

量子光学基础及应用 第一次作业

张柏铭*, 3230100298

浙江大学 航空航天学院, 浙江 杭州 310000

第 1 章作业

Question 1

在量子力学和量子光学中, 每一个算符一般都有矩阵表示。矩阵表示是有形的, 可为初学者学习用; 狄拉克符号法脱离了有形的躯壳, 为量子光学常规用法。在课堂上, 我们常使用如下正交、完备、归一的态矢量 (基矢量)

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

来验证 1.2 和 1.3 节中的主要数学关系。现在也请将狄拉克符号法用矩阵语言重新表述, 也即用如下两个最一般的二维列矩阵来作为我们的验算例子:

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \cdots |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

来检验 (验证) 1.2 和 1.3 节中的主要数学关系 (将狄拉克符号法翻译为矩阵语言, 把你认为需要详细推导的步骤推导出来)。

Answer 1

(1) 态叠加原理

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

*Email: 1019496755@qq.com

另注: 本份练习本人先手写了一遍, 为美观起见特地打为 tex 公式, 呕心沥血, 用时七天七夜。如有遗漏或细节错误之处, 系公式输入不慎, 望老师谅解! (鞠躬)

(2) 正交性

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &= (|\psi_1\rangle)^\dagger |\psi_2\rangle \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(3) 归一化

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 \\
\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1
\end{aligned}$$

(4) 完备性

$$\begin{aligned}
\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I
\end{aligned}$$

(5) 系数

证明

$$c_n = \langle \psi_n | \psi \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1 | \psi \rangle &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \\ c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= c_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + c_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + c_2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\
&= c_1
\end{aligned}$$

同理有：

$$\langle \psi_2 | \psi \rangle = c_2$$

(6) 求解 \mathbf{F} 与其本征值的关系

设

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$$

为厄米算符, 满足

$$\mathbf{F}^\dagger = \begin{pmatrix} F_{11}^* & F_{21}^* \\ F_{12}^* & F_{22}^* \end{pmatrix} = \mathbf{F}$$

也就是

$$F_{12} = F_{21}^*, \quad F_{11} \in R, \quad F_{22} \in R$$

此时有:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}|\psi_1\rangle &= \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{11} \cos \frac{\theta}{2} + F_{12} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \\ F_{21} \cos \frac{\theta}{2} + F_{22} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} F_1 \cos \frac{\theta}{2} \\ F_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

推得:

$$F_1 = F_{11} + F_{12} \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} = F_{21} \cot \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + F_{22}$$

同理有:

$$F_2 = F_{11} - F_{12} \cot \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} = -F_{21} \tan \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + F_{22}$$

两式相减有:

$$F_{12}(\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2})e^{i\varphi} = F_{21}(\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2})e^{-i\varphi}$$

由于

$$\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} \neq 0$$

则有:

$$F_{12}e^{i\varphi} = F_{21}e^{-i\varphi}$$

又由于

$$F_{12} = F_{21}^*$$

可得:

$$F_{12} = Ae^{i\varphi}, \quad F_{21} = Ae^{-i\varphi}$$

回代有:

$$F_{11} + A \tan \frac{\theta}{2} = A \cot \frac{\theta}{2} + F_{22}$$

不妨令:

$$\begin{cases} F_{11} = A \cot \frac{\theta}{2} + B \\ F_{22} = A \tan \frac{\theta}{2} + B \end{cases}$$

可推得:

$$F = \begin{pmatrix} A \cot \frac{\theta}{2} + B & Ae^{i\varphi} \\ Ae^{-i\varphi} & A \tan \frac{\theta}{2} + B \end{pmatrix}$$

其本征值:

$$\begin{cases} F_1 = A(\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2}) + B \\ F_2 = B \end{cases}$$

或者将 F 用 F_1, F_2 表示:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} + F_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} & (F_1 - F_2) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ (F_1 - F_2) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & F_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + F_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

(7) 期望值

证明 $\langle F \rangle = \langle \psi | F | \psi \rangle = \sum_n |c_n|^2 F_n$

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \begin{pmatrix} c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}) F_{11} + (c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2}) F_{21} \\ (c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}) F_{12} + (c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2}) F_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= [(c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}) F_{11} + (c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2}) F_{21}] * (c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}) \\ &\quad + [(c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}) F_{12} + (c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2}) F_{22}] * (c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

代入:

$$F = \begin{pmatrix} A \cot \frac{\theta}{2} + B & Ae^{i\varphi} \\ Ae^{-i\varphi} & A \tan \frac{\theta}{2} + B \end{pmatrix}$$

有:

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= [(c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi})(A \cot \frac{\theta}{2} + B) + (c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2}) Ae^{i\varphi}] * (c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}) \\ &\quad + [(c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}) Ae^{-i\varphi} + (c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2})(A \tan \frac{\theta}{2} + B)] * (c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

接上:

$$\begin{aligned}
\langle F \rangle &= \left[\frac{c_1}{\sin \frac{\theta}{2}} A + \left(c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \right) B \right] * \left(c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \right) \\
&\quad + \left[\frac{c_1}{\cos \frac{\theta}{2}} A e^{-i\varphi} + \left(c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2} \right) B \right] * \left(c_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + c_2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \\
&= (c_1^2 \cot \frac{\theta}{2} - c_1 c_2 e^{-i\varphi}) A + (c_1^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + c_2^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - c_1 c_2 \sin \theta \cos \varphi) B \\
&\quad + (c_1^2 \tan \frac{\theta}{2} + c_1 c_2 e^{-i\varphi}) A + (c_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + c_2^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + c_1 c_2 \sin \theta \cos \varphi) B \\
&= c_1^2 A \left(\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} \right) + (c_1^2 + c_2^2) B \\
&= c_1^2 \left[A \left(\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} \right) + B \right] + c_2^2 B \\
&= |c_1|^2 |F_1| + |c_2|^2 |F_2|
\end{aligned}$$

其中用了 (6) 中的其本征值:

$$\begin{cases} F_1 = A \left(\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} \right) + B \\ F_2 = B \end{cases}$$

证毕! ¹

(8) 表象变换

这个详见 Answer 7, 此处略

Question 2

检验 1.6 节 (1.74)

$$[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta] = i\hbar \sum_{\gamma=x,y,z} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{S}_\gamma$$

可以写为:

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z, \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar \hat{S}_x, \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar \hat{S}_y \quad (\text{顺时针轮换}).$$

说明: 关于指标 γ 求和, 可以省去求和符号, 即改为

$$[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta] = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{S}_\gamma,$$

这叫“重复指标求和”约定 (summation over the repeated indices), 此也被称为爱因斯坦求和约定 (是爱因斯坦在广义相对论张量计算中首先使用的)。字母上的帽子表示该物理量是算符, 有时也可以省去。

检验 1.6 节三个泡利自旋算符 (1.83)-(1.85) 满足 (1.74)。

¹期望值这段真给我打破防了, 哈哈

Answer 2

$$\begin{aligned}
[\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= (\frac{\hbar}{2})^2 (\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x) \\
&= (\frac{\hbar}{2})^2 \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= (\frac{\hbar}{2})^2 \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\
&= i\hbar \cdot \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= i\hbar \hat{S}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{S}_y, \hat{S}_z] &= (\frac{\hbar}{2})^2 (\sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y) \\
&= (\frac{\hbar}{2})^2 \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= (\frac{\hbar}{2})^2 \left[\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= i\hbar \cdot \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= i\hbar \hat{S}_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{S}_z, \hat{S}_x] &= (\frac{\hbar}{2})^2(\sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_z) \\
&= (\frac{\hbar}{2})^2 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \\
&= (\frac{\hbar}{2})^2 \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= i\hbar \cdot \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= i\hbar \hat{S}_y
\end{aligned}$$

Question 3

1.6 节内的三个泡利矩阵 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 是一种最简单的取法。我们其实还可以定义广义泡利矩阵，例如假设有三个单位矢量 $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ （满足 $\vec{l} \cdot \vec{l} = 1, \vec{m} \cdot \vec{m} = 1, \vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ ），那么可以定义广义泡利矩阵：

$$\begin{aligned}
\Sigma_l &= \vec{l} \cdot \vec{\sigma} = l_x\sigma_x + l_y\sigma_y + l_z\sigma_z, \\
\Sigma_m &= \vec{m} \cdot \vec{\sigma} = m_x\sigma_x + m_y\sigma_y + m_z\sigma_z, \\
\Sigma_n &= \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z.
\end{aligned}$$

例如，写成矩阵形式，

$$\Sigma_n = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix};$$

又如，当 \vec{n} 可以写为单位矢量 $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ 时，那么

$$\Sigma_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

请证明：(i) 两个广义泡利矩阵 $\vec{m} \cdot \vec{\sigma}$ 和 $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ 的乘积为

$$(\vec{m} \cdot \vec{\sigma})(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{m} \cdot \vec{n} + i(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{\sigma};$$

(ii) $[\vec{m} \cdot \vec{\sigma}, \vec{n} \cdot \vec{\sigma}] = 2i(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{\sigma}$, 并与教材 (1.76) 比较；

(iii) $(\vec{m} \cdot \vec{\sigma})(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) + (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})(\vec{m} \cdot \vec{\sigma}) = 2\vec{m} \cdot \vec{n}$, 并与教材 (1.78) 比较（可以就两个矢量垂直时即 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, 将该式子与教材 (1.78) 比较）。

说明：当三个单位矢量 $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ 两两垂直时，即 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0, \vec{m} \cdot \vec{l} = 0, \vec{n} \cdot \vec{l} = 0$, 所选定的广义泡利矩阵就可以代替教材内的普通泡利矩阵。这样的三个单位矢量可以为

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

$$\vec{m} = (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0),$$

$$\vec{l} = (-\cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi, \sin \theta).$$

只是这样的广义泡利矩阵 $(\Sigma_l, \Sigma_m, \Sigma_n)$ 太复杂，且空间具有转动对称性，无论选择什么样的单位矢量 $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ ，都不影响对可测物理量的预言，故而这样复杂的广义泡利矩阵一般不常用，但在某些特殊问题上也有用途。在教材中，我们选取了 x, y, z 三个坐标单位矢量代替 $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ ，这是一种最简单的取法。

Answer 3

(i)

原式左边为：

$$\begin{aligned} & (\vec{m} \cdot \vec{\sigma})(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \begin{pmatrix} m_z & m_x - im_y \\ m_x + im_y & -m_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z + im_x n_y - im_y n_x & m_z n_x - m_x n_z + im_y n_z - im_z n_y \\ m_x n_z - m_z n_x + im_y n_z - in_y m_z & m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z + im_y n_x - im_x n_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

原式右边：

$$\begin{aligned} & \vec{m} \cdot \vec{n} + i(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{\sigma} \\ &= \vec{m} \cdot \vec{n} + i[(m_y n_z - m_z n_y) \sigma_x + (m_z n_x - m_x n_z) \sigma_y + (m_x n_y - m_y n_x) \sigma_z] \\ &= \begin{pmatrix} m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z & 0 \\ 0 & m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & i(m_y n_z - m_z n_y) \\ i(m_y n_z - m_z n_y) & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & m_z n_x - m_x n_z \\ -(m_z n_x - m_x n_z) & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} i(m_x n_y - m_y n_x) & 0 \\ 0 & -i(m_x n_y - m_y n_x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z + im_x n_y - im_y n_x & m_z n_x - m_x n_z + im_y n_z - im_z n_y \\ m_x n_z - m_z n_x + im_y n_z - in_y m_z & m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z + im_y n_x - im_x n_y \end{pmatrix} \\ &= (\vec{m} \cdot \vec{\sigma})(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \end{aligned}$$

证毕！

(ii)

由上一问 (i) 知:

$$(\vec{m} \cdot \vec{\sigma})(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{m} \cdot \vec{n} + i(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{\sigma}$$

交换上式中 m , n , 并利用 $\vec{n} \times \vec{m} = -\vec{m} \times \vec{n}$ 可得:

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})(\vec{m} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{n} \cdot \vec{m} + i(\vec{n} \times \vec{m}) \cdot \vec{\sigma} = \vec{m} \cdot \vec{n} - i(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{\sigma}$$

两式相减即得:

$$[\vec{m} \cdot \vec{\sigma}, \vec{n} \cdot \vec{\sigma}] = 2i(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{\sigma}$$

(iii)

两式相加即有:

$$(\vec{m} \cdot \vec{\sigma})(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) + (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})(\vec{m} \cdot \vec{\sigma}) = 2\vec{m} \cdot \vec{n}$$

由题意, 考虑两矢量垂直, 即 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ 时, 有:

$$(\vec{m} \cdot \vec{\sigma})(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) + (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})(\vec{m} \cdot \vec{\sigma}) = 0$$

与教材中 (1.78) $\sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha = 0$ 形式相同, 其被称为反对易关系, 可以表示为 $A, B = AB + BA = 0$ 。这种关系在描述费米子的统计行为时尤为重要, 因为费米子的产生和湮灭算符满足反对易关系, 这是泡利不相容原理的基础。

在更广泛的数学和物理背景下 (上学期修读的量子力学中有关描述), 反对易关系与李代数和李群的理论相联系。例如, $SO(n)$ 群的旋转表示可以通过 Clifford 代数来构造, 这些代数的元素满足反对易关系。在量子场论中, 反对易关系用于描述旋量场的正则量子化, 其中旋量场的产生和湮灭算符满足反对易关系。

此外, 反对易关系也与洛伦兹群的表示有关, 特别是在构造 Dirac 方程时, Dirac 矩阵满足反对易关系, 这些矩阵是 Clifford 代数的生成元。这些矩阵不仅在粒子物理中描述自旋, 还在相对论量子力学中描述粒子的时空行为。

Question 4

证明: 当单位矢量 $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, 算符

$$\Sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$$

的两个本征态是

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

对应的本征值各为多少?

请证明上述两个本征态满足正交、完备、归一化条件。

说明：电子的自旋磁矩与自旋角动量成正比，于是在磁场中的电子自旋磁矩的哈密顿量正是与上述算符

$$\Sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$$

成正比。这就是该算符的物理含义之一。

Answer 4

上述两个本征态满足正交、完备、归一化条件见 Question 1 中证明。

下求本征值：

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cos \phi - i \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi + i \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

对比：

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} + F_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} & (F_1 - F_2) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ (F_1 - F_2) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & F_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + F_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

由于 F 的迹

$$\text{trace}(F) = F_{11} + F_{22} = F_1 + F_2 = 0$$

对于反对角线又有： $F_1 - F_2 = 2$

可得两本征值：

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = -1 \end{cases}$$

该结论是符合预期的，其代表着自旋向上和向下两种本征状态。

Question 5

因为上述 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 满足正交、完备、归一化条件，那么用它们作为基矢，可以展开任何二维矢量。如 $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，可以写为

$$|\Psi\rangle = (|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) |\Psi\rangle \cdots \quad (\text{注: } |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| \text{ 是单位矩阵, 此为完备性条件的体现})$$

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= (|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) |\Psi\rangle \\ &= |\psi_1\rangle\langle\psi_1|\Psi\rangle + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\Psi\rangle \\ &= \langle\psi_1|\Psi\rangle|\psi_1\rangle + \langle\psi_2|\Psi\rangle|\psi_2\rangle \end{aligned}$$

其中 $\langle \psi_1 | \Psi \rangle$ 和 $\langle \psi_2 | \Psi \rangle$ 就是展开系数。展开系数是²:

$$\langle \psi_1 | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi},$$

$$\langle \psi_2 | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2}.$$

请把如下矢量 $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha^*\alpha + \beta^*\beta}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 用 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ (作为基矢) 展开。

Answer 5

由题意:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \langle \psi_1 | \Psi \rangle |\psi_1\rangle + \langle \psi_2 | \Psi \rangle |\psi_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^*\alpha + \beta^*\beta}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} |\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{\alpha^*\alpha + \beta^*\beta}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} |\psi_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^*\alpha + \beta^*\beta}} \left[(\alpha \cos \frac{\theta}{2} + \beta \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}) |\psi_1\rangle + (-\alpha \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + \beta \cos \frac{\theta}{2}) |\psi_2\rangle \right] \\ &= \frac{\alpha \cos \frac{\theta}{2} + \beta \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}}{\sqrt{\alpha^*\alpha + \beta^*\beta}} |\psi_1\rangle + \frac{-\alpha \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + \beta \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\alpha^*\alpha + \beta^*\beta}} |\psi_2\rangle \end{aligned}$$

Question 6

P₁₃ 验证纯态密度算符随时间演化的方程 (1.57) [此方程也可以叫“量子刘维尔方程”]。

Answer 6

从薛定谔方程出发，它是描述量子系统状态矢量 $|\psi(t)\rangle$ 随时间演化的基本方程:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

密度矩阵 ρ 定义为系统状态矢量 $|\psi(t)\rangle$ 与其共轭转置 $\langle \psi(t)|$ 的乘积:

$$\rho = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$$

计算密度矩阵的时间导数:

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| = \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| \right)$$

²式中 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 标红是因为原题目中遗漏了归一化因子，下同

将薛定谔方程代入上述表达式中，得到：

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{1}{i\hbar}H|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| - \frac{1}{i\hbar}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|H$$

整理得到刘维尔方程：

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho = H\rho - \rho H$$

证毕！

Question 7

请把教材 P₂₃₋₂₄(1.8.3 汇景变换举例) 的推导验证一下（包括将其中简化的步骤写得更为具体）。

Answer 7

(1) 对于一般绘景的变换：

设有两个绘景，薛定谔方程分别为

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle, \quad i\hbar\frac{d}{dt}|\psi'\rangle = H'|\psi'\rangle$$

设

$$|\psi\rangle = U|\psi'\rangle, |\psi'\rangle = U^+|\psi\rangle$$

U 为幺正变换算符，则

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}|\psi'\rangle &= i\hbar\frac{d}{dt}(U^+|\psi\rangle) \\ &= i\hbar\left(\frac{dU^+}{dt}|\psi\rangle + U^+\frac{d|\psi\rangle}{dt}\right) \\ &= i\hbar\frac{dU^+}{dt}|\psi\rangle + i\hbar U^+\frac{d|\psi\rangle}{dt} \\ &= i\hbar\frac{dU^+}{dt}U|\psi'\rangle + U^+HU|\psi'\rangle \\ &= \left(i\hbar\frac{dU^+}{dt}U + U^+HU\right)|\psi'\rangle \\ &= H'|\psi'\rangle \end{aligned}$$

即若

$$|\psi'\rangle = U^+|\psi\rangle$$

则

$$H' = i\hbar\frac{dU^+}{dt}U + U^+HU$$

(2) 例 1:

考虑单个二能级原子与经典单模电磁场的相互作用，系统的哈密顿量为

$$H = H_0 + V$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z$$

$$V = \hbar \Omega (e^{i\omega t} \sigma + \text{H.c.})$$

其中， ω_a 为原子跃迁频率； ω 为光场频率； Ω 为原子与经典光场之间的耦合强度； $\sigma_z \sigma \equiv \sigma_- \sigma^+ \equiv \sigma_+$ 为泡利算符；H.c. 表示厄米共轭。

变换一，设

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} = e^{-i \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z t}$$

利用 (1) 中统用绘景变换式有：

$$H' = i\hbar \frac{dU^+}{dt} U + U^+ H U$$

$$= i\hbar i \frac{1}{2} \omega_a \sigma_z + U^+ \left[\frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \Omega (e^{i\omega t} \sigma + \text{H. c.}) \right] U$$

引用数学公式：

$$e^{\xi A} B e^{-\xi A} = B + \xi [A, B] + \frac{\xi^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

证明该式：令

$$f(\xi) = e^{\xi A} B e^{-\xi A} \quad (1)$$

将 $f(\xi)$ 按 ξ 的幂次方展开，即

$$f(\xi) = f(0) + f'(0)\xi + \frac{1}{2!} f''(0)\xi^2 + \dots \quad (2)$$

其中 $f(\xi)$ 对 ξ 的导数是：

$$\frac{d}{d\xi} f(\xi) = \frac{d}{d\xi} (e^{\xi A} B e^{-\xi A})$$

根据矩阵指数的微分规则，我们有：

$$\frac{d}{d\xi} e^{\xi A} = A e^{\xi A}$$

$$\frac{d}{d\xi} e^{-\xi A} = -e^{-\xi A} A$$

将这些规则应用到 $f(\xi)$ 的导数中, 我们得到:

$$\frac{d}{d\xi} f(\xi) = Ae^{\xi A}Be^{-\xi A} - e^{\xi A}Be^{-\xi A}A$$

在 $\xi = 0$ 处, $e^{\xi A}$ 和 $e^{-\xi A}$ 都等于单位矩阵 I , 因此:

$$\frac{d}{d\xi} f(\xi) \Big|_{\xi=0} = [Af(\xi) - f(\xi)A] \Big|_{\xi=0} = [A, f(\xi)] \Big|_{\xi=0}$$

注意到

$$f(0) = B \tag{3}$$

$$f'(0) = \frac{df(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = [A, f(\xi)] \Big|_{\xi=0} = [A, B] \tag{4}$$

$$f''(0) = \frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} = [A, f'(\xi)] \Big|_{\xi=0} = [A, [A, f(\xi)]] \Big|_{\xi=0} = [A, [A, B]] \tag{5}$$

将式 (3)(4)(5) 等代入式 (2) 即可得

$$e^{\xi A}Be^{-\xi A} = B + \xi[A, B] + \frac{\xi^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots$$

具体到现在的情况, $U = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} = e^{-\frac{i}{2}\omega_a\sigma_z t}$, 令 $A = \sigma_z$, $\xi = -\frac{i}{2}\omega_a t$, $B = \sigma$ 则有

$$\begin{aligned} [A, B] &= [\sigma_z, \sigma] \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -2\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^+ \sigma U &= e^{\frac{i}{2}\omega_a \sigma_z t} \sigma e^{-\frac{i}{2}\omega_a \sigma_z t} \\
&= e^{\xi A} B e^{-\xi A} \\
&= B + \xi[A, B] + \frac{\xi^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots \\
&= \sigma + \xi[\sigma_z, \sigma] + \frac{\xi^2}{2!}[\sigma_z, [\sigma_z, \sigma]] + \dots \\
&= \sigma + (-2\xi)\sigma + \frac{(-2\xi)^2}{2!}\sigma + \dots \\
&= \sigma \left[1 + (-2\xi) + \frac{(-2\xi)^2}{2!} + \dots \right] \\
&= \sigma e^{-2\xi} \\
&= \sigma e^{-i\omega_a t}
\end{aligned}$$

相当于幺正变换作用在 σ_z 上变成了一个含时的相位因子。

同理有：

$$U^+ \sigma^+ U = e^{\frac{i}{2}\omega_a \sigma_z t} \sigma^+ e^{-\frac{i}{2}\omega_a \sigma_z t} = \sigma^+ e^{i\omega_a t}$$

而对于 $A = B = \sigma_z$ 时，

$$U^+ \sigma_z U = \sigma_z$$

这是理所应当的，在本征态中的幺正变换不应该有任何变化。

回归主线，将上述分析应用到原式中，则有：

$$\begin{aligned}
H' &= i\hbar \frac{dU^+}{dt} U + U^+ H U \\
&= i\hbar i \frac{1}{2} \omega_a \sigma_z + U^+ \left[\frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \Omega (e^{i\omega t} \sigma + \text{H. c.}) \right] U \\
&= -\frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \Omega (e^{i\omega t} \sigma e^{-i\omega_a t} + \text{H. c.}) \\
&= \hbar \Omega (\sigma e^{-i\Delta t} + \text{H. c.})
\end{aligned}$$

即

$$H' = \hbar \Omega (\sigma e^{-i\Delta t} + \text{H. c.})$$

其中， $\Delta = \omega_a - \omega$ 。

证毕！

变换二，设 $U = e^{-\frac{i}{2}\omega \sigma_z t}$ 注意到幺正变换 U 中出现的是光场频率，因此称为变换到以光场频率旋转的坐标系（绘景）(rotating frame with light-field frequency)，同上应用结论：

$$U^+ \sigma U = \sigma e^{-\omega t}$$

$$U^+ \sigma_z U = \sigma_z$$

则有：

$$\begin{aligned} H' &= i\hbar \frac{dU^+}{dt} U + U^+ H U \\ &= i\hbar i \frac{1}{2} \omega \sigma_z + U^+ \left[\frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \Omega (e^{\omega t} \sigma + \text{H. c.}) \right] U \\ &= -\frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \Omega (e^{\omega t} \sigma e^{-\omega t} + \text{H. c.}) \\ &= \frac{1}{2} \hbar \Delta \sigma_z + \hbar \Omega (\sigma + \sigma^+) \end{aligned}$$

即

$$H' = \frac{1}{2} \hbar \Delta \sigma_z + \hbar \Omega (\sigma + \sigma^+)$$

称在以光场频率旋转的坐标系中的哈密顿量，其不显含时间。

(3) 例 2：

考虑单个二能级原子与量子单模电磁场的相互作用（称为 JC 模型），系统的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= H_0 + V \\ H_0 &= \hbar \omega a^+ a + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z \\ V &= \hbar g (a^+ \sigma + \text{H.c.}) \end{aligned}$$

其中， a 和 a^+ 分别为光子湮灭算符和光子产生算符（与在一维谐振子问题中的性质相同）； g 为原子与量子光场之间的耦合强度，其他符号的意义与例 1 相同。

变换一，设 $U = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} = e^{-i(\omega a^+ a + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z)t}$ ，理所应当有：

$$e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} H_0 e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} = H_0$$

且：

$$U^+ \sigma U = e^{i\frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z t} \sigma e^{-i\frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z t} = \sigma e^{-i\omega_a t}$$

则变换过程如下：

$$\begin{aligned} H' &= i\hbar \frac{dU^+}{dt} U + U^+ H U \\ &= i\hbar \frac{i}{\hbar} H_0 + U^+ [H_0 + \hbar g (a^+ \sigma + \text{H.c.})] U \\ &= -H_0 + H_0 + \hbar g (a^+ e^{i\omega_a t} \sigma e^{-i\omega_a t} + \text{H.c.}) \\ &= \hbar g (a^+ \sigma e^{-i\Delta t} + \text{H.c.}) \end{aligned}$$

即

$$H' = \hbar g (a^+ \sigma e^{-i\Delta t} + \text{H.c.})$$

其中， $\Delta = \omega_a - \omega$ 。

变换二，设 $U = e^{-i\omega(a^+ a + \frac{1}{2}\sigma_z)t}$ (以光场频率旋转的坐标系)，则

$$\begin{aligned} H' &= i\hbar \frac{dU^+}{dt} U + U^+ H U \\ &= i\hbar i\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2}\sigma_z \right) + U^+ [H_0 + \hbar g (a^+ \sigma + \text{H.c.})] U \\ &= -\hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2}\sigma_z \right) + H_0 + \hbar g (a^+ \sigma + \text{H.c.}) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\Delta\sigma_z + \hbar g (a^+ \sigma + \text{H.c.}) \end{aligned}$$

即

$$H' = \frac{1}{2}\hbar\Delta\sigma_z + \hbar g (a^+ \sigma + \text{H.c.})$$

称为在以光场频率旋转的坐标系中的哈密顿量，其不显含时间。

证毕！

第 2 章作业

Question 1

数学验证与理解 2.1、2.2 节“多模与单模电磁场与多能级原子的相互作用”(看懂课本，此题不必写出)。

Answer 1

看懂了。

Question 2

推导 2.3.2 节“薛定谔方程和密度矩阵方程的求解”(把你认为需要详细推导的步骤推导出来)。将步骤复述出来，既是理解的必要路子，也是思维整理、升华、继续创新的必由路子。

Answer 2

薛定谔方程和密度矩阵方程的求解

量子系统状态的时间演化由薛定谔方程或密度矩阵方程描述。针对单模光场与二能级原子的相互作用模型，在哈密顿量式

$$H_I = \frac{1}{2}\hbar\Omega_R (\sigma^+ e^{i(\Delta t - \varphi)} + \sigma^- e^{-i(\Delta t - \varphi)})$$

的基础上，分别就共振相互作用 ($\Delta = 0$) 和非共振相互作用 ($\Delta \neq 0$) 讨论薛定谔方程和密度矩阵方程的求解。

1 共振相互作用 ($\Delta = 0$)

当 $\Delta = 0$ 时，由式 (2.25)，哈密顿量为

$$H_I = \frac{1}{2}\hbar\Omega_R (\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma^- e^{i\varphi})$$

下面分别用几种方法来求解。

1.1 概率幅方法（常用方法）

用相互作用绘景求解薛定谔方程，在不会混淆的前提下可略去 H_1 和 $|\psi_1(t)\rangle$ 的下标，薛定谔方程为

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle$$

设

$$|\psi(t)\rangle = c_e(t)|e\rangle + c_g(t)|g\rangle$$

其中， $c_e(t)$ 和 $c_g(t)$ 称为概率幅。

概率幅方法即通过求解 $c_e(t)$ 和 $c_g(t)$ 的方程而得到态矢量 $|\psi(t)\rangle$ 。

将哈密顿量和态矢量回代薛定谔方程可得

$$i\hbar\dot{c}_e|e\rangle + i\hbar\dot{c}_g|g\rangle = H_I c_e(t)|e\rangle + H_I c_g(t)|g\rangle = \frac{1}{2}\hbar\Omega_R (c_g(t)e^{-i\varphi}|e\rangle + c_e(t)e^{i\varphi}|g\rangle)$$

其中用了升降算符在不同态上的不同效果，对比可得：

$$\dot{c}_e = -i\frac{\Omega_R}{2}e^{-i\varphi}c_g$$

$$\dot{c}_g = -i\frac{\Omega_R}{2}e^{i\varphi}c_e$$

其解为

$$c_e(t) = A \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + B \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$$

$$c_g(t) = i \frac{2}{\Omega_R} e^{i\varphi} \dot{c}_e(t) = ie^{i\varphi} \left[-A \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + B \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \right]$$

设原子初始处于上能态 $|e\rangle$, 即初始条件为 $c_e(0) = 1, c_g(0) = 0$, 则可求得 $A = 1, B = 0$, 从而有

$$\begin{aligned} c_e(t) &= \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \\ c_g(t) &= -ie^{i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \end{aligned}$$

将振幅回代态矢量可得:

$$|\psi(t)\rangle = c_e(t)|e\rangle + c_g(t)|g\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)|e\rangle - ie^{i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)|g\rangle$$

(2) 时间演化算符方法

设原子初始处于量子态 $|\psi(0)\rangle$, 则 t 时刻的量子态可表示为

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$$

其中, $U(t)$ 称为时间演化算符。

时间演化算符方法, 即通过先求得时间演化算符 $U(t)$, 然后得到态矢量 $|\psi(t)\rangle$ 。将上式代入薛定谔方程有

$$i\hbar \frac{dU(t)}{dt} |\psi(0)\rangle = HU(t)|\psi(0)\rangle$$

即

$$i\hbar \frac{dU(t)}{dt} = HU(t)$$

若 H 不含时间, 则 $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$; 若 H 含时间, 则 $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t H(t')dt'}$ 。对现在的情况, $|\psi(t)\rangle = U_l(t)|\psi(0)\rangle$, 其中 $U_l(t)$ 为 I 时间演化算符。由于 $H_I = \frac{1}{2}\hbar\Omega_R(\sigma^+e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})$ 不含时, 因此有

$$U_I(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_I t\right) = \exp\left[-\frac{i}{2}\Omega_R t(\sigma^+e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})\right]$$

可以证明, 若算符 $A^2 = I$ (其中 I 为单位算符), 则

$$e^{-ixa} = I \cos x - iA \sin x$$

其中, x 是实参数。

证明如下:

利用矩阵指数的定义和泰勒级数展开:

$$e^{-ixa} = I - ixA + \frac{(ixa)^2}{2!} - \frac{(ixa)^3}{3!} + \frac{(ixa)^4}{4!} - \dots$$

由于 $A^2 = I$, 我们可以将 A 的偶数次幂替换为 I , 奇数次幂替换为 A :

$$\begin{aligned} e^{-ixA} &= I - ixA + \frac{i^2 x^2 A^2}{2!} - \frac{i^3 x^3 A^3}{3!} + \frac{i^4 x^4 A^4}{4!} - \dots \\ &= I - ixA - \frac{x^2 A}{2!} + \frac{ix^3 A}{3!} + \frac{x^4 I}{4!} - \dots \\ &= I \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) - ixA \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right) \end{aligned}$$

现在, 我们注意到括号内的级数分别是 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的泰勒级数展开:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

因此, 我们可以将 e^{-ixA} 的展开式重写为:

$$e^{-ixA} = I \cos x - iA \sin x$$

证毕!

原式指数上的算符满足 $(\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})^2 = I$, 于是

$$U_I(t) = \cos \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right) I - i \sin \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right) (\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})$$

设原子初始处于上能态, 即 $|\psi(0)\rangle = |e\rangle$, 则 t 时刻原子的量子态为

$$|\psi(t)\rangle = \cos \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right) |e\rangle - ie^{i\varphi} \sin \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right) |g\rangle$$

与用概率幅方法得到的结果相同。

求得态矢量后, 就可以计算原子的各种可观测量。例如, 原子处于上下能态的概率分别为

$$P_e(t) = \cos^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\Omega_R t)]$$

$$P_g(t) = \sin^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\Omega_R t)]$$

原子的布居数反转为

$$W(t) \equiv P_e(t) - P_g(t) = \cos(\Omega_R t)$$

可见, 原子以频率 Ω_R 在上下能态间作简谐振荡, 称为 Rabi 振荡, Ω_R 称为 Rabi 频率。从定义 $\Omega_R \equiv -\mu \cdot E_0 / \hbar$ 可知, Ω_R 正比于电场振幅和原子两个能级间的电偶极矩阵元的标量积, 从而描述了原子与光场之间的耦合强度。

2 非共振相互作用（失谐相互作用）($\Delta \neq 0$)

2.1 概率幅方法

前面已导出，在相互作用绘景中，取旋波近似后的哈密顿量为

$$H_I = \frac{1}{2} \hbar \Omega_R \left(\sigma^+ e^{i(\Delta t - \varphi)} + \sigma^- e^{-i(\Delta t - \varphi)} \right)$$

设

$$|\psi(t)\rangle = c_e(t)|e\rangle + c_g(t)|g\rangle$$

将两式代入薛定谔方程，即

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H_I |\psi(t)\rangle$$

有：

$$\dot{c}_e|e\rangle + \dot{c}_g|g\rangle = \frac{1}{i\hbar} H_I c_e(t)|e\rangle + \frac{1}{i\hbar} H_I c_g(t)|g\rangle = -i \frac{\Omega_R}{2} e^{-i\varphi} e^{i\Delta t} c_g(t)|e\rangle - i \frac{\Omega_R}{2} e^{i\varphi} e^{-i\Delta t} c_e(t)|g\rangle$$

其中用了升降算符在不同态上的不同效果，对比可得：

$$\frac{d}{dt}c_e(t) = -i \frac{\Omega_R}{2} e^{-i\varphi} e^{i\Delta t} c_g(t)$$

$$\frac{d}{dt}c_g(t) = -i \frac{\Omega_R}{2} e^{i\varphi} e^{-i\Delta t} c_e(t)$$

由两式中上式可得

$$c_g(t) = i \frac{2}{\Omega_R} e^{i\varphi} e^{-i\Delta t} \frac{d}{dt} c_e(t)$$

将该式代入两式中下式，消去 $c_g(t)$ 可得：

$$\frac{d^2}{dt^2} c_e(t) - i\Delta \frac{d}{dt} c_e(t) + \frac{\Omega_R^2}{4} c_e(t) = 0$$

设其特解为 $c_e(t) = e^{i\lambda t}$ ，代入上式可求得 $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\Delta \pm \Omega)$ ，其中

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}$$

而通解为

$$c_e(t) = ae^{i\lambda_+ t} + be^{i\lambda_- t}$$

利用初始条件

$$c_e(0) = a + b, \quad c_g(0) = -\frac{2}{\Omega_R} e^{i\varphi} (\lambda_+ a + \lambda_- b)$$

可解出 a 和 b :

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2\Omega} \right) c_e(0) - \frac{\Omega_R}{2\Omega} e^{-i\varphi} c_g(0) \\ b &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2\Omega} \right) c_e(0) + \frac{\Omega_R}{2\Omega} e^{-i\varphi} c_g(0) \end{aligned}$$

代入通解 (其中同号部分剩 $\cos(\frac{\Omega}{2}t)$ 项, 不同号部分剩 $-i \sin(\frac{\Omega}{2}t)$ 项) :

$$\begin{aligned} c_e(t) &= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2\Omega} \right) c_e(0) - \frac{\Omega_R}{2\Omega} e^{-i\varphi} c_g(0) \right] e^{i\frac{1}{2}(\Delta+\Omega)t} + \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2\Omega} \right) c_e(0) + \frac{\Omega_R}{2\Omega} e^{-i\varphi} c_g(0) \right] e^{i\frac{1}{2}(\Delta-\Omega)t} \\ &= e^{i\frac{\Delta}{2}t} \left\{ c_e(0) \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) - i \left[\frac{\Delta}{\Omega} c_e(0) + \frac{\Omega_R}{2\Omega} e^{-i\varphi} c_g(0) \right] \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right\} \end{aligned}$$

$c_g(t)$ 同理, 此处略。整理两式, 最后求得

$$\begin{aligned} c_e(t) &= e^{i\frac{\Delta}{2}t} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) - i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right] c_e(0) - i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) c_g(0) \right\} \\ c_g(t) &= e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right] c_g(0) - i \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) c_e(0) \right\} \end{aligned}$$

由式 (2.53) 可以求得原子布居概率 $P_e(t) = |c_e(t)|^2$ 、 $P_g(t) = |c_g(t)|^2$, 布居差 $W(t) = P_e(t) - P_g(t)$, 以及原子的电偶极矩等。为了计算简单, 假设原子初始处于上能态, 即 $c_e(0) = 1, c_g(0) = 0$, 则有

$$\begin{aligned} c_e(t) &= e^{i\frac{\Delta}{2}t} \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) - i \frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right] \\ c_g(t) &= -ie^{-i\frac{\Delta}{2}t} \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \end{aligned}$$

从而原子的布居概率和布居差分别为

$$\begin{aligned} P_e(t) &= |c_e(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + \left(\frac{\Delta}{\Omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \\ P_g(t) &= |c_g(t)|^2 = \left(\frac{\Omega_R}{\Omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \\ W(t) &= \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + \left(\frac{\Delta^2 - \Omega_R^2}{\Omega^2}\right) \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \end{aligned}$$

下面计算原子电偶极矩的平均值。我们知道，对任意力学量算符 A ，其平均值为

$$\langle A \rangle = \langle \psi_S(t) | A_S | \psi_S(t) \rangle = \langle \psi_H | A_H(t) | \psi_H \rangle = \langle \psi_I(t) | A_I(t) | \psi_I(t) \rangle$$

也就是说，在计算平均值时，应取同一个绘景中的算符和态矢量。上面我们求出的是在相互作用绘景中的态矢量，因此也应该用在相互作用绘景中的算符。在薛定谔绘景中，原子的电偶极矩算符为

$$d = d_{eg}|e\rangle\langle g| + d_{ge}|g\rangle\langle e| = d_{eg}\sigma^+ + d_{ge}\sigma = d_{eg}\sigma^+ + H.c.$$

其中，H.c. 表示厄米共轭；在相互作用绘景中， $\sigma^+(t) = \sigma^+e^{i\omega_0 t}$ （该式可见本文档的第 1 章作业 Answer 7 例 1 中的推导证明，幺正变换作用在 σ^+ 上表现为含时的相位因子），从而在相互作用绘景中，原子的电偶极矩算符为

$$d(t) = d_{eg}\sigma^+e^{i\omega_0 t} + H.c.$$

原子电偶极矩在状态 $|\psi(t)\rangle = c_e(t)|e\rangle + c_g(t)|g\rangle$ 中的期望值为

$$\begin{aligned} \langle d(t) \rangle &= \langle \psi | d(t) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | (d_{ge}\sigma^+e^{i\omega_0 t} + H.c.) | \psi \rangle \\ &= d_{ge}e^{i\omega_0 t} \langle \psi | \sigma^+ | \psi \rangle + C.C. \\ &= 2 \operatorname{Re} \{ d_{ge}e^{i\omega_0 t} \langle \psi | \sigma^+ | \psi \rangle \} \end{aligned}$$

其中，C.C. 表示复数共轭。

注意到

$$\langle \psi | \sigma^+ | \psi \rangle = \langle \psi | e \rangle \langle g | \psi \rangle = c_e^* c_g$$

则有

$$\begin{aligned} \langle d(t) \rangle &= 2 \operatorname{Re} \{ d_{eg}e^{i\omega_0 t} c_e^* c_g \} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ d_{eg}e^{i\omega_0 t} \left[-ie^{-i\Delta t} \frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right] \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right] \right\} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ -id_{eg}e^{i\omega t} \left[\frac{\Omega_R}{\Omega} e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right] \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

可见，原子电偶极矩以入射场的频率 ω 快速振荡，同时受到 Rabi 频率 Ω 的调制。

过渡到共振情况， $\Delta = 0, \Omega = \Omega_R$ ，则原子的布居概率、布居差、原子电偶极矩的平均值分别为

$$P_e(t) = \cos^2\left(\frac{1}{2}\Omega_R t\right) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\Omega_R t)]$$

$$P_g(t) = \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega_R t\right) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\Omega_R t)]$$

$$W(t) = \cos^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) - \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) = \cos(\Omega_R t)$$

$$\langle d(t) \rangle = 2 \operatorname{Re} \left\{ -id_{eg} e^{i\omega t} e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ -id_{eg} e^{i\omega t} e^{i\varphi} \sin(\Omega_R t) \right\}$$

(2) 密度矩阵方法

2.1 密度矩阵元与概率幅之间的关系

由态矢量

$$|\psi(t)\rangle = c_e(t)|e\rangle + c_g(t)|g\rangle$$

可构造密度算符，即

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$$

其矩阵元为

$$\rho_{ee}(t) = \langle e|\rho|e\rangle = \langle e|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|e\rangle = c_e(t)c_e^*(t) = |c_e(t)|^2 = P_e(t)$$

$$\rho_{ge}(t) = \langle e|\rho|g\rangle = \langle e|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|g\rangle = c_e(t)c_g^*(t)$$

$$\rho_{ge}(t) = \langle g|\rho|e\rangle = \langle g|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|e\rangle = c_g(t)c_e^*(t) = \rho_{ge}^*$$

$$\rho_{gg}(t) = \langle g|\rho|g\rangle = \langle g|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|g\rangle = c_g(t)c_g^*(t) = |c_g(t)|^2 = P_g(t)$$

这组公式把密度矩阵元与概率幅联系了起来。可见，密度矩阵的对角元表示原子的布居概率，非对角元与原子电偶极矩的平均值相联系。

2.2 密度矩阵元的时间演化方程

密度矩阵元的时间演化方程可由下列两种方法导出。

第一种方法是由概率幅的方程导出密度矩阵元的方程。

$$\frac{d}{dt}\rho_{ee}(t) = \frac{d}{dt}(c_e(t)c_e^*(t)) = \frac{dc_e(t)}{dt}c_e^*(t) + c_e(t)\frac{dc_e^*(t)}{dt} = i\frac{\Omega_R}{2} \left[e^{-i(\Delta-\varphi)}\rho_{eg}(t) - e^{i(\Delta-\varphi)}\rho_{ge}(t) \right]$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{gg}(t) = -\frac{d}{dt}\rho_{ee}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{eg}(t) = \frac{d}{dt}(c_e(t)c_g^*(t)) = \frac{dc_e(t)}{dt}c_g^*(t) + c_e(t)\frac{dc_g^*(t)}{dt}$$

$$= i\frac{\Omega_R}{2}e^{i(\Delta t - \varphi)} [\rho_{ee}(t) - \rho_{gg}(t)]$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{ge}(t) = \frac{d}{dt}\rho_{ge}^*(t)$$

第二种方法是直接由密度算符方程导出密度矩阵元的方程。

密度算符方程为

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho(t)]$$

密度矩阵元的方程为

$$\frac{d}{dt}\rho_{mn} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho]_{mn} = \frac{1}{i\hbar} \sum_k (H_{mk}\rho_{kn} - \rho_{mk}H_{kn})$$

哈密顿量

$$H = \frac{1}{2}\hbar\Omega_R (\sigma^+ e^{i(\Delta t - \varphi)} + \sigma^- e^{-i(\Delta t - \varphi)})$$

的矩阵形式为

$$H = \begin{bmatrix} H_{ee} & H_{eg} \\ H_{ge} & H_{gg} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\hbar\Omega_R \begin{bmatrix} 0 & e^{i(\Delta t - \varphi)} \\ e^{-i(\Delta t - \varphi)} & 0 \end{bmatrix}$$

从而有

$$\frac{d}{dt}\rho_{ee} = \frac{1}{i\hbar} \sum_k (H_{ek}\rho_{ke} - \rho_{ek}H_{ke}) = \frac{1}{i\hbar} (H_{eg}\rho_{ge} - H_{ge}\rho_{eg}) = -i\frac{\Omega_R}{2} (e^{i(\Delta t - \varphi)}\rho_{ge} - C.C.)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{gg} = -\frac{d}{dt}\rho_{ee}$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{eg} = \frac{1}{i\hbar} \sum_k (H_{ek}\rho_{kg} - \rho_{ek}H_{kg}) = \frac{1}{i\hbar} (H_{eg}\rho_{gg} - H_{eg}\rho_{ee}) = i\frac{\Omega_R}{2}e^{i(\Delta t - \varphi)} (\rho_{ee} - \rho_{gg})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{ge} = \frac{d}{dt}\rho_{eg}^*$$

显然，由上述两种方法导出的密度矩阵元方程是相同的。

(3) Bloch 矢量 (\mathbf{W} , \mathbf{U} , \mathbf{V}) 及其演化方程

引入 Bloch 矢量

$$\begin{aligned} W &= \rho_{ee} - \rho_{gg} \\ U &= \frac{1}{2}(\rho_{eg} + \rho_{ge}) \\ V &= \frac{1}{2i}(\rho_{ee} - \rho_{ge}) \end{aligned}$$

其中, W 为布居差; U 和 V 分别为 ρ_{eg} 的实部和虚部, 即

$$\rho_{eg} = U + iV, \quad \rho_{ge} = U - iV$$

(W, U, V) 均为实数。可以导出 (W, U, V) 的演化方程分别为

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{d}{dt}(\rho_{ee} - \rho_{gg}) = 2\frac{d}{dt}\rho_{ee} = 2\Omega_R[U \sin(\Delta t - \varphi) - V \cos(\Delta t - \varphi)] \\ \frac{dU}{dt} &= \operatorname{Re} \frac{d\rho_{eg}}{dt} = \operatorname{Re} \left[i\frac{\Omega_R}{2} e^{i(\Delta t - \varphi)} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) \right] = -\frac{\Omega_R}{2} W \sin(\Delta t - \varphi) \\ \frac{dV}{dt} &= \operatorname{Im} \frac{d\rho_{eg}}{dt} = \operatorname{Im} \left[i\frac{\Omega_R}{2} e^{i(\Delta t - \varphi)} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) \right] = \frac{\Omega_R}{2} W \cos(\Delta t - \varphi) \end{aligned}$$

它们均为实数方程。

对于 $\Delta = 0$ (共振情况) 和 $\varphi = 0$ 的特殊情况, 上式可以简化为

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= -2\Omega_R V \\ \frac{dU}{dt} &= 0 \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\Omega_R}{2} W \end{aligned}$$

设原子初始处于上能态, 则初始条件为 $W(0) = 1, U(0) = 0, V(0) = 0$, 可以求得

$$U(t) = 0, \quad W(t) = \cos(\Omega_R t), \quad V(t) = \frac{1}{2} \sin(\Omega_R t)$$

利用

$$\rho_{ee} = \frac{1}{2}(1 + W), \quad \rho_{gg} = \frac{1}{2}(1 - W), \quad \rho_{eg} = U + iV$$

可得

$$\rho_{ee}(t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\Omega_R t)] = \cos^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) = |c_e(t)|^2$$

$$\rho_{gg}(t) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\Omega_R t)] = \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) = |c_g(t)|^2$$

$$\rho_{eg}(t) = i \frac{1}{2} \sin(\Omega_R t) = i \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) = c_e(t)c_g^*(t)$$

总之，可以根据具体模型采用相对简单的方法（概率幅法、时间演化算符法、密度矩阵法、Bloch矢量法等）。

2.3.2 原文 + 附加注释完成!! (本问手写 10min, 打字历时 8h)

Question 3

P₃₂ 相互作用汇景内的哈密顿量推导，即对(2.24)、(2.27)进行证明或补全有关推导细节。

Answer 3

附：发现老师很喜欢让我们证相互作用绘景变换的式子啊（笑）

1 证明 (2.24) 公式：

$$H_I = \frac{1}{2}\hbar\Omega_R \left\{ \sigma^+ \left[e^{i[(\omega_0+\omega)t+\varphi]} + e^{i[(\omega_0-\omega)t-\varphi]} \right] + \sigma^- \left[e^{-i[(\omega_0-\omega)t-\varphi]} + e^{-i[(\omega_0+\omega)t+\varphi]} \right] \right\}$$

证明如下：

相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned} V &= -d \cdot E \\ &= -\mu(\sigma^+ + \sigma^-) \cdot E_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ &= -\hbar \frac{\mu \cdot E_0}{\hbar} (\sigma^+ + \sigma^-) \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \hbar\Omega_R (\sigma^+ + \sigma^-) \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

变换到相互作用绘景，即

$$V_I(t) = U_0^+(t)VU_0(t), \quad U_0(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t\right) = \exp\left(-i\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z t\right)$$

同上，可见本文档的第1章作业 Answer 7 例 1 中的推导证明，幺正变换作用在 σ^+ 上表现为含时的相位因子：

$$(\sigma^+)_I = U_0^+(t)\sigma^+U_0(t) = \exp\left(i\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z t\right)\sigma^+\exp\left(-i\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z t\right) = \sigma^+e^{i\omega_0 t}$$

同理，可得

$$(\sigma)_I = \sigma e^{-i\omega_0 t}$$

最终有：

$$\begin{aligned} H_I &= V_I(t) \\ &= U_0^+(t)V(t)U_0(t) \\ &= \exp\left(i\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z t\right)\hbar\Omega_R(\sigma^+ + \sigma)\cos(\omega t + \varphi)\exp\left(-i\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z t\right) \\ &= \hbar\Omega_R(\sigma^+e^{i\omega_0 t} + \sigma e^{-i\omega_0 t})\cos(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\Omega_R(\sigma^+e^{i\omega_0 t} + \sigma e^{-i\omega_0 t})(e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\Omega_R\left\{\sigma^+\left[e^{i[(\omega_0 + \omega)t + \varphi]} + e^{i[(\omega_0 - \omega)t - \varphi]}\right]\right. \\ &\quad \left. + \sigma\left[e^{-i[(\omega_0 - \omega)t - \varphi]} + e^{-i[(\omega_0 + \omega)t + \varphi]}\right]\right\} \end{aligned}$$

旋波近似下： $(\omega_0 + \omega) \gg |\omega_0 - \omega|$ ，上式可以略去以较高频率 $(\omega_0 + \omega)$ 振荡的项，并记 $\Delta = \omega_0 - \omega$ ，称为失谐量。上式 1 可以简化为

$$\begin{aligned} H_I &= \frac{1}{2}\hbar\Omega_R\left\{\sigma^+\left[e^{i[(\omega_0 + \omega)t + \varphi]} + e^{i[(\omega_0 - \omega)t - \varphi]}\right] + \sigma\left[e^{-i[(\omega_0 - \omega)t - \varphi]} + e^{-i[(\omega_0 + \omega)t + \varphi]}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\hbar\Omega_R(\sigma^+e^{i(\Delta - \varphi)} + \sigma e^{-i(\Delta - \varphi)}) \end{aligned}$$

证毕！

2 证明 (2.27) 公式：

$$H' = \frac{1}{2}\hbar\Delta\sigma_z + \frac{1}{2}\hbar\Omega_R(\sigma^+e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})$$

证明如下：

再利用公式

$$H' = i\hbar\frac{dU^+}{dt}U + U^+HU$$

令 $U(t) = e^{-i\frac{1}{2}\omega\sigma_z t}$ ，即变换到以光场频率旋转的坐标系，利用第 1 章作业 Answer 7 例 1 中的推导证明，幺正变换作用在 σ^+ 上表现为含时的相位因子，并在旋转波近似下 $(\omega_0 + \omega) \gg |\omega_0 - \omega|$ ，哈密顿量变为

$$\begin{aligned}
H' &= i\hbar \frac{dU^+}{dt} U + U^+ H U \\
&= i\hbar \frac{de^{i\frac{1}{2}\omega\sigma_z t}}{dt} e^{-i\frac{1}{2}\omega\sigma_z t} + e^{i\frac{1}{2}\omega\sigma_z t} \left[\frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\Omega_R(\sigma^+ + \sigma) \cos(\omega t + \varphi) \right] e^{-i\frac{1}{2}\omega\sigma_z t} \\
&= -\frac{\hbar}{2}\omega\sigma_z + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \frac{1}{2}\hbar\Omega_R e^{i\frac{1}{2}\omega\sigma_z t} \left[e^{-i(\omega t + \varphi)} + e^{i(\omega t + \varphi)} \right] (\sigma^+ + \sigma) e^{-i\frac{1}{2}\omega\sigma_z t} \\
&= \frac{1}{2}\hbar(\omega_0 - \omega)\sigma_z + \frac{1}{2}\hbar\Omega_R \left[e^{-i(\omega t + \varphi)} + e^{i(\omega t + \varphi)} \right] (\sigma^+ e^{i\omega t} + \sigma e^{-i\omega t}) \\
&= \frac{1}{2}\hbar\Delta\sigma_z + \frac{1}{2}\hbar\Omega_R(\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})
\end{aligned}$$

其中最后一步略去了 2ω 快速振动项，证毕！

打到这里已经 1562 行了，纪念一下。

Question 4

在 2.3 节中，二能级原子与光场的相互作用哈密顿量算符 (2.22) 式为：

$$\hat{V} = -\vec{d} \cdot \vec{E} = \hbar\Omega_R(\sigma^+ + \sigma^-) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}),$$

其中能级升降算符定义为

$$\sigma^+ = |e\rangle\langle g|, \quad \sigma^- = |g\rangle\langle e|.$$

设二能级原子系统处于态

$$|\psi(t)\rangle = c_e(t)|e\rangle + c_g(t)|g\rangle,$$

其中几率幅 (probability amplitudes) $c_e(t)$ 和 $c_g(t)$ 可见 (2.54a) (2.54b)。

请计算原子与光场的相互作用哈密顿量的期待值 (平均值)

$$\langle V \rangle = \langle \psi | \hat{V} | \psi \rangle,$$

并计算光场作用于原子上的力

$$F = -\nabla V.$$

说明：此即光镊原理。此力 $F = -\nabla V$ 称为光镊力。激光可以当作镊子 (optical tweezers)，用于快速抓捕、俘获、悬浮、移动原子或微观小球。光镊不但可以抓起原子分子，还能夹起细胞、病毒、细菌。2018 年 10 月 2 日，瑞典皇家科学院宣布，将本年度诺贝尔物理学奖金的一半授予 96 岁的 Arthur Ashkin，表彰他所发明的光镊技术及其在生物学中的应用。

请用如下数据估算一下：抓捕原子的光镊力是原子的重力的多少倍。以氢原子为例，一氢原子的半径约为 $10^{-10} m$ ，一电子电荷为 $1.6 \times 10^{-19} C$ ，那么氢原子的电偶极矩约为 $1.6 \times 10^{-29} C \cdot m$ ；设一激光的电场强度为 $100V/m$ ，激光波长为 $10^{-7} m$ 。由于是估算，可以用经典电磁学，不必关心上面的几率幅 (probability amplitudes) $c_e(t)$ 和 $c_g(t)$ 等量子光学细节。

Answer 4

首先，我们需要计算 $\hat{V}|\psi(t)\rangle$:

$$\hat{V}|\psi(t)\rangle = \hbar\Omega_R(\sigma^+ + \sigma^-) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})(c_e(t)|e\rangle + c_g(t)|g\rangle)$$

应用升降算符:

$$\sigma^+|g\rangle = |e\rangle, \quad \sigma^-|e\rangle = |g\rangle$$

$$\sigma^+|e\rangle = 0, \quad \sigma^-|g\rangle = 0$$

可得:

$$\hat{V}|\psi(t)\rangle = \hbar\Omega_R [c_g(t)|e\rangle + c_e(t)|g\rangle] \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

现在，计算期待值 $\langle V \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle V \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{V} | \psi(t) \rangle \\ &= (c_e^*(t)\langle e \rangle + c_g^*(t)\langle g \rangle) \hbar\Omega_R [c_g(t)|e\rangle + c_e(t)|g\rangle] \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ &= \hbar\Omega_R [c_e^*(t)c_g(t) + c_g^*(t)c_e(t)] \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ &= 2\hbar\Omega_R \operatorname{Re}(c_e^*(t)c_g(t)) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\end{aligned}$$

对于光场作用在原子上的力，

给定的哈密顿量 V 为:

$$V = 2\hbar\Omega_R \operatorname{Re}(c_e^*(t)c_g(t)) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

力 \mathbf{F} 可以通过对 V 进行梯度运算得到:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = 2\hbar\Omega_R \operatorname{Re}(c_e^*(t)c_g(t)) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{k}$$

估算:

1. 计算重力

重力 F_g 可以通过公式 $F_g = m \cdot g$ 计算，其中 m 是氢原子的质量， g 是重力加速度（约为 9.81 m/s^2 ）。

氢原子的质量 m 约为 $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ （这是质子的质量，因为氢原子主要由一个质子和一个电子组成，电子的质量远小于质子）。

$$F_g = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 1.64 \times 10^{-26} \text{ N}$$

2. 计算光镊力

光镊力 F_{optical} 可以通过电偶极矩 d 与电场 E 的相互作用来估算。电偶极矩 d 给定为 $1.6 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ ，电场强度 E 为 100 V/m 。

光镊力的近似公式为:

$$F_{\text{optical}} \approx d \cdot E$$

$$F_{\text{optical}} \approx 1.6 \times 10^{-29} C \cdot m \times 100 V/m = 1.6 \times 10^{-27} N$$

3. 比较光镊力和重力

现在我们可以比较光镊力和重力的大小，以确定光镊力是重力的多少倍：

$$\text{倍数} = \frac{F_{\text{optical}}}{F_g} = \frac{1.6 \times 10^{-27} N}{1.64 \times 10^{-26} N} \approx 0.098$$

这意味着光镊力大约是重力的 0.098 倍，或者说大约是重力的 9.8%。

第 3 章作业

Question

推导电磁场量子化，即证明出 P₅₈ (3.15) -(3.17)[电磁场哈密顿量和 E、B 算符的表达式]。提示：检验以上证明的主要数学关系（把你认为需要详细推导的步骤推导出来，如验证 P₅₇₋₅₈）。将步骤复述出来，既是理解的必要路子，也是思维整理、升华、继续创新的必由路子。

Answer

电磁场的驻波（正则模）形式

首先考虑一维谐振腔中的电磁场，如 Fig.1 所示。设腔轴沿 z 方向，腔长为 L 。

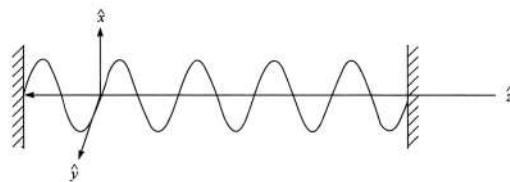


Figure 1: 一维谐振腔中的电磁场

设电场沿 x 方向偏振，即 $E(r, t) = e_x E_x(z, t)$ ，这里 e_x 为 x 方向的单位矢量，将 $E_x(z, t)$ 用正则模（驻波）展开，有

$$E_x(z, t) = \sum_j A_j q_j(t) \sin(k_j z) \equiv \sum_j E_j$$

其中， $k_j = j\pi/L$ ($j = 1, 2, \dots$)（由 $E_x(L, t) = 0, \sin(k_j L) = 0$ 定出）为第 j 个场模的波数，假设 $q_j(t)$ 具有长度的量纲， A_j 为待定常数³。由麦克斯韦方程组可知，对现在考虑的情况，磁场沿 y 方向，即 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_y B_y(z, t)$ ，利用式子

³ 此处的常数将在下页确定

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

有：

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_j A_j q_j(t) \sin(k_j z) \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_j A_j \sin(k_j z) \frac{\partial q_j(t)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_j A_j \sin(k_j z) \frac{p_j(t)}{m_j} \end{aligned}$$

对 z 积分，并利用 $k_j c = \omega_j$ 为第 j 个场模的角频率，有：

$$B_y(z, t) = \frac{1}{c} \sum_j \frac{A_j}{\omega_j} \frac{p_j(t)}{m_j} \cos(k_j z) \equiv \sum_j B_j$$

其中， $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ 为真空中的光速； m_j 具有质量的量纲； $p_j(t)$ 具有动量的量纲。
电磁场的总能量为

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int dv \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int dv \left(\epsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{\mu_0} B_y^2 \right) \\ &= \sum_j \frac{V \epsilon_0 A_j^2}{2m_j \omega_j^2} \left(\frac{1}{2} m_j \omega_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{2m_j} \right) \end{aligned}$$

其中， V 是腔的体积。

计算用到下列积分公式，即

$$\int_0^L dz \sin(k_m z) \sin(k_n z) = \int_0^L dz \cos(k_m z) \cos(k_n z) = \frac{L}{2} \delta_{mn}$$

可见，如果令 $\frac{V \epsilon_0 A_j^2}{2m_j \omega_j^2} = 1$ ，即 $A_j = \sqrt{\frac{2m_j \omega_j^2}{V \epsilon_0}}$ ，则有

$$H = \sum_j \left(\frac{1}{2} m_j \omega_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{2m_j} \right) \equiv \sum_j H_j$$

其中， H_j 为第 j 个场模的能量。

可见，在形式上一个场模与一个一维谐振子相同，因此可仿照一维谐振子的量子化方法把电磁场量子化。将 q_j 和 p_j 看作算符，并令其满足对易关系，即

$$[q_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}, \quad [q_j, q_k] = 0, \quad [p_j, p_k] = 0$$

再引入算符（由后面的讨论可以知道，它们分别是光子的湮灭算符和产生算符），即

$$\begin{aligned} a_j(t) &= \sqrt{\frac{1}{2m_j\hbar\omega_j}} [m_j\omega_j q_j(t) + ip_j(t)] \\ a_j^+(t) &= \sqrt{\frac{1}{2m_j\hbar\omega_j}} [m_j\omega_j q_j(t) - ip_j(t)] \end{aligned}$$

其逆变换为

$$\begin{aligned} q_j &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m_j\omega_j}} (a_j + a_j^+) \\ p_j &= -i\sqrt{\frac{m_j\hbar\omega_j}{2}} (a_j - a_j^+) \end{aligned}$$

a_j 和 a_j^+ 满足对易关系，即

$$[a_j, a_k^+] = \delta_{jk}, \quad [a_j, a_k] = 0, \quad [a_j^+, a_k^+] = 0$$

将 a_j 和 a_j^+ 代入 H_j 、 E_j 和 B_j 的表达式，可得

$$\begin{aligned} H_j &= \frac{1}{2}m_j\omega_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{2m_j} \\ &= \frac{1}{2m_j} [m_j^2\omega_j^2 q_j^2 + p_j^2] \\ &= \frac{1}{2m_j} \{ [m_j\omega_j q_j(t) - ip_j(t)][m_j\omega_j q_j(t) + ip_j(t)] - i[q_j(t), p_j(t)] \} \\ &= \hbar\omega_j \left\{ \sqrt{\frac{1}{2m_j\hbar\omega_j}} [m_j\omega_j q_j(t) + ip_j(t)] \cdot \sqrt{\frac{1}{2m_j\hbar\omega_j}} [m_j\omega_j q_j(t) - ip_j(t)] - i \cdot i \frac{1}{2} \right\} \\ &= \hbar\omega_j (a_j^+ a_j + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_j(z, t) &= A_j q_j(t) \sin(k_j z) \\
&= \sqrt{\frac{2m_j\omega_j^2}{V\varepsilon_0}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2m_j\omega_j}} (a_j + a_j^+) \sin(k_j z) \\
&= \sin(k_j z)[a_j(t) + a_j^+(t)] \\
&= E_j^{(s)} \sin(k_j z)[a_j(t) + a_j^+(t)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_j(z, t) &= \frac{1}{c} \frac{A_j p_j(t)}{\omega_j m_j} \cos(k_j z) \\
&= \frac{1}{c\omega_j m_j} \sqrt{\frac{2m_j\omega_j^2}{V\varepsilon_0}} \cdot -i\sqrt{\frac{m_j\hbar\omega_j}{2}} (a_j - a_j^+) \cos(k_j z) \\
&= -\frac{i}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{V\varepsilon_0}} \cos(k_j z)[a_j(t) - a_j^+(t)] \\
&= -i \frac{E_j^{(s)}}{c} \cos(k_j z)[a_j(t) - a_j^+(t)]
\end{aligned}$$

其中, $E_j^{(s)} = \sqrt{\hbar\omega_j/V\varepsilon_0}$, (s) 表示驻波 (standing wave)。

证毕!

完结撒花! :)

本文档共 12794 个字 (此处字表示为代码), 1864 行代码, 历时 7 天, 40 余小时 (经常打到半夜), 由键盘一个一个公式敲打而成。

全文转成 PDF 共 34 页 A4 纸, 大概相当于 50 页课本, 也就是四分之一本书, 切实花费大量精力, 有编书之感。

其实本作业确实能作为书籍前三章的部分补充, 帮助学生理解书籍中略去的步骤。
共勉!

第 56 页, 共 56 页 — 12794 个字

Figure 2: 文档总字数

2:13
2024/10/22

Figure 3: 完稿时间

量子光学基础及应用 第二次作业

张柏铭*, 3230100298

浙江大学 航空航天学院, 浙江 杭州 310000

第 4 章作业

Question

数学检验、论证（验证）三个光量子态（Fock 数态、相干态、压缩态）基本概念、定义（表达式等）和基本特性（有关数学关系等）。

Answer

1 光子数态 (Fock 态)

引入光子数算符 $\hat{n} = a^\dagger a$ （证明见下），则单模电磁场的哈密顿量算符为 $H = \hbar\omega(n + 1/2)$ 。由于 \hat{n} 和 H 彼此对易，因此两者具有共同本征态，在此共同本征态中，光子数和能量均具有确定的值。我们定义此共同本征态为光子数态，用光子数 n 标记状态。光子数算符 \hat{n} 的本征方程为

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

其中， $n = 0$ 的状态 $|0\rangle$ 称为真空态。

证明过程

利用升降算符的定义，我们可以写出 $a^\dagger a$ 的表达式：

$$a^\dagger a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right) \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right)$$

*Email: zhang-baiming@qq.com

另注：本份练习本人先手写了一遍，为美观起见特地打为 tex 公式。如有遗漏或细节错误之处，系公式输入不慎，望老师谅解！（鞠躬）

展开上式，我们得到：

$$a^\dagger a = \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 + \frac{1}{m^2\omega^2} p^2 - i\frac{p}{m\omega}x + i\frac{x}{m\omega}p \right)$$

利用对易关系 $[x, p] = i\hbar$ ，我们可以进一步简化上式：

$$a^\dagger a = \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 + \frac{1}{m^2\omega^2} p^2 - \frac{\hbar}{m\omega} \right)$$

由于 $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ ，我们可以将 $a^\dagger a$ 表达为 H 的形式：

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2}$$

现在，我们考虑 $a^\dagger a|n\rangle$ ：

$$a^\dagger a|n\rangle = \left(\frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \left(\frac{1}{\hbar\omega} E_n - \frac{1}{2} \right) |n\rangle$$

由于 $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ ，我们可以将上式简化为：

$$a^\dagger a|n\rangle = \hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$$

容易证明（一维谐振子）

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

因此，称 a 为光子湮灭算符， a^\dagger 为光子产生算符。

原式可写成 $|n+1\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n+1}}|n\rangle$ ，利用此递推关系可得

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

这表明一般的光子数态可以由真空态产生。

1.1 电磁场的真空涨落

对于单模电磁场，利用下式，即

$$E(z, t) \equiv E^{(s)} \sin(kz)(ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t})$$

可得

$$\langle E \rangle \equiv \langle n | E(z, t) | n \rangle = 0$$

证明过程

期望值 $\langle E \rangle$ 定义为：

$$\langle E \rangle = \langle n | E(z, t) | n \rangle$$

将 $E(z, t)$ 代入期望值的定义中，我们得到：

$$\langle E \rangle = E^{(s)} \sin(kz) \left(\langle n | a e^{-i\omega t} | n \rangle + \langle n | a^\dagger e^{i\omega t} | n \rangle \right)$$

利用湮灭算符 a 和产生算符 a^\dagger 的作用在粒子数态 $|n\rangle$ 上的性质：

$$\langle n | a | n \rangle = \sqrt{n} \langle n | n - 1 \rangle = 0$$

$$\langle n | a^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} \langle n | n + 1 \rangle = 0$$

因此，我们得到：

$$\langle E \rangle = E^{(s)} \sin(kz) (0 + 0) = 0$$

这证明了对于一个处于确定粒子数态的系统，电场的期望值是零。

$$\langle E^2 \rangle \equiv \langle n | E^2(z, t) | n \rangle = 2(E^{(s)})^2 \sin^2(kz) \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

证明过程

我们需要计算 $E^2(z, t)$ ：

$$E^2(z, t) = (E^{(s)})^2 \sin^2(kz) \left(a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t} \right)^2$$

展开平方项：

$$\left(a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t} \right)^2 = a^2 e^{-2i\omega t} + a a^\dagger + a^\dagger a + (a^\dagger)^2 e^{2i\omega t}$$

由于 $a^2 |n\rangle = 0$ 和 $(a^\dagger)^2 |n\rangle = 0$ ，利用我们计算期望值 $\langle E^2 \rangle$ ：

$$\langle E^2 \rangle = (E^{(s)})^2 \sin^2(kz) \cdot \left(\langle n | a a^\dagger | n \rangle + \langle n | a^\dagger a | n \rangle \right)$$

我们知道 $a a^\dagger |n\rangle = (n+1) |n\rangle$ 和 $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$ ，所以：

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= (E^{(s)})^2 \sin^2(kz) \left(\langle n | a a^\dagger | n \rangle + \langle n | a^\dagger a | n \rangle \right) \\ &= (E^{(s)})^2 \sin^2(kz) ((n+1) + n) \\ &= (E^{(s)})^2 \sin^2(kz) (2n+1) \end{aligned}$$

电磁场的涨落可用其方差描述，即

$$V(E) \equiv \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = 2(E^{(s)})^2 \sin^2(kz) \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

可见，即使对于真空态 $n = 0$ ，电场的方差也不等于零，对应的涨落称为真空涨落。

1.2 电磁场的正交分量算符

引入算符

$$X_1 = \frac{1}{2}(a + a^+)$$

$$X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+)$$

原电场可写成

$$E(z, t) = 2E^{(s)} \sin(kz) [X_1 \cos(\omega t) + X_2 \sin(\omega t)]$$

可见， X_1 和 X_2 分别为余弦项和正弦项的系数算符，因此通常称 X_1 和 X_2 为电磁场的两个正交分量算符，简称正交分量或正交算符（正交分量在讨论压缩态时尤为重要）。由 a 和 a^+ 的对易关系 $[a, a^+] = 1$ ，可得 X_1 和 X_2 的对易关系，即

$$[X_1, X_2] = \frac{i}{2}$$

证明过程

计算对易子 $[X_1, X_2]$ ：

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_1 X_2 - X_2 X_1 \\ &= \left(\frac{1}{2}(a + a^+) \right) \left(\frac{1}{2i}(a - a^+) \right) - \left(\frac{1}{2i}(a - a^+) \right) \left(\frac{1}{2}(a + a^+) \right) \\ &= \frac{1}{4i}(a + a^+)(a - a^+) - \frac{1}{4i}(a - a^+)(a + a^+) \\ &= \frac{1}{4i}(a^2 - aa^+ + a^+a - (a^+)^2) - \frac{1}{4i}(a^2 - aa^+ + a^+a - (a^+)^2) \\ &= \frac{1}{2i}(a^+a - aa^+) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot -1 \\ &= \frac{i}{2} \end{aligned}$$

由不确定度原理

$$V(A)V(B) \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

则有

$$V(X_1)V(X_2) \geq \frac{1}{16}$$

其中, $V(X_i)(i = 1, 2)$ 为正交分量 X_i 的方差。上式取等号的态称为最小不确定度态。

引入标准偏差 $\Delta A \equiv \sqrt{V(A)}$, 原式又可分别表示为

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle |$$

$$(\Delta X_1)(\Delta X_2) \geq \frac{1}{4}$$

证明过程

利用 $X_1 = \frac{1}{2}(a + a^+)$, $X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+)$, 以及 $[a, a^+] = 1$, 有

$$\begin{aligned} X_1^2 &= \frac{1}{4} \left[(2a^\dagger a + 1) + (a^2 + a^{\dagger 2}) \right] \\ X_2^2 &= \frac{1}{4} \left[(2a^\dagger a + 1) - (a^2 + a^{\dagger 2}) \right] \end{aligned}$$

计算可得, 在光子数态 $|n\rangle$ 中正交分量 X_1 和 X_2 的平均值和方差分别为

$$\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle = 0$$

$$V_{\text{Fock}}(X_1) = V_{\text{Fock}}(X_2) = \frac{1}{4}(2n + 1)$$

对真空态 ($n = 0$) 有

$$\Delta X_1 = \frac{1}{2}, \quad \Delta X_2 = \frac{1}{2}, \quad (\Delta X_1)(\Delta X_2) = \frac{1}{4}$$

可见真空态为最小不确定度态, 其量子涨落称为量子噪声极限。

2 相干态

自 1963 年 Glauber 提出光场相干态的概念以来, 相干态获得了广泛的研究和应用。Glauber 也因建立光的量子相干理论获得 2005 年诺贝尔物理学奖, 并被誉为量子光学之父。相干态具有下列性质。

相干态是光子湮灭算符的本征态。相干态定义:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

由于光子湮灭算符 a 不是厄米算符, 因此 α 一般来说是复数, 可表示成 $\alpha = \text{Re}\alpha + i\text{Im}\alpha$ 或 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta} = re^{i\theta}$ 。

2.1 性质 1

相干态可以通过将真空态平移 (或位移) 来产生。

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$$

其中, $D(\alpha)$ 称为平移算符 (或称位移算符), 定义为

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$$

引理

定理 1 (Baker-Hausdorff 定理) 设 A 和 B 是两个彼此非对易的算符, 但满足

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0,$$

则有

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A, B]}.$$

定理 2 设 A 和 B 是两个彼此非对易的算符, x 是 c 数 (经典数), 则有

$$e^{xA} B e^{-xA} = B + x[A, B] + \frac{x^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

平移算符 $D(\alpha)$ 有下列重要性质, 即

$$D^+(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$$

证明过程

要证明位移算符 $D(\alpha)$ 是一个酉算符, 即 $D^\dagger(\alpha)D(\alpha) = D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = I$, 其中 I 是单位算符。

首先, 我们计算 $D(\alpha)$ 的共轭转置 $D^\dagger(\alpha)$:

$$D^\dagger(\alpha) = \left[\exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \right]^\dagger = \exp((\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^\dagger) = \exp(\alpha^* a - \alpha a^\dagger)$$

现在, 我们计算 $D^\dagger(\alpha)D(\alpha)$:

$$D^\dagger(\alpha)D(\alpha) = \exp(\alpha^* a - \alpha a^\dagger) \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$$

利用 BCH 公式, 对于任意两个算符 X 和 Y, 如果 $[X, Y] = cI$ (其中 c 是常数, I 是单位算符), 则:

$$\exp(X) \exp(Y) = \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y])$$

在我们的情况下, $X = \alpha^* a - \alpha a^\dagger$ 和 $Y = \alpha a^\dagger - \alpha^* a$, 且 $[X, Y] = 0$, 因为 a 和 a^\dagger 满足对易关系 $[a, a^\dagger] = 1$ 。因此:

$$D^\dagger(\alpha)D(\alpha) = \exp\left((\alpha^* a - \alpha a^\dagger) + (\alpha a^\dagger - \alpha^* a) + \frac{1}{2}[(\alpha^* a - \alpha a^\dagger), (\alpha a^\dagger - \alpha^* a)]\right)$$

$$D^\dagger(\alpha)D(\alpha) = \exp(0) = I$$

同样地, 我们可以证明 $D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = I$ 。因此, $D(\alpha)$ 是一个酉算符, 其共轭转置 $D^\dagger(\alpha)$ 等于其逆 $D^{-1}(\alpha)$:

$$D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha)$$

我们证明 $D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$:

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \\ D^{-1}(\alpha) &= \exp(-\alpha a^\dagger + \alpha^* a) \\ &= \exp((- \alpha)a^\dagger - (-\alpha)^* a) \\ &= D(-\alpha) \end{aligned}$$

因此, 我们得到 $D^+(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$ 。

$$\begin{aligned} D^+(\alpha)aD(\alpha) &= a + \alpha \\ D^+(\alpha)a^\dagger D(\alpha) &= a^\dagger + \alpha^* \end{aligned}$$

证明过程

利用定理 1, 位移算符可写成下列形式, 即

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} = e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-\frac{1}{2}a^* a} = e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} e^{\frac{1}{2}a^* a}, \\ D^+(\alpha) &= e^{-\frac{1}{2}a^* a} e^{-\alpha a^\dagger} e^{\alpha^* a} = e^{\frac{1}{2}a^* a} e^{\alpha^* a} e^{-\alpha a^\dagger}. \end{aligned}$$

取 $D^+(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}a^* a} e^{-\alpha a^\dagger} e^{\alpha^* a}$, $D(\alpha) = e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} e^{\frac{1}{2}a^* a}$, 则

$$D^+(\alpha)aD(\alpha) = e^{-\alpha a^\dagger} e^{\alpha^* a} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} = e^{-\alpha a^\dagger} a e^{\alpha a^\dagger}.$$

再利用定理 2, 则

$$D^+(\alpha)aD(\alpha) = e^{-\alpha a^\dagger} a e^{\alpha a^\dagger} = a + \alpha.$$

证毕。

$$\begin{aligned} D(\alpha)D(\beta) &= \exp\left[\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)\right]D(\alpha + \beta) \\ &= \exp[i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*)]D(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

或

$$D(\alpha + \beta) = \exp[-i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*)]D(\alpha)D(\beta)$$

证明过程

我们从两个位移算符的乘积开始:

$$D(\alpha)D(\beta) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \exp(\beta a^\dagger - \beta^* a)$$

利用 BCH 公式, 对于两个算符 X 和 Y , 如果 $[X, Y] = cI$ (其中 c 是常数, I 是

单位算符), 则有:

$$\exp(X) \exp(Y) = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]\right)$$

在我们的情况下, $X = \alpha a^\dagger - \alpha^* a$ 和 $Y = \beta a^\dagger - \beta^* a$ 。我们需要计算 $[X, Y]$:

$$[X, Y] = [\alpha a^\dagger - \alpha^* a, \beta a^\dagger - \beta^* a] = \alpha\beta[a^\dagger, a^\dagger] - \alpha\beta^*[a^\dagger, a] - \alpha^*\beta[a, a^\dagger] + \alpha^*\beta^*[a, a]$$

由于 $[a^\dagger, a^\dagger] = 0$, $[a, a] = 0$, 和 $[a, a^\dagger] = 1$, 我们得到:

$$[X, Y] = -\alpha\beta^* + \alpha^*\beta$$

现在我们可以应用 BCH 公式:

$$D(\alpha)D(\beta) = \exp\left(\alpha a^\dagger - \alpha^* a + \beta a^\dagger - \beta^* a + \frac{1}{2}(-\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)\right)$$

即有:

$$D(\alpha)D(\beta) = \exp\left((\alpha + \beta)a^\dagger - (\alpha^* + \beta^*)a + \frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)\right)$$

注意到 $\frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)$ 是纯虚数, 我们可以将其写为 $i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*)$, 其中 Im 表示取虚部。因此, 我们得到:

$$D(\alpha)D(\beta) = \exp[i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*)] \exp[(\alpha + \beta)a^\dagger - (\alpha^* + \beta^*)a] = \exp[i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*)] D(\alpha + \beta)$$

这就完成了证明。位移算符的乘积 $D(\alpha)D(\beta)$ 等于一个相位因子乘以一个单一的位移算符 $D(\alpha + \beta)$ 。

另外, 注意到

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle.$$

2.2 性质 2

相干态 $|\alpha\rangle$ 中的平均光子数 \bar{n} 和光子数方差 $V_{\text{coh}}(n)$ 。

$$\bar{n} \equiv \langle n \rangle_{\text{coh}} \equiv \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha$$

$$\overline{n^2} \equiv \langle n^2 \rangle_{\text{coh}} \equiv \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a a^\dagger a | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha (\alpha^* \alpha + 1) = \bar{n}(\bar{n} + 1)$$

$$V_{\text{coh}}(n) = \langle n^2 \rangle_{\text{coh}} - \langle n \rangle_{\text{coh}}^2 = \bar{n}$$

2.3 性质 3

相干态可以用光子数态展开 (相干态在光子数态表象中的表示)。

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad c_n = \langle n | \alpha \rangle, \quad c_n = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

证明过程

利用：

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

一方面， $\langle n|a|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle = \alpha c_n$ ，另一方面， $\langle n|a|\alpha\rangle = \sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \sqrt{n+1}c_{n+1}$ ，所以 $\sqrt{n+1}c_{n+1} = ac_n$, $c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}c_n$ ，即

$$c_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1}}c_0, c_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}c_1 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}c_0, \dots, c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0$$

利用归一化条件，有

$$1 = \sum_n |c_n|^2 = \sum_n \frac{(\alpha^*\alpha)^n}{n!} |c_0|^2 = e^{\alpha^*\alpha} |c_0|^2$$

可得

$$c_0 = e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$$

于是得

$$c_n = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

证毕。

2.4 性质 4

相干态中的光子数分布服从泊松分布。

$$p_n = |c_n|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$$

其中亚泊松分布和超泊松分布的概念如下。引入 Mandel Q 参数，即

$$Q \equiv \frac{V(n)}{\langle n \rangle} - 1$$

由上面的讨论知道，对相干态， $V(n) = \langle n \rangle$ ，故有 $Q = 0$ ，且相干态的光子数分布为泊松分布。若对某种光场态有 $Q > 0$ ，则称该态的光子数分布为超泊松分布；反之，若对某种光场态有 $Q < 0$ ，则称该态的光子数分布为亚泊松分布。光子数亚泊松分布是光场的一种典型的非经典效应。另外两种典型的非经典效应分别是光子反群聚效应和光场压缩态。

2.5 性质 5

相干态是正交分量的最小不确定度态。

在相干态 $|\alpha\rangle$ 中计算正交分量 X_1 和 X_2 的平均值和标准偏差，可得

$$\langle X_1 \rangle = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*), \quad \langle X_2 \rangle = \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^*)$$

$$\Delta X_1 = \frac{1}{2}, \quad \Delta X_2 = \frac{1}{2}, \quad (\Delta X_1)(\Delta X_2) = \frac{1}{4}$$

可见，在相干态 $|\alpha\rangle$ 中正交分量 X_1 和 X_2 的平均值与 α 的取值有关，而涨落与 α 的取值无关（与在真空态中相同）。相干态也是正交分量的最小不确定度态。

证明过程

计算 X_1 的平均值：

$$\langle X_1 \rangle = \langle \alpha | X_1 | \alpha \rangle = \langle \alpha | \frac{1}{2}(a + a^+) | \alpha \rangle$$

由于 $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ 和 $\langle \alpha | a^+ = (a|\alpha\rangle)^+ = (\alpha|\alpha\rangle)^+ = \langle \alpha | \alpha^*$ ，我们有：

$$\langle X_1 \rangle = \frac{1}{2} (\langle \alpha | a | \alpha \rangle + \langle \alpha | a^+ | \alpha \rangle) = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)$$

考虑到相干态由真空态平移而来，这一结果表明平移算符只改变 X_1 和 X_2 的平均值，而不改变它们的涨落性质。原式有：

$$a = X_1 + iX_2$$

可见，电磁场的正交分量算符 X_1 和 X_2 也可分别看作光子湮灭算符 a 的实部算符和虚部算符。相干态中的平均值为

$$\alpha = \langle X_1 \rangle + i \langle X_2 \rangle$$

两个本征值不同的相干态是不正交的。

设有两个本征值分别为 α 和 β 的相干态 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ ，容易证明

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \beta^* \alpha \right]$$

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2)$$

可见，两个本征值不同的相干态是不正交的。只有当 $|\alpha - \beta| \gg 0$ 时，相干态 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 才可近似看做是正交的。

证明过程

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \langle\beta| = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_m \frac{\beta^{*m}}{\sqrt{m!}} \langle m| \\
\langle\beta|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{m,n} \frac{\beta^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{m,n} \frac{\beta^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \delta_{nm} \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\beta^{*n}\alpha^n}{n!} \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\beta^*\alpha} \\
&= \exp \left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \beta^*\alpha \right]
\end{aligned}$$

相干态构成一个完备集（有时也称为超完备集），从而构成一个表象。

不难证明如下的完备性关系，即

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = I$$

由于 a 的取值是连续的，因此相干态表象是一个连续表象。

证明过程

设 $\alpha = re^{i\theta}$ ，则 $d^2\alpha = r dr d\theta$ 。

$$\begin{aligned}
\int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| &= \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-|\alpha|^2} \sum_{m,n} \frac{\alpha^m \alpha^{*n}}{\sqrt{m!n!}} |m\rangle\langle n| \\
&= \sum_{m,n} \frac{|m\rangle\langle n|}{\sqrt{m!n!}} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2} r^{m+n} e^{i(m-n)\theta} \\
&= \sum_{m,n} \frac{|m\rangle\langle n|}{\sqrt{m!n!}} \int_0^\infty r dr e^{-r^2} r^{m+n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(m-n)\theta} \\
&= \pi \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_0^\infty dr^2 e^{-r^2} r^{2n} \\
&= \pi \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_0^\infty dy e^{-y} y^n \\
&= \pi \sum_n |n\rangle\langle n| \\
&= \pi I
\end{aligned}$$

即 $\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = I$ （计算中利用了 $\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(m-n)\theta} = 2\pi \delta_{mn}$, $\int_0^\infty dy e^{-y} y^n = n!$ ）。

相干态表象在量子光学中有着重要而广泛的应用，例如基于连续变量的量子信息处理就是利用相干态和下节将要讨论的压缩态。

在量子信息处理中经常要用到单光子态，一种常用的产生单光子态的方法是将激光进行衰减。理想的激光处于相干态，即

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} (|0\rangle + \alpha|1\rangle + \dots)$$

当 α 较小时， $|\alpha\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}(|0\rangle + \alpha|1\rangle)$ ，得到的单光子态的概率为 $P_1 = \frac{|\alpha|^2}{1+|\alpha|^2} = \frac{\langle n \rangle}{1+\langle n \rangle}$ 。若 $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = 0.1$ ，则 $P_1 = 0.1/1.1 \approx 0.09 = 9\%$ 。

求单光子态的概率精确解

单光子态的概率 P_1 是指在相干态 $|\alpha\rangle$ 中找到恰好一个光子的概率。这可以通过计算相干态中 $|1\rangle$ 项的系数的模平方来得到：

$$P_1 = |c_1|^2$$

其中 c_1 是 $|1\rangle$ 项的系数。根据相干态的定义，我们有：

$$c_1 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha}{\sqrt{1!}} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \alpha$$

因此，单光子态的概率为：

$$P_1 = |c_1|^2 = \left| e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \alpha \right|^2 = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^2$$

若 $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = 0.1$ ，则 $P_1 = 0.1e^{-0.1} \approx 0.0904837$ ，原书近似后与精确偏差 0.47%，可见该近似还是十分准确的。

将激光进行衰减得到的单光子源属于概率性的单光子源，不是理想的单光子源，目前许多学者致力于从实验上实现确定性的单光子源—光子枪 (photon gun)。

3 压缩态

从前面的讨论可知，真空态和相干态均为正交分量的最小不确定度态，即在真空态和相干态中，电磁场正交算符 X_1 和 X_2 的标准偏差满足下式，即

$$\Delta X_1 = \frac{1}{2}, \quad \Delta X_2 = \frac{1}{2}, \quad (\Delta X_1)(\Delta X_2) = \frac{1}{4}$$

其中， $X_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger)$; $X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^\dagger)$ 。

在压缩态概念提出之前，人们认为 $\Delta X_i = 1/2(i = 1 \text{ 或 } 2)$ 是量子涨落可能达到的最小值，并称其为量子涨落极限。后来人们提出是否存在这样的量子态，在不违背不确定度关系 $(\Delta X_1)(\Delta X_2) \geq 1/4$ 的情况下，使得 $\Delta X_i < 1/2(i = 1 \text{ 或 } 2)$ 。研究表明，这样的量子态是存在的，人们把这种量子态称为压缩态 (squeezed states)。

当光场处于压缩态时，其一个正交分量的量子涨落小于真空涨落，因此人们期望压缩态在微弱信号检测、引力波探测、精密测量、光通信、量子信息处理等中有重要应用，从而对其进行了广泛深入的研究。

下面分别讨论若干种压缩态。

3.1 压缩真空态

压缩真空态的定义及压缩算符的性质：

首先考虑压缩真空态，即

$$|\xi\rangle = S(\xi)|0\rangle$$

其中

$$S(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi^*a^2 - \xi(a^\dagger)^2)\right]$$

称为压缩算符； $\xi = re^{i\theta}$ ， ξ 称为压缩参量； $0 \leq r < \infty$ ，称为压缩幅，描述压缩的强弱； $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，称为压缩角，描述压缩的方向。

压缩算符具有下列性质，即

$$\begin{aligned} S^+(\xi) &= S^{-1}(\xi) = S(-\xi) \\ S^+(\xi)aS(\xi) &= a \cosh r - a^+ e^{i\theta} \sinh r \\ S^+(\xi)a^+S(\xi) &= a^+ \cosh r - a e^{-i\theta} \sinh r \end{aligned}$$

证明过程

需要计算 $e^{-\frac{1}{2}(\xi^*a^2 - \xi(a^\dagger)^2)}ae^{\frac{1}{2}(\xi^*a^2 - \xi(a^\dagger)^2)}$ ，证明如下：

设 A 和 B 是两个彼此不对易的算符， x 是一个经典数。根据定理 2，我们有：

$$e^{xA}Be^{-xA} = B + x[A, B] + \frac{x^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots$$

现在，我们选择特定的算符 A 和 B 。令 $x = 1$ ， $B = a$ ，并定义 A 为：

$$A = \frac{1}{2}(\xi a^{+2} - \xi^* a^2)$$

其中 $\xi = re^{i\theta}$ 。

首先计算

$$[a^{+2}, a] = a^{+2}a - aa^{+2} = a^+(aa^+ - 1) - aa^+a^+ = a^+aa^+ - aa^+a^+ - a^+ = -2a^+$$

$$[a^2, a^+] = a^2a^+ - a^+a^2 = a(a^+a + 1) - a^+aa = aa^+a + a - a^+aa = 2a$$

故有：

$$\begin{aligned} [A, B] &= \frac{1}{2}\xi[a^{+2}, a] = -\xi a^+ \\ [A, [A, B]] &= \frac{1}{2}\xi\xi^*[a^2, a^+] = \xi\xi^*a \end{aligned}$$

回代我们有：

$$\begin{aligned} S^+(\xi)aS(\xi) &= e^{-\frac{1}{2}(\xi^*a^2 - \xi(a^\dagger)^2)}ae^{\frac{1}{2}(\xi^*a^2 - \xi(a^\dagger)^2)} \\ &= a + (-\xi a^+) + \frac{1}{2!}(\xi \xi^* a) + \frac{1}{3!}(-\xi^2 \xi^* a) + \dots \end{aligned}$$

其中根据定义压缩参量 $\xi = re^{i\theta}$ 和 $\xi^* = re^{-i\theta}$ 。这样，级数可以重写为：

$$a(1 - \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} - \dots) - a^+(re^{i\theta} - \frac{r^3 e^{i\theta}}{3!} + \frac{r^5 e^{i\theta}}{5!} - \dots)$$

这个级数可以被看作是两个级数的和，一个涉及 a ，另一个涉及 a^+ 。这两个级数实际上是双曲余弦（cosh）和双曲正弦（sinh）函数的泰勒级数展开：

$$\begin{aligned} \cosh r &= 1 - \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} - \dots \\ \sinh r &= r - \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

将这些级数与 $e^{i\theta}$ 相乘，我们最终得到：

$$S^+(\xi)aS(\xi) = a \cosh r - a^+ e^{i\theta} \sinh r$$

证毕！

压缩真空态中的平均光子数和光子数方差

可以证明，在压缩真空态中的平均光子数为

$$\langle n \rangle = \sinh^2 r$$

光子数方差为

$$V(n) = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = 2 \sinh^2 r \cosh^2 r = 2\langle n \rangle(1 + \langle n \rangle) > \langle n \rangle$$

这表明，在压缩真空态中，光子数分布呈现超泊松分布。

证明过程

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \langle a^+ a \rangle = \langle \xi | a^+ a | \xi \rangle = \langle 0 | S^+ a^+ a S | 0 \rangle = \langle 0 | (S^+ a^+ S)(S^+ a S) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (a^+ \cosh r - a e^{-i\theta} \sinh r)(a \cosh r - a^+ e^{i\theta} \sinh r) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2 r \\ \langle n^2 \rangle &= \langle (a^+ a)^2 \rangle = \langle \xi | a^+ a a^+ a | \xi \rangle = \langle 0 | S^+ a^+ a a^+ a S | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (S^+ a^+ S)(S^+ a S)(S^+ a^+ S)(S^+ a S) | 0 \rangle \\ &= 2 \sinh^2 r \cosh^2 r + \sinh^4 r \end{aligned}$$

压缩真空态中正交算符 X_1 和 X_2 的平均值和方差分别为

$$\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle = 0$$

$$V(X_1) = \frac{1}{4}(\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \sinh r \cosh r \cos \theta) = \frac{1}{4}(2 \sinh^2 r + 1 - 2 \sinh r \cosh r \cos \theta)$$

$$V(X_2) = \frac{1}{4}(\cosh^2 r + \sinh^2 r + 2 \sinh r \cosh r \cos \theta) = \frac{1}{4}(2 \sinh^2 r + 1 + 2 \sinh r \cosh r \cos \theta)$$

证明过程

$$X_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger), \quad X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^\dagger)$$

$$X_1^2 = \frac{1}{4}[(2a^\dagger a + 1) + (a^2 + (a^\dagger)^2)]$$

$$X_2^2 = \frac{1}{4}[(2a^\dagger a + 1) - (a^2 + (a^\dagger)^2)]$$

$$\langle X_1 \rangle = \frac{1}{2}(\langle a \rangle + C.C.), \quad \langle X_2 \rangle = \frac{1}{2i}(\langle a \rangle - C.C.)$$

$$\langle X_1^2 \rangle = \frac{1}{4}[(2\langle a^\dagger a \rangle + 1) + (\langle a^2 \rangle + C.C.)]$$

$$\langle X_2^2 \rangle = \frac{1}{4}[(2\langle a^\dagger a \rangle + 1) - (\langle a^2 \rangle + C.C.)]$$

可见，为了计算 $V(X_i)$ ，只需要计算 $\langle a \rangle$, $\langle a^2 \rangle$ 和 $\langle a^\dagger a \rangle$ 。

$$\langle a \rangle = \langle \xi | a | \xi \rangle = \langle 0 | S^\dagger a S | 0 \rangle = \langle 0 | (a \cosh r - a^\dagger e^{i\theta} \sinh r) | 0 \rangle = 0$$

可见，在压缩真空态中 $\langle a \rangle = 0$ ，后面经常用到这一结果，所以 $\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle = 0$ 。
另外，由

$$\begin{aligned} \langle a^2 \rangle &= \langle \xi | a a | \xi \rangle \\ &= \langle 0 | S^\dagger a S S^\dagger a S | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (a \cosh r - a^\dagger e^{i\theta} \sinh r)(a \cosh r - a^\dagger e^{i\theta} \sinh r) | 0 \rangle \\ &= -\cosh r \cdot e^{i\theta} \sinh r \end{aligned}$$

$$(\langle a^2 \rangle + C.C.) = -2 \cosh r \cdot \sinh r \cdot \cos \theta$$

$$\langle a^\dagger a \rangle = \sinh^2 r$$

将 $\langle a^2 \rangle$ 和 $\langle a^\dagger a \rangle$ 的表达式代入 $\langle X_i^2 \rangle (i = 1, 2)$ ，然后再代入 $V(X_i)$ ，即可上述两式。

特别的，当 $\theta = 0$ 时，有

$$V(X_1) = \frac{1}{4}e^{-2r}, \quad V(X_2) = \frac{1}{4}e^{2r}$$

相应的标准偏差为

$$\Delta X_1 = \frac{1}{2}e^{-r}, \quad \Delta X_2 = \frac{1}{2}e^r, \quad (\Delta X_1)(\Delta X_2) = \frac{1}{4}$$

可见, 当 $\theta = 0$ 时, 正交算符 X_1 的涨落压缩, 而正交算符 X_2 的涨落增大。

由类似讨论可知, 当 $\theta = \pi$ 时, 正交算符 X_2 的涨落压缩, 而正交算符 X_1 的涨落增大。

为了描述在一般方向的压缩, 引入下列旋转正交分量, 即

$$Y_1 = \cos \frac{\theta}{2} X_1 + \sin \frac{\theta}{2} X_2$$

$$Y_2 = -\sin \frac{\theta}{2} X_1 + \cos \frac{\theta}{2} X_2$$

若用 a 和 a^+ 表示, 则有

$$Y_1 = \frac{1}{2} \left(a e^{-i\theta/2} + a^+ e^{i\theta/2} \right)$$

$$Y_2 = \frac{1}{2i} \left(a e^{-i\theta/2} - a^+ e^{i\theta/2} \right)$$

计算可得, 在压缩真空态中, 算符 Y_1 和 Y_2 的平均值和标准偏差分别为

$$\langle Y_1 \rangle = \langle Y_2 \rangle = 0$$

$$\Delta Y_1 = \frac{1}{2}e^{-r}, \quad \Delta Y_2 = \frac{1}{2}e^r, \quad (\Delta Y_1)(\Delta Y_2) = \frac{1}{4}$$

可见压缩真空态也是最小不确定度态 (尽管不要求一般压缩态是最小不确定度态)。

3.2 压缩真空态满足的本征方程

可以证明, 压缩真空态 $|\xi\rangle$ 满足下列本征方程, 即

$$(\mu a + \nu a^\dagger)|\xi\rangle = 0$$

其中 $\mu = \cosh r$, $\nu = e^{i\theta} \sinh r$

也就是说, 压缩真空态 $|\xi\rangle$ 是算符 $(\mu a + \nu a^\dagger)$ 的本征态, 相应的本征值等于 0。

证明过程

由于湮灭算符作用在真空态上为 0:

$$a|0\rangle = 0$$

$$S(\xi)aS^\dagger(\xi)S(\xi)|0\rangle = 0$$

$$(a \cosh r + a^\dagger e^{i\theta} \sinh r)|\xi\rangle = 0$$

即

$$(\mu a + \nu a^\dagger)|\xi\rangle = 0$$

3.3 压缩真空态的光子数分布

压缩真空态可以用光子数态展开为（压缩真空态在光子数态表象中的表示）

$$|\xi\rangle = \sum_m C_{2m} |2m\rangle$$

其中

$$C_{2m} = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} (-1)^m \left(\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh r \right)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{m!}$$

可见，在压缩真空态中只可能探测到偶数个光子，其光子数概率分布为

$$P_{2m} = |C_{2m}|^2 = \frac{1}{\cosh r} \left(\frac{1}{2} \tanh r \right)^{2m} \frac{(2m)!}{(m!)^2}$$

证明过程

设 $|\xi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$ ，代入 $(\mu a + \nu a^\dagger)|\xi\rangle = 0$ ，得

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu a + \nu a^\dagger) \sum_n C_n |n\rangle \\ &= \sum_n C_n (\mu \sqrt{n} |n-1\rangle + \nu \sqrt{n+1} |n+1\rangle) \\ &= \sum_n [\mu \sqrt{n+1} C_{n+1} + \nu \sqrt{n} C_{n-1}] |n\rangle \end{aligned}$$

要使上式成立，要求

$$\mu \sqrt{n+1} C_{n+1} + \nu \sqrt{n} C_{n-1} = 0$$

即

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= -\frac{\nu}{\mu} \sqrt{\frac{n}{n+1}} C_{n-1} \\ C_2 &= -\frac{\nu}{\mu} \sqrt{\frac{1}{2}} C_0 \\ C_4 &= -\frac{\nu}{\mu} \sqrt{\frac{3}{4}} C_2 = \left(-\frac{\nu}{\mu}\right)^2 \sqrt{\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}} C_0 \cdots \\ C_{2m} &= \left(-\frac{\nu}{\mu}\right)^m \sqrt{\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}} C_0, \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

C_0 由归一化条件确定, 即

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{m=0}^{\infty} |C_{2m}|^2 \\
&= [|C_0|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} |C_{2m}|^2] \\
&= |C_0|^2 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left| -\frac{\nu}{\mu} \right|^{2m} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right] \\
&= |C_0|^2 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} (\tanh r)^{2m} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right] \\
&= |C_0|^2 (1 - (\tanh r)^2)^{-1/2} \\
&= |C_0|^2 \cosh r
\end{aligned}$$

因此, $C_0 = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}}$, 从而

$$C_{2m} = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} (-e^{i\theta} \tanh r)^m \sqrt{\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}}, \quad m \geq 1$$

再利用

$$\begin{aligned}
(2m)!! &= 2^m m!, \\
(2m-1)!! &= \frac{1}{2^m} \frac{(2m)!}{m!}, \\
\sqrt{\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}} &= \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!}
\end{aligned}$$

则有

$$C_{2m} = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} (-e^{i\theta} \tanh r)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!}, \quad m \geq 1$$

在上面计算中用到了下式, 即

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} z^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = (1-z)^{-1/2}$$

证毕。

4 平移压缩真空态

4.1 平移压缩真空态的定义

$$|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle = D(\alpha)|\xi\rangle$$

其中, $D(\alpha)$ 和 $S(\xi)$ 分别是前面引入的平移算符和压缩算符。

当 $\alpha = 0$ 时, 平移压缩真空态变为压缩真空态, 即

$$|0, \xi\rangle = D(0)S(\xi)|0\rangle = S(\xi)|0\rangle = |\xi\rangle$$

当 $\xi = 0$ 时, 平移压缩真空态变为相干态, 即

$$|\alpha, 0\rangle = D(\alpha)S(0)|0\rangle = D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$$

4.2 平移压缩真空态中的平均光子数为

$$\langle n \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r$$

它由相干部分 (平移部分) $|\alpha|^2$ 和压缩部分 $\sinh^2 r$ 相加而成。

证明过程

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \langle a^\dagger a \rangle \\ &= \langle \alpha, \xi | a^\dagger a | \alpha, \xi \rangle \\ &= \langle \xi | D^\dagger(\alpha) a^\dagger a D(\alpha) | \xi \rangle \\ &= \langle \xi | D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) | \xi \rangle \\ &= \langle \xi | (a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha) | \xi \rangle \\ &= \langle \xi | (a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + \alpha^* \alpha) | \xi \rangle \\ &= \sinh^2 r + \alpha^* \alpha \\ &= |\alpha|^2 + \sinh^2 r \end{aligned}$$

证毕。

4.3 在平移压缩真空态中旋转正交分量 Y_1 和 Y_2 的平均值分别为

$$\begin{aligned} \langle Y_1 \rangle &= \frac{1}{2} (\alpha e^{-i\theta/2} + \alpha^* e^{i\theta/2}) \\ \langle Y_2 \rangle &= \frac{1}{2i} (\alpha e^{-i\theta/2} - \alpha^* e^{i\theta/2}) \end{aligned}$$

证明过程

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2} (a e^{-i\theta/2} + a^\dagger e^{i\theta/2}) \\ \langle Y_1 \rangle &= \frac{1}{2} \left(\langle a \rangle e^{-i\theta/2} + \text{c. c.} \right) \end{aligned}$$

$$\langle a \rangle = \langle \alpha, \xi | a | \alpha, \xi \rangle = \langle \xi | D^+(\alpha) a D(\alpha) | \xi \rangle = \langle \xi | (a + \alpha) | \xi \rangle = \alpha$$

平移压缩真空态的标准偏差与在压缩真空态中相同。我们再次看到，平移算符只改变正交分量算符 Y_1 和 Y_2 在量子态中的平均值，而不改变涨落性质。

4.4 平移压缩真空态满足的本征方程

平移压缩真空态 $|\alpha, \xi\rangle$ 满足如下本征方程，即

$$(\mu a + \nu a^+) |\alpha, \xi\rangle = (\mu a + \nu a^*) |\alpha, \xi\rangle$$

也就是说，平移压缩真空态 $|\alpha, \xi\rangle$ 是算符 $(\mu a + \nu a^+)$ 的本征态，相应的本征值等于 $(\mu a + \nu a^*)$ 。

证明过程

$$\begin{aligned} a|0\rangle &= 0 \\ aS^+S|0\rangle &= 0 \\ aS^+D^+DS|0\rangle &= 0 \\ DSaS^+D^+DS|0\rangle &= DSaS^+D^+|\alpha, \xi\rangle = 0 \\ D(\mu a + \nu a^+)D^+|\alpha, \xi\rangle &= 0 \\ [\mu(a - a) + \nu(a^+ - a^*)]|\alpha, \xi\rangle &= 0 \end{aligned}$$

移项可得

$$(\mu a + \nu a^+) |\alpha, \xi\rangle = (\mu a + \nu a^*) |\alpha, \xi\rangle$$

证毕。

4.5 平移压缩真空态的光子数分布

可以证明，平移压缩真空态可以用光子数态展开为

$$|\alpha, \xi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$$

其中

$$C_n = \frac{\left(\frac{1}{2}e^{i\theta} \tanh r\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n! \cosh r}} e^{-\frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}\tanh r \alpha^{*2} e^{i\theta}} H_n \left\{ \beta \left[e^{i\theta} \sinh(2r) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

其光子数统计分布为

$$P_n = |C_n|^2 = \frac{\left(\frac{1}{2} \tanh r\right)^n}{n! \cosh r} e^{-|a|^2 - \frac{1}{2}\tanh r (\alpha^{*2} e^{i\theta} + \alpha^2 e^{-i\theta})} \left| H_n \left\{ \beta \left[e^{i\theta} \sinh(2r) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \right|^2$$

其中， $H_n(z)$ 是宗量为 z 的 n 次厄米多项式，即

$$\beta = \mu a + \nu a^* = \cosh r \alpha + e^{i\theta} \sinh r \alpha^*$$

4.6 压缩相干态

压缩相干态（曾称为双光子相干态）定义为

$$S(\xi)|a\rangle = S(\xi)D(a)|0\rangle$$

其中， $S(\xi)$ 和 $D(a)$ 分别是前面引入的压缩算符和平移算符。

与平移压缩真空态比较，压缩算符和平移算符调换了次序（对应于两个物理过程的先后次序作了调换）。一般来说，压缩算符和平移算符互不对易，因此压缩相干态不等于平移压缩真空态，即

$$S(\xi)|a\rangle \equiv S(\xi)D(a)|0\rangle \neq D(a)S(\xi)|0\rangle$$

但是可以证明

$$S(\xi)|\beta\rangle \equiv S(\xi)D(\beta)|0\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle$$

其中， β 与 a 之间的关系由式给出。

因此，经过适当的参数变换，压缩相干态可化作平移压缩真空态，从这个意义上来说，二者是等价的。

Question

相干态的近似正交和超完备性的验证 (pp. 70-71)。

Answer

已证

Question

对压缩态的压缩性意义体现 (p. 74(4.46)) 的验证 (数学复述)。

Answer

已证

Question

数学检验 4.3 节“光学分束器”经典描述、量子力学描述的数学理论机制和结论 (把你认为需要详细推导的步骤推导出来)；验证 (复述) p. 100-101 “光学分束器对电磁场量子态的变换”此量子信息论四个典型实验例子中的数学推导。

Answer

4.3 光学分束器的理论描述及其对电磁场量子态的变换

在量子光学实验中经常要用到光学分束器及其对电磁场量子态的变换，因此我们对这一问题作一些简单介绍。

4.3.1 光学分束器的经典描述

在经典光学中，常用光学分束器将入射光束分成透射部分和反射部分，如下图。

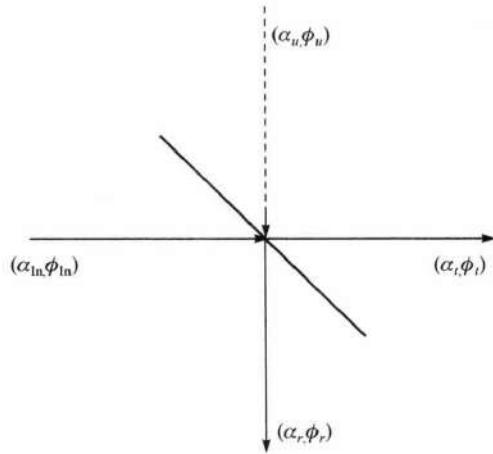


Figure 1: 经典光学分束器示意图

设光学分束器的强度反射系数为 r ，透射系数为 $t = 1 - r$ ，入射光、透射光、反射光的振幅和位相分别为 (α_{In}, ϕ_{In}) 、 (α_t, ϕ_t) 和 (α_r, ϕ_r) ，当不考虑 u 光（上图中用虚线表示）时，有

$$\alpha_r = \sqrt{r} \alpha_{In} e^{i\phi_{In,r}}, \quad \alpha_t = \sqrt{1-r} \alpha_{In} e^{i\phi_{In,t}}$$

其中， $\phi_{j,k}$ 是相对位相。

强度关系为

$$|\alpha_r|^2 = r |\alpha_{In}|^2, \quad |\alpha_t|^2 = (1-r) |\alpha_{In}|^2$$

满足能量守恒条件为

$$|\alpha_r|^2 + |\alpha_t|^2 = |\alpha_{In}|^2$$

考虑 u 光，并设其振幅和位相分别为 (α_u, ϕ_u) ，则有

$$\alpha_r = \sqrt{r}\alpha_{\text{In}}e^{i\phi_{\text{In},r}} + \sqrt{1-r}\alpha_u e^{i\phi_{\text{In},r}}$$

$$\alpha_t = \sqrt{1-r}\alpha_{\text{In}}e^{i\phi_{\text{In},t}} + \sqrt{r}\alpha_u e^{i\phi_{u,t}}$$

能量守恒条件 $|\alpha_r|^2 + |\alpha_t|^2 = |\alpha_{\text{In}}|^2 + |\alpha_u|^2$ 要求

$$e^{i(\phi_{\text{In},t} - \phi_{u,t})} + e^{i(\phi_{\text{In},r} - \phi_{u,r})} = 0$$

补充过程

首先，我们计算 $|\alpha_r|^2$ 和 $|\alpha_t|^2$:

$$|\alpha_r|^2 = (\sqrt{r}\alpha_{\text{In}}e^{i\phi_{\text{In},r}} + \sqrt{1-r}\alpha_u e^{i\phi_{\text{In},r}})(\sqrt{r}\alpha_{\text{In}}^*e^{-i\phi_{\text{In},r}} + \sqrt{1-r}\alpha_u^* e^{-i\phi_{\text{In},r}})$$

$$|\alpha_t|^2 = (\sqrt{1-r}\alpha_{\text{In}}e^{i\phi_{\text{In},t}} + \sqrt{r}\alpha_u e^{i\phi_{u,t}})(\sqrt{1-r}\alpha_{\text{In}}^*e^{-i\phi_{\text{In},t}} + \sqrt{r}\alpha_u^* e^{-i\phi_{u,t}})$$

展开这些表达式，我们得到:

$$|\alpha_r|^2 = r|\alpha_{\text{In}}|^2 + (1-r)|\alpha_u|^2 + 2\sqrt{r(1-r)}\text{Re}(\alpha_{\text{In}}\alpha_u^* e^{i(\phi_{\text{In},r} - \phi_{u,r})})$$

$$|\alpha_t|^2 = (1-r)|\alpha_{\text{In}}|^2 + (1-r)|\alpha_u|^2 + 2(1-r)\text{Re}(\alpha_{\text{In}}\alpha_u^* e^{i(\phi_{\text{In},t} - \phi_{u,t})})$$

将这两个表达式相加，并使用能量守恒条件，我们得到:

$$\begin{aligned} r|\alpha_{\text{In}}|^2 + (1-r)|\alpha_u|^2 + 2\sqrt{r(1-r)}\text{Re}(\alpha_{\text{In}}\alpha_u^* e^{i(\phi_{\text{In},r} - \phi_{u,r})}) + (1-r)|\alpha_{\text{In}}|^2 + (1-r)|\alpha_u|^2 \\ + 2(1-r)\text{Re}(\alpha_{\text{In}}\alpha_u^* e^{i(\phi_{\text{In},t} - \phi_{u,t})}) = |\alpha_{\text{In}}|^2 + |\alpha_u|^2 \end{aligned}$$

简化后，我们得到:

$$2[\sqrt{r(1-r)} + (1-r)]\text{Re}(\alpha_{\text{In}}\alpha_u^* e^{i(\phi_{\text{In},t} - \phi_{u,t})}) = 0$$

由于 α_{In} 和 α_u 是复数，我们可以将实部的系数提取出来，得到:

$$[\sqrt{r(1-r)} + (1-r)]e^{i(\phi_{\text{In},t} - \phi_{u,t})} = 0$$

为了使这个等式成立，我们需要:

$$e^{i(\phi_{\text{In},t} - \phi_{u,t})} + e^{i(\phi_{\text{In},r} - \phi_{u,r})} = 0$$

这个条件意味着两个相位差的指数项必须相互抵消，这通常发生在两个相位差之和为 π 的奇数倍时，即 $(\phi_{\text{In},t} - \phi_{u,t}) - (\phi_{\text{In},r} - \phi_{u,r}) = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

通常取 $\phi_{u,t} = \pi$, 其他的等于零, 则原式简化成

$$\alpha_r = \sqrt{r}\alpha_{\text{In}} + \sqrt{1-r}\alpha_u$$

$$\alpha_t = \sqrt{1-r}\alpha_{\text{In}} - \sqrt{r}\alpha_u$$

值得指出的是, 相对位相 $\phi_{j,k}$ 的值除了这种取法外, 在不违背能量守恒条件下还可以有其他取法。例如, 若取 $\phi_{u,r} = \phi_{\text{In},t} = 0, \phi_{\text{In},r} = \phi_{u,t} = \pi/2$, 则有

$$\alpha_r = i\sqrt{r}\alpha_{\text{In}} + \sqrt{1-r}\alpha_u$$

$$\alpha_t = \sqrt{1-r}\alpha_{\text{In}} + i\sqrt{r}\alpha_u$$

若取 $r = \frac{1}{2}$, 则可得

$$\alpha_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_u + i\alpha_{\text{In}}), \quad \alpha_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_{\text{In}} + i\alpha_u)$$

4.3.2 光学分束器的量子力学描述

光学分束器的量子力学模型如下图所示。其中 $a_k(k = \text{In}, u, r, t)$ 为相应光束的光子湮灭算符。

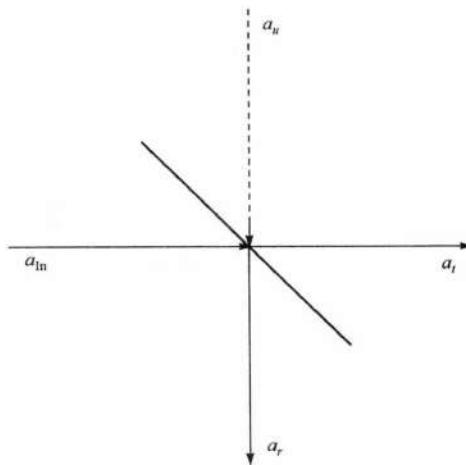


Figure 2: 量子模型光学分束器示意图

假设没有光束 a_u , 则

$$a_r = \sqrt{r}a_{\text{In}}, \quad a_t = \sqrt{1-r}a_{\text{In}}$$

容易证明, 上式不能保证光子湮灭算符和产生算符之间的对易关系, 因此是不正确的。

补充过程

在光学分束器的量子力学模型中，如果假设没有光束 a_u ，那么输出模式 a_r 和 a_t 与输入模式 a_{In} 的关系为：

$$a_r = \sqrt{r}a_{\text{In}}, \quad a_t = \sqrt{1-r}a_{\text{In}}$$

我们需要检查这些关系是否保持了对易关系。首先，我们计算 a_r 和 a_t 的对易子：

$$[a_r, a_t^\dagger] = [\sqrt{r}a_{\text{In}}, (\sqrt{1-r}a_{\text{In}}^\dagger)] = \sqrt{r(1-r)} [a_{\text{In}}, a_{\text{In}}^\dagger]$$

由于 $[a_{\text{In}}, a_{\text{In}}^\dagger] = 1$ ，我们得到：

$$[a_r, a_t^\dagger] = \sqrt{r(1-r)}$$

然而，因为 a_r 和 a_t 代表不同的模式，为了满足对易关系，我们需要 $[a_r, a_t^\dagger] = 0$ 。

显然， $\sqrt{r(1-r)} \neq 0$ 除非 $r = 0$ 或 $r = 1$ ，这与我们的假设不符。

此外，我们还需要检查 a_r 和 a_t 与 a_{In} 的对易关系：

$$[a_r, a_{\text{In}}^\dagger] = [\sqrt{r}a_{\text{In}}, a_{\text{In}}^\dagger] = \sqrt{r} [a_{\text{In}}, a_{\text{In}}^\dagger] = \sqrt{r}$$

$$[a_t, a_{\text{In}}^\dagger] = [\sqrt{1-r}a_{\text{In}}, a_{\text{In}}^\dagger] = \sqrt{1-r} [a_{\text{In}}, a_{\text{In}}^\dagger] = \sqrt{1-r}$$

这些结果表明， a_r 和 a_t 与 a_{In} 的对易关系也不满足 $[a, a^\dagger] = 1$ 的要求。

因此，原始的假设 $a_r = \sqrt{r}a_{\text{In}}$ 和 $a_t = \sqrt{1-r}a_{\text{In}}$ 不能保证光子湮灭算符和产生算符之间的对易关系，所以是不正确的。正确的关系应该满足所有模式之间的对易关系，并且考虑到可能存在的其他模式，如 a_u 。

这表明在量子力学模型中，两个入射光束都是必要的，尽管其中一束往往处于真空态（这与经典模型形成强烈对照）。经典式子应修正为

$$a_r = \sqrt{r}a_{\text{In}} + \sqrt{1-r}a_u$$

$$a_t = \sqrt{1-r}a_{\text{In}} - \sqrt{r}a_u$$

4.3.3 光学分束器对电磁场量子态的变换

在抓住问题本质的情况下，我们考虑 $r = \frac{1}{2}$ 的简单情况（所谓的 50:50 分束器）。在这种情况下，上述两式简化为

$$a_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\text{In}} + a_u)$$

$$a_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\text{In}} - a_u)$$

我们常用到的是逆变换，即

$$a_{\text{In}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_r^+ + a_t^+)$$

$$a_u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_r^+ - a_t^+)$$

情况 1. 设入射态为 $|1\rangle_{\text{In}}|0\rangle_u$ ，则量子态的变换过程为

$$|1\rangle_{\text{In}}|0\rangle_u = a_{\text{In}}^+|0\rangle_{\text{In}}|0\rangle_u$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(a_r^+ + a_t^+)|0\rangle_r|0\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_r|0\rangle_t + |0\rangle_r|1\rangle_t)$$

可见，反射光束和透射光束处于单光子态和真空态的纠缠态。

情况 2. 设入射态为 $|2\rangle_{\text{In}}|0\rangle_u$ ，则量子态的变换过程为

$$|2\rangle_{\text{In}}|0\rangle_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\text{In}}^+)^2|0\rangle_{\text{In}}|0\rangle_u$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(a_r^+ + a_t^+) \right]^2 |0\rangle_r|0\rangle_t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} [(a_r^+)^2 + (a_t^+)^2 + 2a_r^+a_t^+] |0\rangle_r|0\rangle_t$$

$$= \frac{1}{2}(|2\rangle_r|0\rangle_t + |0\rangle_r|2\rangle_t + \sqrt{2}|1\rangle_r|1\rangle_t)$$

注意事项

需要注意的是，我们看到最终的系数是 $\sqrt{2}$ 而不是 2，这是因为在计算过程中，我们需要考虑到量子态的归一化。具体来说，如果我们将 $a_r^\dagger a_t^\dagger$ 作用于 $|0\rangle_r|0\rangle_t$ ，我们得到 $|1\rangle_r|1\rangle_t$ ，但是这个状态需要被归一化。由于 $a_r^\dagger a_t^\dagger$ 本身已经包含了一个 2 的因子，所以在最终的表达式中，我们需要除以 $\sqrt{2}$ 来确保归一化，这样就得到了 $\sqrt{2}|1\rangle_r|1\rangle_t$ 。

这个过程可以表示为：

$$2a_r^\dagger a_t^\dagger |0\rangle_r|0\rangle_t = \sqrt{2}|1\rangle_r|1\rangle_t$$

可见，反射光束和透射光束也处于纠缠态。

情况 3. 设入射态为 $|1\rangle_{\text{In}}|1\rangle_u$ ，则量子态的变换过程为

$$|1\rangle_{\text{In}}|1\rangle_u = a_{\text{In}}^+ a_u^+ |0\rangle_{\text{In}}|0\rangle_u$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(a_r^+ + a_t^+) \frac{1}{\sqrt{2}}(a_r^+ - a_t^+) |0\rangle_r|0\rangle_r$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_r|0\rangle_t - |0\rangle_r|2\rangle_t)$$

可见，反射光束和透射光束处于双光子态和真空态的纠缠态。值得注意的是，这里不出现 $|1\rangle, |1\rangle$ 项，这是一种量子干涉效应，起因于光子的不可区分性。

情况 4. 设两束入射光均处于相干态，即入射态为 $|\alpha\rangle_{\text{In}}|\beta\rangle_u$ ，则量子态的变换过程为

$$\begin{aligned}
 |\alpha\rangle_{\text{In}}|\beta\rangle_u &= D_{\text{In}}(\alpha)D_u(\beta)|0\rangle_{\text{In}}|0\rangle_u \\
 &= \exp(\alpha a_{\text{In}}^+ - \alpha^* a_{\text{In}}) \exp(\beta a_u^+ - \beta^* a_u) |0\rangle_{\text{In}}|0\rangle_u \\
 &\rightarrow \exp \left[\alpha \frac{1}{\sqrt{2}}(a_r^+ + a_t^+) - \alpha^* \frac{1}{\sqrt{2}}(a_r + a_t) \right] \\
 &\quad \times \exp \left[\beta \frac{1}{\sqrt{2}}(a_r^+ - a_t^+) - \beta^* \frac{1}{\sqrt{2}}(a_r - a_t) \right] |0\rangle_r |0\rangle_t \\
 &= \exp \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)a_r^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^* + \beta^*)a_r \right] \\
 &\quad \times \exp \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)a_t^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \beta^*)a_t \right] |0\rangle_r |0\rangle_t \\
 &= D_r \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) \right] D_t \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta) \right] |0\rangle_r |0\rangle_t \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) \right\rangle_r \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta) \right\rangle_t
 \end{aligned}$$

注意事项

其中对于指数上可以任意交换的原因是：指数函数有一个重要的性质，即当 $[A, B] = 0$ ， A 和 B 可交换。

$$\exp(A) \exp(B) = \exp(A + B)$$

在这里，两个指数函数的参数可以合并，因为它们作用在不同的模式上 (r 和 t)，并且产生和湮灭算符之间满足对易关系。

可见，当两束入射光处于相干态的直积态时，两束出射光也处于相干态的直积态（而不是纠缠态），相干态幅度的变化与经典情况相同。考虑到相干态是最接近于经典态的量子态，这一结论是不足为奇的。

第 7 章作业

Question

数学复述 7.1 节（量子多模电磁场与多能级原子相互作用的哈密顿量）。

Answer

7.1 量子多模电磁场与多能级原子相互作用的哈密顿量

原子的自由哈密顿量：

$$H_A = H_A \sum_k |k\rangle\langle k| = \sum_k \hbar\omega_k |k\rangle\langle k|$$

其中， $|k\rangle$ 为原子自由哈密顿量 H_A 的本征态，相应的本征值为 $\hbar\omega_k$ ，即 H_A 的本征方程为

$$H_A |k\rangle = \hbar\omega_k |k\rangle$$

量子电磁场的自由哈密顿量为

$$H_F = \sum_{\lambda} H_{\lambda} = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} \left(a_{\lambda}^+ a_{\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

在电偶极近似下，量子电磁场与原子的相互作用哈密顿量为

$$V = -d \cdot E$$

其中， d 为原子的电偶极矩； E 为电磁场的电场强度，其表达式分别为

$$\begin{aligned} d &= \sum_j |j\rangle\langle j| d \sum_k |k\rangle\langle k| = \sum_{j,k} d_{jk} |j\rangle\langle k| \\ E &= \sum_{\lambda} e_{\lambda} E_{\lambda}^{(s)} \sin(k_{\lambda} z) (a_{\lambda} + a_{\lambda}^+) \end{aligned}$$

这里电磁场采用驻波形式。

系统的总哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= H_A + H_F + V \\ &= \sum_k \hbar\omega_k |k\rangle\langle k| + \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} \left(a_{\lambda}^+ a_{\lambda} + \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + \sum_{j,k} \sum_{\lambda} \hbar g_{jk,\lambda} |j\rangle\langle k| (a_{\lambda} + a_{\lambda}^+) \end{aligned}$$

其中，耦合常数为

$$g_{jk,\lambda} = \left(\frac{-d_{jk} \cdot e_\lambda E_\lambda^{(s)}}{\hbar} \right) \sin(k_\lambda z) = g_{jk,\lambda}(z)$$

我们用拉丁字母下标 j 和 k 表示原子能级，希腊字母下标 λ 表示光场模式。可见，耦合常数与原子电偶极矩和电场振幅的标量积 $(d_{jk} \cdot e_\lambda E_\lambda^{(s)})$ 成正比，因此若原子电偶极矩矢量与电场矢量垂直，则耦合常数等于零；耦合常数与原子在光场中的位置有关 $\sin(k_\lambda z)$ 。

Question

推导 7.2 节 (7.11a)、(7.11b)、(7.11c) 三个概率幅方程 (把你认为需要详细推导的步骤推导出来)。

Answer

7.2 量子单模电磁场与多能级原子的相互作用

现在考虑量子单模电磁场与多能级原子的相互作用。系统的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= H_A + H_F + V \\ &= \sum_k \hbar \omega_k |k\rangle \langle k| + \hbar \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + \sum_{j,k} \hbar g_{jk} |j\rangle \langle k| (a + a^\dagger) \end{aligned}$$

变换到相互作用绘景，则有

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{j,k} \hbar g_{jk} |j\rangle \langle k| e^{i\omega_{jk} t} (a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) \\ &= \sum_{j,k} \hbar g_{jk} |j\rangle \langle k| \left(a e^{i(\omega_{jk}-\omega)t} + a^\dagger e^{i(\omega_{jk}+\omega)t} \right) \end{aligned}$$

其中， $\omega_{jk} = \omega_j - \omega_k$ 。

假设初始原子处在状态 $|i\rangle$ ，光场处在状态 $|n\rangle$ ，即系统初态为 $|\psi(0)\rangle = |i, n\rangle$ ，则 t 时刻系统的状态可表示为

$$|\psi(t)\rangle = C_{i,n}(t) |i, n\rangle + \sum_{f \neq i} [C_{f,n-1}(t) |f, n-1\rangle + C_{f,n+1}(t) |f, n+1\rangle]$$

求和中第一项表示原子吸收光子的过程，第二项表示原子发射光子的过程。

回代薛定谔方程，可得

$$\begin{aligned}\frac{dC_{i,n}(t)}{dt} &= \sum_{f \neq i} g_{if} \left[\sqrt{n} e^{-i(\omega_{fi}-\omega)t} C_{f,n-1}(t) + \sqrt{n+1} e^{-i(\omega_{fi}+\omega)t} C_{f,n+1}(t) \right] \\ i \frac{dC_{f,n-1}(t)}{dt} &= g_{fi} \sqrt{n} e^{-i(\omega_{if}+\omega)t} C_{i,n}(t) \\ i \frac{dC_{f,n+1}(t)}{dt} &= g_{fi} \sqrt{n+1} e^{-i(\omega_{if}-\omega)t} C_{i,n}(t)\end{aligned}$$

证明过程

由薛定谔方程：

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_1 |\psi(t)\rangle$$

代入有：

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{d}{dt} \left\{ C_{i,n}(t) |i, n\rangle + \sum_{f \neq i} [C_{f,n-1}(t) |f, n-1\rangle + C_{f,n+1}(t) |f, n+1\rangle] \right\} \\ = \sum_{j,k} \hbar g_{jk} |j\rangle \langle k| \left(a e^{i(\omega_{jk}-\omega)t} + a^+ e^{i(\omega_{jk}+\omega)t} \right) \\ \left\{ C_{i,n}(t) |i, n\rangle + \sum_{f \neq i} [C_{f,n-1}(t) |f, n-1\rangle + C_{f,n+1}(t) |f, n+1\rangle] \right\}\end{aligned}$$

整理有：

$$\begin{aligned}i\hbar \left\{ \frac{dC_{i,n}(t)}{dt} |i, n\rangle + \sum_{f \neq i} \left[\frac{dC_{f,n-1}(t)}{dt} |f, n-1\rangle + \frac{dC_{f,n+1}(t)}{dt} |f, n+1\rangle \right] \right\} \\ = \sum_{j,k} \hbar g_{jk} |j\rangle \langle k| \left(a e^{i(\omega_{jk}-\omega)t} + a^+ e^{i(\omega_{jk}+\omega)t} \right) C_{i,n}(t) |i, n\rangle \\ + \sum_{j,k} \hbar g_{jk} |j\rangle \langle k| \left(a e^{i(\omega_{jk}-\omega)t} + a^+ e^{i(\omega_{jk}+\omega)t} \right) \sum_{f \neq i} C_{f,n-1}(t) |f, n-1\rangle \\ + \sum_{j,k} \hbar g_{jk} |j\rangle \langle k| \left(a e^{i(\omega_{jk}-\omega)t} + a^+ e^{i(\omega_{jk}+\omega)t} \right) \sum_{f \neq i} C_{f,n+1}(t) |f, n+1\rangle \\ = \sum_{j,i} \hbar g_{ji} \left(\sqrt{n} e^{i(\omega_{ji}-\omega)t} |j, n-1\rangle + \sqrt{n+1} e^{i(\omega_{ji}+\omega)t} |j, n+1\rangle \right) C_{i,n}(t) \\ + \sum_{j,f \neq i} \hbar g_{jf} \left(\sqrt{n-1} e^{i(\omega_{jf}-\omega)t} |j, n-2\rangle + \sqrt{n+1} e^{i(\omega_{jf}+\omega)t} |j, n\rangle \right) C_{f,n-1}(t) \\ + \sum_{j,f \neq i} \hbar g_{jf} \left(\sqrt{n+1} e^{i(\omega_{jf}-\omega)t} |j, n\rangle + \sqrt{n+2} e^{i(\omega_{jf}+\omega)t} |j, n+2\rangle \right) C_{f,n+1}(t)\end{aligned}$$

根据对应的 $|j, n-1\rangle, |j, n\rangle, |j, n+1\rangle$ 态，我们得到：

$$\frac{dC_{i,n}(t)}{dt} = \sum_{f \neq i} g_{if} \left[\sqrt{n} e^{-i(\omega_{if}-\omega)t} C_{f,n-1}(t) + \sqrt{n+1} e^{-i(\omega_{if}+\omega)t} C_{f,n+1}(t) \right]$$

$$i \frac{dC_{f,n-1}(t)}{dt} = g_{fi} \sqrt{n} e^{-i(\omega_{if}+\omega)t} C_{i,n}(t)$$

$$i \frac{dC_{f,n+1}(t)}{dt} = g_{fi} \sqrt{n+1} e^{-i(\omega_{if}-\omega)t} C_{i,n}(t)$$

这就是我们需要证明的三个等式。

Question

式子 (7.26) 原子-光子相互作用哈密顿量 $\hat{H}_I = \hbar\lambda(\sigma^+a + a^+\sigma)$ 内的系数的表达式是什么？请总结第二章的经典拉比振荡与第七章的量子拉比振荡，有哪些不同。

Answer

系数：

$$\lambda \equiv g_{eg} = g_{ge}$$

而：

$$g_{jk,\lambda} = \left(\frac{-\mathbf{d}_{jk} \cdot \mathbf{e}_\lambda E_\lambda^{(s)}}{\hbar} \right) \sin(k_\lambda z)$$

这里， $g_{jk,\lambda}$ 表示耦合常数， \mathbf{d}_{jk} 是从状态 $|j\rangle$ 到状态 $|k\rangle$ 的跃迁偶极矩， \mathbf{e}_λ 是光场的偏振矢量， $E_\lambda^{(s)}$ 是光场的电场振幅， \hbar 是约化普朗克常数， k_λ 是光场的波数， z 是位置坐标。最终有：

$$\lambda = \left(\frac{\mathbf{d}_{ge} \cdot \mathbf{e}_\lambda E_\lambda^{(s)}}{\hbar} \right) \sin(k_\lambda z)$$

$$\lambda = \left(\frac{-\mathbf{d}_{eg} \cdot \mathbf{e}_\lambda E_\lambda^{(s)}}{\hbar} \right) \sin(k_\lambda z)$$

这里， \mathbf{d}_{eg} 是从激发态 $|e\rangle$ 到基态 $|g\rangle$ 的跃迁偶极矩，而 \mathbf{d}_{ge} 是从基态 $|g\rangle$ 到激发态 $|e\rangle$ 的跃迁偶极矩。由于跃迁偶极矩是矢量，且 \mathbf{d}_{eg} 和 \mathbf{d}_{ge} 之间的关系是 $\mathbf{d}_{ge} = -\mathbf{d}_{eg}$ ，所以在实际应用中，我们通常只考虑 g_{eg} 或 g_{ge} 中的一个，因为它们的大小相等，方向相反。在量子力学中，我们通常关心的是耦合强度的绝对值，所以 λ 可以表示为 g_{eg} 或 g_{ge} 的绝对值。

总结第二章的经典拉比振荡与第七章的量子拉比振荡，有哪些不同。

经典拉比振荡的哈密顿量

相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned} V &= -d \cdot E \\ &= -\mu(\sigma^+ + \sigma) \cdot E_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ &= -\hbar \frac{\mu \cdot E_0}{\hbar} (\sigma^+ + \sigma) \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \hbar \Omega_R (\sigma^+ + \sigma) \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

其中, $\Omega_R \equiv -\frac{\mu \cdot E_0}{\hbar}$, 称为 Rabi 频率, 描述原子与光场之间的耦合强度。
系统的总哈密顿量为

$$H = H_0 + V = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \Omega_R (\sigma^+ + \sigma) \cos(\omega t + \varphi)$$

量子拉比振荡的哈密顿量

相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned} V &= \sum_{j,k} \sum_{\lambda} \hbar g_{jk,\lambda} |j\rangle \langle k| (a_{\lambda} + a_{\lambda}^{\dagger}) \\ &= \sum_{j,k} \hbar g_{jk} |j\rangle \langle k| (a + a^{\dagger}) \\ &= (\hbar g_{eg} |e\rangle \langle g| + \hbar g_{ge} |g\rangle \langle e|) (a + a^{\dagger}) \\ &= \hbar \lambda (\sigma^+ + \sigma) (a + a^{\dagger}) \\ &= \hbar \lambda (\sigma^+ + \sigma) (a + a^{\dagger}) \end{aligned}$$

其中, $\sigma^+ = |e\rangle \langle g|$; $\sigma = |g\rangle \langle e|$, 并假设 $\lambda = \frac{\mathbf{d}_{ge} \cdot \mathbf{e}_{\lambda} E_{\lambda}^{(s)}}{\hbar} \sin(k_{\lambda} z)$ 。

注意到 $g_{jk} \propto d_{jk}$, 因此有 g_{jj} ($j = e, g$) $\propto d_{jj} = 0$ 。从而得总哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \omega a^{\dagger} a + \hbar \lambda (\sigma^+ + \sigma) (a^{\dagger} + a)$$

对比经典拉比振荡与量子拉比振荡

在对比经典拉比振荡和量子拉比振荡的哈密顿量时, 我们可以从以下几个方面进行详细分析:

1. 相互作用哈密顿量的形式

(a) 经典拉比振荡:

$$V = \hbar \Omega_R (\sigma^+ + \sigma) \cos(\omega t + \varphi)$$

这里, 相互作用哈密顿量 V 是时间的函数, 通过余弦函数描述了电磁

场与原子之间的周期性相互作用。 Ω_R 是 Rabi 频率，表示耦合强度。

(b) 量子拉比振荡：

$$V = \hbar\lambda(\sigma^+ + \sigma)(a + a^\dagger)$$

在量子情况下，相互作用哈密顿量涉及到光场的产生和湮灭算符 a 和 a^\dagger ，这反映了量子场的量子化特性。 λ 是与量子场强度相关的参数。

2. 总哈密顿量的结构

(a) 经典拉比振荡：

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\Omega_R(\sigma^+ + \sigma)\cos(\omega t + \varphi)$$

总哈密顿量由原子的自由哈密顿量和时间依赖的相互作用哈密顿量组成。

(b) 量子拉比振荡：

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\lambda(\sigma^+ + \sigma)(a^\dagger + a)$$

量子情况下的总哈密顿量除了包含原子的自由哈密顿量和量子场的自由哈密顿量外，还包括了原子与量子场相互作用的项。

3. 物理意义和描述的物理过程

- (a) 经典拉比振荡：描述的是经典电磁场与原子之间的相互作用，其中电磁场被视为经典波，而原子的能级跃迁由电磁波的电场强度调制。
- (b) 量子拉比振荡：描述的是量子电磁场与原子之间的相互作用，其中电磁场被视为量子化的光场，其量子性质通过产生和湮灭算符来描述。这种描述能够捕捉到光场的量子涨落和原子的量子态之间的相互作用。

Question

在 p.138 内的量子崩塌与复苏现象中，如果将相干态改为压缩态，那么布居概率和粒子数翻转公式 (7.43) - (7.45) 应该写成怎样的新形式？

Answer

设初始原子处于上能态 $|e\rangle$ ，光场处于光子数态的某种叠加态 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ ，其相应的光子数概率分布函数为 $p_n = |c_n|^2$ 。

对于压缩真空态，可以用光子数态展开为：

$$|\xi\rangle = \sum_m c_{2m} |2m\rangle$$

其中

$$c_{2m} = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} (-1)^m \left(\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh r \right)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{m!}$$

可见，在压缩真空态中只可能探测到偶数个光子，其光子数概率分布为

$$p_{2m} = |C_{2m}|^2 = \frac{1}{\cosh r} \left(\frac{1}{2} \tanh r \right)^{2m} \frac{(2m)!}{(m!)^2}$$

仿照书中的推导过程，可得 t 时刻原子处于上下能态的概率分别为：

$$\begin{aligned} P_e(t) &= \sum_m p_{2m} \cos^2 \left(\frac{\Omega_{2m}}{2} t \right) = \frac{1}{2} \left[1 + \sum_m p_{2m} \cos(\Omega_{2m} t) \right] \\ P_g(t) &= \sum_m p_{2m} \sin^2 \left(\frac{\Omega_{2m}}{2} t \right) = \frac{1}{2} \left[1 - \sum_m p_{2m} \cos(\Omega_{2m} t) \right] \end{aligned}$$

原子的布居数反转为

$$W(t) = P_e(t) - P_g(t) = \sum_m p_{2m} \cos(\Omega_{2m} t)$$

把所有表达式代入，并利用量子 Rabi 频率 $\Omega_n = 2\lambda\sqrt{n+1}$ ，最终有布居数反转：

$$W(t) = \sum_m \frac{1}{\cosh r} \left(\frac{1}{2} \tanh r \right)^{2m} \frac{(2m)!}{(m!)^2} \cos(2\lambda\sqrt{2m+1}t)$$

Question

验证（复述）p. 139 大失谐（色散）情况中的数学公式。

Answer

在大失谐情况下

当 $\Delta \gg \lambda\sqrt{\langle a^\dagger a \rangle}$ 时， $H_l = \hbar\lambda(\sigma^+ a + a^+\sigma)$ 可化成下列有效哈密顿量，即

$$H_{\text{eff}} = \hbar\chi \left[(a^\dagger a + 1)|e\rangle\langle e| - a^\dagger a|g\rangle\langle g| \right]$$

其中， $\chi = \lambda^2/\Delta$ 。

相应的时间演化算符为

$$U(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}} t \right]$$

注意到 $|g, n\rangle$ 和 $|e, n\rangle$ 均为 H_{eff} 的本征态，即

$$H_{\text{eff}}|g, n\rangle = -\hbar\chi n|g, n\rangle$$

$$H_{\text{eff}}|e, n\rangle = \hbar\chi(n+1)|e, n\rangle$$

于是，当系统（原子 + 光场）初始处于量子态 $|\psi(0)\rangle = |g, n\rangle$ 时， t 时刻的状态为

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_{\text{eff}}t\right]|g, n\rangle = e^{in\chi t}|g, n\rangle$$

当系统初始处于量子态 $|\psi(0)\rangle = |e, n\rangle$ 时，则 t 时刻的状态为

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_{\text{eff}}t\right]|e, n\rangle = e^{-i(n+1)\chi t}|e, n\rangle$$

上述结果表明，在大失谐情况下，当原子初始处于其能量本征态 $|g\rangle$ 或 $|e\rangle$ ，而光场初始处于光子数态 $|n\rangle$ 时，系统在时间演化中将保持其初态不变（只是产生了一个整体的位相因子）。然而，当光场初始处于相干态 $|\alpha\rangle$ 时，情况就不同了，现讨论如下。

当系统初始处于量子态 $|\psi(0)\rangle = |g, \alpha\rangle$ 时，则 t 时刻的状态为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_{\text{eff}}t\right]|g, \alpha\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_{\text{eff}}t\right]|g\rangle e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ &= |g\rangle e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{in\chi t}|n\rangle \\ &= |g\rangle |\alpha e^{in\chi t}\rangle \end{aligned}$$

类似的，当系统初始处于量子态 $|\psi(0)\rangle = |e, \alpha\rangle$ 时，则 t 时刻的状态为

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_{\text{eff}}t\right]|e, \alpha\rangle = e^{-i\chi t}|e\rangle |\alpha e^{-i\chi t}\rangle$$

我们注意到，对应于原子的初态 $|g\rangle$ 或 $|e\rangle$ ， t 时刻相干态 $|\alpha\rangle$ 在相空间分别旋转了角度 $\pm\theta(\theta = \chi t)$ 。

更有趣的是，当光场初始处于相干态 $|\alpha\rangle$ ，而原子初始处于 $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 的叠加态

$$\frac{|g\rangle + e^{i\varphi}|e\rangle}{\sqrt{2}}$$

时，系统在 t 时刻的状态为

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|g\rangle |\alpha e^{i\chi t}\rangle + e^{i\varphi} e^{-i\chi t} |e\rangle |\alpha e^{-i\chi t}\rangle]$$

这是原子和光场的一种纠缠态。

如果我们选择 $\varphi = \chi t = \pi/2$ ，则有

$$\begin{aligned} |\psi\left(\frac{\pi}{2\chi}\right)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|g\rangle |i\alpha\rangle + |e\rangle | - i\alpha\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|g\rangle |\beta\rangle + |e\rangle | - \beta\rangle] \end{aligned}$$

其中， $\beta = i\alpha$ 。

量子态 $|\beta\rangle$ 和 $|-\beta\rangle$ 在相空间相差 180° ，它们是可最大程度区分开的相干态。上述结果在量子纠缠态的制备以及量子信息的研究中有着重要的应用。

Question

对 p. 140-141 一般失谐 (色散) 情况检验 (7.58) 和 (7.60) 这些基本公式。

Answer

一般失谐情况 ($\Delta \neq 0$)

前面已导出

$$H_1 = \hbar\lambda (\sigma^+ a e^{i\Delta t} + a^+ \sigma e^{-i\Delta t})$$

下面利用概率幅方法求解。

设系统的初态为

$$|\psi(0)\rangle = c_{e,n}(0)|e, n\rangle + c_{g,n+1}(0)|g, n+1\rangle$$

则 t 时刻系统的状态为

$$|\psi(t)\rangle = c_{e,n}(t)|e, n\rangle + c_{g,n+1}(t)|g, n+1\rangle$$

下面求 $c_{e,n}(t)$ 和 $c_{g,n+1}(t)$, 一旦求出 $c_{e,n}(t)$ 和 $c_{g,n+1}(t)$, 则可讨论原子和光场的各种性质。

回代薛定谔方程可得

$$\begin{aligned}\frac{dc_{e,n}}{dt} &= -i\lambda\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{g,n+1} = -i\frac{\Omega_n}{2}e^{i\Delta t}c_{g,n+1} \\ \frac{dc_{g,n+1}}{dt} &= -i\lambda\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}c_{e,n} = -i\frac{\Omega_n}{2}e^{-i\Delta t}c_{e,n}\end{aligned}$$

其中, $\Omega_n = 2\lambda\sqrt{n+1}$ 。

证明过程

薛定谔方程:

$$\hbar\lambda (\sigma^+ a e^{i\Delta t} + a^+ \sigma e^{-i\Delta t}) [c_{e,n}|e, n\rangle + c_{g,n+1}|g, n+1\rangle] = i\hbar \frac{d}{dt} [c_{e,n}|e, n\rangle + c_{g,n+1}|g, n+1\rangle]$$

其中升降算符 σ^+ 和 σ 的作用为:

$$\sigma^+|g\rangle = |e\rangle$$

$$\sigma|e\rangle = |g\rangle$$

$$\sigma^+|e\rangle = 0$$

$$\sigma|g\rangle = 0$$

产生算符 a^+ 和湮灭算符 a 的作用为:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

将升降算符和产生湮灭算符应用于态 $|e, n\rangle$ 和 $|g, n+1\rangle$, 我们得到:

$$\sigma^+ a e^{i\Delta t} |g, n+1\rangle = \sqrt{n+1} e^{i\Delta t} |e, n\rangle$$

$$a^+ \sigma e^{-i\Delta t} |e, n\rangle = \sqrt{n+1} e^{-i\Delta t} |g, n+1\rangle$$

综上有:

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \hbar\lambda (\sigma^+ a e^{i\Delta t} + a^+ \sigma e^{-i\Delta t}) [c_{e,n}|e, n\rangle + c_{g,n+1}|g, n+1\rangle] \\ &= \hbar\lambda \sqrt{n+1} [e^{i\Delta t} c_{e,n}|e, n\rangle + e^{-i\Delta t} c_{g,n+1}|g, n+1\rangle] \end{aligned}$$

$$\text{右式} = i\hbar \frac{d}{dt} [c_{e,n}|e, n\rangle + c_{g,n+1}|g, n+1\rangle]$$

对比态前面的系数即有:

$$\begin{aligned} \frac{dc_{e,n}}{dt} &= -i\lambda \sqrt{n+1} e^{i\Delta t} c_{g,n+1} \\ \frac{dc_{g,n+1}}{dt} &= -i\lambda \sqrt{n+1} e^{-i\Delta t} c_{e,n} \end{aligned}$$

证毕!

在这组方程中, 系数含有时间因子。为了消去系数中的时间因子, 作下列变量替换, 即

$$\tilde{c}_{e,n}(t) = c_{e,n}(t) e^{-i\frac{\Delta}{2}t}, \quad \tilde{c}_{g,n+1}(t) = c_{g,n+1}(t) e^{i\frac{\Delta}{2}t}$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{c}_{e,n}(t) &= -i\frac{\Delta}{2} \tilde{c}_{e,n}(t) - i\frac{\Omega_n}{2} \tilde{c}_{g,n+1}(t) \\ \frac{d}{dt} \tilde{c}_{g,n+1}(t) &= -i\frac{\Omega_n}{2} \tilde{c}_{e,n}(t) + i\frac{\Delta}{2} \tilde{c}_{g,n+1}(t) \end{aligned}$$

Question

在 7.4 节缀饰态中, 验证 p.146 内的 (7.86) - (7.87) 基本结论 (把你认为需要详细推导的步骤写出来)。

Answer

7.4 缀饰态

利用概率幅方法可求解 JC 模型, 下面利用所谓的缀饰态方法求解同一问题。

已知系统的哈密顿量为 ($\hbar = 1$)

$$H = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + \omega a^\dagger a + \lambda(\sigma^+ a + a^\dagger \sigma) = H_0 + V$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + \omega a^\dagger a, \quad V = \lambda(\sigma^+ a + a^\dagger \sigma)$$

该哈密顿量只引起下列子空间的跃迁, 即

$$|e, n\rangle \leftrightarrow |g, n+1\rangle$$

这些态是自由哈密顿量 H_0 的本征态, 即

$$\begin{aligned} H_0|e, n\rangle &= \left(\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + \omega a^\dagger a \right) |e, n\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}\omega_0 + n\omega \right) |e, n\rangle \\ &= \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{1}{2}\Delta \right] |e, n\rangle \\ &= E_{e,n}|e, n\rangle \end{aligned}$$

其中, $E_{e,n} = \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{1}{2}\Delta \right]$, $\Delta = \omega_0 - \omega$ 。

$$\begin{aligned} H_0|g, n+1\rangle &= \left(\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + \omega a^\dagger a \right) |g, n+1\rangle \\ &= \left(-\frac{1}{2}\omega_0 + (n+1)\omega \right) |g, n+1\rangle \\ &= \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2}\Delta \right] |g, n+1\rangle \\ &= E_{g,n+1}|g, n+1\rangle \end{aligned}$$

其中, $E_{g,n+1} = \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2}\Delta \right]$ 。

H_0 的两个本征值之差为 $E_{e,n} - E_{g,n+1} = \Delta$ 。可见, 当 $\Delta = 0$ 时, $|e, n\rangle$ 和 $|g, n+1\rangle$ 是简并的, 即 $E_{e,n} = E_{g,n+1} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega$ 。

H_0 的本征态 $|e, n\rangle$ 和 $|g, n+1\rangle$ 称为裸态, 是原子状态和光场状态的直积态。在裸态基

下 (H_0 表象), 总哈密顿量 H 的矩阵元为

$$\begin{aligned}\langle e, n | H | e, n \rangle &= \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{1}{2} \Delta \right] \\ \langle g, n+1 | H | g, n+1 \rangle &= \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} \Delta \right] \\ \langle e, n | H | g, n+1 \rangle &= \langle g, n+1 | H | e, n \rangle = \lambda \sqrt{n+1}\end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$H = \begin{bmatrix} \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{1}{2} \Delta & \lambda \sqrt{n+1} \\ \lambda \sqrt{n+1} & \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} \Delta \end{bmatrix}$$

可求得其两个本征值分别为

$$E_{\pm}(n) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \pm \frac{1}{2} \Omega_n(\Delta)$$

相应的两个本征态分别为

$$\begin{aligned}|\psi_+(n)\rangle &= \cos \left(\frac{\phi_n}{2} \right) |e, n\rangle + \sin \left(\frac{\phi_n}{2} \right) |g, n+1\rangle \\ |\psi_-(n)\rangle &= -\sin \left(\frac{\phi_n}{2} \right) |e, n\rangle + \cos \left(\frac{\phi_n}{2} \right) |g, n+1\rangle\end{aligned}$$

其中

$$\cos \left(\frac{\phi_n}{2} \right) = \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) + \Delta}{2\Omega_n(\Delta)}}, \quad \sin \left(\frac{\phi_n}{2} \right) = \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) - \Delta}{2\Omega_n(\Delta)}}$$

式中, $\Omega_n(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)}$ 是 Rabi 频率。

证明过程

$$H = \begin{bmatrix} \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{1}{2} \Delta & \lambda \sqrt{n+1} \\ \lambda \sqrt{n+1} & \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} \Delta \end{bmatrix}$$

本征值求解 $|H - EI| = 0$:

$$\begin{aligned}|H - EI| &= \begin{vmatrix} \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{1}{2} \Delta - E & \lambda \sqrt{n+1} \\ \lambda \sqrt{n+1} & \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} \Delta - E \end{vmatrix} \\ &= \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{1}{2} \Delta - E \right] \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} \Delta - E \right] - \lambda^2(n+1) \\ &= \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega - E \right]^2 - \frac{1}{4} \Delta^2 - \lambda^2(n+1) \\ &= 0\end{aligned}$$

即有:

$$E_{\pm}(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega \pm \frac{1}{2}\Omega_n(\Delta)$$

式中, $\Omega_n(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)}$ 是 Rabi 频率。或写作 $2\lambda\sqrt{n+1} = \sqrt{\Omega_n(\Delta)^2 - \Delta^2}$, 这个后面会用到。

将 $E_{\pm}(n)$ 回代:

$$(H - EI)|\psi_{\pm}(n)\rangle = \begin{bmatrix} \pm\frac{1}{2}\Omega_n(\Delta) + \frac{1}{2}\Delta & \lambda\sqrt{n+1} \\ \lambda\sqrt{n+1} & \pm\frac{1}{2}\Omega_n(\Delta) - \frac{1}{2}\Delta \end{bmatrix}|\psi_{\pm}(n)\rangle = 0$$

考虑 $|\psi_+(n)\rangle$, 令

$$|\psi_+(n)\rangle = c_1|e, n\rangle + c_2|g, n+1\rangle$$

由原方程:

$$[\Omega_n(\Delta) + \Delta]c_1 + 2\lambda\sqrt{n+1}c_2 = 0$$

(另一个式子与这个重复, 不再赘述)

由归一化:

$$c_1^2 + c_2^2 = 1$$

不妨设:

$$c_1 = \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right), \quad c_2 = \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right)$$

有:

$$\tan\left(\frac{\phi_n}{2}\right) = \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n(\Delta) + \Delta} = \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) - \Delta}{\Omega_n(\Delta) + \Delta}}$$

或写作:

$$\cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) = \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) + \Delta}{2\Omega_n(\Delta)}}, \quad \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) = \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) - \Delta}{2\Omega_n(\Delta)}}$$

此时即有:

$$|\psi_+(n)\rangle = \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right)|e, n\rangle + \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right)|g, n+1\rangle$$

同理有:

$$|\psi_-(n)\rangle = -\sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right)|e, n\rangle + \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right)|g, n+1\rangle$$

可见, H 的两个本征值之差为 $E_+(n) - E_-(n) = \Omega_n(\Delta)$, 即使 $\Delta = 0$, H 的两个本征态也不是简并的。

总哈密顿量 H 的本征态 $|\psi_{\pm}(n)\rangle$ 称为缀饰态 (dressed states), 是原子状态和光场状态的纠缠态 (entangled states)。

第 9 章作业

Question

在做“量子化腔场-原子相互作用”的量子光学实验时，比起使用可见光的谐振腔和低激发态原子，为什么物理学家更愿意使用微波谐振腔和高激发态原子（里德堡原子）？

Answer

要观测单个原子与单模电磁场相互作用过程中的物理效应，显然要求原子与电磁场之间的耦合常数要大，即满足所谓的“强耦合”条件 ($\lambda \gg \gamma, \kappa$)，这里 λ 是原子与电磁场之间的耦合常数， γ 是原子的自发辐射速率 ($1/\gamma$ 是原子激发态的寿命)， κ 是腔场的衰减速率（描述腔的损耗）。为了得到大的 λ 和小的 γ ，通常利用处于里德堡态（主量子数很大的量子态）的原子（里德堡原子）；为了得到小的 κ ，腔的损耗要小（品质因子 Q 要大）。强耦合条件 $\lambda \gg \gamma, \kappa$ 的物理意义是在原子和腔场还没有明显衰减时，二者已交换了多次能量（Rabi 频率反映了二者交换能量的频率）。综上所述，这类实验最主要的组成部分是处于里德堡态的原子和具有高品质因子（低损耗）的微波谐振腔。为了探测实验结果，还需要具有选择性电离的原子状态探测器。

Question

在 9.1.2 节（原子纠缠态的制备）中，把你认为需要具体推导的理论机制推导出来。

Answer

9.1.2 原子纠缠态的制备

利用腔 QED 实验系统，让两个原子先后与腔场发生相互作用，可以制备原子的纠缠态。设初始原子 1 处在上能态 $|e\rangle_1$ ，腔场处于真空态 $|0\rangle$ ，当原子 1 与腔场发生共振相互作用时，系统按下列方式演化，即

$$|e\rangle_1|0\rangle \rightarrow \cos(\lambda t_1)|e\rangle_1|0\rangle - i \sin(\lambda t_1)|g\rangle_1|1\rangle$$

其中，下标“1”表示原子 1。

选择原子 1 的速度使得 $\lambda t_1 = \pi/4$ （量子 $\pi/2$ 脉冲），则有

$$|e\rangle_1|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1|0\rangle - i|g\rangle_1|1\rangle)$$

这是原子 1 与腔场的纠缠态。这时送入处于下能态 $|g\rangle_2$ 的原子 2，则系统的状态为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle - i|g\rangle_1|e\rangle_2|1\rangle)$$

设原子 2 也与腔场发生共振相互作用，利用

$$|g\rangle_2|1\rangle \rightarrow \cos(\lambda t_2)|g\rangle_2|1\rangle - i \sin(\lambda t_2)|e\rangle_2|0\rangle$$

选择原子 2 的速度使得 $\lambda t_2 = \pi/2$ （量子 π 脉冲），则有

$$|g\rangle_2|1\rangle \rightarrow -i|e\rangle_2|0\rangle$$

将上述结果代入，则系统的状态变为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1|g\rangle_2 - |g\rangle_1|e\rangle_2)|0\rangle = |\psi^-\rangle|0\rangle$$

其中

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle_1|g\rangle_2 - |g\rangle_1|e\rangle_2)$$

是两个原子的纠缠态。上述讨论表明，让两个原子先后与腔场发生共振相互作用，可以制备原子的纠缠态。这种实验方案已被 Haroche 小组实现。

一般情况

由第七章：

设系统（原子 + 光场）初始处于量子态 $|\psi(0)\rangle$ ，则 t 时刻的量子态为

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$$

其中， $U(t)$ 为时间演化算符，其形式为

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right) = \exp\left[-i\lambda t(\sigma^+a + a^\dagger\sigma^-)\right]$$

写作显式：

$$U(t) = \begin{bmatrix} \cos(\lambda t\sqrt{n+1}) & -i\frac{\sin(\lambda t\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1}}a \\ -i\frac{\sin(\lambda t\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1}}a^\dagger & \cos(\lambda t\sqrt{n}) \end{bmatrix}$$

设原系统状态：初始原子 1 处在上能态 $|e\rangle_1$ ，腔场处于真空态 $|0\rangle$ ，原子 2 处于下能态 $|g\rangle_2$ ，则总状态写为：

$$|\psi(0)\rangle = |e\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle$$

当原子 1 与腔场发生共振相互作用 t_1 时间:

$$\begin{aligned} U_1(t)|e\rangle_1|0\rangle &= \begin{bmatrix} \cos(\lambda t_1 \sqrt{n+1}) & -i \frac{\sin(\lambda t_1 \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1}} a \\ -i \frac{\sin(\lambda t_1 \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1}} a^\dagger & \cos(\lambda t_1 \sqrt{n}) \end{bmatrix} |e\rangle_1|0\rangle \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\lambda t_1) & -i \sin(\lambda t_1) a \\ -i \sin(\lambda t_1) a^\dagger & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 |0\rangle \\ &= \cos(\lambda t_1)|e\rangle_1|0\rangle - i \sin(\lambda t_1)|g\rangle_1|1\rangle \end{aligned}$$

原子 2 与腔场发生共振相互作用 t_2 时间

$$|g\rangle_2|1\rangle \rightarrow \cos(\lambda t_2)|g\rangle_2|1\rangle - i \sin(\lambda t_2)|e\rangle_2|0\rangle$$

Question

在 9.1.3 节 (腔场薛定谔猫态的制备) 中, 把你认为需要具体推导的理论机制推导出来。

Answer

9.1.3 腔场薛定谔猫态（相干态的相干叠加态）的制备

谐振腔的前后分别加一个经典光场 R_1 和 R_2 可构成一个 Ramsey 干涉仪。这个实验系统可用来制备腔场的薛定谔猫态。

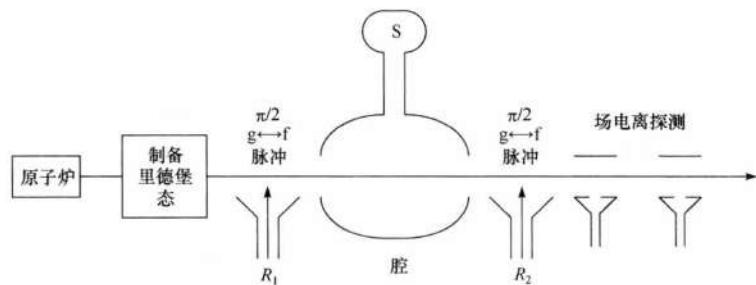


Figure 3: 制定薛定谔猫态的单原子脉塞

在大失谐情况下二能级原子与单模量子腔场相互作用的有效哈密顿量 (取 $\hbar = 1$), 即

$$H_{\text{eff}} = \chi \left[(a^\dagger a + 1) |e\rangle\langle e| - a^\dagger a |g\rangle\langle g| \right]$$

相应的时间演化算符为

$$U(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}} t \right]$$

注意到 $|g, n\rangle$ 和 $|e, n\rangle$ 均为 H_{eff} 的本征态，即

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}|g, n\rangle &= -\hbar\chi n|g, n\rangle \\ H_{\text{eff}}|e, n\rangle &= \hbar\chi(n+1)|e, n\rangle \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} U(t)|g, n\rangle &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}} t \right] |g, n\rangle = e^{in\chi t}|g, n\rangle \\ U(t)|e, n\rangle &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}} t \right] |e, n\rangle = e^{-i(n+1)\chi t}|e, n\rangle \\ U(t)|g\rangle|\alpha\rangle &= |g\rangle|\alpha e^{i\chi t}\rangle \\ U(t)|e\rangle|\alpha\rangle &= e^{-i\chi t}|e\rangle|\alpha e^{-i\chi t}\rangle \end{aligned}$$

考虑 Haroche 小组的三能级系统 $|e\rangle, |g\rangle, |f\rangle$ ，其能量关系为 $E_e > E_g > E_f$ 。腔场与原子跃迁 $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ 发生大失谐相互作用，而与 $|g\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ 跃迁不发生相互作用。如果能态 $|e\rangle$ 不被布居，则有效哈密顿量变为

$$H_{\text{eff}} = -\chi a^\dagger a|g\rangle\langle g|$$

假设经典电磁场 R_1 和 R_2 均与原子的 $|g\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ 跃迁发生共振相互作用，其 Rabi 频率为 Ω_R 。即

$$U_l(t) = \cos \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right) I - i \sin \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right) (\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})$$

取 $\varphi = \pi/2; \sigma^+ = |g\rangle\langle f|; \sigma = |f\rangle\langle g|$ ，则得

$$U(t) = \cos \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right) I - \sin \left(\frac{1}{2} \Omega_R t \right) (|g\rangle\langle f| - |f\rangle\langle g|)$$

设原子进入 R_1 时处于能态 $|g\rangle$ ，则经过 $\pi/2$ 脉冲 ($\Omega_R t = \pi/2$)，原子将处于如下状态，即

$$|\psi_{\text{atom}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |f\rangle)$$

处于该状态的原子进入制备在相干态 $|\alpha\rangle$ 的谐振腔，则系统的初态为

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_{\text{atom}}\rangle|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |f\rangle)|\alpha\rangle$$

原子与腔场发生色散相互作用后，系统的状态变为

$$|\psi(t_c)\rangle = U(t_c)|\psi(0)\rangle = e^{-iH_{\text{eff}}t_c} \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |f\rangle)|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle|\alpha e^{i\chi t_c}\rangle + |f\rangle|\alpha\rangle)$$

其中， t_c 为原子与腔场的相互作用时间。

原子从谐振腔出来后进入经典场 R_2 。设原子与经典场 R_2 的相互作用时间为 t_2 ，并引入 $\theta = \Omega R_2 t_2$ ，则 R_2 有下列作用，即

$$\begin{aligned} |g\rangle &\rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|g\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|f\rangle \\ |f\rangle &\rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|f\rangle - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|g\rangle \end{aligned}$$

于是，经过经典场 R_2 后，系统的状态为

$$\begin{aligned} |\psi(t_c, \theta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|g\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|f\rangle \right] |\alpha e^{i\chi t_c}\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|f\rangle - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|g\rangle \right] |\alpha\rangle \\ &= |g\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|\alpha e^{i\chi t_c}\rangle - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|\alpha\rangle \right] \\ &\quad + |f\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|\alpha e^{i\chi t_c}\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|\alpha\rangle \right] \end{aligned}$$

选择 $\theta = \pi/2, \chi t_c = \pi$ ，则有

$$|\psi(\pi/\chi, \pi/2)\rangle = |g\rangle \frac{1}{2}(|-\alpha\rangle - |\alpha\rangle) + |f\rangle \frac{1}{2}(|-\alpha\rangle + |\alpha\rangle)$$

利用选择性电离探测原子的状态，若探测到原子处于 $|f\rangle$ 态，则腔场处于偶相干态，即

$$|\psi_e\rangle \sim (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$$

若探测到原子处于 $|g\rangle$ 态，则腔场处于奇相干态，即

$$|\psi_o\rangle \sim (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle)$$

上述讨论表明，将原子与腔场（量子化电磁场）的色散相互作用和原子与两个经典电磁场的共振相互作用相结合，可以产生腔场的薛定谔猫态。

Question

在 9.1.4 节（光子数的非破坏性测量）中，把你认为需要具体推导的理论机制推导出来。

Answer

光子数的非破坏性测量

在一般的量子测量中，测量将改变（或破坏）系统原来的状态。例如，利用光电探测器探测量子光场的光子数，光电探测器将吸收光场的光子，从而改变光场原来的量子态。下面介绍利用腔量子电动力学方法，可以达到不吸收光子而确定腔场光子数的目的。这属于所谓的量子非破坏性测量。

假设腔场处于确定的，但未知的光子数态 $|n\rangle$ ，让一个处于叠加态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$ 的里德堡原子进入腔场，则系统的初态为

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)|n\rangle$$

假设原子与量子腔场发生色散相互作用，作用时间为 t ，则作用后系统的状态为：

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_{\text{eff}}t}|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i(n+1)\chi t}|e\rangle + e^{in\chi t}|g\rangle\right)|n\rangle$$

然后，让原子的 $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ 跃迁与一个经典光场发生共振相互作用，经历一个 $\pi/2$ 脉冲后，系统的状态变为

$$\begin{aligned} |\psi(t, \pi/2)\rangle &= \frac{1}{2}\left[e^{-i(n+1)\chi t}(|e\rangle + |g\rangle) + e^{in\chi t}(|g\rangle - |e\rangle)\right]|n\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left[|e\rangle\left(e^{-i(n+1)\chi t} - e^{in\chi t}\right) + |g\rangle\left(e^{-i(n+1)\chi t} + e^{in\chi t}\right)\right]|n\rangle \end{aligned}$$

这时，探测到原子处于 $|e\rangle$ 态和 $|g\rangle$ 态的概率分别为

$$\begin{aligned} P_e(t) &= \frac{1}{2}[1 - \cos((2n+1)\chi t)] = \sin^2\left[(2n+1)\frac{\chi t}{2}\right] \\ P_g(t) &= \frac{1}{2}[1 + \cos((2n+1)\chi t)] = \cos^2\left[(2n+1)\frac{\chi t}{2}\right] \end{aligned}$$

它们呈现随时间的周期振荡行为，称为 Ramsey 条纹。可见，振荡频率依赖于光子数 n ，因此可以通过测量原子布居数的振荡频率来确定光场的光子数。这种实验方案已被 Haroche 小组实现。上述讨论表明，将原子与腔场（量子化电磁场）的色散相互作用和原子与经典电磁场的共振相互作用结合，可以实现光子数的非破坏性测量。

Haroche 小组利用他们的实验系统，还做了许多其他很好的工作。例如，实现单光子量子存储器、实现可调量子位相门、实现多组分纠缠态、实现原子碰撞的相干控制、实现光子数态的产生和探测、实现单光子态 Wigner 函数的直接测量、实现介观光场的纠缠、实现非破坏性里德堡原子计数、记录单光子的产生与湮灭、重构腔场的非经典态、冻结相干腔场的增长、实现腔场衰减过程的层析和光子数态寿命的测量、利用量子 Zeno 效应裁剪腔场等。

总之，利用原子与光场（经典的或量子的）的相互作用（共振的或色散的），可观测到许多量子效应，这些量子效应有很多实际应用。

量子光学课堂作业

张柏铭 3230100298

2025 年 6 月 29 日

1 课堂练习-12月10日

1.1 问题：

利用海森堡不确定性关系估算光子的静止质量可探测极限

1.2 解答：

根据海森堡不确定性原理：

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

而光子静止质量的估算公式：

$$m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

联立有：

$$m = \frac{\hbar}{2\Delta t c^2}$$

选择特定的 Δt 值进行计算，例如取宇宙年龄为极限（137.97亿年）：

$$m = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{2 \times 137.97 \times 10^8 \times 86400 \times (3 \times 10^8)^2} = 3.09 \times 10^{-66} kg$$

2 课堂练习-12月17日

2.1 问题:

对比三体技术和人类目前技术水平的空间光通信。已知参数如下：

太阳参数

- 输出功率: $3 \times 10^{26} \text{ W}$
- 中心波长: 550 nm
- 光谱等效带宽: 1000 nm
- 发散角: 4π
- 望远镜/反射镜口径: 10 m

目前技术水平

- 激光平均功率: 1 W
- 激光波长: $\sim 500 \text{ nm}$
- 线宽/脉宽: $10 \text{ Hz}/100 \text{ fs}$
- 望远镜/反射镜口径: 10 m
- 单光子探测: 效率 70% , 暗计数: 100 counts/s

2.2 解答:

2.3 每秒光子数

(a)对于太阳:

$$N_{\text{Sun}} = \frac{P_{\text{Sun}}}{hc/\lambda} = \frac{3 \times 10^{26}}{6.626 \times 10^{-34} \cdot 3 \times 10^8 / 550 \times 10^{-9}} \approx 8.3 \times 10^{44} \text{ 光子/秒}$$

(b)对于激光:

$$N_{\text{Laser}} = \frac{P_{\text{Laser}}}{hc/\lambda} = \frac{1}{6.626 \times 10^{-34} \cdot 3 \times 10^8 / 500 \times 10^{-9}} \approx 2.5 \times 10^{18} \text{ 光子/秒}$$

2.4 探测带宽/线宽

(a)对于太阳, 使用 $\lambda_{\min} = 550 - 500 = 50\text{nm}$ 和 $\lambda_{\max} = 550 + 500 = 1050\text{ nm}$:

$$\nu_{\min} = \frac{c}{\lambda_{\max}}, \quad \nu_{\max} = \frac{c}{\lambda_{\min}} \\ \Delta\nu = \nu_{\max} - \nu_{\min}$$

代入数据有:

$$\Delta\nu = \frac{3 \times 10^8}{50 \times 10^{-9}} - \frac{3 \times 10^8}{1050 \times 10^{-9}} = 5.7 \times 10^{15}\text{Hz}$$

(b)对于激光, 首先计算中心频率 ν :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{500 \times 10^{-9} \text{ m}} = 6 \times 10^{14}\text{Hz}$$

然后计算对应的频率带宽 $\Delta\nu$:

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu^2} \cdot \Delta\nu \\ \Delta\lambda = \frac{3 \times 10^8}{(6 \times 10^{14})^2} \cdot 10 = 8.3 \times 10^{-12}\text{nm}$$

2.5 发散立体角

(a)对于太阳:

$$\Omega_{Sun} = 4\pi$$

(b)对于激光:

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{\Phi} = 6.1 \times 10^{-8}\text{rad}$$

$$\Omega_{Laser} = 2\pi(1 - \cos \Delta\theta) \approx \pi(\Delta\theta)^2 = 1.17 \times 10^{-14}$$

2.6 张角

$$\Omega = \frac{\pi(\Phi/2)^2}{4\pi D^2} = \frac{\pi * 5^2}{4\pi(4.22 * 365.25 * 86400 * 3 * 10^8)^2} = 3.9 * 10^{-33}$$

2.7 CW(Continuous Wave)-Φ 10 m收集光子数

(a)对于太阳:

$$n_{\text{Sun}} = N_{\text{Sun}} * \frac{\Omega}{\Omega_{\text{Sun}}} = 2.6 * 10^{11} \text{光子/秒}$$

对应功率:

$$P_{\text{Sun}} = n_{\text{Sun}} * \frac{hc}{\lambda_{\text{Sun}}} = 9.4 * 10^{-8} W = 94 nW$$

(b)对于激光:

$$n_{\text{Laser}} = N_{\text{Laser}} * \frac{\Omega}{\Omega_{\text{Laser}}} = 0.8 \text{光子/秒}$$

对应功率:

$$P_{\text{Laser}} = n_{\text{Laser}} * \frac{hc}{\lambda_{\text{Laser}}} = 3.2 * 10^{-19} W = 3.4 * 10^{-12} P_{\text{Sun}}$$

“童子光学”

日期：_____年_____月_____日 星期_____

参加者：_____

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

量子力学 波函数

第一章 量子力学基础 波色-爱因斯坦统计

1. 全同粒子 { 波色子：自旋为0或正整数，波函数交换对称
 费米子：自旋半奇数，交换反对称，费米-狄拉克统计

推导：对处于S态的粒子 $E(s) = \varepsilon_{(s)} - \mu_{(s)}$ ($\varepsilon_{(s)}$ 是动能， $-\mu_{(s)}$ 势能，负号：约束)

$$P_{(s)} = A e^{-E_{(s)}/kT} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_{(s)}}{kT}}. \quad n \uparrow \text{处} \rightarrow S: P_{(s)}^n = \frac{1}{Z^n} e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT} := P_{(n)}$$

其中 $Z = \sum_n e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT}$ 称广义配分函数，即 $P(\varepsilon - \mu)$ 态上所有可能粒子数

① 波色子：
$$Z = \sum_n e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\varepsilon - \mu}{kT}}} \quad (\text{即 } e^{-(\varepsilon - \mu)/kT} < 1, \text{ 即 } \varepsilon > \mu)$$

$$\text{令 } x = \frac{\varepsilon - \mu}{kT}, \quad P_{(n)} = \frac{1}{Z} e^{-nx}, \quad Z = \sum_n e^{-nx}$$

$$\bar{n}_{BE} = \sum_n n P_{(n)} = \sum_n n \frac{1}{Z} e^{-nx} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$= -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})^{-1} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} - 1} \quad \text{即 B-E 分布.}$$

② 费米子，
 $\text{反波函数反对称，导致泡利不相容原理. 需么？}$

$$Z = \sum_n e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT} = 1 + e^{-\frac{(\varepsilon - \mu)}{kT}}, \quad P_{(n)} = \frac{1}{Z} e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT}$$

$$\bar{n}_{FD} = \sum_n n P_{(n)} = 0 P_{(0)} + 1 P_{(1)} = \frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon - \mu)}{kT}} + 1}$$

参加者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

$$2. \text{① 纯态 } |\psi\rangle \text{ 密度算符: } P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{厄米} \quad P^\dagger = P \\ \text{半正定} \quad \langle P | P \rangle \geq 0 \\ \text{迹} \quad \text{Tr}(P) = 1 \\ \text{算符: } P^2 = P \end{array} \right. \quad \text{②}$$

$$\text{② 混合态 } P_{\text{混}} = \sum_i P_i P_i = \sum_i P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \text{ 满足 } \sum_i P_i = 1$$

③ 纯态 $P = \sum_m c_m C_m^\dagger |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$ 除对角项, 还存在非对角项, 引起干涉效应. 称相干项. 能量损耗 \rightarrow 非对角元衰减 \rightarrow 退相干

$$3. \text{ 海森堡绘景: } \frac{d}{dt} A_H(t) = \frac{i}{\hbar} [H, A_H(t)], \text{ 即守恒量 } \Leftrightarrow \text{与 } H \text{ 对易}$$

4. 绘景变换举例:

例 1: 二能级原子与单模电场 (薛定谔绘景)

$$H = H_0 + V = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \Delta (e^{i\omega t} \sigma + e^{-i\omega t} \sigma^*)$$

$$\text{① 相互作用绘景: } U = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} = e^{-i \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z t} \quad \xrightarrow{\text{原子跃迁频率}}$$

$$H' = i \hbar \frac{dU^*}{dt} U + U^* H U = i \hbar \cdot i \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + U^* \left[\frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \Delta (e^{i\omega t} \sigma + e^{-i\omega t} \sigma^*) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \Delta (e^{i\omega t} \sigma e^{-i\omega t} + \text{H.c.})$$

$$= \hbar \Delta (\sigma e^{-i\omega t} + \text{H.c.}) \quad \text{其中 } \Delta = \omega_a - \omega$$

$$\text{② 光场旋转坐标系: } U = e^{-i \frac{1}{2} \hbar \omega_0 z t} \quad \xrightarrow{\text{电磁场坐标系(绘景)}}$$

$$H' = i \hbar \frac{dU^*}{dt} U + U^* H U = -\frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \Delta (\sigma + \sigma^*)$$

$$= \frac{1}{2} \hbar \Delta \sigma_z + \hbar \Delta (\sigma + \sigma^*) \quad \text{不包含时间.}$$

例 2, JC 模型 (单个二能级原子与量子单模电磁场的相互作用)

$$H = H_0 + V = (\hbar \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z) + \hbar g (a^\dagger \sigma + \text{H.c.}) \quad \text{变换方法(图上)}$$

第二章 经典电磁场和原子相互作用

1. 原子在电磁场中: $H = H_A(\text{自由}) + V(\text{相互作用})$

$$H_A = \sum_k \hbar \omega_k |k\rangle \langle k| . \quad V = -\vec{d} \cdot \vec{E} = e \vec{r} \cdot \vec{E} \quad (\text{偶极近似, } \vec{d} \leftrightarrow \text{电偶极子})$$

由于 $r_{\text{原子}} \sim 10^{-10} \text{ m} \ll \lambda \approx 400 \sim 700 \text{ nm}$, 其中 $\vec{d} = \sum_{j,k} d_{jk} |j\rangle \langle k|$

\therefore 线上, $H = \sum_k \hbar \omega_k |k\rangle \langle k| - E \cdot \sum_{j,k} d_{jk} |j\rangle \langle k|$ 矩阵元.

2. 单模与多能级

设 H_A 特征矢 $|\psi_n\rangle = |n\rangle$, 则 $H_A |n\rangle = \hbar \omega_n |n\rangle$. 展开: $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-i\omega_n t} |n\rangle$

$$\text{代入 } i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle : \quad i\hbar \sum_n (c_n - i\omega_n c_n) e^{-i\omega_n t} |n\rangle = \sum_n c_n e^{-i\omega_n t} (H + V) |n\rangle$$

$$\text{左乘 } \langle m |, \quad i\hbar \langle m | (c_n - i\omega_n c_n) e^{-i\omega_n t} = \sum_n c_n e^{-i\omega_n t} \langle m | H_A + V | n \rangle$$

$$= \sum_n c_n e^{-i\omega_n t} (\hbar \omega_n \delta_{mn} + \langle m | V | n \rangle) = c_m e^{-i\omega_m t} \hbar \omega + \dots$$

$$\text{再化简有: } i\hbar \dot{c}_m e^{-i\omega_m t} = \sum_n c_n e^{-i\omega_n t} \langle m | V | n \rangle \quad (\text{普遍适式})$$

$$\# 对偶极近似: \langle m | V | n \rangle = \langle m | -\vec{E} \cdot \sum_j d_{jn} |j\rangle \langle k| |n\rangle = -\vec{E} \cdot \vec{d}_{mn}$$

$$\text{回代有: } i\hbar \dot{c}_m(t) = -\vec{E} \cdot \sum_n \vec{d}_{mn} c_n(t) e^{i\omega_n t} \quad (\omega_{mn} = \omega_m - \omega_n)$$

3. 单模与多能级: $\vec{E}_{(t)} = \vec{E}_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} \vec{E}_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ 即为反旋波项

$$\Rightarrow C_m(t) = i \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{d}_{m0}}{\hbar} e^{i\frac{1}{2}(\omega_m - \omega)t} \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(\omega_m - \omega)t \right]}{\omega_m - \omega} \quad \begin{matrix} \text{失谐量.} \\ \Delta = \omega_m - \omega \end{matrix}$$

$$\text{跃迁概率} \quad P_{i \rightarrow m}(t) = |C_m(t)|^2 = \left(\frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{d}_{m0}}{2\hbar} \right)^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta}{2} t \right)}{\left(\frac{\Delta}{2} \right)^2} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{失谐频率} \end{matrix}$$

参加者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

4. 单模 $\psi = \Psi E$ 级.

基态双能级 $\left\{ \begin{array}{l} \text{上能级} |e\rangle : \hbar\omega_e = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \\ \text{下能级} |g\rangle : \hbar\omega_g = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 \end{array} \right.$

$$H_0 = \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_g |g\rangle\langle g| = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \sigma_z \quad (\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)$$

电场极矩: $\vec{d} = \vec{d}_{eg} |e\rangle\langle g| + \vec{d}_{ge} |g\rangle\langle e| = \vec{\mu} (\sigma^+ + \sigma^-) \rightarrow \begin{array}{l} \mu = deg = d_{ge} \\ \downarrow \text{上跃算符} \\ \text{下跃算符} \end{array}$

$$V = -\vec{d} \cdot \vec{E} = -\vec{\mu} (\sigma^+ + \sigma^-) \cdot \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi) = \hbar \Omega_R (\sigma^+ + \sigma^-) \cos(\omega t + \varphi)$$

其中 Rabi 频率 $\Omega_R = -\frac{1}{\hbar} \vec{\mu} \cdot \vec{E}_0$, 描述 \vec{E}_0 与光场耦合强度.

哈密顿量: $H = H_0 + V = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \sigma_z + \hbar \Omega_R (\sigma^+ + \sigma^-) \cos(\omega t + \varphi)$

在相互作用下, $V_2(t) = U_0^\dagger(t) V U_0(t)$. $U_0(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} = e^{-i\frac{1}{2}\hbar\omega_0 t}$

$$(\sigma^+)_2 = U_0^\dagger \sigma^+ U_0 = e^{i\frac{1}{2}\hbar\omega_0 t} \sigma^+ e^{-i\frac{1}{2}\hbar\omega_0 t} = \sigma^+ e^{i\omega_0 t} \quad (\text{见}-\frac{1}{2}+\) $(\sigma)_2 = \sigma^- e^{-i\omega_0 t}$$$

$H_2 = V_2(t) = \hbar \Omega_R (\sigma^+ e^{i\omega_0 t} + \sigma^- e^{-i\omega_0 t}) \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \frac{1}{2} [e^{i(\omega_0+\omega)t+\varphi} + e^{-i(\omega_0-\omega)t-\varphi}] + \text{H. c.}$

其中 $\omega_0 + \omega \gg \omega_0 - \omega = \Delta$ 异谐量, 考虑 $\omega_0 + \omega$ 高频项 (旋波近似)

$$H_2 = \frac{1}{2} \hbar \Omega_R [\sigma^+ e^{i(\omega_0+\omega)t+\varphi} + \sigma^- e^{-i(\omega_0-\omega)t-\varphi}]$$

或在光频旋转下: $H^0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \frac{1}{2} \hbar \Omega_R (\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma^- e^{i\varphi})$

5. 求解单模与二能级。

(1) 光场相互作用 ($\alpha=0$)

$$H_2 = \frac{1}{2} \hbar \Omega_R (\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})$$

① 概率幅方法

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H |\psi\rangle$$

$$\text{设 } |\psi\rangle = C_e |e\rangle + C_g |g\rangle$$

$$\text{回代: } i\hbar (C_e |e\rangle + C_g |g\rangle) = \frac{1}{2} \hbar \Omega_R (\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})(C_e |e\rangle + C_g |g\rangle)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{C}_e = -\frac{i}{2} \Omega_R C_g e^{-i\varphi} \\ \dot{C}_g = -\frac{i}{2} \Omega_R C_e e^{i\varphi} \end{cases} = \frac{1}{2} \hbar \Omega_R (C_e e^{-i\varphi} |g\rangle + C_g e^{i\varphi} |e\rangle)$$

$$(\sigma^+ |e\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |g\rangle)$$

$$\text{解得: } \begin{cases} C_e(t) = A \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + B \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \\ C_g(t) = [-A \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) + B \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)] e^{i\varphi} \end{cases}$$

$$\text{若初态为 } |e\rangle, \text{ 则 } |\psi_{(0)}\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) |e\rangle - i e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) |g\rangle$$

② 时间演化算符方法: $|\psi(t)\rangle = U_{(t)} |\psi_{(0)}\rangle$

时间演化算符

$$\text{回代: } i\hbar \frac{dU_{(t)}}{dt} = H U_{(t)}, \text{ 令 } U_{(t)} = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t') dt'} e^{-\frac{i}{\hbar} H_2 t}$$

$$\begin{aligned} \text{若 } A^2 = I, \text{ 则 } e^{-ixA} &= \sum_n \frac{(-ixA)^n}{n!} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-xi)^n x^n A}{n!} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-ix)^n}{n!} I \\ &= \sum_m \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} I - \frac{(-1)^m ix^{2m+1}}{(2m+1)!} A = \cos x I - i \sin x A \end{aligned}$$

$$\text{而 } (\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})^2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}^2 = I$$

$$\text{故有: } U = e^{-\frac{i}{\hbar} H_2 t} = e^{-\frac{i}{\hbar} \Omega_R t (\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})} = \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) I - i \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) (\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma e^{i\varphi})$$

$$|\psi_{(0)}\rangle = U |\psi_{(0)}\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) |e\rangle - i \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) |g\rangle e^{i\varphi}$$

$$\text{③ 上能级概率 } P_e(t) = C_e^2 = \cos^2 \frac{\Omega_R}{2} t = \frac{1}{2} [1 + \cos(\Omega_R t)]. \text{ 下: } P_g(t) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\Omega_R t)]$$

$$\text{布居数反转: } W_{(t)} = P_e(t) - P_g(t) = \cos(\Omega_R t)$$

Rabi振荡

参加者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

(2) 异谐相互作用 ($\Delta \neq 0$)

① 概率幅方法: 相互作用绘景旋波近似后 $H_2 = \frac{1}{2} \hbar \Omega_R \left[\sigma^+ e^{i(\omega t - \varphi)} + \sigma^- e^{-i(\omega t - \varphi)} \right]$

同(1)解得: $C_e(t) = e^{i\frac{\Delta}{2}t} \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) - i\frac{\Omega}{2} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right] C_{e(0)} - i\frac{\Omega_R}{2} e^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) C_{g(0)}$
 $C_g(t) = e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + i\frac{\Omega}{2} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right] C_{g(0)} - i\frac{\Omega_R}{2} e^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) C_{e(0)}$

其中 $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2} = \sqrt{(\omega_{eg} - \omega)^2 + (-\frac{1}{\hbar} \vec{J} \cdot \vec{E}_0)^2}$

取初态 $|e\rangle$, 则 $W_{ee} = \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + \frac{\Omega^2 - \Omega_R^2}{\Delta^2 + \Omega_R^2} \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right)$

(3) ~~密度矩阵法~~

② 密度矩阵法: $P = |\psi\rangle \langle \psi| = (C_e|e\rangle + C_g|g\rangle)(C_e^* \langle e| + C_g^* \langle g|)$

$$= \begin{pmatrix} C_e \\ C_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_e^* & C_g^* \\ C_g & C_g^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_e C_e^* & C_e C_g^* \\ C_g^* C_g & C_g C_g^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{ee} & C_e C_g^* \\ C_g C_e^* & P_{gg} \end{pmatrix}$$

a. 由概率幅: $\frac{d}{dt} P_{ee} = \frac{d}{dt}(C_e C_e^*) = i \frac{\Omega_R}{2} [e^{-i(\omega t - \varphi)} P_{eg} - e^{i(\omega t - \varphi)} P_{ge}]$

$$\frac{d}{dt} P_{eg} = \frac{d}{dt}(C_e C_g^*) = i \frac{\Omega_R}{2} [P_{ee} - P_{gg}] e^{i(\omega t - \varphi)}$$

b. 由密度算符方程: $\frac{d}{dt} P = \frac{1}{i\hbar} [H, P]$

其中 $H = \frac{1}{2} \hbar \Omega_R \left[\sigma^+ e^{i(\omega t - \varphi)} + \sigma^- e^{-i(\omega t - \varphi)} \right] = \frac{1}{2} \hbar \Omega_R \left[\begin{matrix} 0 & e^{i(\omega t - \varphi)} \\ e^{-i(\omega t - \varphi)} & 0 \end{matrix} \right]$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P_{ee} & P_{eg} \\ P_{ge} & P_{gg} \end{bmatrix} = \frac{1}{i\hbar} \cdot \frac{1}{2} \hbar \Omega_R \left[\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{ee} & P_{eg} \\ P_{ge} & P_{gg} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{ee} & P_{eg} \\ P_{ge} & P_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right]$$
$$= \frac{\Omega_R}{2i} e^{i(\omega t - \varphi)} \begin{pmatrix} P_{ee} + P_{gg} & P_{gg} - P_{ee} \\ P_{gg} - P_{ee} & -(P_{ge} + P_{eg}) \end{pmatrix}$$

c. Bloch 大量 布居差 $W = P_{ee} - P_{gg}$, $P_{eg} = U + iV$, $P_{ge} = U - iV$

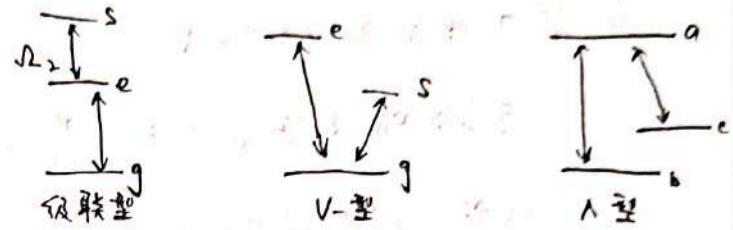
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dW}{dt} = 2\Omega_R [U \sin(\omega t - \varphi) - V \cos(\omega t - \varphi)] \\ \frac{dU}{dt} = -\frac{\Omega_R}{2} W \sin(\omega t - \varphi) \\ \frac{dV}{dt} = \frac{\Omega_R}{2} W \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

解得

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

6. 双模和三能级。

$$H = H_0 + V.$$



自由哈密顿量: $H_0 = \sum_k \hbar \omega_k |k\rangle \langle k| = \hbar \omega_a \sigma_{aa} + \hbar \omega_b \sigma_{bb} + \hbar \omega_c \sigma_{cc}$

相互作用: $V_z = -\frac{\hbar}{2} [\Omega_1 e^{-i\varphi_1} e^{i\omega_1 t} |a\rangle \langle b| + \Omega_2 e^{-i\varphi_2} e^{i\omega_2 t} |a\rangle \langle c| + \text{H.c.}]$

其中 $\Omega_1 = \frac{1}{\hbar} \vec{\mu}_{ab} \cdot \vec{E}_1^{(0)}$, $\Omega_2 = \frac{1}{\hbar} \vec{\mu}_{ac} \cdot \vec{E}_2^{(0)}$, $\Delta_1 = \omega_{ab} - \omega_1$, $\Delta_2 = \omega_{ac} - \omega_2$

取 $t=1$, $|\psi\rangle = \sum b_k(t) |k\rangle$, Tdλ: $\frac{db_k}{dt} = -i \sum_j \langle k | V_z | j \rangle b_j$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{db_b}{dt} = \frac{i}{2} (\Omega_1 e^{-i\varphi_1} b_b + \Omega_2 e^{-i\varphi_2} b_c) \\ \frac{db_a}{dt} = \frac{i}{2} \Omega_1 e^{i\varphi_1} b_a \\ \frac{db_c}{dt} = \frac{i}{2} \Omega_2 e^{i\varphi_2} b_c \end{cases}$$

解略. 见书 P47, P48.

7. 一些概念

① 取初态 $|\psi_{(0)}\rangle = \cos(\frac{\theta}{2}) |b\rangle + \sin(\frac{\theta}{2}) e^{-i\varphi} |c\rangle$. 令 $\Omega_1 = \Omega_2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi = \pm\pi$

$\Rightarrow |\psi_{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|b\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} |c\rangle)$ 与时间无关. 故有:

相干布居数囚禁: 尽管有电磁场作用. 但两跃迁通道间相干干涉,

原子状态不变, 稳定在“囚禁态”

② 当 Rabi 频率 Ω_1 , Ω_2 适时, 取 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, 此时本征方程: $V_z(t) |D_k(t)\rangle = \lambda_k |D_k(t)\rangle$

其中 $V_z(t) = -\frac{1}{2} [\Omega_1(t) |a\rangle \langle b| + \Omega_2(t) |a\rangle \langle c| + \text{H.c.}] \Rightarrow \lambda_0 = 0$, $\lambda_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \Omega_{\pm}$

相应本征态: $|D_0(t)\rangle = \frac{1}{\Omega_{\pm}} [\Omega_{\pm} |b\rangle - \Omega_{\mp} |c\rangle]$ 暗态, 囚禁态.

$$|D_{\pm}(t)\rangle = \frac{1}{\Omega_{\pm}} [|a\rangle \mp \frac{1}{\Omega_{\pm}} [\Omega_{\pm} |b\rangle + \Omega_{\mp} |c\rangle]]$$
 壳态.

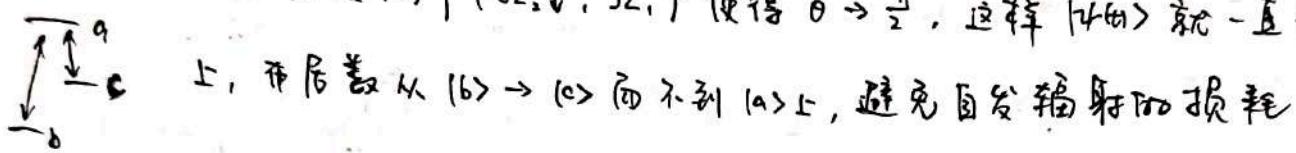
暗态 $|D_0(t)\rangle = \cos \theta |b\rangle - \sin \theta |c\rangle$. 其中 $\cos \theta = \frac{\Omega_1}{\Omega_{\pm}}$, $\sin \theta = \frac{\Omega_2}{\Omega_{\pm}}$, $\tan \theta = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$. θ 是常角.

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

⑤ 相干布居数转移 (相干布居数转移)：微扰 (相互作用) 随时间变化率远

小于瞬时本征能级差 $\frac{d\theta}{dt} \ll |\lambda_z - \lambda_0|$, 即 $|\frac{1}{\hbar} \frac{d\epsilon}{dt} (\mu_1, \mu_2)| \ll |\lambda_z| = \frac{\Delta}{2}$,

此时缓慢调节 $\mu_2, \downarrow, \mu_2, \uparrow$ 使得 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 这样 $|4\rangle$ 就一直在暗态 $|0_{\text{in}}$



8. 电磁诱导透明.

并三能级 (或多能级) 原子组成的介质，在强驱动电磁场作用下，

对弱探测电磁场呈透明 (不吸收) 的现象。

① 哈密顿量: $H = H_0 + V$

$$H_0 = \sum_{i=a,b,c} \hbar \omega_i |i\rangle \langle i| = \sum_i \hbar \omega_i \sigma_{ii}$$

$$V = -\frac{\hbar}{2} \int \mu_1 e^{-i(\omega_i t + \varphi_i)} |a\rangle \langle b| + \mu_2 e^{-i(\omega_i t + \varphi_i)} |a\rangle \langle c| + \text{H.c.}$$

其中 探测场 $\mu_1 = \vec{\mu}_{ab} \cdot \vec{E}_1^{(0)} / \tau_1$, 跑动场 $\mu_2 = \vec{\mu}_{ac} \cdot \vec{E}_2^{(0)} / \tau_2$

$$\text{或写成 } V = -\frac{\hbar}{2} \int \frac{D_{ab} \Sigma}{\tau_1} e^{-ivt} |a\rangle \langle b| + \mu_2 e^{-i\varphi_d} e^{-iv_d t} |a\rangle \langle c| + \text{H.c.}$$

其中 D_{ab} 为 ab 能级间电偶极矩矩阵元, Σ 为 探测场振幅频率,

μ_2 为 跑动场与 ac 跃迁耦合的 Rabi 频率. v_d, φ_d 为 跑动场频率. 相

② 密度矩阵方程求解.

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, p] \Rightarrow \frac{dp_{jk}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, p]_{jk} = -\frac{i}{\hbar} \sum_i [H_{ij}, p_{ik} - p_{ji} H_{ik}]$$

参加者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{P}_{aa} & \dot{P}_{ab} & \dot{P}_{ac} \\ \dot{P}_{ba} & \dot{P}_{bb} & \dot{P}_{bc} \\ \dot{P}_{ca} & \dot{P}_{cb} & \dot{P}_{cc} \end{pmatrix} = -\frac{i}{\hbar} \begin{bmatrix} t_{W_a} & -\frac{1}{2}D_{ab}\varepsilon e^{-i\omega t} & -\frac{i}{2}J_{ad}e^{-i(\nu_d t + \varphi_d)} \\ -\frac{1}{2}D_{ba}\varepsilon e^{i\omega t} & t_{W_b} & 0 \\ -\frac{i}{2}J_{dc}e^{i(\nu_d t + \varphi_d)} & 0 & t_{W_c} \end{bmatrix}, P$$

令 $\omega_{jk} = \omega_j - \omega_k$, 3 个衰减速率 γ_i , 初态 $|b\rangle$, $P_{bb}^{(0)} = 1$, $P_{aa}^{(0)} = 0$.

由于探测场很弱, 保留至 $\Sigma - P\eta$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} P_{ab} = -(\gamma_1 + i\omega_{ab}) P_{ab} + i \frac{D_{ab}\varepsilon}{2\hbar} e^{-i\omega t} + i \frac{J_{ad}}{2} e^{-i(\nu_d t + \varphi_d)} P_{cb} \\ \frac{d}{dt} P_{ac} = -(\gamma_2 + i\omega_{ac}) P_{ac} + i \frac{J_{ad}}{2} e^{-i(\nu_d t + \varphi_d)} (P_{aa} - P_{cc}) \\ \frac{d}{dt} P_{cb} = -(\gamma_3 + i\omega_{cb}) P_{cb} + i \frac{J_{ad}}{2} e^{i(\nu_d t + \varphi_d)} P_{ab} \end{array} \right.$$

注意到 P_{ab} 和 P_{cb} [它们] 合, 与 P_{ac} 无关. 令 $\tilde{P}_{ab} = P_{ab} e^{i\omega t}$. $\tilde{P}_{cb} = P_{cb} e^{i(\nu_d t - \varphi_d)}$
并使 $\nu_{\text{探测}} = \omega_{ac}$ 共振, $\Delta = \omega_{ab} - \nu$ 失谐. 原式写为:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{P}_{ab} \\ \tilde{P}_{cb} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \gamma_1 + i\Delta & -i \frac{J_{ad}}{2} e^{-i\varphi_d} \\ -i \frac{J_{ad}}{2} e^{i\varphi_d} & \gamma_3 + i\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{P}_{ab} \\ \tilde{P}_{cb} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \frac{D_{ab}\varepsilon}{2\hbar} \\ 0 \end{pmatrix}$$

P_{ab} 这里 ν 为常数

$$\text{不懂} \Rightarrow \tilde{P}_{ab} = \frac{i D_{ab} \varepsilon (\gamma_3 + i\Delta)}{2\hbar [(\gamma_1 + i\Delta)(\gamma_3 + i\Delta) + \frac{J_{ad}^2}{4}]} . \text{而灵敏度} P = 2N_A D_{ba} \tilde{P}_{ab}$$

$$\text{当} \Delta = 0 \text{ 时} \chi'' \propto \frac{\gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_3} \cdot \chi = \frac{N_A |D_{ab}|^2}{\hbar \Sigma} \frac{i(\gamma_1 + i\Delta)}{(\gamma_1 + i\Delta)(\gamma_3 + i\Delta) + \frac{J_{ad}^2/4}} = \chi' + i\chi''$$

$$\text{要求} \gamma_3 \ll \gamma_1 \Rightarrow \begin{cases} \text{探测场的色散} & \chi' \\ \text{探测场吸收} & \chi'' \end{cases} \quad \text{其中} \chi'' = \frac{N_A |D_{ab}|^2}{\hbar \Sigma} \frac{\Delta^2(\gamma_1 + \gamma_3) - \gamma_3(\Delta^2 - \gamma_1 \gamma_3 - \frac{J_{ad}^2}{4})}{(\Delta^2 - \gamma_1 \gamma_3 - \frac{J_{ad}^2}{4})^2 + \Delta^2(\gamma_1 + \gamma_3)^2}$$

在 $\Delta = 0$ 时, $\chi'' \approx 0$, $\chi' \approx 0$. 即 $\chi'' \approx 0$, $\chi' \approx \chi$, $\chi = \sqrt{1 + \chi'^2} = \sqrt{\chi'^2 + \Delta^2(\gamma_1 + \gamma_3)^2}$

参加者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

9. 不反射率且无吸收。

原子系统对外电场线性响应: 复极化强度 $P_{(z,t)} = \Sigma_0 \int_0^\infty dt \tilde{X}_{(t)} E(z,t)$

对 $E = \frac{1}{2} \epsilon e^{-i(\nu t - kz)} + C.C.$ 有: $P = \frac{1}{2} \Sigma_0 \epsilon [X_{(v)} e^{-i(\nu t - kz)} + C.c.]$

其中 $X_{(v)} = \int_0^\infty dt \tilde{X}_{(t)} e^{i\nu t}$. 由 $\lambda \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$

$\Rightarrow k^2 = [1 + X_{(v)}] \frac{\nu^2}{c^2}$. 令 $k = \frac{n(v)\nu}{c}$ $\Rightarrow n^2(v) = 1 + X(v)$

令 $X = X' + iX''$, $n = n' (\text{反射率}) + i n'' (\text{n''} > 0 \text{ 吸收})$

$\Rightarrow n' + i n'' = (1 + X' + iX'')^{\frac{1}{2}} = [(1 + X')^2 + X''^2]^{\frac{1}{4}} e^{i \operatorname{sgn}(X'') \cdot i \frac{\pi}{2} \rightarrow \arctan \frac{|X''|}{1+X'}}$

解得: $\begin{cases} \text{反射率} & n' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1+X')^2 + X''^2} + (1+X') \\ \text{吸收率} & n'' = \frac{\operatorname{sgn}(X'')}{\sqrt{2}} \sqrt{(1+X')^2 + X''^2} - (1+X') \end{cases}$

在 $|X'| \gg |X''| > 0$ 时, $n' \approx \sqrt{1+X'}$, $n'' \approx 0$.

10. 无反转换光。

① 考虑八型三能级双模, 原子初始处在两个下能级的相干叠加态

$$|\psi_{(0)}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |b\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} |c\rangle \quad \text{且 } \Omega_1 = \Omega_2, \theta = \frac{\pi}{2}, (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi) = \pm \pi$$

原子将永远囚禁于此状态。

② 处于 $|a\rangle$ 时, $b_{a(t)} = \cos \frac{\Omega}{2} t$, $b_c(t) = \frac{i\Omega_1 e^{i\varphi_1}}{\Omega} \sin \frac{\Omega}{2} t$, $b_c(t) = \frac{i\Omega_2 e^{i\varphi_2}}{\Omega} \sin \frac{\Omega}{2} t$

发射概率: $P_{\text{emiss}}(t) = (b_a(t))^2 + (b_c(t))^2 = \sin^2 \left(\frac{\Omega}{2} t \right) \approx \frac{1}{4} \Omega^2 t^2$

③ N_{b+c} 处于 ①, N_a 处于 ② 而 N_{b+c} 囚禁, N_a 发射能量, 则 $N_a < N_{b+c}$ 也能光放大。

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

第三章 电磁场的算符表示

1. 站波(正则模)形式.

$$E_x(z,t) = \sum_j A_j q_j(t) \sin(k_j z), \quad k_j = j \frac{\pi}{L} \quad \text{且 } \frac{d q_j}{dt} \text{ 为常量}$$

$$\vec{B}(z,t) = \hat{e}_y B_y(z,t). \quad \text{有: } -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \Rightarrow B_y = \frac{1}{c} \sum_j \frac{A_j}{m_j} \frac{p_j(t)}{m_j} \cos k_j z$$

$$\text{总能量: } H = \frac{1}{2} \int dV (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 B^2) = \sum_j \frac{V \epsilon_0 A_j^2}{2 m_j w_j^2} \left(\frac{1}{2} m_j w_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{2 m_j} \right)$$

$$\text{令 } \frac{V \epsilon_0 A^2}{2 m_j w_j^2} = 1 \Rightarrow A_j = \sqrt{\frac{2 m_j w_j^2}{V \epsilon_0}} \quad \text{原式 } H = \sum_j \left(\frac{1}{2} m_j w_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{2 m_j} \right)$$

$$\text{量 } \alpha_j = \frac{1}{\sqrt{2 m_j \hbar w_j}} [m_j w_j q_j(t) + i p_j(t)] \quad \alpha_j^+ = \beta_j^2.$$

回代有:

$$\begin{cases} H_j = \hbar w_j (\alpha_j^+ \alpha_j + \frac{1}{2}) \\ E_j = E_j^{(s)} \sin(k_j z) [\alpha_j + \alpha_j^+] \\ B_j = -i \frac{E_j^{(s)}}{c} \cos(k_j z) [\alpha_j - \alpha_j^+] \end{cases} \quad \text{standing wave 站波.}$$

其中 $E_j^{(s)} = \sqrt{\frac{\hbar w_j}{V \epsilon_0}}$

并还有一种引入势 A, ϕ 的.

2. 行波形式.

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \end{cases} \quad \text{无源场} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{A} = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\text{解得 } \vec{A}(t,z) = \sum_j A_j^{(s)} [a_j(t) u_j(z) + c.c.] \quad \text{其中 } \begin{cases} \nabla^2 \vec{u}_j(z) + k_j^2 \vec{u}_j(z) = 0 \\ \frac{d^2 a_j}{dt^2} + w_j^2 a_j(t) = 0. \end{cases}$$

考虑存在大而有限边长 L 的立方体, $\vec{u}_{j(t)} = e^{ik_j z} \hat{e}_j$

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

$$\text{利用边界条件 } \Rightarrow \vec{k}_j = \frac{2\pi}{L} (l_j \hat{e}_x + m_j \hat{e}_y + n_j \hat{e}_z)$$

$$\text{回代: } \vec{A}_{(\vec{r}, t)} = \sum_j \hat{e}_j A_j^{(n)} [a_j e^{-i(w_j t - \vec{k}_j \cdot \vec{r})} + c.c.] \quad \text{因为 } \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{有: } \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{(\vec{r}, t)} = i \sum_j \hat{e}_j w_j A_j^{(n)} [a_j^{(n)} u_j^{(n)} + c.c.] \\ \vec{B}_{(\vec{r}, t)} = i \sum_j (\vec{k}_j \times \hat{e}_j) \frac{w_j A_j^{(n)}}{c} [a_j^{(n)} u_j^{(n)} - c.c.] \end{array} \right.$$

$$\text{回代有: } H = \sum_j \left(\frac{2V \epsilon_0 w_j A_j^{(n)}}{t} \right) \cdot \frac{1}{2} \hbar w_j (a_j a_j^* + a_j^* a_j) = \sum_j h_j w_j (a_j^* a_j + \frac{1}{2})$$

$$\downarrow \quad \Rightarrow \quad A_j = \sqrt{\frac{t}{2V \epsilon_0 w_j}}$$

3. 线上.

哈密顿量均有

$$H_j = \hbar w_j (a_j^* a_j + \frac{1}{2})$$

$$(1) \text{ 静止: } E_j^{(s)} = E_j^{(0)} = \sqrt{\frac{\hbar w_j}{V \epsilon_0}} \quad , \quad B_j^{(s)} = B_j^{(0)} = \frac{E_j^{(0)}}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\hbar w_j}{V \epsilon_0}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_j^{(2, s)} = E_j^{(s)} \sin(k_j z) [a_j e^{-i w_j t} + a_j^* e^{i w_j t}] \\ B_j^{(2, s)} = -i B_j^{(s)} \cos(k_j z) [a_j e^{-i w_j t} - a_j^* e^{i w_j t}] \end{array} \right.$$

$$(2) \text{ 行波: } E_j^{(n)} = \sqrt{\frac{\hbar w_j}{2V \epsilon_0}}, \quad B_j^{(n)} = \frac{E_j^{(n)}}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\hbar w_j}{2V \epsilon_0}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_j^{(\vec{r}, t)} = i \hat{e}_j E_j^{(n)} [a_j e^{-i(w_n t - \vec{k}_j \cdot \vec{r})} - a_j^* e^{i(w_n t - \vec{k}_j \cdot \vec{r})}] \\ \vec{B}_j^{(\vec{r}, t)} = i (\vec{k}_j \times \hat{e}_j) B_j^{(n)} [a_j e^{-i(w_n t - \vec{k}_j \cdot \vec{r})} - a_j^* e^{i(w_n t - \vec{k}_j \cdot \vec{r})}] \end{array} \right.$$

日 期：_____ 年 _____ 月 _____ 日 星期 _____

参 加 者：_____

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

第四章 电磁场和量子态

1. 单模场光子数态 (Fock态)

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \rightarrow |n+1\rangle = \frac{a^+}{\sqrt{n+1}}|n\rangle \Rightarrow |n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

$$\text{单模场 } E_{(z,t)} = E^{(z)} \sin(kz) (a e^{-i\omega t} + a^+ e^{i\omega t}) \Rightarrow \langle E \rangle = \langle n | E | n \rangle = 0$$

$$\text{涨落 } V = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 \neq 0. \text{ 真空涨落}$$

$$\begin{cases} \text{正交合量算符} \\ x_1 = \frac{1}{2}(a + a^+) \\ x_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+) \end{cases}$$

$$[x_1, x_2] = \frac{i}{2}$$

$$\text{不确定性原理: } V_A V_B \geq \frac{1}{4} |[A, B]|^2. \text{ 有 } V(x_1) V(x_2) \geq \frac{1}{16}$$

$$\text{标准偏差 } \Delta A = \sqrt{V_A}, \Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |[A, B]|$$

$$\text{对光子数态, } x_{1,2} = \frac{1}{4} [(2a^+a+1) \pm (a^2+a^4)], \text{ 有 } \langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle = 0.$$

$$V_{\text{Fock}}(x_1) = V_{\text{Fock}}(x_2) = \frac{1}{4}(2n+1). \text{ 在真空态, } n=0 \text{ 有: } \Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{1}{2}, \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 = \frac{1}{4}$$

2. 相干态

量子噪声极限

① 定义: 相干态是光子湮灭算符的本征态。

$$a|\alpha\rangle = \alpha|0\rangle \quad (\alpha \text{ 非虚数, 故 } |\alpha\rangle \text{ 为复数} = re^{i\theta})$$

② 相干态可通过将真空态平移产生。

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$$

$$\hookrightarrow \text{平移算符 } D(\alpha) = e^{\alpha a^+ - \alpha^* a}$$

参加者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

$D(\omega)$ 性质:

$$D^+(\omega) = D^-(\omega) = D(-\omega)$$

$$D^+(\alpha) \circ D(\alpha) = \alpha + \alpha$$

$$D(\alpha) D(\beta) = \exp \left[\frac{1}{2} (\alpha \beta^* - \alpha^* \beta) \right] D(\alpha + \beta)$$

$$|\alpha\rangle = D(\omega)|0\rangle = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\alpha^* \alpha} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\alpha^* \alpha} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$$

③ 相干态平均光子数 $\bar{n} = \langle n \rangle_{coh} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha$

$$\bar{n} = \bar{n}(\bar{n}+1), \quad V_{coh}(n) = \langle n^2 \rangle_{coh} - \langle n \rangle_{coh}^2 = \bar{n}$$

④ 相干态在光子数态表象: $|\alpha\rangle = \sum c_n |\omega\rangle, \quad c_n = \langle n | \alpha \rangle, \quad c_n = e^{-\frac{1}{2}(\alpha)^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$

⑤ 相干态中光子分布服从泊松分布: $p_n = |c_n|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$

⑥ 引入 Mandel Q 参数, $Q = \frac{V_{coh}}{\langle n \rangle} - 1$

a. $Q = 0$, $V_{coh} = \langle n \rangle$, 泊松分布, 相干态

光子反群效应

光子压缩态

b. $Q > 0$, 超泊松分布

c. $Q < 0$, 亚泊松分布 \Rightarrow 非经典效应

⑦ 相干态是正交分量和最小不确定度态, $\Delta x_1 \Delta x_2 = \frac{1}{4}$.

即平均算符只改变 x_1, x_2 平均值, 不改变涨落

⑧ 两个证值不同的相干态是不正交的.

$$\langle \beta | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}(\beta)^2 - \frac{1}{2}(\alpha)^2} \sum_{m,n} \frac{\beta^* m \alpha^n}{\sqrt{m! n!}} \langle m | n \rangle = e^{-\frac{1}{2}(\beta)^2 - \frac{1}{2}(\alpha)^2} \sum_n \frac{(\beta^* \alpha)^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2} > 0$$

⑨ 相干态构成一个(超)完备集, 是连续表象.

$$\int d^2 \alpha \langle \alpha | \alpha \rangle = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r|\alpha|^2} \sum_{m,n} \frac{\alpha^m \alpha^{*n}}{\sqrt{m! n!}} |m\rangle \langle n| = \pi \sum_n \langle n | n \rangle = \pi I$$

其中用了 $\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(m-n)\theta} = 2\pi \delta_{mn}$, $\int_0^\infty dy e^{-y} y^n = n!$

验记录：(数据 过程 问题 结果)

3. 压缩态

在满足 $\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \geq \frac{1}{4}$ 时，使 $\Delta x_1 < \frac{1}{2}$. 其一个正交分量和量与涨落小于真空涨落

① 压缩真空态. $|\xi\rangle = S(\xi)|0\rangle$, 其中 $S(\xi) = e^{\frac{i}{2}[\xi^*a^2 - \xi(a^*)^2]}$ 压缩算符
压缩参数 $\xi = \frac{\text{压缩幅}}{r} e^{i\theta} \rightarrow$ 压缩角.

性质：

$$S^+(\xi) = S^-(\xi) = S(-\xi)$$

$$S^+(\xi) \alpha S(\xi) = a \cosh r - a^* e^{i\theta} \sinh r$$

② 压缩态中平均光子数 $\langle n \rangle = \langle a^* a \rangle = \langle \xi | a^* a | \xi \rangle = \langle 0 | S^* a^* a S | 0 \rangle$
 $= \langle 0 | (S^* a^* s)(s^* a s) | 0 \rangle = \langle 0 | (a^* \cosh r - a e^{-i\theta} \sinh r)(a \cosh r - a^* e^{i\theta} \sinh r) | 0 \rangle = \sinh^2 r$

同理 $\langle n^2 \rangle = 2 \sinh^2 r \cosh^2 r + \sinh^4 r$, $V_{n^2} = 2 \sinh^2 r \cosh^2 r = 2 \langle n \rangle (1 + \langle n \rangle) > \langle n \rangle$ 超辐射

③ 正交算符 $\langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle = 0$, $V(x_{1,2}) = \frac{1}{4} (\cosh^2 r + \sinh^2 r \pm i \sinh r \cosh r \cos \theta)$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $\frac{1}{2}(a+a^*) \quad \frac{1}{2}(a-a^*)$

特别地 $\theta=0$ 时, $V(x_1) = \frac{1}{4} e^{-2r}$, $V(x_2) = \frac{1}{4} e^{2r}$, $\Delta x_1 = \frac{1}{2} e^{-r}$, $\Delta x_2 = \frac{1}{2} e^r$.

④ 压缩真空态满足的本征方程

\downarrow ξ 压缩.

$$(P a + V a^*) |\xi\rangle = 0$$

⑤ 压缩真空态的光子数分布. $| \xi \rangle = \sum_m C_{2m} | 2m \rangle$

$$\text{其中 } C_{2m} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\cosh r}} \left(\frac{1}{2} e^{i\theta} \sinh r \right)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{m!}$$

\rightarrow 这个证明之后推一遍

参加者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

4. 平移压缩真空态. $| \alpha, \xi \rangle = D_{(0)} S(\xi) | 0 \rangle$ $\begin{cases} \alpha=0 \rightarrow \text{压缩真空态} \\ \xi=0 \rightarrow \text{相干态.} \end{cases}$

平均光子数 $\langle n \rangle = (\alpha^2 + sh^2 r) \downarrow \rightarrow \text{压缩部分.}$

相干部分 / 平移部分

旋转正交分量平均值 $\langle r_i \rangle = \frac{1}{2} (\alpha e^{-i\frac{\theta}{2}} \pm \alpha^* e^{i\frac{\theta}{2}})$

本征方程: $(\mu_\alpha + \nu_{\alpha^*}) | \alpha, \xi \rangle = (\mu_\alpha + \nu_{\alpha^*}) | \alpha, \xi \rangle$

光子数分布: $| \alpha, \xi \rangle = \sum_n C_n | n \rangle$

其中 $C_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi h c r}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\alpha^2 - \frac{1}{2} + h c r \alpha^* e^{i\theta}) \right\} \cdot \left[\frac{1}{2} e^{i\theta} + h c r \right]^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n \left\{ \beta \sqrt{e^{i\theta} sh r} \right\}$

$H_n(z)$ 是豪量为 $\pm \hbar \omega$ 的 n 次多项式, 而 $\beta = \mu_\alpha + \nu_{\alpha^*} = h c r \alpha + e^{i\theta} sh r \alpha^*$

5. 压缩相干态 (双光子相干态)

与交换了顺序 $S(\xi) | \alpha \rangle = S(\xi) D_{(0)} | 0 \rangle + D_{(0)} S(\xi) | 0 \rangle = | \alpha, \xi \rangle$

但是 $S(\xi) | p \rangle = S(\xi) D_{(p)} | 0 \rangle = D_{(p)} S(\xi) | 0 \rangle$

6. 压缩态的产生

(1) 简并参数下转换过程

信号场湮灭算符

① $H = \hbar w_a a^\dagger a + \hbar w_p b^\dagger b + i\hbar \chi^{(1)} [a^2 b^\dagger - a^* b]$

↓
信号场频率 ↓
泵浦场频率 ↓
衰减, =阶非线性极化率

② 一般来说, 泵浦场较强, 可作经典描述 (参数近似), 即令 $b \rightarrow \beta e^{-i\omega_p t}$

$\Rightarrow H = \hbar w_a a^\dagger a + i\hbar [\gamma^* e^{i\omega_p t} a^2 - \gamma e^{-i\omega_p t} (a^*)^2]$, 其中 $\gamma = \chi^{(1)} \beta$

③ 相互作用绘景, $a \rightarrow a e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow H_I = i\hbar [\gamma^* e^{i(\omega_p - \omega)t} a^2 - \gamma^{-i(\omega_p - \omega)t} (a^*)^2] \xrightarrow{\text{若 } \hbar \gg \omega_p = 2\omega} i\hbar [\gamma^* a^2 - \gamma (a^*)^2]$

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

$$④ \text{故有 } U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_2 t} = e^{t\gamma^* a^2 - t\gamma(a^*)^2}$$

$$\text{若令 } \xi = 2t\gamma = 2t\chi^{(1)} b, \text{ 且 } S(\xi) = e^{\frac{1}{2}[\xi^* a^2 - \xi a^*]^2} = U(t)$$

即晶体从初始处于真空态时， t 时刻 \rightarrow 压缩真空态 $|Y_{(t)}\rangle = U(t)|0\rangle$

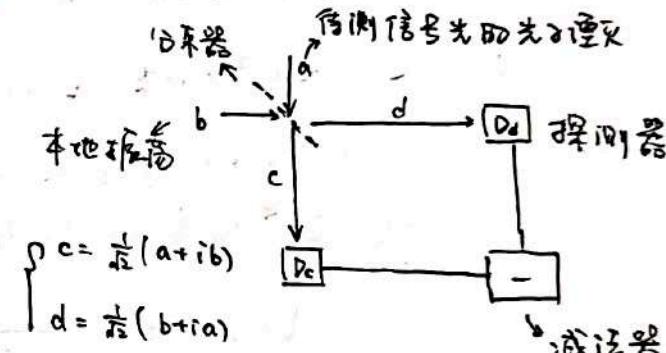
此时 ξ 必须满足幅度 b , = 阶非线性极化率 $\chi^{(1)}$ 和相互作用时间 t .

$$(2) \text{ 问并四波混频 } H = \hbar \omega_a a + \hbar \omega_b b + i\hbar \chi^{(3)} [a^* b^{+2} - a^{+2} b^*]$$

7. 压缩态的探测

平衡零差探测法

没分束器透射率 = 反射率 ($50:50$ 分束器)



$$\text{成像器信号: } \hat{n}_{cd} = \hat{n}_c - \hat{n}_d = c^* c - d^* d = i(a^* b - b^* a)$$

本地振荡光很弱时，由下经典描述，即 $b = \beta e^{i\psi}$ (数，而非算符)

$$\Rightarrow \hat{n}_{cd} = i\beta(a^* e^{i\psi} - a e^{-i\psi}) = \beta(a^* e^{i\frac{\theta}{2}} + a e^{-i\frac{\theta}{2}}) = 2\beta Y_{(0)}, \text{ 其中 } \frac{\theta}{2} = \psi + \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{此时 } \langle \hat{n}_{cd} \rangle = 2\beta \langle Y_{(0)} \rangle, \langle \hat{n}_{cd}^2 \rangle = 4\beta^2 \langle Y_{(0)}^2 \rangle$$

旋转正交分量算符。

$$V(\hat{n}_{cd}) = 4\beta^2 V[Y_{(0)}], \text{ 即 } V[Y_{(0)}] = \frac{1}{4\beta^2} V(\hat{n}_{cd}) < \frac{1}{4} \text{ 时, 入射信号光处于压缩态.}$$

8. 相干叠加态

$$\text{定义: } |Y\rangle = N(|\alpha\rangle + e^{-i\phi}|\alpha\rangle), \text{ 其中 } N = \frac{1}{\sqrt{2(1+e^{-2|\alpha|^2}\cos\phi)}}$$

$$\text{特例: } ① \phi=0, \text{ 保相干态}, |Y\rangle_e = N_e(|\alpha\rangle + |\alpha\rangle), N_e = \sqrt{2+2e^{-2|\alpha|^2}}$$

$$② \phi=\pi, \text{ 奇相干态}, |Y\rangle_o = N_o(|\alpha\rangle - |\alpha\rangle), N_o = \sqrt{2-2e^{-2|\alpha|^2}}$$

$$③ \phi=\frac{\pi}{2}, \text{ Yurke-Stoler 相干态}, |Y\rangle_{ys} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + i|\alpha\rangle)$$

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

性质：① $|ψ\rangle = N(|α\rangle + e^{iφ}|1-α\rangle)$ 为 a^2 的本征态， $a^2|ψ\rangle = α^2|ψ\rangle$

② 光子数分布函数 $|n\rangle = \frac{e^{-\bar{n}}}{\sqrt{z(1+e^{-2\bar{n}}\cos\phi)}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} [1+e^{iφ}(-i)^n] |n\rangle$

尤其当 $\phi = \frac{π}{2}$ 时为态， $P_{Ts} = e^{-\bar{n}^2} \frac{\bar{n}^n}{n!}$ 为泊松分布。

③ 平均光子数 $\bar{n} = \langle n \rangle = \langle \psi | a^\dagger a | \psi \rangle = N^2 \alpha^2 (1 - e^{-2\bar{n}} \cos\phi) = \alpha^2 \frac{1 - e^{-2\bar{n}} \cos\phi}{1 + e^{-2\bar{n}} \cos\phi}$
在 $\phi = \frac{π}{2}$ 时， $\bar{n} = \alpha^2$

④ 光子数方差 $V_{(n)} = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = (\bar{n}^2 + \bar{n}) - \bar{n}^2$

Mandel Q 参数描述光子数分布： $Q = \frac{V(n)}{\langle n \rangle} - 1 = \alpha^2 \frac{4e^{-2\bar{n}} \cos\phi}{1 - e^{-2\bar{n}} \cos\phi}$

⑤ 正交分量的涨落

$$V_{(x_1)} = \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{1 + e^{-2\bar{n}} \cos\phi} \quad V_{(x_2)} = \frac{1}{4} - \alpha^2 e^{-2\bar{n}} \frac{\cos\phi + e^{-2\bar{n}}}{(1 + e^{-2\bar{n}} \cos\phi)^2}$$

(证明见 P87, 需验证)

9. 非相干叠加态(混合态)

纯态：可用某个态矢量 $|ψ\rangle$ 描述，如光子数态(Fock态)，相干态 $|α\rangle$ ，压缩态 $|α, β\rangle$ 。

相干叠加态 $|ψ\rangle = \frac{|α\rangle + e^{iφ}|1-α\rangle}{\sqrt{z(1+e^{-2\bar{n}}\cos\phi)}}$

混合态：用密度算符表达。 Γ_3 : $P_M = \frac{1}{2} (|α\rangle\langle α| + |1-α\rangle\langle -α|)$

(1) 光子数分布： $P_n = \langle n | P_M | n \rangle = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$ (因 $\langle n | \alpha \rangle = e^{-\frac{\bar{n}}{2}} \frac{\bar{n}^n}{\sqrt{n!}}$) 泊松分布

(2) 正交分量涨落： $\langle n \rangle = \text{Tr}(P_M)$, $\langle α^2 \rangle = \text{Tr}(P_M \alpha^2)$, 本例 $\left\{ \begin{array}{l} \langle x_3 \rangle = \langle x_2 \rangle = 0 \\ V_{(x_1)} = \frac{1}{4} + \bar{n}^2, V_{(x_2)} = \frac{1}{4} \end{array} \right.$

10. 热飞

光场热飞：热辐射加量子态

理想黑体(带小孔的空腔)：腔内电磁辐射与腔壁热平衡时， $P_{n,n} = (1-e^{-n}) e^{-n}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{n}{kT}} - 1} \\ V_{(n)} = \frac{1}{n} (\bar{n} + 1) \end{array} \right. \quad \text{超泊松分布} \quad P_n = \frac{(\bar{n})^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}} \quad V_{(x_1)} = V_{(x_2)} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} > \frac{1}{4} \text{ 经典效应} \quad x = \frac{Eh}{kT}$$

$$Q = \frac{V(n)}{n} - 1 = \bar{n} > 0$$

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

11. 双模压缩真空态

性质： $S_2(\xi) = e^{\xi ab - \xi a^+ b^+}$, $|\xi\rangle_2 = S_2(\xi)|0,0\rangle$ 双模纠缠态.

定义双模正交分量算符： $\begin{cases} X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^++b+b^+) \\ X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-a^++b-b^+)\end{cases}$ 满足 $[X_1, X_2] = \frac{i}{2}$

有： $S_2^+(ξ) a S_2(ξ) = a chr - b^+ e^{iθ} shr$, $S_2^+(ξ) b S_2(ξ) = b chr - a^+ e^{iθ} shr$

$$\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle = 0, \quad V(X_{1,2}) = \frac{1}{4}(chr^2 + shr^2 \mp 2 shr chr \cos\theta)$$

展开： $|ξ\rangle_2 = \sum_n \frac{(-e^{iθ} shr)^n}{chr} |n, n\rangle$ 只出现两模光子数相同项，即孪生光子态

联合光子数分布和每个模： $P_{n,n}^{(a,b)} = P_n^{(a)} = P_n^{(b)} = P_n = |C_{n,n}|^2 = \frac{(chr^2)^n}{chr^n}$

平均光子数 $\langle n_a \rangle = \langle n_b \rangle = \langle n \rangle = shr^2$, $P_n = \frac{\langle n \rangle^n}{(\langle n \rangle + 1)^{n+1}}$

纠缠度用 von Neumann 熵： $S = -\sum P_n \ln P_n = -\sum_n \frac{chr^n}{ch^2 r} \ln \frac{chr^n}{ch^2 r}$

实验产生：非简并参数下转换

pump光较强 $\rightarrow \gamma e^{-i\omega_p t}$

$$H = \hbar\omega_a a^+ a + \hbar\omega_b b^+ b + \hbar\omega_p p^+ p + i\hbar \chi^{(1)} (ab p^+ - a^+ b^+ p)$$

变换到相互作用框架： $H_2 = i\hbar [\gamma^* e^{i(\omega_p - \omega_a - \omega_b)t} ab - \gamma e^{-i(\omega_p - \omega_a - \omega_b)t} a^+ b^+]$

考虑共振时有： $\omega_p = \omega_a + \omega_b$, $H_2 = i\hbar (\gamma^* ab - \gamma a^+ b^+)$

$$U_{(t)} = e^{-\frac{i}{\hbar} H_2 t} = e^{(\gamma^* ab - \gamma a^+ b^+) t} = S_2(\xi), \quad |\gamma(t)\rangle = U_{(t)}|0,0\rangle = S_2(\xi)|0,0\rangle = |\xi\rangle$$

12. 其他多模

① 多模光子数态.

$\begin{cases} \text{直积态.} & \{|n_i\rangle_i\} = |n_1\rangle_1 |n_2\rangle_2 \dots = |n_1, n_2, \dots\rangle = |\{n_i\}\rangle \\ \text{纠缠态.} & |\gamma\rangle = N(|n_1\rangle_1 |n_2\rangle_2 + |m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2) \end{cases}$

② 多模相干态.

$\begin{cases} \text{同上.} \end{cases}$

③ 多模热光场态.

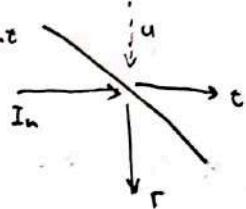
$$P_{th} = \sum_{n_k} P_{(n_k)} \quad (f_{n_k}) > \langle f_{n_k} \rangle \quad P_{Max} = \prod_k \frac{(\bar{n}_k)^{n_k}}{(\bar{n}_k + 1)^{n_k + 1}}$$

参加者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

13. 实验上产生: 光学分束器

(先不考虑光) 设振幅 α , 相位 ϕ : $\alpha_r = \sqrt{r} \alpha_{in} e^{i\phi_{int}}$, $\alpha_t = \sqrt{1-r} \alpha_{in} e^{i\phi_{int}}$



强度关系: $|\alpha_r|^2 = r |\alpha_{in}|^2$, $|\alpha_t|^2 = (1-r) |\alpha_{in}|^2$. 能量守恒

对于 u 光: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_r = \sqrt{r} \alpha_{in} e^{i\phi_{int}} + \sqrt{1-r} \alpha_u e^{i\phi_{uit}} \\ \alpha_t = \sqrt{1-r} \alpha_{in} e^{i\phi_{int}} + \sqrt{r} \alpha_u e^{i\phi_{uit}} \end{array} \right.$

能量守恒: $\cos(\phi_{int} - \phi_{uit}) + \cos(\phi_{int} - \phi_{ut}) = 0$ 由取 $\phi_{u,t} = \pi$, 其余 = 0

此时 $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_r = \sqrt{r} \alpha_{in} + \sqrt{1-r} \alpha_u \\ \alpha_t = \sqrt{1-r} \alpha_{in} + \sqrt{r} \alpha_u \end{array} \right.$ 或有其他取法. 后. 量子描述 $\alpha \rightarrow a$

14. 光学分束器对电磁场量的变换

取 $r = \frac{1}{2}$, $\left\{ \begin{array}{l} a_r = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{in} + a_u) \\ a_t = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{in} - a_u) \end{array} \right.$

逆变换 $\left\{ \begin{array}{l} a_{in}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_r^+ + a_t^+) \\ a_u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_r^+ - a_t^+) \end{array} \right.$

T3]: ① $|1\rangle_{in}|0\rangle_u = a_{in}^+ |0\rangle_{in}|0\rangle_u \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (a_r^+ + a_t^+) |0\rangle_r |0\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_r |0\rangle_t + |0\rangle_r |1\rangle_t)$ 真空

② $|2\rangle_{in}|0\rangle_u = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{in}^+)^2 |0\rangle_{in}|0\rangle_u$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (a_r^+ + a_t^+) \right]^2 |0\rangle_r |0\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \left[(a_r^+)^2 + (a_t^+)^2 + 2a_r^+ a_t^+ \right] |0\rangle_r |0\rangle_t \\ = \frac{1}{2} \left(|2\rangle_r |0\rangle_t + |0\rangle_r |2\rangle_t + \sqrt{2} |1\rangle_r |1\rangle_t \right)$$

③ $|1\rangle_{in}|1\rangle_u = a_{in}^+ a_u^+ |0\rangle_{in}|0\rangle_u \rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle_r |0\rangle_t - |0\rangle_r |2\rangle_t)$

④ $|0\rangle_{in}|1\rangle_u = D_{in}(p) D_u(p) |0\rangle_{in}|0\rangle_u = e^{i\alpha_{in}^* - i\alpha_u^*} a_{in}^+ \downarrow$
不含单光子项: 光子不可区分性
 $= e^{\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha + p)} a_r^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^* + p^*) a_r^+ \times e^{\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha - p)} a_t^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^* - p^*) a_t^+ |0\rangle_r |0\rangle_t$

$$= D_r\left(\frac{\alpha+p}{\sqrt{2}}\right) D_t\left(\frac{\alpha-p}{\sqrt{2}}\right) |0\rangle_r |0\rangle_t = \left(\frac{\alpha+p}{\sqrt{2}}\right) |0\rangle_r \left(\frac{\alpha-p}{\sqrt{2}}\right) |0\rangle_t \text{ 直积态.}$$

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

第五章 电磁场量子态在相干态中表示

1. 相干态表象 (连续变量表象)

① 相干态构成完备集 $\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = I$

准概率分布函数：量子态在相干态 $|\alpha\rangle$ 表象中表示。

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| |\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \gamma(\alpha) |\alpha\rangle$$

相空间：复数 α 空间。

优势：利用准概率分布函数，计算电磁场物理量的平均值时，
可将算符 \rightarrow 普通函数，且表达区分不同性质的量子态。

② $P(\alpha)$ 函数：Glauber - Sudarshan $P(\alpha)$ 函数。

$$P = \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| P(\alpha) \quad (*)$$

满足 $\text{Tr } P = \int d^2\alpha P(\alpha) = 1$ (P 可为负 / 奇异，对应量子态称非经典态)

* 逆变换： $P(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \int d^2u \langle -u | \rho(u) | u \rangle e^{-|u|^2} e^{\alpha u^*} e^{-\alpha^* u}$

(i) 相干态 $|\beta\rangle$ 的 $P(\alpha)$ 函数。

$$\rho = |\beta\rangle \langle \beta|, \langle \beta | u \rangle = e^{-\frac{1}{2}|u|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \beta^* u}$$

$$P(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \int d^2u \cdot e^{-\frac{1}{2}|u|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \beta^* u} \cdot e^{-\frac{1}{2}|u|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 - \beta u^*} \cdot e^{|u|^2} e^{\alpha u^*} e^{-\alpha^* u}$$

$$= e^{|\alpha|^2 - |\beta|^2} \cdot \frac{1}{\pi^2} \int d^2u e^{(\alpha - \beta) u^* - (\alpha^* - \beta^*) u} = e^{|\alpha|^2 - |\beta|^2} \delta_{(\alpha - \beta)} = \delta^2(\alpha - \beta)$$

= 德 δ 函数，是最接近经典态的量子态。

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

$$(2) \text{光子数态} \quad \langle n|n \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle u \rangle^2} \frac{u^n}{\sqrt{n!}}$$

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{1}{n!} e^{\langle u \rangle^2} \frac{1}{n!} \int d^2u \ (-u^*u)^n e^{\alpha u^* - \alpha^* u} \\ &= \frac{e^{\langle u \rangle^2}}{\pi \bar{n}^{n!}} \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha \partial \alpha^{*n}} \frac{1}{\pi \bar{n}} \int d^2u \ e^{\alpha u^* - \alpha^* u} = \frac{e^{\langle u \rangle^2}}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \alpha^{*n}} \delta^2(\alpha) \end{aligned}$$

由于 δ 是数比 δ 更具奇偶性，故光子数态是非经典态，超量子态。

$$(3) \text{热光场态} \quad P_{th} = \sum_n P_n |n\rangle \langle n|, \quad P_n = \frac{(\bar{n})^n}{(\bar{n}+1)^{\bar{n}+1}}$$

$$\Rightarrow P(\alpha) = \frac{1}{\pi \bar{n}} e^{-\frac{\langle u \rangle^2}{\bar{n}}} \quad \text{为 } \frac{1}{\pi} \text{ 的高斯函数，经典态}$$

(4) $P(\alpha)$ 用途：区别（非）经典态，方便计算正序排列算符 $G^{(n)}$ 的值

$$\text{正序排列算符: } G^{(n)}(\alpha^*, \alpha) = \sum_{m,n} C_{mn}^{(n)} (\alpha^*)^m \alpha^n$$

$$\begin{aligned} \langle G^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \rangle &= \text{Tr} [G^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \rho] = \text{Tr} \left[\int d^2\alpha P(\alpha) \sum_{m,n} C_{mn}^{(n)} (\alpha^*)^m \alpha^n |\alpha\rangle \langle \alpha| \right] \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha) \sum_{m,n} C_{mn}^{(n)} \langle \alpha | (\alpha^*)^m \alpha^n |\alpha \rangle = \int d^2\alpha P(\alpha) \sum_{m,n} C_{mn}^{(n)} (\alpha^*)^m \alpha^n \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha) G^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \rightarrow \text{为经典函数} \end{aligned}$$

$$(4.1) \text{对相干态 } |\beta\rangle, \quad \langle \alpha^* \alpha \rangle_\beta = \int d^2\alpha \delta^2(\alpha - \beta) \alpha^* \alpha = \beta^* \beta = |\beta|^2$$

$$\begin{aligned} (4.2) \text{对热光场态, } \langle \alpha^* \alpha \rangle &= \int d^2\alpha \cdot \frac{1}{\pi \bar{n}} e^{-\frac{\langle u \rangle^2}{\bar{n}}} \alpha^* \alpha \quad (\text{令 } \alpha = r e^{i\varphi}, d^2\alpha = r dr d\varphi) \\ &= \frac{1}{\pi \bar{n}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r dr e^{-\frac{r^2}{\bar{n}}} = \bar{n} \end{aligned}$$

③ $Q(\alpha)$ 函数：密度算符在相干态中的期望值

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle \in [0, \frac{1}{\pi}]$$

$$\text{满足: } \int d^2\alpha Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle = \text{Tr} \left[\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| \rho \right] = \text{Tr}(\rho) = 1$$

$$(1) \text{相干态 } |\beta\rangle: \quad Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{\pi}}$$

$$(2) \text{光子数态 } |n\rangle: \quad Q(\alpha) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\langle u \rangle^2}}{\pi} \frac{1}{n!}$$

$$(3) \text{热光场态: } Q(\alpha) = \frac{1}{\pi(\bar{n}+1)} e^{-\frac{\langle u \rangle^2}{\bar{n}+1}}$$

$$(4) \text{压缩态 } |\beta, \xi\rangle: \quad Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2} e^{i\theta} e^{-\frac{1}{2}[\alpha-\beta]^2 + \xi^2}$$

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

(3) Q(α) 用途：计算反序排列算符 $G^{(A)}(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} C_{mn}^{(A)} \alpha^m (\alpha^*)^n$ 的平均值

④ Wigner 函数：

历史上最早 的相空间概率分布函数，在坐标、动量空间 (p, q) 定义。

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \langle q + \frac{1}{2}\hbar x | p | q - \frac{1}{2}\hbar x \rangle e^{ipx/\hbar}$$

其中 $|q + \frac{1}{2}\hbar x\rangle$ 为坐标算符的本征态 $\langle q + \frac{1}{2}\hbar x | \psi \rangle$ 在 p 空间的波函数

$$\text{考虑纯态, } |\psi\rangle = |\psi\rangle \langle \psi|, \quad W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \psi_{(q + \frac{1}{2}\hbar x)} \psi^*_{(q - \frac{1}{2}\hbar x)} e^{ipx/\hbar}$$

对动量积分： $\int dp W(p, q) = |\psi(q)|^2$, 即 $|\psi\rangle$ 在 q 空间的概率密度；反之亦然。

$$\int dq W(p, q) = |\psi(p)|^2. \quad \text{其中} \quad \begin{cases} \psi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \psi(p) e^{ipq/\hbar} \\ \psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq \psi(q) e^{ipq/\hbar} \end{cases}$$

计算 Weyl 排序 (对称排序) $\{G(\hat{q}, \hat{p})\}_W$ 的平均值：

$$\langle \{G(\hat{q}, \hat{p})\}_W \rangle = \int dq dp \{G(\hat{q}, \hat{p})\}_W W(q, p)$$

$$\text{举例: } \{\hat{q}\hat{p}\}_W = \frac{1}{2}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}), \quad \{a^+ a^-\}_W = \frac{1}{3}(a^+ a a + a a^+ a + a a a^+)$$

⑤ 概率分布函数： $P_m \in [0, 1]$, $\int P_m dx = 1$. 平均值： $\langle f_m \rangle = \int f_m P_m dx$

特征函数： $C_{lm} = \langle e^{ikx} \rangle = \int e^{ikx} P_m dx$. 则 $P_m = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} C_{lm} dx$

$$\text{另有: } C_{lm} = \langle e^{ikx} \rangle = \sum_n \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle \rightarrow \text{NPTRX} \quad \langle x^n \rangle = \frac{d^n C_{lm}}{d(kx)^n} \Big|_{k=0}$$

Wigner 特征函数： $C_{W(l)} = \text{Tr}[P D_{(l)}]$

$$\text{正序: } C_{N(l)} = \text{Tr}[P e^{\lambda^* a^+} e^{-\lambda^* a}] \quad \text{反序: } C_{A(l)} = \text{Tr}[P e^{-\lambda^* a} e^{\lambda^* a^+}]$$

$$\text{写为参数形式: } C_{(l, m)} = \text{Tr}[P e^{\lambda^* a^+ - \lambda^* a} e^{\frac{2}{\hbar} (l \lambda^*)}]$$

$$\text{则: } C_{W(l)} = C_{(l, 0)}, \quad C_{N(l)} = C_{(l, 1)}, \quad C_{A(l)} = C_{(l, -1)}$$

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

利用特征函数可计算各排序算符平均值：详见 P114

(1) 相干态 $|p\rangle$ 的 Wigner 函数： $W_{|p\rangle} = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha - p|^2}$

(2) 光子数态 $|n\rangle$ 的 Wigner 函数： $W_{|n\rangle} = \frac{2}{\pi} (-1)^n L_n(4|\alpha|^2) e^{-2|\alpha|^2}$
→ 拉盖多项式

⑥ 总结： $Q_{|n\rangle}$ 随量子态变化不够灵敏， $P_{|n\rangle}$ 过于奇异，故取 $W_{|n\rangle}$

第三章 电磁场的相干性

① 经典相干：

设光源带宽(线宽) $\Delta\omega$ ，相干时间 $\Delta t_{coh} = \frac{1}{\Delta\omega}$ ，相干长度 $\Delta S_{coh} = c \Delta t_{coh}$

两条光程差 $\Delta S = |S_1 - S_2|$ ，则 $\Delta S \leq \Delta S_{coh}$ 时才有干涉条纹。

经典一阶相干函数： $\gamma^{(1)}_{(x_1, x_2)} = \frac{\langle E^*(x_1) E(x_2) \rangle}{\sqrt{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle}} \in [0, 1]$

对于绝对相干的单色光， $|\gamma^{(1)}_{(x)}| \equiv 1$ ，具有完全时间相干性；

考虑洛伦兹线型光源： $F_{coh} = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Delta\omega)^2}$ (ω_0 中心频率， $\Delta\omega$ 线宽)

② 量子相干：

量子一阶关联函数： $G^{(1)}(x_i, x_j) = \langle E^{(1)}(x_i) E^{(1)}(x_j) \rangle = T_r [\rho E^{(1)}(x_i) E^{(1)}(x_j)]$

量子一阶相干函数： $|\gamma^{(1)}(x_i, x_j)| = \left| \frac{G^{(1)}(x_i, x_j)}{\sqrt{G^{(1)}(x_i, x_i) G^{(1)}(x_j, x_j)}} \right| \in [0, 1]$

考虑单模量子化电磁场： $E^{(1)}(x_i, x_j) = E_0 a e^{i(k \cdot r - \omega t)}$ 其中 $E_0 = \sqrt{\frac{V}{2V_0}}$ ， V 为量子化体积

参加者：_____

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

$$(1) \text{光子数态} (\omega) : G^{(\omega)}(x_j, x_j) = \langle n | E_{(x_j)}^n E_{(x_j)}^{n\dagger} | n \rangle = E_0^2 \langle n | a^\dagger a | n \rangle = n E_0^2, j=1,2$$

$$G^{(\omega)}(x_1, x_2) = \langle n | E_{(x_1)}^n E_{(x_2)}^{n\dagger} | n \rangle = E_0^2 \langle n | e^{i(\vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - \omega t)} | n \rangle$$

$$\Rightarrow |g^{(\omega)}(x_1, x_2)| = |e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \Delta t)}| = 1.$$

(2) 相干态 (α)

同上, $|g| = 1$

综上, 单模量与电磁场处于相干态/光子数态时, 均具一阶完全相干性

不足以区分不同性质的量子态

光场幅度间的关联函数

③ 经典二阶相干: 两个时空点光场强度之间的关联。

$$\gamma_{(T)}^{(m)} = \frac{\langle I_{(t)}, I_{(t+\tau)} \rangle}{\langle I_{(t)} \rangle^2} = \frac{\langle E_{(t)}^*, E_{(t+\tau)}^*, E_{(t+\tau)}, E_{(t)} \rangle}{\langle E_{(t)}^*, E_{(t)} \rangle^2} \leq \gamma_m^{(m)} \in [1, \infty)$$

$$\gamma_{(x_1, x_2; x_1, x_2)}^{(m)} = \frac{\langle I_{(x_1)}, I_{(x_2)} \rangle}{\langle I_{(x_1)} \rangle \langle I_{(x_2)} \rangle}$$

对于混沌光源(大量原子独立辐射构成的光源): $\gamma_{(T)}^{(m)} = 1 + |\gamma_{(m)}^{(m)}|^2 \in [1, 2]$

对于洛伦兹线型光源: $|\gamma_{(T)}^{(m)}| = e^{-\frac{T}{T_0}}, \gamma_m^{(m)} = 1 + e^{-\frac{2T}{T_0}}$

④ 量子二阶相干:

$$g^{(m)}(x_1, x_2; x_1, x_2) = \frac{G^{(m)}(x_1, x_2; x_1, x_2)}{G^{(m)}(x_1, x_1) G^{(m)}(x_2, x_2)}$$

若 $|g^{(m)}(x_1, x_2)| = |g^{(m)}(x_1, x_1; x_2, x_2)| = 1$, 则光场是量子二阶相干

固定空间一点, $g^{(m)}$ 反显示时间延迟 $\tau = t_2 - t_1$, 且: $g_{(T)}^{(m)} = \frac{\langle E_{(t_1)}^m E_{(t_1+\tau)}^m E_{(t_2+\tau)}^m E_{(t_2)}^m \rangle}{\langle E_{(t_1)}^m E_{(t_1)}^m \rangle \langle E_{(t_2+\tau)}^m E_{(t_2+\tau)}^m \rangle}$

(1) 单模量与电场强度 $E_{(t, r)}^m = E_0 a e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

$$g_{(T)}^{(m)} = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} = \frac{\langle \hat{n} (\hat{n} - 1) \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} = 1 + \frac{V_{CA} - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} \quad \text{其中 } V_{CA} = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2$$

$$= g_{(0)}^{(m)} + \frac{\tau}{\tau + \frac{1}{V_{CA}}}.$$

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

- 相干态 $g^{(n)}_{(0)} = 1$; 随机分布 (泊松分布)
 \rightarrow 热光场态 $g^{(n)}_{(0)} = 2$; 光子数态 $g^{(n)}_{(0)} = \begin{cases} 0 & n=0,1 \\ 1 - \frac{1}{n} & n \geq 2 \end{cases} < 1$
- # 光子群聚态 (bunching) : $g^{(n)}_{(0)} > 1$, 光子倾向于成群到达探测器, 如激光器
 \rightarrow 亚泊松分布
- # 光子反群聚态 (anti-bunching) : $g^{(n)}_{(0)} < 1$, 光子倾向于以均匀时间间隔到达探测器

$$(2) 多模量与电磁场 $g^{(n)}_{(r)} = g^{(n)}_{(0)} = 1$. 混沌光场 $g^{(n)}_{(r)} = 1 + e^{-\frac{r^2}{2}}$$$

⑤ 量子高阶相干函数

uP:

$$J^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_r) = \frac{G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_r)}{G^{(1)}(x_1, x_2) \dots G^{(1)}(x_n, x_r)}$$

$$\text{其中 } G^{(n)}_{(...)} = \langle E^{(1)}_{(x_1)} \dots E^{(1)}_{(x_n)} E^{(1)}_{(x_{n+1})} \dots E^{(1)}_{(x_r)} \rangle = \text{Tr} [\rho E_{(1)}]$$

第七章 量子电磁场与原子的相互作用.

① 量子多模电磁场与多能级原子相互作用的哈密顿量:

$$H = \overbrace{H_A}^{\text{自由哈密顿量}} + \overbrace{H_F}^{\text{电磁场自由}} + V = \sum_k \hbar \omega_k |k\rangle \langle k| + \sum_\lambda \hbar \omega_\lambda (a_\lambda^\dagger a_\lambda + \frac{1}{2}) + \sum_{j,k} \sum_\lambda \hbar g_{jk,\lambda} |j\rangle \langle k| (a_\lambda + a_\lambda^\dagger)$$

$$\text{其中耦合常数: } g_{jk,\lambda} = - \frac{\vec{d}_{jk} \cdot \vec{E}_\lambda^{(1)}}{\hbar} \sin(k_\lambda z) = g_{jk,\lambda}(z)$$

原子能级 \downarrow 光场模式 \downarrow

参加者：_____

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

② 单模变换到相互作用绘景： $H_2 = \sum_{j,k} t_k g_{jk} |j><k| [a e^{i(w_{jk}-\omega)t} + a^* e^{i(w_{jk}+\omega)t}]$
 设系统初态。 $|i, n> = |i, n>$ ， $RW |i, n> = C_{i,n}(t) |i, n> + \sum_{f+i} [C_{f,n+1}(t) |f, n> + C_{f,n+1}(t) |f, n+1>]$

回代有：

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} C_{i,n}(t) = \sum_{f+i} g_{if} [\sqrt{n} e^{-i(w_{if}-\omega)t} C_{f,n+1} + \sqrt{n+1} e^{-i(w_{if}+\omega)t} C_{f,n+1}] \\ i \frac{d}{dt} C_{f,n+1}(t) = g_{fi} \sqrt{n} e^{-i(w_{if}+\omega)t} C_{i,n}(t) \\ i \frac{d}{dt} C_{f,n+1}(t) = g_{fi} \sqrt{n+1} e^{-i(w_{if}-\omega)t} C_{i,n}(t) \end{cases}$$

假没耦合较弱，作用时间短，取一级微扰近似 $\Gamma_{ij} \cdot C_{i,n}(t) = C_{i,n}(0) = 1, C_{f,n+1}(0) = 0$.

解得：

$$\begin{cases} C_{f,n+1} = g_{fi} \sqrt{n} \frac{e^{-i(w_{if}+\omega)t} - 1}{w_{if} + \omega} \\ C_{f,n+1} = g_{fi} \sqrt{n+1} \frac{e^{-i(w_{if}-\omega)t} - 1}{w_{if} - \omega} \end{cases}$$

概率

$$\begin{cases} \text{吸收光子} : |C_{f,n+1}|^2 = |g_{fi}|^2 n \frac{4 \sin^2 \left[\frac{1}{2} (w_{if} - \omega)t \right]}{(w_{if} - \omega)^2} \\ \text{发射光子} : |C_{f,n+1}|^2 = |g_{fi}|^2 (n+1) \frac{4 \sin^2 \left[\frac{1}{2} (w_{if} - \omega)t \right]}{(w_{if} - \omega)^2} \end{cases} \rightarrow 在 |w_{if}| \approx \omega \text{ 近处} \quad \begin{cases} \text{才有吸收、发射。} \end{cases}$$

$i \rightarrow f$ 跃迁： $C_f(t) = \sum C_{f,n+1} = g_{fi} \left[\sqrt{n} \frac{e^{-i(w_{if}+\omega)t} - 1}{w_{if} + \omega} + \sqrt{n+1} \frac{e^{-i(w_{if}-\omega)t} - 1}{w_{if} - \omega} \right]$

③ JC 模型：量子单模电磁场与二能级原子相互作用（取旋波近似） Jaynes-Cummings

原自由， $\hat{\sigma}_z = \hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{c} \hat{c}^\dagger$ 原场自由 ($\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger$)

哈密顿量： $H = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \lambda (\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-) (\hat{a}^+ + \hat{a}) \rightarrow$ 相互作用。

其中 $\hat{a}^+ \hat{\sigma}^+$ 表示 $e \rightarrow g$ 且发出光子， $\hat{\sigma}^- \hat{a}$ 反之。对应过程能量不守恒，可略去。(旋波近似)

变换到相互作用绘景：

$$\begin{cases} a \rightarrow a e^{-i\omega t}, a^+ \rightarrow a^+ e^{i\omega t} \\ \sigma \rightarrow \sigma e^{-i\omega t}, \sigma^+ \rightarrow \sigma^+ e^{i\omega t} \end{cases}$$

有： $H_2 = \hbar \lambda (\hat{\sigma}^+ a e^{i\omega t} + a^+ \hat{\sigma}^- e^{-i\omega t})$ 附录 $\hat{\sigma}^+ a^+ e^{i(\omega_0+\omega)t}$ 和 $\hat{\sigma} a e^{-i(\omega_0+\omega)t}$ 高频项

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

④ 求解共振情况 $\Delta = 0$, $H_2 = \hbar \lambda (\sigma^+ a + a^+ \sigma)$

(1) 幅率幅方法：跃迁模式 $|e, n\rangle \leftrightarrow |g, n+1\rangle$

$$\text{设 } |\psi(t)\rangle = C_{e,n}(t)|e,n\rangle + C_{g,n+1}(t)|g,n+1\rangle \quad \text{回代 } H_2(t) = i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_{e,n}}{dt} = -i\lambda \sqrt{n+1} C_{g,n+1} = -i \frac{\Omega_n}{2} C_{g,n+1} \\ \frac{dC_{g,n+1}}{dt} = -i\lambda \sqrt{n+1} C_{e,n} = -i \frac{\Omega_n}{2} C_{e,n} \end{array} \right.$$

$$\text{其中 } \Omega_n = 2\lambda \sqrt{n+1} \text{ 为 Rabi 频率}$$

$$\text{取初态 } |e\rangle, \text{ 有: } |\psi_{(0)}\rangle = \cos(\frac{\Omega_n}{2}t) |e,n\rangle - i \sin(\frac{\Omega_n}{2}t) |g,n+1\rangle$$

(2) 时间演化算符法: $|\psi_{(t)}\rangle = U_{(t)} |\psi_{(0)}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H_2 t} |\psi_{(0)}\rangle$

展开 U 有:

$$U_{(t)} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda t \sqrt{a^+ a + 1}) & -i \frac{\sin(\lambda t \sqrt{a^+ a + 1})}{\sqrt{a^+ a + 1}} a \\ -i a^+ \frac{\sin(\lambda t \sqrt{a^+ a + 1})}{\sqrt{a^+ a + 1}} & \cos(\lambda t \sqrt{a^+ a + 1}) \end{bmatrix} \text{ 代入回带}$$

(3) $\frac{\pi}{2}$ 及 π 脉冲: $\Omega_n t = \pi$ 时, $|\psi(\frac{\pi}{2\Omega_n})\rangle = -i |g, n+1\rangle$

2π 脉冲: $\Omega_n t = 2\pi$ 时, $|\psi(\frac{2\pi}{\Omega_n})\rangle = -|e, n\rangle$ 直接态

$\frac{\pi}{2}$ 脉冲: $\Omega_n t = \frac{\pi}{2}$ 时, $|\psi(\frac{\pi}{2\Omega_n})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n\rangle - i |g, n+1\rangle)$ 最大纠缠态

(4) 若光场处于光数态叠加态, $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$. 有: $W_{(t)} = \sum_n p_n \cos(\Omega_n t)$

呈现崩塌与复苏 (collapse-revival) 现象, 反映了电磁场的量子性

⑤ 求解大失谐情况 (散射情况) $\Delta \gg \lambda \sqrt{a^+ a}$, $H_{\text{eff}} = \hbar \chi [(\sigma^+ a + 1) |e\rangle \langle e| - a^+ a |g\rangle \langle g|]$

时间演化算符 $U_{(t)} = e^{-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}} t}$, $\left\{ \begin{array}{l} H |g, n\rangle = -\hbar \chi n |g, n\rangle \\ H |e, n\rangle = \hbar \chi (n+1) |e, n\rangle \end{array} \right.$

初态 $|\psi_{(0)}\rangle = |g, n\rangle$, t 时刻 $|\psi_{(t)}\rangle = U_{(t)} |\psi_{(0)}\rangle = e^{i \chi n t} |g, n\rangle$

本征态 $|\psi_{(0)}\rangle = |e, n\rangle$, $|\psi_{(t)}\rangle = e^{-i(n+1)\chi t} |e, n\rangle \quad \left. \right\} \text{ 产生一个相干因数}$

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

第九章 量子光学实验中常用的物理系统

1. 腔量子电动力学系统 (Cavity QED, CQED)

定义：有限空间（光学谐振腔/微波谐振腔）中原子与光场相互作用。

(1) 单个原子与单模电磁场相互作用

① 在谐振腔中电磁场形成驻波， $L = n \frac{\lambda}{2}$

② 里德堡态（主量子数很大）：“强耦合”条件（原子与电磁场间耦合系数大）

$\gamma \gg \Gamma, \kappa$, κ 为原子与电磁场间耦合常数, γ 为原子自发辐射速率 (τ 为寿命)。

κ 为腔损耗速率 (损耗)

(2) 里德堡原子有关性质。

对主量子数 n , 角量子数 $l = n-1$, 磁量子数 $m = n-1$ 的圆态, 常用 $n=50$

① 构成一个有效 FDD = 能级系统, $\Delta l = \pm 1$, $\Delta m = 0$ 或 ± 1

② $E_n \approx -\frac{R}{n^2}$, $R = 13.6 \text{ eV}$ 为里德堡常数。

③ 具有大的电偶极跃迁矩阵元, $\mu = d_{n,n-1} = \langle n | d | n-1 \rangle \propto \langle n | e r | n-1 \rangle \propto n^2 e a_0 \propto n^2$

④ 具有长寿命, 原子在自由空间自发辐射速率 $\Gamma_{\text{free}} = \frac{\mu^2 \omega_0^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} \propto \mu^2 \omega_0^3 \propto (n)^2 (n^{-1})^3 \propto n^{-5}$

⑤ 具较小电离能。

$$\Gamma_0 \approx 10^9 \text{ s}^{-1}, \tau_0 \approx 10^{-9} \text{ s}$$

(3) 辐射腔中二能级原子与单模腔场的相互作用。

$$H = \lambda (\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger), |\psi_{in}\rangle = \cos(\frac{\Omega_0}{2}t) |e, 0\rangle - i \sin(\frac{\Omega_0}{2}t) |g, 1\rangle, \Omega_0 = 2\gamma \text{ 是 Rabi 频率}$$

$$\text{主方程: } \frac{dp}{dt} = i [p, H] + \frac{\gamma}{2} \{ \sigma^+ a p a^\dagger - a^\dagger a p - p a^\dagger a \}. \text{ 令 } V \equiv p_{11} - p_{22}:$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{22} \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i\lambda \\ 0 & -\gamma & -i\lambda \\ i\lambda & -i\lambda & -\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{22} \\ V \end{bmatrix} \quad \text{本征方程: } (\lambda + \frac{\gamma}{2})(\lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{\gamma^2}{4}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = -\frac{\gamma}{2} \\ \lambda_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_0}{\gamma}\right)^2} \end{cases}$$

初值 $|e\rangle$, 脉冲 $|0\rangle$, $\Re P(p_{11}(0)) = 1$, $p_{22}(0) = 0$, $V(0) = 0$

参加者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

① 腔低损耗, $\frac{\gamma}{2} \ll \Delta_0$, $\Delta_0 = -\frac{\gamma}{2} \pm i\Delta_0$. 自发辐射近似可逆

② 腔高损耗, $\frac{\gamma}{2} > \Delta_0$, 最小衰减速率 $|\Delta_0| = \frac{\gamma}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_0}{\gamma}\right)^2} \right) \approx \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_0}{\gamma} \right)^2 = \frac{\Delta_0^2}{8}$

定义为原子在腔中自发辐射频率 $\Gamma_{cavity} = |\Delta_0| = \frac{\Delta_0^2}{8}$.

$\Delta_0 = 2\lambda = 2 \frac{\mu}{h} \sqrt{\frac{W_0}{V\varepsilon_0}} \sin k z$ (V 为腔量子化体积). 在 $\sin k z = \pm 1$ 时耦合最强.

品质因子 $Q = \frac{W_0}{\gamma}$, $\Gamma_{cavity} = \frac{4\mu^2 Q}{h V \varepsilon_0}$, $\frac{\Gamma_{cavity}}{\Gamma_{free}} = \frac{16\pi c^3 Q}{W_0^3 V} \sim Q \frac{\lambda_0^3}{V}$

2. JC 模型的实验实现

1996 年, Haroche 用相干态光场分别观测到谱线的塞曼振荡形式的自发辐射和崩塌与复苏现象.

1. 原子纠缠态制备.

设原子与腔共振演化: $|e\rangle, |0\rangle \rightarrow \cos(\omega t_1) |e\rangle, |0\rangle - i \sin(\omega t_1) |g\rangle, |0\rangle$. 取 $\omega t_1 = \frac{\pi}{4}$ 后, 此时达 $|g\rangle_2$, 即 $\omega t_2 = \frac{\pi}{2}$ $|g\rangle_2 |1\rangle \rightarrow -i |e\rangle_2 |0\rangle$

最终系统变为 $|\psi\rangle_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_1 |g\rangle_2 - |g\rangle_2 |e\rangle_1) |0\rangle$. 即先后与腔共振制备原子纠缠态.

2. 腔场薛定谔猫态(相干态的相干叠加态)的制备.

大数情况下能级原点与单模量腔 $H_{eff} = \chi [(\alpha^* \alpha + 1) |e\rangle \langle e| - \alpha^* \alpha |g\rangle \langle g|]$, $U_{eff} = e^{-\frac{i}{\hbar} H_{eff} t}$

注意到 $|g, n\rangle$ 和 $|e, n\rangle$ 为 H_{eff} 本征态. $\begin{cases} H_{eff} |g, n\rangle = -\hbar \chi n |g, n\rangle \\ H_{eff} |e, n\rangle = \hbar \chi (n+1) |e, n\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{eff} |g, n\rangle = |g, n\rangle \\ U_{eff} |e, n\rangle = e^{-i\chi n} |e, n\rangle \end{cases}$

并设 $E_e > E_g > E_f$, $|e\rangle$ 不被布居.

若电磁场 R_1, R_2, t 与 $|g\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ 共振, $U_{eff} = \cos(\frac{\hbar\omega}{2} t) I - i \sin(\frac{\hbar\omega}{2} t) (\sigma^+ e^{-i\varphi} + \sigma^- e^{i\varphi})$

即 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\sigma^+ = |g\rangle \langle f|$, $\sigma^- = |f\rangle \langle g|$, $U_{eff} = \cos(\frac{\hbar\omega}{2} t) I - \sin(\frac{\hbar\omega}{2} t) (|g\rangle \langle f| - |f\rangle \langle g|)$

且原子进入 R_1 时 $|g\rangle$, 经 $\Delta_{eff} t = \frac{\pi}{2}$, $|\psi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle + |f\rangle)$ 进入腔中: $|\psi_{co}\rangle = |\psi_a\rangle |0\rangle$

发生干涉后, $|\psi(t_c)\rangle = U_{eff} |\psi_{co}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle (\alpha e^{i\chi t_c}) + |f\rangle (\alpha))$

再进入 R_2 , 作用 t_2 , $\theta = \Delta_{eff} t_2 = \frac{\pi}{2}$, $\chi t_c = \pi$, $|\psi(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})\rangle = |g\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \alpha) + |f\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \alpha) + |f\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \alpha)$

3. 原子数的非破坏测量.

设腔场确定, 原子数态 $|n\rangle$ 未知, 让 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle)$ 里壁原点进入腔场, $|\psi_{co}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) |n\rangle$

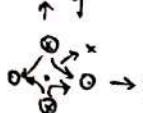
经历 t 时间, $|\psi_{co}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i(n+1)\chi t} |e\rangle + e^{in\chi t} |g\rangle) |n\rangle$

再让 $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ 与腔场共振 $\pm \frac{\pi}{2}$, 此时探测概率 $\begin{cases} P_{e(t)} = \sin^2[(2n+1) \frac{\chi t}{2}] \\ P_{g(t)} = \cos^2[(2n+1) \frac{\chi t}{2}] \end{cases}$ 称 Ramsey 测量

参加者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

3. 固禁离子系统.

设 Paul 帽阱,  内部运动: 电子态跃迁
外部运动: 整体运动.

$$\text{谐振子质量 } m \text{ 质心位置 } \bar{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger)$$

x 方向加 ω_L 激光(经典). $H = H_0 + V = (\frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\nu a^\dagger a) + \mu E_0 \sigma + \text{H.c.}$

$$\text{其中电场反散部分 } E^{(\text{sc})} = E_0 e^{i(\omega_L t - k_L \bar{x} + \phi)} = E_0 e^{i(\omega_L t + \phi)} e^{-i\gamma(a + a^\dagger)}. \text{ 其中 } \gamma = k_L \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

在 Lamb-Dicke regime (极限) $\gamma \ll 1$ 时,

$$H_2 = U^\dagger H U + i\hbar \frac{du^\dagger}{dt} U = \mu E_0 e^{i\phi} e^{i\omega_L t} e^{-i\gamma(a e^{-i\omega_L t} + a^\dagger e^{i\omega_L t})} \sigma e^{-i\omega_L t} + \text{H.c.}$$

$$\approx \mu E_0 e^{i\phi} e^{i(\omega_L - \omega_0)t} [1 - i\gamma(a e^{-i\omega_L t} + a^\dagger e^{i\omega_L t})] \sigma + \text{H.c.}$$

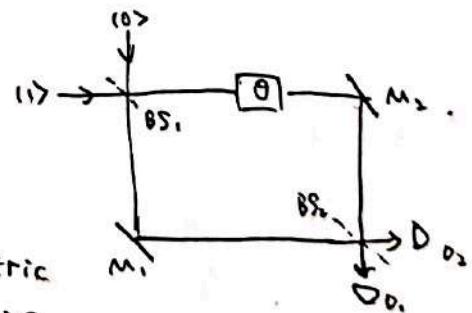
① 使 $\omega_L = \omega_0 - \nu$, 取去慢速振荡: $H_2 = -i\hbar \gamma \Omega_R e^{i\phi} a^\dagger \sigma + \text{H.c.}$. 具 JC 模型形式

② 使 $\omega_L = \omega_0 + \nu$, $H_2 \approx -i\hbar \gamma \Omega_R e^{i\phi} a \sigma + \text{H.c.}$.

③ $\omega_L = \omega_0 - l\nu$, $H_2 \sim \gamma^l (a^\dagger)^l \sigma + \text{H.c.}$; $\omega_L = \omega_0 + l\nu$, $H_2 \sim \gamma^l a^l \sigma + \text{H.c.}$.

4. 光学系统

① 单光子 Mach-Zehnder 干涉仪. 见 P118



② 创维光子源: 自发参量下转换 spontaneous parametric down-conversion, SPDC.

a. 第一类 SPDC: 信号光、闲置光偏振方向相同

b. 第二类 SPDC: 偏振垂直. $|V^+> = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H>_S |V>_I + |V>_S |H>_I)$ 产生偏振敏感的光子对

③ Hong-Ou-Mandel 干涉仪.

可用于测量内移量及关联时间。

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

第十一章 量子信息科学简介

1. 量子态不可克隆定理。

① $|0\rangle, |1\rangle$ 两个不同非正交态，不存在物理过程使其完全拷贝

② 未知量子态不能完全拷贝

2. 量子通信。

① 量子密集编码：通过传输一个量子比特而传输两个量子比特信息。

② 量子隐形传态：不传输粒子而把其量子态从发送者给接收者。

③ 量子密钥分发：

a. BB84 协议：Bennett 和 Brassard 在 1984 提出的第一个量子密钥分发协议

b. B92 协议：Bennett 1992.

c. EPR 协议：Eckert 1991.

3. 量子计算

① 量子寄存器。

② 量子逻辑门：必须可逆

a. 非门, $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b. 位相门 $P_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$

c. Hadamard 门 $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 光学分束器 U_{BS}

d. 复数非门 $U_{C-NOT}(x>|y\rangle) = |x\rangle(|mod_2(x+y)\rangle)$

e. 复数位相门 $U_{C-P}(x>|y\rangle) = e^{i\lambda y_0}|x>|y\rangle$

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

① 哈密顿法. Deutsch. Deutsch-Jozsa. Shor 大数分解. Grover 搜索.

第十一章 冷原子物理简介.

1. 光场对原子的作用力

二能级原子与电磁场相互作用能 $V_E(\vec{r}, t) = -\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{F} = -\nabla V_E$.

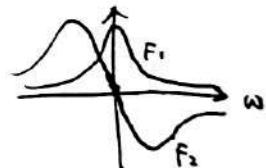
获得: $\vec{F} = \frac{1}{2} \hbar \omega (\nu \nabla \phi + u \frac{\nabla \Omega}{\omega})$, 其中 $\omega = \hbar g \cdot \vec{E}_0 / m$ 为 Rabi 频率
 ↓ 位相幅度, 辐射力 ↓ 幅幅幅度, 吸收力

① 行波场: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + C.C.$

解得: $\vec{F}_1 = \hbar k \left[\frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{\Omega^2}{2}}{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{2} + (\frac{\Gamma}{2})^2} \right]$, Γ 为自发辐射速率, $\delta = \omega - \omega_0 \pm \vec{k} \cdot \vec{v}$ 为调制量.

② 驻波场: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \cos \omega t$

解得: $\vec{F}_2 = -\frac{1}{2} \hbar \delta \left[\frac{\nabla \Omega^2}{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{2} + (\frac{\Gamma}{2})^2} \right]$



2. 光学黏团: 三束相互垂直的光束将光束汇于一团原子.

理论可用激光冷却原子于多普勒冷却极限温度: $k_B T_{min} = \frac{1}{2} \hbar \Gamma \sim 100 \mu K$
 实际可达 $\ll T_{min}$, 说明模型不准确.

3. 光阱:

① 电子光阱: $V_E = -\vec{d} \cdot \vec{E}$, $\vec{F}_e = -\frac{d}{2} \left[\frac{\nabla \left[\frac{\vec{I}(r)}{I_s} \right]}{1 + \frac{\vec{I}(r)}{I_s} + \left(\frac{\Delta}{\Gamma} \right)^2} \right]$, 极分有: $V_{trap}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \hbar \delta \ln \left[1 + \frac{\vec{I}(r)/I_s}{1 + \left(\frac{\Delta}{\Gamma} \right)^2} \right]$

② 静磁阱: $V_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, $\vec{F}_m = -\nabla V_B$.

③ 磁光阱.

4. 波色-爱因斯坦凝聚 (BEC): 由玻色子组成的新粒子态在低温下将聚集到最低能量.

$$\text{条件: } n \lambda_{de}^3 = n \left(\frac{4}{\sqrt{2 \pi m k_B T}} \right)^3 \geq 2.612$$

日期: 2014 年 8 月 05 日 星期 一

参加者:

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

《拓扑量与材料简介》

1. 亏格 g (genus): 拓扑不变量, 即曲面上“洞”的数量

计算闭合曲面上的高斯曲率积分

2. 贝里 (berry): $\oint_S \int_2 C_{ij} dS = 2\pi C$ → 陈数. (TKNN 不变量)

$$\text{贝里相位: } \phi = \oint \langle u_\lambda | i \partial_\lambda u_\lambda \rangle d\lambda$$

其中贝里联络: $A_{(ij)} = \langle u_\lambda | i \partial_\lambda u_\lambda \rangle$ 贝里曲率: $\int_2 C_{ij} = D_i \times A_{(ij)}$

3. 入保 (Kubo) 公式 = 线性响应理论

凝聚态物理中, 物理系统特性 (扰动, 观察响应 $\xrightarrow{\text{微扰}} \text{线性}$)

4. $\begin{cases} \text{霍尔电导} \\ \text{霍不电导} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{正常: 外磁场诱导} \\ \text{反常: 磁性引起} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{外在: 杂质散射} \\ \text{内秉: 贝里曲率.} \end{cases}$

5. 拓扑绝缘体:

- ① 由于自旋-轨道耦合, 可能在两个时间反演相关的、自旋相反、陈数符号相反的量子霍尔态, 产生量子自旋霍尔效应 QSH
- ② 本征 (本征) 阻尼: 偏离理想点阵结构的部位.
- ③ 朗道能级: 电子在磁场中做圆周运动的能量 (高度简并)

日 期：_____ 年 _____ 月 _____ 日 星期 _____

参 加 者：_____

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

④ 对传统 d 维拓扑绝缘体，一般具有 d-1 维无能隙边缘态
高阶拓扑绝缘体：d 维 n 阶拓扑绝缘体，具有 (d-n) 维无能隙边缘态

⑤ 约瑟夫森效应 (Josephson effect)：横跨约瑟夫森结的超电流现象。

约瑟夫森结 (S-I-S, 超导 - 绝缘 - 超导). 量子隧穿。

6. 紧束缚近似：原子间距较远，电子波函数重叠小，跃迁几率小。

Tight Binding ^{Approximation} 电子视作束缚在中原子附近，能量 \propto 原子轨道能，带宽窄。

7. 波恩 - 奥本海默近似 (BO 近似) (绝热近似)：

$$\psi_{\text{total}} = \psi_{\text{electronic}} \times \psi_{\text{nuclear}} \quad \text{分子波函数} = \text{电子波} \times \text{原子核波}$$

8. 外不点：^①外半金属中非简并的导带和价带在三维动量空间的^②费米能级附近相交，而电子表现为有着线性色散关系的无质量的^③外尔费米子。

① 外半金属：特殊电子结构材料，电子能带结构表现出非平庸的拓扑性质。是拓扑绝缘体的一种，但体内具导电性。

② 非简并的导带和价带：指导带指电子可自由移动的能量，价带是电子被原子束缚的能量。非简并指能量分布无重叠。

③ 费米能级：固体中电子在绝对零度占据的最高能级。

④ 相交：指可在两带间相互跃迁

日期: _____ 年 _____ 月 _____ 日 星期 _____

参加者: 8.5 笔记 8.7 整理. «从自旋起源到自旋手性»

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

«从自旋起源到手性自旋»

1. 克莱因-戈登方程 Klein-Gordon 方程:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \nabla^2 \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi, \quad \vec{p} = -i\hbar \nabla \text{ 非协变! } \text{ 用 } E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} \text{ 替换 } \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

$$\Rightarrow (\nabla^2 + \mu^2) \psi = 0, \quad \text{其中 } \begin{cases} \mu = \frac{mc}{\pi} \\ \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \end{cases} \text{ 拉达朗贝不等式.}$$

2. 费拉克方程: $i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = (\frac{hc}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2) \psi(x,t)$

引入费曼斜线标记: $A \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^\mu A_\mu$, 其中 γ^μ 为 Dirac 矩阵.

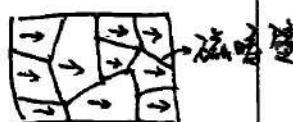
改写 Dirac 方程: $(i\gamma - m) \psi = 0$.

3. 磁畴: Magnetic Domain 自发磁化的小区域

① 磁致电阻效应 (MR): Magnetoresistance.

通电金属 / 半导体上加磁场, R 明显变化.

② 巨磁效应 (GMR): 两磁性薄膜夹非磁性材料. 磁场自旋平行, R 最小.



4. 朗道-费米兹方程: (γ 为比荷 固定磁矩 = $\frac{\text{自旋磁矩}}{\text{角动量}}$)

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma \mu_0 \vec{M} \times \vec{H}$$

5. 斯格明子 (skyrmion): Tony Skyrme 于 1962 年求解非线性 sigma 得出非平衡经典解, 是拓扑孤立子, 质地朴障子, 稳定性好, 低能耗, 超导簇.

日期：_____ 年 _____ 月 _____ 日 星期 _____

参加者：_____

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

6. 反应环交换耦合：Dzyaloshinskii - Moriya 相互作用。

近邻两个自旋倾向于以相互垂直方式排列，具手性特征。

用手性自旋耦合构建逻辑运算器件。

存储计算一体化，高性能，低损耗。

$m_1 \uparrow \leftarrow m_2$
手性耦合

7. 塞贝克效应 (Seebeck effect) 第一热电效应：

在两端电子由负流向正 (温差 → 电压差)

8. 声子 Phonon：非真实准粒子。

描述晶体原之热运动 —— 晶格振动能能量 $\propto E = \hbar \omega q$

日期: 2024 年 8 月 8 日 星期 _____

参加者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

自旋放大 Floquet Spin Amplification

1. Fermi - contact collisions: 费米接触碰撞作用

两费米子空间位置接近, 波函数重叠, 产生相互作用.

2. Larmor frequency: 自旋在 B_0 下的共振频率 $f_0 = \frac{\gamma}{2\pi} B_0$, γ 为旋磁比 $= \frac{e}{m}$

Larmor precession: $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{B} = \gamma \vec{l} \times \vec{B} = \frac{d\vec{l}}{dt} \Rightarrow \omega = \gamma B$. 预言磁场共振.

Bargmann - Michel - Telegdi (BMT) 等式:

$$\frac{da^i}{ds} = \frac{e}{m} u^i u_0 F^{0j} a_j + 2\mu (F^{0i} - u^i u_0 F^{0j}) a_j$$

极性四矢量 电磁场强度 磁矩 电子四维速度

3. Fano resonance 法诺共振: 会产生非对称线形的散射支振现象

背景和支振部分之间的干涉。解释电子与原子的非弹性散射。



日 期: _____ 年 8 月 15 日 星期 _____

参 加 者: _____

实验记录: (数据 过程 问题 结果)

自旋弛豫

自旋-自旋弛豫

横向弛豫: 核磁共振中处于非平衡态自旋, 其宏观磁化矢量的横向分量通过核自旋之间的相互作用
~~纵向弛豫~~, 达到热力学平衡状态的机制。

纵向弛豫: 纵向分量通过与周围环境(晶格)相互作用
 → 自旋-晶格弛豫

弛豫: 演变物理过程中, 从某状态逐渐恢复平衡态

在高能物理中, 在外加射频脉冲 RF(BI)作用下, 原子核磁共振达到稳定的高能态后, 从外加 RF 消失到恢复至磁共振磁场为止, 称弛豫过程

Hanle effect 汉斯效应: 用偏振光激发原子, 并在原子的特定方向加磁场时, 原子发射光的偏振度减少的现象。

日 期: _____ 年 _____ 月 _____ 日 星 期 _____

参 加 者: _____

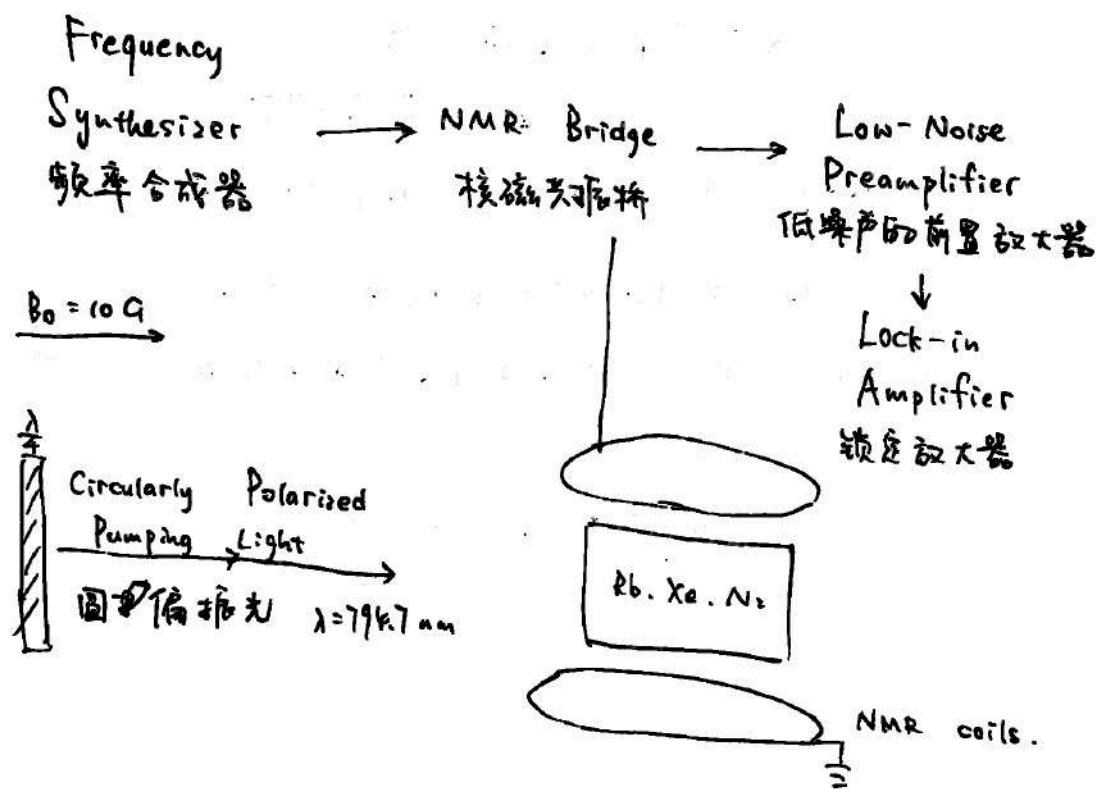
实验记录: (数据 过程 问题 结果)

SERF 介绍.

9.30 汇报.

基础篇

1. Rb-Xe-N₂ Spin-exchange Optical Pumping Chap. I 第九章
光泵浦及自旋极化交换.



(1) 选题: ① Rb 的 D1 光谱线在 794.7 nm, 光谱范围正好有不少可调谐激光源
像常见的染料、钛蓝宝石、砷铝化镓注入式激光器等。

② 高温高压 Rb vapor 对玻璃壁的腐蚀不大。

(2) 过程: ① 气室加热 80~130 °C, Rb 汽化维持较大饱和蒸气压
② pump 光通过半波片变为圆偏振光, 将 Rb 价电子自旋极化
③ N₂ 不活泼, 淳灭慢激 Rb 原子, 抑制激光光再辐射
④ Rb 通过碰撞把自旋 \rightarrow Xe, Xe 极化率达几十%, 比强磁高五个数量级

日期：_____年_____月_____日 星期_____

参加者：_____

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

- (1) 测量 χ_e 极化：
① 对比相同气室内水样品 ESR NMR 信号标定
② 检测碱金属发生 EPR (电子顺磁共振) 偏移
(2) 应用：Alfred Kastler 发现光磁双共振 (1966 谢尔) 开启激光技术先河。

(3) Q & A：
① Q：为什么要抑制激光再辐射？

A：碱金属原子极化后再辐射的光偏振方向是混乱的，会破坏其他原子极化，所以要用氮气代替受这一部分非隔离光。详见 Holstein 理论光辐射捕获。

② Q：为什么调 Q 激光器可以使原子极化率大大提升？

A：一般碱金属原子的自旋极化率与泵浦激光功率成正比，而调 Q 使 P ↑且窄，故 χ_e ↑

Chap. 2. 光场调制.

1. 激光-碱金属原子相互作用。

$$H_a = A_a \vec{I}_a \cdot \vec{s} + g_s \mu_B S_z B_0 - \frac{\mu_a}{I_a} I_{a\perp} B_0$$

↑
外磁场对电子自旋

↓
超精细相互作用 B_0 对核自旋。

假设：① 基态 $^3S_{\frac{1}{2}} \rightarrow ^3P_{\frac{1}{2}}$ 的跃迁与圆偏振光无关。

② 吸收谱线压力增加使超精细无法分辨，令 $P_{xe} + P_{N_2} > 1 \text{ amagat}$

③ 泵灭气体作为池壁源消除背景辐射捕获， $P_{N_2} > 0.1 \text{ amagat}$

④ 核自旋极化状态处于受泵浦光激发和被淬灭气体退激发之间。

$$\frac{P_{eN_2}}{RT_0} > 6.867811 \times 10^{-5} \text{ L}^2$$

日期：_____年_____月_____日 星期_____

参加者：_____

实验记录：(数据 过程 问题 结果)

激光物理实验之：谱线的宽度及形状。

1. 前置知识：吸收谱和发射谱

②

$$\hbar \omega_{ki} = E_k - E_i$$

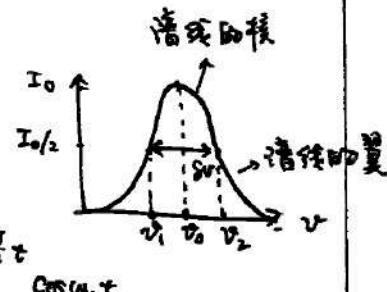
吸收功率： $P_{ik}(w) = P_0 \int (N_i - \frac{g_i}{J_e} N_e) \sigma_{ik}(w) dw$

2. 谱分布：

满足 $I(v_0) = I(v_0) = \frac{I_{\text{max}}}{2}$, $\delta v = |v_2 - v_1|$ 为半高宽 / 半宽 / 线宽

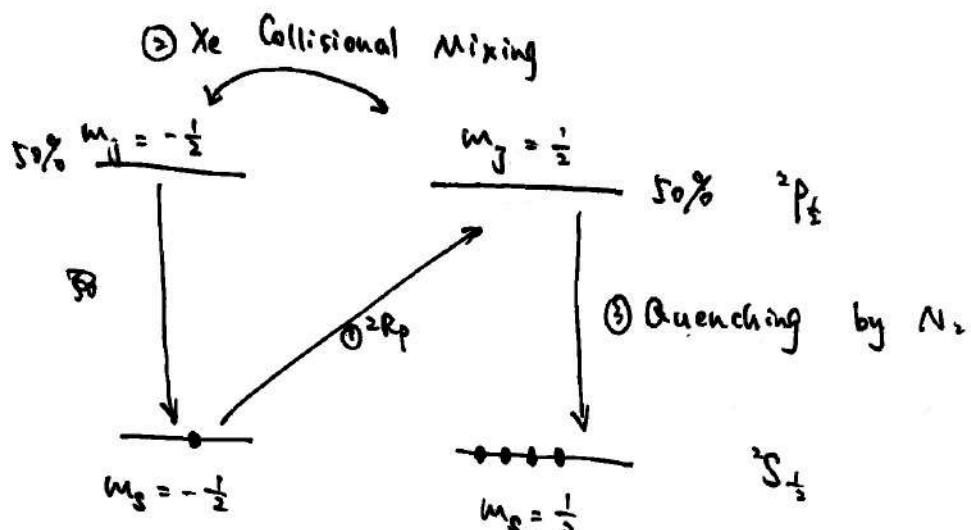
3. 自然线宽：

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos \omega_0 t$$



实验记录：(数据 过程 问题 结果)

接上页：



碱金属原子吸收率 \propto 光子吸收速率 : $\langle \delta \Gamma \rangle = (1 - \langle S_z \rangle) R_p$

\downarrow
弛豫速率

\downarrow
未极化吸收速率

2. 碱金属原子间碰撞.

冷却后两碱金属原子构成二聚体。根据 Pauli 不相容，部分激发态原子 = 聚体的两个价电子自旋不配对 ($S=1$, 多重度 $M_s=3$)。部分配对，则冷却后 = 聚体有单重态和三重态两种成分。

* 自旋温度分布,

$$f_a = \frac{e^{hS_a}}{Z(S_a, p_a)} \quad \frac{f_a I_{a2}}{Z(I_a, f_a)}$$

* 自旋各碰撞速率 $\sim 10^4 \sim 10^6 \text{ yr}^{-1}$

3. 光的传播.