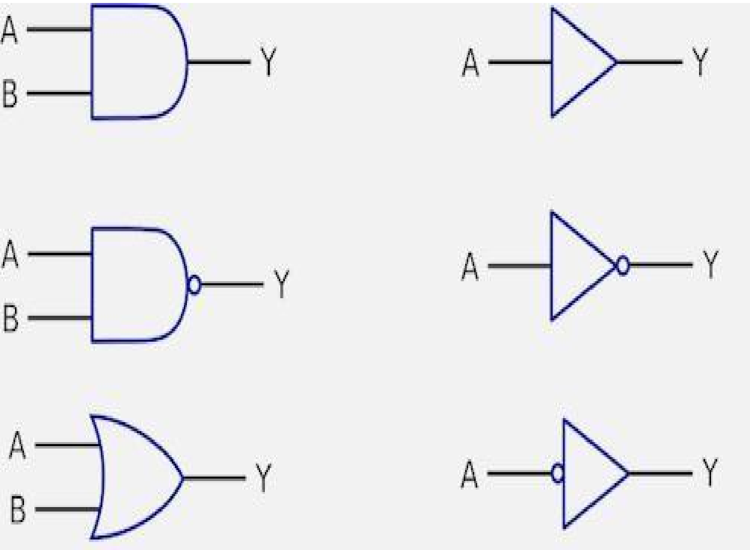
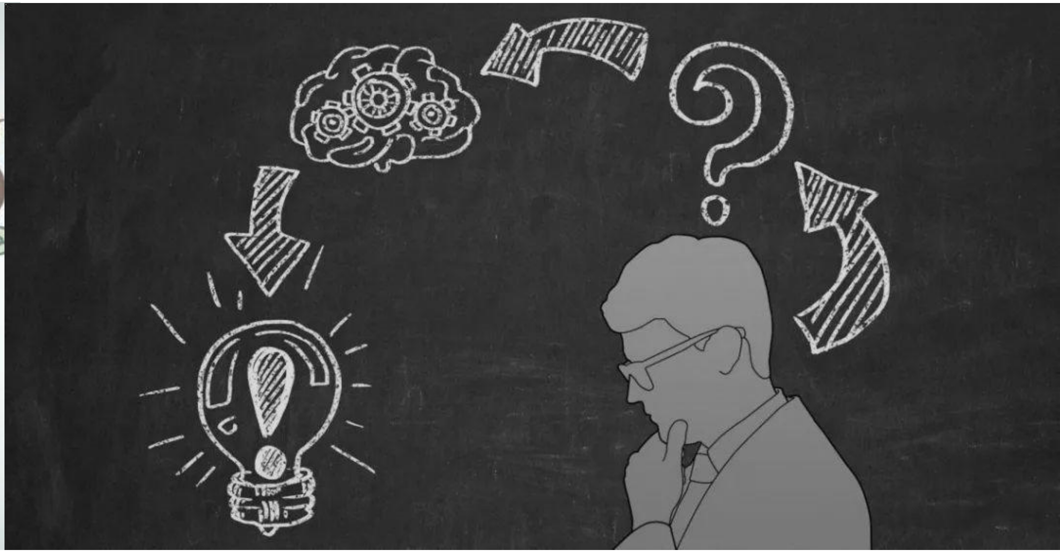
第4章 逻辑与证明

崔金华
邮箱:jhcui@hust.edu.cn
主页: https://csjhcui.github.io/
办公地址:华中科技大学南一楼东406 室

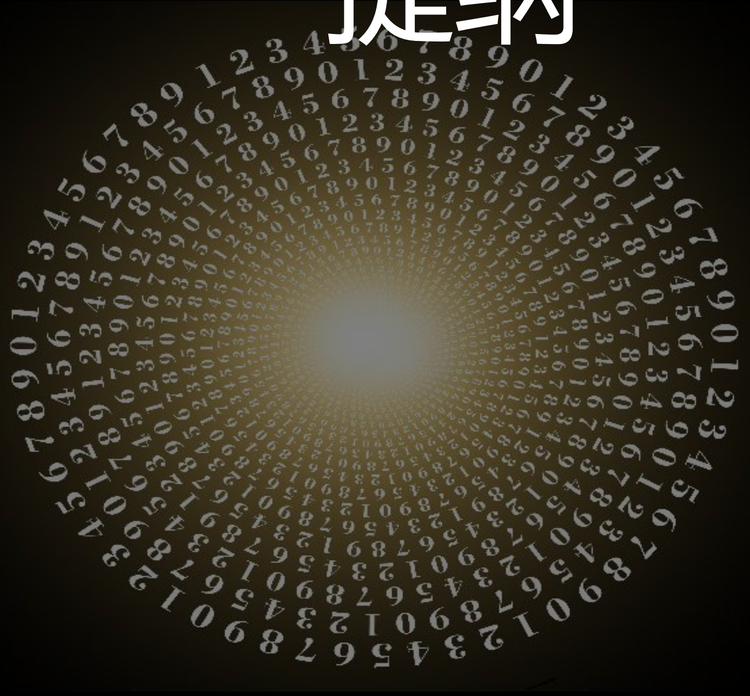




致谢:课件主要参考《 Discrete Mathematics and its application》(Eighth Edition) Keneth H. Rosen 和《离散数学》(第2版) 屈婉玲等版本的相关课件, 特此致谢!!!

Contents

提纲



¬ ∧ ∨ → ↔

T F

1 0

第4.1节 命题逻辑

Section 4.1: Propositional Logic

我们将学到的知识

- 命题的概念
- 复合命题
  - 非、合取、析取、异或
  - 蕴含
  - 逆命题, 逆否命题, 反命题
  - 双向蕴含
- 真值表

4.1.1 命题

- 定义:**命题**是一个陈述语句(陈述事实的语句), 它或者为真或者为假, 但不能不真不假.
- 不能被分解成更简单的命题称作**简单命题**(或原子命题). 在命题逻辑中, 简单命题是最小的基本单位, 对它不再细分.
- 举例:
  - 月亮是由绿色的奶酪组成的.
  - 华盛顿特区是美国的首都.
  - 加拿大的首都是多伦多.
  - 1 + 0 = 1
  - 0 + 0 = 2

4.1.1 命题

- 举例(不是命题):
  - 坐下!
  - 现在几点?
  - $x + 1 = 2$
  - $x + y = z$

4.1.2 命题逻辑

构造命题

- 命题变元: p, q, r, s, …
- 如果一个命题是真命题, 它的真值为真, 用T表示; 如果它是假命题, 它的真值为假, 用F表示.
- **复合命题**: 由一个或者多个命题用逻辑运算组合而来的新命题
  - 非/否 $\neg$
  - 合取 $\wedge$
  - 析取 $\vee$
  - 蕴含 $\rightarrow$
  - 双向蕴含 $\leftrightarrow$

4.1.2 非命题

- 命题p的**非命题**(否定命题)表示为$\neg p$, 它的真值表为:

p	$\neg p$
T	F
F	T

- 举例: p表示 “地球是圆的”，那么$\neg p$表示 “并非地球是圆的” 或者更简单地表述 “地球不是圆的”

4.1.2 合取命题

- p和q的**合取命题**表示为$p \wedge q$, 它的真值表为:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- 举例:p表示“我在家.” q表示“今天在下雨.” 那么$p \wedge q$则表示“我在家并且今天在下雨.”

4.1.2 析取命题

- p和q的**析取命题**表示为$p \vee q$, 它的真值表为:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- 举例: p表示 "我在家." q表示 "今天在下雨. " 那么$p \vee q$则表示 "我在家, 或者今天在下雨."

4.1.2 异或命题

- 在自然语言中“或”字有两种不同的含义:
  - “**兼或**” - 在句子“ Students who have taken CS202 or Math120 may take this class”中, 我们假设学生需要先完成至少一个先导课, 但是也可以两门先导课都参加过. 这表示析取($p \vee q$). 要想$p \vee q$为真, 那么至少其中一个, 或者两个都为真.
  - “**异或**” - 在句子“Soup or salad comes with this entrée,” 我们不希望开胃小菜同时有汤、沙拉. 这表示异或($p \oplus q$), p和q中至少有一个为真, 但不能同时为真. 它的真值表如下:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4.1.3 蕴含命题

- 如果p和q是命题，那么$p \to q$表示**条件语句**或者蕴含命题，读作“如果p，那么q”，它的真值表为:

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

真推出假，条件语句才为假

- 举例：p表示 “我在家.” q表示 “今天在下雨.” 那么$p \to q$则表示“如果我在家，那么今天在下雨.”

4.1.3 蕴含命题

- 在$p \to q$中, p是**假设(前提)**, q是**结论(推论)**.
- 在$p \to q$中, 前提和结论之间不需要有关联. $p \to q$的真值仅仅与p, q的真值有关系. 蕴含命题可能在中文表示不通顺, 但在命题逻辑中表示真.
  - "如果月亮由绿色的奶酪组成, 那么我比比尔.盖茨更富有. "
  - "如果月亮由绿色的奶酪组成, 那么我得靠救济生活."
  - "如果1+1=3, 那么你奶奶穿着军靴."

4.1.3 蕴含命题

- 为了便于理解条件语句的真值表，可以将条件语句想象为义务或合同.
  - “如果我当选了，那么我将减税.”
    - 只有在该政治家当选了但却没有减税的情况下，选民才能说政治家违背了竞选诺言.
  - “如果你在期末考试得了满分，那么你的成绩将被评定为A.”
    - 你得到满分，教授没有给你A，你才会有受骗的感觉. 对应条件语句中p为真，q为假时，$p \rightarrow q$的真值为假的情况.

4.1.3 常见的$p \rightarrow q$ 的表述方式

- 如果p, 则q
- p蕴含q
- q如果p
- q每当p
- p的必要条件是q
- q的充分条件是p
- 如果p, q (只要p, 就q)
- q由p得出
- q假定p
- q当p
- q是p的必要条件
- p是q的充分条件

4.1.3 常见的$p \rightarrow q$的表述方式(续)

❑ p仅当q

p only if q. 例: 某次考试有3道题, 分别是30分, 50分, 20分.
你有可能及格, 仅当你将50分那道题做对了 → 如果你考试及格了, 那么50分那道题你做对了.

❑ 只有q, 才p

口诀:只有才, 后推前.
例:只有努力奋斗, 才能实现梦想→如果实现梦想了, 那么一定努力奋斗了.

❑ q除非$\neg p$

q unless ¬p. 把"除非"替换为"如果不……那么……" 例: Maria会找到一份好工作, 除非她不学习离散数学→如果Maria学习离散数学, 那么她会找到一份好工作.

4.1.3 逆命题, 逆否命题, 反命题

- 从条件语句$p \to q$, 我们可以构成一些新的条件.
  - $q \to p$ 表示$p \to q$ 的**逆命题**
  - $\neg q \to \neg p$ 表示$p \to q$的**逆否命题**
  - $\neg p \to \neg q$ 表示$p \to q$的**反命题**

- 例: 找到如下语句的逆命题, 逆否命题, 反命题: “每当下雨时, 主队就能获胜.”

4.1.3 逆命题, 逆否命题, 反命题

- 从条件语句$p \rightarrow q$, 我们可以构成一些新的条件.
  - $q \rightarrow p$ 表示$p \rightarrow q$ 的**逆命题**
  - $\neg q \rightarrow \neg p$ 表示$p \rightarrow q$的**逆否命题**
  - $\neg p \rightarrow \neg q$ 表示$p \rightarrow q$的**反命题**

- 例: 找到如下语句的逆命题, 逆否命题, 反命题: “每当下雨时, 主队就能获胜.”
- 解:
  - 逆命题: 如果主队获胜, 那么下雨了.
  - 逆否命题: 如果主队没有获胜, 那么没有下雨.
  - 反命题: 如果没有下雨, 那么主队没有获胜.

4.1.3 双向蕴含命题

- 如果p, q为命题, 那么我们可以构造**双条件语句**(双向蕴含命题, 等价语句)$p \leftrightarrow q$, 读作"p当且仅当q ." 当p和q有同样的真值时, 双向蕴含命题为真, 否则为假. 它的真值表为:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- 常见表达$p \leftrightarrow q$:
  - p是q的充分必要条件
  - 如果p那么q, 反之亦然
  - p当且仅当q
- 例, p 表示 "我在家." q 表示 "在下雨." 那么$p \leftrightarrow q$则表示"我在家当且仅当在下雨."

4.1.4 复合命题的真值表

- 构建一个**真值表**:
  - 行:列出复合命题中的每个命题的所有可能的值.
  - 列:用一列(通常最后一列)来列出复合命题. 用一列来列出复合命题中组合的新命题. 包括最初的命题.
- 可以通过真值表来决定复合命题的真值.

- 例:有n个命题变元的真值表中总共有多少行?
- 解:2^n. 这表示有n个命题变元, 我们可以构造2^n不同的 (不等价的) 命题.

4.1.4 真值表举例

- 例: 为以下命题构建真值表:

$$p \vee q \to \neg r$$

- 解: 真值表如下:

p	q	r	¬r	p ∨ q	p ∨ q → ¬r
T	T	T	F	T	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T

4.1.4 用真值表来说明等价命题

- 两个命题等价, 当他们总是有相同的真值.

- 例: 用真值表来说明蕴含命题和逆否命题等价.
- 解:

p	q	¬ p	¬ q	p→ q	¬q → ¬ p
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

两列的值完全一样, 所以等价

4.1.4 用真值表来说明不等价

- 例: 用真值表来说明蕴含命题和反命题、逆命题不等价.
- 解:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \to \neg q$	$q \to p$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

这三列的值不相同

4.1.5 逻辑运算的优先级

运算符	优先级
$\neg$	1
$\wedge$ $\vee$	2 3
$\rightarrow$ $\leftrightarrow$	4 5

- 例: $p\vee q\rightarrow\neg r$等价于$(p\vee q)\rightarrow\neg r$. 如果想表达的意思是$p\vee(q\rightarrow\neg r)$, 那么必须用括号来表述.

4.1.6 逻辑运算与位运算

- 计算机中用0和1表示信息. 习惯上, 我们用1表示真, 0表示假. 如果一个变量的值为真或为假, 则此变量成为**布尔变量**. 一个布尔变量可以用一位来表示. 逻辑运算与位预算的对应关系如下表所示:

逻辑运算	位运算
$\vee$	OR
$\wedge$	AND
$\oplus$	XOR

- 例: 01 1011 0110 和 11 0001 1101 按位OR得11 1011 1111