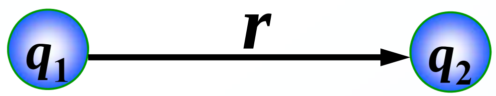
§ 6-5　电场的能量

带电系统带电：电荷相对移动→外力克服电场力做功→电场能量。

一、点电荷系统的能量



电能：$$W = A_{\infty r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

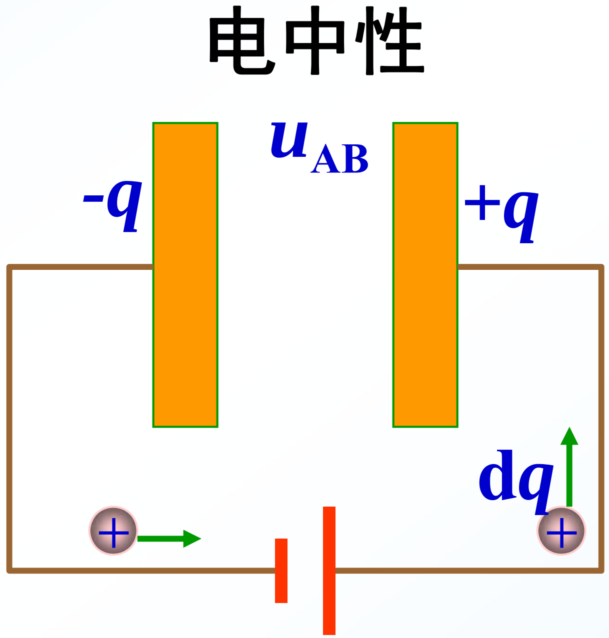
$$W = \frac{1}{2} q_1 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{2} q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2$$

n个点电荷系统的电能：$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i U_i$$

连续分布带电体的电能：

$$W = \frac{1}{2}\int u\,\mathrm{d}q = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V u\rho\,\mathrm{d}V \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_S u\sigma\,\mathrm{d}S \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_L u\lambda\,\mathrm{d}l \end{cases}$$

二、电容器的能量



$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}q \cdot u_{AB} = \mathrm{d}q \frac{q}{C}$$

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

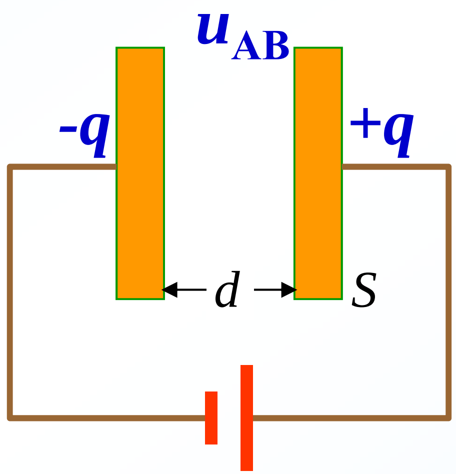
$$W_e = A = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad Q = CU$$

电容器的电能： $$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

三、电场的能量　能量密度

$$W_e=\frac{1}{2}CU^2 \qquad C=\frac{\varepsilon S}{d}$$

$$W_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd \qquad U=Ed$$



V=*Sd*为电容器体积→电能是储存在(定域在)电场中.

电场的能量密度(energy density)： 单位体积电场所具有的能量.

$$\boxed{w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

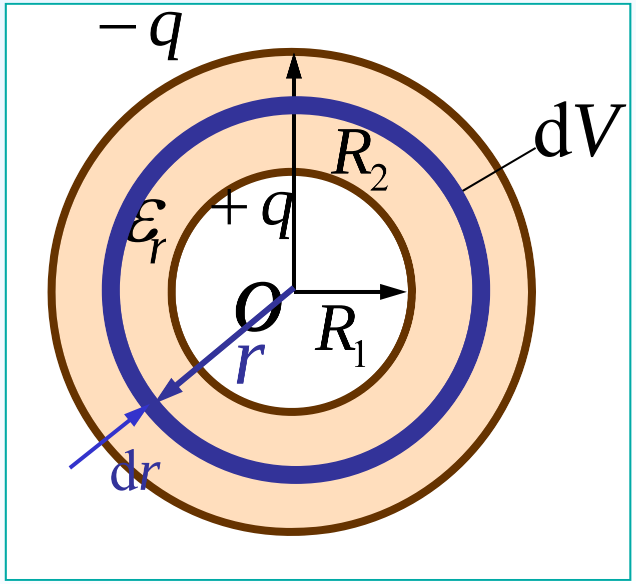
（焦耳/米$^{-3}$）

电场能量(energy of field)：

$$\boxed{W=\int_V w_e \mathrm{d}V}$$

注： 对任意电场均成立

例6-21：用能量法推导球形电容器(R_1,R_2,ε_r)电容公式。



解：设极板带电量 $\pm q$

$$E=\begin{cases}0 & (r<R_1)\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} & (R_1<r<R_2)\\ 0 & (r>R_2)\end{cases}$$

取同心球壳为积分元

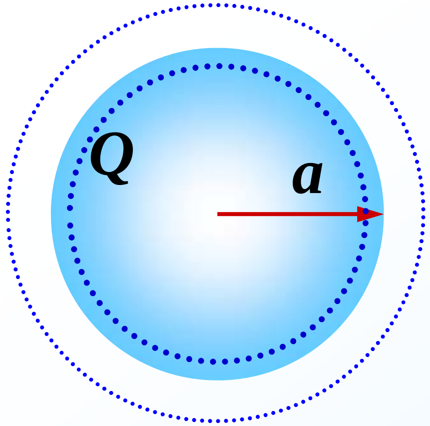
$$W=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2\mathrm{dV}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\right)^2\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$$

$$W=\frac{q^2}{2C}$$

$$\boxed{C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}}$$

例6-22. 求真空中一半径为a、带电量为Q的均匀球体的静电场能。



解一： $E_1 \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{Q}{4\pi a^3/3} \dfrac{4\pi r^3/3}{\varepsilon_0}$

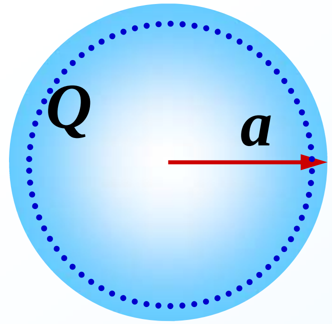
$$\rho = \frac{Q}{4\pi a^3/3}$$

球内场强： $E_1 = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$

球外场强： $E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$u = \int_r^a E_1 \mathrm{d}r + \int_a^\infty E_2 \mathrm{d}r$$

$$u = \int_r^a \frac{Qr\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + \int_a^\infty \frac{Q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$



$$W_e = \frac{1}{2}\int u\rho\,\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right)\cdot\frac{Q}{4\pi a^3/3}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$= \frac{3Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^4}\int_0^a r^2\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right)\mathrm{d}r = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

解二：

$$W_e=\int w_e\mathrm{d}V=\int_0^a\frac{1}{2}\varepsilon_0E_1^2\mathrm{d}V+\int_a^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0E_2^2\mathrm{d}V$$

$$=\int_0^a\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0a^3}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r+\int_a^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

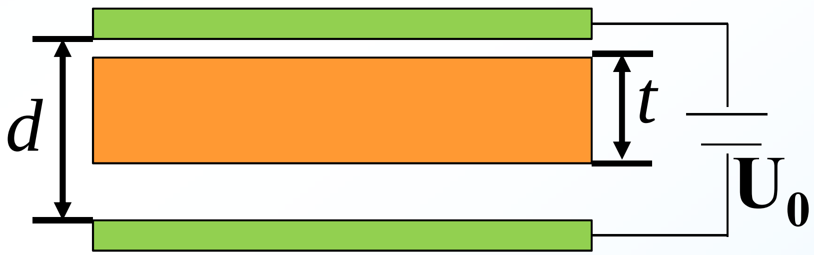
$$=\frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0a}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0a}=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0a}$$

电场能是以体密度定域分布在空间内的静电能.

思考: 半径为R、带电量为Q的均匀带电球面, 其静电能与球体的静电能相比, 哪个大?

例6-23： 空气平行板电容器，面积为S，间距为d。现把一块厚度为t的铜板放入其中。（1）计算电容器的电容改变量。（2）电容器充电后断开电源U，再拿出铜板需要做多少功？

解： 放入前： $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$



放入后： $U = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-t)$

$$C = \frac{\sigma S}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-t} \qquad Q = CU$$

$$\Delta C = \frac{\varepsilon_0 S t}{d(d-t)}$$

$$A = W_0 - W = \frac{Q^2}{2C_0} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 t}{2\varepsilon_0 S}$$

讨论题： 一电容为C的空气平行板电容器，接到端电压为V的电源上充电. 现把两个极板间距离增大至n倍，求外力所作的功.

解： 充电后断开电源，极板上电量$q = CV$保持不变. 两极板间距变化前后电容分别为：

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \qquad C' = \frac{\varepsilon_0 S}{nd} = \frac{C}{n}$$

电容器储能分别为 $W = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}, \quad W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C'} = \frac{nq^2}{2C}$

由功能原理，外力所作的功为

$$A = W' - W = \frac{nq^2}{2C} - \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)C^2V^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 (n-1) > 0$$

充电后不断开电源, 极板间V保持不变. 拉动极板前后极板上电量分别为:

$$q = C\Delta U = CV, q' = C'V = \frac{C}{n}V$$

电容器储能分别为

$$W = \frac{1}{2}\cdot CV^2, \quad W' = \frac{1}{2}\cdot C'V^2 = \frac{1}{2n}\cdot CV^2$$

由功能原理, 外力所作的功为

$$A = W' - W = \frac{1}{2n}CV^2 - \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}CV^2(\frac{1}{n} - 1) < 0$$

正确否?

保持极板间V不变过程中电源作功：

$$A_{\varepsilon} = (q' - q)V = (\frac{1}{n} - 1)CV^{2} < 0$$

由功能原理

$$A + A_{\varepsilon} = W' - W = \frac{1}{2n}CV^{2} - \frac{1}{2}CV^{2} = \frac{1}{2}CV^{2}(\frac{1}{n} - 1)$$

$$A = \frac{1}{2}CV^{2}(\frac{1}{n} - 1) - A_{\varepsilon} = \frac{n-1}{2n}CV^{2} > 0$$