矩阵的初等变换与线性方程组——矩阵的秩

知识点巩固练习

1. 矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩是指在A中有一个不等于0的r阶子式D. 且所有r+1阶子式全等于0. 则数r称为矩阵A的秩
2. 若矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 等价，则它们的秩 相等 .
3. 若 $PAQ=B$，这里 P、Q 均为可逆阵，则 $R(A)$ = $R(B)$.
4. $\max\{R(A), R(B)\}$ $\leqslant R(A, B) \leqslant$ $R(A)+R(B)$
5. $R(A+B)$ $\leq$ $R(A)+R(B)$.
6. $R(AB)$ $\leq$ $\min\{R(A), R(B)\}$.
7. 若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，则 $R(A)+R(B)$ $\leq n$.
8. 若 $A_{m\times n}B=O$，且 $R(A)=n$，则 $B=0$.
9. 若 $A_{m\times n}X=A_{m\times n}Y$，且 $R(A)=n$，则 $X=Y$.

练习题

1. 设 A，B 为 n 阶方阵，且秩相等，即 $R(A)=R(B)$，则有 D .

~~A.~~ $R(A-B)=0$

~~B.~~ $R(A+B)=2R(A)$

~~C.~~ $R(A, B)=2R(A)$

D. $R(A, B)\leqslant R(A)+R(B)$

2. 设 A 是 3×4 矩阵，其秩 $R(A)=2$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$，则 $R(BA)=$ 2 .

3. 求矩阵 $\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{bmatrix}$ 的秩，并求一个最高阶非零子式.

$$令\ A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 4 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & 4\\ 0 & -4 & 6 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore R(A)=2$

$\therefore$ 最高阶非零子式：$\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}$

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\end{pmatrix}$，问 k 为何值，可使

(1) $R(A)=1$； (2) $R(A)=2$； (3) $R(A)=3$.

$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ 0 & 2k-2 & 3k-3\\ 0 & 0 & -3k^2-3k+6\end{pmatrix}$

(1) $R(A)=1 \Rightarrow \begin{cases}2k-2=0\\ 3k-3=0\\ 3k^2-3k+6=0\end{cases} \Rightarrow k=1$

(2) $R(A)=2 \Rightarrow \begin{cases}3k^2-3k+6=0\\ k\neq 1\end{cases} \Rightarrow \cancel{k}\ k=-2$

(3) $R(A)=3 \Rightarrow k\neq 1$ 且 $k\neq -2$

5. 设 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^2=A$，证明：$R(A-E)+R(A)=n$，其中 E 是 n 阶单位矩阵.

证明：$(A-E)\cdot A = A^2-A=0$

$\therefore\ R(A-E)+R(A)\leq n$

又 $\because R(A)+R(E-A)\geq R(E)=n$

$R(E-A)=R(A-E)$

$\therefore R(A)+R(A-E)\geq n$

$\therefore R(A-E)+R(A)=n$