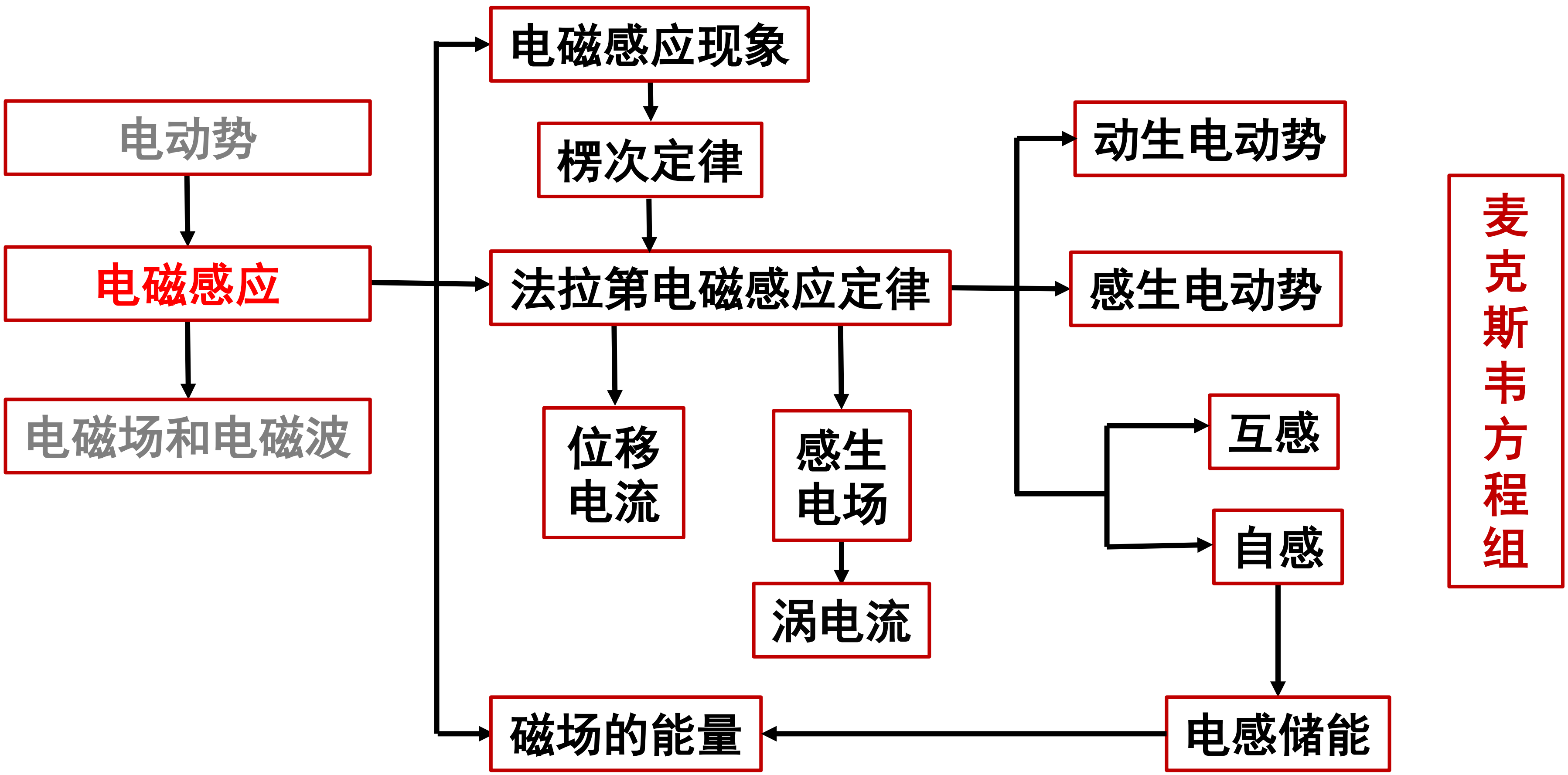
变化的电磁场

习题课

知识结构



- **重点难点**

感应电动势的计算

一、选择题

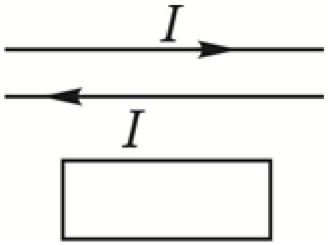
1. 两根无限长平行直导线载有大小相等方向相反的电流 I，均以 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 的变化率增长，一矩形线圈位于导线平面内（如图），则：

[　　B　　] （A）线圈中无感应电流.

（B）线圈中感应电流为顺时针方向.

（C）线圈中感应电流为逆时针方向.

（D）线圈中感应电流方向不确定.



按题意，通过矩形线圈的磁通量随时间穿出增加，由楞次定律可确定，电流为顺时针方向.

知识点：楞次定律

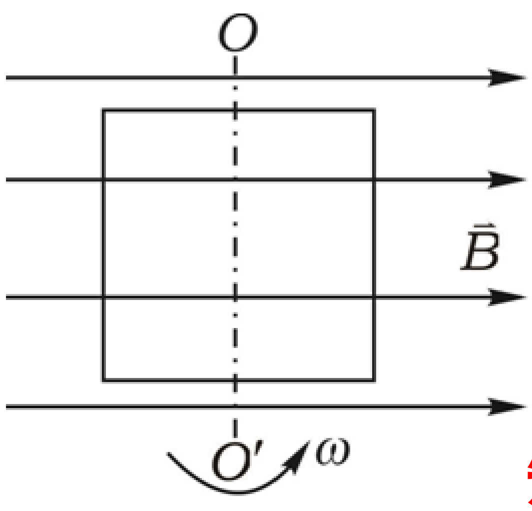
2．一闭合正方形线圈放在均匀磁场中，线圈可绕通过其中心且与一边平行的转轴 OO'转动，转轴与磁场方向垂直，转动角速度为 ω，如图所示．用下述哪一种办法可以使线圈中感应电流的幅值增加到原来的两倍（导线的电阻不能忽略）？

[**D**]（A）把线圈的匝数增加到原来的两倍.

（B）把线圈的面积增加到原来的两倍,而形状不变.

（C）把线圈切割磁力线的两条边增长到原来的两倍.

（D）把线圈的角速度 ω 增大到原来的两倍.



$$i=-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(BS\cos\omega t\right)$$

$$=\frac{BS\omega}{R}\sin\omega t$$

知识点：法拉第电磁感应定律、感应电流

3．对于单匝线圈取自感系数的定义式为 $L=\dfrac{\Phi}{I}$．当线圈的几何形状、大小及周围磁介质分布不变，且无铁磁性物质时，若线圈中的电流强度变小，则线圈的自感系数 L

[C]（A）变大，与电流成反比关系．

（B）变小．

（C）不变．

（D）．变大，但与电流不成反比关系

电流 I 变化，磁通量 Φ 也随着变化.

自感系数由线圈自身的性质决定.

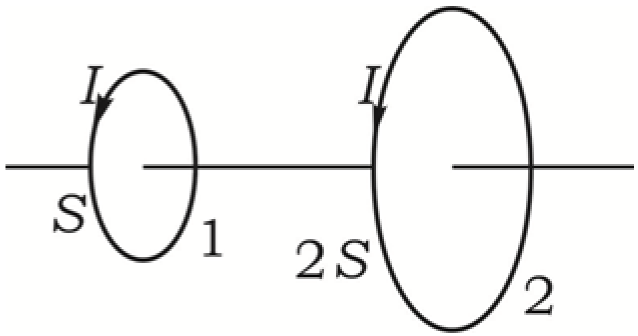
知识点：自感系数

4．面积为 S 和 $2S$ 的两圆线圈 1、2 如图放置，通有相同的电流 I．线圈 1 的电流所产生的通过线圈 2 的磁通用 Φ_{21} 表示，线圈 2 的电流所产生的通过线圈 1 的磁通用 Φ_{12} 表示，则 Φ_{21} 和 Φ_{12} 的大小关系为：

[C]（A）$\Phi_{21}=2\Phi_{12}$．　（B）$\Phi_{21}>\Phi_{12}$．

（C）$\Phi_{21}=\Phi_{12}$．　（D）$\Phi_{21}=\frac{1}{2}\Phi_{12}$．

互感系数的定义，$M=\dfrac{\Phi_{12}}{I_2}=\dfrac{\Phi_{21}}{I_1}$



$\because I_1=I_2 \quad \therefore \Phi_{12}=\Phi_{21}$

知识点：互感系数

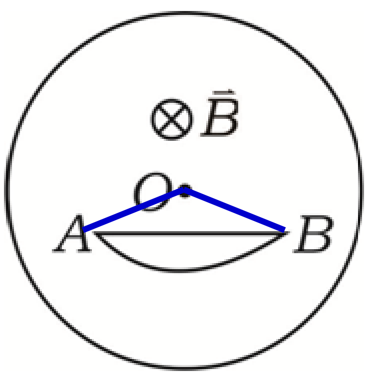
5．在圆柱形空间内有一磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场，如图所示．$\vec{B}$ 的大小以速率 $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ 变化．在磁场中有 A、B 两点，其间分别放置直导线 AB 和弯曲的导线 AB，则

[**D**]（A）电动势只在直导线 AB 中产生．

（B）电动势只在弯曲的导线 AB 中产生．

（C）电动势在直导线 AB 和弯曲的导线 AB 都产生，且两者大小相等．

（D）直导线 AB 中的电动势小于弯曲的导线 AB 中的电动势．



$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

三角形*OAB* < 扇形*OAB*

知识点：感生电动势

6．真空中一根无限长直细导线上通电流 I，则距导线垂直距离为 a 的空间某点处的磁能密度为

[**B**]

(A) $\frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right)^2$.　　(B) $\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right)^2$.

(C) $\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi a}{\mu_0 I}\right)^2$.　　(D) $\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2a}\right)^2$.

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right)^2$$

知识点：磁场能量密度

7．电磁波的电场强度 $\vec{E}$、磁场强度 $\vec{H}$ 和传播速度 $\vec{u}$ 的关系是

[**B**]（A）三者互相垂直，而 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 相位相差 $\frac{\pi}{2}$.

（B）三者互相垂直，而 $\vec{E}$、$\vec{H}$、$\vec{u}$ 构成右旋系统.

（C）三者中 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 是同方向的，但都与 $\vec{u}$ 垂直.

（D）三者中 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 可以是任意方向的，但都必须与 $\vec{u}$ 垂直.

能流密度矢量(坡印廷矢量):

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

知识点：坡印廷矢量

8. 对位移电流，有下述四种说法，请指出哪一种说法正确.

[A]（A）位移电流的本质反映了变化的电场.

（B）位移电流是由线性变化磁场产生的.

（C）位移电流的热效应服从焦耳-楞次定律.

（D）位移电流的磁效应不服从安培环路定理.

$$I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

知识点：位移电流

二、填空题

1．用导线制成一半径为$r=10\,\mathrm{cm}$的闭合圆形线圈，其电阻$R=10\,\Omega$，均匀磁场垂直于线圈平面．欲使电路中有一稳定的感应电流$i=0.010\,\mathrm{A}$，B的变化率应为

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

$$i=\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot\pi r^2$$

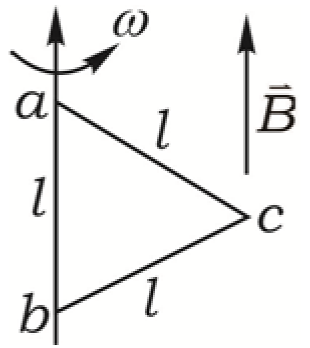
$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=3.18\,\mathrm{T}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

知识点：法拉第电磁感应定律、感应电流

2．如图所示，等边三角形的金属框，边长为l，放在均匀磁场中，ab边平行于磁感应强度$\vec{B}$，当金属框绕ab边以角速度ω转动时，ca边上沿ca的电动势为______________，金属框内的总电动势为______________（规定电动势沿$abca$绕向为正值）.

$$\mathscr{E}_{ac}=\int_a^c(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\int_0^l \omega l\cos 30^\circ\cdot B\cos 30^\circ dl$$

$$\therefore\ \mathscr{E}_{ca}=-\mathscr{E}_{ac}=-\frac{3}{8}\omega Bl^2$$

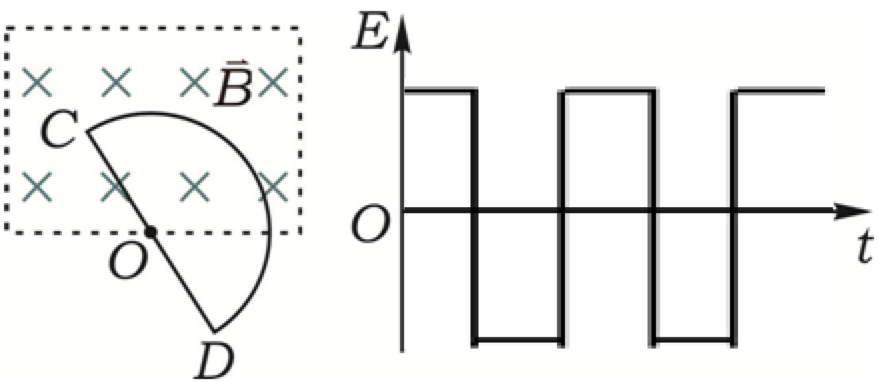


$$\mathscr{E}_{ac}=\mathscr{E}_{bc}\qquad \therefore\ \mathscr{E}_{abca}=0$$

知识点：动生电动势

3．如图所示，矩形区域为均匀稳定磁场，半圆形闭合导线回路在纸面内绕轴 O 作逆时针方向匀角速转动，O 点是圆心且恰好落在磁场的边缘上，半圆形闭合导线完全在磁场外时开始计时．画出半圆形导线回路中产生的感应电动势随时间的变化曲线．

$$\Phi = BS = B \cdot \pi R^2 \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{BR^2\omega}{2} t$$

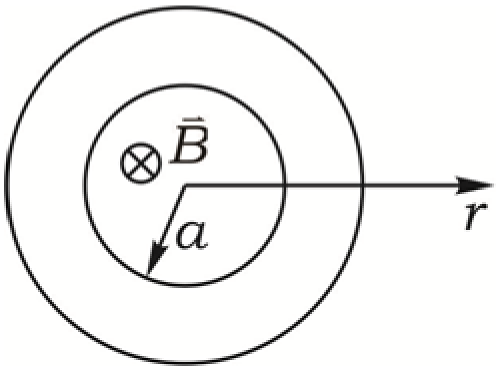


$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{BR^2\omega}{2}$$

知识点：感应电动势

4. 如图所示，一长圆柱状磁场，磁场方向沿轴线并垂直纸面向里，磁场大小既随到轴线的距离 r 成正比而变化，又随时间 t 作正弦变化，即 $B = B_0 r\sin\omega t$，B_0、ω 均为常量. 若在磁场内放一半径为 a 的金属圆环，环心在圆柱状磁场的轴线上，则金属环中的感生电动势为________________.

取回路正向顺时针，则



$$\Phi = \int B 2\pi r\mathrm{d}r = \int_0^a B_0 2\pi r^2 \sin\omega t\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2\pi}{3}B_0 a^3 \sin\omega t$$

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi}{3}B_0 a^3 \omega\cos\omega t$$

知识点：法拉第电磁感应定律

5．桌子上水平放置一个半径$r=10\,\mathrm{cm}$的金属圆环，其电阻$R=1\Omega$．若地球磁场磁感应强度的竖直分量为$5\times10^{-5}\,\mathrm{T}$．那么将环面翻转一次，沿环流过任一横截面的电荷$q=$ $\underline{\mathbf{3.14\times10^{-6}\,C}}$．

$$q=\int_t I\mathrm{d}t=-\frac{1}{R}\int_t\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{R}\Delta\Phi$$

$$=-\frac{1}{R}(\Phi_2-\Phi_1)=-\frac{1}{R}\left[\left(-B\cdot\pi r^2\right)-B\cdot\pi r^2\right]$$

$$=\frac{1}{R}2B\cdot\pi r^2$$

知识点：法拉第电磁感应定律

6. 一自感线圈中，电流强度在$0.002\,\mathrm{s}$内均匀地由$10\,\mathrm{A}$增加到$12\,\mathrm{A}$，此过程中线圈内自感电动势为$400\,\mathrm{V}$，则线圈的自感系数$L=$____________.

$$\mathscr{E}_L=\left|-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|$$

$$L=\mathscr{E}_L\Big/\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=400\Big/\frac{12-2}{0.002}=0.4\,\mathrm{H}$$

知识点：自感电动势、自感系数

7．真空中两只长直螺线管 1 和 2，长度相等，单层密绕匝数相同，直径之比 $d_1 : d_2 = 1:4$．当它们通以相同电流时，两螺线管贮存的磁能之比 $W_{m1} : W_{m2} =$ 1:16 ．

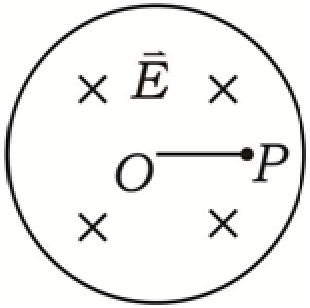
$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \qquad L = \mu n^2 lS$$

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{4}\pi d_1^2 : \frac{1}{4}\pi d_2^2$$

知识点：磁场能量

8．图示为一圆柱体的横截面，圆柱体内有一均匀电场 $\vec{E}$，其方向垂直纸面向内，$\vec{E}$ 的大小随时间 t 线性增加，P 为柱体内与轴线相距为 r 的一点，则 P 点的位移电流密度的方向为<u>垂直纸面向里</u>；P 点感生磁场的方向为__________.

垂直OP连线向下



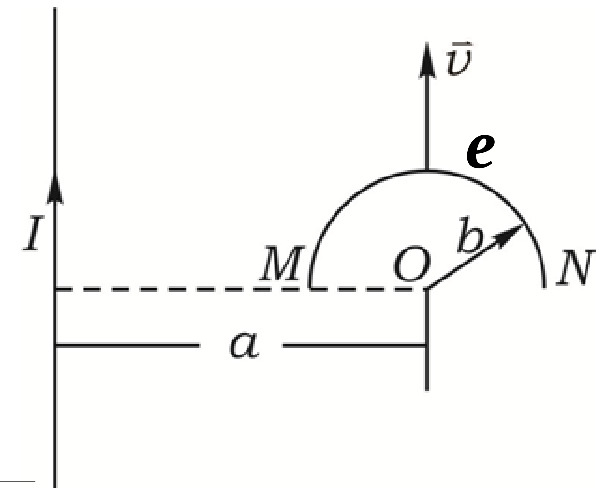
$$I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

电流方向和磁场方向互为满足右手螺旋.

知识点：位移电流

三、计算题

1．如图所示，载有电流的 I 长直导线附近放一导体半圆环 MN，半圆环与长直导线共面，且端点 MN 的连线与长直导线垂直．半圆环的半径为 b，环心 O 与导线相距 a．设半圆环以速度 v 平行导线平移，求半圆环内感应电动势的大小和方向．



解：动生电动势 $\varepsilon_{MN}=\int_{MN}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

为计算简单，可引入一条辅助线 MN,构成闭合回路 $MeNM$, 闭合回路总电动势

$$\varepsilon_{总}=\varepsilon_{MN}+\varepsilon_{\overline{NM}}=0 \quad \varepsilon_{MN}=-\varepsilon_{\overline{NM}}=\varepsilon_{\overline{MN}}$$

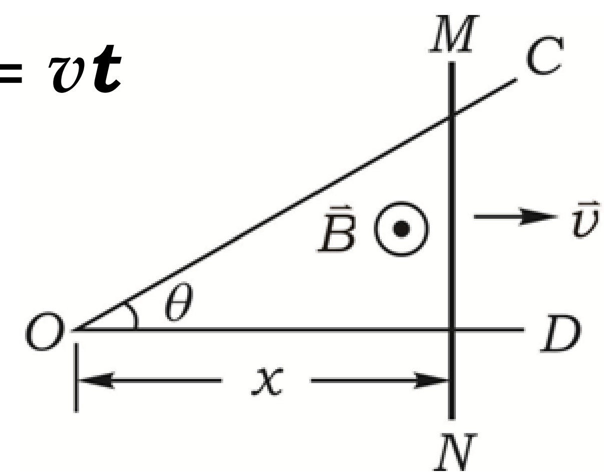
$$\varepsilon_{\overline{MN}}=\int_{\overline{MN}}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{a-b}^{a+b}-v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\mathrm{d}x=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}$$

负号表示 ε_{MN} 的方向与 x 轴相反． 方向$N\rightarrow M$．

2．如图所示，有一弯成θ角的金属架 COD 放在磁场中，磁感应强度$\vec{B}$的方向垂直于金属架 COD 所在平面．一导体杆 MN 垂直于 OD 边，并在金属架上以恒定速度$\vec{v}$向右滑动，$\vec{v}$与 MN 垂直．设$t=0$时，$x=0$，求下列两情形，框架内的感应电动势．

（1）磁场分布均匀，且$\vec{B}$不随时间改变．

（2）非均匀的时变磁场$B=Kx\cos\omega t$．（其中K为常量）



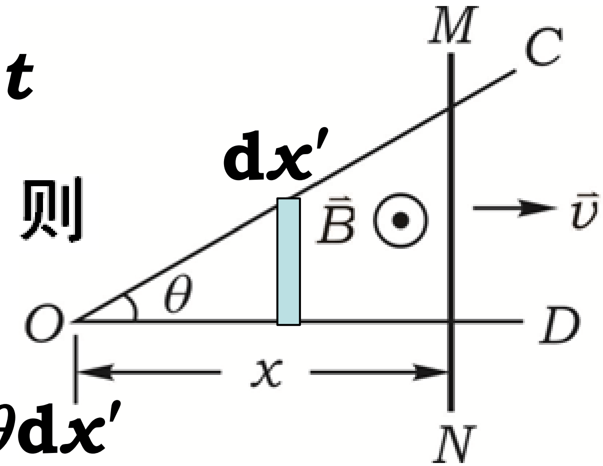
解：(1) $\Phi=\dfrac{1}{2}Bxy \quad y=x\,\mathrm{tg}\,\theta \quad x=vt$

由法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}B\,\mathrm{tg}\,\theta\,x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}B\tan\theta 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=B\tan\theta\,v^2t$$ 方向为 $M\rightarrow N$.

(2) 对于非均匀时变磁场 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \cos\omega \boldsymbol{t}$



取回路绕行的正向为 $O \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow \mathrm{O}$，则

$$\mathrm{d}\Phi = B\,\mathrm{d}S = By'\,\mathrm{d}x' \qquad y' = x'\tan\theta$$

$$\mathrm{d}\Phi = Bx'\tan\theta\mathrm{d}x' = Kx'^2\cos\omega t\tan\theta\mathrm{d}x'$$

$$\Phi = \int_0^x Kx'^2\cos\omega t\tan\theta\mathrm{d}x' = \frac{1}{3}Kx^3\cos\omega t\tan\theta$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}K\omega x^3\sin\omega t\tan\theta - Kx^2 v\cos\omega t\tan\theta$$

$$= Kv^3\tan\theta\left(\frac{1}{3}\omega t^3\sin\omega t - t^2\cos\omega t\right)$$

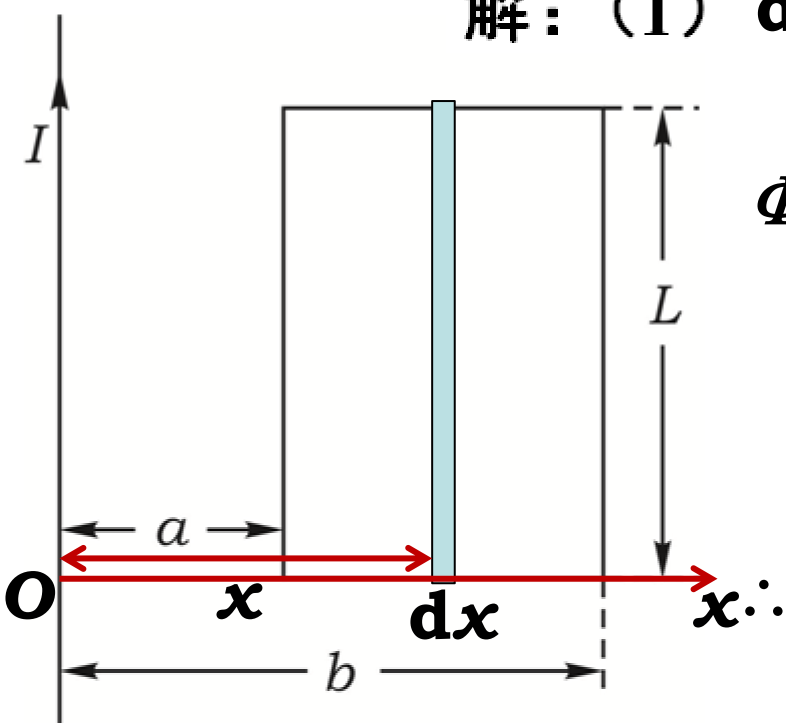
$\varepsilon_i > 0$，则 ε_i 方向与所设绕行正向一致，

$\varepsilon_i < 0$，则 ε_i 方向与所设绕行正向相反.

3．无限长直导线通以电流 $I=I_0\mathrm{e}^{-4t}$．有一与之共面的矩形线圈，其边长为 L 的长边与长直导线平行．两长边与长直导线的距离分别为 a 、 b，位置如图所示．

求：（1）矩形线圈内的感应电动势的大小和感应电动势的方向．

（2）导线与线圈的互感系数．



解：（1） $$\mathrm{d}\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=BL\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}L\mathrm{d}x$$

$$\Phi=\int_a^b\frac{\mu_0 I}{2\pi x}L\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 L}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\cdot\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore\ \varepsilon_i=\frac{2\mu_0 LI_0}{\pi}\ln\frac{b}{a}\mathrm{e}^{-4t}$$

方向为顺时针

$$(2)\quad M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\dfrac{\mu_0 LI}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}}{I}=\frac{\mu_0 L}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

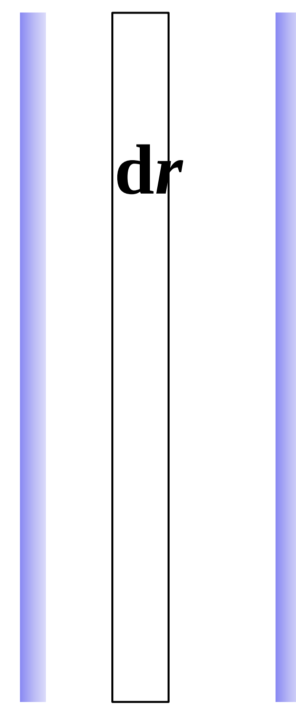
4．两根长直导线平行放置，导线本身的半径为 a，两根导线间距离为 b（$b >> a$）. 两根导线中分别通以恒定电流 I，两电流方向相反.

（1）求这两导线单位长度的自感系数（忽略导线内磁通）.

（2）若将导线间距离由 b 增大到 $2b$，求磁场对单位长度导线做的功.

（3）导线间的距离由 b 增大到 $2b$，则对应于导线单位长度的磁能改变了多少？是增加还是减少？

解：(1)　两直导线在无穷远处形成闭合回路.



$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_a^{b-a}\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(b-r)}\right] l\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 I\, l}{\pi}\ln\frac{b-a}{a}$$

∴　单位长度自感系数为：

$$L_0=\frac{L}{l}=\frac{\Phi}{I\,l}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{b-a}{a}$$

(2) 两等值反向的直线电流间的作用力为排斥力，将导线沿受力方向移动 dr 距离时，磁场力对单位长度导线做功为：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}\cdot\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

其中，$\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$

$$\mathrm{d}F=I\,\mathrm{d}l\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$$

$$\therefore\ W=\int_b^{2b}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln 2$$

(3) 导线间距为 $2b$ 时的单位长度自感系数为

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{2b-a}{a}$$

磁能增量 $\Delta W = \frac{1}{2}L'I^2 - \frac{1}{2}L_o I^2$

$$= \frac{1}{2}I^2\left(\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{2b-a}{a} - \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{b-a}{a}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{2b-a}{b-a} > 0$$

这说明磁能增加了.