

武汉大学计算机学院2010-2011学年第一学期
2009级《离散数学》(A)考试标准答案

一、试求下述命题公式 G 的主析取和主合取范式: (10分)

$$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow R$$

主析取范式:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

主合取范式: $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$.

二、写出下列结论的证明序列: (16分, 8+8)

(1) 前提: $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$, $(Q \rightarrow P) \vee \neg R$, R .

结论: $P \leftrightarrow Q$;

证明:

① $(Q \rightarrow P) \vee \neg R$	引入前提	提	
② R	引入前提	⑥ $P \rightarrow Q$	④ + ⑤ + MT
③ $Q \rightarrow P$	① + ② + 析取三段论	⑦ $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	③ + ⑥ + 合
④ $R \vee S$	② + 加法式	取式	
⑤ $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$	引入前	⑧ $P \leftrightarrow Q$	⑦ + T

(2) 前提: $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$, $\forall x(Q(x) \vee R(x))$, $\exists x \neg R(x)$.

结论: $\exists x \neg P(x)$.

证明:

① $\exists x \neg R(x)$	引入前提	⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	引入前提
② $\neg R(a)$	① + ES	⑦ $P(a) \rightarrow \neg Q(a)$	⑥ + US
③ $\forall x(Q(x) \vee R(x))$	引入前提	⑧ $\neg P(a)$	⑦ + ⑤ + MT
④ $Q(a) \vee R(a)$	③ + US	⑨ $\exists x \neg P(x)$	⑧ + EG
⑤ $Q(a)$	② + ④ + 析取三段论		

三、偏序集 $\langle \{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 72\}, | \rangle$, $m | n$ 当且仅当 m 整除 n . 完成下列各题 (15分, 5+5+5)

(1) 求极大元素和极小元素;

解: 极小元素: 2, 9; 极大元素: 27, 48, 72.

(2) 求子集 $\{48, 72\}$ 的所有下界和最大下界;

解: 下界: 2, 4, 6, 12, 最大下界12.

- (3) 证明: 偏序集 $\langle P, \leq \rangle$, 若 a 是 P 的最大元素, 则 P 仅有一个极大元素.
证明: 反证法, $\because a$ 是最大元素, $\therefore a$ 是极大元素. 设 $b \in P$, b 是极大元素, 且 $b \neq a$. 因为 a 是最大元素, 所以 $b \leq a$, 而 b 是极大元素, 则所有的元素与 b 要么不可比较, 要么小于等于 b , 而 a 和 b 是可比较的, 则 $a \leq b$. 由偏序关系的反对称性有 $a = b$. 矛盾

四、设 A 为非空集合, $A^A = \{f \mid f: A \rightarrow A\}$, 关系 $\mathcal{R} \subseteq A^A \times A^A$, $\forall f, g \in A^A$, $f \mathcal{R} g \Leftrightarrow f(A) = g(A)$, 完成下列各题: (15分, 9+3+3)

- (1) 证明 \mathcal{R} 是 A^A 上的等价关系;

证明:

- ① 自反性: $\forall f \in A^A$, $f(A) = f(A)$, 即 $f \mathcal{R} f$;
- ② 对称性: 设 $f \mathcal{R} g$, 则 $f(A) = g(A)$, 即 $g(A) = f(A)$, $\therefore g \mathcal{R} f$;
- ③ 传递性: 设 $f \mathcal{R} g \wedge g \mathcal{R} h$, 则 $f(A) = g(A)$, $g(A) = h(A)$, 这样 $f(A) = h(A)$, $\therefore f \mathcal{R} h$;

故 \mathcal{R} 是等价关系.

- (2) 若 $|A| = n$, 求 $|\llbracket 1_A \rrbracket_{\mathcal{R}}|$, 其中 1_A 是集合 A 上的恒等变换;

解: 设 $f \mathcal{R} 1_A$, 则 $f(A) = 1_A(A) = A$, 即 f 是满射, 而 A 是有限集合, 则 A 上的满射也是单射, 故 $f \mathcal{R} 1_A$ 当且仅当 f 是双射, 这样 $\llbracket 1_A \rrbracket_{\mathcal{R}} = \{f \mid f \in A^A \wedge f \text{ 是双射}\}$, 故 $|\llbracket 1_A \rrbracket_{\mathcal{R}}| = n!$.

- (3) 证明: 集合 A^A/\mathcal{R} 和集合 $2^A - \{\emptyset\}$ 存在双射.

证明: 定义函数 $h: A^A \rightarrow 2^A$, $f \mapsto f(A)$. 则 $\forall B \subseteq A \wedge B \neq \emptyset$, 设 $b \in B$, 定义函数 $g_B: A \rightarrow A$,

$$g_B(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in B \\ b & \text{if } x \notin B \end{cases}.$$

则 $g_B(A) = B$, 这样 $h(A^A) = 2^A - \{\emptyset\}$.

设 $=_h$ 是 h 所诱导的等价关系, 则 $f =_h g \iff h(f) = h(g)$, 即 $f(A) = g(A)$, 或 $f \mathcal{R} g$, $\therefore =_h = \mathcal{R}$. 由函数标准分解定理, 存在双射 $\bar{h}: A^A/\mathcal{R} \rightarrow h(A^A)$, 即 A^A/\mathcal{R} 和 $2^A - \{\emptyset\}$ 间存在双射.

五、设 $\langle S_n, \circ \rangle$ 是 n 次对称群, 其中 S_n 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上所有置换的集合, \circ 是函数的合成运算. 设 $H \subseteq S_n$, $H = \{\pi \mid \pi \in S_n, \text{ 且 } \pi \text{ 是保持元素 } 1 \text{ 不变的置换}\}$: (12分, 8+4)

- (1) 证明 H 是 S_n 的子群;

证明:

- ① $1 \in H$: 设 1 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的恒等变换, 则 1 是 S_n 的么, 而 $1(1) = 1$, $\therefore 1 \in H$.
- ② 运算封闭性: 设 $f, g \in H$, 则 $g \circ f(1) = g(1) = 1$, $\therefore g \circ f \in H$.
- ③ 取逆运算封闭性: 设 $f \in H$, 则 $f^{-1} \in S_n$, $f^{-1} \circ f = 1$, 这样 $f^{-1}(1) = f^{-1}(f(1)) = (f^{-1} \circ f)(1) = 1$. $\therefore f^{-1} \in H$.

综上所述, $H \leq S_n$.

- (2) 设 P 为 H 在 S_n 中的所有左陪集组成的集合, 用性质法描述集合 P , 并求 $|P|$.
 解: $P = \{ \{ f \mid f \in S_n \wedge f(1) = i \} \mid i = 1, 2, \dots, n \}$.
 设 \mathcal{R}_l 是 H 所诱导的左同余关系, 则 $P = S_n / R_l$, 而 $|H| = (n-1)!$, $\therefore |P| = n$.

六、循环群 $\langle N_m, +_m \rangle$, 其中 $N_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ ($n \in \mathbb{N}, m > 0$), $a +_m b = (a+b) \bmod m$, 完成下列各题: (16分, 6+2+6+2)

- (1) 求 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的所有子群;
 解: $\{0\}, \{0, 3\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 (2) 求 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 到 $\langle N_5, +_5 \rangle$ 的所有同态;
 解: 只有唯一的一个平凡同态 $h: N_6 \rightarrow N_5, i \mapsto 0$.
 (3) 设 h 是 $\langle N_m, +_m \rangle$ 到 $\langle N_k, +_k \rangle$ 上的同态, 证明 $h(N_m)$ 是 N_k 的循环子群;
 证明: 由于 h 是同态, 则 $h(N_m) \leq N_k$; 定义函数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow N_m, i \mapsto i \bmod m$, 则 f 是 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 到 N_m 上的满同态. 这样 $h(N_m) = h(f(\mathbb{Z})) = \{ h(f(i)) \mid i \in \mathbb{Z} \} = \{ ih(f(1)) \mid i \in \mathbb{N} \}$. 即 $h(N_m)$ 是循环群.
 (4) 证明 $N_m \simeq N_k$ ($m \geq k$), 当且仅当 $k \mid m$.
 证明:
 必要性: 设 h 是 N_m 到 N_k 上的满同态, 则 $N_m / \ker(h) \cong N_k, \therefore |N_m| / |\ker(h)| = |N_k|$. 即 $m = k |\ker(h)|$. 故 $k \mid m$.
 充分性: 设 $m = pk$, 定义函数 $h: N_m \rightarrow N_m, i \mapsto pi$, 则 h 是 N_m 上的自同态, 且 $h(N_m) = \langle p \rangle$. 而 $|\langle p \rangle| = m/p = k$, 这样 $\langle p \rangle$ 是一个阶数为 k 的循环群, 而阶数为 p 的循环群彼此同构, 因此存在 $\langle p \rangle$ 到 N_k 上的同构 f , 这样 $f \circ h$ 是 N_m 到 N_k 上的满同态, 故 $N_k \simeq N_k$.

七、简单无向图 $G(n, m)$, 其中顶点数 n 为奇数. 证明: 图 G 中奇数度数顶点的个数与图 \overline{G} 中奇数度数的顶点个数相等. (8分)

证明: 设 v 是图 G 的一个顶点, 记 $\deg_G(v)$ 为 v 在图 G 中的度数, $\deg_{\overline{G}}(v)$ 为 v 在图 \overline{G} 中的度数, 则 $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = n - 1$ (偶数). 这样如果 $\deg_G(v)$ 为奇数, 则 $\deg_{\overline{G}}(v)$ 也是奇数; 反之亦然. 故图 G 中奇数度数顶点的个数与图 \overline{G} 中奇数度数的顶点个数相等.

八、设 $G = \langle V, E \rangle$ 是无向连通图. 边 $e \in E$ 称为桥边, 当且仅当 G 删除边 e 后不再连通. 证明: e 是桥边, 当且仅当 e 属于图 G 的每颗生成树. (8分)

证明: 必要性 (反证法): 设 T 是 G 的生成树, 且边 e 不在 T 上, 这样 T 是 G 的一个删除边 e 后还保持连通的子图, 矛盾.

充分性 (反证法): 设 e 不是桥边, 则图 G 删除 e 后还是连通图 (记为 G'), 则对 G' 也存在生成树 T , T 也是 G 的生成树且 e 不在 T 中, 这与条件矛盾.