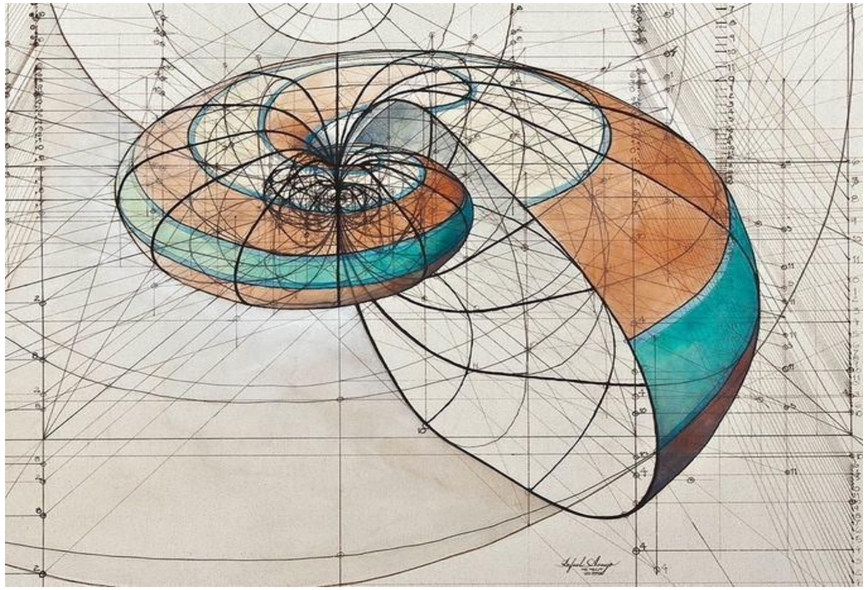

第3.4节 生成函数

Section 3.4: Generating Functions

知识要点

1. 生成函数
2. 计数问题与生成函数
3. 常见的有用的生成函数
4. 使用生成函数求解递推关系
5. 使用生成函数证明恒等式

本节用得上的基础知识(回顾)

- 有用的求和公式(离散一的内容):

和	闭形式	和	闭形式
$\sum_{k=0}^{n} ar^k (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$	$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x\rvert<1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}, \lvert x\rvert<1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

- 二项式定理:$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \Rightarrow (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
- 此外, 本节还有部分内容涉及到微积分相关知识.

3.4.1 生成函数

- 表示一个序列的一种有效方法就是生成函数，它把序列的项作为一个形式幂级数中变量x的幂的系数. 生成函数是组合数学中一种重要的方法，它把离散数列与形式幂级数对应起来:
- 定义:实数序列$a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots$的**生成函数**(也叫母函数)是无穷级数

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

- 备注:该定义给出的$\{a_k\}$的生成函数有时叫做$\{a_k\}$的普通生成函数(或一般生成函数). 此外还有指数生成函数(自学).
- 例:序列$\{a_k\}$, $a_k = 3$的生成函数为$\sum_{k=0}^{\infty} 3x^k$.

3.4.1 生成函数

- 对于一个有限序列该如何求生成函数呢?
- 通过设置$a_{n+1}=0, a_{n+2}=0$等, 把一个有限序列$a_0, a_1, \cdots, a_n$扩充成一个无限序列, 就可以定义一个实数的有限序列的生成函数. 这个无限序列$\{a_n\}$ 的生成函数$G(x)$是一个n次多项式, 因为当$j>n$时没有形如$a_j x^j$的项出现, 即:

$$G(x)=a_0+a_1 x+\cdots+a_n x^n$$

3.4.1 生成函数

- 例:序列1,1,1,1,1,1的生成函数是多少?

【前面基础知识, 等比序列的求和公式$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$】

3.4.1 生成函数

- 例:序列1,1,1,1,1,1的生成函数是多少?
- 解:
  - 1,1,1,1,1,1的生成函数是$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{x^6-1}{x-1}$, 其中$x \neq 1$.
  - 因此, $G(x)$= $(x^6 - 1)/(x - 1)$是序列1,1,1,1,1,1 的生成函数, 因为x的幂只在生成函数的序列项中使用, 我们不必担心$G(1)$没有被定义.

【前面基础知识, 等比序列的求和公式$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$】

3.4.1 生成函数

- 例:序列1,1,1,1,...的生成函数是多少?

【前面基础知识, $\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$】

- 例:序列1,1,1,1,...的生成函数是多少?
- 解:

  1,1,1,1,...的生成函数是$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots = \frac{1}{1-x}$. 因为 $\frac{1}{1-x}$=1+x+x^2+x^3+..., 对于|x|<1.

【前面基础知识, $\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$】

3.4.1 生成函数

- 例:序列$1, a, a^2, a^3, \ldots$的生成函数是多少?

【前面基础知识, $\sum_{j=0}^{\infty}(ax)^j = \frac{1}{1-ax}, |ax| < 1$】

3.4.1 生成函数

- 例:序列$1, a, a^2, a^3, \ldots$的生成函数是多少?
- 解:$1, a, a^2, a^3, \ldots$的生成函数是 $f(x)=\frac{1}{1-ax}$.

  因为 $\frac{1}{1-ax}=1+ ax+(ax)^2+(ax)^3+\ldots$, 对于$|ax|<1$.

【前面基础知识, $\sum_{j=0}^{\infty}(ax)^j=\frac{1}{1-ax}, |ax|<1$】

3.4.1 生成函数

- 接下来, 我们考虑两个生成函数如何相加和相乘, 其证明可以通过微积分相关知识完成. 数列的相加对应生成函数的相加, 数列的卷积对应生成函数的相乘.
- 定理：令$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$，$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$，那么

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k$$

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k}a_j\,b_{k-j})x^k$$

- 备注:只有当幂级数在一个区间收敛才有效. 如何证明涉及微积分知识, 自学.

- 例:已知$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, 求解$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$中的系数.

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}a_j b_{k-j}\right)x^k$$

3.4.1 生成函数

- 例:已知$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, 求解$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$中的系数.
- 解:根据前面的例题可知$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$

  那么根据生成函数的相乘定理可得$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k}1*1)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$.

- 思考: $f(x)=\frac{1}{(1-x)^3}$, $f(x)=\frac{1}{(1-x)^4}$, …, $f(x)=\frac{1}{(1-x)^n}$时, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$中的系数$a_k$分别为多少?

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k}a_j b_{k-j})x^k$$

3.4.1 生成函数

- 二项式系数$\binom{u}{k}$中，u为正整数，k满足$0 \le k \le u$. 现在我们扩展**广义二项式系数**(又称牛顿二项式系数)
- 定义:u是实数, 且k是非负整数. 那么广义二项式系数$\binom{u}{k}$定义为

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-k+1)}{k!}, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

【前面的基础知识, $C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$】