

# Potential

## 01 拉普拉斯方程和他在笛卡尔坐标系下的解

### 拉普拉斯方程其人

开局先写一个假设什么东西都不动的麦克斯韦方程组

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla B = 0$$

$$\nabla \times E = 0$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

我们知道  $E = -\nabla V$ ，把这个带入第一个式子就可以得到著名的泊松equation

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

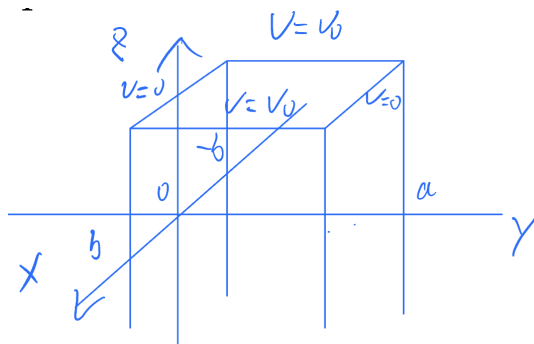
而如果在一个范围内没有任何电荷出现的话 那就可以得到另一个叫做Laplace's equation的东西

$$\nabla^2 V = 0$$

还挺优雅的 不是嘛

### 来解方程吧！用一个具体的例子！

这篇文章主要就是要在笛卡尔坐标系下解这个方程，在大二第一学期我们主要使用 separation of variable 来解，也就是说我们要假设这个  $V$  他是等于  $X(x)Y(y)Z(z)$  的。我们可以举一个具体的例子来熟悉这种方法



在  $x = \pm b$  时， $V = V_0$ ；然后  $y=0$  和  $a$  的那两个面是接地的。这也就是说  $Z(z)$  这一项没有什么用 不妨把他设成 1. 所以我们现在有

$$V = X(x)Y(y)$$

把他带入拉普拉斯方程中

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

就可以得到

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

两边同时除V

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

因为第一项只和x有关，第二项只和另一个有关，所以只有这俩都是常数的情况，而且偏微分可以写成全微分

先尝试**首项是负数**的情况

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2$$

这个方程的解为 $X(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx)$ 和 $Y(y) = B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky}$ 。我们有边界条件 $Y(0) = Y(a) = 0$ ，也就是说 $B_1 + B_2 = B_1 e^{ka} + B_2 e^{-ka} = 0$ ，也就是说 $B_1(e^{ka} - e^{-ka}) = 0$ ，所以说 $2B_1 \sinh(ka) = 0$ ，也就是说 $B_1 = B_2 = 0$  这就是说所有地方的V都是0，这显然不是个解，也就是说我们要尝试一下**首项是正数的情况**

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k^2$$

解是 $Y(y) = A_1 \cos(ky) + A_2 \sin(ky)$ 和 $X(x) = B_1 e^{kx} + B_2 e^{-kx}$ （没错我就换了一下xy，甚至连顺序都懒得换）我们有

$$Y(0) = 0$$

也就是说 $A_1 = 0$ ，所以 $Y(a) = A_2 \sin(ka) = 0$ ， $A_2$ 肯定不能等于0了，所以只能让 $\sin(ka) = 0$ ，所以说 $ka = n\pi$ ，而 $A_2$ 是随机常数。所以最终我们的解为

$$V(x, y) = \sum_{n=0}^n C_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

好家伙 那 $C_n$ 怎么搞？答案是用X(x)的边界条件

$$V(b, y) = \sum_{i=0}^n C_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = V_0$$

我们把左右两边各乘一个 $\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$ ，再对y从0到a积分，可以得到

$$V(b, y) = \sum_{i=0}^n C_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy = V_0 \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy$$

其中

$$\sin \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} = \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{(n-m)\pi y}{a} - \cos \frac{(n+m)\pi y}{a} \right]$$

所以我们知道只有在n=m时才不是0，其他的时候这个积分等于 $\frac{a}{2}$ 。所以说我们可以得到

$$\text{再} m \text{是偶数时, } C_m = 0, \text{ 其余时间 } C_m = \frac{4V_0}{m\pi \cosh\left(\frac{m\pi b}{a}\right)}$$

最终 我们的解就是一个特别恐怖的式子

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{i=0}^n \frac{\cosh \frac{(2i+1)\pi x}{a}}{\cosh \frac{(2i+1)\pi b}{a}} a \sin\left(\frac{i\pi y}{a}\right)$$

结束！

## 02 拉普拉斯方程在球坐标下的解

我们上次介绍了非常优雅的拉普拉斯方程  $\nabla^2 V = 0$  并且算了算他在笛卡尔坐标系下的一个例子，这次来试一试球坐标

### 球坐标下的拉普拉斯方程

通过一些矢量微积分，我们可以知道

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

嗯。。。以我现在的知识还是看不出来这有什么优雅的

### 解方程！

一杯茶，一包烟，一道积分算一天！（虽然我不抽烟）

还是分离变量，假设  $\nabla^2 = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$

两边同时乘  $\frac{r^2}{R\Theta\Phi}$ ，可以得到

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

左右两边再同时乘一个  $\sin^2 \theta$  的话，上面这个式子他的左边两项就会只和  $R$  和  $\theta$  有关，而最后一项就会只和  $\phi$  有关。所以我们可以说最后一个项乘个  $\sin^2 \theta$  是一个常数：

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = K$$

如果说  $K > 0$  的话，这个方程的解就是  $e^{\pm \sqrt{K}\phi}$  的线性叠加了，我们在这里其实还是想要一个周期性的解，毕竟  $\phi$  代表的是角度嘛，不能说  $\phi = \phi_0 + 2n\pi$  里面对于任何一个  $n\phi$  的解都不一样。所以我们不如去把  $K$  设成一个负数，把它叫做  $-m^2$ 。这样子的话我们就可以得到

$$\Phi(\phi) = Ce^{im\phi}$$

其中的  $\phi$  可以是正数也可以是负数 但必须要是整数。求个导的话就是

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi$$

整个的式子就变成了这样子

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0$$

再找找有没有什么只和一个变量相关的东西？

（没错！）

（是第一项！）

（嘿嘿！）

那我们就可以把第一项设成常数了！

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = l(l+1)$$

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = l(l+1)$$

至于为什么把常数设计得这么怪，你之后就知道啦

我们可以把  $\cos \theta$  设为  $x$ ，那么下面的式子就变成了

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d\Theta(x)}{dx} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta(\theta) = 0$$

苍天啊 大地啊 我都干什么啊！这玩意怎么越写越长啊

别怕，这个方程在之后的数学物理方法中就可以学到 其实叫做Legendre equation。他的解叫做**associated Legendre polynomials**，可以写成这种形式

$$\Theta(x) = P_l^m(x)$$

其中的 $l$ 是正整数，不然的话这个方程就又不是周期性的了，而且 $m$ 也只能是从 $-l$ 到 $l$

现在知道为啥把常数设成 $l(l+1)$ 了吧

$\Theta$ 和 $\Phi$ 的积还有一个名字，叫做球谐 (**spherical harmonic**)，用 $Y_l^m$ 表示

$$Y_l^m = C P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

然后就是这个式子了

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = l(l+1)$$

求一下导

$$l(l+1) = 2 \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2}$$

试一下 $R = C r^x$ ，也就是说

$$l(l+1) = \frac{2}{C r^{x-1}} C x r^{x-1} + \frac{1}{C r^{x-2}} C x(x-1) r^{x-2}$$

$$l(l+1) = 2x + x(x-1)$$

$$l(l+1) = x(x+1)$$

所以说 $x$ 等于 $l$ 或者 $-l-1$

所以说 $R$ 就出来了

$$R(r) = \alpha r^l + \frac{\beta}{r^{l+1}}$$

把三个东西乘起来 就可以得到

$$V(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \alpha r^l + \frac{\beta}{r^{l+1}} \right) Y_l^m(\theta, \phi)$$

### Legendre多项式的一个特点

$P$ 有一个很有用的特点，就是他们是正交的，也就是说我们有

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}$$

这个东西可以让我们更简单地计算 $\alpha$ 和 $\beta$

### 一个对称的情况

例子 我喜欢例子 现在就让我算例子！！

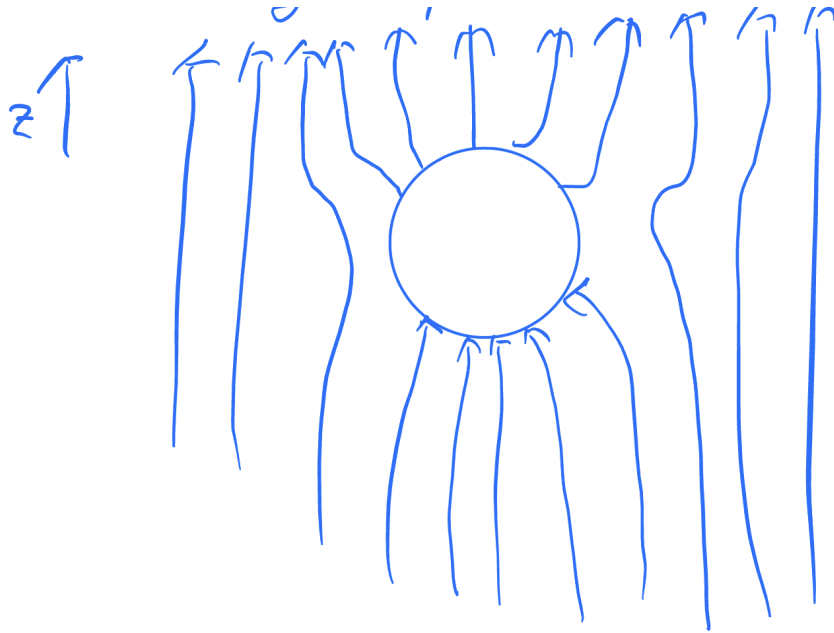
通常情况下，我们做的题都和 $\phi$ 没有关系，所以说我们可以把球谐给写成单独一个关于 $\cos \theta$ 的Legendre多项式，也就是说整个的 $V$ 可以写成

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \alpha r^l + \frac{\beta}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

我们可以举一个例子：在一个三维空间里面，存在着一个空心导体球在原点，他的半径是 $a_0$ 。同时还存在一个沿着 $z$ 轴向上的匀强电场 $E$ ，求电势

首先啊，这是一个球，所以我们肯定会用球坐标来解这个方程

其次 我们看一下示意图



这个电势貌似和 $\phi$ 没有什么关系！那我们就可以用那个简化版的拉普拉斯方程的解

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \alpha r^l + \frac{\beta}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

我们首先可以看一看他的end behavior，也就是当 $r$ 趋近于无穷大时， $V$ 应当等于 $-E \cos \theta$ 。我们看一下Legendre多项式的前几个方程：

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \dots$$

从中我们可以大概看出来，满足上面的end behavior的情况应该是只有 $l=1$ 时 $\alpha$ 和 $\beta$ 才不等于0

所以说就可以得到

$$V(r, \theta) = \left( -Er + \frac{\beta_1}{r^2} \right) \cos \theta$$

还是一样的end behavior

就快要算出来了！

对于 $\beta_1$ ，我们还有另外一个边界条件没有用，也就是 $r=a$ 的情况：

$$V(a, \theta) = \left( -Ea + \frac{\beta_1}{a^2} \right) \cos \theta = 0$$

$$\text{所以说 } \beta_1 = a^3 E$$

综上所述，我们能算出来

$$V(r, \theta) = -Er \cos \theta + \frac{a^3 E \cos \theta}{r^2}$$

可以看出来 其中第一项对应的是电场对应的电势，而后面哪一项就是磁场对应的电势了

**完事收工！**

## Formal solution to Poisson's equation

Poisson's equation:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Has solution

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d\tau'$$

where  $\tau'$  is the volume

This also happens in Magnetism,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , and A is called *magnetic vector potential*

This is valid because the divergence of B is 0

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

it has gauge freedom that we can choose that it is divergence free

$$\text{choose } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

it looks like three independent Poisson equations

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d\tau'$$

**Example:** If we have a one dimensional current i.e. wire, this current will produce

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

Which is Biot-Savart law!

## Multipole expansion

Laplace with azimuthal symmetry:

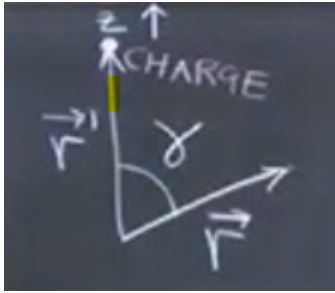
$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}] P_l(\cos\theta)$$

where  $P_l$  is Legendre polynomial

Apply to a point charge at  $\vec{r}'$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(unit charge)



This has azimuthal symmetry, so we can use the above equation

If  $\gamma$  is zero, then  $\cos\theta = 1$ , then  $P_l(\cos\theta) = 1$ , then

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$$

Because  $P_l(1)=1$

The expansion would be

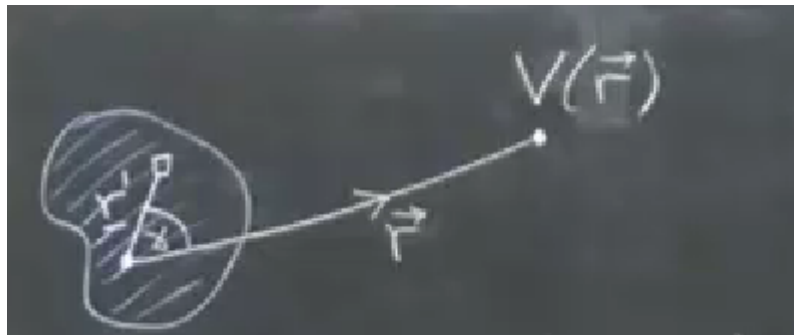
$$\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l & r > r' \\ \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l & r < r' \end{cases}$$

Choose the case  $r' < r$

The general solution would be

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

Thus the general solution for  $\vec{r}$  outside a charge distribution is



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l=0}^{\infty} (r')^l P_l(\cos(\gamma)) \times \rho(\vec{r}') d\tau'$$

The leading term is the *monopole term* ( $l=0$ )

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(r') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Which is proportional to  $\frac{1}{r}$

Next is the *dipole term* ( $l=1$ )

$$\begin{aligned} V_1(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int (r') \cos(\gamma) \rho(r') d\tau' \\ &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

Which is proportional to  $\frac{1}{r^2}$

Where  $\vec{p}$  is the dipole moment  $= \int \vec{r}' \rho(r') d\tau'$

and  $\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r r'} = \cos(\gamma)$

Then the *quadrupole term* ( $l=2$ )

$$V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int (r')^2 \frac{3\cos^2(\gamma)-1}{2} \rho(r') d\tau'$$

Now we can have a nice way of looking at field outside the charges using multipole expansion.