2.1.4 基本的计数原则: 除法法则

- **除法法则**:如果一个任务能由一个可以用n种方式完成的过程实现, 而对于每种完成任务的方式w, 在n种方式中正好有d种与之对应, 那么完成这个任务的方法数为n/d.
- 可以用集合的方式来描述除法法则: 如果一个有限集A是n个有d个元素的互斥集合的并集, 那么$n = |A|/d$.
- 也可以用函数的方式定义除法法则: 如果f是一个A到B的函数, A和B都是有限集合, 那么对于每一个取值$y \in B$, 正好有d个值$x \in A$使得$f(x) = y$, 那么$|B| = |A|/d$.

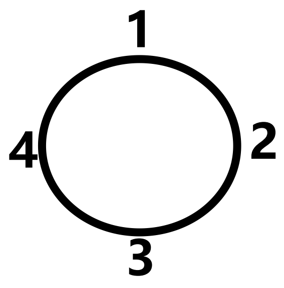
【相关基础知识：并集∪的概念，函数的概念】

2.1.4 基本的计数原则: 除法法则

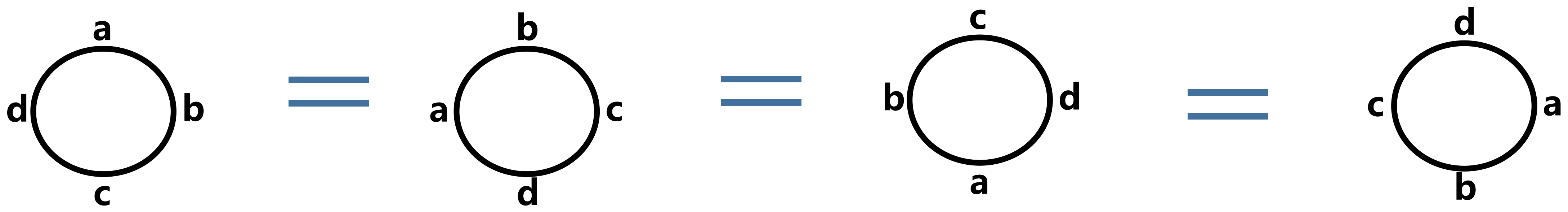
- 例:在牧场中有个计数奶牛腿数的系统. 该系统共统计该牧场上有572条腿, 则该牧场有多少只奶牛? 假设每只奶牛都有4条腿, 并且该牧场没有其他动物.
- 解:如果牧场的奶牛腿数为n, 而每只奶牛有4条腿, 那么该牧场有$n/4$只奶牛. 现在$n=572$, 所以共有$n/4=143$只奶牛.

2.1.4 基本的计数原则: 除法法则

- 例:4个人坐一个圆桌, 有多少种坐法? 其中如果每个人左右相邻的人都相同就认为是同一种坐法.



abcd四个人。
座位1选择a时：abcd;abdc;acbd;acdb;adcb;adbc 6种坐法
座位1选择b时：bacd;badc;bcad;bcda;bdac;bdca 6种坐法
……
共计6*4种坐法



这四种坐法是等价的

2.1.4 基本的计数原则: 除法法则

- 解:

随意选圆桌的一个椅子标记为座位1, 然后顺时针标记剩下的椅子为2, 3, 4. 座位1有4种选择坐人的方法, 座位2有3种, 座位3有2种, 座位4有1种. 因此$4! = 24$种方法将4个人安排.

然而, 座位1可选的4种坐法中都会产生相同的安排, 因为我们仅将一个人左边或右边的人不一样才视作两种不同的安排. 因为有4种选择人坐在座位1的方法, 所以根据除法法则, 共有24/4 = 6 种坐法.

思考：在圆桌就座问题中，n个人的不同就座方式数量是多少呢?

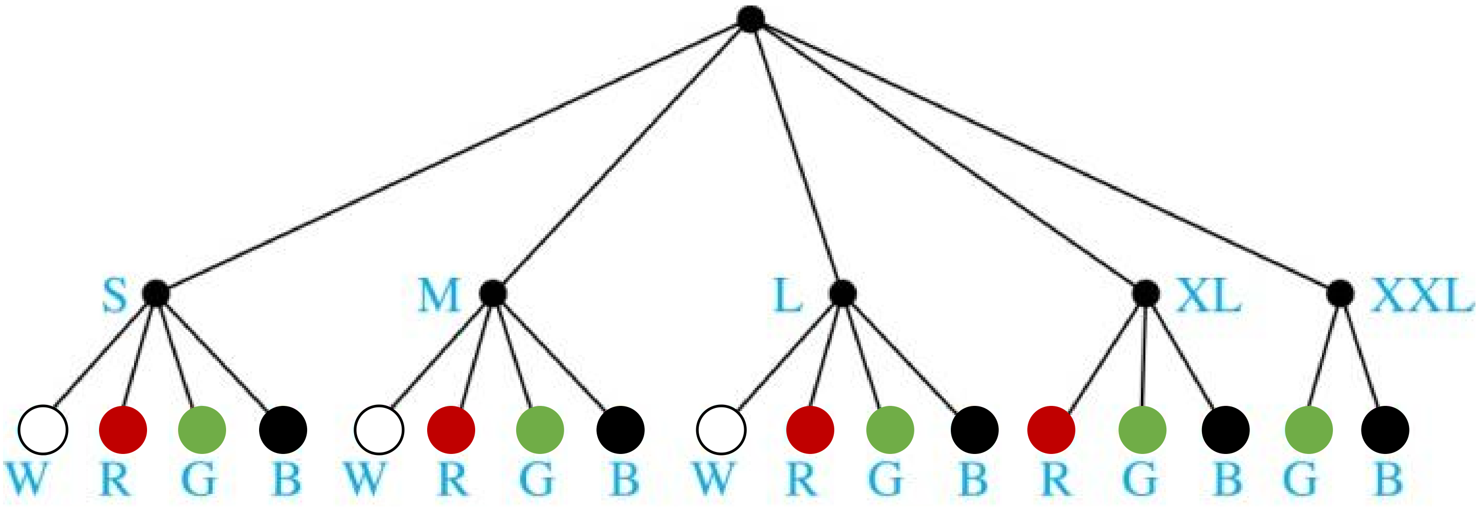
2.1.5 树图

- 我们还可以使用**树图**求解计数问题. 一颗树由根、从根出发的许多分支, 以及可能从其他分支端点出发的新的分支构成.
- 在计数中使用树时, 我们用一个分支表示每个可能的选择, 用树叶表示可能的结果. 这些树叶是某些分支的端点, 从这些端点不再进一步分支.
- 当用树图求解计数问题时, 为到达一片树叶所做的选择个数可能是不同的.

【相关基础知识：树的概念】

2.1.5 树图

- 例: 某衣服有五种不同的规格: S, M, L, XL, XXL. 其中XL有颜色:红, 绿, 黑. XXL有颜色:绿, 黑. 其他都有颜色:白, 红, 绿, 黑. 如果每种规格和颜色的衣服至少一件, 那么至少需要库存多少件该衣服?
- 解:如下所示给出了树图, 共需要17件该衣服.

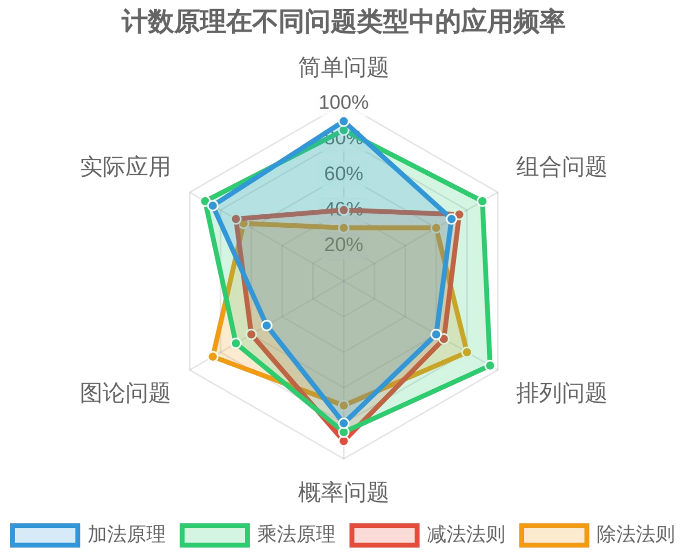


W：白色
R：红色
G：绿色
B：黑色

2.1 计数的基础的小结

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

+ **加法原理（分类计数）**
  互斥事件的总数 = 各个事件的数量之和
× **乘法原理（分步计数）**
  多步骤完成的方案数 = 各步骤方案数的乘积
● **减法法则（容斥原理）**
  |A ∪ B| = |A| + |B| - |A ∩ B|
÷ **除法法则**
  等价类的数量 = 总数 ÷ 每个等价类的大小



解题技巧：

1. 分析问题是分类还是分步，或两者结合
2. 确定是否存在重复计数或等价情况
3. 考虑使用树图直观表示复杂问题

应用场景总结：

加法原理：解决"或"关系的问题
乘法原理：解决"且"关系的问题
减法法则：解决重复计数的问题
除法法则：解决等价关系的问题
树图方法：解决多阶段决策问题