十进制	二进制	一进制
0	0000	0000000000000000
1	0001	0000000000000001
2	0010	0000000000000011
3	0011	0000000000000111
4	0100	0000000000001111
5	0101	0000000000011111
6	0110	0000000000111111
7	0111	0000000001111111
8	1000	0000000011111111
9	1001	0000000111111111
10	1010	0000001111111111

二进制与十进制

第1.2节 整数的表示和算法

Section 1.2: Integer Representations and Algorithms

第1.2节 整数的表示和算法

华中科技大学
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology，HUST

❑知识要点概览

1.2.1 整数表示

不同进制下的整数表示方法及其转换

- 十进制转八进制
- 二进制与其他进制转换
- 进制对照表

1.2.2 整数运算算法

二进制下的整数运算方法

- 二进制加法
- 二进制乘法
- 除法算法

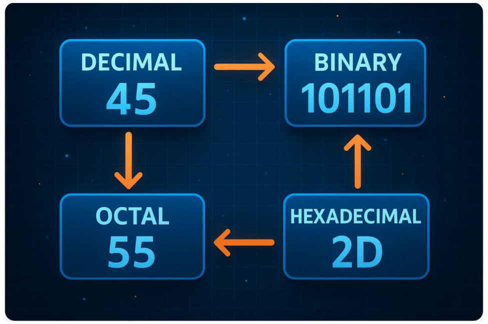
1.2.3 模指数运算

快速模指数运算算法及其应用

- 模指数运算原理
- 快速算法实现
- 计算示例

1.2.1 整数表示

- 在日常生活中，我们都用**十进制**(以10为基数, Decimal)记号来表示整数. 例如765, 我们表示的是$7·10^2 + 6·10^1 + 5·10^0$.
- 有时候, 用10以外的数为基数更方便.
  - 计算机中通常用**二进制**记号(以2为基数, Binary)来做算术运算.
  - **八进制**(以8为基数, Octal)记号, 使用0-7八个数字.
  - **十六进制**(以16为基数, Hexadecimal)记号来表示字符, 如字母和数字. 程序员常用十六进制表示内存地址和颜色值.
  - 再比如, 古玛雅人用20为基数的**二十进制**.
  - 再比如, 古巴比伦人用60为基数的**六十进制**.



不同进制间的转换关系

- 实际上, 我们可以用任何大于1的整数为基数来表示整数.

1.2.1 整数表示

- 【定理】: 令b是一个大于1的整数, 则如果n是一个正整数, 就可以唯一的表示为如下形式$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0$, 其中$k$是非负整数, a_0, a_1, a_2,…, a_k是小于b的非负整数, 且$a_k \neq 0$. 这给出的n的表示称为**n的b进制展开式**. 可记为$(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_b$

- 例如$(245)_8$表示 $2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 5 = (165)_{10} = 165$, 典型地, 整数的十进制展开式的下标10可以省略.

1.2.1 整数表示

- 在计算机中采用**二进制展开式**来表示整数. 那么每位数字要么是0要么是1, 一个整数的二进制展开式就是一个位串.

- 例: 以 $(101011111)_2$, $(11011)_2$为二进制展开式的整数分别是什么?
- 解:
  - $(101011111)_2 = 1\cdot2^8+0\cdot2^7+1\cdot2^6+0\cdot2^5+1\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1 +1\cdot2^0=351.$
  - $(11011)_2= 1\cdot2^4+1\cdot2^3+ 0\cdot2^2+1\cdot2^1+ 1\cdot2^0=27.$

1.2.1 整数表示

- **八进制展开式**是以8为基数的展开式，因此展开式中只有以下数字{0,1,2,3,4,5,6,7}.

- 例:以$(7016)_8$, $(111)_8$为八进制展开式的十进制整数分别是多少?
- 解:
  - $(7016)_8=7\cdot 8^3+0\cdot 8^2+1\cdot 8^1+6\cdot 8^0=3598$
  - $(111)_8=1\cdot 8^2+1\cdot 8^1+1\cdot 8^0=64+8+1=73$

1.2.1 整数表示

- **十六进制展开式**需要用到16个不同的数字，通常使用的是{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}, 其中A到F字母表示数字10到15.

- 例: 十六进制展开式$(2AE0B)_{16}$, $(E5)_{16}$的十进制展开式分别是多少?
- 解:
  - $(2AE0B)_{16}=2\cdot 16^4+10\cdot 16^3+14\cdot 16^2+0\cdot 16^1+11\cdot 16^0=175627$;
  - $(E5)_{16}=14\cdot 16^1+5\cdot 16^0=224+5=229$

1.2.1 整数表示

- 其中十六进制和二进制, 每一个十六进制的数字都可以用4位二进制的数字（0或者1）来表示． 比如 $(1110\ 0101)_2 = (E5)_{16}$． 因为 $(1110)_2=(E)_{16}$，$(0101)_2=(5)_{16}$

- 那么任何两种进制之间的转换应该如何计算呢？这儿重点考虑十进制到其他任意进制的转换.

- **进制的转换**: 构造一个整数n(十进制的整数n)的b进制展开式,
  - 首先, 用b除以n得到商和余数, 即$n = bq_0 + a_0$, $0 \le a_0 \le b$. 余数a_0就是n的b进制展开式的最右边的数字.
  - 接下来, 用b除以上一步的商q_0, 得$q_0 = bq_1 + a_1$, $0 \le a_1 \le b$. 其中a_1就是n的b进制展开式中从右边第二位的数字.
  - 继续以上过程, 连续用商除以b并以余数为新的b进制数.
  - 这一个过程在商为0时终止. 这个过程中从右向左产生n的b进制数字.
- 例如, $(5)_{10} = (101)_2$

1.2.1 整数表示

- 例: 求$(12345)_{10}$ 的八进制展开式.
- 解:首先用8除以12345得到:
  - $12345 = 8 \cdot 1543 + 1$
  - $1543 = 8 \cdot 192 + 7$(继续用8除以上一次的商)
  - $192 = 8 \cdot 24 + 0$(继续用8除以上一次的商)
  - $24 = 8 \cdot 3 + 0$(继续用8除以上一次的商)
  - $3 = 8 \cdot 0 + 3$(继续用8除以上一次的商)
  - 商为0, 终止.

以上过程中产生了一连串的余数1,7,0,0,3. 它们按照从右向左排列的数字30071就是对应的八进制展开式. 记作$(12345)_{10} = (30071)_8$.

1.2.1 整数表示

- 二进制与八进制、十六进制展开式之间的转换其实是非常容易的.
- 按位分组转换规则: 每个八进制数字对应一组三位的二进制数字, 而每个十六进制数字对应一组四位的二进制数字.
- 这种对应关系如下表所示, 其中未表示开头的0:

TABLE 1 Hexadecimal, Octal, and Binary Representation of the Integers 0 through 15.

十进制:	Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
十六进制:	Hexadecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
八进制:	Octal	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17
二进制:	Binary	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

3位二进制数字可转换为1位八进制数字

4位二进制数字可转换为1位十六进制数字

- 例: 求$(11\ 1110\ 1011\ 1100)_2$ 的八进制和十六进制展开式.
- 解:
  - 为了求八进制, 每三个为一组, 必要时在最左一组的开头加0. 这样我们得到从左到右为011,111,010,111和100. 对应的八进制数字则为3,7,2,7,4. 那么, 八进制展开式为$(37274)_8$.
  - 类似地, 为了求十六进制, 每四个为一组, 必要时在最左一组的开头加0. 得到0011,1110,1011,1100. 对应的十六进制数字3,E,B,C. 那么十六进制展开式为$(3EBC)_{16}$.

- 例: 求$(765)_8$和 $(A8D)_{16}$的二进制展开式.
- 解:
  - 为了求二进制, 把每个八进制数字转换为一组3个二进制数字. 其中7表示为111, 6表示为110, 5表示为101，于是$(765)_8=(1\ 1111\ 0101)_2$.
  - 类似地, 把每个十六进制数字转换为一组4个二进制数字. 其中A表示为1010, 8表示为1000, D表示为1101. 因此，$(A8D)_{16}=(1010\ 1000\ 1101)_2$.

1.2.2 整数运算算法

- 以前我们学过十进制的加减乘除法则, 比如11+20=31,11*3=33.
- 在计算机中是基于二进制来表示整数, 那么二进制下如何进行整数运算？这儿重点考虑的是二进制数的加法、乘法、除法中求商、除法中求余.
- 应用领域:
  - 计算机处理器设计
  - 数字电路设计
  - 密码学算法
  - 高精度计算

1.2.2 整数运算算法

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- 两个二进制展开式表示的整数的**加法算法**:

  其中最基本的2个只有一位的二进制数字相加有以下四种情况：

  0+0=0;

  0+1=1;

  1+0=1;

  1+1=0, 其中进位为1

- 总结:”逢二进一“的核心思想

1.2.2 整数运算算法

两个二进制展开式表示的整数的**加法算法**:

- 给定两个整数a和b，其n位的二进制展开式分别为$a=(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0)_2$ 和$b=(b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_0)_2$
- 要把a和b相加，首先把最右边的位相加，可得$a_0+b_0=c_0*2+s_0$，其中s_0是$a+b$的二进制展开式中最右边数字，c_0是进位，其中c_0可能为0，也可能为1.
- 然后把下一对二进制位以及进位相加，可得$a_1+b_1+c_0=c_1*2+s_1$，其中s_1是$a+b$的二进制展开式中的从右开始的第二位数字，c_1是进位.
- 循环以上过程，得到s_0，$s_1\ldots s_\mathrm{n}$. 因此，$\mathrm{a}+b=(s_\mathrm{n}s_{\mathrm{n}-1}\ldots s_1s_0)_2$.

1.2.2 整数运算算法

- 例:把a=$(1110)_2$和b =$(1011)_2$ 相加.
- 解:
  - 根据算法的步骤, $a_0 + b_0$=0+1=$c_0 * 2 + s_0$=0*2+1, 所以s_0为1, 进位c_0为0;
  - 然后, $a_1 + b_1 + c_0 = 1 + 1 + 0 = c_1 * 2 + s_1 = 1 * 2 + 0$, 所以$s_1$为0, 进位$c_1$为1;
  - 然后, $a_2 + b_2 + c_1 = 1 + 0 + 1 = c_2 * 2 + s_2 = 1 * 2 + 0$, 所以$s_2$为0, 进位$c_2$为1;
  - 然后, $a_3 + b_3 + c_2 = 1 + 1 + 1 = c_3 * 2 + s_3 = 1 * 2 + 1$, 所以$s_3$为1, 进位$c_3$为1;
  - 因此最后结果为11001. $(1110)_2$+$(1011)_2$ = $(11001)_2$

1.2.2 整数运算算法

- 例:把$a=(1110)_2$和$b\ =(1011)_2$相加.
- 解法2:

$$
\begin{array}{r}
1110 \\
+\quad 1011 \\
\mathit{1\,1\ \ 1}\quad\ \ \\
\hline
11001
\end{array}
$$

其中斜体表示的是进位

1.2.2 整数运算算法

- 两个二进制展开式表示的整数的**乘法算法**:

  其中最基本的2个只有一位的二进制数字相乘有以下四种情况：

  0*0=0;

  0*1=0;

  1*0=0;

  1*1=1

- 总结:二进制数乘法过程可仿照十进制数乘法进行

1.2.2 整数运算算法

- **乘法算法**:给定两个n位的整数a和b，其n位的二进制展开式分别为 $a=(a_{n-1}a_{n-2}...a_0)_2$ 和$b=(b_{n-1}b_{n-2}...b_0)_2$
  - 要把a和b相乘，利用分配律可以看出$ab=a(b_0\cdot 2^0+b_1\cdot 2^1+...+b_{n-1}\cdot 2^{n-1})=a(b_0\cdot 2^0)+a(b_1\cdot 2^1)+...+a(b_{n-1}\cdot 2^{n-1})$.
  - 要把a和b相乘, 首先注意当b_j=1时, $ab_j=a$. 当b_j=0时，$ab_j=0$.
  - 当用2乘以一项时, 可以把该项的二进制展开式向左移一位并在尾部加上0. 因而可以通过把ab_j的二进制展开式向左移j位, 再在尾部加上j个0来获得$a(b_j\cdot 2^j)$.
  - 最后, 把n个整数$a(b_j\cdot 2^j)$, j=0,1,2,3,...,$n-1$, 相加就得到ab.

- 例:把$a=(110)_2$ 和$b=(101)_2$相乘.
- 解:

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times\quad 101 \\ \hline 110 \\ 000 \\ 110 \\ \hline 11110 \end{array}$$

首先注意到

- $a(b_0 \cdot 2^0) = (110)_2 * 1 * 2^0 = (110)_2$
- $a(b_1 \cdot 2^1) = (110)_2 * 0 * 2^1 = (0000)_2$
- $a(b_2 \cdot 2^2) = (110)_2 * 1 * 2^2 = (11000)_2$

因此, 把$(110)_2$,$(0000)_2$,$(11000)_2$相加, 可得 $ab=(11110)_2$

- ***div*和*mod*算法**:给定整数a和d, $d>0$, 计算$q=a\ \boldsymbol{div}\ d$ 和$r=a\ \boldsymbol{mod}\ d$.
  - 当a为正时, 就从a中尽可能多次减去d, 直到剩下的值小于d为止. 所做减法的次数就是商, 而最后减剩下的值就是余数.
  - 当a为负时, 先求出$|a|$除以d的商和余数. 然后当$a<0$, 且$r>0$时, 就用这结果来计算当a除以d的商为$\boldsymbol{-(q+1)}$, 余数$\boldsymbol{d-r}$.
- 前面提及-11=3×(-4)+1, 那么$q=-4$, $r=1$. 而不是-11=3×(-3)-2(不满足r大于等于0的要求)
- 备注:这儿a和b没有要求是二进制下的n位整数; 此外还有一些其他更快的计算方式, 有兴趣的同学自行阅读课外书籍.

1.2.2 整数运算算法

- 例:$a=(11)_2$和$d=(10)_2$, 求$a\ \boldsymbol{div}\ d$和$a\ \boldsymbol{mod}\ d$的结果
- 解:$(11)_2-(10)_2=(1)_2$, 因为$(1)_2$小于$(10)_2$, 所以$a\ \boldsymbol{div}\ d$=减法的次数为1. $a\ \boldsymbol{mod}\ d$=多次减法后的剩余值为1.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \overline{01} \quad \text{该结果为商, } a\ \boldsymbol{div}\ d \\
10 & 11 \\
 & \underline{10} \\
 & 1 \quad \text{该结果为余数, } a\ \boldsymbol{mod}\ d
\end{array}
$$

1.2.2 整数运算算法

- 例: $a=(-11)_{10}$,$d=(3)_{10}$时求$a\ \boldsymbol{div}\ d$和$a\ \boldsymbol{mod}\ d$的结果
- 解:
  - 因为a小于0, 那么我们首先求出$|a|=11$除以d的商和余数. 对应的结果分别为$q=3$和$r=2$.
  - 然后, 当$a<0$且$r>0$时, 就用这结果来计算当a除以d的商$a\ \boldsymbol{div}\ d= -(q+1)=$-4, 余数$a\ \boldsymbol{mod}\ d\ = d-r=1$.

1.2.3 模指数运算

- 在密码学中，能够有效地计算b^n **mod** m很重要，这其中b, n, m都是大整数. 采用传统的先计算b^n，再求**mod** 的方法不可行，因为b^n是一个非常大的数.
- 例如:123^{1001}**mod** 101， 这儿都是默认的十进制数，当使用计算器还能算出结果.

1.2.3 模指数运算

- 例如:123^{10000}**mod** 101

1.2.3 模指数运算

- 为了解决以上难题$b^n \ \mathbf{mod}\ m$，我们可以采用**模指数运算**. 常用的模指数算法有二进制法, 二进制NAF算法, 滑动窗口算法等. 这儿我们介绍**二进制法**(或称二进制模幂计算算法, 或称逐次平方法, successive squaring method), 其他方法有兴趣的同学可自行课外学习.
- 令n的二进制展开式为$n = (a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0)_2$. 我们注意到
  - $b^n = b^{(a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+...+a_1\cdot 2^1+a_0)}$
  - $= b^{a_{k-1}\cdot 2^{k-1}} * ... * b^{a_2\cdot 2^2} * b^{a_1\cdot 2^1} * b^{a_0}$
  - $= (b^{a_{k-1}})^{2^{k-1}} * ... * (b^{a_2})^4 * (b^{a_1})^2 * (b^{a_0})^1$, 其中$a_{k-1}$, a_{k-2}, ...a_1, a_0要么为1, 要么为0
- 为了计算b^n, 只需要计算b, b^2, $(b^2)^2=b^4$, $(b^4)^2=b^8$, ..., $b^{2^{k-1}}$的值. 然后有了这些值, 把其中$a_j=1$的那些项b^{2^j}相乘就可以得到b^n的值.

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- 例:计算3^{11}.
- 解:
  - 首先注意11=$(1011)_2$, 因此$3^{11}=3^{1*2^3}*\ 3^{1*2^1}*\ 3^{1*2^0}=3^8*\ 3^2*\ 3^1$.
  - 通过连续取平方可以得到$3^2=9$，$3^4=9^2=81$，$3^8=81^2=6561$. 因此，$3^{11}=3^8*\ 3^2*\ 3^1=6561*9*3=177147$.

- 例:计算3^{644}.
- 解:
  - 首先注意$644=(10\ 1000\ 0100)_2$, 因此$3^{644}=3^{1*2^9}*3^{1*2^7}*3^{1*2^2}=3^{512}*3^{128}*3^4$.
  - 通过连续取平方可以得到$3^2=9$，$3^4=9^2=81$，$3^8=81^2=6561$，$3^{16}=6561^2=43046721$, $3^{32}=43046721^2=\ldots$
- 因此, 从这个例子我们看出以上方法中仍然计算量十分庞大. 为了提高效率, $b^n\,\mathbf{mod}\,m$中, 我们每乘以一项, 都做一次**mod** m运算, 以缩小结果值.

1.2.3 模指数运算

- 为了计算$b^n\,\mathbf{mod}\ m$, 依次求出 $b\ \mathbf{mod}\ m$, $b^2\ \mathbf{mod}\ m$, $b^4\ \mathbf{mod}\ m$,…. $b^{2^{k-1}}\mathbf{mod}\ m$, 并把其中$a_j$ =1的那些项$\mathrm{b}^{2^j}\mathbf{mod}\ m$相乘, 在每次乘法后求乘积除以$m$所得的余数. 具体伪代码如下所示:

1.2.3 模指数运算

模指数运算 b^n **mod** m 伪代码

procedure modular exponentiation (b整数;$n = (a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0)_2$; m正整数)
x := 1
power := b **mod** m
for i:=0 **to** k-1
    if a_i= 1 **then** x := (x * power) **mod** m
    power := (power * power) **mod** m
return x {x等于 b^n **mod** m}

- 1、n用二进制表示
- 2、初始时，x置为1, power置为b **mod** m

❑**模指数运算** b^n **mod** m 伪代码

```
procedure modular exponentiation (b整数;n = (a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0)_2; m正整数)
x := 1
power := b mod m
for i:=0 to k-1
    if a_i = 1 then x := (x * power) mod m
    power := (power * power) mod m
return x {x等于 b^n mod m}
```

❑3、for循环内:如果二进制中某一项a_i为1, 那么x=(x ∗power) **mod** m. 同时power=(power∗power) **mod** m(a_i为0时, for循环内只执行这个)

❑4、循环结束后，x的值为 b^n **mod** m的结果

- 例:计算3^{644} **mod** 645.
- 解:
  - 644的二进制展开式为$(10\ 1000\ 0100)_2$. 因此$k-1$=9.
  - 首先令x=1, power=3 **mod** 645=3.
  - 然后通过连续地取平方并**mod** 645来减少结果值. 计算3^{2^j}**mod** 645, $j=$ 1,2, ..., 9. a_j是645的二进制展开式的第j位. 如果a_j=1, 就在x当前值乘以3^{2^j}**mod** 645来减少结果值. 具体过程如下:
  - i=0:因为a_0=0, 所以有x=1, power=3^2 **mod** 645=9
  - i=1:因为a_1=0, 所以有x=1, power=9^2 **mod** 645=81
  - i=2:因为a_2=1, 所以有x=1$*$81, power=81^2 **mod** 645=111

1.2.3 模指数运算

- 解(续):
  - i=3:因为a_3=0, 所以有x= 81, power=111^2 **mod** 645=66
  - i=4:因为a_4=0, 所以有x= 81, power=66^2 **mod** 645=486
  - i=5:因为a_5=0, 所以有x= 81, power=486^2 **mod** 645=126
  - i=6:因为a_6=0, 所以有x=81, power=126^2**mod** 645=396
  - i=7:因为a_7=1, 所以有x=(81*396) **mod** 645=471, power=396^2 **mod** 645=81
  - i=8:因为a_8=0, 所以有x=471, power=81^2**mod** 645=111
  - i=9:因为a_9=1, 所以有x=(471*111) **mod** 645=36
  - 根据以上步骤, 可以得出结果为3^{644} **mod** 645=36.

1.2.3 模指数运算

- 例:计算3^{644} **mod** 645.
- 解法2(简化的写法):
  - 644的二进制展开式为$(10\ 1000\ 0100)_2$.
  - $3^{644}=3^4*3^{128}*3^{512}$
  - 然后通过连续地取平方并**mod** 645来减少结果值. 计算3^2 **mod** 645=9; 3^4 **mod** 645=81; 3^8 **mod** 645=111; 3^{16} **mod** 645=66; 3^{32} **mod** 645=486; 3^{64} **mod** 645=126; 3^{128} **mod** 645=396; 3^{256} **mod** 645=81; 3^{512} **mod** 645=111.
  - 因此, 3^{644} **mod** 645=81*396*111 **mod** 645=36

- 例:计算25^{37} **mod** 77.
- 解:
  - 37的二进制展开式为$(10\ 0101)_2$. 因此$25^{37} = 25^1 * 25^4 * 25^{32}$.
  - 通过连续地取平方并**mod** 77来减少结果值. 25^2 **mod** 77=9; 25^4 **mod** 77=4; 25^8 **mod** 77=16; 25^{16} **mod** 77=25; 25^{32} **mod** 77=9.
  - 因此, 25^{37}**mod** 77=25*4*9 **mod** 77=53.

第1.2节 整数的表示和算法小结

- 整数n(默认的10进制)的b进制展开式
- b进制下的加法, 乘法, **div**, **mod**运算算法
- $b^n \bmod m$, 模指数运算