离散分数阶傅里叶变换

章贤哲

The Discrete Fractional Fourier Transform

Xianzhe Zhang

0 引 言

离散傅里叶变换(DFT)是信号处理中不可或缺的重要工具。而离散分数阶傅里叶变换(DFrFT)则是一种推广后更加普遍的傅里叶变换(FT)，在非平稳信号分析时具有更好的处理效果。本文将分别从连续分数阶傅里叶变换(FrFT)和离散傅里叶变换(DFT)导出离散分数阶傅里叶变换(DFrFT)。并探究分数阶傅里叶变换(FrFT or DFrFT)的物理意义，分析其与魏格纳分布(Wigner Distribution)联系揭示其本质。最后将简单介绍当前 DFrFT 在各个领域的应用。

1 背景介绍

分数阶傅里叶变换(FrFT)起初在 1987 年由[1]完善其数学推导，其基于一组 Hermite-chirp 正交基将信号变换至时频域。后于 1994 年在[2]中探究其物理意义，将其解释为信号在时频空间内的旋转，但是计算复杂未被大量应用。此后于 1996 年 H.M. Ozaktas; O. Arikan; M.A. Kutay; G. Bozdagt 等人在[3]中提出了 FrFT 的数值解法大大减少了计算量并尝试性地提出了 DFrFT，此后 DFrFT 引起了业界的广泛关注。并由多位业内专家提出了 DFrFT 定义的修订[4][5][6]。此外在 1982 年，BRADLEY W. DICKINSON 对 DFT 的计算进行了研究[7]，计算了 DFT 矩阵的分数次幂。在 1996 年 B. Santhanam; J.H. McClellan 直接从 DFT 将推广到 DFrFT，并提出了快速算法[8]，即让其能够利用快速傅里叶变换的算法，大大减少了其运算量。现在 DFrFT 针对于特定应用增强改进被广泛使用，例如[9][10][11][12]。

本文的剩余部分安排如下：第 2 部分将简单介绍本文中推导所需的数学工具；第 3，4 部分将分别从不同的角度推导出 DFrFT，这样有助于对 DFrFT 的深入理解；第 5 部分收集了近期 DFrFT 在不同方向的重要应用，对其进行简单介绍，从中更深入理解地其特点和用途；第六部分做最后的总结与升华。

2 基础知识

本文着眼于 DFrFT 的数学推导，后文将涉及一些重要的或者不太熟悉的概念与数学工具，所以本节将提前给予介绍。

2.1 DFT 的回顾

我们将 CTFT 在时域和频域采样后，我们可以得到 DFT：

$$\begin{cases} DFT:\ X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, & 0\le k\le N-1 \\ IDFT: x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, & 0\le n\le n-1 \end{cases}$$

若我们将输入序列和输出序列表示为向量的形式，则 DFT 可以表示为 N 维空间的映射，这个映射可以用一个矩阵实现，这个矩阵我们称作 DFT 核，本文用 F 表示此类矩阵。

2.2 Hermite-Gauss 正交基

在数学家寻找分数阶傅里叶变换的特征函数时，即满足 $\mathcal{F}\{\varphi(x)\}=a\varphi(x)$ 的函数时，发现 Hermite-Gauss 函数能很好的满足要求，Hermite-Gauss 函数为：

$$\varphi(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x)$$

其中：

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n\left(e^{-x^2}\right)}{dx^n}$$

可以注意到此函数有一些极其优良的性质。第一其具有正交性，是空间中的一组正交基。所以可以与傅里叶变换采用相同的策略，利用该性质十分简便的计算出正交基的系数。第二，由于该函数中包含了 chirp 信号，这是一种十分常用的非平稳信号，所以用这类函数做 DFrFT 可以使得

DFrFT 有天然的处理非平稳信号的优势。

2.3 **魏格纳分布**(Wigner distribution)

Wingner 分布最初由 Eugene Wigner 在 1932 年在研究量子时提出：

$$W(x,f)=\frac{1}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^*(x+y)\varphi(x-y)e^{2jf\frac{y}{\hbar}}dy$$

其中$\varphi(x)$是信号。魏格纳分布同样展示了信号在时频域的情况。准确地说魏格纳分布可以理解为一个抽象信号在时频域的能量的分布情况。我们将介绍的分数阶傅里叶变化与其有着紧密有趣的联系。

3 基于 FRFT 的 DFrFT 推导

为了理解 DFrFT 其物理意义，本节将从连续域过渡到离散域，将介绍连续域分数阶傅里叶变换的理解，也介绍其与魏格纳分布的关系。

3.1 FrFT 猜想的提出

在傅里叶变换中，人们发现在经过连续两次傅里叶变换后得到原信号的时域翻转信号。在经过三次变换后得到频域翻转信号，在经过四次变换后得到信号本身。即：

$$\mathcal{F}(x(t))=X(w)$$
$$\mathcal{F}[\mathcal{F}(x(t))]=x(-t)$$
$$\mathcal{F}[\mathcal{F}(\mathcal{F}[x(t)]]=X(-w)$$
$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}[\mathcal{F}(\mathcal{F}[x(t)]]\}=x(t)$$

这不经让人想到时频域空间的旋转，若将每一次傅里叶变换看作旋转$\frac{\pi}{2}$的角度。那么是否可以在时频域旋转任意角度呢？FrFT 正是基于这样思想的变换。

3.2 FrFT 的导出

若要满足上面的旋转思想，我们可以发现这样的变换需要满足如下的性质：

$$\mathcal{F}_0\{x(t)\}=x(t)$$
$$\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}\{x(t)\}=X(f)$$
$$\mathcal{F}_{2\pi}\{x(t)\}=x(t)$$
$$\mathcal{F}_\beta\{\mathcal{F}_\alpha\{x(t)\}\}=\mathcal{F}_{\alpha+\beta}\{x(t)\}$$

数学家发现了由 hermite-Gaussian 多项式构成的一组正交基是满足这些性质的。首先 hermitte-Gaussian 函数是傅里叶变换的特征函数，其中特征值$\{e^{in\frac{\pi}{2}}\}_{n=0}^{\infty}$对应的特征函数为$e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x)$。即：

$$\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x)\right\}=e^{in\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x)$$

其中H_n为 hermite 多项式：

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n\left(e^{-x^2}\right)}{dx^n}$$

若将传统的傅里叶变换看作是在时频域旋转了$\frac{\pi}{2}$得到的，所以其特征值等于$e^{in\frac{\pi}{2}}$，那么若是分数傅里叶变换其旋转了α，则其特征值为$e^{in\alpha}$。由此定义了分数阶傅里叶变换，其为一种变换使得 hermite-Gaussian 函数的特征值为$e^{in\alpha}$。经过一些繁琐的运算可以将分数阶傅里叶变换写作：

$$\mathcal{F}_\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)X_\alpha(t,w)dt$$

其中$K_\alpha(t,f)$为

$$K_\alpha(t,w)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1-jcot\alpha}{2\pi}}e^{j\frac{t^2+w^2}{2}cot\alpha-jwtcsc\alpha} \\ \quad ,if\ \alpha\ is\ not\ a\ multiple\ of\ \pi \\ \delta(t-w) \\ \quad ,if\ \alpha\ is\ a\ multiple\ of\ 2\pi \\ \delta(t+w) \\ \quad ,if\ \alpha+\pi\ is\ a\ multiple\ of\ 2\pi\end{cases}$$

易得分数阶逆变换可定义为：

$$\mathcal{F}_{-\alpha}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)X_{-\alpha}(t,w)dt$$

FrFT 与魏格纳分布等时频分析方法有着不可分割的关系。前面提到魏格纳分布展现了一个抽象信号在时频域的能量分布，而分数阶傅里叶变换可以看作魏格纳分布在时频域的某个切面；同时一个信号经过分数阶傅里叶变换后其魏格纳分布也会以原点为中心进行旋转。所以可以说魏格纳分布包含了分数阶傅里叶变换，也可以说分数阶傅里叶变换就是改变原信号的魏格纳分布，他们的本质实质上是统一的，都表示的信号的时频域的分布。

3.3 FrFT 的数值计算以及 DFrFT 的导出

可以看出上述的积分是难以计算的，而且在α靠近 0 或者± 2的时候更加困难。通常利用性质$\mathcal{F}_1\{\mathcal{F}_{\alpha-1}\}=\mathcal{F}_\alpha$进行计算，把$\alpha\in(-0.5,0.5)\ or\ \alpha\in(1.5,2.5)$转换为$\alpha\in(0.5,1.5)\ or\ \alpha\in(2.5,3.5)$，简化计算。即使如此，这样的计算也将是$O(N^2)$的复杂度。

在 1996 年 H.M. Ozaktas; O. Arikan; M.A. Kutay; G. Bozdagt 等人在[3]中提出了复杂度为$O(NlogN)$的计算方法，并提出了 DFrFT。

其思想主要是将复杂的运算拆分为几步分别计算：

首先进行第一次 chirp 乘法：

$$g(x)=e^{-j\pi x^2 tan\frac{\alpha}{2}}\cdot f(x)$$

这次乘法中$g(x)$的时宽带宽积将是$f(x)$*的*两倍，所以当$f(x)$以以Δx为采样间隔时，$g(x)$需要以$\frac{1}{2}\Delta x$间隔为采样间隔。因此，考虑到这一点需要

借助一定的内插法进行采样率的转换。

再进行 chirp 卷积：

$$h(w)=\sqrt{\frac{1-jcot\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\pi csc\alpha(w-x)^2}\cdot g(x)dx$$

这一部分由于是数值计算，可以将 FFT 算法应用进去，大大降低计算复杂度，这里不展开说明。

最后经过 chirp 乘法：

$$\mathcal{F}_\alpha(w)=e^{-j\pi w^2 tan\frac{\alpha}{2}}\cdot h(w)$$

乘法做完后还没有全部结束。需要注意这时我们的采样速率已经是原始数据采样速率的两倍，若需要前后数据采样率保持不变，还需要进行抽取。

这种算法是基于数值计算，所以我们可以将前后的数据序列写作向量的形式，进而将此过程写作矩阵乘法的形式：

$$f_\alpha=F^\alpha f$$

其中f_α为分数阶傅里叶变换的结果，f为原函数，F^α为分数阶傅里叶变换矩阵：

$$F^\alpha=D\Lambda H_{lp}\Lambda J$$

其中 D 为抽取矩阵，J 为内插矩阵，Λ为对角矩阵用于计算 chirp 乘法，H_{lp}用于计算 chirp 卷积。由于F^α矩阵可以完成分数阶傅里叶变换，所以可以将其定义为分数阶傅里叶变换矩阵。由此完成了大致的分数阶傅里叶变换的推导。

当然这样的推导是直接的，也是粗糙的。由于是直接对时域进行采样，它不具备很多优良的性质。下面一节介绍的 DFrFT 定义方法大多从矩阵核的角度出发，对于数学性质有更好的把握，所以有更好的性质。

4 基于 DFT 的 DFrFT 推导

本节将介绍一些从 DFT 核导出 DFrFT 核的方法，这类方法将具有更多矩阵性质。由于这类方法的详细推导需要大量线性代数的计算，本节对繁琐性计算进行了适当的省略。

4.1 采用基于核的线性组合的方法

在早期的 DFrFT 变换中，往往使用 DFrFT 核来进行变换，其中 DFrFT 的核采用 DFT 核进行计算。DFT 核的分数阶幂次和分数阶变换在时频域上的变换角度本质上来说是一样的。DFrFT 核的传统计算方法如下：

$$F^t=a_0(t)F^0+a_1(t)F^1+a_2(t)F^2+a_3(t)F^3$$

其中：

$$a_i(t)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}e^{j\frac{\pi}{2}(t-i)k}$$

应用上面定义的核对信号$x(n)$进行分数阶傅里叶变换，则$x(n)$的分数阶傅里叶变换可以表示为：

$$F^t[x(n)]=a_0(t)x(n)+a_1(t)X(n)+a_2(t)x(-n)+a_3(t)X(-n)$$

其中 X(n)是 x(n)的傅里叶变换，这个公式表明分数阶傅里叶变换是 0~3 阶 DFT 的线性组合。这中定义方法非常的简单高效，但是其缺点在于无法与连续域分数阶傅里叶变换有很好的对应关系。

4.2 采用基于核特征值分解的方法

这类方法主要是基于矩阵的特征值分解，并且想要将连续 FrFT 与 DFrFT 达到统一。于是将 FrFT 变换的特征函数离散正交化并用于构造 DFrFT 矩阵核。即对：

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x)$$

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n\left(e^{-x^2}\right)}{dx^n}$$

进行离散正交化。此后利用特征向量和对应的特征值可以构造离散分数阶傅里叶变换形式：

$$F^\alpha(m,n)=\sum_{K=0}^{N-1}v_k(m)(\lambda_k)\,v_k(n)$$

其中λ_k是特征值，v_k是其对应的特征向量。所以如何离散正交化特征函数将是主要问题。已被证明特征函数 Hermite-Gauss 函数可以利用下面的矩阵获得：

$$V=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 2cosw & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 2cos2w & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos(N-1)w\end{bmatrix}$$

此函数在 N 值增加时逼近 Hermite 矩阵，由此分数阶傅里叶变换可以表示为：

$$F^\alpha=VD^\alpha V^T$$

$$=\begin{cases}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\frac{k\pi}{2}\alpha}V_kV_k^T, & N\in odd\\ \sum_{k=0}^{N-2}e^{-j\frac{k\pi}{2}\alpha}V_kV_k^T+e^{-j\frac{k\pi}{2}\alpha}V_{N-1}V_{N-1}^T, & N\in even\end{cases}$$

其中

$$V=[V_0,V_1,\cdots,V_N]$$

$$D^\alpha$$

$$=\begin{cases}diag\left(1,e^{-j\frac{\pi}{2}\alpha},\cdots,e^{-j\frac{\pi}{2}(N-2)\alpha},e^{-j\frac{\pi}{2}(N-1)\alpha}\right),N\in odd\\ diag\left(1,e^{-j\frac{\pi}{2}\alpha},\cdots,e^{-j\frac{\pi}{2}(N-2)\alpha},e^{-j\frac{\pi}{2}(N)\alpha}\right),N\in even\end{cases}$$

至此，基于核的特征值分解法推导思路结束。这类的算法很好的解决了前一类方法中无法与连续域算法很好符合的问题，并且具有一些很好的 DFT 核的性质，但是这类算法最大的问题在于其无法用快速算法求解，涉及到大量的矩阵乘法其复杂度为$O(N^2)$。

5 前沿应用

由于 DFrFT 对非平稳信号有很好的处理优势，而且 DFrFT 中的旋转角度α、其变形 WFrFT 的加权因子包含了新的信息，可以用于通信安全，信号处理等方面。这部分将介绍四个实例来说明 DFrFT 的优势与特点，加深对 DFrFT 的理解。

5.1 基于 DFrFT 的多载波通信系统[9]

通常在多载波系统中，信道将会被分为多个信道，数据在每个信道中以比原来低的速率并行传播。这样可以更容易的对信道进行补偿，并可以免除多径效应带来的影响。现在流行的 OFDM 技术也是采用了多载波技术，其中采用等间隔互相重叠的多载波，并且 OFDM 技术可以很容易的应用 DFT 实现，进而可以用快速傅里叶变换技术。这样的办法解决了很多问题，但是当信号出现频域色散时，比如说在快速衰落的无线信道中，由于信号不再平稳，由此造成的多普勒展宽会使得 OFDM 系统性能严重受到干扰。

于是，考虑用非平稳的方法来分析此现象。而 DFrFT 方法采用了非平稳的正交基，而且有与快速傅里叶算法近似的复杂度，可以很好地解决此类问题。最终在大多普勒扩展的信道上，有比原来适用 FFT 技术更好的变现，同时具有相同的计算量。

5.2 WFRFT 辅助低功耗多波束调制方案[10]

人工噪声(AN)辅助的多波束定向调制技术(DM)能够在自由空间内为多个接收机提供安全的无线物理层传输。但是 AN 的应用使得其效率很低。这是因为发射功率中不仅仅需要发射有效信息还需要发射 AN 信号，使得效率下降。

WFrFT 是一种 DFrFT，其由 1~4 阶 DFT 加权组成，数学形式可以表达为：

$$\mathcal{F}^{\alpha}=w_0\mathcal{F}^0+w_1\mathcal{F}^1+w_2\mathcal{F}^2+w_3\mathcal{F}^3$$

由于 WFrFT 可以产生等效的 AN，所以不需要额外的功率发射 AN 信号，所以大大提升了系统的效率。除此之外，由于需要特定的 WFrFT 加权系数才可以解调特定的 WFrFT 信号，所以提升了系统的安全性。

这实质上是利用了时频域的位置信息作为噪声并提高了安全性。

5.3 基于 DFrFT 的跨层通信[11]

在此之前已经借助 DFrFT 的多参数特性，采用随机编码加密数据。但是大多数 DFrFT 技术被在物理层使用。尽管物理层的安全性能通过添加适当长的字段进行扩展使得物理层的安全性呈指数逼近 1，但是仍然无法到达 1。且只在一层上做加密容易被攻击，一般独立的在各层独自做加密。

于是在本文中利用了 DFrFT 在时频域旋转的角度信息，通过多层共同控制发射信号的角度达到对信息进行加密的效果。接收者如果不知道该角度，则无法解读出正确的星座图，得不到其中的信息。所以可以通过上层产生伪随机数序列来控制旋转的角度，接受者知道该伪随机数，而攻击者无法知道该伪随机数序列，则无法实时选择对角度，进而无法解读信息，从而达到加密的效果。

5.4 用 DFrFT 估算 SAR 应用的目标振动[12]

地面目标的微小振动将会在回波中引入相位调制，这些调制信息将包含目标的类型，完整性等特征。由于节省成本和能探测不易接触到的目标等优势，借助成熟的 SAR 远程探测这些微小振动是十分重要的。

而振动引起的相位调制是非平稳信号，实则在经过预处理后是微型 chirp 信号。通用的 DFT 已经无法适用，DFrFT 信号采用 Hermite-chirp 信号作为基向量，具有天然的分析优势，经过一些增强算法后，可以估计目标的加速度和振动频谱历史。

6 总结

本文从 FrFT 开始，研究了 DFrFT 的各种推证以及应用。从一步一步的推导中我们可以看出 FrFT 被理解为时频域的旋转这一特征为我们分析

信号在时频域的状态有很好的帮助。实质上，这些连续域没有本质上的区别。在时频域中我们其实在选择旋转角度α时，也在选择时间轴和频率轴在表示信号的权重。对于一个抽象信号，我们无论用什么工具去分析它，都只能窥探到它的一部分，甚至有一种盲人摸象的感觉。我们很难将其完全展示出来，我们做的是选择一种工具将信号最有特点的一面展式出来，让我们可以很好地分析它的性质。而分数阶傅里叶变换则是可以帮助我们在这些观察角度中自由地切换，从而选择出最佳的角度。连续的分数阶傅里叶变换是难以利用的，只有转换为连续的分数阶变换才能利用计算机求解，因此离散分数阶傅里叶变换的研究是非常重要的。离散分数阶变换的计算方法有很多他们在复杂度，性质，与连续域分数阶傅里叶变换的吻合程度上取舍不同。现存的离散分数阶傅里叶变换都无法像 DFT 吻合傅里叶变换一样的匹配，只能针对于特定的应用，选择合适的算法。在应用层面上，分数阶傅里叶变换在信号处理等方面主要利用其处理非平稳信号的性质解决非平稳信号的问题；在通信领域中，分数阶傅里叶变换引入了新的维度——旋转角度，利用这一维度可以应用于多址技术，也可以利用这一维度进行信息安全的加密。离散分数阶傅里叶变换的研究还在继续，希望未来可以找到更加符合连续分数阶傅里叶变换的 DFrFT。

参 考 文 献

[1] A. C. Mcbride, F. H. Kerr, "On Namias's Fractional Fourier Transforms," IMA Journal of Applied Mathematics, Volume 39, Issue 2, 1987, Pages 159–175

[2] L. B. Almeida, "The fractional Fourier transform and time-frequency representations," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 42, no. 11, pp. 3084-3091, Nov. 1994, doi: 10.1109/78.330368.

[3] H. M. Ozaktas, O. Arikan, M. A. Kutay and G. Bozdagt, "Digital computation of the fractional Fourier transform," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 44, no. 9, pp. 2141-2150, Sept. 1996, doi: 10.1109/78.536672.

[4] C. Candan, M. A. Kutay and H. M. Ozaktas, "The discrete fractional Fourier transform," 1999 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings. ICASSP99 (Cat. No.99CH36258), 1999, pp. 1713-1716 vol.3, doi: 10.1109/ICASSP.1999.756324.

[5] Soo-Chang Pei, Min-Hung Yeh and Chien-Cheng Tseng, "Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 5, pp. 1335-1348, May 1999, doi: 10.1109/78.757221.

[6] Soo-Chang Pei and Jian-Jiun Ding, "Closed-form discrete fractional and affine Fourier transforms," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 48, no. 5, pp. 1338-1353, May 2000, doi: 10.1109/78.839981.

[7] B. Dickinson and K. Steiglitz, "Eigenvectors and functions of the discrete Fourier transform," in IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 30, no. 1, pp. 25-31, February 1982, doi: 10.1109/TASSP.1982.1163843.

[8] B. Santhanam and J. H. McClellan, "The discrete rotational Fourier transform," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 44, no. 4, pp. 994-998, April 1996, doi: 10.1109/78.492554

[9] M. Martone, "A multicarrier system based on the fractional Fourier transform for time-frequency-selective channels," in IEEE Transactions on Communications, vol. 49, no. 6, pp. 1011-1020, June 2001, doi: 10.1109/26.930631.

[10] Q. Cheng, V. Fusco, J. Zhu, S. Wang and F. Wang, "WFRFT-Aided Power-Efficient Multi-Beam Directional Modulation Schemes Based on Frequency Diverse Array," in IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 18, no. 11, pp. 5211-5226, Nov. 2019, doi: 10.1109/TWC.2019.2934462.

[11] H. Wen et al., "A Cross-Layer Secure Communication Model Based on Discrete Fractional Fourier Fransform (DFRFT)," in IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing, vol. 3, no. 1, pp. 119-126, March 2015, doi: 10.1109/TETC.2014.2367415.

[12] Q. Wang et al., "SAR-Based Vibration Estimation Using the Discrete Fractional Fourier Transform," in IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 50, no. 10, pp. 4145-4156, Oct. 2012, doi: 10.1109/TGRS.2012.2187665.