老师好，不好意思哈，第五周作业的截止时间看错了，导致未能按时上传第五周的作业，所以就放在第七周的作业里一起上传了，给老师添麻烦了，抱歉。

专业班级____________ 姓名____________ 学号____________

矩阵及其运算——矩阵的可逆性

知识点巩固练习

1. 对于 n 阶方阵 A，若 $|A|\neq 0$，则称矩阵 A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}$

2. A_n 可逆 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$.

3. 若 A_n 可逆，且 $AX=AY$，则 $X=Y$.

4. 若 A_n 可逆，且 $Ax=b$，则 $x=\frac{b}{|A|A^{*}}$.

练习题

1. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明 A 及 $A+2E$ 都可逆，并求 A^{-1} 及 $(A+2E)^{-1}$.

$A(A-E)=2E$

$A\left[\frac{1}{2}(A-E)\right]=E$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$

$(A+2E)(A-3E)=A^2-A-6E=-4E$

$\therefore (A+2E)\left(-\frac{1}{4}(A-3E)\right)=E$

$\therefore (A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且 $AB+E=A^2+B$，求 B.

$AB-EB=A^2-E$

$(A-E)B=(A-E)(A+E)$

$B=A+E$

$=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

3. 分析下列矩阵的可逆性，并在可逆的情况下求其逆矩阵：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$，　(2) $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$，　(3) $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_1 \\ \vdots & ⋰ & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

令 $a_1a_2\cdots a_n=t$

(1) $|A|=5-4=1\neq 0$

∴ 可逆

$A^*=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

$=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $|A|=a_1a_2\cdots a_n$

当且仅当 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时

A 可逆

$A^*=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

$=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$

(3) $|A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_1a_2\cdots a_n$

当且仅当 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时

A 可逆

$A^*=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_2\cdots a_n \\ \vdots & ⋰ & \vdots \\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1\cdots a_{n-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

$=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \frac{1}{a_1} \\ \vdots & ⋰ & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

4. 设 J 是元素全为 1 的 $n(\geqslant 2)$ 阶方阵，证明 $E-J$ 可逆，且 $(E-J)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}J$.

证明：$(E-J)(E-\frac{1}{n-1}J)$

$=E^2-\frac{n}{n-1}J+\frac{1}{n-1}J^2$

$\because JJ=nJ$

$\therefore (E-J)(E-\frac{1}{n-1}J)=E$

$\therefore E-J$ 可逆

且 $(E-J)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}J$

5. 设 $AP=P\Lambda$，其中 $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$，求 $\varphi(A)=A^8(5E-6A+A^2)$.

$\because AP=P\Lambda \qquad \because |P|=-6\neq 0$

$\therefore \varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}\frac{1}{|P|}\cdot P^*$

$=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ 12 & 0 & 0\\ 12 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -3 & 0 & 3\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4 & 4 & 4\\ 4 & 4 & 4\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}$

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|B|=$ $\underline{\ \frac{1}{9}\ }$.

7. 设 A，B 均为 n 阶矩阵，且 A 可逆，则下列结论正确的是 $\underline{\ B\ }$.

A. 若 $AB\neq O$，则 B 可逆

B. 若 $AB=O$，则 $B=O$

C. 若 $AB\neq O$，则 B 不可逆

D. 若 $AB=BA$，则 $B=E$

8. 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，则 $(2A^*)^*=$ $\underline{\ 2A\ }$.

9. 设 $A=\mathrm{diag}(1,-2,1)$，且 $A^*BA=2BA-8E$，求 B.

$BA(2E-A^*)=8E$

$B(2E-A^*)=8A^{-1}$

$B=8A^{-1}\cdot(2E-A^*)^{-1}$

$\therefore B=\mathrm{diag}(2,-4,2)$

10. 求解矩阵方程：$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

令 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\because |A| = 1 \neq 0$

$\therefore A^{-1}AX = A^{-1} \cdot B$

$\therefore X = A^{-1} \cdot B$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

11. 问 λ、μ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？

记 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ \lambda & \mu & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

若$|A| \neq 0$ $x = A^{-1} \cdot B$

$= \frac{1}{|A|} \cdot A^* \cdot B$

$= -\frac{1}{(\lambda-1)(\mu-1)} \begin{pmatrix} 0 & \mu-1 & 1-\mu \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ \mu-\lambda\mu & \lambda-\lambda\mu & \lambda\mu-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{(\lambda-1)(\mu-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 若有非零解

则 $|A| = 0$. 则 $\lambda = 1$ 或 $\mu = 1$

思考题

方阵 A 的可逆性及逆阵与非零数 a 的倒数之间有何异同？（从定义、判定及性质等方面进行比较）

均需要 $|A| \neq 0$. $a \neq 0$ 可逆.

均表示为 A^{-1}. a^{-1}

$AA^{-1} = E = 1$

$a \cdot a^{-1} = 1$