相似矩阵及二次型——矩阵的特征值与特征向量

知识点巩固练习

1. 若 $A=(a_{ij})_n$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,则 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=$ $a_{11}+\cdots+a_{nn}$;$\lambda_1\cdots\lambda_n=$ $|A|$.
2. 若 λ 是 A 的特征值,则 λ^5 是 A^5 的特征值.
3. 若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 是 A 的 t 个不同特征值,p_i 是 λ_i 的特征向量($i=1,\cdots,t$),则向量组 $p_1,\cdots,p_t$ 必线性 无关.

练习题

1. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1,2,−3,则 $|A^*+3A+2E|=$ 25.

2. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&4&2\end{pmatrix}$ 的全体特征值和特征向量.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&1-\lambda&0\\0&4&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

∴ 特征值为 1, 2

$(A-E)X=0$

$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&8&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

∴ 特征向量为 $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $(c_1\neq0)$

$\lambda=2$ 时

$(A-2E)X=0$

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&0\\0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

∴ 特征向量为 $c_1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ $(c_1\neq0)$

3. 设 $A^2-3A+2E=O$,证明:A 的特征值只能取 1 或 2.

$f(A)=A^2-3A+2E$

λ 为 A 的特征值

∴ λ^2 为 A^2 特征值

$f(A)x=f(\lambda)x$

∴ $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 特征值

∵ $f(A)=0\Rightarrow f(\lambda)=0\Rightarrow\lambda=1$ 或 2

∴ 特征值只能为 1 或 2

思考题

设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 是 A_n 的两个不同特征值，$p_1, \cdots, p_s$ 和 $q_1, \cdots, q_t$ 分别是 λ_1 与 λ_2 的线性无关的特征向量，问向量组 $\{p_1, \cdots, p_s, q_1, \cdots, q_t\}$ 的线性相关性如何？

向量组线性无关

$k_1p_1 + \cdots + k_sp_s + l_1q_1 + \cdots l_tq_t = 0$

同时×A

$\therefore k_1\lambda_1p_1 + \cdots + k_s\lambda_1p_s + l_1\lambda_2q_1 + \cdots + l_t\lambda_2q_t = 0$

$\therefore \lambda_1(k_1p_1 + \cdots + k_sp_s) + \lambda_2(l_1q_1 + \cdots + l_tq_t) = 0$

$\therefore (\lambda_2 - \lambda_1)(l_1q_1 + \cdots + l_tq_t) = 0$

$\therefore l_1q_1 + \cdots + l_tq_t = 0$

$\therefore l_1 = \cdots = l_t = 0$

同理：$k_1 = \cdots = k_s = 0$

$\therefore$ 线性无关

相似矩阵及二次型——矩阵的相似对角化

知识点巩固练习

1. 若 A_n 与 B_n 相似，则 $R(A)$ ___=___ $R(B)$.
2. 若 A_n 与 B_n 相似，则 $|A|$ ___=___ $|B|$.
3. 若 A_n 与 B_n 相似，则 A 与 B 的特征值 ___相同___.
4. A_n 可相似对角化⇔ ___A_n 有 n 个线性无关的特征向量___；且对角阵的对角元即为 A 的 ___特征值___.
5. 设 A_n 为实对称阵，则必有正交阵 P，使得 ___$P^{-1}A_nP = P^TA_nP = \Lambda$___
6. 设 λ 是实对称阵 A_n 的 k 重特征值，则 $R(A-\lambda E)=$ ___n-k___；对应特征值 λ 恰有 ___k___ 个线性无关的特征向量.

练习题

1. 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$，求 A^{10}.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -1-\lambda & -1\\ 1 & -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$\therefore \lambda = -3, 0$

$\therefore \Lambda^{10} = \begin{pmatrix}3^{10} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

特征向量为 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\therefore A^{10}=P\Lambda^{10}P^{-1} = 3^9\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

2. 求可将方阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}$ 对角化的可逆阵 P.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ 1 & -4 & 3-\lambda\end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

$\therefore P=\begin{pmatrix}0 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore$ 特征值 $-1, 2$

对应. 特征向量为 $\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\eta_2=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$. $\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&x\\1&0&0\end{pmatrix}$，问$x$为何值时，矩阵$A$能对角化？

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\1&1-\lambda&x\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\therefore$ 特征值为 1. -1

特征向量

-1为单根. 1为复根.

即$\lambda=1$对应的有2个线性无关的特征向量

即$(E-A)x=0$ 有2个线性无关的解

$\therefore R(E-A)=1$

$\therefore x=-1$

4. 设3阶方阵A的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1$，对应的特征向量依次为$p_1=(0,1,1)^T$，$p_2=(1,1,1)^T$，$p_3=(1,1,0)^T$，求A.

$\therefore \Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

$\therefore P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$\therefore A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&3\\-3&-4&5\\-2&-4&4\end{pmatrix}$

5. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$与对角阵$\Lambda=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-4&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似.

(1) 求x，y；

(2) 求一个正交阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

(1) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-4\\-2&x-\lambda&-2\\-4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-5)(x\lambda+3x-3\lambda+8-\lambda^2)$

$\lambda=5,\ \lambda=-4\Rightarrow x=4$

$\therefore |A-\lambda E|=-(\lambda-5)^2(\lambda+4)\Rightarrow y=5$

(2) $\therefore$ 特征向量单位正交化为 $\eta_1=\frac{2}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-\frac12\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\frac{\sqrt5}{3}\begin{pmatrix}-\frac45\\-\frac25\\1\end{pmatrix}$

$\eta_3=\frac{2}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix}3\\-\frac12\\1\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt5}{5}&-\frac{4\sqrt5}{15}&\frac{6}{\sqrt{41}}\\\frac{2}{5}\sqrt5&-\frac{2\sqrt5}{15}&-\frac{1}{\sqrt{41}}\\0&\frac{\sqrt5}{3}&\frac{2}{\sqrt{41}}\end{pmatrix}$