离散数学 2013 答案

一．求下列公式的主析取范式和主合取范式：（10 分）

$$(P \to Q \wedge R) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$$

主析取范式：$(P\wedge Q\wedge R) \vee(\neg P\wedge \neg Q\wedge \neg R) \Leftrightarrow \Sigma(0,7)$

主合取范式：$(P\vee \neg Q\vee \neg R) \wedge(\neg P\vee Q\vee \neg R) \wedge(P\vee Q\vee \neg R) \wedge(\neg P \vee \neg Q\vee R) \wedge(P\vee \neg Q\vee R) \wedge(\neg P\vee Q\vee R) \Leftrightarrow \Pi(1,2,3,4,5,6)$

二．分别证明下列结论的有效性（写出证明序列）：（8+8=16 分）

（1）前提：$P\wedge Q\to R$, $\neg R\vee S$，$\neg S$

结论：$\neg P\vee \neg Q$

证一：反证法

①	$\neg(\neg P\vee \neg Q)$	否定前提
②	$P\wedge Q$	①，T 规则
③	$P\wedge Q\to R$	前提
④	R	②,③，MP 规则
⑤	$\neg R\vee S$	前提
⑥	$R\to S$	⑤，T 规则
⑦	S	④,⑥，MP 规则
⑧	$\neg S$	前提
⑨	F	⑦,⑧

证二：直接证明

①	$\neg R\vee S$	前提
②	$R\to S$	①，T 规则
③	$\neg S$	前提
④	$\neg R$	②,③，拒取式
⑤	$P\wedge Q\to R$	前提
⑥	$\neg(P\wedge Q)$	④,⑤，拒取式
⑦	$\neg P\vee \neg Q$	⑥，T 规则

（2）前提：$\forall x(P(x)\to Q(x))$， $\exists x(R(x)\wedge \neg Q(x))$

结论：$\neg\forall x(R(x)\to P(X))$

证明：

①	$\exists x(R(x)\wedge \neg Q(x))$	前提
②	$R(a) \wedge \neg Q(a)$	①,ES
③	$R(a)$	②,化简
④	$\neg Q(a)$	②,化简
⑤	$\forall x (P(x) \to Q(x))$	前提
⑥	$P(a) \to Q(a)$	⑤,US
⑦	$\neg P(a)$	④,⑥,拒取式
⑧	$R(a)\wedge \neg P(a)$	③⑦,合取
⑨	$\neg(\neg R(a)\vee P(a))$	⑧，T 规则
⑩	$\neg(R(a) \to P(a))$	⑨,T 规则
⑪	$\exists x(\neg(R(x) \to P(x)))$	⑩,EG
⑫	$\neg\forall x (R(x) \to P(x))$	⑪,T 规则

三．设 A，B 为集合，$A\neq\varnothing$，$<B, \leq>$ 为偏序集，集合 $B^A = \{ f \mid f: A\to B\}$，定义关系 R 如下：

$R\subseteq B^A\times B^A$，$\forall f, g\in B^A$，$f\,R\,g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad (\forall x\in A)$。

证明：R 为 B^A 上的偏序关系。（12 分）

证：(i) R 具有自反性：$\forall f\in B^A$，$\forall x\in A$，$f(x) \in B$，因 $<B, \leq>$ 为偏序集，$\leq$ 具有自反性，$\therefore f(x)\leq f(x)$，$\therefore f\,R\,f$;

(ii) R 具有反对称性：$\forall f, g\in B^A$，若 $f\,R\,g$ 且 $g\,R\,f$，则 $\forall x$，有 $f(x)\leq g(x)$ 且 $g(x)\leq f(x)$。$\because \leq$ 具有反对称性，$\therefore \forall x$，$f(x)=g(x)$，即 $f=g$ 。

(iii) R 具有传递性：$\forall f, g, h\in B^A$，若 $f\,R\,g$ 且 $g\,R\,h$，则 $\forall x$，有 $f(x)\leq g(x)$ 且 $g(x)\leq h(x)$。$\because \leq$ 具有传递性，$\therefore \forall x$，$f(x)\leq h(x)$，即 $f\,R\,h$。

四．设集合 $S = \{1, 2, \ldots, n\}$，$G =\{ p \mid p: S\to S$，且 p 为双射$\}$，定义 S 上的二元关系 R 如下：

$\forall i, j \in S$，$i\,R\,j \Leftrightarrow \exists\, f \in G$，$f(i) = j$

完成下列各题：（4+6+2=12 分）

（1）设$\circ$为函数的合成运算，证明：$<G, \circ>$ 构成群；

证：(i) 封闭性：$\forall f, g \in G$，$f\circ g$ 仍为 S 上的双射，$\therefore f\circ g\in G$,

(ii) 结合律：$\circ$为函数的合成运算，满足结合律；

(iii) 幺元：设 1_S 为 S 上的恒等函数，$1_S\in G$，且 $\forall f\in G$，$1_S\circ f = f\circ 1_S = f$，$1_S$ 为合成运算$\circ$的幺元；

(iv) 逆元：$\forall f \in G$，$\because f$ 为双射，$\exists\, f^{-1}\in G$，使得 $f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = 1_S$，即 G 中每个元素有逆元；

综上，$<G, \circ>$ 构成群。

（2）证明：关系 R 为 S 上的等价关系；

证：(i) 自反性：设 1_S 为 S 上的恒等函数，$\forall i\in S$，$1_S(i) = i$，$\therefore i\,R\,i$;

(ii) 对称性：$\forall i, j \in S$，若 $i\,R\,j$，则 $\exists\, f \in G$，$f(i) = j$，$\because f$ 为双射，$i = f^{-1}(j)$，即 f^{-1} 为 f 的逆函数，由(1)知，$f^{-1}\in G$，$\therefore j\,R\,i$;

(ii) 传递性：$\forall i, j, k \in S$，若 $i\,R\,j$，$j\,R\,k$，则 $\exists\, f \in G$，$f(i) = j$，且 $\exists\, g \in G$，$g(j) = k$，那么 $g(f(i)) = k$，即 $g\circ f(i) = k$，由(1)知，$g\circ f\in G$,

∴ $i\ R\ k$；综上，R 为 S 上的等价关系。

（3）求集合 S 关于关系 R 的商集 S/R.

解：易知，$\forall\ i, j \in S$，$i\ R\ j$，所以 R 是 S 上的全域关系，即 R=S×S，S/R = { S }.

五．循环群$<N_6, +_6>$，其中 N_6={ 0, 1, 2, 3, 4, 5 }，$\forall a, b \in N_6$，$a +_6 b = (a + b) \ mod\ 6$，试完成下列各题：

（6+6+2+2=16 分）

（1）求群$<N_6, +_6>$的每个元素的阶；

解：|0|=1；|1|=6；|2|=3；|3|=2；|4|=3；|5|=6

（2）求群$<N_6, +_6>$的所有子群和生成元；

解：子群：{ 0 }、{ 0, 2, 4 }、{ 0, 3 }、N_6

生成元：1、5

（3）设函数 h：$N_6 \rightarrow N_6$ 是$<N_6, +_6>$上的自同构（同态映射且为双射），求出所有满足以上条件的函数 h；

解：设 h 是同态，则 h(x)=x·h(1)；即 h 由 h(1)的值唯一确定，h(1)=0,1,2,3,4 or 5 中仅有两个是同构，即:

(i) h(1)=1; (恒等映射)

(ii) h(1) =5; （h(0)=0; h(2)=4; h(3)=3; h(4)=2; h(5)=1）

（4）写出同构意义下所有的 6 阶群。

解：同构意义下所有的 6 阶群有两个：$<N_6, +_6>$和$<S3, \circ>$

运算表分别如下：

*	e	s	t	x	y	z
e	e	s	t	x	y	z
s	s	t	x	y	z	e
t	t	x	y	z	e	s
x	x	y	z	e	s	t
y	y	z	e	s	t	x
z	z	e	s	t	x	y

*	e	s	t	x	y	z
e	e	s	t	x	y	z
s	s	e	y	z	t	x
t	t	z	e	y	x	s
x	x	y	z	e	s	t
y	y	x	s	t	z	e
z	z	t	x	s	e	y

六．设 f 和 g 都是群 $<G, *, e_G>$ 到 $<H, \circ, e_H>$ 的同态映射，且 $G1 = \{ x \mid x \in G \wedge f(x) = g(x) \}$。完成下列各题：（7+7=14 分）

（1）试证：$\forall x \in G,\ f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$；

证：∵ f 是同态映射，$\forall x \in G$，$f(x^{-1}) \circ f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e_G) = e_H$，且

$$f(x) \circ f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e_G) = e_H$$

∴ $f(x)$ 的逆是 $f(x^{-1})$，即 $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

（2）试证：$<G1, *>$ 是 $<G, *>$ 的子群。

证：(i) ∵ f 和 g 是同态映射，$f(e_G) = e_H = g(e_G)$，∴ $e_G \in G1$，$G1$ 非空。

(ii) $\forall\ a, b \in G1$，有 $f(a) = g(a)$，$f(b) = g(b) \in H$，$f(b)^{-1} = g(b)^{-1}$

又由 f, g 是同态和(1)知，

$f(a*b^{-1}) = f(a) \circ f(b^{-1}) = f(a) \circ f(b)^{-1} = g(a) \circ g(b)^{-1} = g(a) \circ g(b^{-1}) = g(a*b^{-1})$

∴ $a*b^{-1} \in G1$，∴ $<G1, *>$ 是 $<G, *>$ 的子群。

七．设 $G(n, m)$ 是简单平面图，且 $n = 7$，$m = 15$. 证明：（6+6=12 分）

（1）图 G 是连通的；

证：假设 G 不连通，则 G 至少有两个连通分支 G1(n1, m1)和 G2(n2, m2)，有如下几种可能：①n1=6, n2=1：则 m2=0，而 m1≤15，若 m1=15，G1 即为 K5，与 G 是平面图矛盾；②n1=5, n2=2：则 m1+m2≤10+1<15，矛盾；③n1=4, n2=3：则 m1+m2≤6+3<15，矛盾；∴ G 连通。

（2）图 G 的每个面均有 3 条边围成.

证：假设有一个面由 4 条边围成，其余由 3 条围成，根据欧拉公式，G 的面数 k=2+m-n=10，则所有面的总边数≥4 + 9×3 =31. 而每个边最多是两个面的边, 即面的总边数≤15×2=30. 矛盾.

八．设 G 是简单连通赋权图，$e = (u, v)$ 是 G 中的一条边，且对图 G 的任意一条异于 e 的边 e'，均有：e 的权值小于 e' 的权值，证明：G 的任意一个最小生成树必含有边 e。（8 分）

证：（反证法）假设 T 是 G 的一个最小生成树，T 不含边 e。则 T 中从顶点 u 到 v 有唯一一条简单路径，从该路径上任意删除一条边 f 后，将 T 分为两个连通分支 T1 和 T2，则 u 和 v 分别在 T1、T2 上，而 T1∪T2∪{e}是 G 的另

一个生成树 T′，因 e 的权值小于 f 的权值，所以 T′的权值小于 T 的权值，与 T 是最小生成树矛盾。得证。