

4.3.2 逻辑等价式

□ 在所有情况下都有相同真值的两个复合命题 p, q , 那么它们是**逻辑等价的**.

- $p \leftrightarrow q$ 是重言式, 那么 p 和 q 是逻辑等价的.
- 我们写为 $p \Leftrightarrow q$ 或者 $p \equiv q$ 来表示 p 和 q 是逻辑等价的.
- 当真值表中, p 和 q 的真值一样, 那么我们说 p 和 q 是逻辑等价的.

□ 例: 以下真值表说明 $\neg p \vee q$ 和 $p \rightarrow q$ 是逻辑等价的.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

两列的值都相同

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

4.3.2 德.摩根律

□ 最重要的逻辑等价式: 德.摩根律

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Augustus De Morgan
 (奥古斯塔·德·摩根)
 1806-1871

□ 真值表证明了德.摩根律的正确性

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

两列的值都相同

4.3.2 重要的等价式

□ 其他常见的逻辑等价式:

□ 恒等律: $p \wedge T \equiv p, \quad p \vee F \equiv p$

□ 支配律: $p \vee T \equiv T, \quad p \wedge F \equiv F$

□ 幂等律: $p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p$

□ 双重否定律: $\neg(\neg p) \equiv p$

□ 否定律: $p \vee \neg p \equiv T, \quad p \wedge \neg p \equiv F$

特别提示: 必须牢记这些等价式, 这是继续学习的基础

4.3.2 重要的等价式

□ 其他常见的逻辑等价式(续):

□ 交换律: $p \vee q \equiv q \vee p,$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

□ 结合律: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r),$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

(结合律可扩展更多个命题)

□ 分配律: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r),$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

□ 德.摩根律: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q,$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

(德.摩根律可扩展更多个命题)

□ 吸收律: $p \vee (p \wedge q) \equiv p,$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

特别提示: 必须牢记这些等价式, 这是继续学习的基础

4.3.2 重要的等价式

□ 条件命题的逻辑等价式：

□ $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

□ $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

□ $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$

□ $p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$

□ $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

□ $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$

□ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$

□ $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$

□ $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

特别提示：必须牢记这些等价式，这是继续学习的基础

4.3.2 重要的等价式

□ 双条件命题的逻辑等价式：

□ $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

□ $p \leftrightarrow q \equiv \neg q \leftrightarrow \neg p$

□ $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

□ $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

例：

$$\begin{aligned} &\neg(p \leftrightarrow q) \\ &\equiv \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \\ &\equiv \neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow p) \\ &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg(\neg q)) \\ &\equiv p \leftrightarrow \neg q \end{aligned}$$

特别提示：必须牢记这些等价式，这是继续学习的基础

4.3.4 构建新的逻辑等价式

□ 我们在以上等价式的基础上, 构建其他新的逻辑等价式. 为了证明 $A \equiv B$, 我们可以以 A 为开始, B 为结束来构造一系列的逻辑等价.

- $A \equiv A_1$
- $A_1 \equiv A_2$
-
- $A_n \equiv B$

□ 能这样做的原因是复合命题中的一个命题可以用与它逻辑等价的复合命题替换而不改变原复合命题的真值.

4.3.4 证明逻辑等价

□例: 证明 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 是逻辑等价的

□解:

- $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$ 由德.摩根律
- $\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q]$ 由德.摩根律
- $\equiv \neg p \wedge [p \vee \neg q]$ 由双重否定律
- $\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ 由分配律
- $\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q)$ 由否定律
- $\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F$ 由交换律
- $\equiv \neg p \wedge \neg q$ 由恒等律

4.3.4 证明逻辑等价

□例: 证明 $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ 是重言式

□解:

- $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ 由德.摩根律
- $\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$ 由德.摩根律
- $\equiv \neg p \vee \neg q \vee p \vee q$ 由结合律
- $\equiv \neg p \vee p \vee \neg q \vee q$ 由交换律
- $\equiv (p \vee \neg p) \vee (q \vee \neg q)$ 由结合律
- $\equiv T \vee T$ 由否定律
- $\equiv T$ 由支配律

4.3.5 命题的可满足性

- 一个复合命题称为**可满足的(SAT)**, 如果存在一个对其变元的真值赋值使其为真. 当不存在这样的赋值时, 即复合命题对所有变元的真值赋值都是假, 则复合命题称为**不可满足的**.
- 一个复合命题是不可满足的, 当且仅当它的否定对所有变元的真值赋值都是真的, 也就是说当且仅当它的否定是重言式.

理论意义

- 第一个NP完全问题(Cook-Levin定理, 1971年)
- 计算复杂性理论的基石
- 许多NP完全问题可归约到SAT
- 理解计算难度的关键问题

实践意义

- 现代SAT求解器高度优化, 可处理百万级变元
- 工业界广泛应用
- 许多实际问题可转化为SAT问题
- 自动化推理和验证的核心工具

应用领域

硬件验证

芯片设计验证

软件验证

程序正确性验证

人工智能

规划与调度

组合优化

资源分配

4.3.5 命题的可满足性

□例: 确定下面的复合命题的可满足性:

$$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$$

$$(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

$$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

□解:

- 可满足. 分配T给 p, q, r .
- 可满足的. 分配T给 p, F 给 q .
- 不可满足的. 检查每一个可能的赋值, 没有一个能使命题为真.

4.3.5 可满足性的应用

- 许多领域的问题都可以用命题的可满足性来建立模型.
- 例: 数独是一个 9×9 的表格, 其中由9个 3×3 的子表格组成. 这81个小方格将由 $1, 2, \dots, 9$ 的数值填充. 每一行, 每一列, 每一个子表格中由不同的数字组成. 如下图的数独.

	2	9				4		
		5				1		
4								
			4	2				
6						7		
5								
7		3				5		
1			9					
						6		

4.3.5 可满足性的应用

- 已经有许多基于逻辑和数学的策略来求解数独谜题. 这儿讨论一种借助计算机来求解的方法, 它基于谜题建模为一个命题可满足性问题.
- 假设 $p(i, j, n)$ 表示一个命题, 在第*i*行第*j*列数值为*n*的命题. 总共有 $9 \times 9 \times 9 = 729$ 这样的命题. 比如 $p(5, 1, 6)$ 为真. 但是 $p(5, j, 6)$ 为假, 当 $j=2, 3, \dots, 9$.

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6						7		
5								
7			3				5	
1				9				
						6		

4.3.5 可满足性的应用

□ 对于每个小方格中给定数值, $p(i, j, n)$ 表示第 i 行第 j 列给定数值 n .

□ 1) 每一行都包含了每种数值:

$$\bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{j=1}^9 p(i, j, n)$$

- 首先, 要断言第 i 行包含数 n , 构成 $\bigvee_{j=1}^9 p(i, j, n)$
- 然后, 要断言第 i 行包含所有 n 个数, 将 n 的所有 9 个可能值的析取式做合取, 得到 $\bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{j=1}^9 p(i, j, n)$
- 最后, 要断言每一行都包含了每一个数, 将所有的 9 行做合取, 得到 $\bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{j=1}^9 p(i, j, n)$

□ 2) 每一列都包含了每种数值:

$$\bigwedge_{j=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{i=1}^9 p(i, j, n)$$

4.3.5 可满足性的应用

- 3) 每个 3×3 的子表格中包含了每个数值:

$$\bigwedge_{r=0}^2 \bigwedge_{s=0}^2 \bigwedge_{n=1}^9 \bigwedge_{i=1}^3 \bigwedge_{j=1}^3 p(3r + i, 3s + j, n)$$

➤ 为什么是该表达公式? 留着课后同学们自行思考

- 4) 每一个空格都不会填写超过一个数值. 当 $n \neq n'$, 数值取值为1到9之间的数, 那么

$$p(i, j, n) \rightarrow \neg p(i, j, n')$$

4.3.5 可满足性的应用

- 为了解决数独谜题, 我们需要找到一种分配数值到729个命题中, 并且让上面所有命题的合取式为真. 分配时需要满足数独的要求条件.
- 方案一: 真值表可以用来决定一个复合命题的可满足性. 但是对于这种问题, 计算机解决起来会太过复杂.
- 其他方案: 现在已有许多研究工作致力于让这个数独的可解释性问题能够更实际的操作.

4.3.6 范式

- **范式**是命题公式的规范形式, 分为**析取范式**和**合取范式**.
- 命题公式A如果可以等价写为 $A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n$, 其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是命题变元或其否定形式的合取式, 则称该公式为A的**析取范式**.
- 例: 判断以下是否为析取范式.
$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$
$$p \wedge (p \vee q)$$
- 解: 第一个是析取范式, 第二个不是析取范式.

4.3.6 范式

□ 命题公式A如果可以等价写为 $A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n$, 其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是命题变元或其否定形式的析取式, 则称该公式为A的**合取范式**.

□ 例: 求 $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ 的析取范式和合取范式.

□ 解:

□ 析取范式:

$$\begin{aligned} > (p \leftrightarrow q) \rightarrow r &\equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r && \text{去掉}\wedge\vee\neg\text{以外的其他连结词} \\ > &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r && \neg\text{移到命题变元前面} \end{aligned}$$

□ 合取范式:

$$\begin{aligned} > (p \leftrightarrow q) \rightarrow r &\equiv \neg((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \vee r && \text{去掉}\wedge\vee\neg\text{以外的其他连结词} \\ > &\equiv ((\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p)) \vee r && \neg\text{移到命题变元前面} \\ > &\equiv ((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee p \vee r)) && \text{整理} \end{aligned}$$

4.3.6 范式

- 定理(**范式存在定理**): 任一命题公式都存在着与之等值的析取范式和合取范式. 但析取范式和合取范式可能不是唯一的.
- 例: 求 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 的析取范式可能为:

- $p \vee (q \wedge r)$
- $(p \wedge p) \vee (q \wedge r)$
- $p \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

4.3.6 极小项, 极大项

- 定义: n 个命题变元 p_1, p_2, \dots, p_n 的合取式/析取式, 其中每个命题变元必出现且仅出现一次(本身或者否定形式), 则称合取式 $p_1 \wedge p_2 \dots \wedge p_n$ 为**极小项**, 析取式 $p_1 \vee p_2 \dots \vee p_n$ 为**极大项**.
- 用 m_i 表示第*i*个极小项, 其中*i*是该极小项成真赋值的十进制表示.
- 用 M_i 表示第*i*个极大项, 其中*i*是该极大项成假赋值的十进制表示.
 - m_i 称为极小项的名称. M_i 称为极大项的名称.
- 若有 n 个命题变元, 则有 2^n 个极小项和 2^n 个极大项. 这些 2^n 个极小项(极大项)均互不等值.

4.3.6 极小项, 极大项

□例: 由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

□解: 极小项: 极大项:

公式	成真赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	00	m_0
$\neg p \wedge q$	01	m_1
$p \wedge \neg q$	10	m_2
$p \wedge q$	11	m_3

公式	成假赋值	名称
$p \vee q$	00	M_0
$p \vee \neg q$	01	M_1
$\neg p \vee q$	10	M_2
$\neg p \vee \neg q$	11	M_3

极小项口诀:1原0反; 极大项口诀:1反0原
其中 m_i 与 M_i 的关系: $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$

4.3.6 主析取范式, 主合取范式

- 定义：若一个命题公式的析取范式为 $A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n$, 其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是极小项，则称该公式为 A 的 **主析取范式**（或简写CDNF）。
- 定义：若一个命题公式的合取范式为 $A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n$, 其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是极大项，则称该公式为 A 的 **主合取范式**（或简写CCNF）。

4.3.6 主析取范式

□设公式 A 含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n , 求公式主析取范式的步骤:

- (1)求 A 的析取范式 $A' = B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_s$, 其中 B_j 是简单合取式, $j=1, 2, \dots, s$
- (2)若某个 B_j 既不含 p_i , 又不含 $\neg p_i$, 则将 B_j 展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \wedge p_i) \vee (B_j \wedge \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为 n 的极小项为止

- (3)消去重复出现的极小项, 即用 m_i 代替 $m_i \vee m_i$
- (4)将极小项按下标从小到大排列

4.3.6 主析取范式

□例:求 $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge r)$ 的主析取范式.

4.3.6 主析取范式

□例:求 $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge r)$ 的主析取范式.

□解:

- $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge r)$
- $\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (q \wedge r)$ 去掉 $\wedge \vee \neg$ 以外的其他连结词
- $\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)$ \neg 移到命题变元前面
- $\equiv (p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge q \wedge r)$ A_i 中若不包含某个命题变元 p_i , 则增加
- $\equiv (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$ 展开
- $\equiv (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$
- $\equiv m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$ 确定从小到大的出现顺序(命题变项看为1, 命题变项的否定看为0, $\neg p \wedge q \wedge r$ 为011, 转为十进制数3, 写作 m_3 , 其他分别为 m_4, m_5, m_7 . 因此结果也写作 $m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$)

4.3.6 主合取范式

□ 设公式 A 含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n , 求公式主合取范式的步骤:

- (1)求 A 的合取范式 $A' = B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \vee B_s$, 其中 B_j 是简单析取式, $j=1, 2, \dots, s$
- (2)若某个 B_j 既不含 p_i , 又不含 $\neg p_i$, 则将 B_j 展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \vee (p_i \wedge \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \vee p_i) \wedge (B_j \vee \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为 n 的极大项为止

- (3)消去重复出现的极大项, 即用 M_i 代替 $M_i \wedge M_i$
- (4)将极大项按下标从小到大排列

4.3.6 主合取范式

□例:求 $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge r)$ 的主合取范式.

4.3.6 主合取范式

□例:求 $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge r)$ 的主合取范式.

□解:

- $\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (q \wedge r)$ 去掉 $\wedge \vee \neg$ 以外的其他连结词
- $\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)$ \neg 移到命题变元前面
- $\equiv ((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee r)$ 分配律
- $\equiv ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ 展开
- $\equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \wedge (\neg q \vee r)$ 获得合取范式
- $\equiv ((p \vee q) \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (p \vee (q \wedge \neg q)) \vee r) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee r)$ A_i 中若不包含某个命题变元 p_i , 则增加
- $\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$ 展开
- $\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$ 幂等律
- $\equiv M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_6$ 确定从小到大的出现顺序(命题变项看为0, 命题变项的否定看为1, $p \vee q \vee r$ 为000, 转为十进制数0, 写作 M_0 , 其他分别为 M_1, M_2, M_6 . 因此结果也写作 $\neg M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_6$)

4.3.7 主析取/合取范式用途

- 主析取范式像真值表一样, 可以表达出公式以及公式之间关系的一切信息. 真值表与主析取范式(主合取范式)是描述命题公式的两种等价的不同标准形式. 两者可以相互确定, 由A的主析取范式(主合取范式)可以立即确定A 的真值表, 由A的真值表也可以立即确定A的主析取范式(主合取范式).
- 用途1, 求公式的成真赋值与成假赋值.

- 例: $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge r)$ 的主析取范式 $m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$, 求它的成真赋值和成假赋值.
- 解: 极小项的下标的二进制表示 011, 100, 101, 111 为该公式的成真赋值, 而其他是它的成假赋值.

4.3.7 主析取/合取范式用途

□用途2, 判断公式的类型. 设公式 A 中含 n 个命题变项,

- A 为重言式, 当且仅当 A 的主析取范式含全部 2^n 个极小项.
- A 为矛盾式, 当且仅当 A 的主析取范式不含任何极小项. 此时, 记 A 的主析取范式为0.
- A 为可满足式当且仅当 A 的主析取范式中至少含一个极小项.

4.3.7 主析取/合取范式用途

- 例:用公式 $p \rightarrow (p \vee q)$ 的主析取范式 $m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$ 判断公式的类型.
- 解:由于主析取范式含两个命题变项的全部 $2^2 = 4$ 个极小项, 主析取范式中包含所有的极小项, 故该公式为重言式.

4.3.7 主析取/合取范式用途

- 用途3, 判断两个命题公式是否等值. 设公式 A, B 共含有 n 个命题变项, 按 n 个命题变项求出 A, B 的主析取范式 A' 与 B' . 若 $A' = B'$, 则 $A \Leftrightarrow B$, 否则 $A \not\Leftrightarrow B$.
- 例: 判断公式 p 与 $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ 是否等值.
- 解: 这里有2个命题变项, 因而极小项含2个命题变元. 因为 p 的主析取范式 $m_2 \vee m_3$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ 的主析取范式 $m_2 \vee m_3$ 是一样的, 因此两个公式等值.