第二篇 电磁学

上讲内容回顾

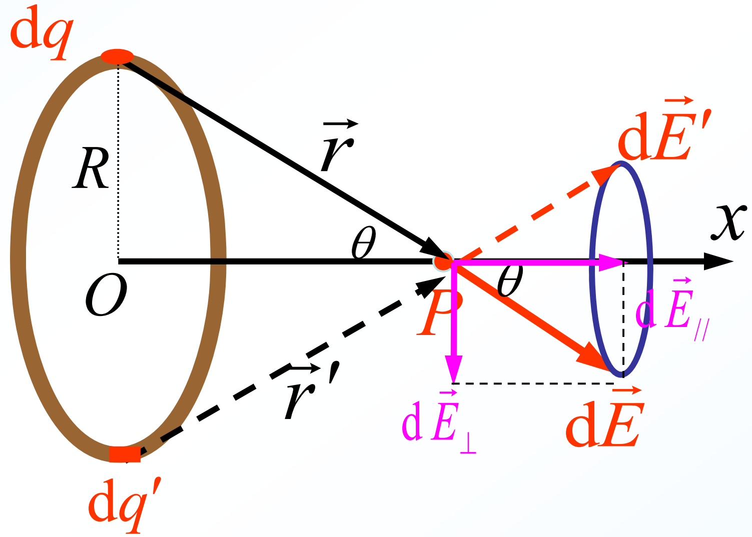
- 电场强度的定义：$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$
- 基本方法：用点电荷电场公式和场强叠加原理
- 典型带电体 $\vec{E}$ 分布：

无限长均匀带电直线： $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 垂直于带电直线

均匀带电圆环轴线上： $\vec{E} = \dfrac{qx\vec{i}}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$

无限大均匀带电平面： $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 垂直于带电面

例6-4.求半径为R 、带电量为q的均匀带电细圆环轴线上的电场。



解： 在圆环上取电荷元dq

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

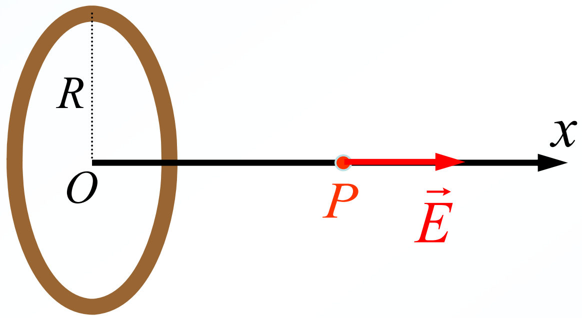
各电荷元在P点$\mathrm{d}\vec{E}$方向不同，分布于一个圆锥面上

$$\mathrm{d}\vec{E}=\mathrm{d}\vec{E}_{\perp}+\mathrm{d}\vec{E}_{//}$$ 由对称性可知 $$E_{\perp}=\int \mathrm{d}E_{\perp}=0$$

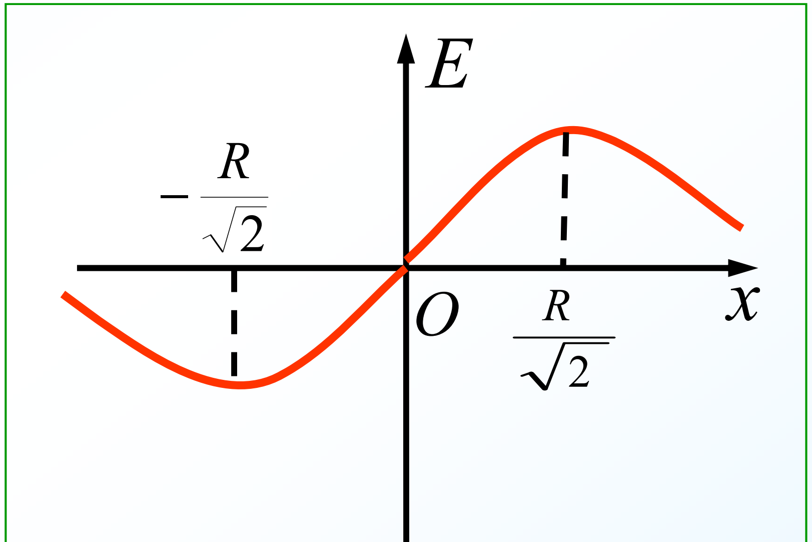
$$E=E_{//}=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{x}{r}$$

$$=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$



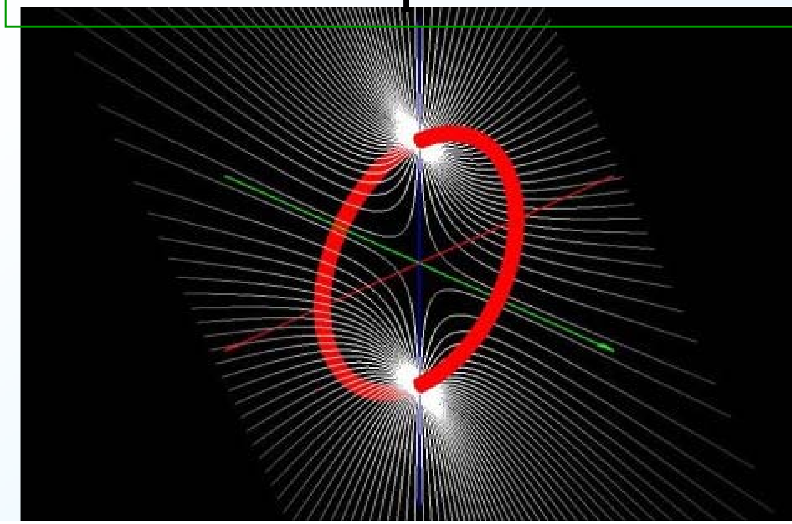
$$\vec{E}=\frac{qx\vec{i}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$



讨论：环心处 $E=0$

$$x>>R \qquad E\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

$$x\rightarrow\infty \qquad E\rightarrow 0$$

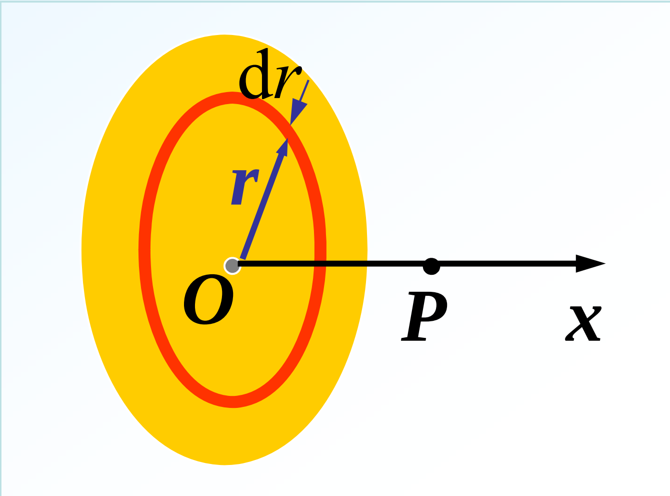


由 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=0$ 得 $x=\pm\frac{R}{\sqrt{2}}$

处 E 取极大值

练习: 无限大均匀带电平面的电场(电荷面密度σ).

为利用例4结果简化计算, 将无限大平面视为半径$R\to\infty$的圆盘 —— 由许多均匀带电圆环组成.



思路

$$\mathrm{d}q=?$$

$$\mathrm{d}E=?$$

$$E=\int\mathrm{d}E=?$$

$$\mathrm{d}q=2\pi r\sigma\,\mathrm{d}r$$

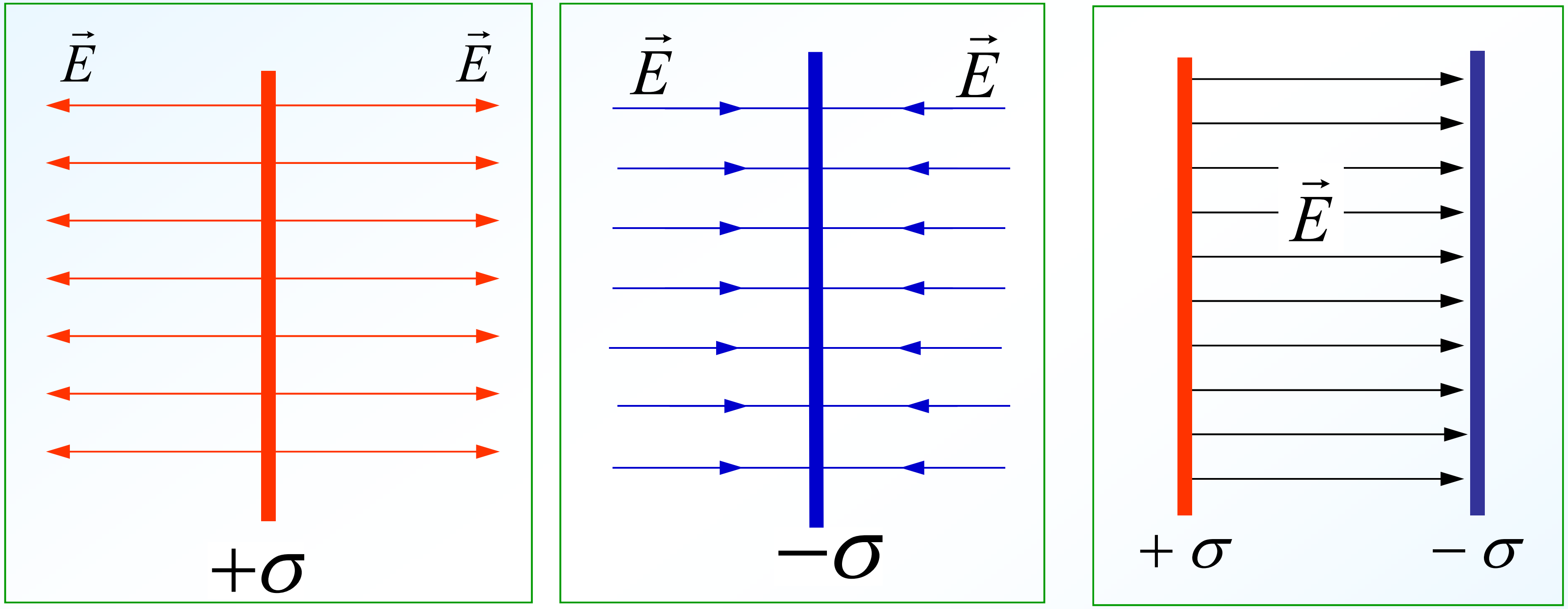
$$\mathrm{d}E=\frac{x\cdot\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E=\int_0^R\frac{\sigma\cdot x\cdot 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}\right]$$

$$\boxed{R\to\infty\text{时},\quad E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

结论:

1. 无限大带电平面产生与平面垂直的均匀电场 $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



2. 两平行无限大带电平面（$+\sigma,-\sigma$）的电场

$$E=E_{+}+E_{-}=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & \text{两平面间}\\ 0 & \text{两平面外侧}\end{cases}$$

复习

- **电场强度的定义：** $\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$
- **静电场的高斯定理**

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$$

静电场的重要性质之一 —— 静电场是有源场

- **基本方法：**

(1) 用点电荷电场公式和场强叠加原理

(2) 利用高斯定理可求解具有某些对称分布的静电场

§6-2　电通量与高斯定理

一、电场线(electric field line)

$\vec{E}$：空间矢量函数

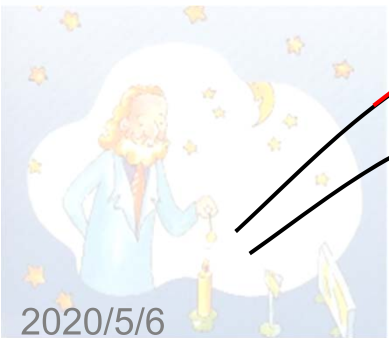
定量研究电场：对给定场源电荷求出其分布函数

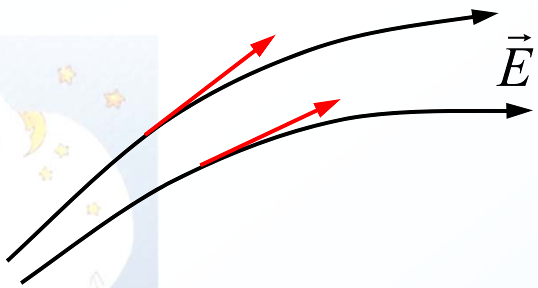
定性描述电场整体分布：电场线方法

规定电场线:

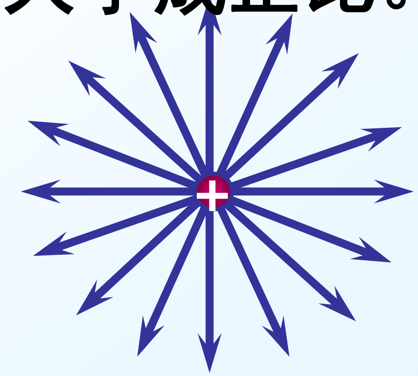
其上每点切向: 该点电场强度 $\vec{E}$ 方向

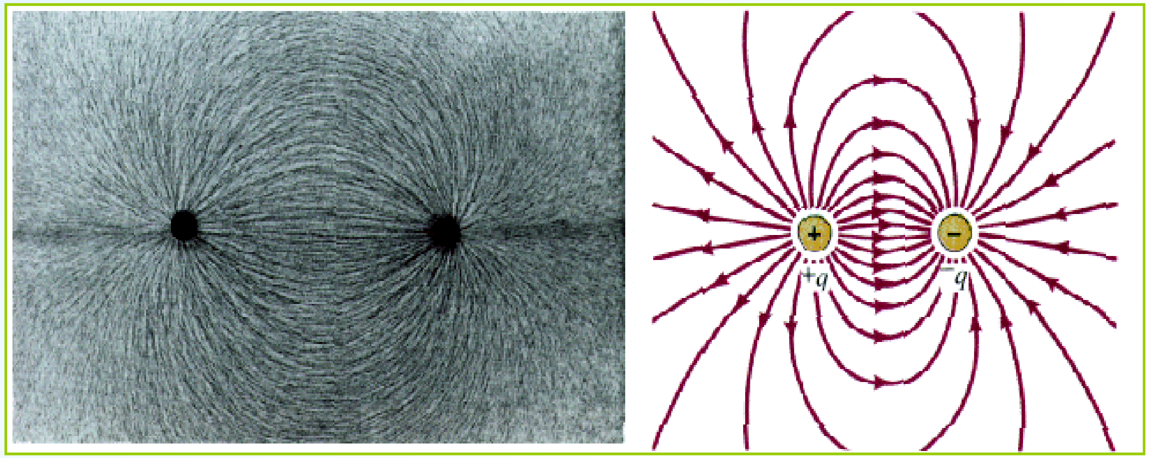
垂直 $\vec{E}$ 的单位面积上通过的电场线条数等于场强的大小，即电场线的疏密与场强的大小成正比。



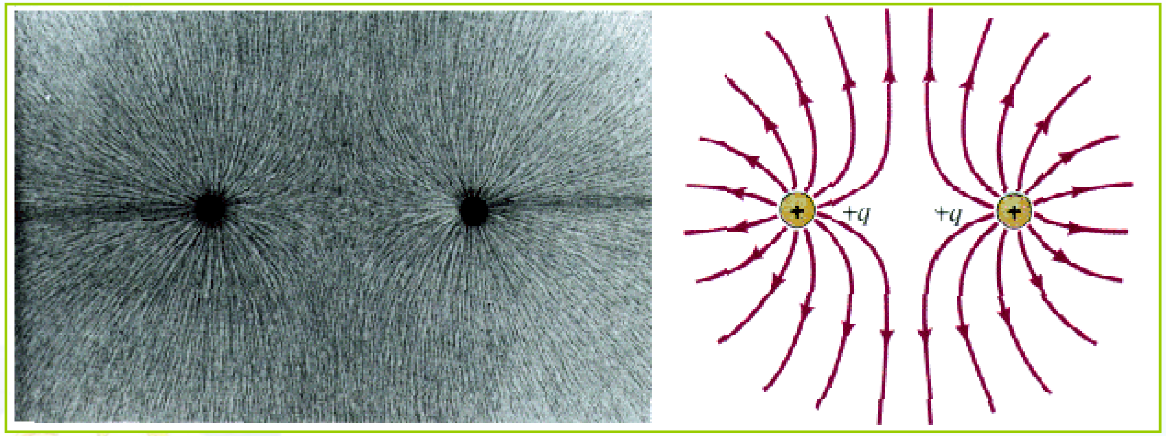


$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

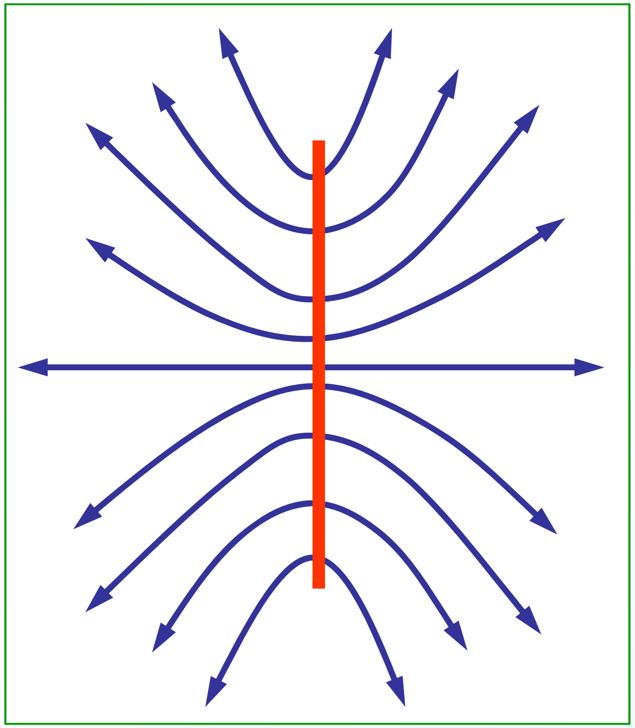




电偶极子的电场线

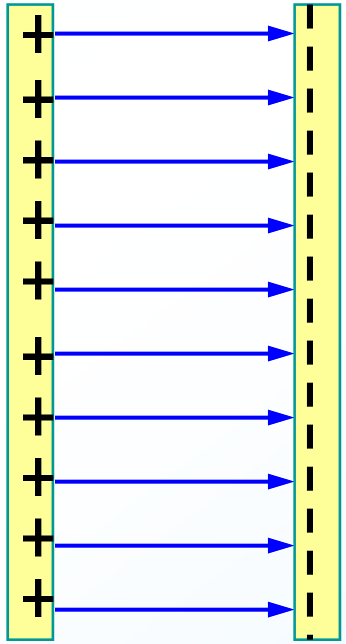


一对正电荷的电场线



均匀带电直导线的电场线

平板电容器中的电场线



静电场中电场线的特点：

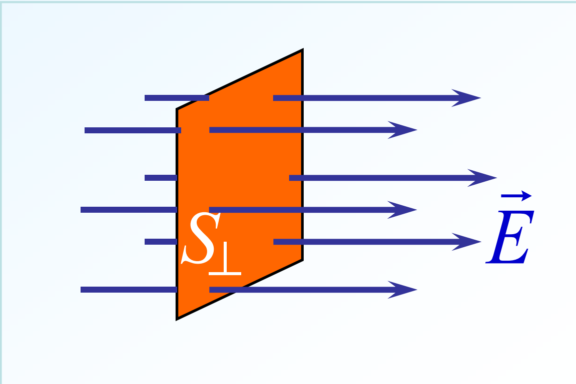
1. 电场线起始于正电荷，终止于负电荷。

2. 电场线不闭合，不相交。

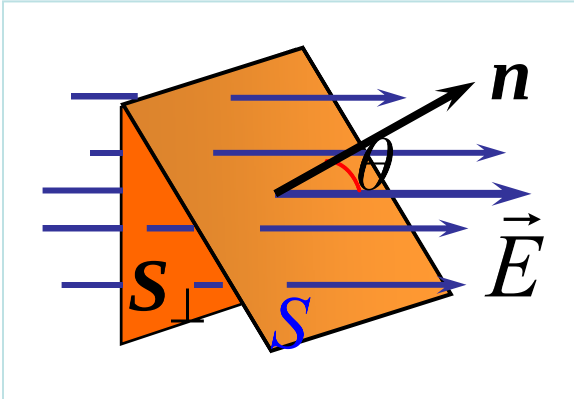
3. 电场线密集处电场强，电场线稀疏处电场弱。

二、电通量

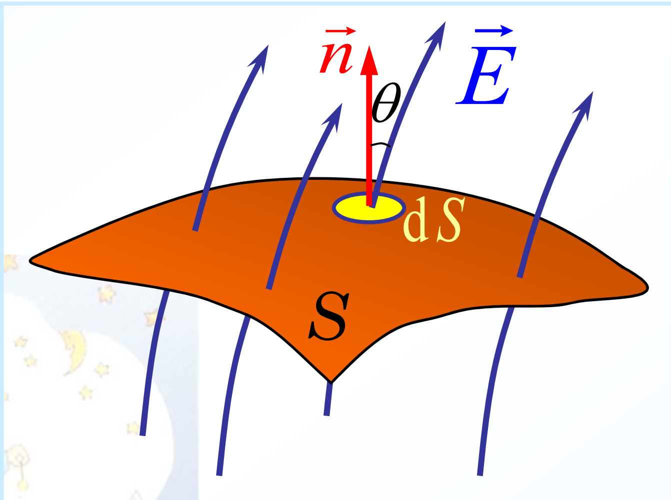
通过电场中某一给定面的电场线的总条数叫做通过该面的电通量(electric flux)。



$$\Phi_e = ES_\perp$$

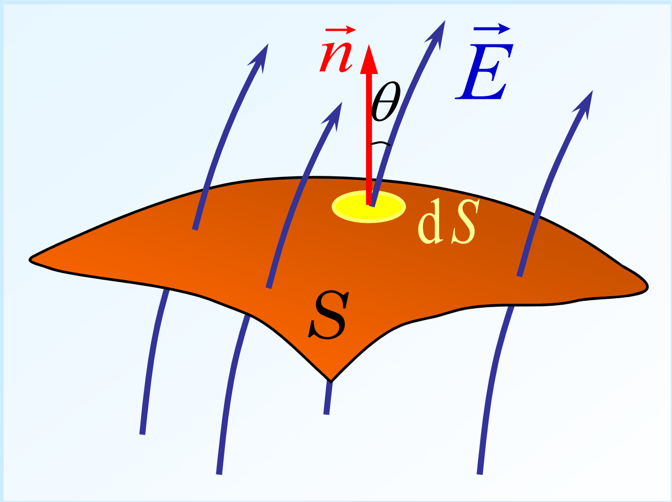


$$\Phi_e = ES_\perp = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}$$



面积元矢量：$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\ \vec{n}$

面积元范围内 $\vec{E}$ 视为均匀



(1) 通过面元的电通量

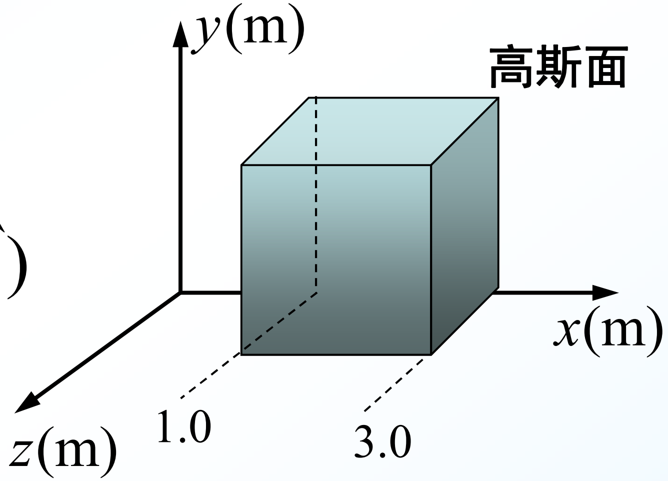
$$\mathrm{d}\Phi_e = E\mathrm{d}S_{\perp} = E(\mathrm{d}S\cos\theta)$$
$$= \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

(2) 通过曲面S的电通量 $\Phi_e = \int_S \mathrm{d}\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

$$\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \begin{cases} \theta < \dfrac{\pi}{2} & \Phi_e > 0 \\ \theta > \dfrac{\pi}{2} & \Phi_e < 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} & \Phi_e = 0 \end{cases}$$

(3) 通过封闭曲面的电通量 $\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

例6-5: 一个非均匀电场$\vec{E}=3.0x\hat{i}+4.0\hat{j}\left(N\cdot C^{-1}\right)$,穿过如图所示的立方体高斯面. 求穿过图示右侧面和上表面的电通量.



解: 对右表面 $\mathrm{d}\vec{S}=\mathrm{d}S\hat{i}$

$$\Phi_e=\int_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_S(3.0x\hat{i}+4.0\hat{j})\cdot(\mathrm{d}S\hat{i})$$

$$=9\int\mathrm{d}S=36(\mathrm{N\cdot C^{-1}\cdot m^2})$$

对上表面: $\mathrm{d}\vec{S}=\mathrm{d}S\hat{j}$

$$\Phi_e=\int_S(3.0x\hat{i}+4.0\hat{j})\cdot(\mathrm{d}S\hat{j})=16(\mathrm{N\cdot C^{-1}\cdot m^2})$$

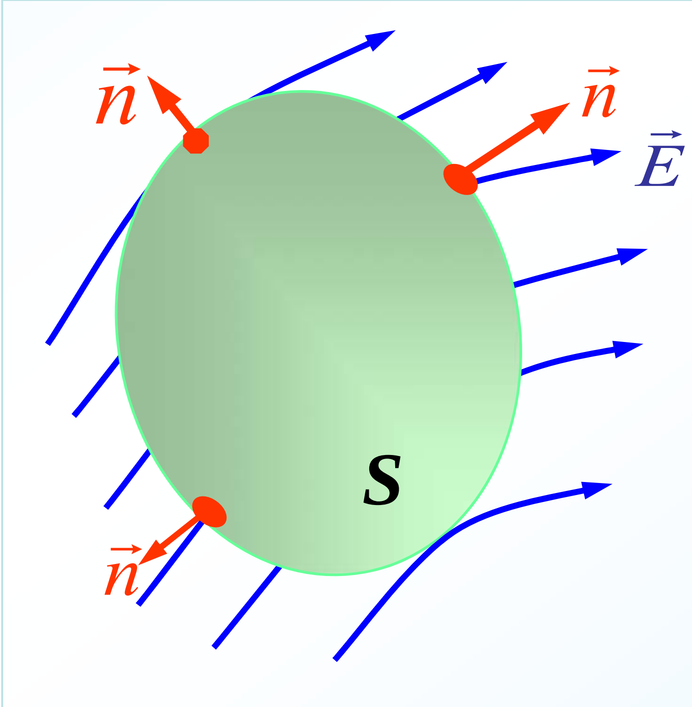
通过封闭曲面的电通量

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

规定：封闭曲面外法向为正

穿入的电场线 $\Phi_e < 0$

穿出的电场线 $\Phi_e > 0$



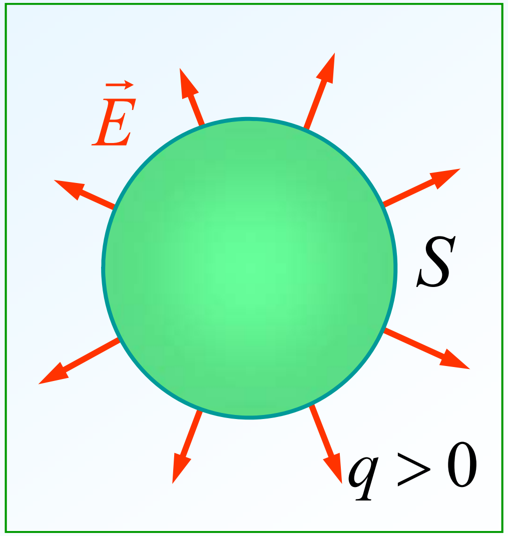
练习1:空间有点电荷q，求下列情况下穿过曲面的电通量

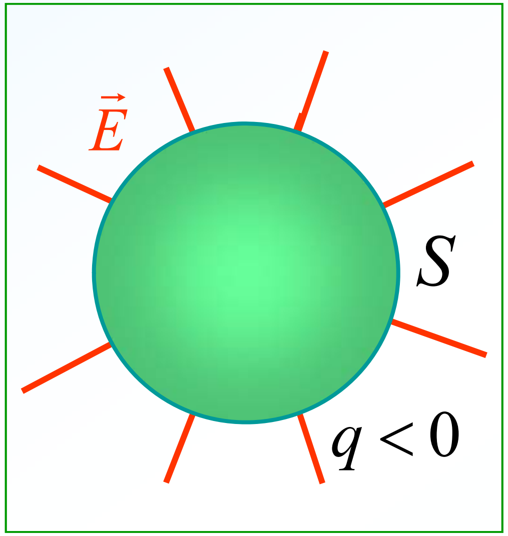
(1) 曲面为以电荷为中心的球面

(2) 曲面为包围电荷的任意封闭曲面

(3) 曲面为不包围电荷的任意封闭曲面

(1) 曲面为以电荷为中心的球面





$$q>0:\quad \Phi_e>0$$

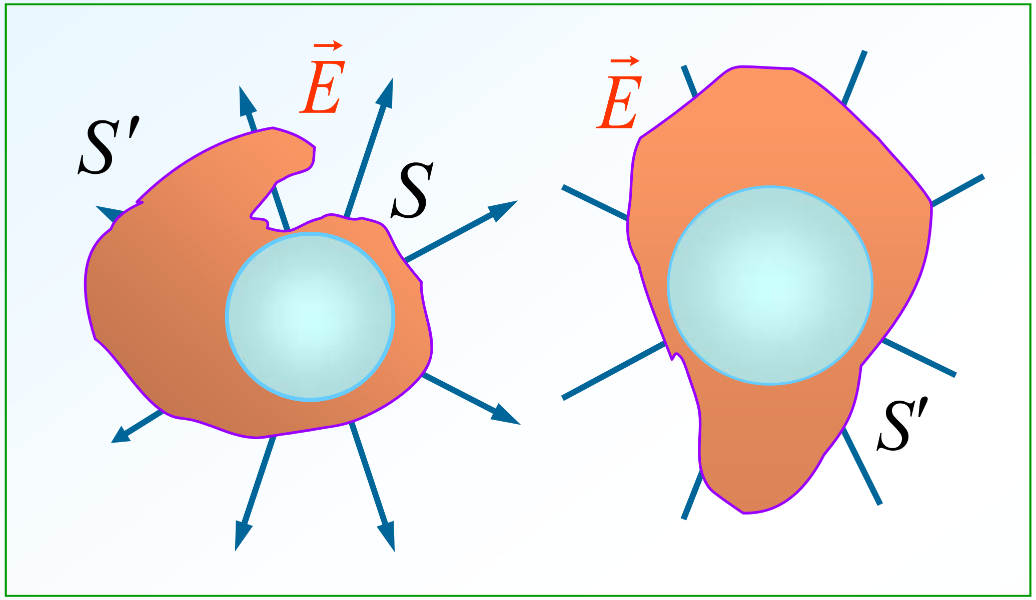
$$q<0:\quad \Phi_e<0$$

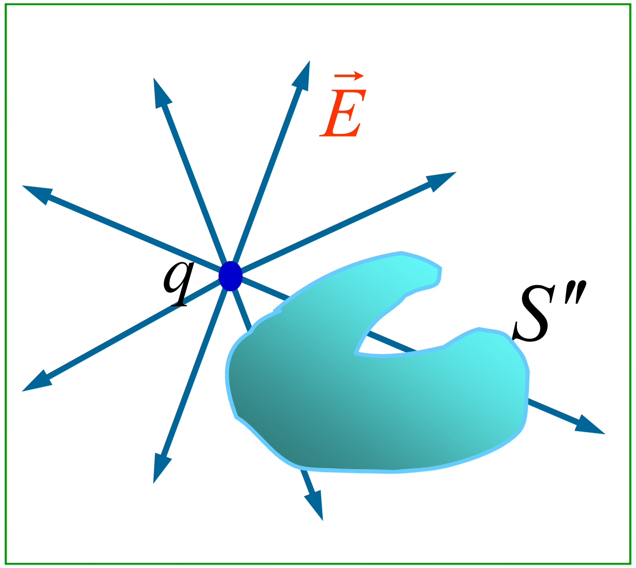
$$\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\oint_S \frac{q\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_S \mathrm{d}S=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

与 r 无关

单个点电荷场中, 由 $+q$ 发出的电场线延伸到∞, 由∞而来的电场线到 $-q$ 终止。在无电荷处，电场线不中断、不增加。

(2) 曲面为包围电荷的任意封闭曲面





$$\Phi_{es'} = \Phi_{es} = \frac{q}{\varepsilon_0} \begin{cases} q>0: & \Phi_e > 0 \\ q<0: & \Phi_e < 0 \end{cases}$$

$$\Phi_{es''} = 0$$

(3) 曲面为不包围电荷的任意封闭曲面

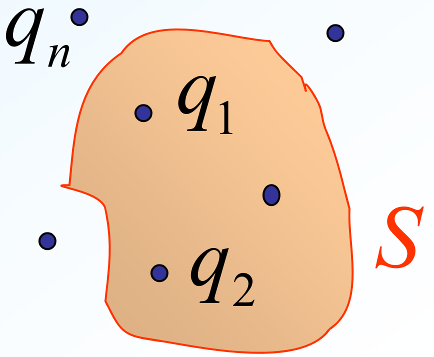
结论

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \begin{cases} q/\varepsilon_0 & (q\text{在}S\text{内}) \\ 0 & (q\text{在}S\text{外}) \end{cases}$$

思考： 1) 是否存在 q 恰好在S上的情况？

2)上述结论与库仑定律 $F \propto 1/r^2$ 有何关系？

练习2： 空间有点电荷系$q_1,q_2,\ldots q_n$，求穿过空间任意封闭曲面S的电通量。



曲面上各点处电场强度：

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n$$

包括S内、S外，所有电荷的贡献。

穿过S的电通量：

$$\Phi_e=\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint_S \vec{E}_1\cdot d\vec{S}+\oint_S \vec{E}_2\cdot d\vec{S}+\cdots+\oint_S \vec{E}_n\cdot d\vec{S}$$

$$=\Phi_{e1}+\Phi_{e2}+\cdots+\Phi_{en}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

只有S内的电荷对穿过S的电通量有贡献。

三、真空中高斯定理(Gauss theorem)

真空中静电场内，通过任意封闭曲面(高斯面)的电通量等于该封闭曲面所包围的电量**代数和**的 $1/\varepsilon_0$ 倍：

$$\Phi_e = \boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$$

讨论：

1. 式中各项的含义

S： 高斯面，**封闭曲面**

$\vec{E}$： 总场, S内外所有电荷均有贡献

ε_0： 真空介电常数，也叫真空电容率

$\sum q_{内}$： 高斯面内的净电荷

Φ_e： 只有S内电荷有贡献

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

2. 揭示了静电场中“场”和“源”的关系

电场线有头有尾

$+q$：发出 q/ε_0 条电场线，是电场线的“头”

$-q$：吸收 q/ε_0 条电场线，是电场线的“尾”

“头”
“尾” → “源”

静电场的重要性质之一——静电场是有源场

3. 反映了库仑定律的平方反比关系

在静电学中，库仑定律的结果和高斯定理一致。但库仑定律对于电磁场（运动电荷）不适用。

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$$

4.利用高斯定理可方便求解具有某些对称分布的静电场

成立条件： 静电场

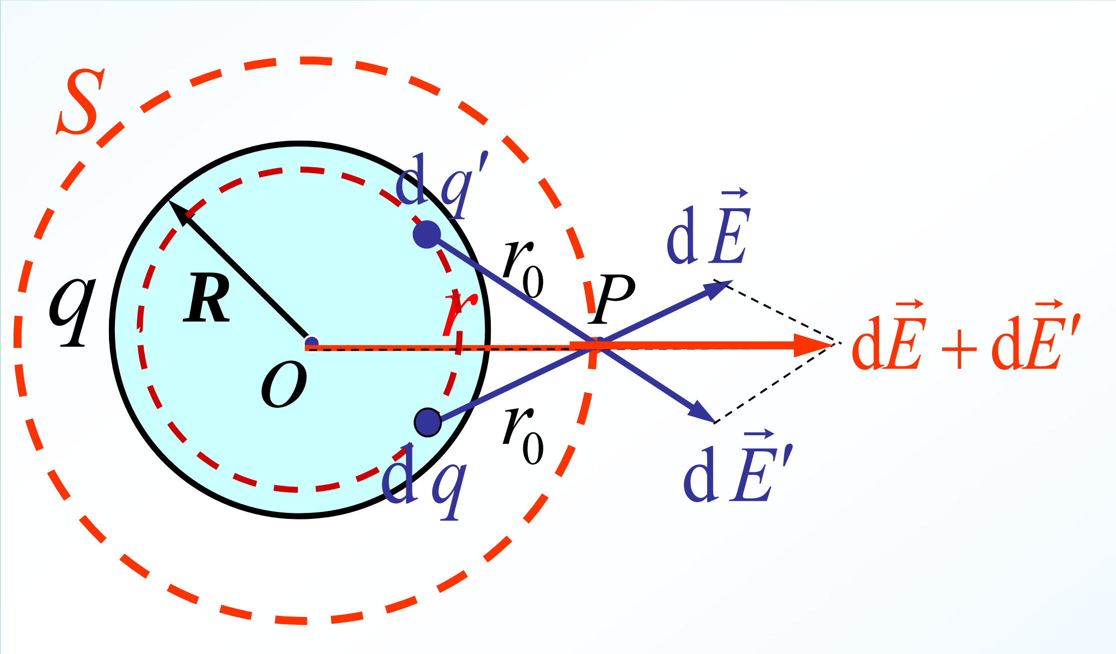
求解条件： 电场分布具有某些对称性

才能找到恰当的高斯面，使 $\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}$ 中的 $\vec{E}$ 能够以标量形式提到积分号外，从而简便地求出 $\vec{E}$ 分布。

常见类型： 场源电荷分布 $\begin{cases}\text{球对称性}\\ \text{轴对称性}\\ \text{面对称性}\end{cases}$

例6-6. 求均匀带电球体(q、R)的电场分布。

对称性分析



作以O为中心, r为半径的球形面S

S面上各点彼此等价

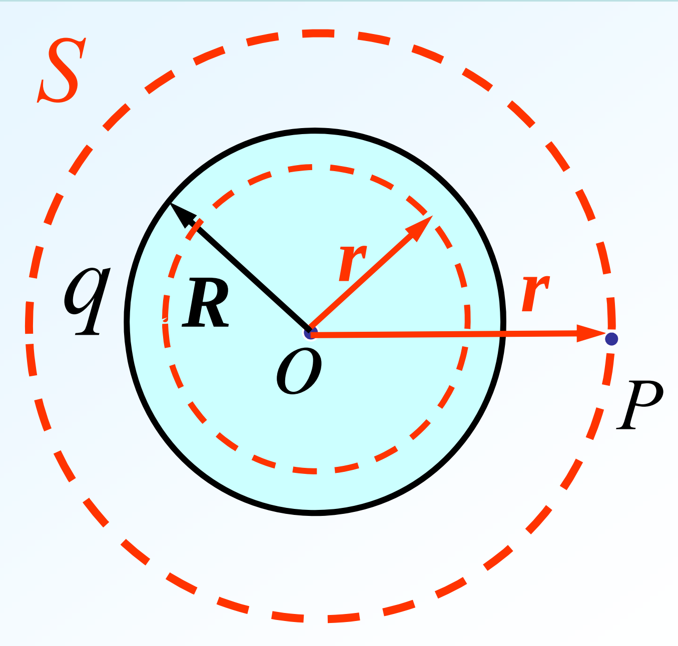
$\vec{E}$ 大小相等

$\vec{E}$ 方向沿径向

以S为高斯面:$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_s E\cos 0^\circ dS = E\cdot 4\pi r^2$

由高斯定理:$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$

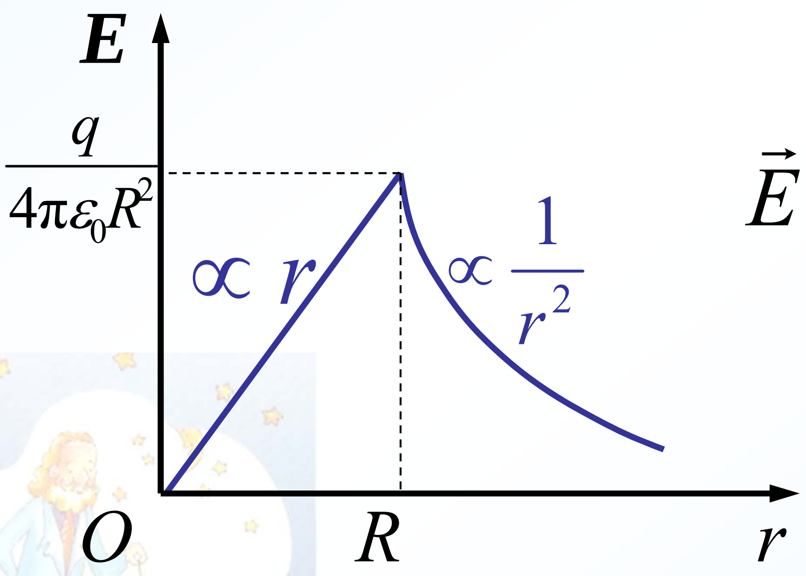
$$E = \left(\sum q_{内}\right)\Big/\left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)$$



$r \geq R$: $\sum q_{内} = q$ $\quad E_{外} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$r \leq R$: $\sum q_{内} = \dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$$E_{内} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$



$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r \leq R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r \geq R) \end{cases}$$

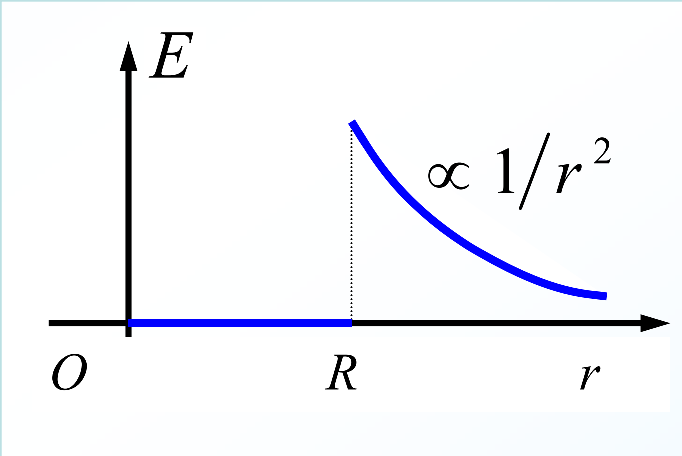
球体内区域 $E \propto r$

球体外区域~电量集中于球心的点电荷

练习

1. 求均匀带电球面(R , q)的电场分布，并画出 $E\sim r$ 曲线。

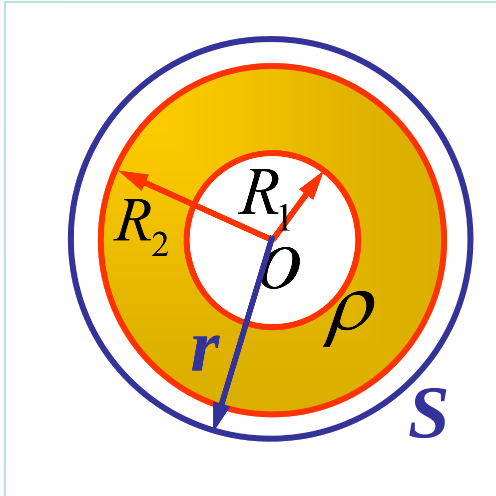
$$\vec{E}=\begin{cases}0 & (r\le R)\\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r\ge R)\end{cases}$$



2. 如何理解带电球面 $r=R$ 处 E 值突变？

带电面上场强E突变是采用面模型的结果，实际问题中计算带电层内及其附近的准确场强时，应放弃面模型而还其体密度分布的本来面目。

计算带电球层(R_1, R_2, ρ)的电场分布。

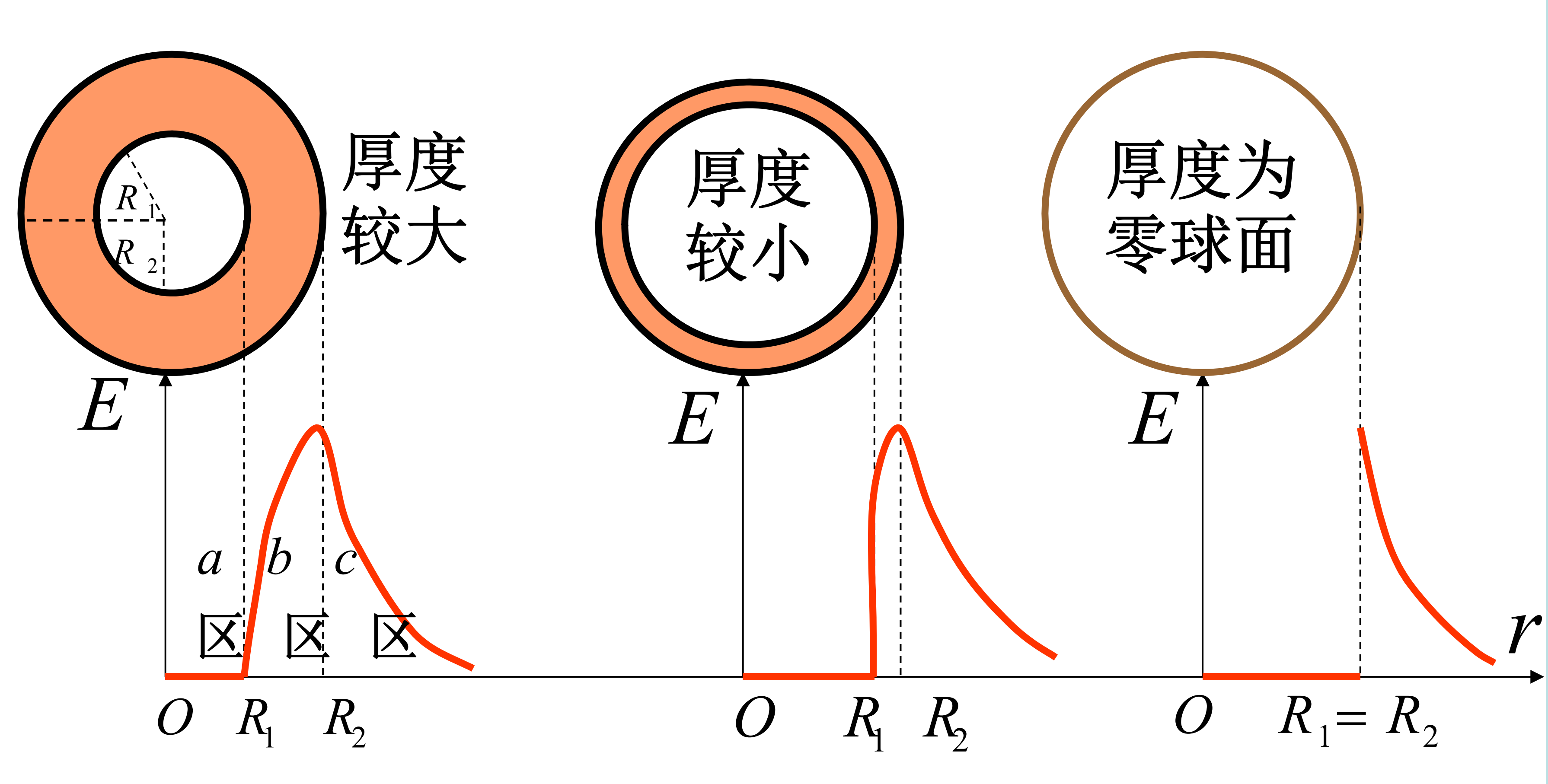


解： 选一半径为r 的球形高斯面S

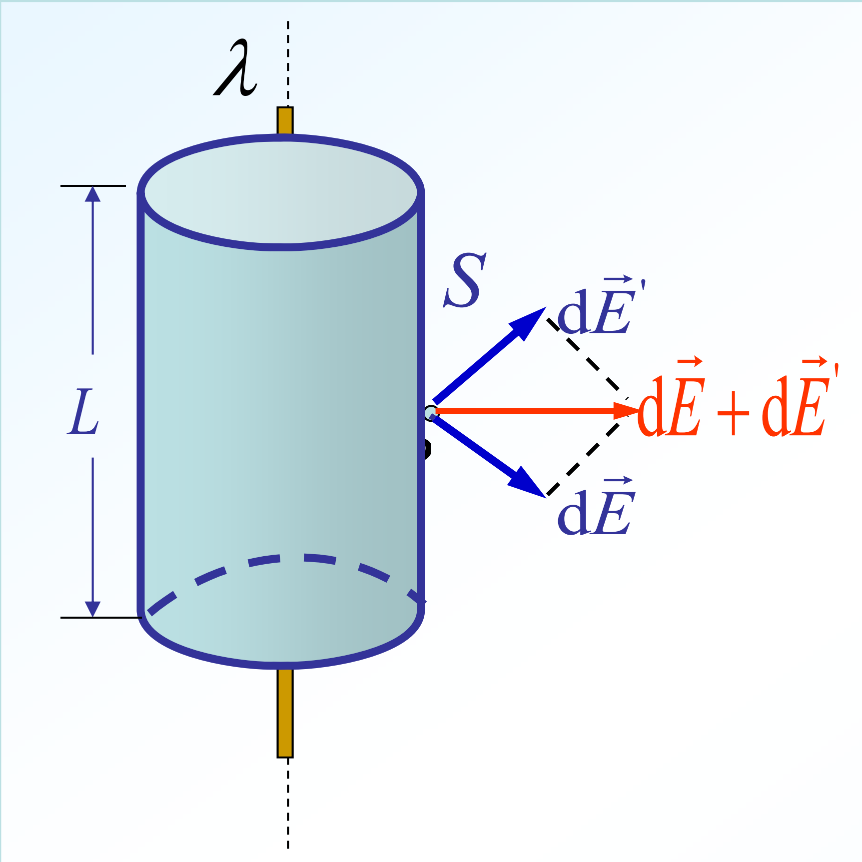
由高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

$$E=\frac{1}{4\pi r^2\varepsilon_0}\sum q_{内}=\begin{cases} 0 & (r\le R_1) \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r-\dfrac{R_1^3}{r^2}\right) & (R_1\le r\le R_2) \\ \dfrac{\rho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r\ge R_2) \end{cases}$$


厚度较大
厚度较小
厚度为零球面
R_1
R_2
E
a区
b区
c区
O
R_1
R_2
E
O
R_1
R_2
E
O
$R_1 = R_2$
r

例6-7. 求无限长均匀带电直线(λ)的电场。



对称性分析：

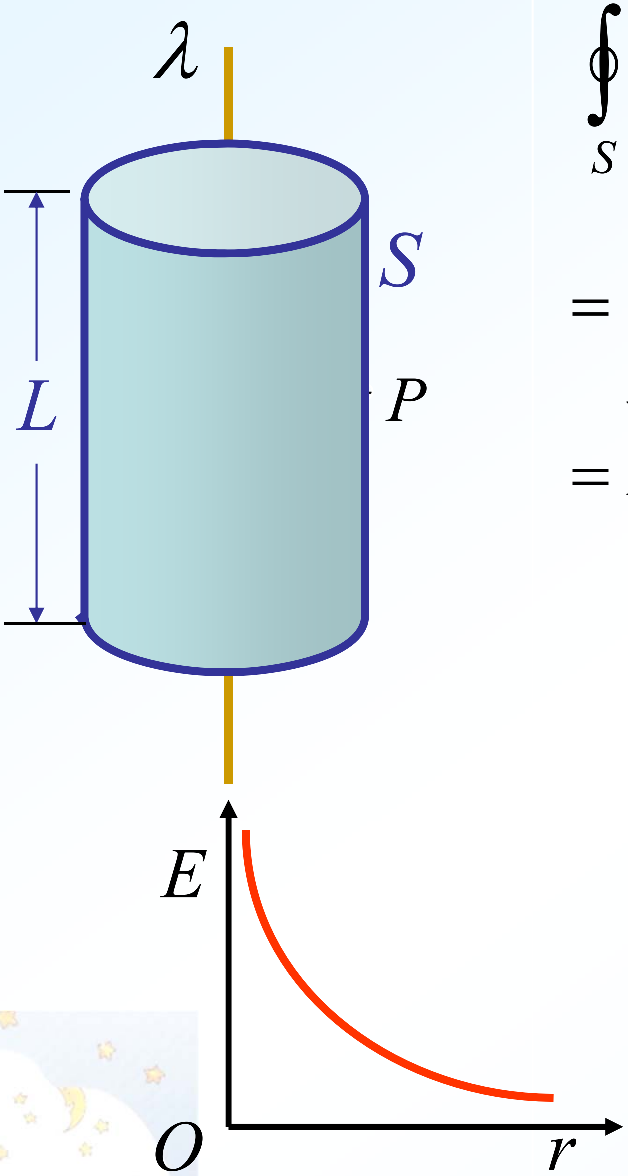
P点处合场强 $\vec{E}$

垂直于带电直线,

与P 地位等价的点的集合为以带电直线为轴的圆柱面。

高斯面：

取长 L 的圆柱面，加上底、下底构成高斯面S



$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{上} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \int_{下} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \int_{侧} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{上} E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S + \int_{下} E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S + \int_{侧} E\cos 0^\circ\,\mathrm{d}S$$

$$= E\cdot 2\pi rL$$

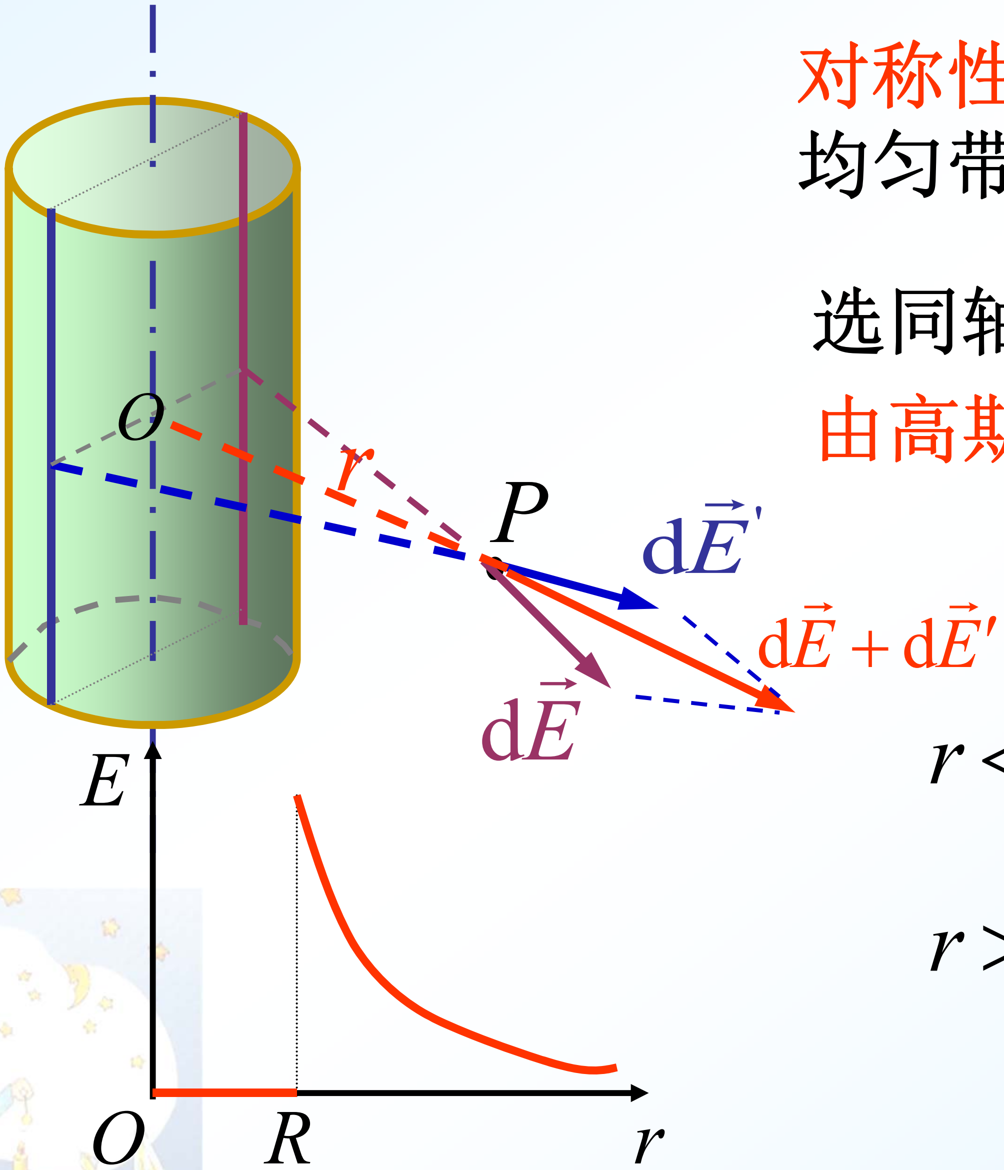
由高斯定理

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 2\pi rL$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore\quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

讨论：1. 无限长均匀带电柱面的电场分布？



对称性分析：视为无限长均匀带电直线的集合

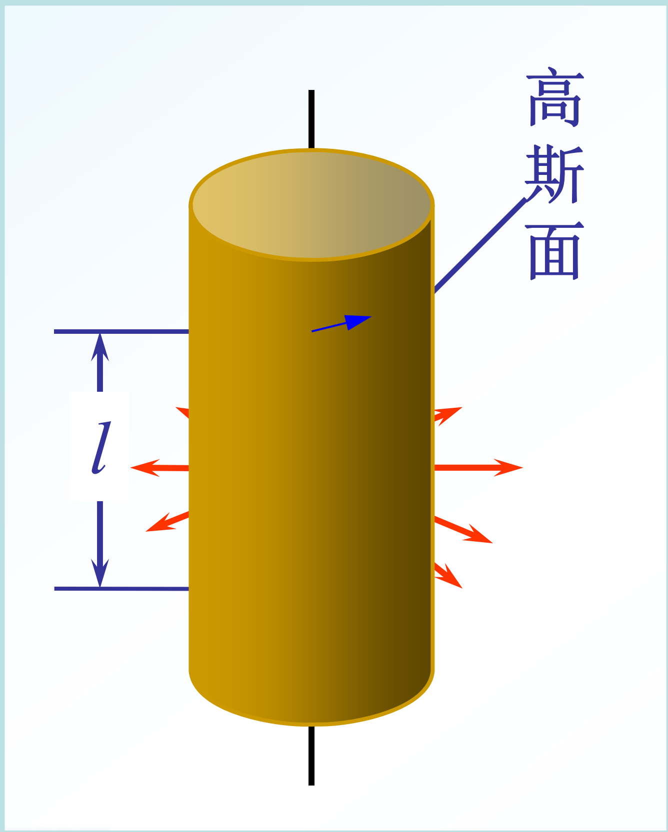
选同轴圆柱型高斯面；

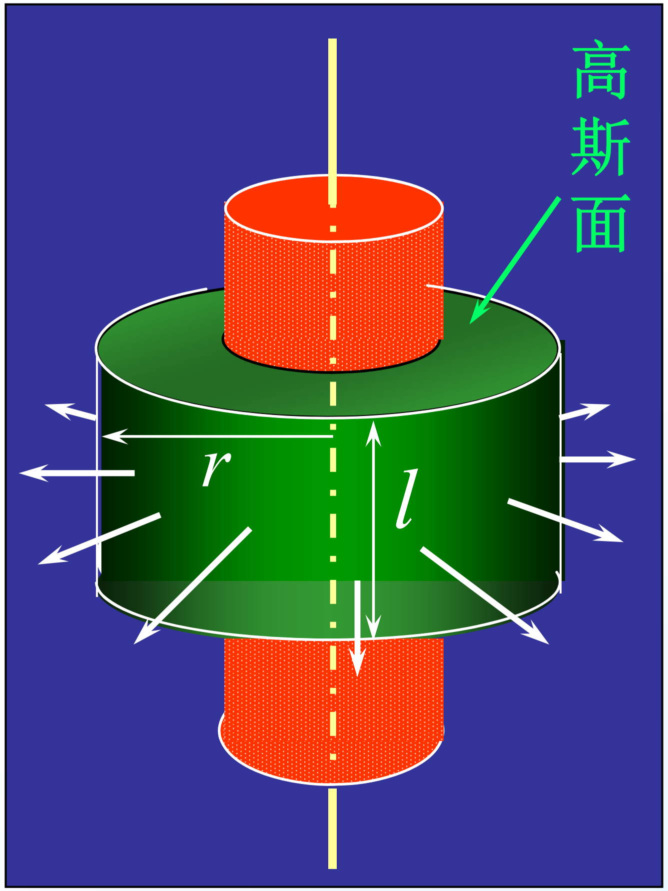
由高斯定理计算

$$r<R:\quad E=0$$

$$r>R:\quad E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

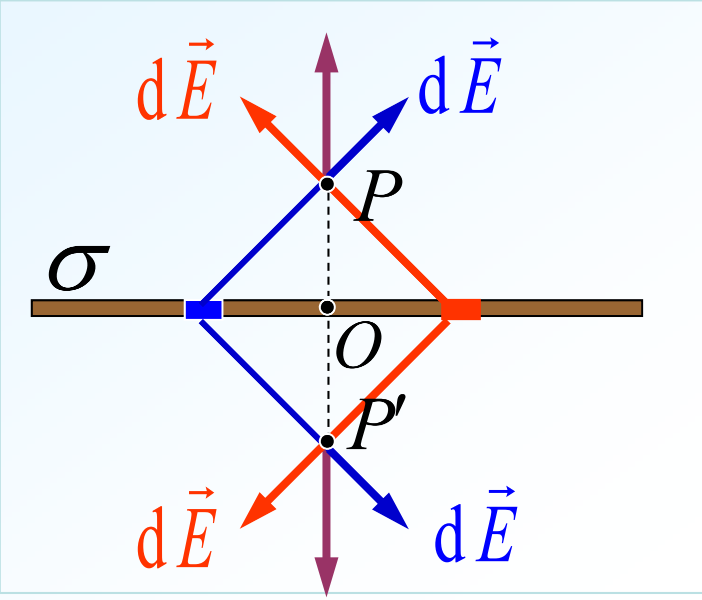
2. 求无限长、 均匀带电柱体的电场分布时，高斯面如何选取？





3. 当带电直线，柱面，柱体不能视为无限长时，能否用高斯定理求电场分布？

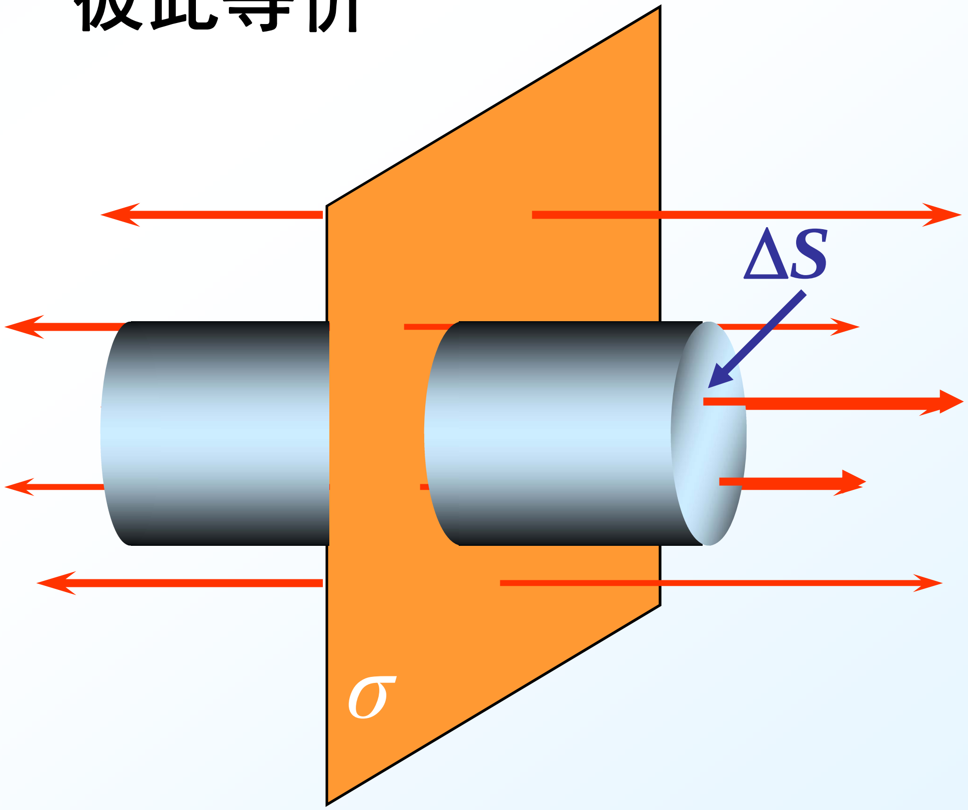
例6-8. 求无限大均匀带电平面的电场(电荷面密度σ)。

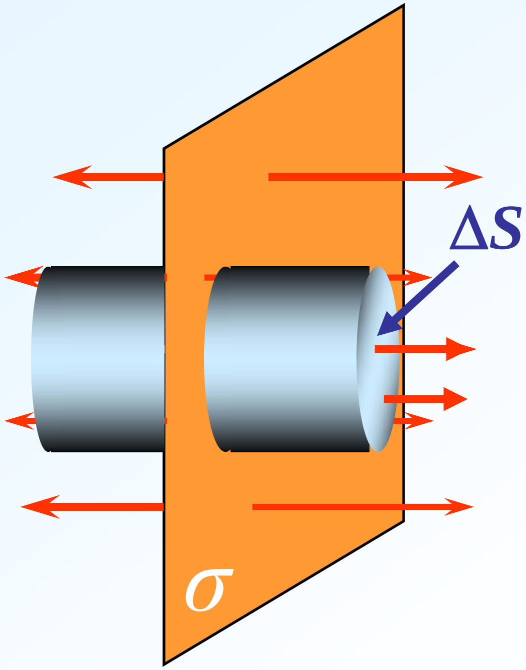


对称性分析:

$\vec{E}$ 方向垂直于带电平面,离带电平面距离相等的场点彼此等价

如何构成封闭的高斯面?





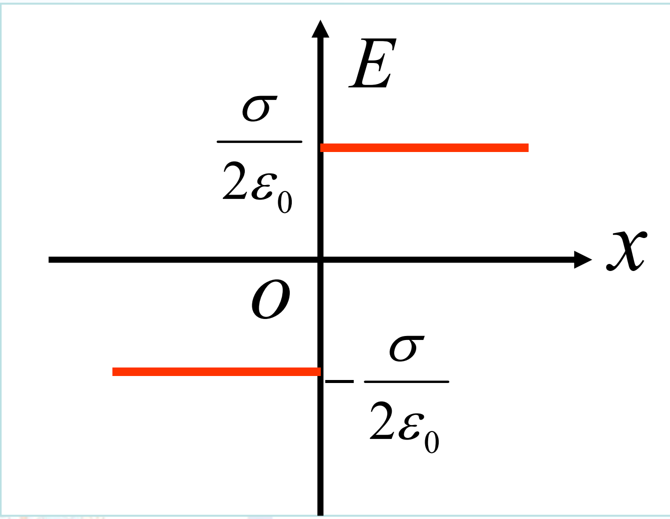
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\text{左}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{右}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{侧}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{\text{左}} E\cos 0^\circ \mathrm{d}S + \int_{\text{右}} E\cos 0^\circ \mathrm{d}S + \int_{\text{侧}} E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}S$$

$$= 2E\cdot \Delta S$$

由高斯定理 $\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2E\cdot \Delta S$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{内}} = \frac{\sigma\cdot \Delta S}{\varepsilon_0}$$



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

其指向由 σ 的符号决定

总结：由高斯定理求电场分布的步骤

1. 由电荷分布的对称性分析电场分布的对称性;

2. 在对称性基础上选取高斯面, 目的是使 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 能够积出; (球对称、轴对称、面对称)

3. 求出 $\sum q_{内} = \begin{cases} \rho V & \text{电荷均匀} \\ \int_V \rho \,\mathrm{d}V & \text{电荷非均匀} \end{cases}$

4. 由高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$ 求出电场的大小, 并说明其方向.

电场线的作图方法

① 确定电场与电场线的关系：设平面上某点电场强度$\vec{E}$的二个分量为E_x、E_y, 与电场线在该点的无穷小线元$d\vec{s}$的二个分量dx、dy成比例, 即

$$\mathrm{d}\vec{s} \,//\, \vec{E} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{E_y}{E_x}$$

给任意一个参数t, 则有 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{E_y}{E_x}$$

于是有 $$\begin{cases} y = y + E_y\,\mathrm{d}t \\ x = x + E_x\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

其中比例因子已包含在dt中

② 确定绘图精度：实际计算中常取 $\mathrm{d}t=\dfrac{\alpha}{E}$

α为常数，其大小可依作图的精度要求而定，E是合场强大小.

③ 电场线的出发点及终止点分别是正电荷和负电荷，选取电场线叠代方程的初始值也应由正电荷及负电荷位置和电量大小来决定.