = k\alpha_s + l\alpha_1, \end{cases}$ 其中 k，l 为实数，问 k，l 满足什么关系时，β_1，β_2，…，β_s 也是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

$\because$ $A\beta_i \overset{i<s}{=} A(k\alpha_i + l\alpha_{i+1}) = 0$ $\quad A\beta_s \overset{i=s}{=} A(k\alpha_s + l\alpha_1) = 0$

且 $\beta_1, \cdots \beta_s$ 线性无关.

即 $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_s\beta_s = 0$. 当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = 0$ 时成立

即 $(a_1k + a_sl)\alpha_1 + \cdots + (a_{s-1}l + a_sk)\alpha_s = 0$

$$\therefore \begin{cases} a_1k + a_sl = 0 \\ \vdots \\ a_{s-1}l + a_sk = 0 \end{cases} \Rightarrow k^s + (-1)^{s+1}l^s \neq 0$$

11. 设 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 r，η_1，η_2，…，η_{n-r+1} 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解. 试证它的任一解可表示为 $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$，其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=$

$$A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1})$$

$$= k_1b + \cdots + k_{n-r+1}b$$

$$= b$$

将基础解系写为 $\eta_2-\eta_1, \eta_3-\eta_2, \cdots, \eta_{n-r+1}-\eta_{n-r}$

$$\therefore x = \eta_1 + k_2(\eta_2-\eta_1) + \cdots + k_{n-r+1}(\eta_{n-r+1}-\eta_{n-r})$$

$$= (1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1})\eta_1 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

$$\therefore x = k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

12. 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 x 满足 $A^3x=3Ax-A^2x$，且向量组 x，Ax，A^2x 线性无关.

(1) 记 $P=(x, Ax, A^2x)$，求 3 阶矩阵 B，使得 $AP=PB$；

(2) 求 $|A|$.

(1) $AP=(Ax, A^2x, A^3x)=(x, Ax, A^2x)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$

(2) $|AP|=|PB|$

$\therefore |A|=|B|=0$

13. 设 α_1，α_2，α_3 线性无关，β_1 可由 α_1，α_2，α_3 线性表出，β_2 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表出，求证：α_1，α_2，α_3，$\beta_1+\beta_2$ 也线性无关.

证：假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+\beta_2$ 线性相关

则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\beta_1+\beta_2)=0$ k_1,k_2,k_3,k_4 不全为0

$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性~~相关~~无关

$\therefore k_4\neq 0$

$\therefore k_4\beta_2=-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-k_3\alpha_3-k_4\beta_1$

$\because$ ~~β_2~~ 与题设相反

$\therefore$ 假设错误

附加题

14. 对 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$，若存在正整数 k，使得 $\mathbf{A}^k x=\mathbf{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$，且 $\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，试证向量组 $\boldsymbol{\alpha}$，$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$，…，$\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

$k_1\alpha+k_2A\alpha+\cdots+k_kA^{k-1}\alpha=0$

$\therefore A^{k-1}(k_1\alpha+\cdots+k_kA^{k-1}\alpha)=0$

$\therefore k_1A^{k-1}\alpha=0$

$\therefore k_1=0$

同理：$k_1=\cdots=k_k=0$

$\therefore$ 线性无关

15. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 所生成的向量空间记为 L_1，由 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 所生成的向量空间记为 L_2，试证：$L_1=L_2$.

$R(\alpha_1,\alpha_2)=2$

$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&1&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=2=R(\alpha_1,\alpha_2)$

$\therefore \beta_1,\beta_2$ 可由 α_1,α_2 线性表示

$\therefore L_1=L_2$

16. n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的各行元素之和均为零，且 $R(\mathbf{A})=n-1$，求线性方程组 $\mathbf{A}x=\mathbf{0}$ 的通解.

易知：$x=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的一个解

基础解系个数为 $n-(n-1)=1$

$\therefore$ 通解：$x=c\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ （c 为任意常数）

17. 设 A 为 n 阶不可逆方阵，$A^* \neq 0$，求 $Ax=0$ 的通解.

$\because$ A 不可逆

$\therefore |A|=0$

又$\because$ $A^* \neq 0$

$\therefore R(A)=n-1$

$\therefore$ 基础解系个数为 $n-(n-1)=1$

$A \cdot A^* = |A|E = 0$

$\therefore$ 通解 $x = C\alpha$，C 为任意常数，α 为 A^* 的非零列向量

18. 设 A 为 n 阶方阵，其中 $n \geqslant 2$，$A^* \neq O$ 是 A 的伴随阵，如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 与齐次线性方程组 $A^*x=0$ 都有非零解，求非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解向量组的秩.

$\because A^*x=0$ 有非零解

$\therefore |A^*|=0$

$\because$ $A \cdot A^* = |A|E$

$|A^*| = |A|^{n-1}$

$\therefore |A|=0$

又$\because$ $A^* \neq 0$

$\therefore R(A)=n-1$

$\therefore$ 解向量组的秩为 $n-1$

相似矩阵及二次型——向量的内积与正交

知识点巩固练习

1. 设 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则其长度 $\|x\|=$ $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

2. 向量 x 与 y 正交是指 $[x,y]=0$.

3. 若 n 阶方阵 A 满足 $AA^T=E$，则称 A 为正交阵.

4. A_n 为正交阵 $\Leftrightarrow A$ 的列(行)向量组为 单位向量且两两正交 .

5. 若 A_n 为正交阵，则 $|A|=$ ±1 .

练习题

1. 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}$，$\gamma$ 与 α 正交，且 $\beta=\lambda\alpha+\gamma$，求 λ 和 γ.

令 $\gamma=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$\because \beta=\lambda\alpha+\gamma$

$\therefore \begin{cases}-4=\lambda+x_1\\2=x_2\\3=-2\lambda+x_3\end{cases}$

$\because [\gamma,\alpha]=0$

$\therefore x_1-2x_3=0$

联立得：$\begin{cases}x_1=-2\\x_2=2\\x_3=-1\\\lambda=-2\end{cases}$

$\therefore \lambda=-2$，$\gamma=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$

2. 判断矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$ 是否为正交阵，并说明理由.

否. 令 $A=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\|A\|=\sqrt{[A,A]}=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}\neq 1$

$\therefore$ 不为单位向量

$\therefore$ 不为正交阵

3. 设 x 为 n 维列向量，$x^Tx=1$，令 $H=E-2xx^T$

(1) 证明，H 是对称的正交矩阵；

(2) 设 A、B 都是正交阵，证明：AB 也是正交阵.

(1) 证明：$H^T=(E-2xx^T)^T=E-2xx^T=H$

$\therefore$ H是对称矩阵

$H^TH=(E-2xx^T)^2=E-4xx^T+4xx^Txx^T=E-4xx^T+4x(x^Tx)x^T=E$

$\therefore$ H是对称的正交矩阵

(2) 证明：$\because A^TA=E$. $B^TB=E$

$(AB)^TAB=B^TA^TAB=B^TB=E$

$\therefore$ AB是正交阵

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是规范正交向量组，$\boldsymbol{\beta}_1=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=-\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 也是规范正交向量组.

证：$\|\beta_1\|=\sqrt{\frac{1}{9}[\alpha_1,\alpha_1]+\frac{4}{9}[\alpha_2,\alpha_2]+\frac{4}{9}[\alpha_3,\alpha_3]}=1$

同理：$\|\beta_2\|=1$. $\|\beta_3\|=1$

$[\beta_1,\beta_2]=-\frac{2}{9}[\alpha_1,\alpha_1]+\frac{4}{9}[\alpha_2,\alpha_2]-\frac{2}{9}[\alpha_3,\alpha_3]=0$

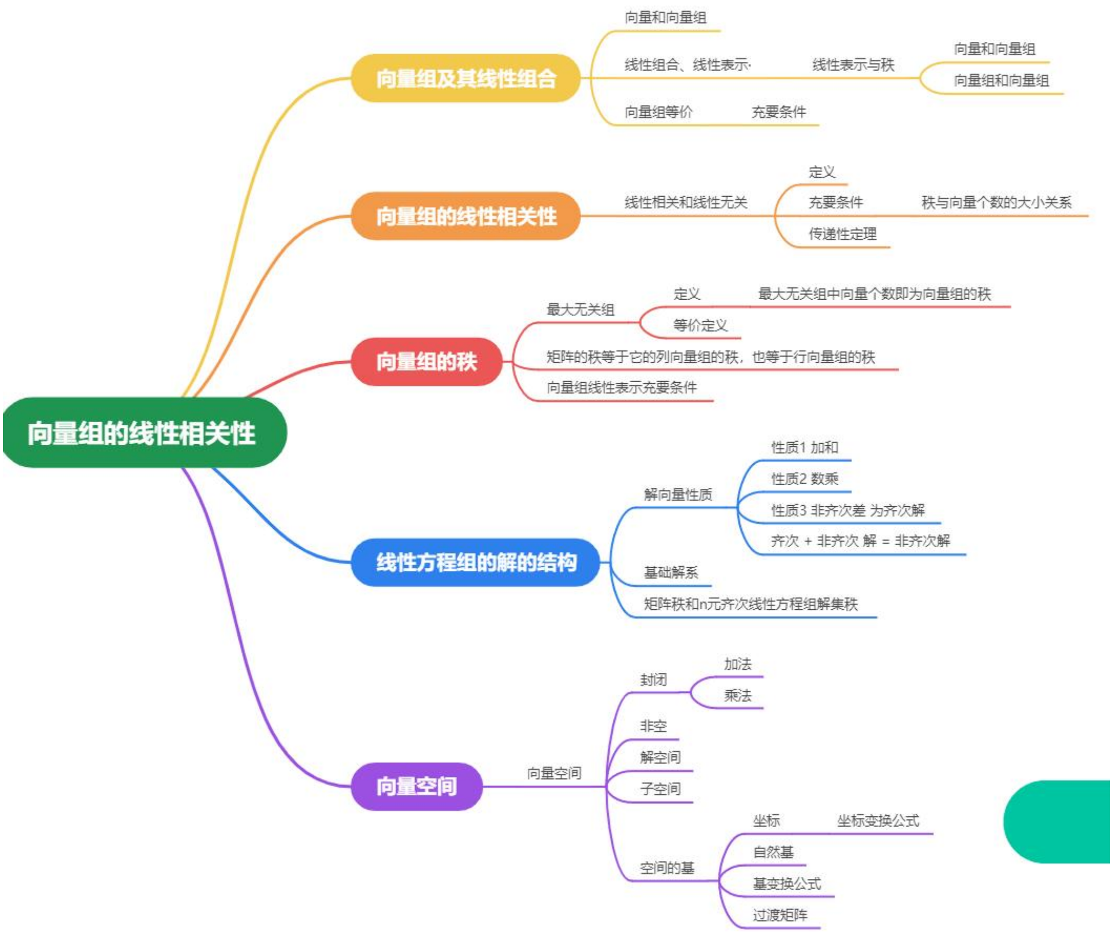
同理：$[\beta_2,\beta_3]=0$. $[\beta_1,\beta_3]=0$

$\therefore$ β_1. β_2. β_3 为规范正交向量组

思考题

用施密特正交化将向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 标准正交化的过程的几何意义是什么？

将一般基向量组转化为标准正交基向量


向量组的线性相关性
向量组及其线性组合
向量和向量组
线性组合、线性表示·
线性表示与秩
向量和向量组
向量组和向量组
向量组等价
充要条件
向量组的线性相关性
线性相关和线性无关
定义
充要条件
秩与向量个数的大小关系
传递性定理
向量组的秩
最大无关组
定义
最大无关组中向量个数即为向量组的秩
等价定义
矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于行向量组的秩
向量组线性表示充要条件
线性方程组的解的结构
解向量性质
性质1 加和
性质2 数乘
性质3 非齐次差 为齐次解
齐次 + 非齐次 解 = 非齐次解
基础解系
矩阵秩和n元齐次线性方程组解集秩
向量空间
向量空间
封闭
加法
乘法
非空
解空间
子空间
空间的基
坐标
坐标变换公式
自然基
基变换公式
过渡矩阵