相似矩阵及二次型——二次型及其标准形

知识点巩固练习

1. 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵必为 对称 阵.
2. 标准形 $f=k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$ 所对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$.
3. 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 一定可由正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 特征值.
4. 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定的充要条件是 它的标准形的n个系数全为正 或 它的规范形的n个系数全为1 或 它的正惯性指数等于n（请列出三个不同的充要条件）.

练习题

1. $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{T}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 8\\ 7 & 10 & 12\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 8\\ 7 & 10 & 12\end{pmatrix}$；二次型 f 的秩为 3.

2. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ 通过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，试求参数 a 及正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

$\therefore$ 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & a\\ 0 & a & 3\end{pmatrix}$

$\therefore \lambda=1,2,5$

$\therefore |A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=10$

$\therefore a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$

1° $\lambda=1$

~~$|A-\lambda E|=$~~

$(A-E)x=0$

$\therefore \eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\therefore P_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

2° $\lambda=2$

$(A-2E)x=0$

$\therefore \eta_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\therefore P_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

3° $\lambda=5$

$\therefore (A-5E)x=0$

$\therefore \eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore P_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$a=2$ 时 $P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$a=-2$ 时. $P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

3. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$ 正定，求实数 ……

矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 4 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow a^2 < 4$

$|A| > 0 \Rightarrow a^2 < \frac{7}{2}$

$\therefore -\sqrt{\frac{7}{2}} < a < \sqrt{\frac{7}{2}}$

思考题

二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值，为什么？

A的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \cdots \lambda_n$

记 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \geq \lambda_n$

$f(x) = (Cy)^T A (Cy) = y^T \Lambda y = (\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_i y_i^2)$

$\|x\| = (Cy)^T (Cy) = y^T y = \|y\|$

$\therefore f(x)$ 取最大，即 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ 取最大

又 $\because \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \lambda_1 (\sum_{i=1}^{n} y_i^2) = \lambda_1$

1. 设 A 为正交阵，且 $|A|=-1$，证明：$\lambda=-1$ 是 A 的特征值.

$\cancel{Ax=\lambda x}$ $\quad AA^T=E$

$AP=\lambda P$

$PP^T=PAA^TP^T=\lambda P\cdot(\lambda P)^T=\lambda^2PP^T$

$\therefore \lambda^2=1$

$\because |A|=-1$

$\therefore \lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n=-1$

$\therefore \lambda=-1$

$\therefore \lambda=-1$ 是 A 的特征值

2. 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$，求 A 的特征值及特征向量.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a-\lambda & b & \cdots & b \\ b & a-\lambda & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda+(n-1)b)(a-b-\lambda)^{n-1}$$

$\therefore \lambda_1=a+(n-1)b$

$\lambda_2=a-b=\lambda_3=\cdots=\lambda_{n-1}$

$(A-\lambda_1E)X=0$

$\therefore \eta_1=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

$(A-\lambda_2E)X=0$

$\therefore \eta_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\eta_n=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ -1\end{pmatrix}$

3. 设 A 为 3 阶方阵，且 $|A+2E|=0$，$|2A+E|=0$，$|A-3E|$

$\therefore$ 特征值为 -2，$-\frac{1}{2}$，3

$\therefore |A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 3$

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1, k, 1)^T$ 为方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，求 k 的值.

λ 是 A^{-1} 特征值

$\therefore A^{-1}\alpha = \lambda\alpha$

$\therefore \alpha = \lambda A \alpha$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda(3+k) = 1 \\ 2\lambda(1+k) = k \end{cases} \Rightarrow k=1 \text{ 或 } k=-2$$

5. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$，它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{p}_2=(1,0,-1)^T$，$\boldsymbol{p}_3=(1,2,1)^T$，求方阵 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{100}$.

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$\cancel{A \Longrightarrow P}$

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}$$

$$A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

6. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^T$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解，

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量；

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(1) $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore \lambda_1=3$，特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore Ax=0x$

$\therefore \lambda_2=\lambda_3=0$，特征向量为 $(-1,2,-1)^T$，$(0,-1,1)^T$

(2) $\therefore \Lambda=\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$

$\cancel{Q=}$ 正交化 $\Rightarrow$ $P_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$

$P_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^T$

$P_3=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,-3,2)^T$

$$\therefore Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{3}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$$

7. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{bmatrix}$ 可相似对角化，求 x.

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\3&1-\lambda&x\\4&0&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-6)$

$\therefore$ 特征值 $\lambda=1, \lambda=6$

$\lambda=1 \quad (A-E)X=0$

$\therefore \begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&x\\4&0&4\end{pmatrix}$

$\therefore x=3$

8. 已知 $p=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求参数 a，b 及特征向量 p 所对应的特征值；

(2) 问 A 能不能相似对角化？并说明理由.

(1) $AP=\lambda P$

$\cancel{A=APP^{-1}=}$

$\therefore \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{pmatrix}$

$\therefore a=-3,\ b=0$

$\lambda=-1$

(2) $|A-\lambda E|=0$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$

$(A+E)X=0$

$\cancel{R(A+E)}$

$A+E=\begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

$\therefore R(A+E)>0$

$\therefore$ 不可相似对角化

9. 设 $A=\begin{bmatrix} a & -1 & -c+1 \\ 5 & b & 3 \\ c & 0 & -a \end{bmatrix}$，已知 $|A|=1$，且 A^* 有一个特征值 λ，其特征向量 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，试求 a，b，c 及 λ。

$A^*\cancel{A}\alpha=\lambda\alpha$

$AA^*\alpha=\lambda A\alpha$

$\therefore \lambda A\alpha=-\alpha$

$\therefore \lambda=-1,\ b=c,\ a=4$

$|A|=1 \Rightarrow b=-3$

$\therefore a=4,\ b=c=-3,\ \lambda=-1$

10. 用正交变换法，将下列二次型化为标准形.

(1) $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$；

(2) $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$.

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ \cancel{2} & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$|A-\lambda E| = -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

$\therefore$ 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$

$\lambda_3=10$

$\therefore$ ~~特征向量~~，

$\therefore \Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

$\therefore f = y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore |A-\lambda E| = (2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-1)$

$\therefore$ 特征向量为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$

$\therefore \Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore f = y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

11. 设二次型 $f=2x_1^2+4x_2^2+ax_3^2+2bx_1x_3$ 经正交变换化为 $f=4y_1^2+y_2^2+6y_3^2$，求 a，b 的值.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & b \\ 0 & 4 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$

$|A-\lambda E| = (4-\lambda)[(2-\lambda)(a-\lambda)-b^2]$

$\lambda_1=4$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=6$

代入得： $a=5$

$b=\pm 2$

12. 已知方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 可对角化，$\lambda=2$ 为 A 的二重特征值，求 x，y，并求可逆阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

$|A-\lambda E| = (1-\lambda)[(4-\lambda+y)(5-\lambda)-y(2-\lambda)] + [x(2-\lambda)+3(4-\lambda+y)]$

$\lambda_1=\lambda_2=2$

$\Rightarrow (A-2E)x=0$

$R(A-2E)=1$

$\therefore x=2$

$y=-2$

$\therefore \lambda_3=6$

$P_1=(1,0,1)^T$,

$P_2=(0,1,1)^T$

$P_3=(-1,2,3)^T$

$\therefore P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

13. 设 3 阶实对称矩阵 A 满足条件 $A^2+2A=O$，已知 A 的秩 $R(A)=2$.

(1) 求 A 的全部特征值；

(2) 当 k 为何值时，矩阵 $A+kE_3$ 为正定矩阵.

(1) $A\alpha=\lambda\alpha$

$\therefore (A^2+2A)\alpha=(\lambda^2+2\lambda)\alpha$

$\because A^2+2A=0$

$\therefore \lambda^2+2\lambda=0$

$\therefore \lambda=0$, $\lambda=-2$

$\because R(A)=2$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=-2$, $\lambda_3=0$

(2) $A+kE$ 的特征值为

$k-2$, k

$\therefore k>2$

附加题

14. 设 n 维列向量 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，$a_1\neq 0$，$A=\alpha\alpha$

(1) 证明：$\lambda=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值；

(2) 求 A 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

(1) $R(A)>0$

$Ax=\lambda x$

$\lambda^2 x = A^2 x = \lambda \alpha^T\alpha x$

$\therefore \lambda=0,\ \lambda=\alpha^T\alpha$

$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\alpha^T\alpha$

$\therefore\ \lambda=0$ 为 $n-1$ 重特征值

(2) $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$

$\lambda_n=\alpha^T\alpha$ $\qquad p_n=\alpha$

$p_1=(-a_2, a_1, 0\cdots 0)^T$

$p_2=(-a_3, 0, a_1, \cdots)^T$

$\vdots$

$p_{n-1}=(-a_{n-1}, 0, \cdots, a_1)^T$

15. 设 A 为 m 阶实对称阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，试证：B^TAB 为正定阵$\Leftrightarrow R(B)=n$.

1° 充分

$R(B)=n$

$\therefore Bx\neq 0$

$\therefore (Bx)^TABx>0$

$\therefore x^TB^TABx>0$

$\therefore B^TAB$ 为正定阵

2° 必要

B^TAB 为正定

$\therefore x^TB^TABx>0$

$\therefore (Bx)^TABx>0$

$\therefore Bx\neq 0$

$\therefore R(B)=n$

Part11 相似理论

自由主题

A的特征值与特征向量

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ
对应的特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

- 用特征值命题
  - λ_0是A的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda_0 E - A| = 0$（建方程求参数或证行列式$|A_0 E - A| = 0$）；$\lambda_0$不是$A$的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda_0 E - A| \neq 0$（矩阵可逆，满秩）
  - 若$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的$n$个特征值，则$\begin{cases} |A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \\ tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n. \end{cases}$
- 用特征向量命题
  - (1)$\xi(\neq 0)$是A的属于A的特征向量 $\Leftrightarrow \xi$是$(\lambda_0 E - A)x = 0$的非零解。
  - ①k重特征值λ至多只有k个线性无关的特征向量（直接使用，不用证明）
  - ②若ξ_1, ξ_2是A的属于不同特征值λ_1, λ_2的特征向量则ξ_1, ξ_2线性无关
  - ③若ξ_1, ξ_2是A的属于同一特征值λ的特征向量，则$k_1\xi_1 + k_2\xi_2$(k_1，k_2不同时为零）仍是A的属于特征值λ的特征向量（常考其中一个系数（如k_2）等于0的情形）
  - ④若ξ_1, ξ_2是A的属于不同特征值λ_1, λ_2的特征向量，则当$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$时，$k_1\xi_1 + k_2\xi_2$不是A的特征向量（常考$k_1 = k_2 = 1$的情形）
- 用矩阵方程命题
  - ①$AB = O \Rightarrow A[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [0, 0, \dots, 0]$，即$A\beta_i = 0\beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$，若其中$\beta_i$均为非零向量，则每一个$\beta_i$均为$A$的属于$\lambda = 0$的特征向量
  - ②$AB = C \Rightarrow A[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n] = [\lambda_1\beta_1, \lambda_2\beta_2, \dots, \lambda_n\beta_n]$，即$A\beta_i = \lambda_i\beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$，其中$\gamma_i = \lambda_i\beta_i$，$\gamma_i, \beta_i$均为非零向量，则$\beta_i$为$A$的属于$\lambda_i$的特征向量
  - ③$AP = PB$，P可逆 $\Rightarrow P^{-1}AP = B \Rightarrow A \sim B \Rightarrow \lambda_A = \lambda_B$
  - ④若A的每行元素之和均为k，则$A = k\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} \Rightarrow k$是特征值，$\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$是属于$k$的特征向量
- 用秩命题
  - 若$r(A) = 1$，则$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$，$\lambda_n = tr(A)$，且$\xi_1$，$\xi_2, \cdots, \xi_{n-1}$是$n-1$重特征值$\lambda = 0$的线性无关的特征向量.

A的相似对角化（A~Λ）

- 充要条件
  - ①A有n个线性无关的特征向量
  - ②$n_i = n - r(\lambda_i E - A)$
- 充分条件
  - A是实对称矩阵
  - A有n个互异特征值
  - r（A）=1且tr（A）≠0
- 必要条件
  - 非零特征值的个数（重根按重数算）
- 否定条件
  - A的特征值全为k但A≠E
  - A≠O，A=O（k为大于1的整数）

A相似于B（A~B）

- 四个性质
  - $A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$
  - $r(A) = r(B)$
  - $tr(A) = tr(B)$
  - $\lambda_A = \lambda_B$（或$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$）
- 重要结论

实对称矩阵与正交矩阵

- 若A为实对称矩阵
  - 特征值均为实数，特征向量均为实向量
  - 不同特征值对应的特征向量正交
  - 可用正交矩阵相似对角化
- 若P为正交矩阵
  - $P^T P = E \Leftrightarrow P^{-1} = P^T$
  - $\Leftrightarrow P$由规范正交基组成
  - $\Leftrightarrow P^T$是正交矩阵
  - $\Leftrightarrow P^{-1}$是正交矩阵
  - $\Leftrightarrow P^*$是正交矩阵
  - $\Leftrightarrow -P$是正交矩阵
- 若PQ为同阶正交矩阵，则PQ为正交矩阵.（P+Q不定）