# 武汉大学计算机学院
# 2009-2010学年第二学期2008级
# 《离散数学》期末考试试卷（A）

学号：__________ 姓名：_______________ 专业：_______________ 成绩：_______________

(注：①考试时间为120分钟；②所有的解答必须写在答题纸上，并注明题号。)

一、 试求下述命题公式$G$的主析取和主合取范式： (10分)

$$(P \to Q) \to R$$

二、 写出下列结论的证明序列： (20分，10+10)

(1) 前提：$P \to Q,\quad Q \to R,\quad \neg R \wedge S.$
结论：$\neg P$;

(2) 前提：$\forall x(P(x) \to \neg Q(x)),\quad \forall x(Q(x) \vee R(x)),\quad \exists x \neg R(x).$
结论：$\exists x \neg P(x).$

三、 设有函数$f: A \to B$，定义函数$g: \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, $\forall S \in \mathcal{P}(B)$ (注: $\mathcal{P}(A)$为集合$A$的幂集合)，有 (20分，10+5+5)

$$g(S) = \{\, a \,|\, a \in A \wedge f(a) \in S \,\}\ (\text{即} f^{-1}(S))$$

(1) 试证明，如果$f$是单射，则$\forall X \subseteq A$，$f^{-1}(f(X)) = X$；

(2) 试证明，当$f$是单射时，$g$是满射；

(3) 试以集合$A = \{\, a, b \,\}$到$B = \{\, c, d \,\}$上的函数为例说明当$f$不是单射时，$g$不是满射.

四、 设$A$为集合，集合$P$是集合$A$上所有的划分组成的集合，即$P = \{\, S \,|\, S\text{是}A\text{的划分} \,\}$，定义关系$R \in P \times P$, $\forall S, T \in P$，$\langle S, T \rangle \in R$ iff 若$\forall u \in S$，则存在$v \in T$，使得$u \subseteq v$. 如$A = \{\, a, b, c \,\}$，设$S = \{\, \{\, a \,\}, \{\, b, c \,\} \,\}$，$T = \{\, \{\, a, b, c \,\} \,\}$，则$\langle S, T \rangle \in R$: (15分，5+5+5)

(1) 设$A = \{\, a, b, c \,\}$，试用枚举法表示集合$A$上所有的划分组成的集合$P$；

(2) 证明：$R$是偏序关系；

(3) 试用性质法表示集合$P$的最大元素和最小元素.

五、 设$\langle G,*,e\rangle$是群，$H$，$K$是其子群，在$G$上定义二元关系$R$：$\forall a,b\in G$，$aRb$ iff 存在$h\in H$，$k\in K$，使得$b=h*a*k$. 证明：(20分，每小题5分)

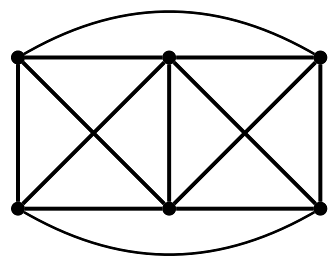
(1) $R$是$G$上的等价关系;

(2) 试证明$\forall h,h'\in H$，$k,k'\in K$，$hRh'$, $kRk'$；

(3) 试证明$\forall a,b\in H\cup K$, $aRb$;

(4) 若$|H|=m$，$|K|=n$，$|G|=mn$，$m$与$n$互素，$[a]_R$是$R$的某个等价类，且$[a]_R$是$G$的一个子群，则$R=G\times G$.

六、 设判别下面的简单无向图是否为平面图： (8分)



七、 设无向图$G(n,m)$是树，其结点最大度数为$k(k\geqslant 2)$，证明：$G$中至少有$k$片树叶. (7分)