

武汉大学计算机学院2007-2008学年第一学期

2006级《离散数学》考试试题

学号：_____ 姓名：_____ 成绩：_____

注意：所有答案请一律写在试卷纸上并注明题目序号！计算题要求有计算过程！

一、试求下述命题公式 G 的主析取和主合取范式： (10分)

$$P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

二、试证明下列结论的有效性(要求写证明序列)： (12分, 6+6)

(1) 前提： $P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q$, $P \rightarrow R$, $R \rightarrow \neg S$, 结论： $S \rightarrow Q$;

(2) 前提： $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$, $\exists xP(x)$, 结论： $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ 。

三、设集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 设 A 上的二元关系 $\mathcal{R} = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$: (12分, 4+4+4)

(1) 试问 \mathcal{R} 是否为自反关系, 反自反关系, 对称关系, 反对称关系和传递关系;

(2) 试求集合 $\mathcal{B} = \{S \mid S \text{ 是 } A \text{ 上的偏序关系, 且 } \mathcal{R} \subseteq S\}$ 的基数;

(3) 试分别求出集合 A 上的对称关系和反对称关系的总数。

四、设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群, \mathcal{R} 是 G 上的二元关系, $\mathcal{R} = \{\langle x, y \rangle \mid \exists a \in G, \text{ 使得 } y = a * x * a^{-1}\}$, 试证明: \mathcal{R} 是 G 上的等价关系。 (6分)

五、设集合 $N_9 = \{0, 1, 2, \dots, 7, 8\}$, $+$ 是模9加法, 则 $\langle N_9, + \rangle$ 是一个阶数为9的循环群: (14分, 5+5+4)

(1) 试求群 N_9 所有的子群;

(2) 试求群 N_9 每个元素的阶数;

(3) 试求群 N_9 所有的生成元。

六、设 $G = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, \text{ 其中: } a, b \in \mathbb{R}, \text{ 且 } a \neq 0\}$: (24分, 每小题4分)

(1) 试证明: $\langle G, \circ \rangle$ 是一个群, 其中 \circ 是函数的合成运算;

- (2) 设 $N = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + b, \text{其中 } b \in \mathbb{R}\}$, 试证明 $\langle N, \circ \rangle$ 是 G 的子群;
- (3) 试证明: N 是 G 的正规子群; (提示: 证明 $\forall f \in G, fNf^{-1} \subseteq N$)
- (4) 试用性质法表示商群 G/N ;
- (5) 设 \mathbb{R}_+ 是非零实数集合, 则 $\langle \mathbb{R}_+, \times \rangle$ 构成一群, 设函数 $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\varphi(f) = a$, 其中 $f(x) = ax + b$, 试证明函数 φ 是群 $\langle G, \circ \rangle$ 到群 $\langle \mathbb{R}_+, \times \rangle$ 上的满同态(满射+同态);
- (6) 试证明 G/N 与 \mathbb{R}_+ 同构。

七、设 G 是 6 个结点的简单无向图, 证明: G 含有一个 K_3 子图, 或者 G 的补图含有一个 K_3 子图。 (6分)

八、完全二元树是每个结点的出度恰好等于 2 或者 0 的有向树。试证明: 若完全二元树的树叶数为 l , 边数为 m , 则 $m = 2(l - 1)$ 。 (10分)

九、试证明下图不是平面图: (6分)

