



第4.8节 证明方法和策略

Section 4.8: Proof Methods and Strategy

知识要点

- 1 分情形证明法
- 2 存在性证明:构造性的
- 3 存在性证明:非构造性的
- 4 唯一性证明
- 5 开放问题

4.8.1 分情形证明法

□ 【分情形证明】：

➤ 为了证明如下的条件语句： $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q$, 可以用永真式作为推理规则：

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)]$$

➤ 即, 分别证明每个条件语句为真： $p_i \rightarrow q$

【基础知识:条件命题的逻辑等价式 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$ 】

4.8.1 分情形证明法

□ **穷举证明法**: 有些定理可以通过检验相对少量的例子来证明, 注意需要穷尽所有的可能性. 这种证明方法叫做穷举证明法.

➤ 穷举证明法是分情形证明法的特例.

4.8.1 分情形证明法

□例:当 $a \geq b$ 时, $a@b = \max\{a, b\} = a$, 否则 $a@b = \max\{a, b\} = b$. 证明对于实数 $a, b, c, (a@b)@c = a@(b@c)$

□解:假设 a, b, c 是任意实数, 那么以下6种场景中的一种将一定存在.

➤ $a \geq b \geq c$

➤ $a \geq c \geq b$

➤ $b \geq a \geq c$

➤ $b \geq c \geq a$

➤ $c \geq a \geq b$

➤ $c \geq b \geq a$

➤ 场景1: $a \geq b \geq c$ 时, 那么 $(a@b)=a, a@c=a, b@c=b$. 因此, $(a@b)@c = a@(b@c)$

➤ 剩余的其他5个场景下的证明类似, 请同学们课后自行完成.

4.8.1 分情形证明法

- 例:证明对于整数 x 和 y , 如果 $x \cdot y$ 和 $x + y$ 都是偶数, 那么 x 和 y 都是偶数.
- 解:采用归谬证明法. 假设前提成立, 结论不成立. 亦即 x 和 y 不都是偶数(也就是说, 其中一个或者两个都是奇数), 为了不失一般性, 我们假设 x 是奇数. 那么对于整数 m , $x = 2m + 1$.
- 场景1: y 是偶数. 那么对于整数 n , $y = 2n$, 那么 $x + y = (2m + 1) + 2n = 2(m + n) + 1$ 是奇数. 和前提矛盾, 所以 x 奇数和 y 偶数不成立.
 - 场景2: y 是奇数. 那么对于整数 n , $y = 2n + 1$, 因此 $x \cdot y = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2m \cdot n + m + n) + 1$ 是奇数. 和前提矛盾, 所以 x 奇数和 y 奇数不成立.
 - 综上所述, 得证 (备注:上例中仅考虑了 x 为奇数的情况. 这是因为 y 为奇数的情况也是类似地).

4.8.2 存在性证明

□ 为了证明形如 $\exists x P(x)$ 的命题, **存在性证明**将:

- 找到一个显式值 c , 使得 $P(c)$ 为真.
- 那么 $\exists x P(x)$ 为真(量化命题的推理规则之存在实例).
(备注:这样的存在性证明称为**构造性的**)

□ 例:证明存在一个正整数, 可以用两种不同的方式将其表示为正整数的立方和.

□ 解:1729就是这样满足要求的数字, 因为 $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$.

4.8.2 存在性证明

□ 存在性证明也可以给出一种**非构造的存在性证明**, 即不再找出使得 $P(c)$ 为真的元素 c , 而是以某种其他方式来证明 $\exists x P(x)$ 为真. 比如使用归谬法, 证明存在量化式的否定式蕴含一个矛盾.

□ 例: 证明存在无理数 x 和 y , 使得 x^y 是有理数.

【备注: 书上示例可知 $\sqrt{2}$ 是无理数】

□ 解: 考虑数字 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$:

➤ 如果它是有理数, 那就存在两个无理数 x 和 y 且 x^y 是有理数(其中 $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$).

➤ 如果它是无理数, 那么可以令 $x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y=\sqrt{2}$, 因此 $x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2} * \sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2$. 所以不符合假设.

4.8.3 反例

□ 回想一下 $\exists x \neg P(x) \equiv \neg \forall x P(x)$. 为了确定 $\neg \forall x P(x)$ 为真(或者 $\forall x P(x)$ 为假), 找到一个元素 c , 使得 $\neg P(c)$ 为真或者 $P(c)$ 为假. 在这种证明下, c 就是一个**反例**.

4.8.3 反例

- 例:每个正整数都是2个整数的平方和.
- 解:整数3是一个反例. 因为3不能表示为两个数的平方和. 不超过3的完全平方数只有 $0^2 = 0$, $1^2 = 1$. 0和1的任意两项相加之和都得不到3, 所以原命题为假.

4.8.4 唯一性证明

□ 某些定理断言具有特定性质的元素唯一存在, $\exists! xP(x)$. 这种**唯一性证明**包括两部分:

- 存在性: 证明存在某个元素 x 具有期望的性质.
- 唯一性: 证明如果 $y \neq x$, 则 y 不具有期望的性质.

□ 例: 证明如果 a, b 是实数, $a \neq 0$, 那么存在唯一的实数 r 使得 $ar + b = 0$.

□ 解:

- 存在性证明: 实数 $r = -b/a$ 是 $ar + b = 0$ 的一个解, 因为 $a(-b/a) + b = -b + b = 0$. 因此实数 r 是存在的.
- 唯一性证明: 假设 s 是一个实数, 使得 $as + b = 0$. 那么 $ar + b = as + b$, 这儿 $r = -b/a$. 从公式的两侧减去 b 并除以 r , 可得 $r = s$.

4.8.5 全称性证明

□ 为了证明 $\forall xP(x)$, **全称性证明**假设 x 是论域 U 中的任意元素, 证明 $P(x)$ 为真. 使用量化命题的推理规则之全称引入, 那么就能证明 $\forall xP(x)$.

□ 例: 证明一个整数 x 是偶数当且仅当 x^2 是偶数.

□ 解: 为了证明 $\forall x(x \text{是偶数} \leftrightarrow x^2 \text{是偶数})$, 我们假设 x 是任意一个整数. 回忆之前提及 $p \leftrightarrow q$ 等价于 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. 因此我们需要同时证明两种情况.

➤ 情况1 ($p \rightarrow q$): 我们采用直接证明法来证明. 如果 x 是偶数, 那么 x^2 是偶数. 当 x 是偶数时, 对于整数 k , $x = 2k$. 因此, $x^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. 根据偶数定义, x^2 是偶数.

4.8.5 全称性证明

□解(续):

- 情况2 ($q \rightarrow p$): 我们采用反证法来证明. 如果 x^2 是偶数, 那么 x 是偶数. 我们假设 x 不是偶数, 那么 x^2 不是偶数. 因为 x 不是偶数, 那么 x 是奇数, 所以对于整数 k , $x = 2k + 1$. 因此, $x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, x^2 是奇数.
- 以上两种情况中 x 是任意整数, 那么使用量化命题的推理规则之全称引入, 就能证明 x 是偶数当且仅当 x^2 是偶数.

4.8.6 证明策略

□ 首先, 选择一种证明方法.

- 一般, 首选采用直接证明法.
- 如果行不通, 再采用间接证明法 (例如尝试证明对立面).

□ 然后, 无论哪种证明方法, 然后选择一种策略.

- 一般, 首先尝试**正向推理**. 从公理和已知定理开始构建一系列结论中的步骤.
从 p 开始证明 q , 或以 $\neg q$ 开始并证明 $\neg p$.
- 如果行不通, 再尝试**后向推理**. 当为了证明 q 时, 找到一个能够证明 $p \rightarrow q$ 语句 p .

4.8.6 证明策略之后向推理

- 例:假定两人玩游戏, 轮流从最初有15块石头的堆中每次取1,2,或3块石头. 取最后一块石头的人赢得游戏. 证明无论第二个玩家如何取, 第一个玩家都能赢得游戏.
- 解:假设 n 是游戏的最后一步. 我们采用后向推理.
 - 步骤 n : 如果留给玩家1的石头堆中剩下1, 2, 或者3块石头, 那么玩家1获胜.
 - 步骤 $n - 1$: 如果玩家2不得不从4块石头堆中取石头, 就迫使只可能留下1, 2, 或者3块石头. 因此, 玩家1要获胜的一种方法是在倒数第2步给玩家2留4块石头.
 - 步骤 $n - 2$: 当轮到玩家1的时候面临5, 6, 或者7块石头时(当玩家2不得不从8块石头堆中取石头就会出现这种情况), 玩家1就能留下4块石头.
 - 步骤 $n - 3$: 因此,为了迫使玩家2留下5, 6, 或者7块石头, 玩家1应该在倒数第3步给玩家2留下8块石头.

【难题】

4.8.6 证明策略之后向推理

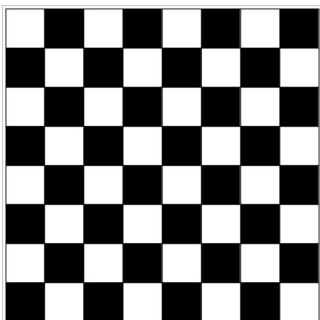
□解(续):

➤

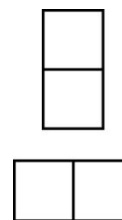
- 步骤 $n - 4$: 这意味着, 当玩家1取时还有9, 10, 或者11块石头, 这样就能确保留下8块石头给玩家2.
- 步骤 $n - 5$: 同样的, 当玩家1走第一步时应该留下12块石头(通过取走3块石头).
- 现在, 将以上论证反过来就能证明无论玩家2如何取, 玩家1第一步取走3块, 那么总是能够赢得游戏, 通过依次给玩家2留下12, 8, 4块石头.

4.8.7 棋盘拼接游戏的综合实践

- **标准棋盘**: 棋盘是一个由水平和垂直线分割成同样大小方格组成的矩形. 8行8列的棋盘称为标准棋盘.
- **拼板**: 任意大小的矩形棋盘, 以及删除一个或多个方格剩下的棋盘组成.
- **骨牌**: 一块一乘二的方格组成的矩形.
- **拼接**: 当由不重叠的骨牌覆盖并且没有悬空骨牌时, 我们就说拼板能够拼接.



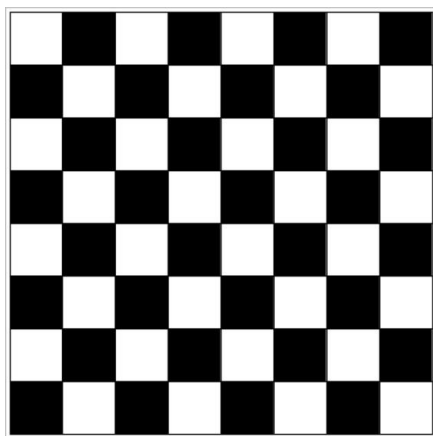
标准棋盘



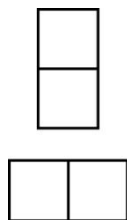
两种骨牌

4.8.7 棋盘拼接游戏的综合实践

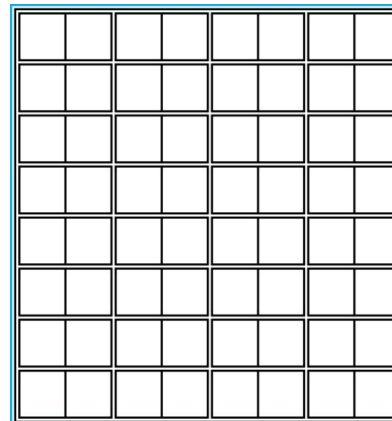
□例:我们能用骨牌拼接标准棋盘么?



标准棋盘



两种骨牌

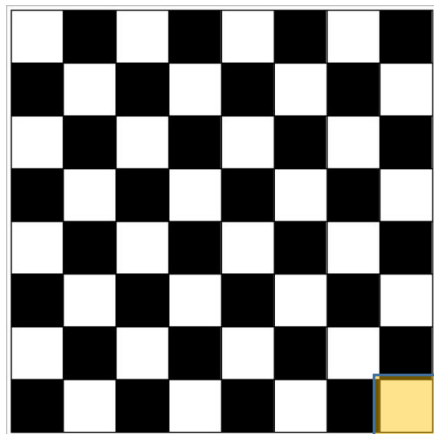


一种可行方法

□解:能! 如图提供了一种方法. 此外还有很多其他拼接的方法.

4.8.7 棋盘拼接游戏的综合实践

□例:我们能拼接从标准棋盘中去掉四个角的方格之一的拼盘么?

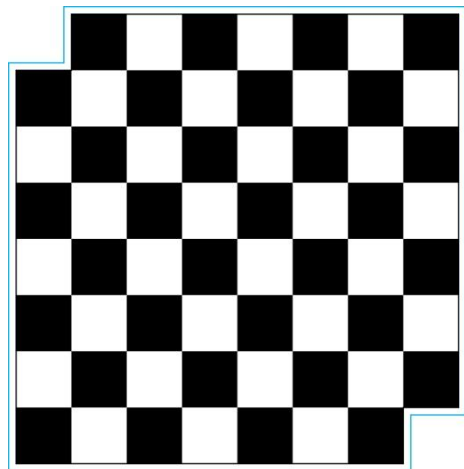


标准棋盘少掉右下角的一个方格后的棋盘

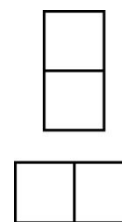
□解:不能. 一个标准棋盘64个方格, 去掉一个那么 $64 - 1 = 63$ 个方格组成的拼板. 由于一个骨牌有两个方格, 还要满足没有两个骨牌重叠, 且没有骨牌悬空, 那么这个拼板上一定有偶数个方格. 但是这个拼板上63个方格, 不是偶数, 所以用归谬法证明标准棋盘中去掉一个方格不能用骨牌拼接.

4.8.7 棋盘拼接游戏的综合实践

□例:能拼接标准棋盘中去掉左上角和右下角两个方格得到的拼板么?



非标准棋盘



两种骨牌

□解:不能. 拼板62个方格. 为拼接需要31个骨牌. 一个骨牌会覆盖拼板中一个黑色方格和一个白色方格. 那么总共覆盖31个黑色方格和31个白色方格. 题目中拼板只能有30个黑色方格和32个白色方格, 或者是32个黑色方格和30个白色方格. 因此与假设相矛盾, 不能实现拼接.

4.8.8 开放问题

- 数学中的许多进展是人们试图解决著名的悬而未决的开放问题时做出的.
- 比如, 300多年前的一个猜想最近被证明, 该猜想断言称为费马大定理的命题为真.
- **费马大定理**: 只要 n 满足 $n > 2$ 的整数, 方程 $x^n + y^n = z^n$ 就没有满足 $xyz \neq 0$ 的整数解 x, y, z .
- 这个定理在20世纪90年代被安德鲁·怀尔斯(Andrew Wiles)证明出来了, 有兴趣的同学可以阅读更多资料来学习.

4.8.8 开放问题

□ **$3x+1$ 猜想**: 令 T 是把偶数 x 转换 $x/2$ 、把奇整数 x 转换成 $3x + 1$ 的变换. 对于所有的正整数 x , 当反复地利用变换 T , 我们将最终得到整数1.

□ 例: 根据 $3x+1$ 猜想求5的变换 T .

□ 解: 从 $x=5$ 开始求变换 T

➤ $T(5) = 3 \cdot 5 + 1 = 16$

➤ $T(16) = 16/2 = 8$

➤ $T(8) = 8/2 = 4$

➤ $T(4) = 4/2 = 2$

➤ $T(2) = 2/2 = 1$

□ 这个猜想目前已经通过使用计算机程序能够验证了直到 5.6×10^{13} 的所有整数都符合要求.

4.8.9 其他证明方法

□ 其实, 还存在很多其他证明方法:

- 数学归纳, 这是证明形式为 $\forall n P(n)$ 的语句的有用方法, 其中域由所有正整数组成
- 结构归纳, 可用于证明关于递归定义集的这种结果
- 康托尔对角论证法, 用于证明无限集大小的结果
- 组合证明, 使用计数参数
-

- **命题**, 一个或真或假的陈述语句.
- **p和q的析取**, $p \vee q$, p 后者 q , 其中至少一个为真, 那么它为真.
- **p和q的合取**, $p \wedge q$, p 与 q , p 和 q 都为真, 它为真.
- **p和q的异或**, $p \oplus q$, p 和 q 中恰好有一个为真, 它为真.
- **p蕴含q**, $p \rightarrow q$, p 为真, q 为假, 它为假.
- **逆命题, 逆否命题, 反命题**: $q \rightarrow p$, $\neg q \rightarrow \neg p$, $\neg p \rightarrow \neg q$
- **双条件**, $p \leftrightarrow q$, p 当且仅当 q , p 和 q 真值相同, 它为真.
- **永真式, 矛盾式, 可能式**: 永远为真的复合命题, 永远为假的复合命题, 有时为真有时为假的复合命题.
- **谓词**, 句子中代表主语属性的那部分.

- **命题函数**, 包含一个或多个变量的语句, 当每个变量被赋值或被量词约束时, 就变为命题.
- **存在量化**, 论域中存在一个 x 使得 $P(x)$ 为真, 它为真.
- **全称量化**, 论域中所有 x 使得 $P(x)$ 为真, 它为真.
- **自由变量, 约束变量**: 命题函数中没有被绑定的变量, 被量化的变量.
- **论证**, 一连串的命题.
- **直接证明法**, 通过证明 p 为真, q 必然为真来证明 $p \rightarrow q$ 为真.
- **反证法**, 通过证明当 q 为假, p 一定为假来证明 $p \rightarrow q$ 为真.

- **归谬证明法**, 基于蕴含式 $\neg p \rightarrow q$ 的真值(其中 q 是矛盾式)而得出命题 p 为真的证明.
- **分情形证明法**, 一个证明分解成不同的情形, 覆盖所有的可能性.
- **反例**, 使得 $P(x)$ 为假的元素 x .
- **存在性证明**, 具有特定性质的元素存在, 寻找这样的元素的证明.
- **唯一性证明**, 证明具有特定性质的元素唯一地存在的证明.