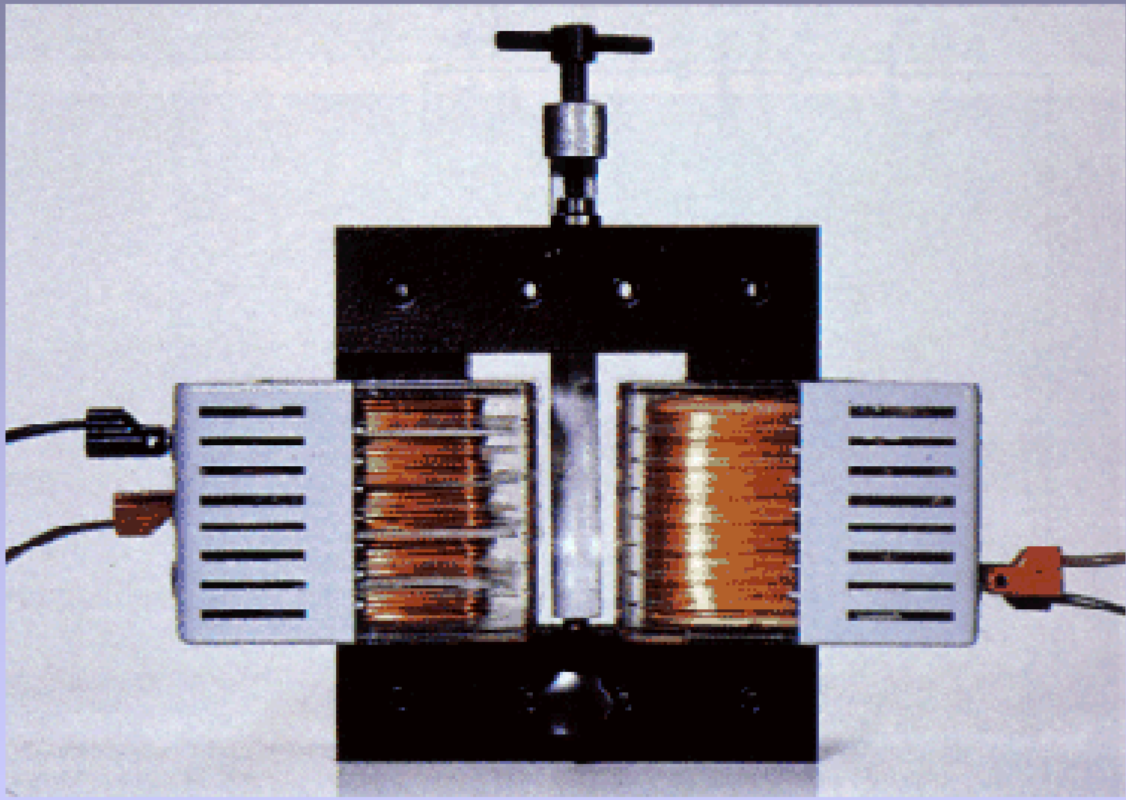
同学们好！



本讲

电磁感应
- 动生电动势
- 感生电动势（涡旋电场）

- 自感电动势
- 互感电动势

→ 磁场能量

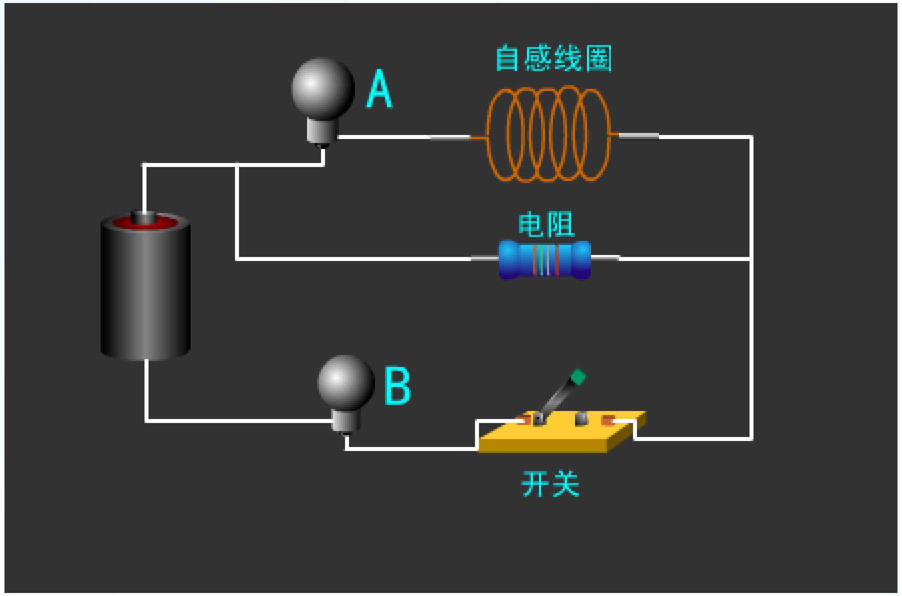
变化的电流 → 变化磁场 → 感生电动势

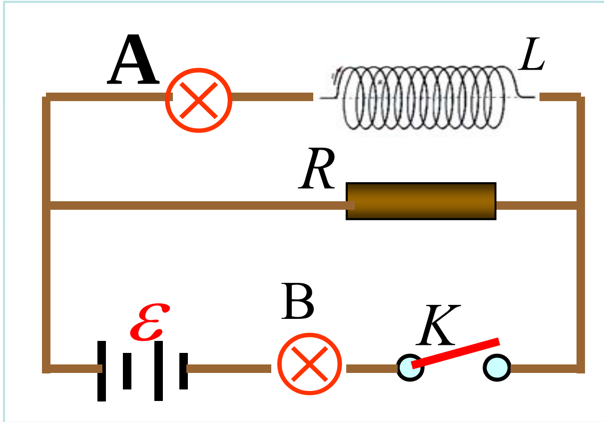
建立直接联系

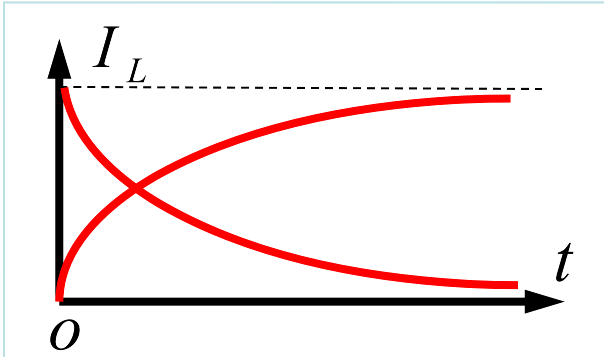
§8-4　自感和互感

一、自感

1. 自感现象







由于回路中电流变化，引起穿过回路包围面积的全磁通变化，从而在回路自身中产生感生电动势的现象叫**自感现象(self-inductance)**.

自感电动势 ε_L

2. 自感系数

(1) 定义 $I \to B \to \Phi \to \Psi$

$$\boxed{L = \frac{\Psi}{I}}$$

L称为自感系数简称自感. 单位：亨利(H)

$$1\mathrm{H} = 10^3\mathrm{mH} = 10^6\mu\mathrm{H} = 10^9\mathrm{nH}$$

自感系数L取决于回路线圈自身的性质(回路大小、形状、周围介质等)

根据法拉第电磁感应定律：

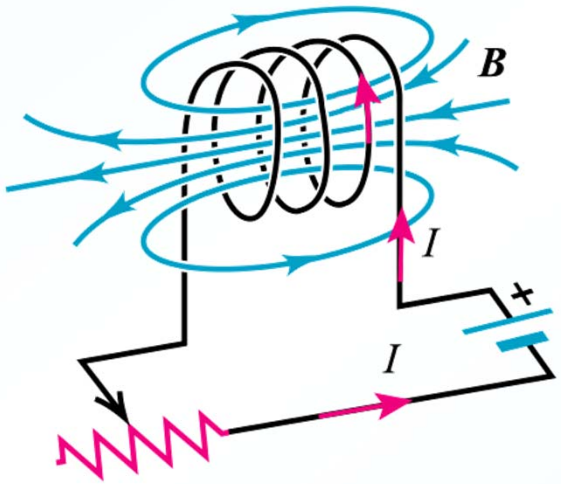
$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t} = -(L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t})$$

如果回路自身性质不随时间变化, 则：

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

负号表示：ε_L总是阻碍 I 的变化

(2) 自感系数的物理意义



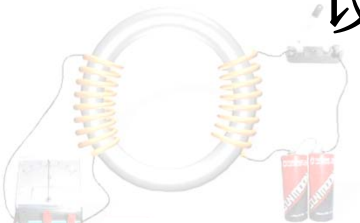
$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \;\rightarrow\; L = -\varepsilon_L \Big/ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

当线圈中电流变化率为一个单位时, 线圈中自感电动势的大小.

若 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 一定, $L\uparrow \rightarrow |\varepsilon_L|\uparrow$, 线圈阻碍 I 变化能力越强.

L: 描述线圈电磁惯性的大小

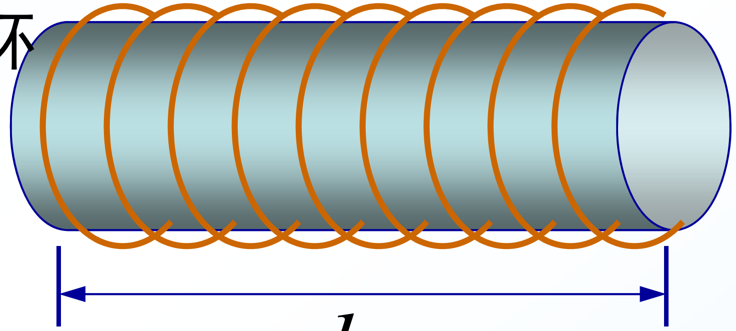
(3) 自感系数的计算



设线圈通有电流I

$$I \rightarrow B \rightarrow \Phi \rightarrow \Psi \qquad L = \frac{\Psi}{I}$$

例8-9. 长为l的螺线管, 横断面为S, 线圈总匝数为N, 管中磁介质的磁导率为μ. 求自感系数.



解： 设螺线管通以电流I，由安培环路定理可得管内磁感强度为

$$B = \mu n I = \mu \frac{N}{l} I$$

$$\Psi_i = NBS = \mu \frac{N^2}{l} IS \qquad L = \frac{\Psi_i}{I} = \mu \frac{N^2}{l} S = \mu \frac{N^2}{l^2} lS$$

线圈体积： $V = lS \qquad n = \dfrac{N}{l}$ $\qquad \boxed{L = \mu n^2 V}$

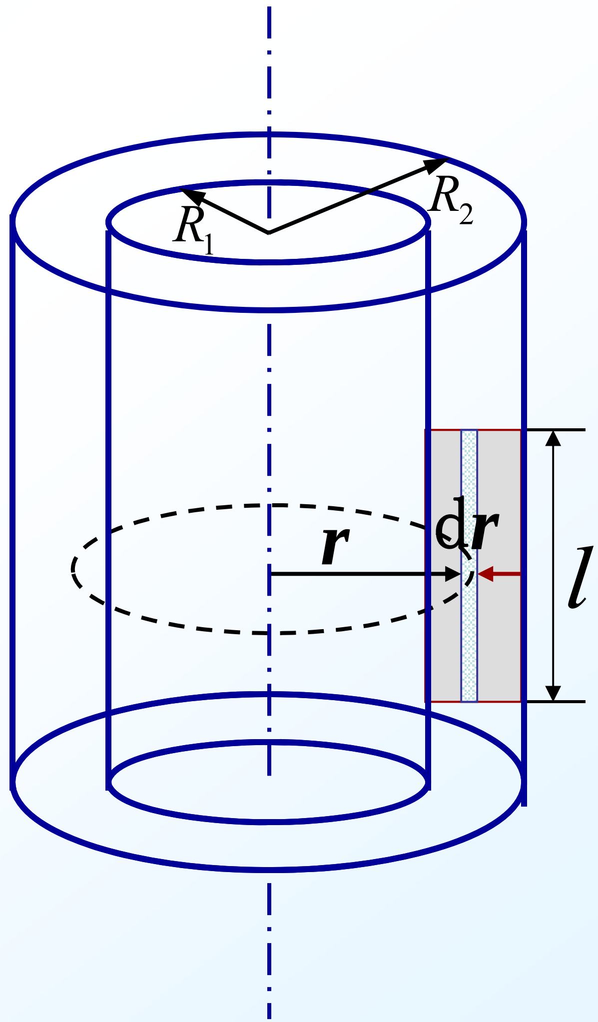
提高L的途径

- 增大V
- 提高n
- 放入μ值高的介质

（提高n、放入μ值高的介质）实用

例8-10. 一电缆由两个“无限长”的同轴圆桶状导体组成, 其间充满磁导率为μ的磁介质, 电流I从内桶流进, 外桶流出. 设内、外桶半径分别为R_1和R_2, 求单位长度的一段导线的自感系数.

解: 由安培环路定理可得，两圆柱面间磁场为



$$B=\frac{\mu I}{2\pi r}\quad (R_1<r<R_2)$$

$$\mathrm{d}\Phi=B\mathrm{d}S=Bl\mathrm{d}r$$

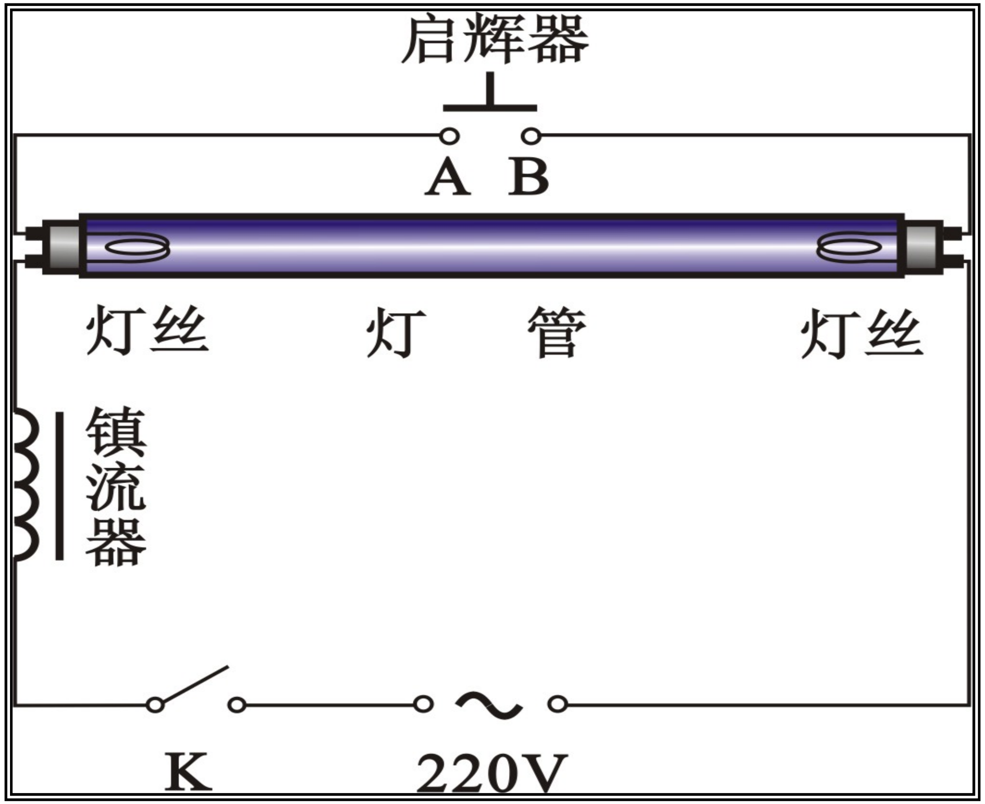
$$\Phi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}l\mathrm{d}r=\frac{\mu Il}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L=\frac{\Phi}{Il}=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

二、自感现象的防止和应用

1. 电器设备中, 常利用线圈的自感起稳定电流的作用.

例如, 日光灯的镇流器就是一个带有铁芯的自感线圈.



2. 电工设备中, 常利用自感作用制成自耦变压器或扼流圈.

3. 电子技术中, 利用自感器和电容器可以组成谐振电路或滤波电路等.

4. 在具有相当大的自感和通有较大电流的电路中, 当切断电源的瞬间, 开关处将发生强大的火花, 产生弧光放电现象, 亦称电弧.

电弧发生的高温, 可用来冶炼、熔化、焊接和切割熔点高的金属, 温度可达2000℃以上. 但也有破坏开关、引起火灾的危险. 因此通常都用油开关, 即把开关放在绝缘性能良好的油里, 以防止发生电弧.

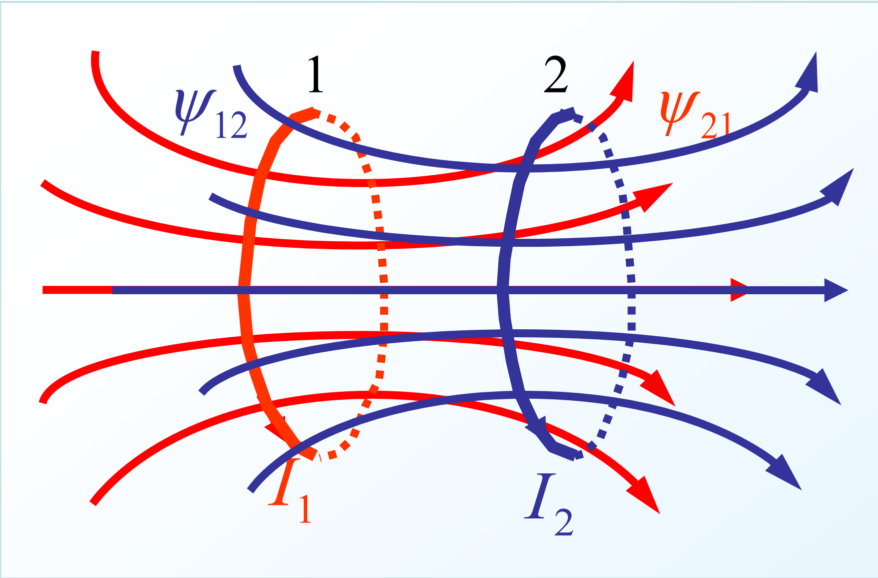
三、互感现象

1. 互感现象

一个载流回路中电流的变化引起邻近另一回路中产生感生电动势的现象称为**互感现象(mutual-inductance)**，所产生的电动势称为**互感电动势(mutual Emf)**.

$$I_1 \to B_1 \to \Phi_{21} \to \Psi_{21}$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

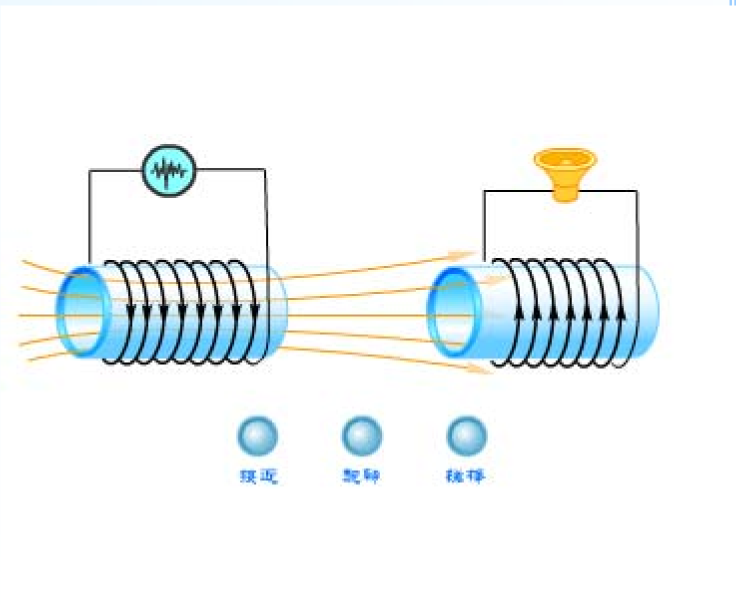


同理： $M_{12} = \dfrac{\Psi_{12}}{I_2}$

$$M_{12} = M_{21} = M$$

M称为**互感系数**简称**互感**，　单位：亨利(H)

互感系数M不仅取决于两个回路线圈自身的性质(回路大小、形状、周围介质等)，还与两个线圈的相对位置有关。



2. 互感电动势

根据法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -(M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + I_1\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t})$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{12}}{\mathrm{d}t} = -(M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + I_2\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t})$$

若M保持不变，则：

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_{21} &= -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\\ \varepsilon_{12} &= -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}\end{aligned}}$$

负号表示：一个回路中引起的互感电动势，总要反抗另一个回路中的电流变化

3. 互感系数M的物理意义

互感系数 $$\boxed{M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\frac{\Psi_{12}}{I_2}}$$

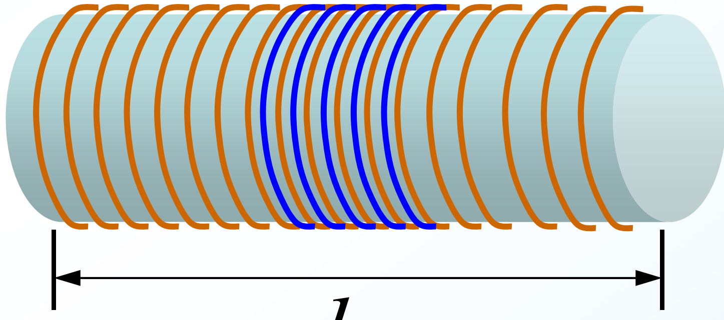
当一回路中通过单位电流时，引起的通过另一回路的全磁通.

$$M=-\frac{\mathcal{E}_{21}}{\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}}=-\frac{\mathcal{E}_{12}}{\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}}$$

当一个回路中电流变化率为一个单位时，在相邻另一回路中引起的互感电动势.

本质：表征两耦合回路相互提供磁通量的强弱.

例 8-11. 设在一长为1m、横断面积S=10cm²、密绕N_1=1000匝线圈的长直螺线管中部, 再绕N_2=20匝的线圈. (1)计算互感系数; (2)若回路1中电流的变化率为10A·s⁻¹, 求回路2中引起的互感电动势.



解: (1) $$B=\mu_0\frac{N_1}{l}I_1$$

$$\Psi_{21}=BSN_2=\mu_0\frac{N_1N_2I_1S}{l}$$

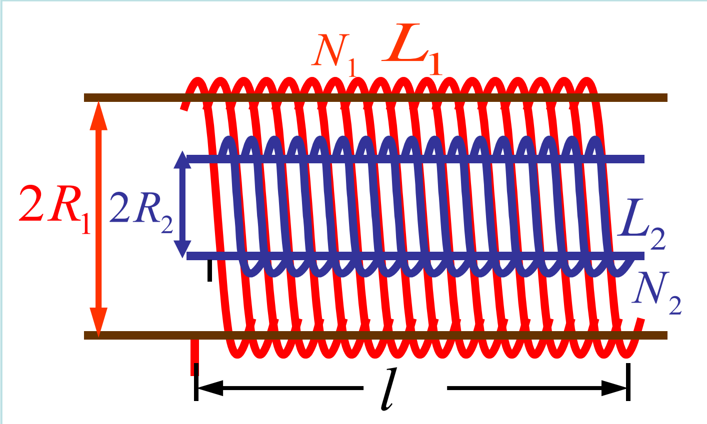
$$M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\frac{\mu_0N_1N_2S}{l}=2.51\times10^{-5}\ \mathrm{H}$$

(2) $$\varepsilon_{21}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}=-2.51\times10^{-5}\times10\mathrm{H}=-2.51\times10^{-4}\ \mathrm{H}$$

计算M的方法：设I_1 $\longrightarrow \vec{B}_1 \longrightarrow$ **穿过回路2的** ψ_{21}

$$\psi_{21} = N_2 \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \longrightarrow \text{得 } M = \frac{\psi_{21}}{I_1}$$

练习：求图示长度相等的两共轴长直细螺线管的互感系数.



已知： $R_1, N_1, L_1, l, R_2, N_2, L_2, l$

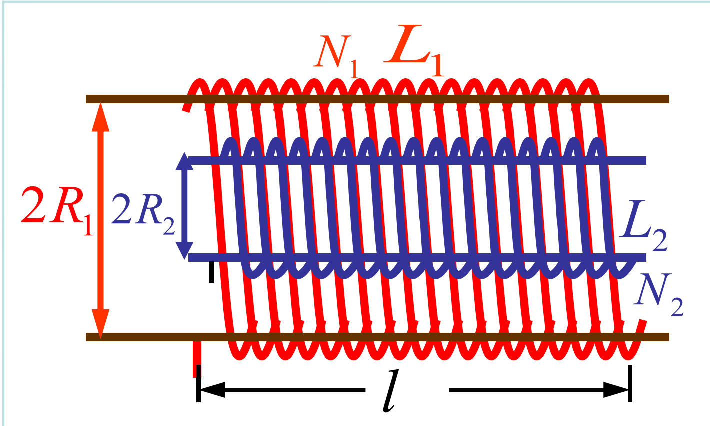
求： M

解：设外管通电流I_1

$$B_1 = \begin{cases} \mu n_1 I_1 = \mu \dfrac{N_1}{l} I_1 & (r < R_1) \\ 0 & (r > R_1) \end{cases}$$

穿过内管的全磁通： $\psi_{21} = N_2 \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = N_2 B_1 \cdot S_2$

$$\psi_{21} = \mu \frac{N_1 N_2}{l} I_1 \cdot \pi R_2^2$$



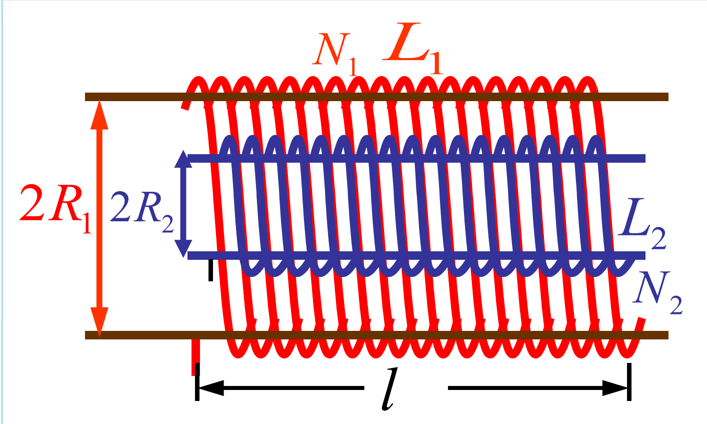
$$M = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \mu \frac{N_1 N_2}{l} \pi R_2^2$$

又： $L_1 = \mu n_1^2 V_1 = \mu (\frac{N_1}{l})^2 l \cdot \pi R_1^2 = \mu \frac{N_1^2}{l} \pi R_1^2$

$$L_2 = \mu \frac{N_2^2}{l} \pi R_2^2 \qquad L = \frac{\Psi_i}{I} = \mu \frac{N^2}{l} S$$

$$\boxed{M = \frac{R_2}{R_1} \sqrt{L_1 L_2}}$$

一般情况： $\boxed{M = K\sqrt{L_1 L_2}}$

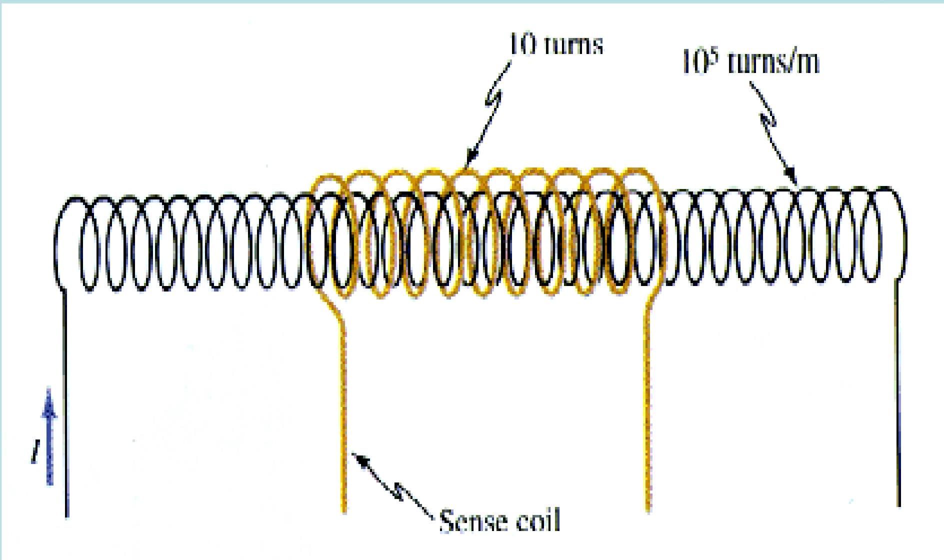


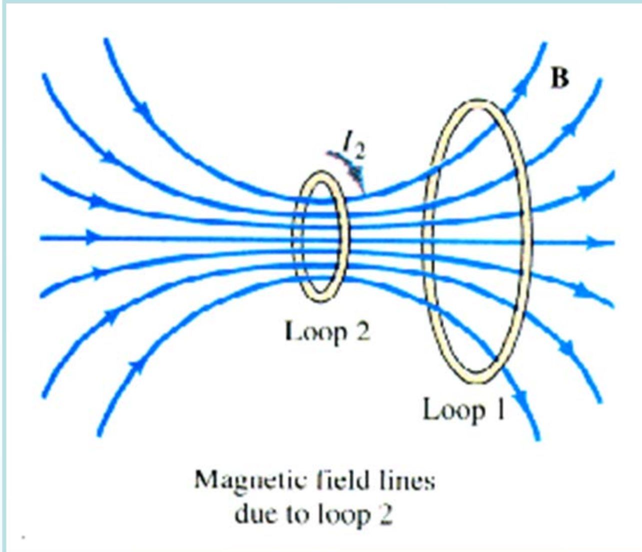
K:耦合系数 $0 \le K \le 1$

K=1时, 称无漏磁

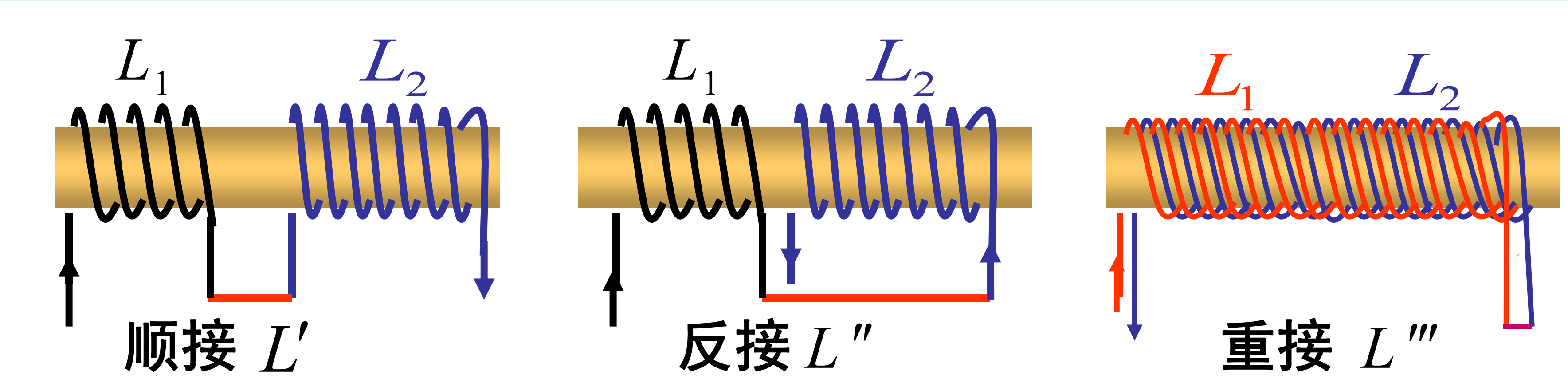
两螺线管共轴，且 $R_1 = R_2$， $K = 1$ ： 完全耦合

两螺线管轴相互垂直， $K = 0$ ： 不耦合





例8-12. 求自感线圈的串、并联等效自感系数L.

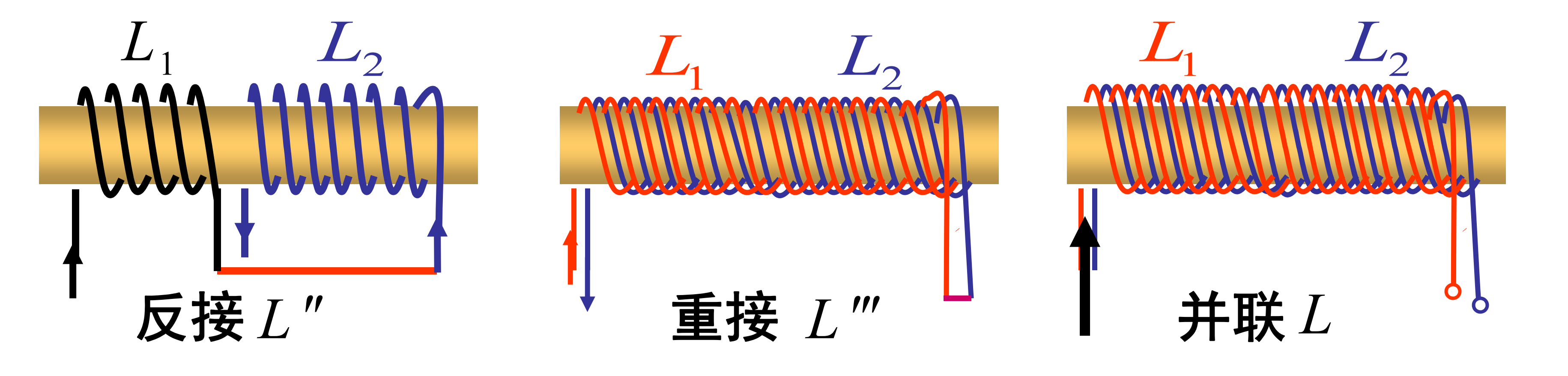


串联：对每个线圈$\varepsilon_i=\varepsilon_{i1}+\varepsilon_{i2}$， 总$\varepsilon=\sum\varepsilon_i$

顺接 $\varepsilon_1=-L_1\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-(L_1+M)\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 磁通加强

$$\varepsilon_2=-(L_2+M)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\qquad \varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2=-(L_1+L_2+2M)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-L'\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{L'=L_1+L_2+2M}$$



反接磁通减弱 $\varepsilon_1 = -L_1 \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -(L_1 - M)\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

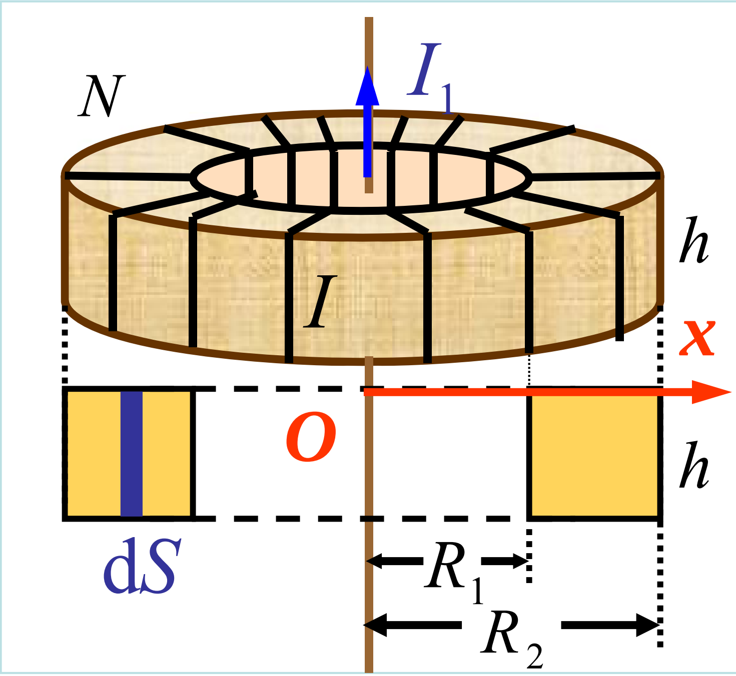
$$\varepsilon_2 = -(L_2 - M)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \boxed{L'' = L_1 + L_2 - 2M}$$

无耦合$M = 0$, $L = L_1 + L_2$ **重接 $L''' = 0$ $(L_1 = L_2)$**

并联 $\varepsilon_1 = -(L_1 + M)\dfrac{\mathrm{d}(I/2)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}(L_1 + M)\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \xlongequal[L_1 = L_2]{M = \sqrt{L_1 L_2}} -L_1\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

$$\varepsilon_2 = -L_2\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

例： 矩形截面螺绕环尺寸如图, 密绕N匝线圈, 其轴线上置一无限长直导线. 当螺绕环中通有电流 $I = I_0 \cos \omega t$ 时, 直导线中的感生电动势为多少?



解一： 这是一个互感问题

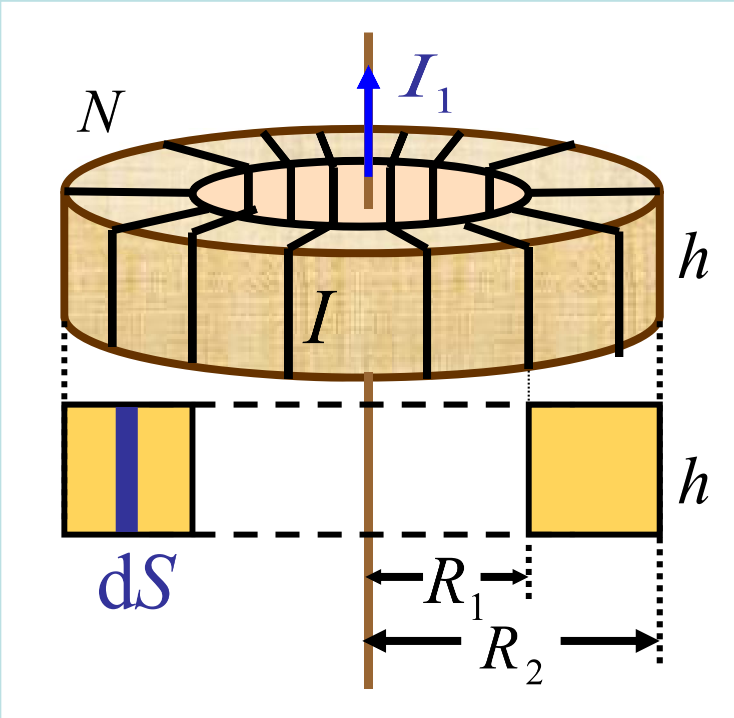
先求M

建立坐标系Ox

设直导线中通有电流I_1

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

$$\psi_{21} = N\Phi_{21} = N\int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{N\mu_0 I_1 h}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dx}{x} = \frac{N\mu_0 I_1 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

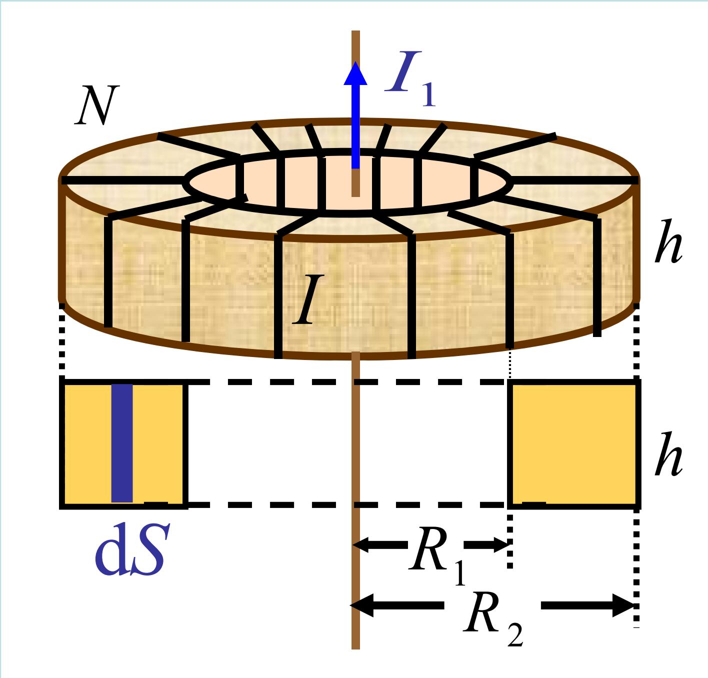


$$\psi_{21}=\frac{N\mu_0 I_1 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$M=\frac{\psi_{21}}{I_1}=\frac{\mu_0 N h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\varepsilon_1=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 N h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\qquad (I=I_0\cos\omega t)$$

$$=\frac{\mu_0 N h I_0\omega}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\cdot\sin\omega t$$



解二：由法拉第定律求解

螺绕环 $B_{内} = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi x}$ ，$B_{外} = 0$

如何构成闭合回路？

长直导线在无穷远处闭合

穿过回路的磁通量：

$$\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_0^{R_1} \vec{B}_{外}\cdot d\vec{S} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{B}_{内}\cdot d\vec{S} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{B}_{外}\cdot d\vec{S} = \frac{N\mu_0 Ih}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\mu_0 Nh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\cdot I_0\cos\omega t$$

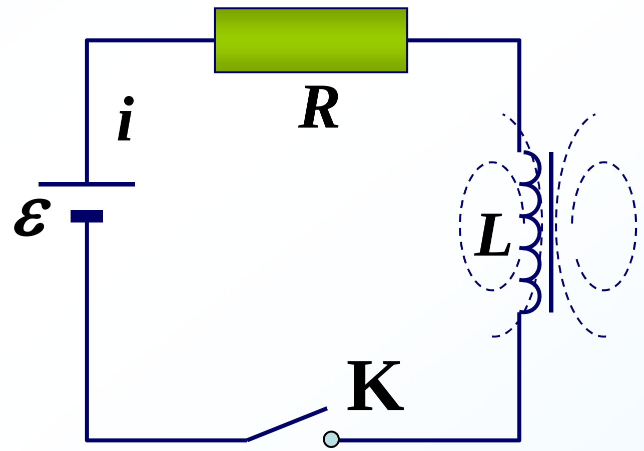
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 NhI_0\omega}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\cdot\sin\omega t$$

§8-5　磁场的能量

一、自感磁能

合上K→回路电流发生变化 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

线圈L内磁场发生变化 $\varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$



RL电路

回路方程： $\varepsilon - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = RI$

两边乘以$i\mathrm{d}t$： $\varepsilon i\mathrm{d}t - Li\mathrm{d}i = Ri^2\mathrm{d}t$

$$\int_0^t \varepsilon i\mathrm{d}t = \int_0^I Li\mathrm{d}i + \int_0^t Ri^2\mathrm{d}t$$

在 $0 \to I$过程中，电源反抗自感电动势所做的功→线圈中储存的磁能

$$W_{\mathrm{m}} = \int_0^I Li\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2$$

二、磁场能量(magnetic energy)

自感磁能： $W_{\mathrm{m}} = A = \dfrac{1}{2}LI^2$

磁场占据的空间体积

对长直螺线管： $L = \mu n^2 V$ $\qquad I = \dfrac{B}{\mu n}$

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}(\mu n^2 V)\cdot\left(\frac{B}{\mu n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu}\cdot V$$

可以推广到一般情况

1. 磁能密度：磁场单位体积内的能量

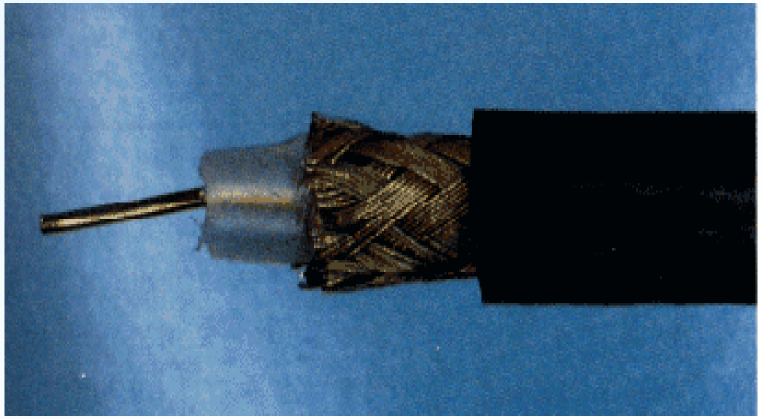
$$w_{\mathrm{m}} = \frac{W_{\mathrm{m}}}{V} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}BH$$

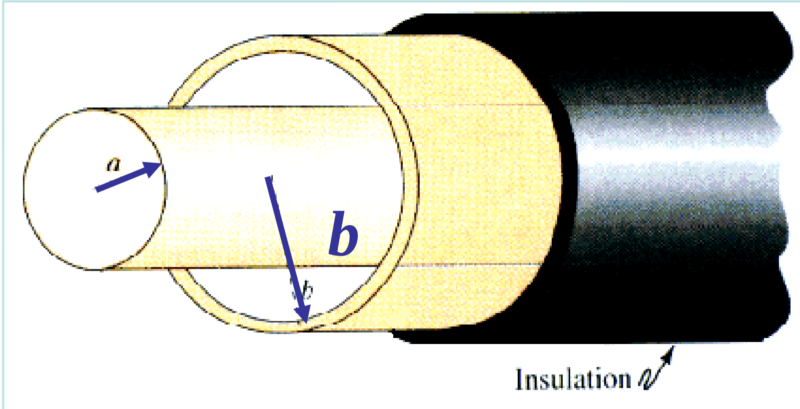
2. 磁场能量： $W_{\mathrm{m}} = \int_V w_{\mathrm{m}} \mathrm{d}V = \int_V \dfrac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\mathrm{d}V = \int_V \dfrac{1}{2}BH\mathrm{d}V$

电场能量与磁场能量比较

电场能量	磁场能量
电容器储能 $\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{Q^2}{2C}$	自感线圈储能 $\frac{1}{2}LI^2$
电场能量密度 $w_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}ED=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$	磁场能量密度 $w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}BH=\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}=\frac{1}{2}\mu_0\mu_r H^2$
电场能量 $W_{\mathrm{e}}=\int_V w_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V$	磁场能量 $W_{\mathrm{m}}=\int_V w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V$
能量法求 C	能量法求 L

例8-13. 长直同轴电缆，由半径为R_1和R_2的两同心圆柱组成，电缆中有稳恒电流I，经内层流进，外层流出形成回路。试计算长为l的一段电缆内的磁场能量。

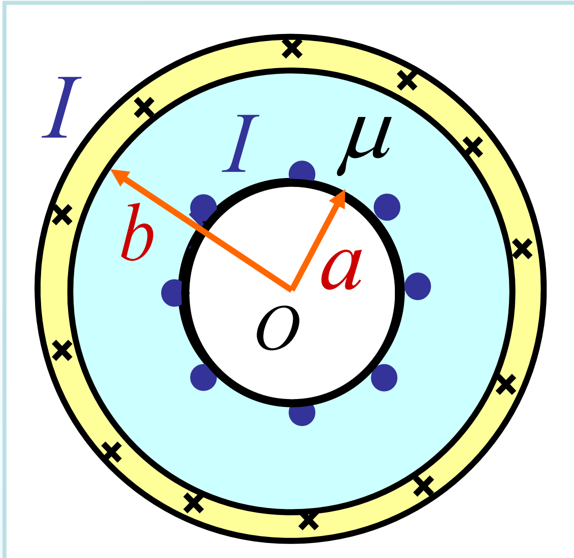




解： 设电缆中通有如图流向电流I

由安培环路定理：
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I}{8\pi^2 r^2} \qquad dV = 2\pi r l dr$$



$$W_{\mathrm{m}}=\int_V w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V=\int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}\cdot 2\pi l r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r}\quad=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

方法二： **先计算自感系数** $L=\dfrac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI^2=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

考虑互感，两个线圈的磁能

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}L_1 I_1^2+\frac{1}{2}L_2 I_2^2+M I_1 I_2$$