上讲内容回顾

1. 导体中形成电流的条件：

    1) 有可以移动的电荷；

    2) 有维持电荷作定向移动的电场。

2. 维持恒定电流的条件：

    回路中存在产生非静电力的装置

3. 基本磁现象

4. 磁感应强度*B*的定义

5. 基本实验规律——毕奥—萨伐尔定律及其应用

    典型载流体的磁场公式

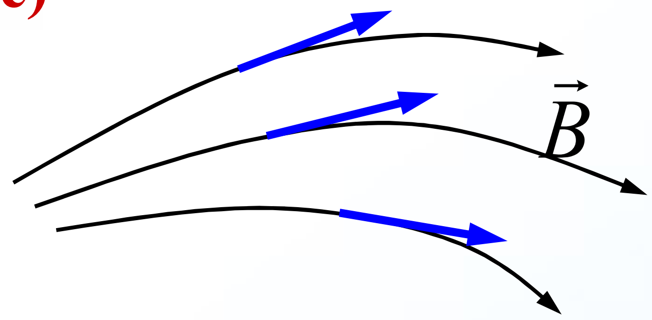
$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_{\mathrm{r}}}{r^2}}$$

6. 运动电荷激发磁场

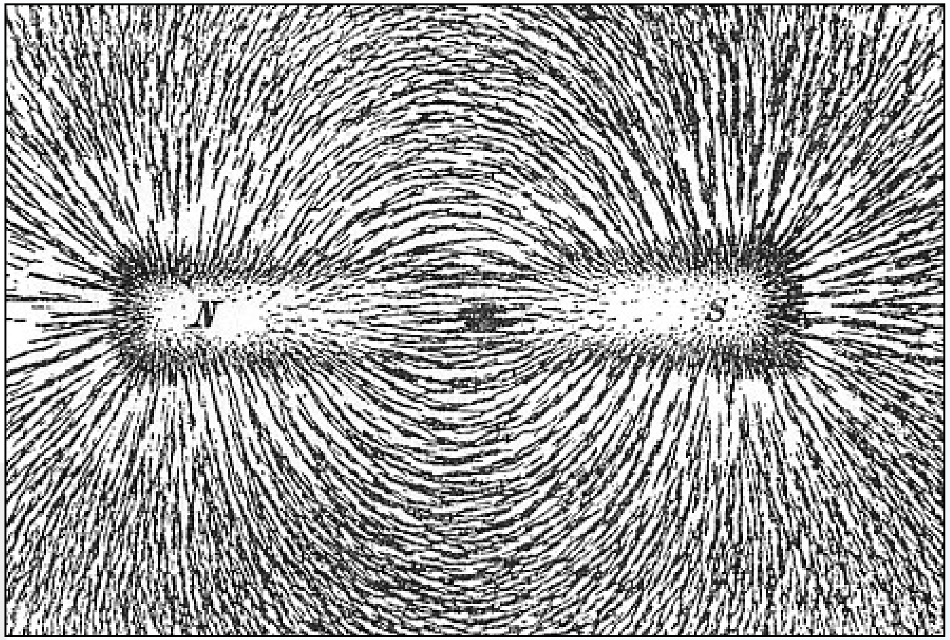
§ 7-4　磁场中的高斯定理

一、磁感应线(magnetic induction line)

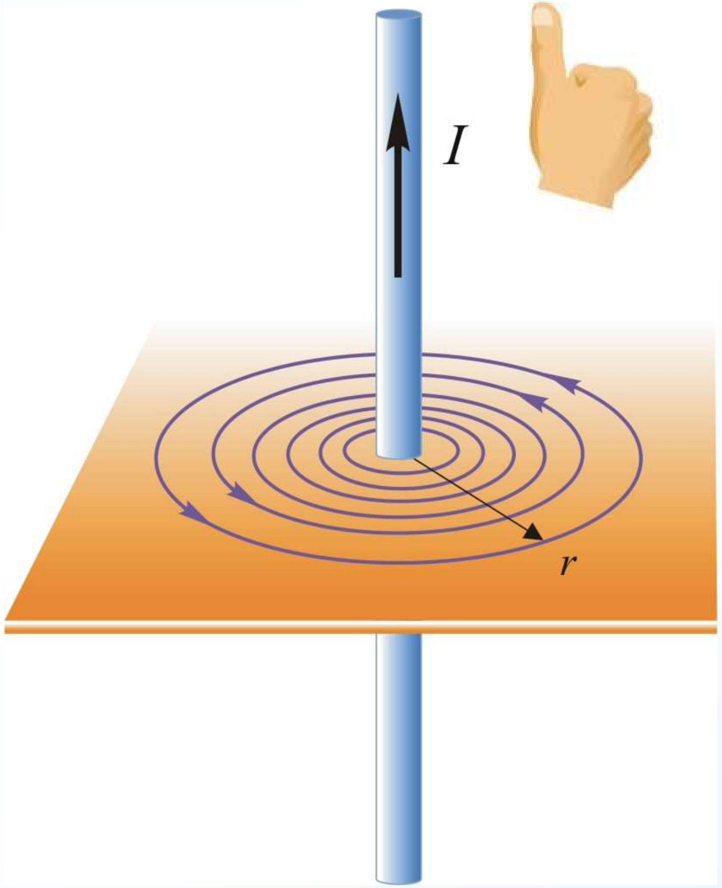
磁感应线 $\left\{\begin{array}{l}\vec{B}\text{方向：磁感线的切向}\\ \vec{B}\text{大小：磁感线的疏密}\end{array}\right.$



条形磁铁周围的磁感线

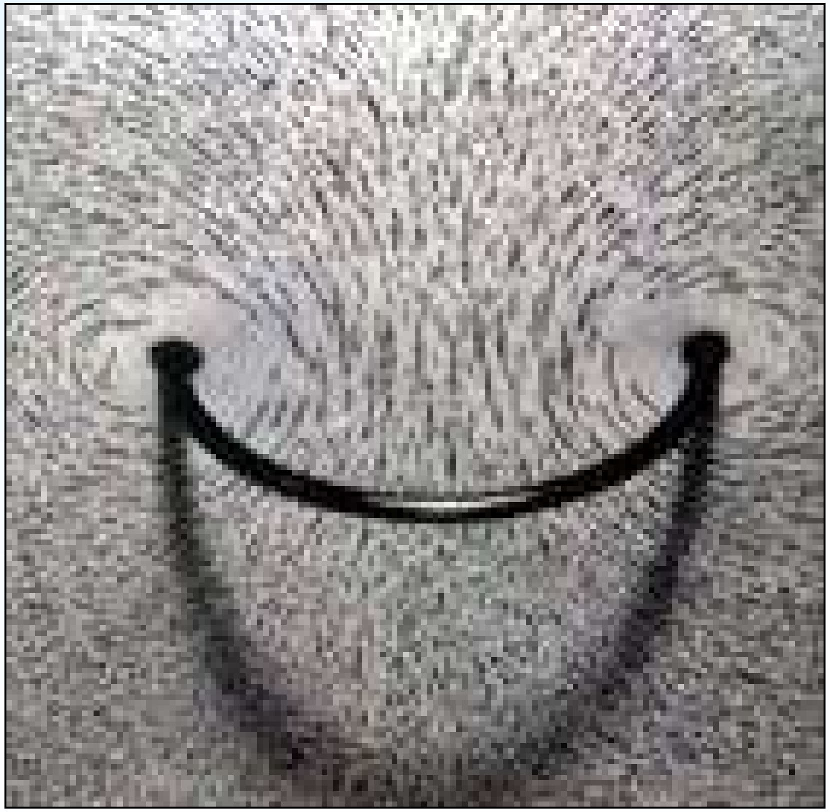


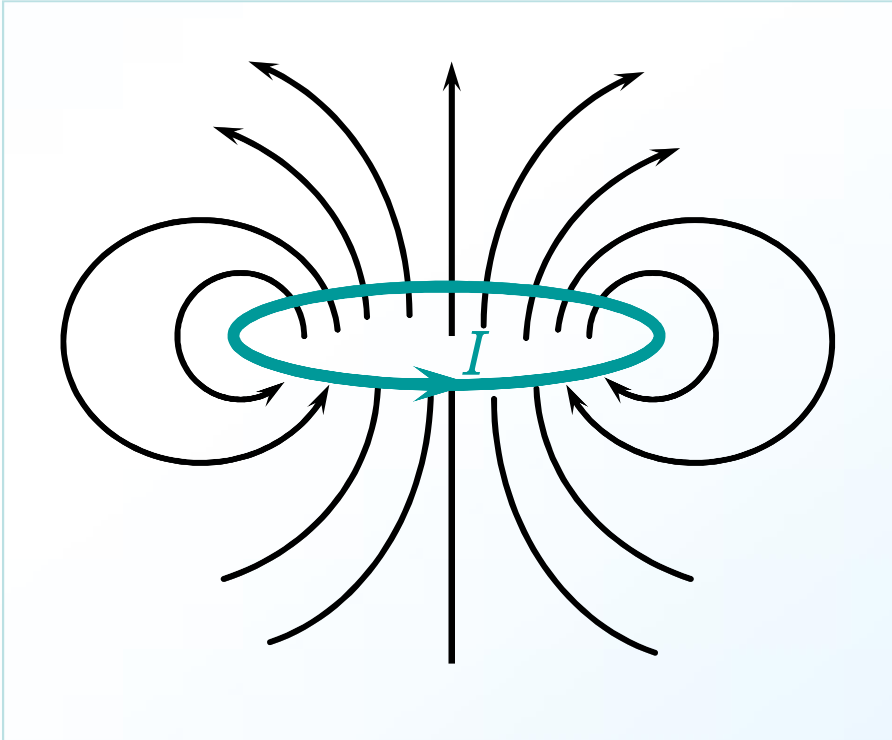
直线电流的磁感线



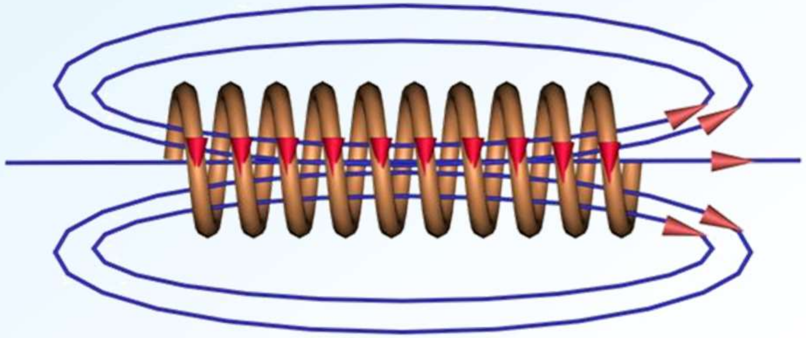
磁感应线为一组环绕电流的闭合曲线

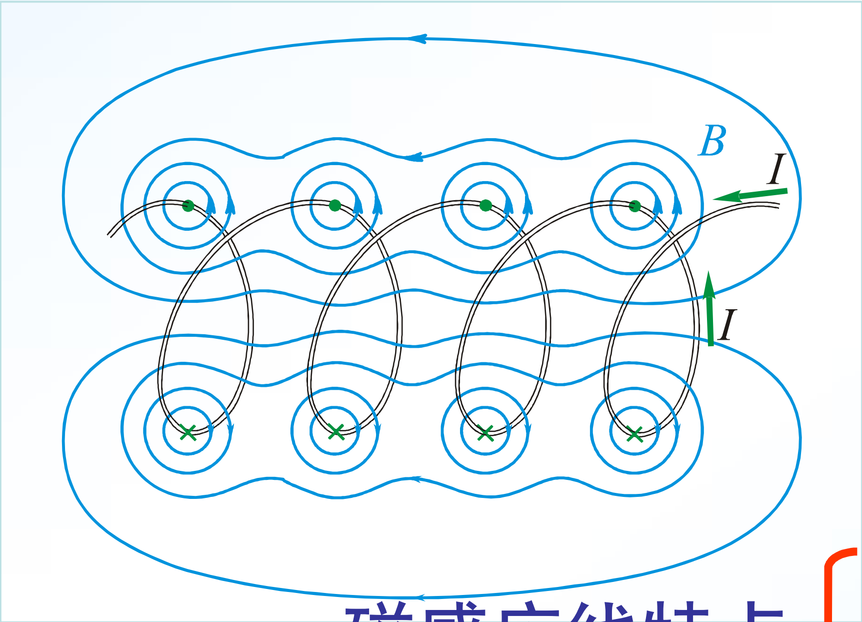
圆电流的磁感线

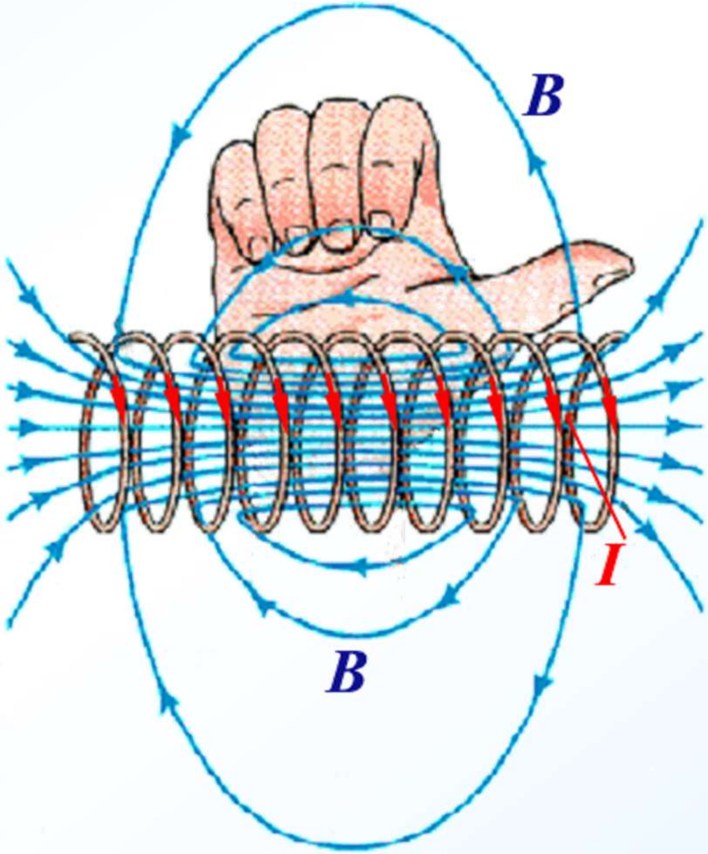




通电螺线管的磁感线





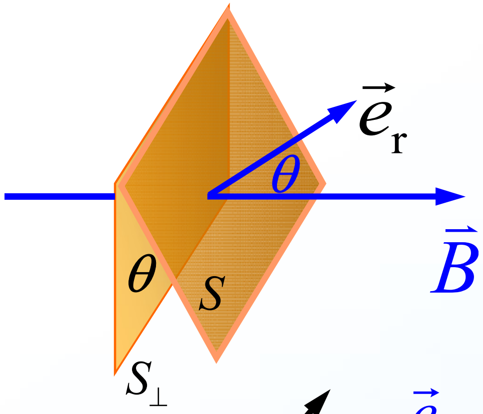


磁感应线特点：
- 闭合，或两端伸向无穷远；
- 与载流回路互相套联；
- 互不相交.

二、磁通量

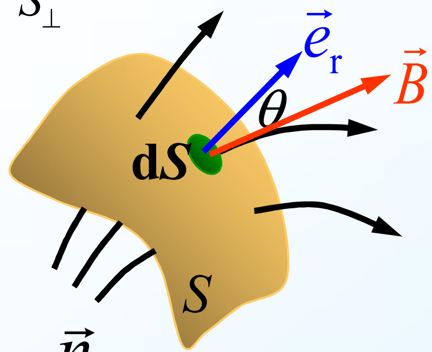
磁通量(magnetic flux)： 通过磁场中某给定面的磁感线条数

均匀场 $\Phi_{\mathrm{m}} = BS_{\perp} = BS\cos\theta$



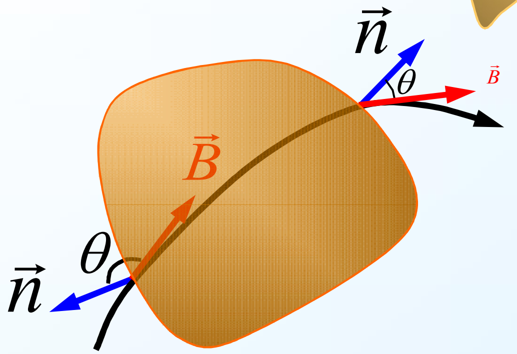
非均匀场 $\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}} = B\mathrm{d}S\cos\theta$

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{m}} = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_S B\cos\theta\,\mathrm{d}S}$$



单位：**Wb(韦伯)**

对封闭曲面,规定外法向为正



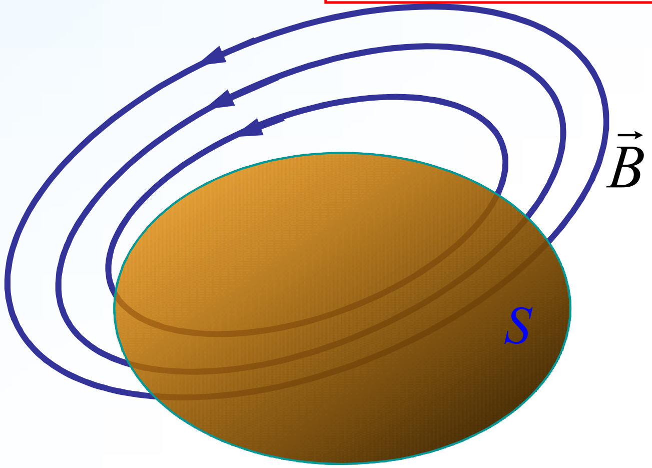
进入的磁感应线 $\Phi_m < 0$

穿出的磁感应线 $\Phi_m > 0$

三、真空中磁场的高斯定理

穿过磁场中任意封闭曲面的磁通量为零

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S B\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0}$$

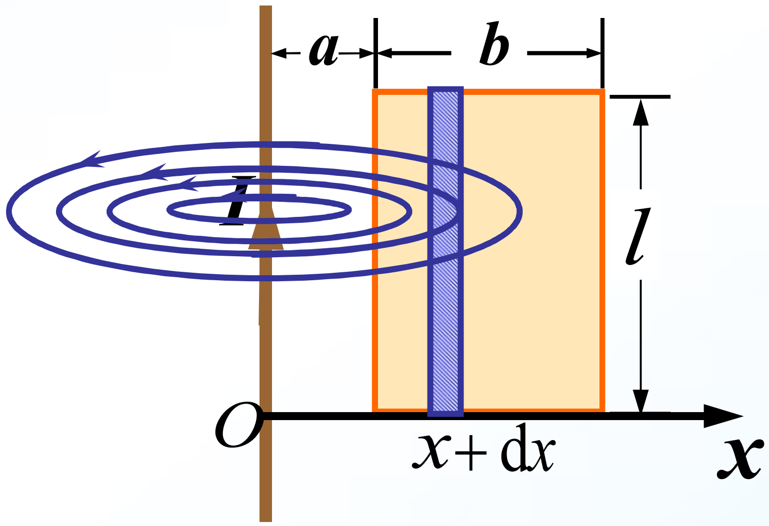


磁场是“无源场”

磁场是“涡旋场”

磁场是无源场 $\begin{cases}\text{磁感应线闭合成环, 无头无尾}\\ \text{不存在磁单极子.}\end{cases}$

例7-5. 无限长直导线通以电流I, 求通过如图所示的矩形面积的磁通量.



解： 建立如图所示的坐标系

x处磁场为 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$ $\otimes$

面积元 $\mathrm{d}S = l\mathrm{d}x$

元通量 $\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}} = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

$$\mathrm{d}\Phi_m = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}l\mathrm{d}x$$

$$\Phi_m = \int_S \mathrm{d}\Phi_m = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b}$$

§7-5　真空中磁场的安培环路定理

一、安培环路定理

在真空的恒定磁场中，磁感强度$\vec{B}$矢量沿任意闭合曲线L的线积分(环流)，等于包围在闭合曲线内各电流代数和的μ_0倍.

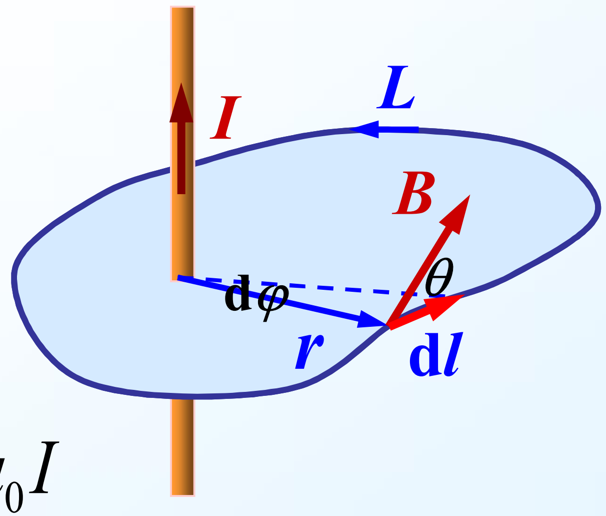
$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内}}$$

1. 安培环路定理(Ampere circuital theorem)验证

(1) 电流穿过环路L

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L B\cos\theta\, dl$$

$$dl\cos\theta = r d\varphi$$

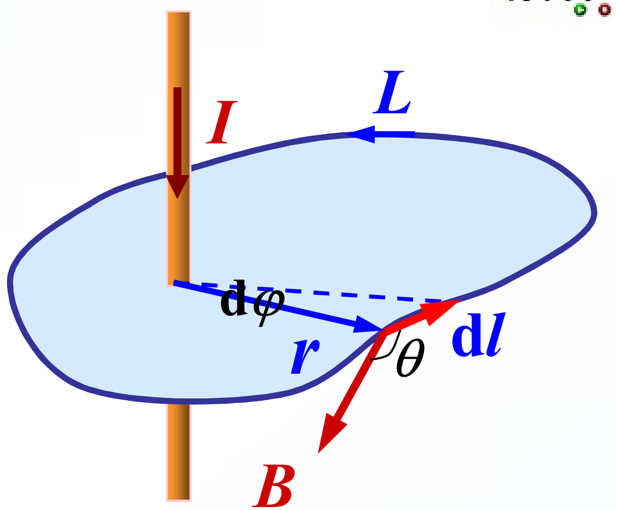


$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

电流反向：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot r\mathrm{d}\varphi = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = -\mu_0 I$$



(2) 多根载流导线穿过环路

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n$$

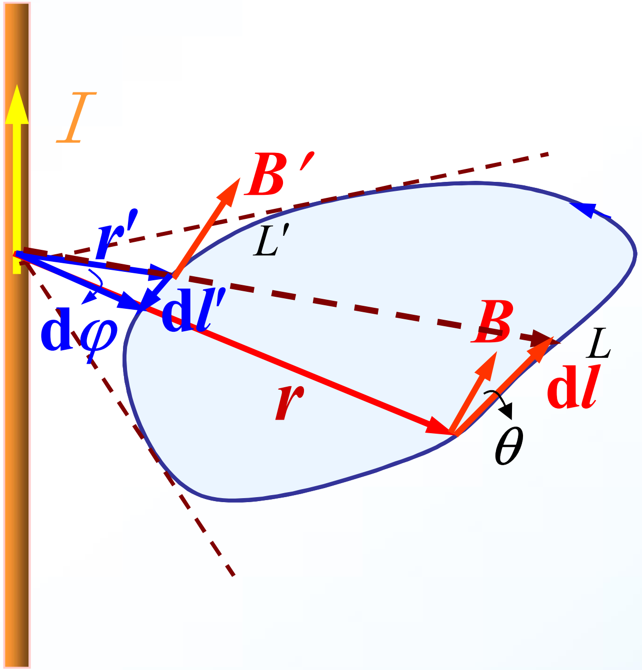
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \left(\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \oint_L \vec{B}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{B}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \oint_L \vec{B}_n\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \mu_0 I_1 + \mu_0 I_2 + \cdots + \mu_0 I_n = \mu_0 \sum I_i$$

(3) 电流在环路之外

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad B'=\frac{\mu_0 I}{2\pi r'}$$



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_L \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{L'} \vec{B}'\cdot d\vec{l}'$$

$$= \int_L B\,dl\cos\theta + \int_{L'} B'dl'\cos\theta'$$

$$dl\cos\theta = r d\varphi \qquad dl'\cos\theta' = -r'd\varphi$$

$$\int_{L'} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{L'} \vec{B}'\cdot d\vec{l}' = \int_0^{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi - \int_0^{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} r'd\varphi = 0$$

结论： $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i}$$

2. 关于定理的说明

成立条件：恒定电流的磁场

L：场中任一闭合曲线—安培环路(规定绕向)

$\vec{B}$：环路上各点**总**磁感应强度(L内外所有电流产生)

$\sum\limits_{(\text{穿过}L)} I_i$ 穿过以L为边界的任意曲面的电流的代数和

穿过L的电流：对$\vec{B}$和$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 均有贡献

不穿过L的电流：对L上各点$\vec{B}$有贡献

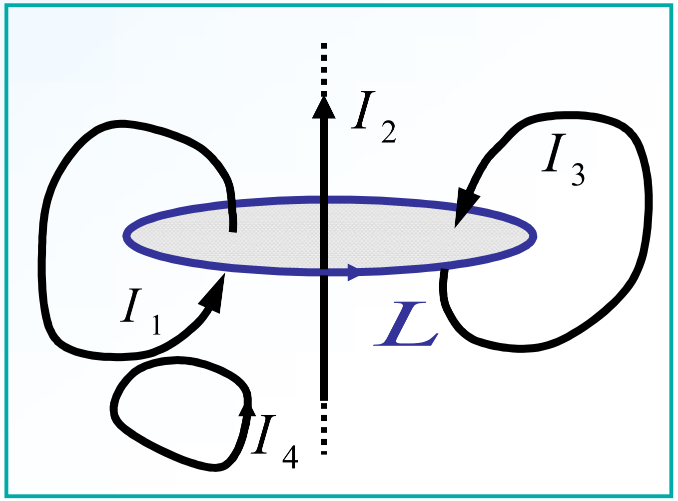
对 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 无贡献

安培环路定理揭示磁场是非保守场(无势场, 涡旋场)

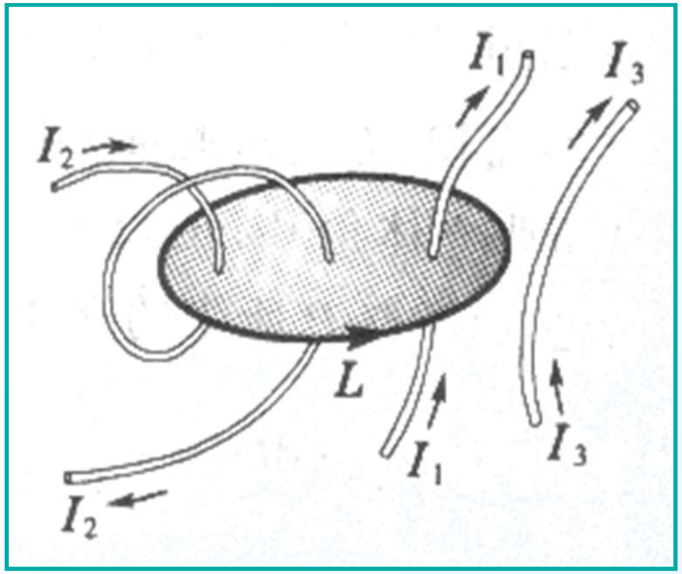
规定： 电流与L绕向成右旋关系 $I_i > 0$

电流与L绕向成左旋关系 $I_i < 0$

例如：



$$\sum_L I_i = I_1 + I_2 - I_3$$



$$\sum_L I_i = I_1 - 2I_2$$

静电场与恒定磁场比较

	高斯定理	环路定理
静电场	$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$ 有源场	$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ 保守场、有势场
恒定磁场	$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ 无源场	$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum\limits_{(穿过L)} I_i$ 非保守场、无势场（涡旋场）

二、安培环路定理的应用

基本步骤:

1. 分析电流→磁场分布的对称性, 选取适当安培环路, 使B从积分号内提出.

方法: 使安培环路L经过待求场点, L上各点B的量值均匀(或为零), 且方向与L相切(或垂直).

2. 求 $\sum_{L内} I_i$ (服从右手螺旋为正, 反之为负).

3. 由安培环路定理求解磁感应强度, 并说明方向.

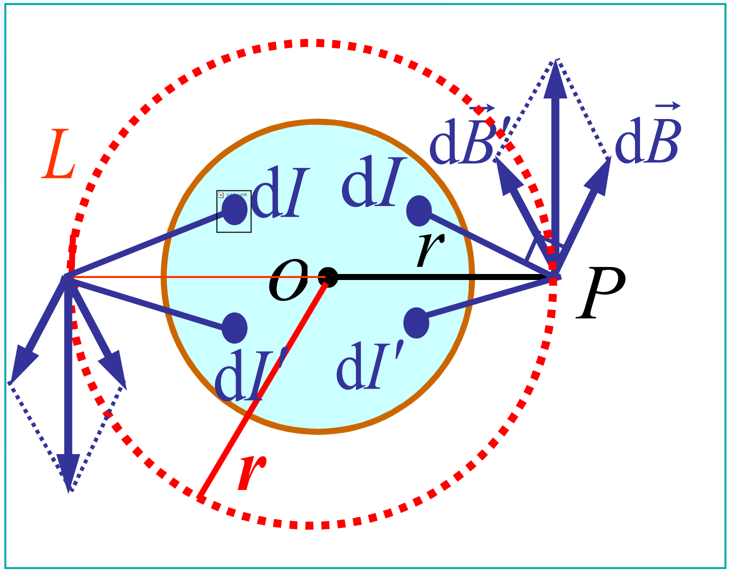
有时还可灵活应用叠加原理和"补偿法".

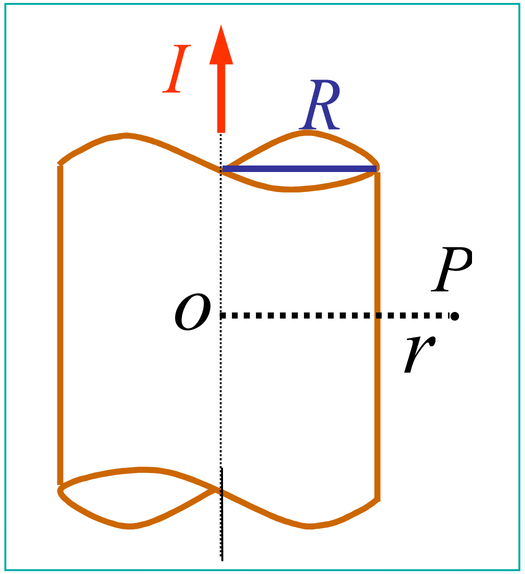
能用安培环路定理计算的磁场分布主要有:

1) 无限长载流导线, 圆柱, 圆筒
2) 螺绕环, 无限长密绕螺线管
3) 无限大载流平面, 平板等

例7-6. 求无限长载流圆柱形导体的磁场分布.

对称性分析:





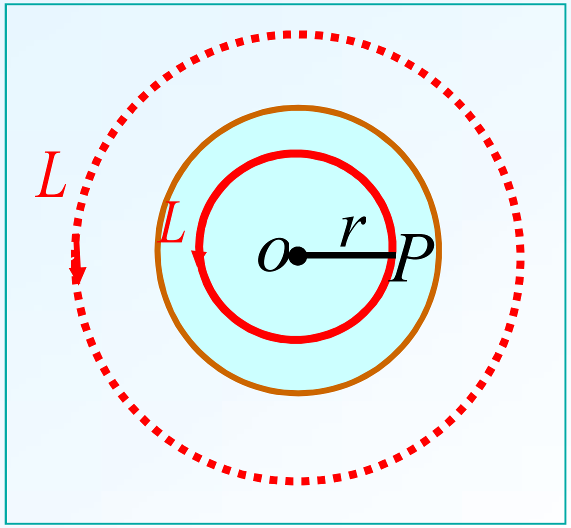
在$\perp I$平面内,作以O为中心、半径r的圆环L;L上各点等价:$\vec{B}$大小相等,方向沿切向.以L为安培环路,逆时针绕向为正 $\circlearrowleft \oplus$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{内}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\sum I_{内}$$

$r \geq R$: $\quad \sum I_{内} = I$

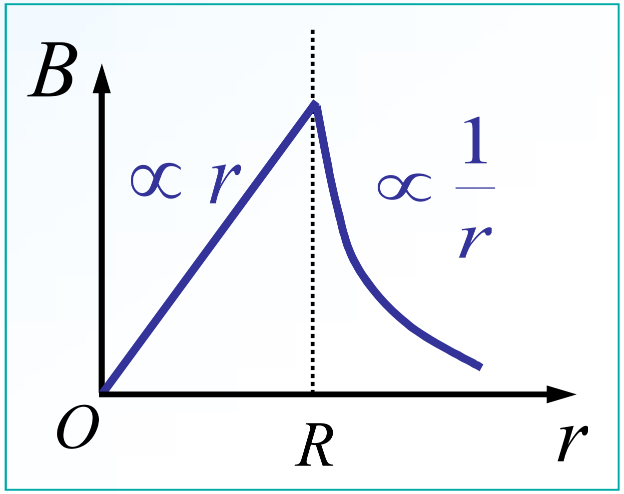
$$B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$



$$B=\frac{\mu_0}{2\pi r}\sum I_{内}$$

$$r\le R:\ \sum I_{内}=\frac{I}{\pi R^2}\cdot\pi r^2=\frac{Ir^2}{R^2}$$

$$B_{内}=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}\propto r$$

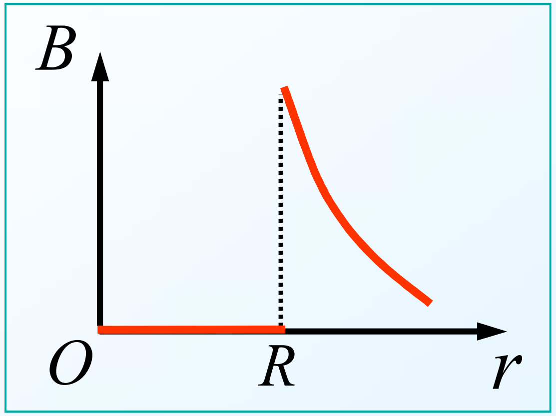


$\vec{B}$方向与I指向满足右旋关系

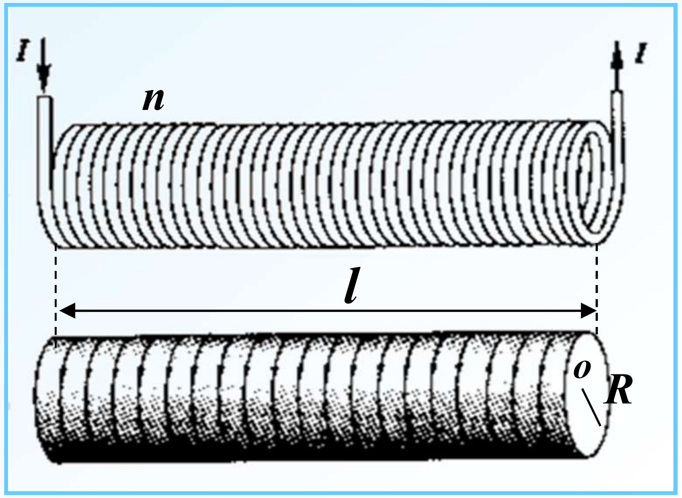
$$B_{内}=0 \qquad B_{外}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

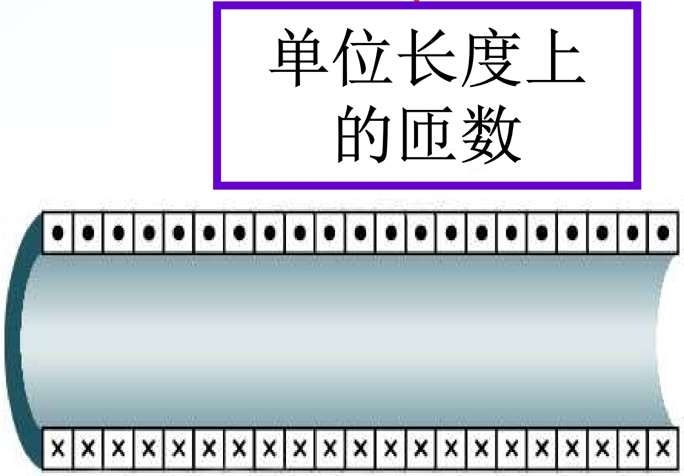
$\vec{B}_{外}$方向与I指向满足右旋关系

思考： 无限长均匀载流直圆筒 B–r曲线？

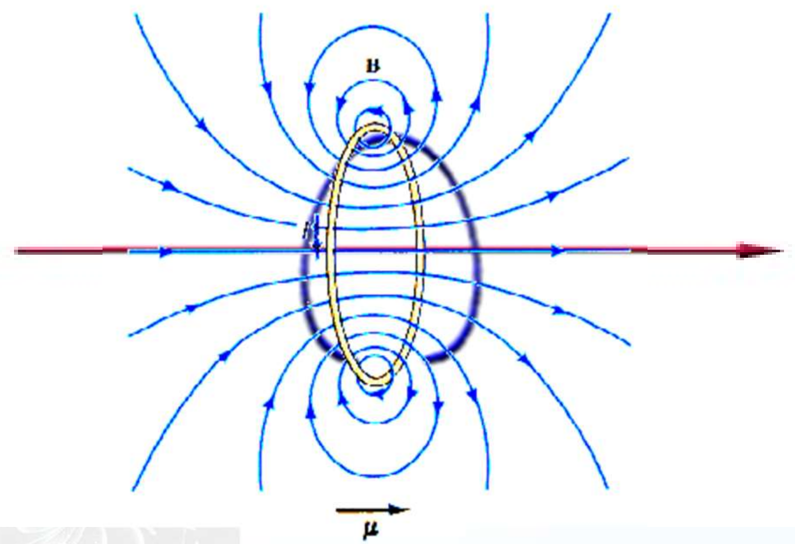


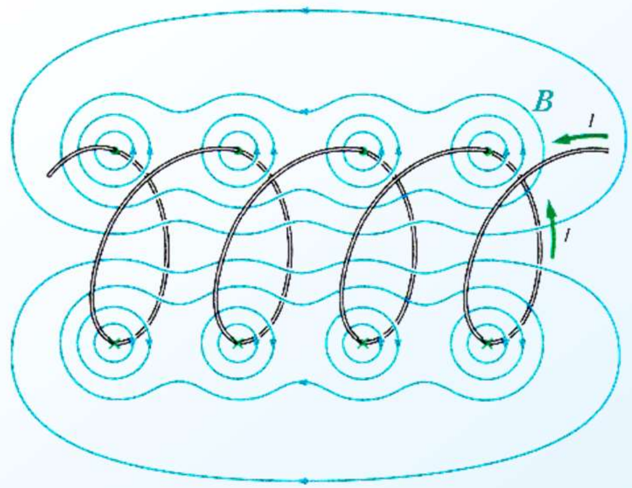
例7-7. 求长直密绕螺线管内的磁感强度(I, n已知).

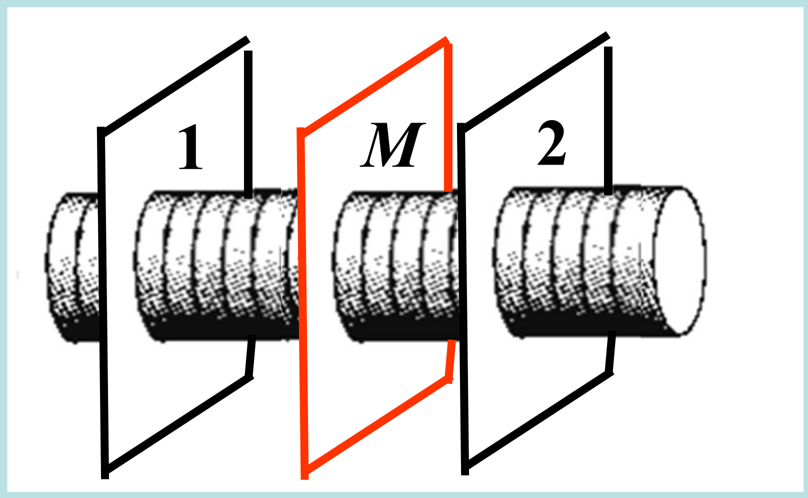


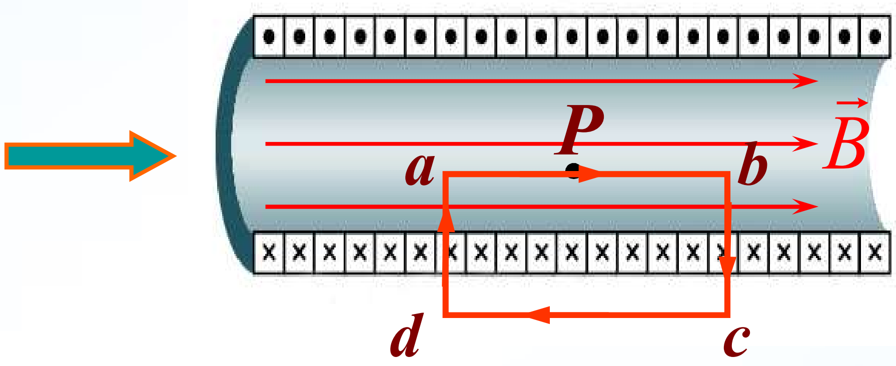


模型： 螺距为零, 视为一系列平行圆电流紧密排列.









管内中央部分，轴向B均匀，管外B近似为零

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

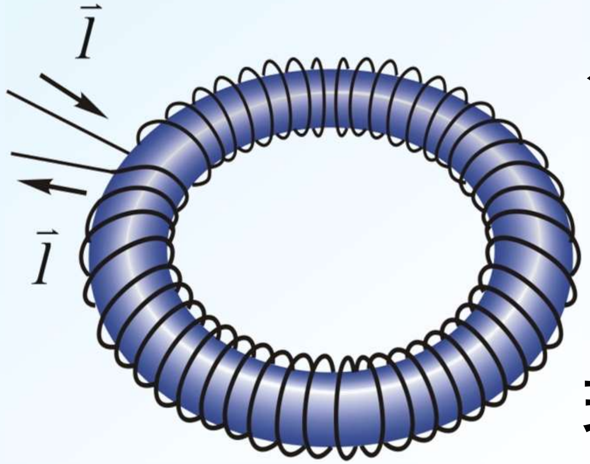
$$= \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} + 0 + 0 + 0 = B\overline{ab}$$

$$\sum I_{内} = nI\overline{ab}$$

$$\boxed{B = \mu_0 nI}$$

由安培环路定律：$B\overline{ab} = \mu_0 nI\overline{ab}$

例7-8. 求载流螺绕环的磁场分布(R_1、R_2、N、I已知).

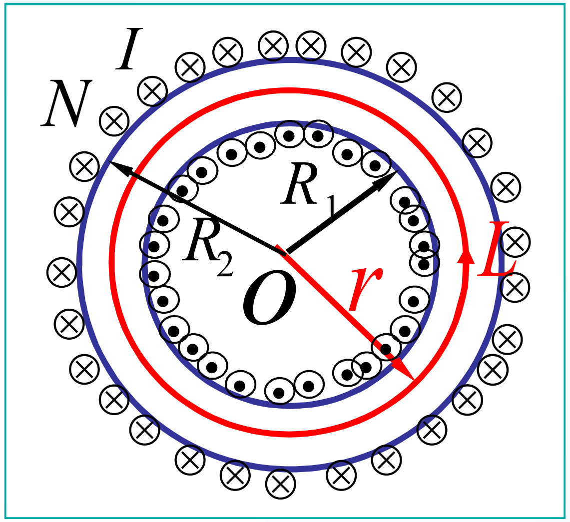


对称性分析:

相等 $|\vec{B}|$ 点的集合

同心圆环

环上各 $\vec{B}$ 方向:切向

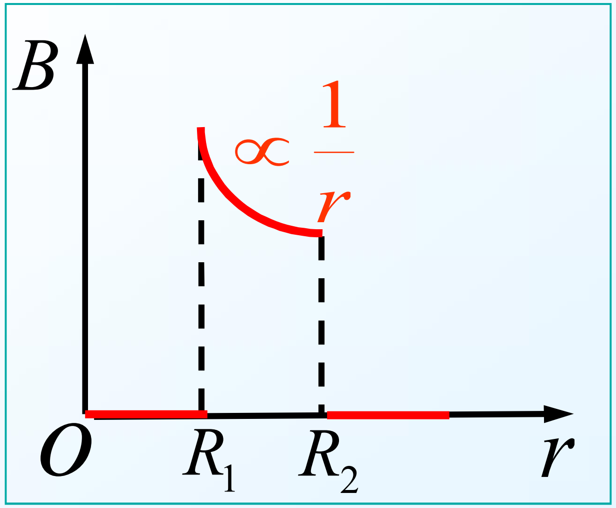


以中心O, 半径 r 的圆环为安培环路 ⊕

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{内}$$

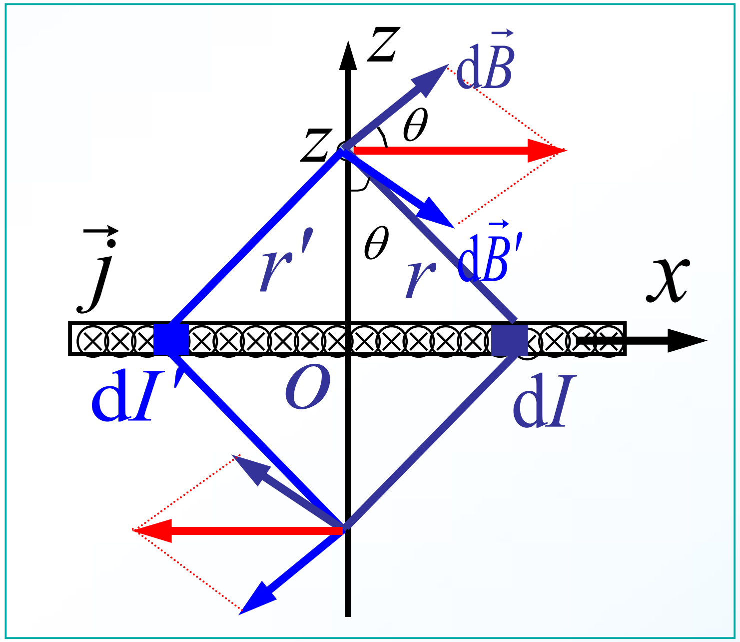
$$r<R_1,\quad r>R_2:\ \sum I_{内}=0 \qquad B_{外}=0$$

$$R_1<r<R_2:\quad \sum I_{内}=NI \quad B_{内}=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



例7-9. 无限大薄导体板均匀通过电流I时的磁场分布.

解一、用叠加原理



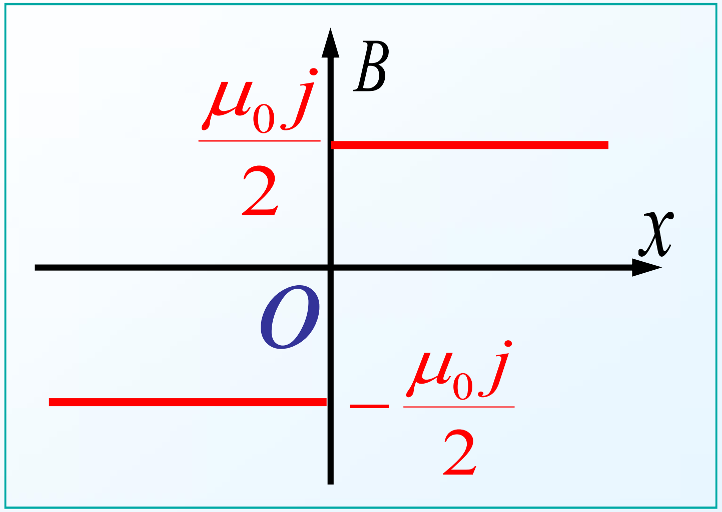
$$\mathrm{d}I = j\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi r}$$

由对称性：$B_z = \int \mathrm{d}B_z = 0$

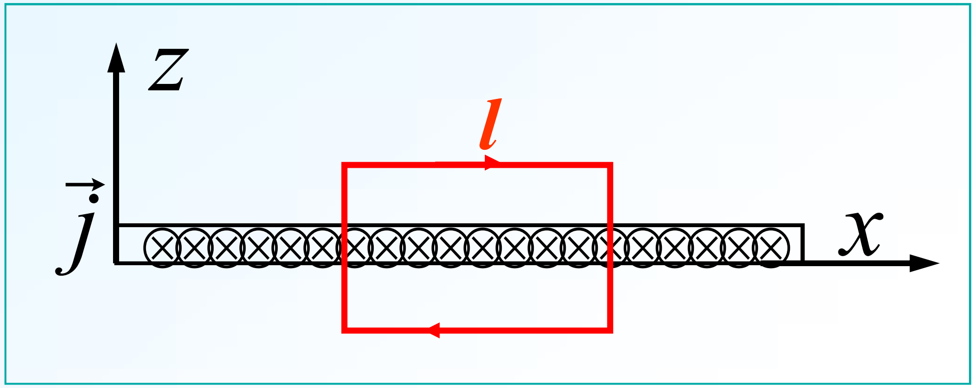
$$B = \int \mathrm{d}B_x = \int \mathrm{d}B\cos\theta = \int \frac{\mu_0 j\mathrm{d}x}{2\pi r}\cdot\frac{z}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 zj}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+z^2}$$

$$= \frac{\mu_0 zj}{2\pi}\cdot\frac{1}{z}\operatorname{arctg}\frac{x}{z}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 j}{2}$$



解二、用安培环路定理



在对称性分析的基础上

选如图安培环路 $\oplus$

由：$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2lB = \mu_0 jl$　　得：$B = \dfrac{\mu_0 j}{2}$

思考：如果载流平面不是无限宽，

能否用叠加原理求解？

能否用安培环路定理求解？