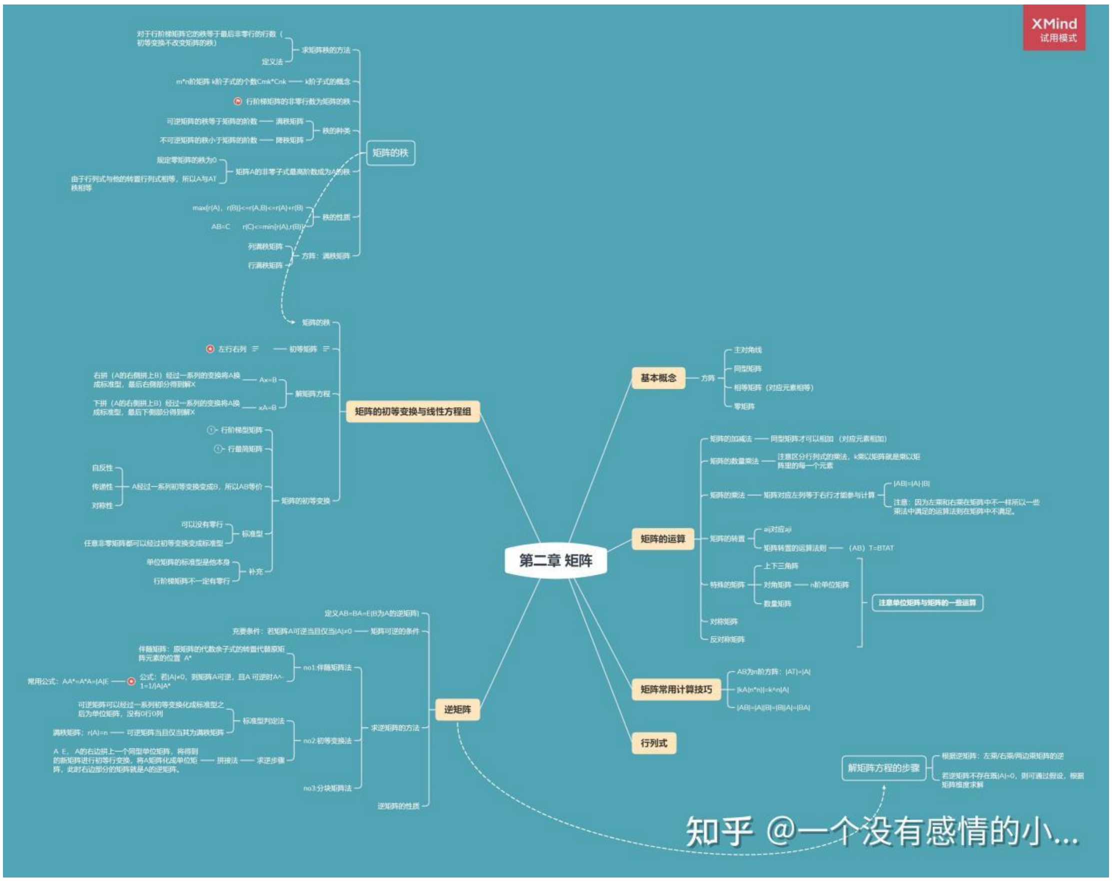
老师好，不好意思哈，我第七周交作业的时候忘记上传思维导图了，所以就放在第八周的作业里了，给老师添麻烦了。



矩阵的初等变换与线性方程组——矩阵的初等变换

知识点巩固练习

1. 矩阵的三类初等行变换为 对换两行；以数k乘某一行中的所有元；把某一行的k倍加到另一行对应的元上去
2. 初等矩阵是指 由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵.
3. 对 $A_{m\times n}$ 实施一次行变换，相当于在 A 的 左边乘相对应的m阶初等矩阵；
   对 $A_{m\times n}$ 实施一次列变换，相当于在 A 的 右边乘相应的n阶初等矩阵.
4. $A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 行等价 $\Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆阵 P，使得 $PA_{m\times n}=B_{m\times n}$；
   $A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 列等价 $\Leftrightarrow$ 存在 n 阶可逆阵 Q，使得 $A_{m\times n}Q=B_{m\times n}$；
   $A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 等价 $\Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆阵 P、n 阶可逆阵 Q，使得 $PA_{m\times n}Q=B_{m\times n}$.
5. $(A_m, E_m) \xrightarrow{r} (E_m, \ A_m^{-1}\ )$.

练习题

1. 用初等行变换把下列矩阵化为行最简形矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$；

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+5r_2\div(-4) \\ r_4+5r_2\div(-4)}]{r_2\div(-4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-4)]{r_1-3r_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+2r_3]{r_1-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}$，求一个可逆矩阵 P，使 PA 为行最简形矩阵.

$$(A,E)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0\\2&3&4&5&0&1&0\\5&4&3&2&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0\\0&-1&-2&-3&-2&1&0\\0&-6&-12&-18&-5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\div(-1)]{r_3-6r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0\\0&1&2&3&2&-1&0\\0&0&0&0&7&-6&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-3&2&0\\0&1&2&3&2&-1&0\\0&0&0&0&7&-6&1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ ~~P = ...~~

$$\therefore P=\begin{pmatrix}-3&2&0\\2&-1&0\\7&-6&1\end{pmatrix}$$

$$PA=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

3. 设 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，求 A.

$$\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&2\\1&2&2\\7&8&2\end{pmatrix}$$

4. 利用矩阵的初等变换，求方阵 $\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

$$\begin{pmatrix}3&2&1&1&0&0\\3&1&5&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}3&2&1&1&0&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}3&0&9&-1&2&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-\frac{9}{2}r_3}\begin{pmatrix}3&0&0&\frac{7}{2}&2&-\frac{9}{2}\\0&-1&0&1&1&-2\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\div(-1)\\r_3\div 2}]{r_1\div 3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 逆矩阵为 $\begin{pmatrix}\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\-1&-1&2\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$AX=2X+A$，求 X.

$(A-2E)X=A$

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&0&1&0&0\\0&-1&-1&0&1&0\\-1&0&-1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}-1&-1&0&1&0&0\\0&-1&-1&0&1&0\\0&1&-1&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}-1&0&1&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&0\\0&0&-2&-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2-\frac{1}{2}r_3\\r_3\div 2}]{r_1+\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}-1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\div(-1)\\r_3\div(-1)}]{r_1\div(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$