

复习

➤ 静电场环路定理:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

➤ 电势能、电势、电势差

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\text{零势点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$A_{ab} = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(U_a - U_b) = qU_{ab}$$

➤ 求静电场电势的基本方法:

(1) 场强积分法;

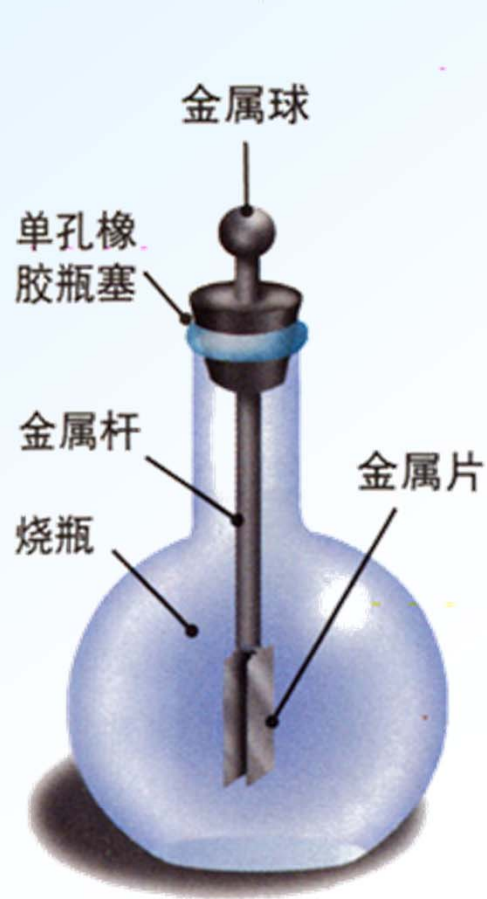
(2) 电势叠加法

$$U = \sum U_i \text{ 或 } U = \int dU$$

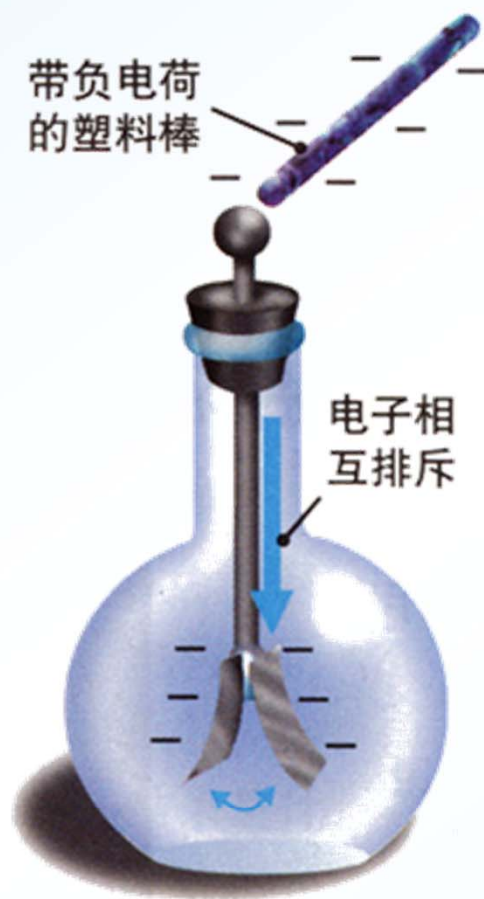
➤ 静电场电场电势关系:

$$\vec{E} = -\text{grad } U = -\nabla U$$

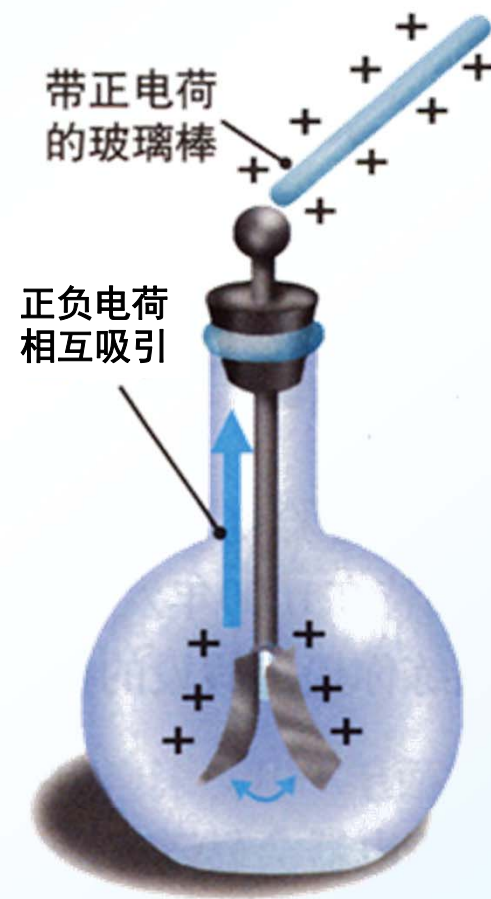




验电器没有带电荷



验电器带电荷



验电器带电荷

验电器用来检验物体是否带有电荷

因果推理 为什么当一个带正电荷或负电荷的物体接触金属球时，验电器上的金属片就张开？

静电场 $\xleftrightarrow[\text{相互影响}]{\text{相互作用}}$ 导体、电介质

↑ 仅限于各向同性的均匀金属导体和电介质

感应电荷

极化电荷

基本定理的特殊应用

电荷重新分布

影响 ↓ 原有电场

电场重新分布

静电平衡状态



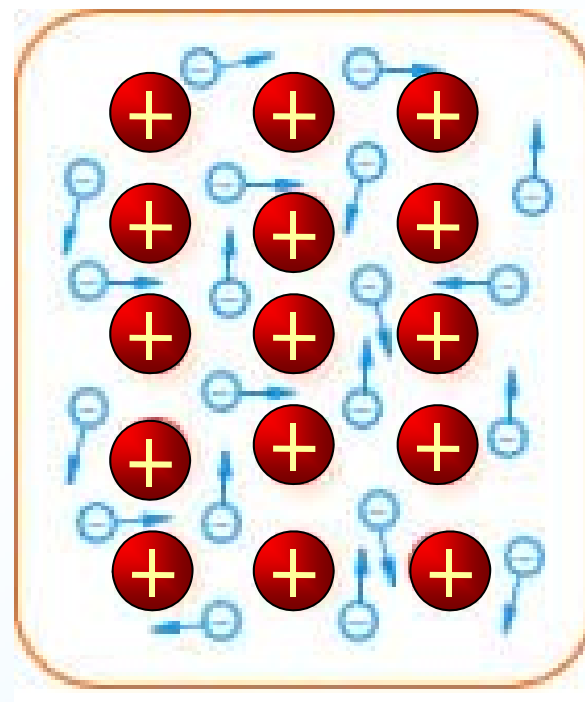
§ 6-4 静电场中的导体

一、导体的静电平衡性质

1. 金属导体(conductor)的电结构

金属导体：带负电的自由电子和带正电的晶格点阵组成。当导体不带电也不受外电场的作用时，只有微观的热运动。

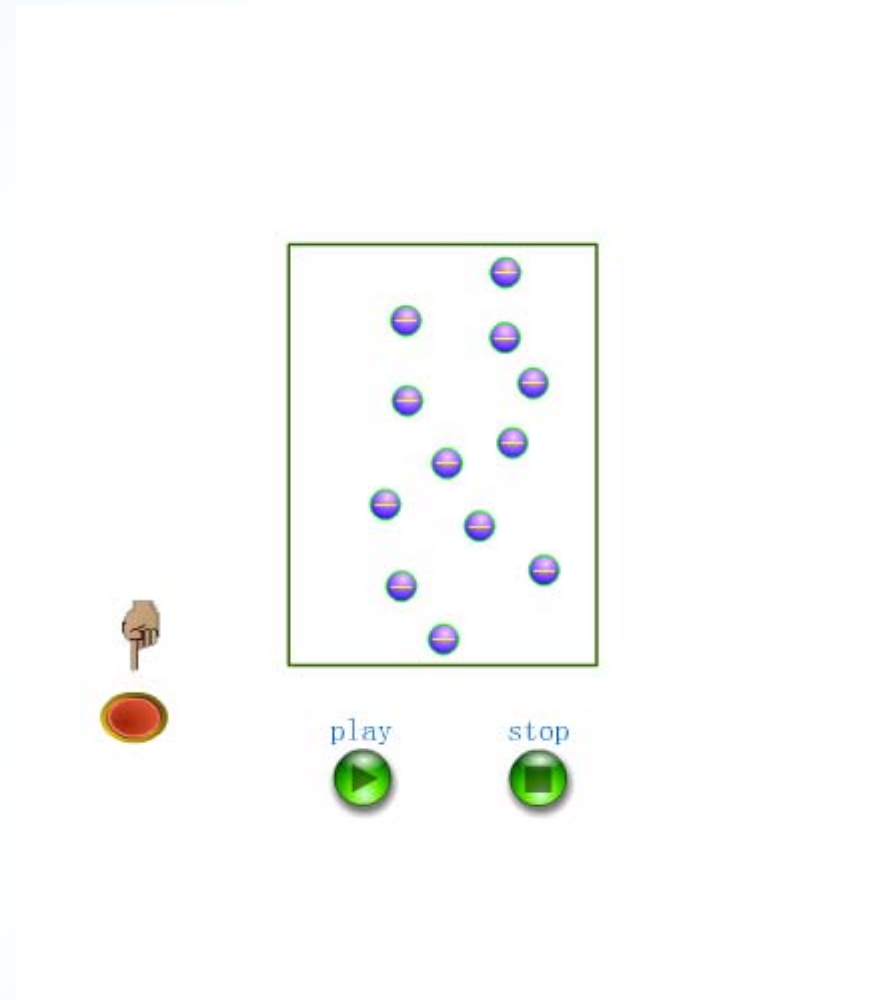
热平衡特征：任意划取的微小体积元内，自由电子的负电荷和晶体点阵上的正电荷的数目相等，整个导体或其中任一部分都显现电中性。



2. 导体的静电平衡条件

静电感应 (electrostatic induction)：在外电场影响下, 导体表面不同部分出现正负电荷重新分布的现象.

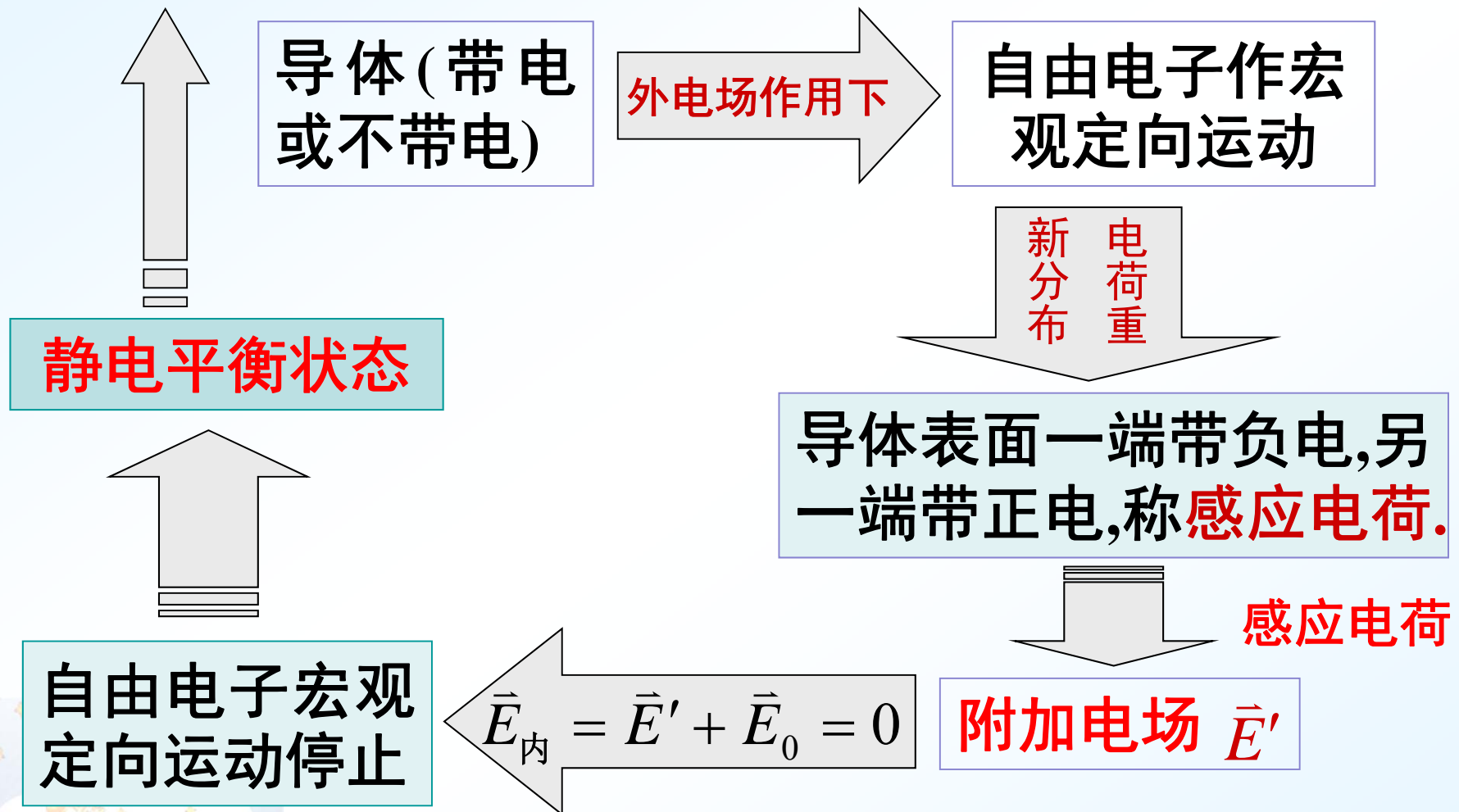
静电平衡 (electrostatic equilibrium)：导体内部和表面没有电荷的宏观定向运动.



问题：达静电平衡体时导体表面电荷怎样分布？

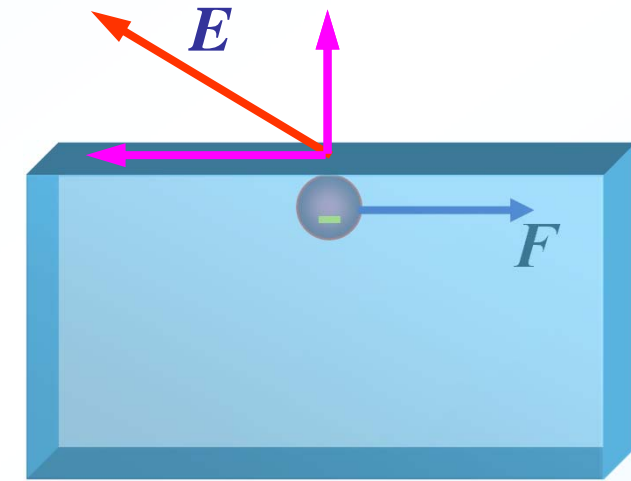


静电感应过程



3. 静电平衡时导体中的电场特性

1) 导体内部的场强处处为零。
导体表面的场强垂直于导体的表面。

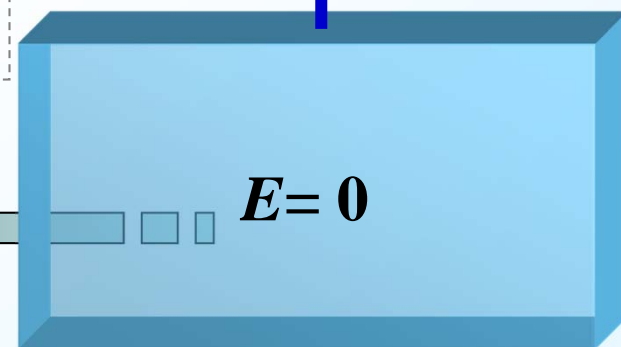
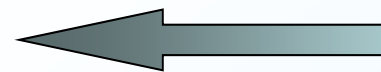


2) 导体内部和导体表面处处电势相等，整个导体是个等势体，
导体表面是等势面。

$$E = \frac{dU}{d\tau_{\text{切线方向}}} = 0$$



$$E = \frac{dU}{dl_{\text{任意方向}}} = 0$$



$$\Delta U = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



4. 静电平衡时导体上的电荷分布

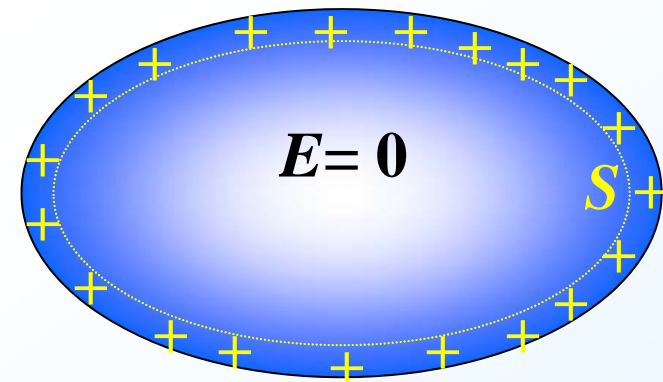
在静电平衡下, 导体所带的电荷只能分布在导体的外表面, 导体内部没有净电荷.

(1) 实心导体在静电平衡时的电荷分布

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

$$\therefore \vec{E} = 0$$

$$\therefore \sum q_i = 0$$



导体内部没有净电荷(net charge), 电荷只能分布在导体外表面。

(2) 空心导体, 空腔内无电荷

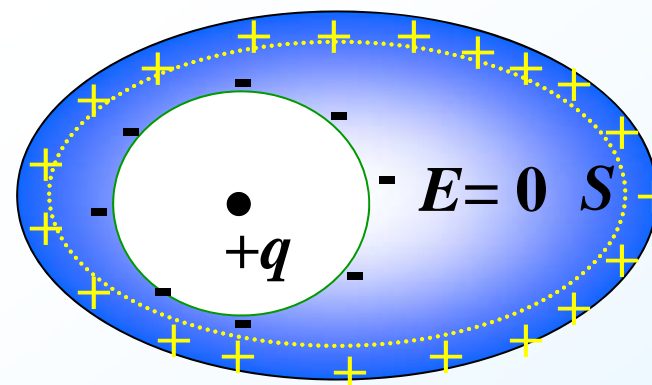
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i \quad \because \quad \vec{E} = 0 \quad \therefore \Rightarrow \sum q_i = 0$$

电荷分布在导体外表面, 导体内部和内表面无净电荷

(3) 空心导体, 空腔内有电荷 q

$$\because \quad \vec{E} = 0 \quad \therefore \Rightarrow \sum q_i = 0$$

$$q' = -q$$



电荷分布在导体内外两个表面:

内表面带电荷为空腔内带电体的感应电荷, 与腔内电荷等量异号.

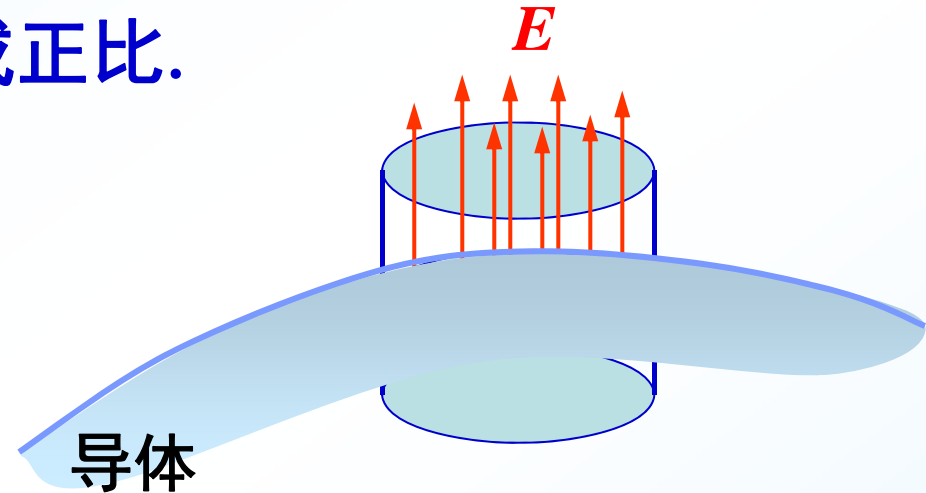


二、带电导体表面附近的场强

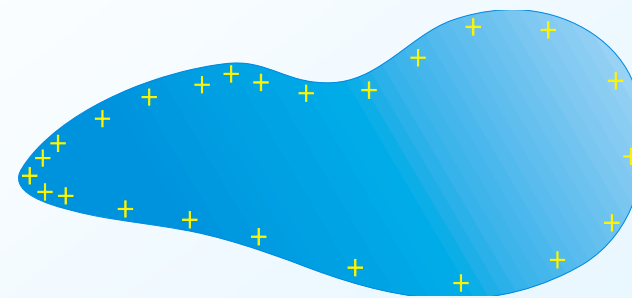
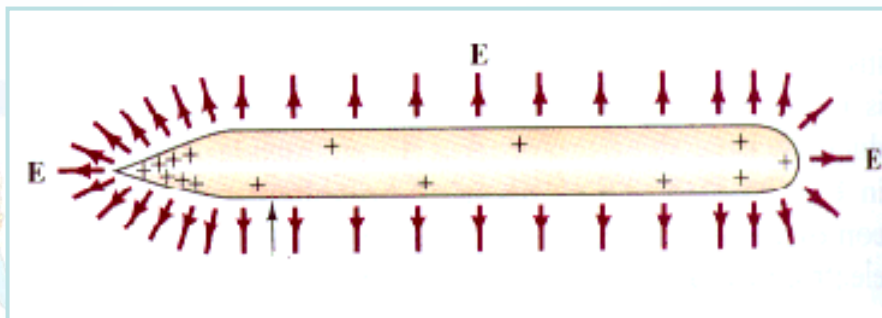
1. 处于静电平衡的导体, 其表面上各点的电荷密度与表面邻近处场强的大小成正比.

高斯定理: $E dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$

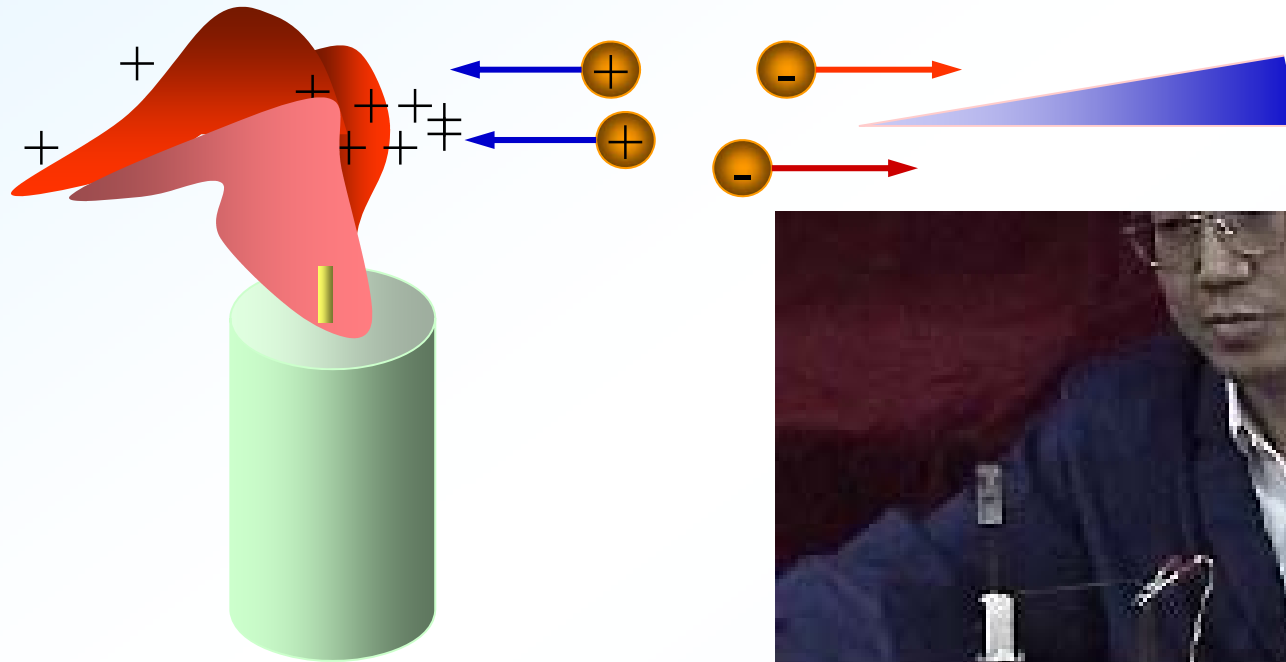
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



2. 静电平衡下的孤立导体, 其表面处面电荷密度 σ 与该外表面曲率有关, 曲率($1/R$)越大的地方电荷密度也越大, 曲率越小的地方电荷密度也小.

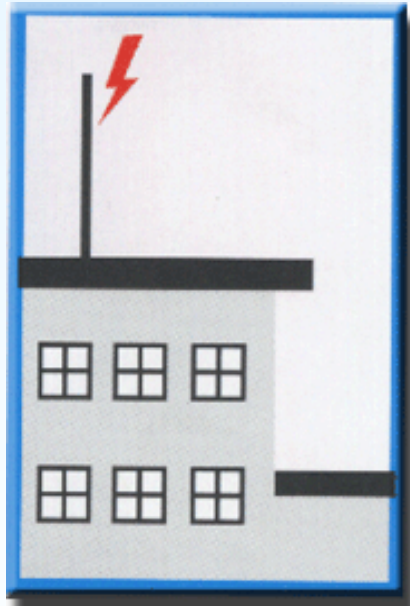


尖端放电(discharge at sharp point): 对于有尖端的带电导体, 尖端处电荷面密度大, 则导体表面邻近处场强也特别大. 当电场强度超过空气的击穿场强时, 就会产生空气被电离的放电现象, 称为**尖端放电**.



静电吹烛

尖端放电



避雷针

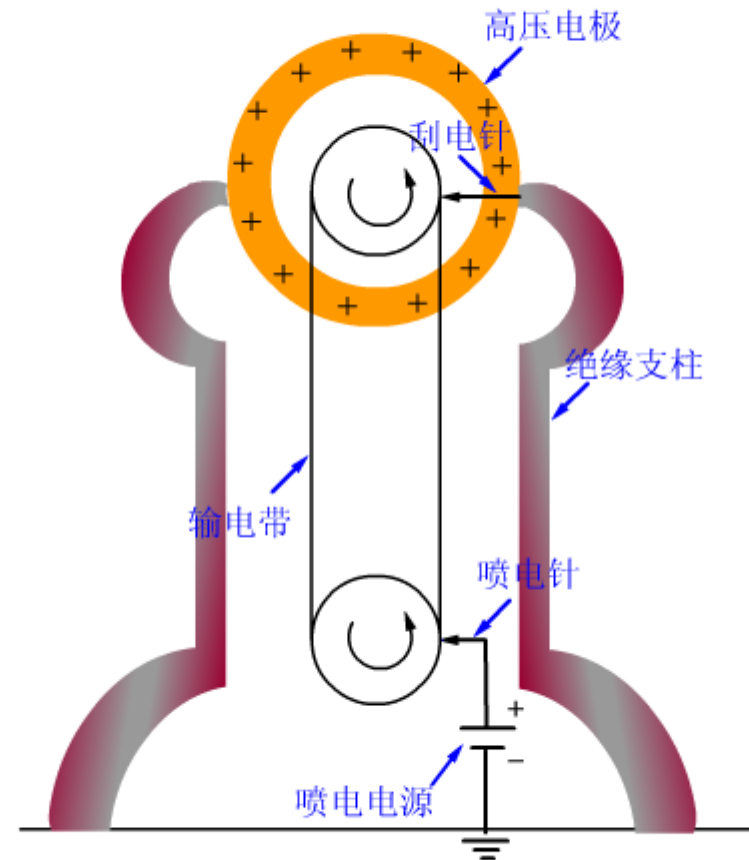


尖端放电



2019/9/20

静电高压起电机



范德格拉夫起电机



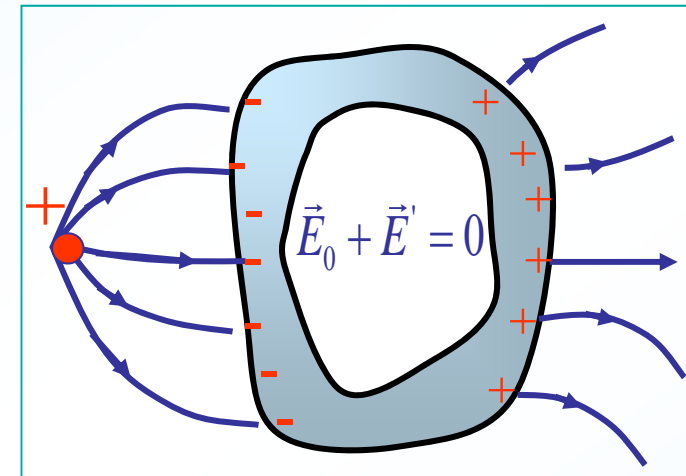
2019/9/20

三、空腔导体和静电屏蔽

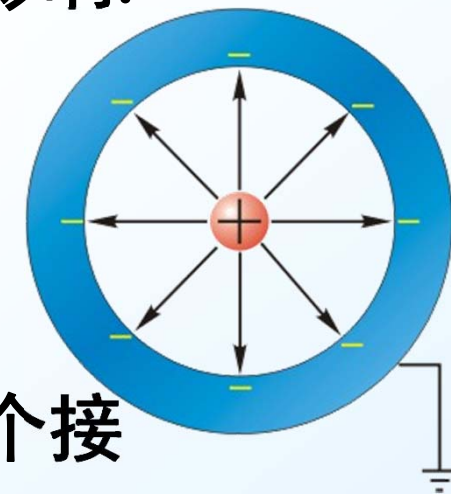
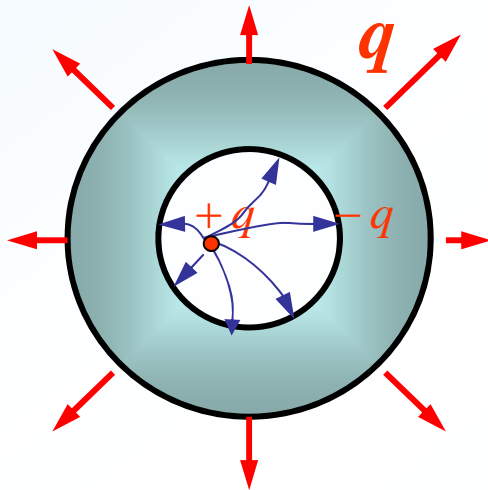
1. 空腔导体

1) 腔内没有电荷，空腔导体起到屏蔽外电场的作用。

2) 腔内存在电荷



接地的空腔导体可以屏蔽内、外电场的影响。



2. 静电屏蔽(electrostatic shielding): 一个接地的空腔导体可以隔离内外电场的影响。



法拉第笼



军用屏蔽帐篷



防电磁辐射屏蔽服



防静电屏蔽袋



带电金属网中小鸟



2019/9/20



P.16/39

四、有导体存在时的 E 和 U 分布

例6-13. 有一外半径 R_1 、内半径 R_2 的金属球壳, 其中放一半径为 R_3 的金属球, 球壳和球均带有电量 10^{-8}C 的正电荷. 求: (1) 空间电场分布; (2) 球心的电势; (3) 球壳电势.

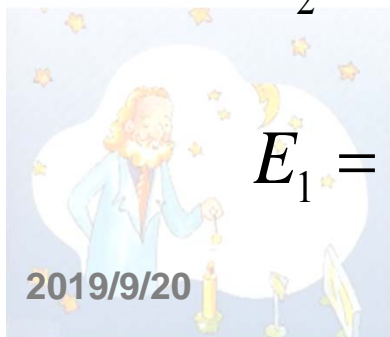
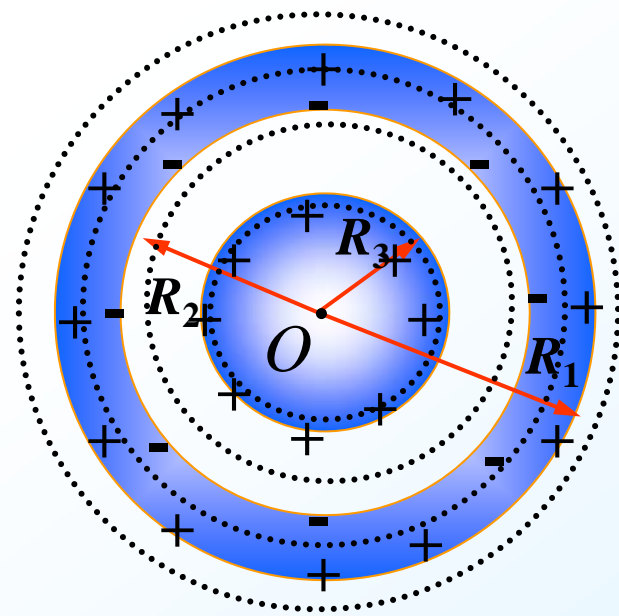
解: (1) 电荷分布如图所示, 内球表面 q , 球壳内表面 $-q$, 球壳外表面 $2q$

$$\vec{E}_3 = 0 \quad (r < R_3)$$

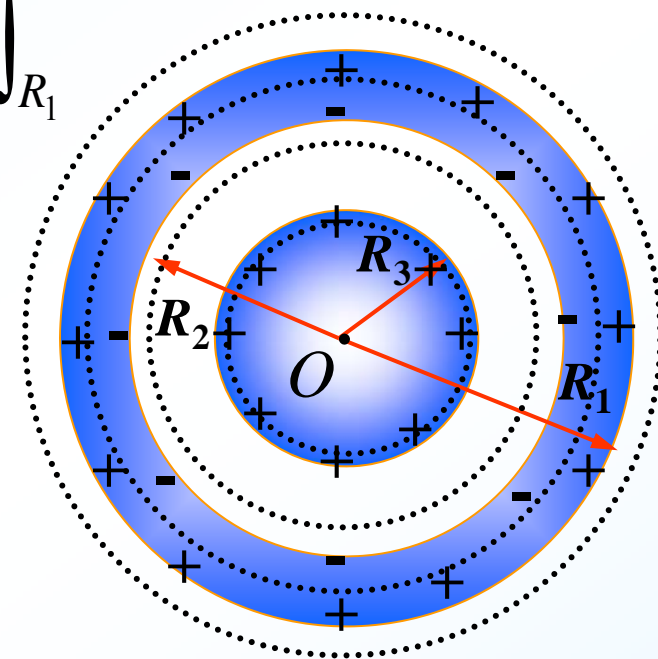
$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_3 < r < R_2)$$

$$E_1 = 0 \quad (R_2 < r < R_1)$$

$$E_0 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_1)$$



$$\begin{aligned}
 (2) U_o &= \int_0^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{R_3} + \int_{R_3}^{R_2} + \int_{R_2}^{R_1} + \int_{R_1}^\infty \\
 &= \int_{R_3}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_1}^\infty E_0 dr \\
 &= \int_{R_3}^{R_2} \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \int_{R_1}^\infty \frac{2q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1} \right)
 \end{aligned}$$



$$(3) U_1 = \int_{R_1}^\infty \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

求解思路:

静电平衡条件
电荷守恒定律

导体上的
电荷分布

计算 \vec{E} , U 分布
(方法同前)

例6-14. 两块大导体平板, 面积为 S , 分别带电 q_1 和 q_2 , 两极板间距远小于平板的线度. 求平板各表面的电荷密度.

解: 设四板面密度如图所示,
由电荷守恒

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = q_1$$

$$\sigma_3 S + \sigma_4 S = q_2$$

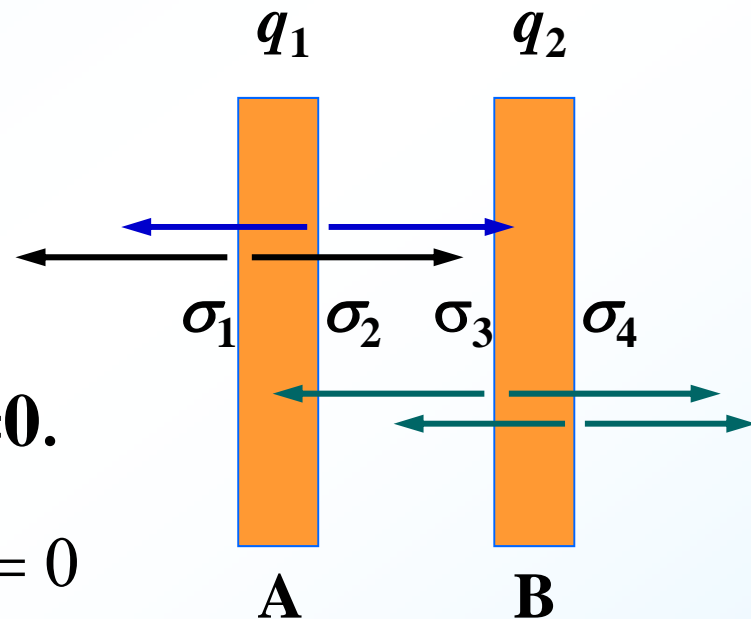
由静电平衡条件, 导体板内 $E=0$.

$$E_A = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$E_B = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_1 + q_2}{2S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q_1 - q_2}{2S}$$



如 $q_1 = -q_2$,
结果如何?

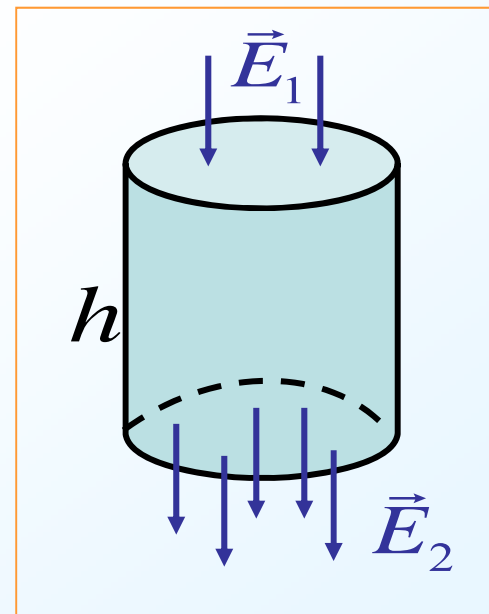


例6-15. 实验表明, 在靠近地面处有相当强的电场, 电场强度 \vec{E} 垂直于地面向下, 大小约为 $100\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$; 在离地面 1.5km 高的地方, \vec{E} 也是垂直于地面向下的, 大小约为 $25\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$.

- (1) 试计算从地面到此高度大气中电荷的平均体密度;
- (2) 假设地球表面处的电场强度完全是由均匀分布在地球表面的电荷产生, 求地面上的电荷面密度.

解: 地球——球对称, 离地面不远处 ($h \ll R$)——面对称

- (1) 作底面平行于地面、高 $h = 1500\text{m}$ 的直圆柱为高斯面。



由高斯定理: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_2 \Delta S - E_1 \Delta S$

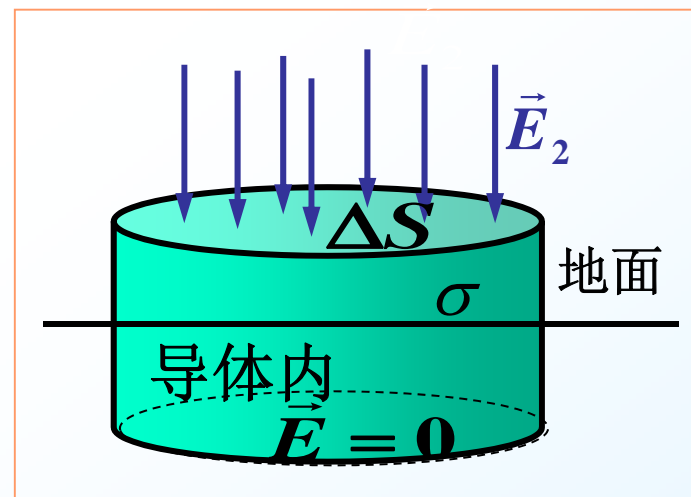
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}} = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{\rho} h \Delta S$$

$$\bar{\rho} = \frac{\epsilon_0 (E_2 - E_1)}{h} = \frac{8.85 \times 10^{-12}}{1.5 \times 10^{-3}} \times (100 - 25) = 4.43 \times 10^{-13} (\text{C} \cdot \text{m}^{-3})$$

(2) 作高斯面如图

由高斯定理:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E_2 \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{\sigma} \cdot \Delta S$$



$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= -\epsilon_0 E_2 = -8.85 \times 10^{-12} \times 100 \\ &= -8.85 \times 10^{-10} (\text{C} \cdot \text{m}^{-2}) \end{aligned}$$



例：半径为 R_3 的金属球，置于半径为 R_2 和 R_1 的同心金属球壳内($R_1 > R_2 > R_3$)，现给金属球带电 $+q$ ，试计算：

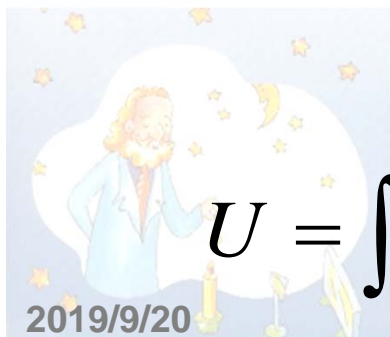
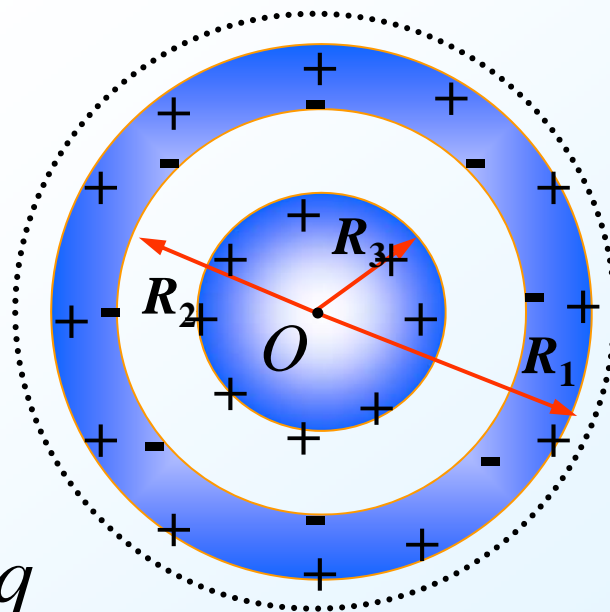
- (1) 外球壳上的电荷分布及电势大小；
- (2) 先把外球壳接地，然后断开连接线重新绝缘，此时外球壳的电荷分布及电势；
- (3) 再使内金属球接地，求此时金属球上的电荷及外球壳的电势。

解： (1) 内球： $+q$ ，球壳内表面： $-q$ ，球壳外表面： $+q$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_1)$$

无穷远处电势为零：

$$U = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{\infty} \frac{qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$



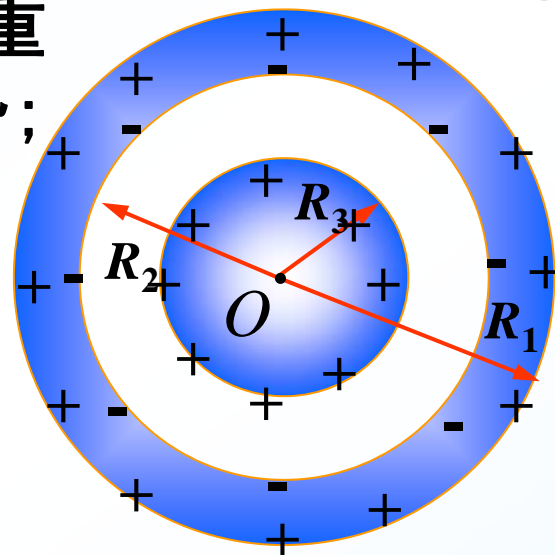
(2) 先把外球壳接地，然后断开连接线重新绝缘，此时外球壳的电荷分布及电势；

外球壳接地后再绝缘，电势变为0；

根据电势叠加原理，外球壳的电势，等于各球面上的电荷在 $r=R_1$ 处的电势之和：

$$U_{\text{外}} = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} = 0$$

$$q' = 0$$



注意：导体接地，电势归零；零电势是系统中所有电荷电势叠加后的效果；接地表面是否带电荷要具体分析。

(3) 再使内金属球接地，求此时金属球上的电荷及外球壳的电势。

再使内球接地，则内球电势为零。

设此时内球带电 $+q_3$ ，则外壳内表面带电为 $-q_3$ ，外球外表面带电为 $-q+q_3$ 。

(电荷守恒)。

根据电势叠加原理，内球的电势，等于各球面上的电荷在 $r=R_3$ 处的电势

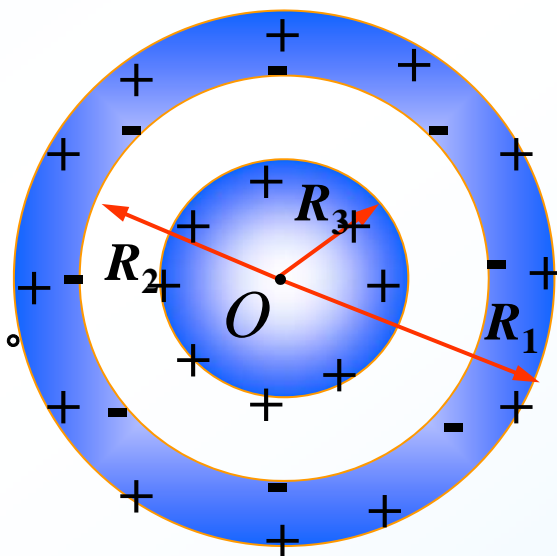
之和：

$$U_{\text{内}} = \frac{+q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{-q_3}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-q+q_3}{4\pi\epsilon_0 R_1} = 0$$

$$q_3 = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 - R_1 R_3 + R_2 R_3} q$$

此时外球壳的电势：

$$U'_{\text{外}} = \frac{+q_3}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q_3}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q+q_3}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{(R_3 - R_2) q}{4\pi\epsilon_0 (R_1 R_2 - R_1 R_3 + R_2 R_3)}$$



三、电容和电容器

1. 孤立导体(isolated inductor)的电容(capacitance)

真空中半径为 R 、带电量为 Q 的孤立导体球电势为

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

当 $R = \text{常量}$ 时,

$$U \propto Q, \text{ 但 } \frac{Q}{U} = \text{定值.}$$

导体处于静电平衡时, U 一定, q 分布定; 同一 U 下, 导体形状不同, q 不同; ---- 导体容纳电的能力, **电容**

定义: 孤立导体所带电量 Q 与其电势 U 的比值。

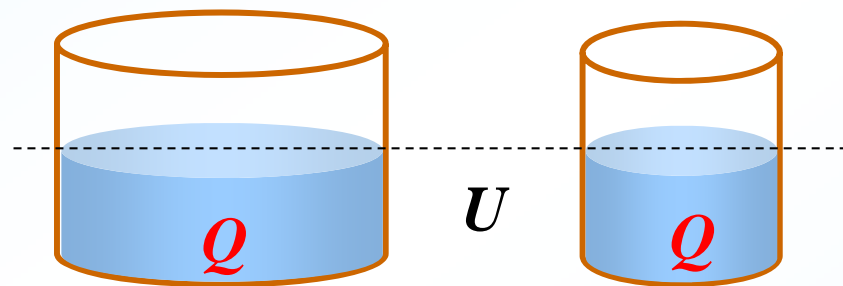
$$C = \frac{Q}{U}$$

单位: 法拉 “F” $F = C \cdot V^{-1}$

$$1 F = 10^6 \mu F = 10^{12} pF$$



物理意义: 电容 C 反映导体容电能力, 用导体每升高单位电势所需的电量来表征.



注: ➤ 只与导体本身的形状、大小和结构有关;
➤ 与是否带电无关.

电容的计算

例6-16. 求半径 R 的孤立金属球的电容.

解: 设其带电量为 Q 令 $U_{\infty} = 0$

则金属球电势: $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

由电容定义: $C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 R$



2. 电容器(capacitor)及其电容

电容器：由电介质隔开的
两金属薄片组成的导体组

↓
电容器极板



特点：将电场集中在有限空间

电容器电容：极板电量 q 与极板间电势差 ΔU 之比值

$$C = \frac{q}{\Delta U}$$

电容器的符号：—||— —||—



- 说明：(1) C 是描述电容器储电本领的物理量；
 (2) C 取决于电容器两板的形状、大小、相对位置及中间电介质的种类和分布情况；
 (3) q 为一个极板所带电量的绝对值, ΔU 为两极板板间电势差.

电容器电容的计算步骤：

1. 假设电容器的两个极板 A 、 B 分别带电 $+q$ 和 $-q$ ；
2. 求两极板间的电场 \vec{E} 分布, 并由 $U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$

计算两极板间电势差；

3. 由定义式 $C = \frac{q}{U_{AB}}$ 计算电容 C .

4. 分析结果。C 应与电容的本身性质有关, 与带电性质无关

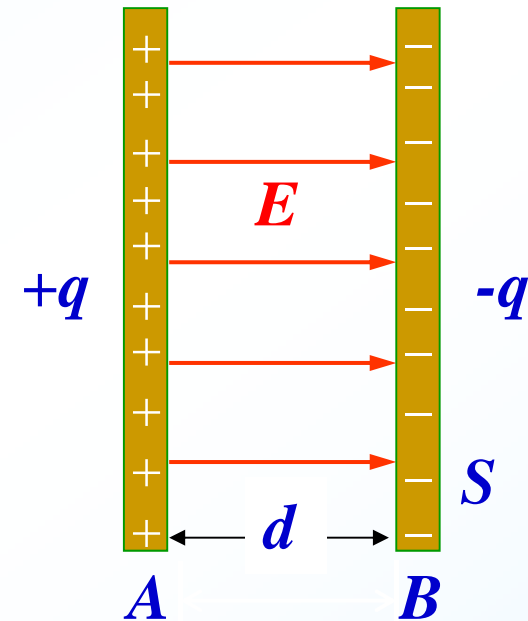
平板电容器

第一步：假设带电量 $\pm q$

第二步：求场强分布及板间电势

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

$$U_A - U_B = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$$



第三步：按电容定义求解

电容： $C_0 = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

填充介质

$$C_0 \propto S$$

$$C_0 \propto 1/d$$

$$C/C_0 = \epsilon_r$$

ϵ_r --- 相对介电常数



圆柱形电容器

第一步：假设带 Q 电量

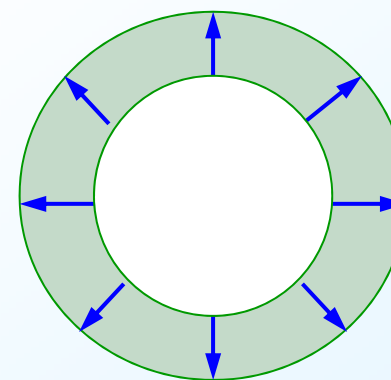
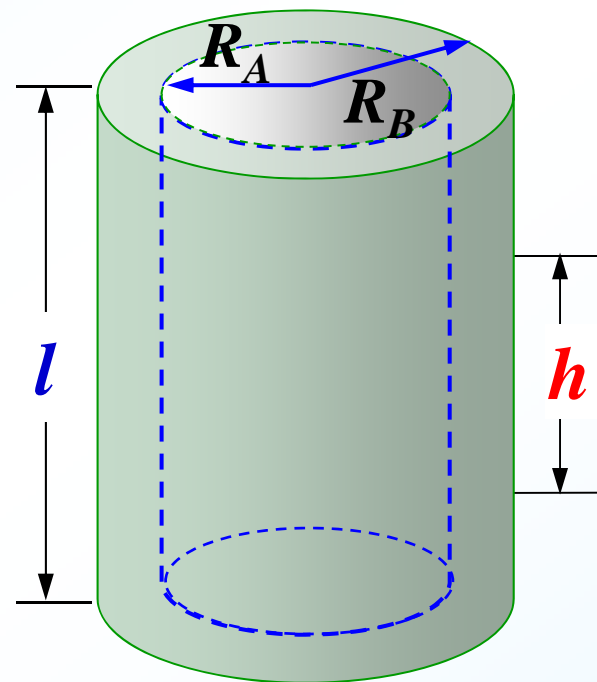
第二步：求场强分布及板间电势

选高斯面，应用高斯定理：

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{Q}{\epsilon_0 l} h \quad E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rl}$$

$$\Delta U = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{Q dr}{2\pi\epsilon_0 l r}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{R_B}{R_A}$$



第三步：按电容定义求解

圆柱形电容器电容：

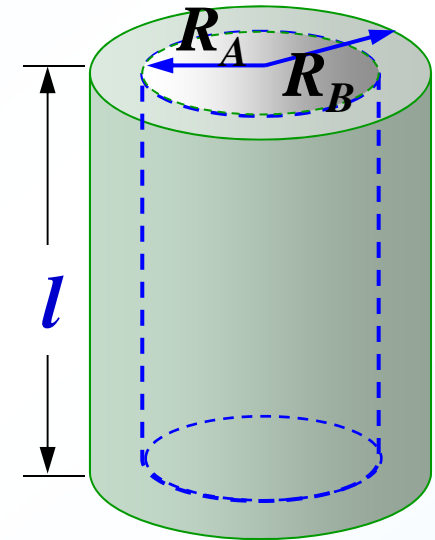
$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln R_B / R_A}$$

设极板间距为 d , $R_B = R_A + d$

当 $d \ll R_A$ 时 $\ln \frac{R_B}{R_A} = \ln \frac{R_A + d}{R_A} = \ln \left(1 + \frac{d}{R_A} \right) \approx \frac{d}{R_A}$

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon_0 l}{d/R_A} = \frac{2\pi\epsilon_0 l R_A}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

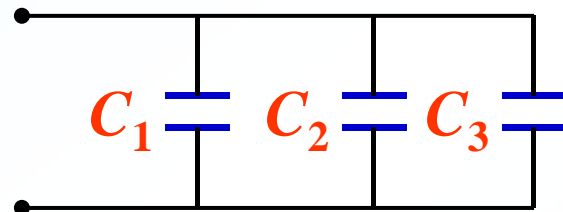
对于球形电容器, 其电容为 $C = \frac{q}{\Delta U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$



3. 电容器的连接

1) 电容器的并联-每个电容电压相同

$$q_1 = C_1 U, q_2 = C_2 U, \dots$$



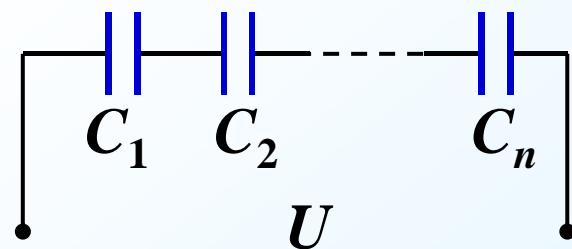
总电量: $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)U$

等效电容: $C = \frac{q}{U} = \sum_i C_i = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

结论: 并联电容器的等效电容等于各电容器电容之和.

2) 电容器的串联-每个电容电量相同

等效电容: $\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{\sum_i U_i}{q} = \sum_i \frac{1}{C_i}$



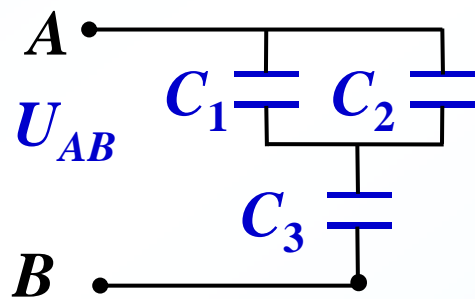
结论: 串联电容器的等效电容的倒数等于各电容的倒数之和.

例6-17. 已知 $C_1=10\mu\text{F}$, $C_2=5\mu\text{F}$, $C_3=5\mu\text{F}$ 求:

(1) A 、 B 两端的等效电容;

(2) $U_{AB}=100\text{V}$, C_2 上的电量和电压;

(3) 若 C_1 被击穿, C_3 上的电量和电压.



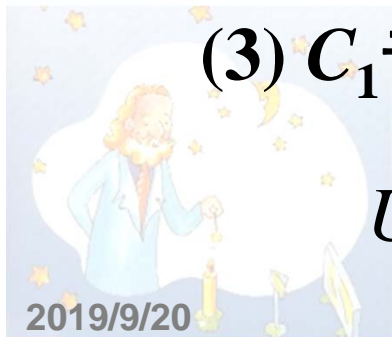
解: (1)
$$C_{AB} = \frac{C_{12} \cdot C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{(C_1 + C_2) \cdot C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = 3.75\mu\text{F}$$

(2)
$$U_{AB} = U_{12} + U_3, \quad q = C_3 U_3 = (C_1 + C_2) U_{12} = C_{AB} U_{AB}$$

$$U_{12} = \frac{C_{AB} U_{AB}}{C_1 + C_2} = 25\text{V} \quad q_2 = C_2 U_{12} = 1.25 \times 10^{-4}\text{C}$$

(3) C_1 击穿短路, 电压加在 C_3 上

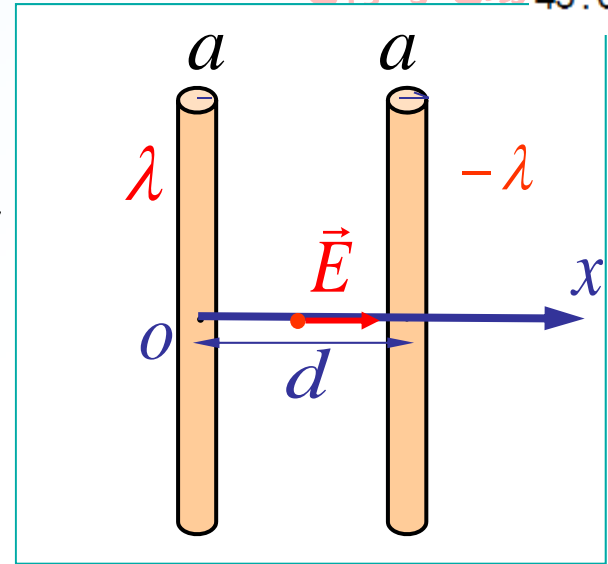
$$U_3 = U_{AB} = 100\text{V} \quad q_3 = C_3 U_3 = 5.0 \times 10^{-4}\text{C}$$



例6-18:

解: 建立坐标, 设单位长度带电 $\pm \lambda$

$$E = \begin{cases} 0 & (\text{导体内}) \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)} & (\text{导体棒间}) \end{cases}$$



$$\Delta U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{d-a} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a}$$

$$C = \frac{\lambda}{\Delta U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln[(d-a)/a]} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}$$

