

## 《离散数学二》第七次作业

1. 某岛上共有三种人：骑士总是说真话，骗子总是说谎，间谍可以说谎也可以说真话。你遇到了三个人，A、B 和 C。你知道这三个人中有一个是骑士，一个是骗子，一个是间谍。这三人中的每一个都知道其他两个人的身份。分别对以下三个小题分别判断谁是骑士、骗子和间谍。如不能判断，给出原因；如答案不唯一，给出所有答案(20 分)

(1) A 说：“C 是那个骗子”， B 说：“A 是那个骑士”， C 说：“我是那个间谍”。

(2) A 说：“我是那个骗子”， B 说：“我是那个骗子”， C 说：“我是那个骗子”。

(3) A 说：“我是骑士”， B 说：“A 不是骗子”， C 说：“B 不是骗子”。

(4) A 说：“我不是间谍”， B 说：“我不是间谍”， C 说：“A 是间谍”。

2. 求下列公式的主合取范式，求其成真赋值，再利用主合取范式求主析取范式(18 分)。

(1)  $(p \wedge q) \rightarrow q$

(2)  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$

(3)  $\neg(r \rightarrow p) \wedge p \wedge q$

3. 用真值表求下列公式的主析取范式和主合取范式(12 分)。

(1)  $(p \vee q) \wedge r$

(2)  $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$

(3)  $\neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p$

4. 用谓词逻辑将下列命题符号化(20 分)。

- (1) 火车都比轮船快.
- (2) 有的火车比有的汽车快.
- (3) 不存在比所有火车都快的汽车.
- (4) 说凡是汽车就比火车慢是不对的.

5. 判断下列各式的真值(12 分)。

- (1)  $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ , 其中,  $P(x):x=1; Q(x):x=2$ ; 而且个体域是  $\{1,2\}$ .
- (2)  $(\forall x)(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$ , 其中,  $P:2>1; Q(x):x \leq 3; R(x):x \geq 6; a=5$ ; 而且个体域是  $\{-2,3,6\}$ .
- (3)  $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge 1$ , 其中,  $P(x):x>2; Q(x):x=0$ ; 而且个体域是  $\{1,2\}$ .

6. 设解释 I 如下: 个体域  $D=\{a, b\}$ ;  $P(a,a)=1; P(b,b)=1; P(a,b)=0,$

$P(b,a)=0$ 。试确定下列公式在解释 I 下的真值(18 分)。

- (1)  $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ ;
- (2)  $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ ;
- (3)  $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ ;
- (4)  $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow P(y,x))$ ;
- (5)  $(\forall x)P(x,x)$ ;
- (6)  $(\exists y)\neg P(a,y)$ .

【解释相关基础知识:

公式解释定义: 设  $p_1, p_2, \dots, p_n$  是出现在公式 A 中的全部命题变项,

给  $p_1, p_2, \dots, p_n$  各指定一个真值, 称为对 A 的一个赋值或解释.

解释 I 由 4 部分组成 (备注: 这是包含谓词逻辑后的解释):

(a) 非空个体域 D.

(b) 对公式中的每一个个体常项符号 a, 有一个  $\bar{a} \in D$ , 称  $\bar{a}$  为 a 在 I 中的解释.

(c) 对每一个n元函数符号 $f$ , 有一个D上的n元函数 $\bar{f}$ , 称 $\bar{f}$ 为 $f$ 在I中的解释.

(d) 对每一个n元谓词符号 $F$ , 有一个D上的n元谓词常项 $\bar{F}$ , 称 $\bar{F}$ 为 $F$ 在I中的解释.

设公式 $A$ , 取个体域 $D$ , 把 $A$ 中的相关谓词符号 $F$ 等分别替换成它们在I中的解释, 称所得到的公式 $A'$ 为 $A$ 在I下的解释, 或 $A$ 在I下被解释成 $A'$ 】