

武汉大学计算机学院2005-2006学年第一学期

2004级《离散数学》考试试题

学号：_____ 姓名：_____ 成绩：_____

注意：所有答案请一律写在试卷纸上并注明题目序号！计算题要求有计算过程！

一、试求下述命题公式 G 的主析取和主合取范式： (10分)

$$(P \rightarrow Q \wedge R) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$$

二、试分别证明下列结论的有效性(要求写证明序列)： (14分, 7+7)

(1) 前提： $P \wedge Q \rightarrow R, \neg R \vee S, \neg S$;

结论： $\neg P \vee \neg Q$;

(2) 前提： $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$;

结论： $\neg \forall x(R(x) \rightarrow P(x))$ 。

三、设 A 、 B 和 C 是三个集合： (9分, 5+4)

(1) 设：

$$A \cap C = B \cap C \text{ 且 } A - C = B - C$$

试证明： $A = B$;

(2) 试证明： $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$ 。

四、设集合 $A = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, a \rangle\}$ 是集合 A 上的二元关系： (10分, 4+4+2)

(1) 求 \mathcal{R}^{2006} ;

(2) 求 $t(\mathcal{R})$;

(3) 试求 A 上同时具有最大元素和最小元素的偏序关系的总数。

五、设 X 和 Y 是两个非空集合, $f: X \rightarrow Y$ 是 X 到 Y 的函数, 设 $A \subseteq X$, $B \subseteq X$: (12分, 5+4+3)

(1) 试证明： $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

(2) 试以集合 $\{1, 2\}$ 上的函数为例举反例证明：

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B);$$

(3) 试证明: 如果 f 是单射, 则:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

六、 设 $G = \{a, b, c, d\}$, G 上的二元运算 $*$ 定义如下:

$*$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

已知 $\langle G, * \rangle$ 构成一个群:

(18分, 每小题3分)

- (1) 试指出群 G 的么元; 并对每个元素求逆元;
- (2) 试求群 G 的每个元素的阶数;
- (3) 试写出群 G 的所有子群;
- (4) 群 G 与 $\langle \mathbb{N}_4, +_4 \rangle$ 同构吗? 为什么?
- (5) 群 G 是交换群吗? 为什么?
- (6) 设 $\langle H, \bullet, e \rangle$ 是一个群, 并且 $\forall a \in H, a^2 = e$, 试证明 H 是交换群。

七、 设 $\langle G, *, e_G \rangle$ 和 $\langle H, \cdot, e_H \rangle$ 是两个群, $h: G \rightarrow H$ 是群 G 到群 H 的同态, 试证明:

(15分, 5+5+3+2)

- (1) 如果 A 是 G 的子群, 则 $h(A)$ 是 H 的子群;
- (2) 如果 B 是 H 的子群, 则 $h^{-1}(B)$ 是 G 的子群;
- (3) 如果 G 和 H 都是有限群, $a \in G$, 则 $h(a)$ 的阶数是 $|G|$ 和 $|H|$ 的公因子;
- (4) 利用上题的结果说明 $\langle \mathbb{N}_4, +_4 \rangle$ 到 $\langle \mathbb{N}_5, +_5 \rangle$ 上共有多少个同态。

八、 称一个有向图为无环路有向图, 当且仅当, 图中没有有向回路。设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个无环路简单有向图(没有自回路和多重边), 试证明:

(12分, 6+6)

- (1) G 中至少有一个结点的出度为0;
- (2) 设 $|V| = n, |E| = m$, 则: $m \leq n(n-1)/2$ 。