武汉大学国家网络安全学院
2018 - 2019 学年度第 1 学期
《离散数学》期末考试试卷 A 卷 (闭卷)

专业：________________ 学号：____________ 姓名：____________

说明：答案请全部写在答题纸上，写在试卷上无效。
未经主考教师同意，考试试卷、答题纸、草稿纸均不得带离考场，否则视为违规。

题号	一	二	三	四	五		总分
总分	10	20	20	40	10		100

一． **判断题** （共 10 小题，每小题 1 分，共 10 分）

1. 个体域为整数集合 Z，$\forall x \exists y(x+y=0)$ 为真命题。 （ √ ）
2. 每一个良序集必为全序集，而全序集必为良序集。 （ ）
3. 如果一个关系不是自反的，那它一定是反自反的。 （ ）
4. 简单通路一定是基本通路，反之不然。 （ ）
5. 设简单图 G 所有结点的度数之和为 12，则 G 一定有 6 条边。 （ √ ）
6. “明天是晴天”不是命题。 （ ）
7. 两个集合的并集一定比它们的交集元素个数更多。 （ ）
8. 只有双射函数才有逆函数。 （ √ ）
9. 任何命题公式均存在与之等值的析取范式和合取范式。 （ √ ）
10. 若无向图 G 中只有两个奇数度结点，则这两个结点一定连通。 （ √ ）

二． **单项选择题（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）**

1. 下列为命题公式 $P \wedge (Q \vee \neg R)$ 成假指派的是（ B ）。

   A. 100　　B. 101

   C. 110　　D. 111

2. 设 P：我累，Q：我去打球，则命题：“除非我累，否则我去打球”的符号化为（ B ）。

   A. $P \rightarrow Q$　　B. $P \rightarrow \neg Q$

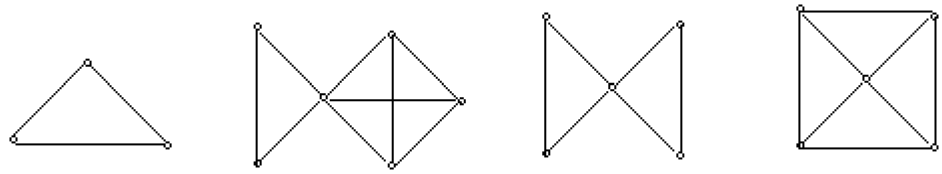
   C. $\neg P \rightarrow Q$　　D. $\neg P \rightarrow \neg Q$

3. n 个命题变元所产生互不等价的极小项项数为（ D ）。

   A. n　　B. $2n$

   C. n^2　　D. 2^n

4. 下图中既不是欧拉图，也不是哈密尔顿图的图是（ B ）。



A.　　B.　　C.　　D.

5. 谓词公式∀x(P(x)∨∃yR(y))→Q(x)中量词∀x 的辖域是（ C ）。

A. (P(x)∨∃yR(y))→Q(x)　　B. P（x）

C. (P(x)∨∃yR(y))　　D. P(x), Q(x)

6. N 是自然数集，定义 $f: N \to N$，$f(x) = x \bmod 3$（即 x 除以 3 的余数），则 f 是（ D ）。

A. 满射不是单射；　　B. 单射不是满射；

C. 双射；　　D. 不是单射也不是满射。

7. 以下哪个集合恒等式是错误的？（ C ）

A. A⋂(B⋂C)=(A⋂B)⋂*C*

B. A⋂(B⋃C)=(A⋂B)⋃(A⋂C)

C. A⋂(A⋃B)=B

D. A⋃(A⋂B)=A

8. 设 A={a, b, c}，R 是 A 上的二元关系，R={<a, a>, <a, b>, <a, c>, <c, a>}，那么 R 是（ D ）。

A. 反自反的　　B. 反对称的

C. 可传递的　　D. 不可传递的

9. 在有 n 个结点的连通图中，其边数（ A ）。

A. 至少有 n-1 条　　B. 最多有 n-1 条

C. 至少有 n 条　　D. 最多有 n 条

10. 某大学进行演讲比赛，得第一名的只有一人。在对六个参赛者进行名次预测时，四人作了如下预测：

甲：取得第一名的要么是我，要么是乙。

乙：取得第一名的要么是甲，要么是丙。

丙：如果不是戊取得第一名，就一定是乙。

丁：第一名决不会是甲。

比赛结果发现，只有一个人的预测正确。请问谁得第一名？谁的预测正确？（ D ）

A. 甲得第一名，乙的预测正确。

B. 乙得第一名，甲的预测正确。

C. 丙得第一名，乙的预测正确。

D. 丁得第一名，丁的预测正确。

E. 戊得第一名，丙的邓测正确。

三． 填空题（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 令 R(x)：x 是实数，G(x,y)：x 比 y 大，则“不存在比一切实数都大的实数”可以符号化为：_$\neg\exists x(R(x)\wedge\forall y(R(y)\rightarrow G(x,y)))$（或$\neg\exists x\forall y(R(x)\wedge(R(y)\rightarrow G(x,y)))$）___。

1. 写出 $A=\{\phi,a,\{a\}\}$，则 A 的幂集 ρ(A)=$\{\emptyset,\{\emptyset\},\{a\},\{\{a\}\},\{\emptyset,a\},\{\emptyset,\{a\}\},\{a,\{a\}\},\{\emptyset,a\{a\}\}\}$。

2. 已知函数 $f:R\rightarrow R_+$，$f(x)=2^x$，则 f 的逆函数 f^{-1}=___$(x+2)^{\frac{1}{3}}$_______________。

2. 已知函数 $f:R\rightarrow R$ 和函数 $g:R\rightarrow R$，R 为实数集合，其中 $f(x)=x^2-2,\ g(x)=x+4$，则复合函数 $f\circ g(x)=$__x^2+8x+14__________________。

3. 集合 $A=\{a,b,c,d\},A$ 上的关系 R={(a,a),(a,c),(c,b),(c,d),(d,b)}，关系 S={(b,a),(c,c),(c,d),(d,a)}，则 R∘S = _{<a,c>,<a,d>,<c,a>,<d,a>______________________。

3. 设 A={1,2,3,4}，R={(1,2),(3,4),(2,2)}，则 R 的自反闭包

   r(R)= {<1,2>,<3,4>,<2,2>,<1,1>,<3,3>,<4,4>,<2,1>,<4,3>}

4. 集合 $A=\{a,b,c,d\},A$ 上的等价关系，R={(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(c,c),(d,d)}，则 A 的等价划分为____{{a,b},{c},{d}}_________。

5. 在一棵树中有 7 片树叶，3 个 3 度结点，其余都是 4 度结点则该树有____1____个 4 度结点。

6. 有向图 G 的图邻接矩阵为$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 G 中的边的数量是____4______。

7. 平面图 G 如右图所示，G 面数和面的最大次数分别是____4,6______。

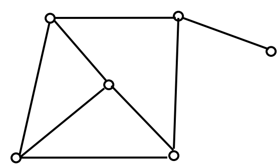


图 G

四． 解答与证明题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1. 构造命题公式$(P \vee Q \to Q \wedge R) \to P \wedge \neg R$的真值表。

P	Q	R	¬R	P∨Q	Q∧R	P∨Q→ Q∧R	P∧¬R	A
0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0

2. 求公式$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$的主合取范式，并求成假赋值。

解：$(P \to Q) \to R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \to R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg Q \vee) R) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R)$

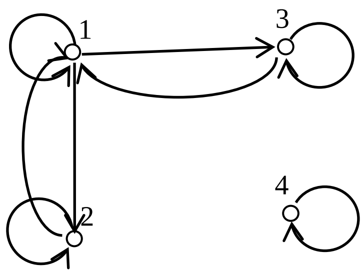
$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_6$

成假赋值为 000，010，110

3. 集合 A={1,2,3,4}，A 上的关系$R = \{<x, y> | x = y \vee x + y \in A\}$。给出关系$R$的关系图和关系矩阵，并讨论$R$的性质。

解：关系图 G 如下图：

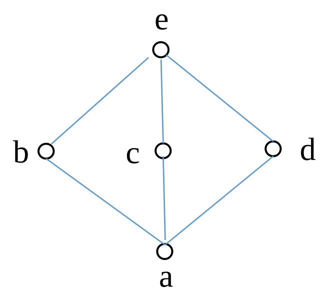


关系矩阵 M 如下：

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 偏序集$\langle A,R_{\le}\rangle$，其中 A=$\{a,b,c,d,e\}$， $R_{\le}=\{\langle a,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle\}\cup I_A$，请画出该偏序集的哈斯图，并找出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元。

解：哈斯图如下：



A 的极大元是 e、极小元是 a、最大元是 e 和最小元是 a.

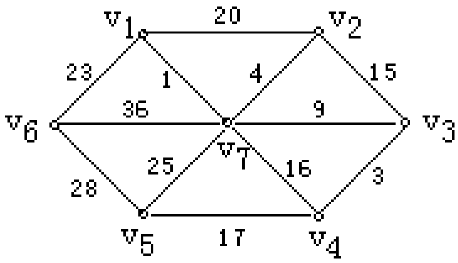
5. 用逻辑推理规则证明：$\neg p\vee q,\neg q\vee r,r\to s\Rightarrow p\to s$。

证明：

(1)	p	附加前提
(2)	$\neg p\vee q$	前提
(3)	q	(1)，(2)析取三段论
(4)	$\neg q\vee r$	前提
(5)	r	(3)，(4) 析取三段论
(6)	$r\to s$	前提
(7)	s	(5)，(6) 假言推理

五. 应用题（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1,v_2,\ldots v_7$ 及预先算出它们之间的一些直接通信线路造价（单位：万元），试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信又使总造价最小。



解：用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法为：

$w(v_1,v_7)=1$　　选$e_1=v_1v_7$

$w(v_7,v_2)=4$　　选$e_2=v_7v_2$

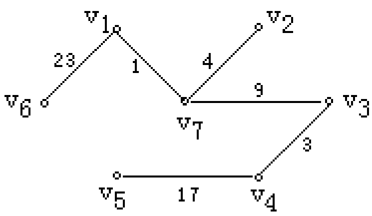
$w(v_7,v_3)=9$　　选$e_3=v_7v_3$

$w(v_3,v_4)=3$　　选$e=v_3v_4$

$w(v_4,v_5)=17$　　选$e=v_4v_5$

$w(v_1,v_6)=23$　　选$e=v_1v_6$

结果如图：



树权 C(T)=23+1+4+9+3+17=57（万元）即为总造价。

（也可以采用破圈法，结果和过程均计分。）