第2章 计数

——探索数字的奥秘

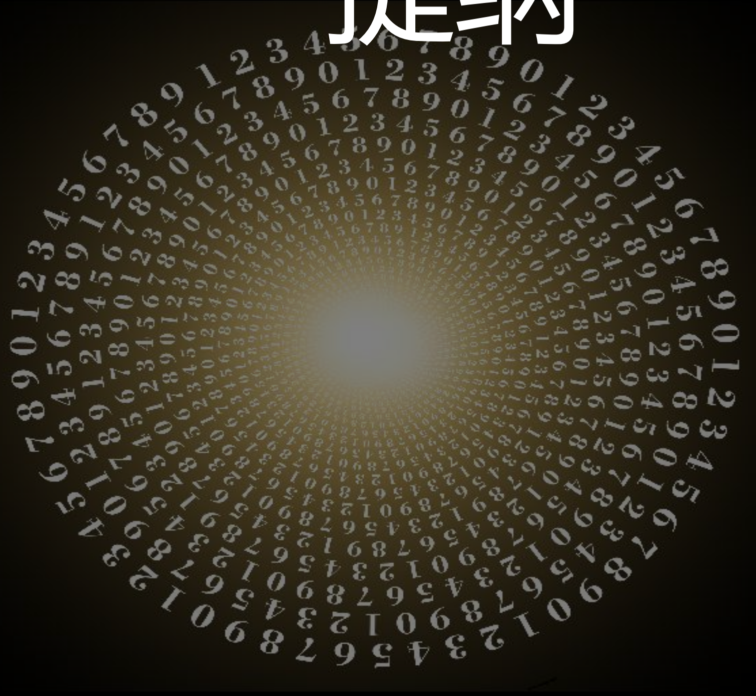
崔金华
邮箱:jhcui@hust.edu.cn
主页: https://csjhcui.github.io/
办公地址:华中科技大学南一楼东406 室



致谢:课件主要参考《 Discrete Mathematics and its application》(Eighth Edition) Keneth H. Rosen 和《离散数学》(第3版) 屈婉玲,耿素云,张立昂版本的相关课件, 特此致谢!!!

Contents

提纲



第2.1节 计数的基础

Section 2.1: The Basics of Counting

第2.1节 计数的基础

- 在数学中，计数原理是解决“有多少种可能”问题的基础工具. 生活中的计数问题：
  - 手机密码有多少种可能组合?
  - 服装搭配有多少种不同方案?
  - ……

思考一下

你能想到生活中哪些问题需要用到计数原理?

本节课我们将学习：

- 分步乘法计数原理
- 分类加法计数原理
- 减法法则(容斥原理)
- 除法法则

2.1.1 基本的计数原则:乘积法则

- 当一个过程由独立的任务组成时, 可以使用乘积法则.
- **乘积法则**:假定一个过程可以被分解成两个任务. 如果完成第一个任务有n_1种方式, 在第一个任务完成之后有n_2种方式完成第二个任务(**两个任务彼此独立**), 那么完成这个过程有$n_1 * n_2$种方式.
- 条件:无论第一个任务采用何种方式产生, 都不影响第二个任务.
- 适用于**分步选取计数问题**. 把一个事件的产生方式分解为若干独立步骤, 对每个步骤进行计数, 然后使用乘积法则.

2.1.1 基本的计数原则:乘积法则

- 乘积法则也可以用集合的语言来定义:
- 如果 $A_1, A_2, \ldots, A_m$是有穷集, 那么在这些集合的笛卡尔积中的元素数是每个集合的元素数之积.
- 在笛卡尔积(又称笛卡儿积)$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$中选一个元素的任务是通过在$A_1$中选一个元素, 在$A_2$中选一个元素, 以此类推, 由乘积法则得到:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_m|$$

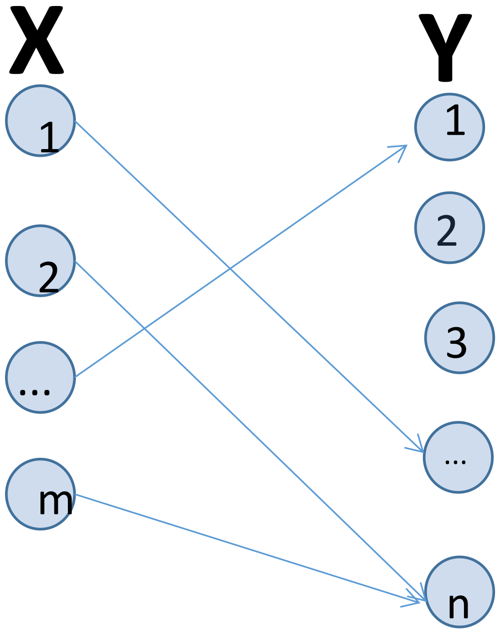
【相关基础知识：集合的概念、笛卡尔积、集合的基数等】

2.1.1 基本的计数原则:乘积法则

- 例:一个由0或1组成的共计7位的位串共有多少种?
- 解:这个位串上的每一位要么是0, 要么是1. 所以每一位有2种方式, 因此7位的位串共计有$2^7=128$种.

□例:计数函数, 从一个m元集到一个n元集存在多少个函数?

□解:函数对应定义域中m个元素中的每一个元素都要选择陪域中n个元素中的一个元素来对应. 所以, 存在$n \cdot n \cdot \cdot \cdot n = n^m$个从$m$元集到$n$元集的函数.



【相关基础知识: 函数的概念】
备注: 该题书上有误

2.1.2 基本的计数原则:求和法则

- **求和法则**: 如果完成第一项任务有n_1种方式, 完成第二项任务有n_2种方式, 并且这些任务**不能同时执行(不重叠)**, 那么完成第一或第二项任务有$n_1 + n_2$种方式.
- 适用于**分类计数问题**. 对达成事件的方法集合进行划分, 分别计数, 然后使用求和法则.

- 求和法则也可以用集合的语言来定义:
- 如果A和B是不相交的子集, 那么其并集的元素数是每个集合的元素之和. 令T是从A或B中选择一个元素的任务, 有$|A\cup B|$种方式执行T. 由于两个任务不能同时执行, 所以从集合中选择一个元素的方式数, 即为在并集中的元素, 等于$|A\cup B| = |A| + |B|$, 其中$A\cap B = \emptyset$.
- 更一般地, 任务从A_i中选择一个元素, 其中$A_1, A_2, \cdots, A_m$, 那么等于$|A_1\cup A_2 \cup\cdots\cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$, 其中$A_i\cap A_j = \emptyset$对于所有的$i, j$.

【相关基础知识：子集、并集∪、交集∩的概念】

2.1.2 基本的计数原则:求和法则

- 例:假定要选择一位教师或学生作为校委会的代表. 现在有37位教师候选人, 83位学生候选人. 那么这个代表有多少种不同的选择呢?
- 解:
  - 完成第一项任务, 选一位教师有37种方式.
  - 完成第二项任务, 选一位学生有83种方式.
  - 根据求和法则, 共有37 + 83 = 120种不同的方式来挑选这个代表.

2.1.2 复杂的计数问题

- 前面描述了乘积法则和求和法则.
  - 乘积法则，分步处理：一种产生方式分解为若干独立步骤，对每步分别进行计数，然后使用乘法法则；
  - 求和法则，分类处理：对产生方式的集合进行划分，分别计数，然后使用加法法则.

- 现实中很多计数问题不能仅仅只使用乘积法则(分步)或求和法则(分类)就能求解. 许多复杂的问题可能需要分类与分步结合使用.
  - 先分步，每步又分类
  - 先分类，每类内部分步

2.1.2 复杂的计数问题

华中科技大学
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology, HUST

- 例:某编程语言中变量要求要么是单个英文字母, 要么一个英文字母后面跟着一个数字. 请问共有多少种不同的变量?
- 解:V为不同变量的个数, V_1为单个英文字母的变量名的个数. V_2为字母紧跟数字的变量名的个数. V_1共有26种, V_2中第一项任务有26种可能, 第二项任务有10种可能, 所以根据乘积法则V_2共有$26*10$种可能. 根据求和法则$V=V_1+V_2=26+26\cdot 10=286$种不同的变量.

2.1.2 复杂的计数问题

- 例:计算机系统中要求用户设定一个6~8位的密码. 其中每位是大写字母或者数字, 且密码中必须至少包含一个数字. 共有多少可能的密码?

A7B9C3

XYZ123AB

9A8B7C

密码安全性:

6位密码: 低

8位密码: 高

- 解:设P是可能的密码总数, P_6, P_7, P_8分别是密码数为6, 7, 8位的密码数. 根据求和法则, $P = P_6 + P_7 + P_8$.
  - 其中P_6, 先求6位的由大写字母和数字构成的密码数(它包含了没有数字的密码), 然后减去没有数字的密码, 所以$P_6 = 36^6 - 26^6$ =1,867,866,560.
  - 类似的, $P_7 = 36^7 - 26^7$ = 70,332,353,920. P_8 =2,612,282,842,880.
  - 因此, $P = P_6 + P_7 + P_8$ = 2,684,483,063,360.

2.1.3 基本的计数原则: 减法法则

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- 假设一项任务可以通过两种方法之一来完成，但是这两种方法中有些是相同的. 这时采用求和法则来计算完成任务的方法数是不正确的. 如果将两种方法的数量相加, 总数会超过正确结果, 因为我们将两种方法中相同的部分算了两次. 为了获得正确的结果, 我们必须减去算了两次的结果, 这就产生了一个重要的计数法则.
- **减法法则**:如果一个任务或者可以通过n_1种方法执行, 或者可以通过n_2种另一类方法执行, 那么执行这个任务的方法数是n_1+n_2然后减去两类方法中执行这个任务相同的方法.
- 减法法则也称为**容斥原理**, 即:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

【相关基础知识：并集∪、交集∩的概念】

2.1.3 基本的计数原则: 减法法则

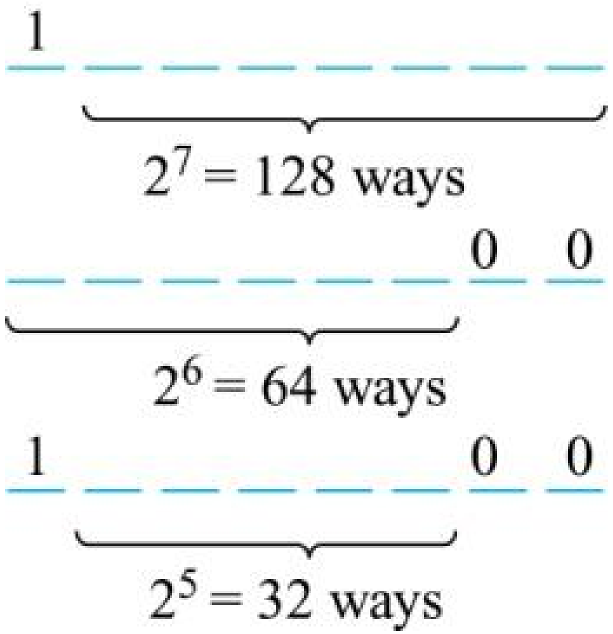
❑例:以1开始或者以00结束的8位位串有多少个?

位串示例:

1 0 1 0 1 0 0 0 ✓

1 1 1 1 1 1 0 0 ✓

❑解:如下图所示, 以1开始的8位位串共有2^7 = 128种. 以00结束的位串共有2^6 = 64种. 同时以1开始以00结束的位串有2^5 = 32种. 所以以1开始或者以00结束的情况共有128 + 64 − 32 = 160种.



思考: 如果以1开始且以00结束的8位位串有多少个, 应该如何计算?