第2.5节 排列和组合的推广

Section 2.5: Generalized Permutations and Combinations

知识要点

1. 有重复的排列
2. 有重复的组合
3. 具有不可区别物体的集合的排列
4. 把物体放入盒子

- 选取问题:设n元集合S，从S中选取 r个元素. 根据是否有序, 是否允许重复, 将该问题分为四个子类型:

	不重复选取	重复选取
有序选取	集合的排列	有重复的排列 (多重集的排列)
无序选取	集合的组合	有重复的组合 (多重集的组合)

- 其中不重复选取在上一节已讲, 因此本小节学习重复选取的问题

2.5.1 有重复的排列

- 定理: 具有n个对象的集合**允许重复的r排列数**n^r.
- 备注: **有重复的排列**, 或称多重集的排列
- 证: 当允许重复时, 在r排列中对r个位置的每个位置都有n种方式来选择集合的元素. 因为对每个选择都有n个物体是有效的, 根据乘积法则, 当允许重复时存在$n * n * \ldots * n = n^r$个r排列.

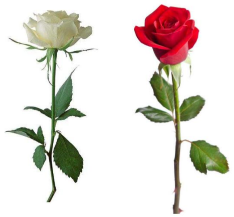
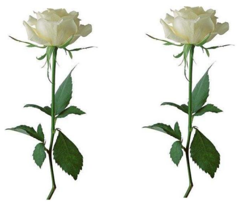
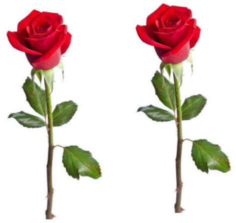
2.5.1 有重复的排列

- 例:用英文大写字母可以构成多少个长度为r的字符串?
- 解:因为有26个英文大写字母, 而长度为r的字符串中的每一位都选择一个字母, 且每一个字母都可以被重复地选择, 所以存在26^r个长度为r的字符串满足要求.

2.5.2 有重复的组合

- 那么接下来**有重复的组合问题**, 又称多重集的组合问题:
- 从n个元素的集合中, 允许重复地选择r个元素时, 这种情况下r组合有多少种方式呢?

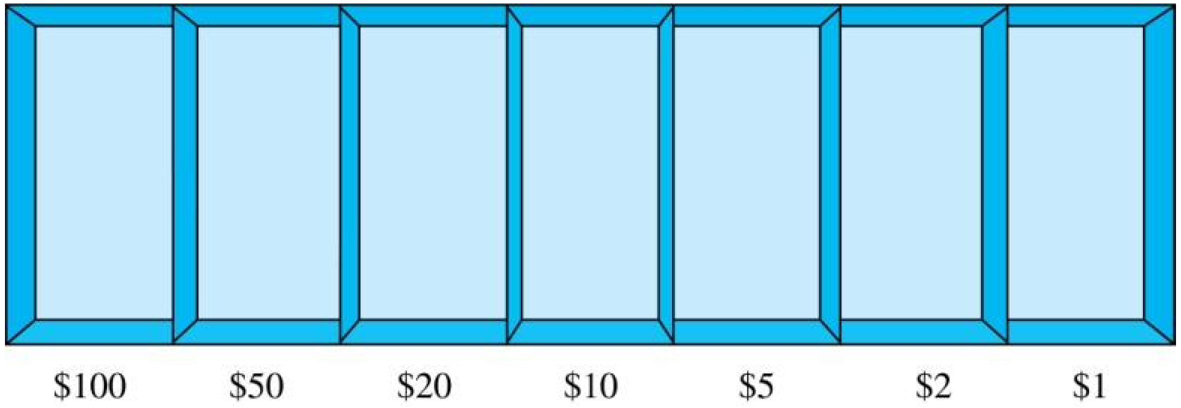
2.5.2 有重复的组合

- 例:花店现有白玫瑰和红玫瑰若干, 现在你要买2支花, 选择花的顺序无关, 只关心花的类型, 且可以重复的购买某类型的花, 请问共有多少种选法?
- 解:枚举列出所有的情况
  - 方法一:

  - 方法二:

  - 方法三:


综上，从2个元素的集合{白玫瑰,红玫瑰}中允许重复的2组合数为3

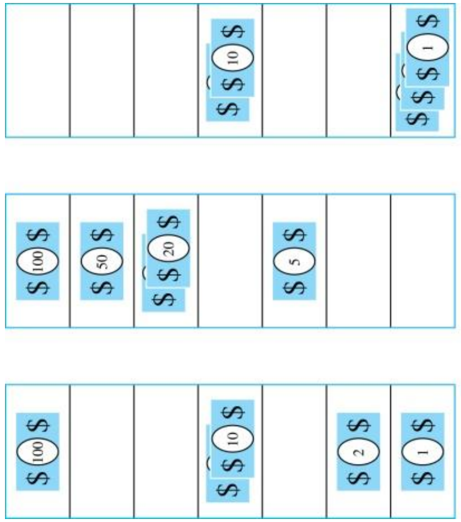
2.5.2 有重复的组合

- 例:从有$1, $2, $5, $10, $20, $50, $100的钱袋中选出5张纸币, 有多少种方式? 假定不管纸币被选的次序, 同样的币值的纸币也不加区分, 并且钱袋中每种纸币至少5张.
- 解(**隔板法**):纸币如下排列放在7个隔间中, 该题相当于我们从其中可以重复的选择5个元素, 如下所示:



2.5.2 有重复的组合

比如下图给出了3种不同选5张纸币的实例, 其中竖线表示隔板, 每个星号表示一张纸币:



$| \; | \; | \; * * \; | \; | \; | \; * * *$

$* \; | \; * \; | \; * * \; | \; | \; * \; | \; |$

$* \; | \; | \; | \; * * \; | \; | \; * \; | \; *$

所以, 在总共11个位置上安排6条竖线和5颗星. 也就是从11个位置上选择5颗星的位置, 对应了从11个元素的集合中无序地选择5个元素的方法数, 所以有$C(11,5)=\frac{11!}{5!6!}=462$种方式.

2.5.2 有重复的组合

華中科技大學
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology, HUST

- 定理:n个元素的集合**允许重复的r组合**数有$C(n+r-1,r)=C(n+r-1,n-1)$.

- 证:允许重复时n元素集合的r组合可以用$n-1$条竖线和r颗星的列表来表示. 这$n-1$条竖线用来标记n个不同的单元. 当集合的第i个元素出现在组合中时, 第i个单元就包含1颗星. 包含$n-1$条竖线和r颗星的每一个不同的表对应了n元素集合的允许重复的一个r组合, 即$C(n+r-1,r)$, 因为每个表对应了从包含r颗星和$n-1$条竖线的$n-1+r$个位置取r个位置来放r颗星的一种选择. 同时还等于$C(n+r-1,n-1)$, 因为每个表对应于取$n-1$个位置来放$n-1$条竖线.

- 思考: $C(n,r)=C(n,n-r)$ 中用$n+r-1$替代n

2.5.2 有重复的组合

- 例:方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 11$有多少个解? 其中x_1, x_2, x_3都是非负整数.
- 解:一个解对应从3元素集合中选11个元素的方式, 以使得x_1选第一类, x_2选第二类, x_3选第三类. 因此解的个数等于3元素的集合允许重复的11组合数, 所以

$$C(3+11-1,11)=C(13,11)=C(13,2)=\frac{13\times 12}{2\times 1}=78$$

2.5.2 有重复的组合

- 例(扩展):方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 11$有多少个解? 其中x_1, x_2, x_3都是非负整数. $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$.
- 解:类似地, 满足此限制的方程的解对应于从11项中的选择, 其中第一类元素至少取1个, 第二类元素至少取1个, 第三类元素至少取1个.

因此, 先选择1个第一类元素, 然后选择1个第二类元素, 再选择1个第三类元素. 完成以上选择以后, 我们再多选8个元素. 因此,

$$C(3+8-1,8) = 45$$

2.5.2 有重复的排列与组合

允许和不允许重复的排列和组合的归纳如下表所示:

类型	是否允许重复	公式
r排列	否	$P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$
r组合	否	$C(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$
r排列	是	n^r
r组合	是	$C(n+r-1,r)$

2.5.3 具有不可区别物体的集合的排列

- 在前面的计数问题中物体都是可区别的物体. 但在某些计数问题时<u>某些元素时没有区别的</u>, 这时需要小心避免重复计数.

- 例:分别以1, 2, 3这三个元素可以构成多少种不同的3排列？那么以1, 3, 3这三个元素呢?
- 解:(枚举法)以123这三个元素构成3排列时:$P(3,3)=6$, 具体为123, 132, 213, 231, 312, 321. 但是以133这三个元素构成3排列时, 因为包含两个3, 所有总共包含133, 313, 331这三种情况.

2.5.3 具有不可区别物体的集合的排列

- 例:重新排列单词SUCCESS中的字母能构成多少个不同的串?
- 解:包含3个S,2个C,1个U,1个E.
  - 首先, 3个S可以放在7个位置中, 产生C(7,3)种方式. 剩下4个位置
  - 然后, 2个C放在剩余的4个位置中, 产生 C(4,2)种方式. 剩下2个位置.
  - 然后, 1个U放在剩余的2个位置中, 产生 C(2,1)种方式. 剩下1个位置.
  - 最后, 1个E放在剩余的1个位置中, 也就是产生C(1,1) 种方式.
  - 因此, 由乘积法则, 可得:

$$C(7,3)*C(4,2)*C(2,1)*C(1,1)=\frac{7!}{3!\,4!}*\frac{4!}{2!\,2!}*\frac{2!}{1!\,1!}*\frac{1!}{1!\,0!}=420$$

- 备注: 如果包含1个E,1个U, 2个C, 3个S, 则$C(7,1)*C(6,1)*C(5,2)*C(3,3)=420$. 此外, 该题有歧义, 如果不包含原来的单词, 则需要再减1, 420-1=419种.

2.5.3 具有不可区别物体的集合的排列

华中科技大学
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology, HUST

- 定理:设类型1的相同的物体有n_1个, 类型2的相同的物体有n_2个,……, 类型k的相同的物体有n_k个. 那么这n个物体的不同排列数为

$$\frac{n!}{n_1! * n_2! * \cdots * n_k!}$$

- 证:
  - 首先, 在n个位置放类型为1的n_1个物体, 产生$C(n,\ n_1)$种方式. 剩下n-n_1个位置.
  - 然后, 在剩下的n-n_1个位置放类型为2的n_2个物体, 产生$C(n-n_1, n_2)$种方式. 剩下n-n_1-n_2个位置.
  - 以此类推循环, 直到$C(n$-n_1-n_2-⋯-$n_k,\ n_k)$ 种方法来放类型为k的n_k个物体. 由乘积法则, 可得:

$$\frac{n!}{n_1! * (n-n_1)!} * \frac{(n-n_1)!}{n_2! * (n-n_1-n_2)!} * \cdots * \frac{(n-n_1-\cdots n_{k-1})!}{n_k! * 0!} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \cdots * n_k!}$$

2.5.4 把物体放入盒子

- 有许多计数问题可以通过把物体放入盒子来解决，这些物体放入盒子的次序无关紧要. 这时需要注意区分物体和盒子它们分别是不是可辨别的:
  - 物体也许是可辨别的(有标号), 也许是不可辨别的(没有标号)
  - 盒子也许是可辨别的(有标号), 也许是不可辨别的(没有标号)

- 因此物体放入盒子分为四种情况:
  - 1、可辨别的物体与可辨别的盒子
  - 2、不可辨别的物体与可辨别的盒子
  - 3、可辨别的物体与不可辨别的盒子
  - 4、不可辨别的物体与不可辨别的盒子

2.5.4 把物体放入盒子

- 1、**可辨别的物体与可辨别的盒子**: 把n个不同的物体分配到k个不同的盒子, 使得n_i个物体放入盒子i的方式数为$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$
- 证明略

2.5.4 把物体放入盒子

- 例:52张标准牌发给4个人使得每个人有5张牌的方式有多少种?
- 解:首先, 第一个人得到5张牌, 那么有$C(52,5)$. 然后第二个人得到剩余52-5张牌中的5张牌, 那么有$C(47,5)$种方式, 接着第三个人有$C(42,5)$种方式, 最后第四个人有$C(32,5)$种方式. 因此总方式数为$C(52,5)C(47,5)C(42,5)C(32,5)$.
- 备注:也相当于将这些牌分为5个不同的类，其中4类中每一类都有5个物体，第五类相当于有32个物体, 因此52!/(5!5!5!5!32!).

2.5.4 把物体放入盒子

- 2、**不可辨别的物体与可辨别的盒子**: 将r个不可辨别的物体放入n个可辨别的盒子, 产生$C(n+r-1,n-1)=C(n+rr-1,r)$种方式

- 例:将10个不可辨别的球放入8个有编号的桶里, 有多少种方法?
- 解:该题相当于在允许重复计数的情况下, 从具有8个元素的集合中取出10组合的方法的个数，因此有 $C(8+10-1,10)=C(17,10)=$ 19,448种方法.

2.5.4 把物体放入盒子

- 3、**可辨别的物体与不可辨别的盒子**: 没有简单的闭公式来计算把n个可辨别的物体放入j个不可辨别的盒子, 可以通过枚举来求解该问题.

- 备注:有一个求和计算公式. $S(n,j)$(第二类斯特林数)表示将n个可辨别物体放入j个不可辨别的盒子的方式数, 其中不允许有空的盒子. 那么, 将n个可辨别物体放入j个不可辨别的盒子(其中非空的盒子数等于k, $k-1$, ..., 2, 1)的总方式数为:

$$\sum_{i=1}^{k} S(n,j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j}{i} (j-i)^n$$

2.5.4 把物体放入盒子

- 例: 将4本不同的书分为2堆, 每堆2本, 有多少分法?
- 解(枚举法): 不同的方法数罗列如下, 共包括以下6种, 其中后面3种和前面3种是重复的, 因此方法数为3.
  - 1,2　　3,4
  - 1,3　　2,4
  - 1,4　　2,3
  - 3,4　　1,2
  - 2,4　　1,3
  - 2,3　　1,4

2.5.4 把物体放入盒子

- 例:将4个不同的员工安排到3间不可辨别的办公室, 共有多少种方式?
- 解:(枚举法)共14种方式. 假设员工为a,b,c,d.
  - 可以把四位员工分配到同一间办公室(共一种方法):{{a,b,c,d}};
  - 可以将三位员工分配到同一间办公室, 剩下一位分配到另一间办公室(共4种方法):{{a,b,c},d}, {{a,b,d},c}, {{a,c,d},b}, {{b,c,d},a};
  - 可以将两位员工分配到同一间办公室，剩下的两位分配到另外一间办公室(共3种方法):{{a,b},{c,d,}}, {{a,c},{b,d}}, {{a,d},{b,c}};
  - 可以将两位员工分配到同一间办公室, 剩下的两位各安排一间办公室(共6种方法):{{a,b},{c},{d}}, {{a,c},{b},{d}}, {{a,d},{b},{c}}, {{b,c},{a},{d}}, {{b,d},{a},{c}}, {{c,d},{a},{b}};
  - 综上, 共计14种不同的分配方式.

2.5.4 把物体放入盒子

- 例:把$2n$个人分成n组, 每组2人, 有多少分法?
- 解:
  - $2n$个人, 人肯定是不重复的, 分成n组, 这里的分组是没有区别的. 相当于$2n$不同的球放到n个相同的盒子, 每个盒子2个.
  - 考虑**组有区别**, **组没有区别**两种情况: 分组有区别的话, 分成n组, 先选2人放第1组, 再选2人放第2组, ...这种方案是可以计算出来的; 分组没有区别的话, 然后对n个分组进行全排列(有$n!$种排列方法), 就得到了分组有区别的方案个数. 因此:

分组没有区别方案数 × $n!$ = 分组有区别方案数

  - 首先, 先考虑分组有区别(按照分步处理的方案)$=c(2n,2)C(2n-2,2)\ldots C(2,2)$
  - 然后, 考虑分组没有区别方案数=分组有区别方案数$/n!$
  - 综上所述, 将$2n$个人分为n组, 使得每组2人的方法数$N=\frac{1}{n!}c(2n,2)C(2n-2,2)\ldots C(2,2)=\frac{1}{n!}\frac{2n!}{(2n-2)!2!}\frac{(2n-2)!}{(2n-4)!2!}\cdots\frac{2!}{0!2!}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$

2.5.4 把物体放入盒子

- 4、**不可辨别的物体与不可辨别的盒子**: 将n个不可辨别的物体放入k个不可辨别的盒子的方式数可以通过枚举所有的方式. 没有简单的闭公式来计算这种情况.

- 例:将同一本书的6个副本放入4个相同的盒子有多少种方式, 其中每个盒子最多能容纳6本书.
- 解:(枚举法)共有9种方式. 按照具有最多副本数的盒子的次数依次列出每个盒子的副本数, 即列出的次序是递减的, 分别有:
  - 6(表示第一个盒子有6个副本, 第二个盒子没有副本, 第三个盒子没有副本, 第四个盒子没有副本)
  - 5,1
  - 4,2

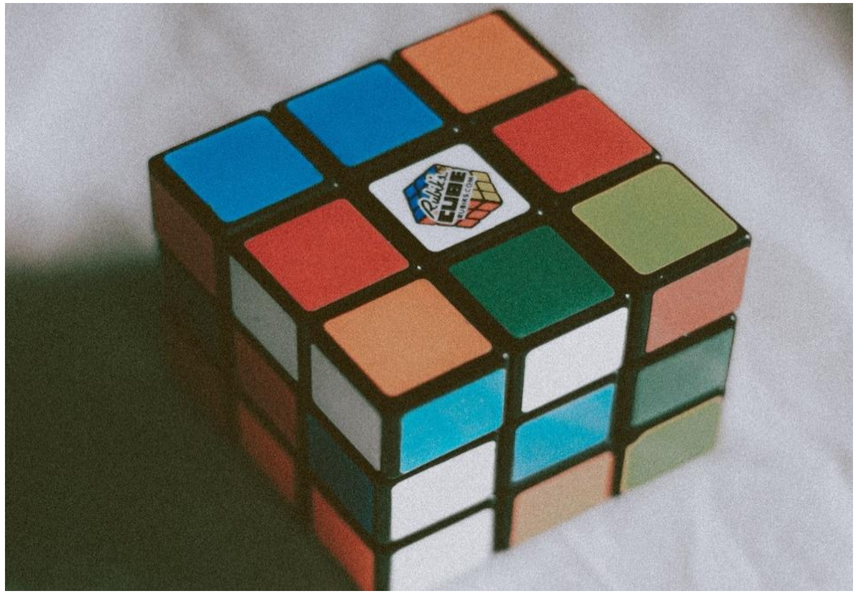
2.5.4 把物体放入盒子

- 解(续):
  - 4,1,1
  - 3,3
  - 3,2,1
  - 3,1,1,1
  - 2,2,2
  - 2,2,1,1
  - 综上, 共计9种方式来完成任务.

2.5.4 把物体放入盒子

- 以上四类归纳总结:

	盒子	物体	公式	备注
1	可辨别	可辨别	$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$	有闭公式
2	可辨别	不可辨别	$C(n+r-1,n-1)$	有闭公式
3	不可辨别	可辨别	$\sum_{j=1}^{k} S(n,j)$	无闭公式
4	不可辨别	不可辨别	$p_k(n)$	无闭公式



第2.6节 生成排列和组合

Section 2.6: Generating Permutations and Combinations

知识要点

1. 生成排列(自学)
2. 生成组合(自学)

生成组合

- **生成集合{1,2,3,...,n}的r组合**. 在字典排序下$a_1a_2...a_r$后面的下一个r组合的生成方法：
  - 首先, 从序列中找到$a_i \neq n-r+i$的最后元素a_i, 用a_i+1代替a_i;
  - 然后, 对应j=i+1,i+2， ...,r, 用a_i+j-i来代替a_j.
  - 综上, 下一个r组合为a_1, a_2,..., $\boldsymbol{a_i}(\boldsymbol{a_i} = a_i + 1)$, $\boldsymbol{a_i} + 1$, $\boldsymbol{a_i} + 2$, ...

【备注：书上有误 】

本章总结

- **乘积法则**:一个过程由两个子任务构成，那么完成这个过程的方式数是完成第一个任务的方式数和完成第一个任务后再做第二个任务的方式数之积.
- **求和法则**:如果两个任务不能同时做，那么用这种或者那种方式完成任务的总方式数是完成这两种任务的方式之和.
- **减法法则**:一个任务可以通过n_1种或者n_2种两类方式完成，完成这个任务的方式数是$n_1 + n_2$再减去两类方式中相同的方式.
- **除法法则**:如果一个任务能由一个可以用n种方式完成的过程实现,对于每种完成任务的方式w, 在n种方式中正好d种与之对应, 那么完成这个任务的方法数为n/d.

本章总结

- **鸽巢原理**：比k多的物体放入k个盒子，一定存在一个盒子包含了至少2个物体.
- **广义鸽巢原理**：N个物体放入k个盒子，一定存在一个盒子包含了至少$\lceil N/k \rceil$个物体.
- **r-排列**:$P(n,r) = n!/(n-r)!$
- **r-组合**:$C(n,r) = n!/(r!(n-r)!)$
- **二项式定理**：

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.$$

本章总结

- **允许重复的排列**：一个具有n元素集合有n^r排列.
- **允许重复的组合**：一个具有n元素集合有$c(n+r-1,r)$个r组合.