求解常系数线性齐次递推关系

- 例:求解以下递推关系的特征方程
  - $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
  - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
  - $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-3}$
- 解:他们的特征方程分别为
  - $r^2 - r - 2 = 0$
  - $r^2 - r - 1 = 0$
  - $r^3 - 3r^2 + 2 = 0$

求解常系数线性齐次递推关系

- 针对**2阶线性齐次递推关系**, 考虑**两个不相等的特征根**情况
- 定理1:设c_1和c_2是实数. 假设$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 有两个不相等的根r_1和r_2. 那么序列$\{a_n\}$是递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$的解, 当且仅当$\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n}$, n = 0,1,2,..., 其中α_1和α_2是常数.
- 备注:证明略. α_1, α_2在使用过程中经常与a_1, a_2混淆, 建议换成其他字母代表.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例: 求解递推关系$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, 其中$a_0 = 2$, $a_1 = 7$.
- 解:
  - 该递推关系的特征方程为$r^2 - r - 2 = 0$.
  - 特征根是$r = 2$, $r = -1$. 因此序列$\{a_n\}$是递推关系, 当且仅当$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$, 其中$\alpha_1, \alpha_2$是常数.
  - 由初始条件得$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2, a_1 = 7 = \alpha_1 2 + \alpha_2(-1)$
  - 求解这两个等式得$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1$.
  - 因此, 这个递推关系序列$\{a_n\}$, 其中$a_n = 3 * 2^n - (-1)^n$.

【基础知识：一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0$的解为$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, 或者通过配方法, 因式分解法可以求解】

求解常系数线性齐次递推关系

- 针对**2阶线性齐次递推关系**, 当存在**两重特征根**的情况时, 定理1不再适用.

- 定理2:设c_1和c_2是实数, $c_2 \neq 0$. 假设$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$只有一个根r_0. 序列$\{a_n\}$是递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$的解，当且仅当$\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n}$, 其中$n = 0, 1, 2, \cdots$, α_1和α_2是常数.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:求解$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$，其中$a_0 = 1, a_1 = 3$.
- 解:
  - $r^2 - 4r + 4 = 0$的唯一根是$r = 2$.
  - 因此, 这个递推关系的解是$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 n 2^n$, 其中$\alpha_1$, α_2是常数.
  - 使用初始条件可得$a_0 = 1 = \alpha_1$, $a_1 = 3 = \alpha_1 2^1 + \alpha_2 2$.
  - 求解这个方程组, 可得$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1/2$.
  - 因此, 这个具有给定初始条件的递推关系的解为$a_n = 2^n + \frac{n2^n}{2}$.

求解常系数线性齐次递推关系

- 针对2阶线性齐次递推关系, 前面两个定理解决了特征根是否相等时的求解. 现在给出k**阶线性齐次递推关系的一般性结果**(注意, 阶数可以大于2且**没有重根**的情况).

- 定理3:设$c_1,c_2,\ldots,c_k$是实数. 假定特征方程$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$有$k$个不相等的根$r_1, r_2, \cdots, r_k$. 那么序列$\{a_n\}$是递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$的解, 当且仅当

$$\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n}$$

其中$n = 0,1,2, \ldots$, 并且$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$都是常数.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:求解$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, 其中$a_0$=2, a_1=5, a_2=15.
- 解:
  - 特征方程为$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$. 该一元三次方程可以写为$(r-1)(r-2)(r-3)$ =0, 他们的根是$r = 1$, $r = 2$, $r = 3$.
  - 因此这个递推关系的解是$a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n$, 其中$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是常数.
  - 使用初始条件可得$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3$, $a_2 = 15 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3$.
  - 求解这个方程组, 可得$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$.
  - 因此, 解为$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$.

求解常系数线性齐次递推关系

- 我们叙述关于k**阶常系数线性齐次递推关系的最一般化的结果**, 这里**允许特征方程有重根**.

- 定理4:设$c_1,c_2,...,c_k$是实数. $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$有$t$个不相等的根$r_1, r_2, \cdots, r_t$其重数分别为$m_1, m_2, \cdots, m_t$满足$m_i \geq 1$, $i = 0,1,2, ..., t$, 且$m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k$. 那么序列$\{a_n\}$是递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$的解, 当且仅当

$$\boldsymbol{a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \ldots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n}$$

$$\boldsymbol{+ (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \ldots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n}$$

$$\boldsymbol{+ \ldots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \ldots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n}$$

$n = 0, 1, 2, ...$, 其中$\alpha_{i,j}$是常数,$1 \leq i \leq t$且$0 \leq j \leq m_i - 1$.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:假设线性齐次递推关系的特征方程的根为3, 3, 3, 4, 5, 5, 那么通解的形式是如何?
- 解:特征方程的根有3个根, 其中根3的重数为3, 根4的重数为1, 根5的重数为2．则根据定理4可知通解为$(\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}n+\alpha_{1,2}n^2)3^n+\alpha_{2,0}4^n+(\alpha_{3,0}+\alpha_{3,1}n)5^n$.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:求解$a_n=-3a_{n-1}-3a_{n-2}-a_{n-3}$, 其中$a_0$=1, a_1=-2, a_2=-1.
- 解:
  - 特征方程为$r^3+3r^2+3r+1=0$. 该一元三次方程可以写为$(r+1)(r+1)(r+1)=0$, 他们的根是一个重数为3的r=-1.
  - 因此这个递推关系的解是$a_n=(\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}n+\alpha_{1,2}n^2)(-1)^n$, 其中$\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$是常数.
  - 使用初始条件可得a_0 = 1 = $\alpha_{1,0}$, a_1 = -2 = -$\alpha_{1,0}$-$\alpha_{1,1}$-$\alpha_{1,2}$, a_2 = -1 = $\alpha_{1,0}$+2$\alpha_{1,1}$+4$\alpha_{1,2}$.
  - 求解这个方程组, 可得$\alpha_{1,0}$= 1, $\alpha_{1,1}$= 3, $\alpha_{1,2}$=-2.
  - 因此, 解为$a_n=(1+3n-2n^2)(-1)^n$.

常系数线性非齐次的递推关系

- 定义:形如$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + F(n)$的递推关系叫做**常系数线性非齐次递推关系**, 其中c_1, c_2, …, c_k是实数, $F(n)$是只依赖于n且不恒为0的函数.
- 递推关系$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$叫做**相伴的齐次递推关系**.

常系数线性非齐次的递推关系

- 例: 以下都是常系数线性非齐次的递推关系. 求其对应的相伴齐次递推关系
  - $a_n = a_{n-1} + 2^n$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$
  - $a_n = 3a_{n-1} + n3^n$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$

常系数线性非齐次的递推关系

- 例: 以下都是常系数线性非齐次的递推关系. 求其对应的相伴齐次递推关系
  - $a_n = a_{n-1} + 2^n$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$
  - $a_n = 3a_{n-1} + n3^n$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$
- 解:以上递归关系分别对应的相伴的齐次递推关系为:
  - $a_n = a_{n-1}$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
  - $a_n = 3a_{n-1}$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 关于**常系数线性非齐次的递推关系**的一个关键事实是，每个解都是一个特解与相伴的线性齐次递推关系的一个解的和，如下所述:

- 定理5:如果$\{a_n^{(p)}\}$是常系数线性非齐次的递推关系$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + F(n)$的一个解，那么每个解都是$\boldsymbol{\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}}$的形式，其中$\{a_n^{(h)}\}$是相伴的线性齐次递推关系$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$的一个解.

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:求$a_n = 3a_{n-1} + 2n$的所有解, 其中$a_1 = 3$.
- 解:
  - 相伴的线性齐次方程为$a_n = 3a_{n-1}$, 它的解是$a_n^{(h)} = \alpha 3^n$, 其中α是常数.
  - 我们现在找一个特解. 因为$F(n) = 2n$是n的一次多项式, 所以一个合理的尝试就是n的线性函数, 比如$p_n = cn + d$, 其中c和d为常数.
  - 为确定是否存在这样的解, 假设$p_n = cn + d$是一个解. 那么带入原方程就变为$cn + d = 3(c(n-1) + d) + 2n$.
  - 变换后可得$(2 + 2c)n + (2d - 3c) = 0$. 从而$cn + d$是一个解当且仅当$2 + 2c = 0$且 $2d - 3c = 0$. 解该方程组可得$c=-1$ 和 $d=-3/2$. 因此$a_n^{(p)} = -n - 3/2$是一个特解.

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 解(续):
  - 根据定理5, 所有的解都是下列形式$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = -n - 3/2 + \alpha 3^n$, 其中$\alpha$是常数.
  - 为了找出具有$a_1 = 3$, 得到的通解公式中令$n = 1$. 我们得到$3 = -1 - 3/2 + 3\alpha$, 所以可得$\alpha = 11/6$.
  - 所以我们要找的解为$a_n = -n - 3/2 + (11/6)\ 3^n$.

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 当$F(n)$**是**n**的多项式与一个常数的**n**次幂之积时，特解形式**如下所述:

- 定理6: 如果$\{a_n\}$满足线性非齐次的递推关系$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + F(n)$，其中$c_1, c_2, \ldots, c_k$是实数. 且$F(n) = (b_tn^t + b_{t-1}n^{t-1} + \ldots + b_1n^1 + b_0)\ s^n$, 其中$b_0, b_1, \ldots, b_t$, s是实数.

1)当s不是相伴的线性齐次递推关系的特征方程的根, 存在一个特解:

$$\boldsymbol{(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_1n^1 + p_0)\ s^n}$$

2)当s是相伴的线性齐次递推关系的特征方程的根时, 且重数是m, 存在一个特解:

$$\boldsymbol{n^m(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_1n^1 + p_0)\ s^n}$$

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:当$F(n)=3^n$, $F(n)=n3^n$, $F(n)=(n^2+1)3^n$, $F(n)=n^2 2^n$, 线性非齐次递推关系$a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2}+F(n)$的特解形式分别是多少?

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:当$F(n) = 3^n$，$F(n) = n3^n$，$F(n) = (n^2 + 1)3^n$, $F(n) = n^2 2^n$，线性非齐次递推关系$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + F(n)$的特解形式分别是多少?
- 解:相伴的线性齐次递推关系$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$，它的特征方程$r^2-6r$+9=($r$-3)($r$-3)=0，解为一个2重的单根3.
  - $F(n) = 3^n$时, 特解的形式为$p_0 n^2 3^n$;
  - $F(n) = n3^n$时, 特解的形式为$n^2(p_1 n^1 + p_0)3^n$;
  - $F(n) = (n^2 + 1)3^n$时, 特解的形式为$n^2(p_2 n^2 + p_1 n^1 + p_0)3^n$;
  - $F(n) = n^2 2^n$时, 特解的形式为$(p_2 n^2 + p_1 n^1 + p_0)2^n$;

求解常系数线性非齐次的递推关系

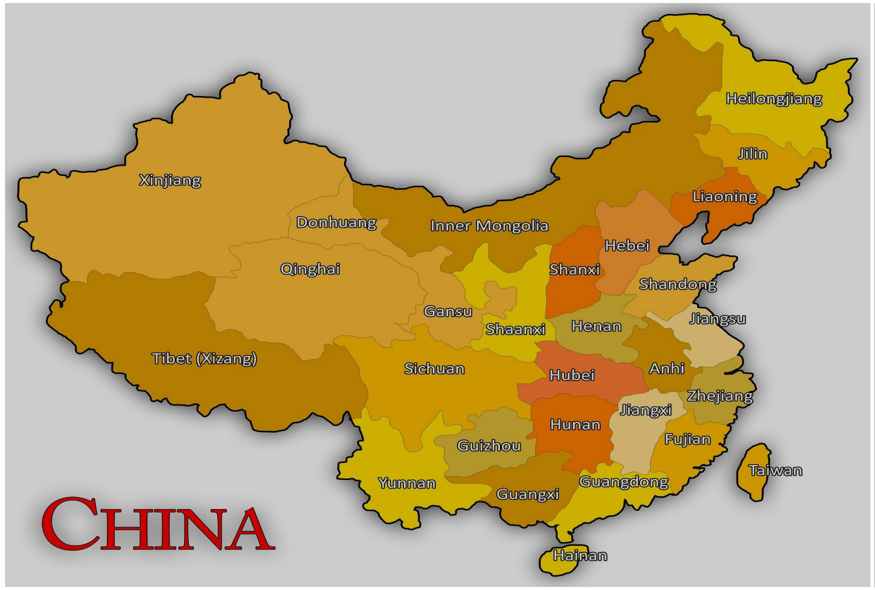
- 例:a_n表示前n个正整数的和, 即$a_n = \sum_{k=1}^{n} k$. 也就是a_n满足关系$a_n = a_{n-1} + n$. 其中a_1 =1. 求该递推关系的所有解

【备注:易出错的题】

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:a_n表示前n个正整数的和, 即$a_n = \sum_{k=1}^{n} k$. 也就是a_n满足关系$a_n = a_{n-1} + n$. 其中a_1 =1. 求该递推关系的所有解
- 解:
  - 相伴的线性齐次递推关系$a_n = a_{n-1}$, 它的解是$a_n^{(h)} = c(1)^n = c$. 其中c是常数.
  - 根据定理, $\mathrm{F}(n)=n=n(1)^n$且$s=1$是相伴的线性齐次递推关系的特征方程的1阶根, 所以特解为$n(p_1 n^1 + p_0)=p_1 n^2+p_0 n$.
  - 代入递推关系可得$p_1 n^2 + p_0 n = p_1(n-1)^2 + p_0(n-1) + n$. 化简后可得$p_0=p_1=1/2$. 因此$a_n^{(\mathrm{p})} = 1/2n^2+1/2n = \frac{n(n+1)}{2}$.
  - 所有解为$a_n^{(h)} + a_n^{(\mathrm{p})} = c+ n(n+1)/2$. 根据$a_1$ =1, 可得$c=0$. 因此$a_n= n(n+1)/2$.

【备注:易出错的题】



第3.3节分治算法和递推关系

Section 3.3: Divide-and-Conquer Algorithms and Recurrence Relations

分治算法

- 定义:**分治算法**通过将一个问题划分成较小规模的同一个问题的一个或多个实例, 然后用这些小问题的解来处理这个问题以找到初始问题的解, 这当中也许会需要一些额外的工作.
- 例:
  - 二分搜索, 把对一个元素在表中的搜索归约为对该元素在长度减半的表中的搜索. 然后继续使用这种分解直到表中只剩一个元素.
  - 归并排序, 把表划分为相等大小的两半且分别对每一半进行排序. 然后将两个排好序的半表归并.
- 备注:本节内容自学.