武汉大学计算机学院

2011-2012 学年度第一学期期末考试

《离散数学》试卷 （A 卷）参考答案

1. (15 分) 用推理规则证明下列各式：

(a) $\neg A \vee B,\ (C \to \neg D) \to \neg B \Rightarrow A \to C$ (7 分)

(b) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \neg\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$ (8 分)

证 (a)

1 A

2 $\neg A \vee B$

3 B

4 $(C \to \neg D) \to \neg B$

5 $\neg(C \to \neg D)$

6 $\neg(\neg C \vee \neg D)$

7 $C \wedge D$

8 C

9 $A \to C$

(b)

1 $\neg\forall x P(x)$

2 $\exists x \neg P(x)$

3 $\neg P(c)$

4 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

5 $P(c) \vee Q(c)$

6 $Q(c)$

7 $\exists x Q(x)$

8 $\neg\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$

2.(15 分) 设 A, B, C 是集合，证明：

(a) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$ (7 分)

(b) 若 $A \cap C \subseteq B \cap C, A \cap \overline{C} \subseteq B \cap \overline{C}$ ，则 $A \subseteq B$ (8 分)

证 (a)

$$(A-C)-(B-C)=(A\cap\overline{C})\cap\overline{B-C}=(A\cap\overline{C})\cap\overline{B\cap\overline{C}}=(A\cap\overline{C})\cap(\overline{B}\cup C)$$

$$=(A\cap\overline{C})\cap\overline{B}\cup(A\cap\overline{C})\cap C=A\cap\overline{C}\cap\overline{B}=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=(A-B)-C$$

(b)

$$A = A\bigcap(C\bigcup\overline{C}) = (A\bigcap C)\bigcup(A\bigcap\overline{C}) \subseteq (B\bigcap C)\bigcup(B\bigcap\overline{C})$$
$$= B\bigcap(C\bigcup\overline{C}) = B$$

3. (15 分)

(*a*) 设 R_1, R_2 是集合 A 上的二元关系，对任 $a,b\in A$， aR_2b 当且仅当存在 $c\in A$ 使得 aR_1c, cR_1b。证明：若 R_1 是 A 上的等价关系，则 R_2 也是 A 上的等价关系。(7 分)

(*b*) 设 $(A,\leq)$ 是一个偏序集，$\leq_R$ 是 A 上的一个二元关系，对 $\forall a,b\in A,\ a\leq_R b$ 当且仅当 $b\leq a$。证明 $\leq_R$ 是一个偏序关系。 (8 分)

证 (*a*) 自反性：对任 $a\in A,$ 由 aR_1a 知，aR_2a，故 R_2 是自反的。

对称性：若 aR_2b，则存在 $c\in A$ 使得 aR_1c, cR_1b。由 R_1 之对称性知 bR_1c, cR_1a。

因此有 bR_2a

传递性：若 aR_2b, bR_2c，则存在 $e, f\in A$ 使得 aR_1e, eR_1b 以及 bR_1f, fR_1c。由 R_1 之传递性知 aR_1b, bR_1c，故有 aR_2c。

(*b*) 自反性：对任 $a\in A,$ 由 $a\leq a$ 知，$a\leq_R a$，故 $\leq_R$ 是自反的。

反对称性：若 $a\leq_R b, b\leq_R a$，则 $b\leq a, a\leq b$，由 $\leq$ 是反对称的知 $a=b$。

传递性：若 $a\leq_R b, b\leq_R c$，则 $b\leq a, c\leq b$，由 $\leq$ 是传递的知 $c\leq a$，所以 $a\leq_R c$

4(10 分) 设 $f: X\to Y, g: Y\to X, g\circ f = 1_X$。用定义证明：$f$ 是单射和 g 是满射。

证 f 是单射：

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2)$$
$$\Rightarrow x_1 = 1_X(x_1) = g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) = 1_X(x_2) = x_2$$

故 f 是单射。

g 是满射：对任 $x\in X$，由 $x = 1_X(x) = g\circ f(x) = g(f(x))$ 知，存在 $y = f(x)$ 使得 $g(y) = x$，故 g 是满射

5(18 分)

(a) 设$\langle G,* \rangle$是一个群，H_1, H_2是G的两个互不包含的子群，证明：G中存在一个元素，它既不属于H_1也不属于H_2。　　　　(8 分)

(b) 设 f 和 g 是群$\langle G_1,* \rangle$ 到群$\langle G_2,\bullet \rangle$ 的两个同态. 证明：$\langle H,* \rangle$ 是 $\langle G_1,* \rangle$ 的子群，其中$H = \{x \in G_1 \mid f(x) = g(x)\}$　　　　(10 分)

证 (a) 因为H_1, H_2不相互包含，故G中存在元素h_1, h_2使得$h_1 \in H_1$，但$h_1 \notin H_2$。

$h_2 \in H_2$，但$h_2 \notin H_1$。

下面证明$h_1 * h_2 \notin H_1$并且$h_1 * h_2 \notin H_2$。

若$h_1 * h_2 \in H_1$，则有$h \in H_1$使得$h_1 * h_2 = h \Rightarrow h_2 = h_1^{-1} * h \in H_1$，不可。

若$h_1 * h_2 \in H_2$，则有$h \in H_2$使得$h_1 * h_2 = h \Rightarrow h_1 = h * h_2^{-1} \in H_2$，不可。

(b)　由 $f(e) = g(e)$ 知$e \in H$.

设 a 和 b 是 H 中任意两个元素，则有 $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$.

由 $f(b^{-1}) = f(b)^{-1}, g(b^{-1}) = g(b)^{-1}$ 知，$f(b^{-1}) = g(b^{-1})$

于是有

$f(a * b^{-1}) = f(a) \bullet f(b^{-1}) = g(a) \bullet g(b^{-1}) = g(a * b^{-1}) \Rightarrow a * b^{-1} \in H$

所以 $\langle H,* \rangle$ 是$\langle G_1,* \rangle$ 的子群.

6. (15 分，每小题 5 分)

(a) 若图$G = \langle V, E \rangle$不是哈密尔顿图，$n = |V| \geq 3$。证明：G中至少有一个顶点的度数小于$n/2$。

(b) 设$G = \langle V, E \rangle$是简单平面图，$|V| \geq 4$且$\forall v \in V, \deg(v) \geq 2$。证明：$G$中至少有3个顶点的度数不超过5。

(c) 证明：若树$T = \langle V, E \rangle$中有一个顶点的度数为d，则T中至少有d片树叶。

证 (a) 用反证法。若G中每个顶点的度数大于或等于$n/2$，则G中任何两个不相邻的顶点的度数之和大于或等于n，因而G是哈密尔顿图，与假设矛盾。

(b) 用反证法。

若G中最多有 2 个顶点的度数不超过 5，则边数

$$m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) > \frac{1}{2}(6(n-2)+1+1) = 3n-5，不可。$$

(c) 将度为 d 的顶点从 T 中删除，得到 T 之 d 个连通分支，而每一个连通分支是一棵树，因而至少有一片树叶。所以 T 中至少有 d 片树叶。

7(12 分). 设 S 为非空集合 A 的所有划分所构成的集合，$R \subseteq S \times S$，且对任 $\pi_1, \pi_2 \in S$，$\pi_1 R \pi_2$ 当且仅当 $B_1 \in \pi_1 \Rightarrow \exists B_2 \in \pi_2, B_1 \subseteq B_2$。证明：$R$ 是 S 上的偏序关系。

证 自反性：对任 $\pi \in S$，$\forall B \in \pi \Rightarrow \exists B \in \pi, B \subseteq B \Rightarrow \pi R \pi$

反对称性：若 $\pi_1 R \pi_2, \pi_2 R \pi_1$，则

$$
\begin{aligned}
&B_1 \in \pi_1 \Rightarrow \exists B_2 \in \pi_2, B_1 \subseteq B_2 \\
&B_2 \in \pi_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \pi_1, B_2 \subseteq B_3 \\
&\Rightarrow B_1 \subseteq B_3 \Rightarrow B_1 = B_3 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \pi_1 \subseteq \pi_2
\end{aligned}
$$

同理可证 $\pi_2 \subseteq \pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2$

传递性：若 $\pi_1 R \pi_2, \pi_2 R \pi_3$，则

$$
\begin{aligned}
&B_1 \in \pi_1 \Rightarrow \exists B_2 \in \pi_2, B_1 \subseteq B_2 \\
&B_2 \in \pi_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \pi_3, B_2 \subseteq B_3 \\
&\therefore B_1 \in \pi_1 \Rightarrow \exists B_3 \in \pi_3, B_1 \subseteq B_3 \Rightarrow \pi_1 R \pi_3
\end{aligned}
$$