

## 2.3.1 排列

- 定理: 具有  $n$  个不同元素的集合的  $r$  排列数是  $P(n, r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$ , 其中  $n$  和  $r$  都是正整数, 且  $1 \leq r \leq n$ .
- 证: 排列第一个元素可以有  $n$  种方法, 因为集合中有  $n$  个元素. 第二个元素有  $n-1$  种方法, 因为集合中在第一次选择以后还剩下  $n-1$  个元素. 以此类推, 直到选择第  $r$  个元素时有  $(n - (r - 1)) = n-r+1$  种方法. 根据乘法法则, 存在  $n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1)$  个  $r$  排列.
- 推论: 如果  $n$  和  $r$  都是整数, 且  $0 \leq r \leq n$ , 则
$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$
- 注意,  $P(n, r) = 0$ , 当  $r > n$  时.

## 2.3.1 排列

□推论:元素依次排成一个圆圈的排列称为**环排列**(或称循环排列).  $S$ 的 $r$ 环排列数等于 $P(n, r)/r$ .

□证:

- 假设排列的 $r$ 个元素分别是 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ , 将 $a_1$ 接在 $a_r$ 的后边就组成一个环排列. 只要相邻关系不变, 这 $r$ 个元素中的任何一个作为**线排列**(或称线性排列)的首元素, 首尾相连所构成的环排列都相同.
- 因此, 环排列数是线排列数的 $1/r = P(n, r)/r$

## 2.3.1 排列

- 例: 懂排列的孙悟空. 从孙行者到者行孙, 再到行者孙. 请问还可能有多少个类似的名字?
- 解: 由孙、行、者三个汉字组成的3排列共有 $P(3,3)=3!=6$ 种不同的排名方式. 所以还可能有 $3! - 3 = 3$ 个名字.



## 2.3.1 排列

- 例: 字母ABCDEFGH有多少种排列包含串ABC?
- 解: 因为ABC必须成组出现可以当做一个对象来看待, 我们通过找6个对象, ABC, D, E, F, G, H的排列数. 它们可以按任意的次序出现, 所以  $P(6,6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$  种排列, 其中必定包含串ABC.

## 2.3.1 排列

- 例: 有6名女生和6名男生坐成一排, 每个人的旁边都可以随便坐, 那么共有多少种方式?
- 解: 具体座位没有任何限制, 相当于共12个人排列着坐, 所以共有 $P(12,12) = 12! = 479001600$ 种坐法.

## 2.3.1 排列

- 例: 有6名女生和6名男生坐成一排, 每个人的旁边都只能坐异性, 那么共有多少种方式?
- 解: 具体座位有限制, 包括以下两大种类坐法



因此共有 $2 * 6! * 6! = 1036800$ 种方式.

## 2.3.1 排列

□例：从1到9的数字中取7个数构成一个排列，要求5和6不相邻，求总的方案数是多少？

□解：

- 不加任何限制的排列数为  $P(9, 7) = 181440$
- 5和6相邻的排列数：有6种放置方法使得5后面是6，而反过来也一样。因此排列数为  $2 * 6 * P(7, 5) = 30240$
- 因此，最终方案数为总排列数减去5和6相邻的排列数 =  $181440 - 30240 = 151200$

## 2.3.1 排列

□例: 有10个人围坐一个圆桌, 其中有两个人不愿意挨着坐, 求多少种不同的座位方法?

□解:

➤所有人围成一个圆桌的排列数= $P(10,10)/10= 362880$

➤两个人挨着, 那么将这两个人看做一个整体, 插入剩下的8个人的空  
 $=2*8!=80640$

➤因此, 座位方法数 = 总排列数 - 两个人挨着的排列数 =  $362880 - 80640 = 282240$

## 2.3.2 组合

- 定义: 集合元素的一个 **r组合** 是从这个集合中无序地选择  $r$  个元素. 一个  $r$  组合是这个集合的一个  $r$  个元素的子集. 具有  $n$  个不同元素的集合的  $r$  组合数记作  $C(n, r)$  或  $\binom{n}{r}$ , 并且称为二项式系数(后续章节将学习这个记号).
- 条件: **可区分的物体, 没有先后顺序, 每一个元素同样不会被重复地被选择.** 注意  $C(n, 0) = 1$ , 因为恰好有一种方法来选择 0 个元素.

## 2.3.2 组合

□例:令 $S$ 是集合{a, b, c, d}. 那么{a, c, d}是一个3组合, 它和组合{d, c, a}, {a,d,c}, {c,a,d}, {c,d,a}, {d,a,c}是一样的, 因为集合中的元素的顺序没有关系.  $S$ 的2组合共有{a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}种, 所以 $C(4,2) = 6$ .

## 2.3.2 组合

□ 定理: 设  $n$  是正整数,  $r$  是满足  $n \geq r \geq 0$  的整数,  $n$  元素的集合的  $r$  组合数为

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

□ 备注:  $C(n, r) = 0$ , 当  $r > n$  时. 注意  $0! = 1$ .

□ 证: 我们如果要得到该集合的  $r$  排序的话, 我们可以先构成集合的  $r$  组合, 然后再排序每个  $r$  组合中的元素(这可以用  $P(r, r)$  种方法来做). 因此  $P(n, r) = C(n, r) * P(r, r)$ . 所以可以推出:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

推论:  $P(n, r) = C(n, r) * r!$

## 2.3.2 组合

□例:从一副52张标准牌中选择5张, 共有多少种不同的方法? 从一副52张标准牌中选择47张, 共有多少种不同的方法?

□解:

➤选5张, 这5张的次序不受限制, 所以 $C(52,5) = \frac{52!}{5!47!} = 2598960$

➤类似地, 选47张, 其次序不受限制, 所以 $C(52,47) = \frac{52!}{47!5!} = 2598960$

思考:  $C(n, r)$ 和 $C(n, n - r)$ 有什么关系呢?

## 2.3.2 组合

□推论:设 $n$ 和 $r$ 是满足 $r \leq n$ 的非负整数, 那么 $C(n, r) = C(n, n - r)$

□证:根据定理我们可以计算

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n - r)! r!}$$
$$C(n, n - r) = \frac{n!}{(n - (n - r))! (n - r)!} = \frac{n!}{(n - r)! r!}$$

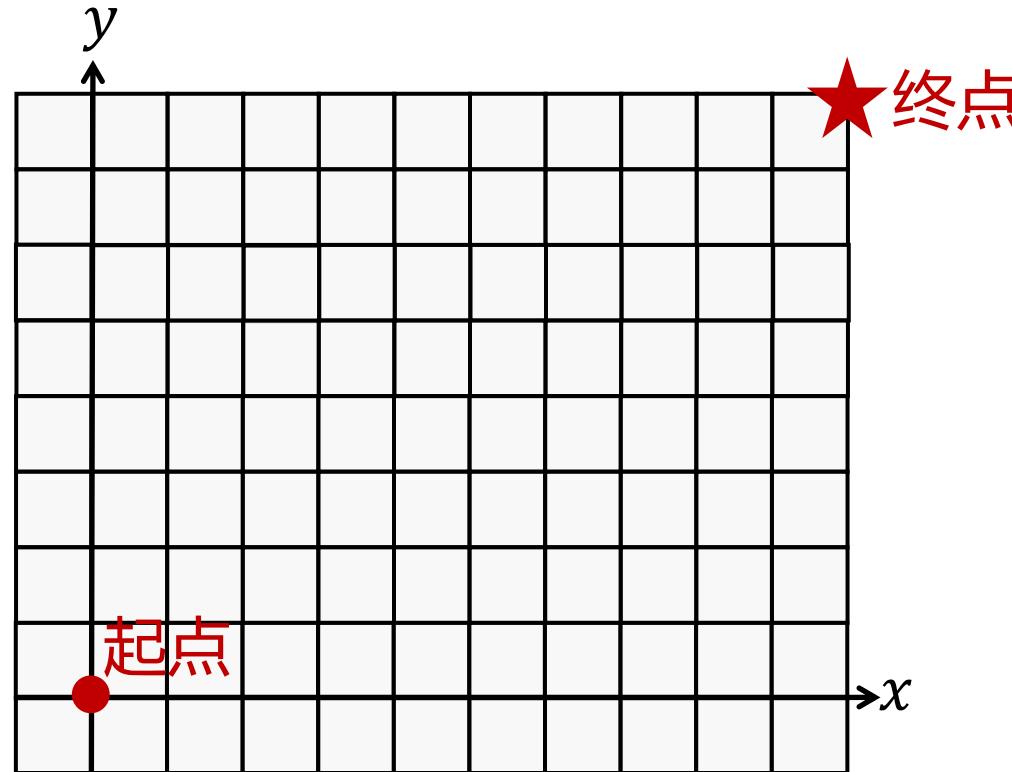
因此,  $C(n, r) = C(n, n - r)$

## 2.3.2 组合

- 例:有多少种方式从10个选手的网球队中选择5个选手?
- 解:从10个元素集合的5组合数给出, 根据定理可得  $C(10,5) = \frac{10!}{5!5!} = 252$

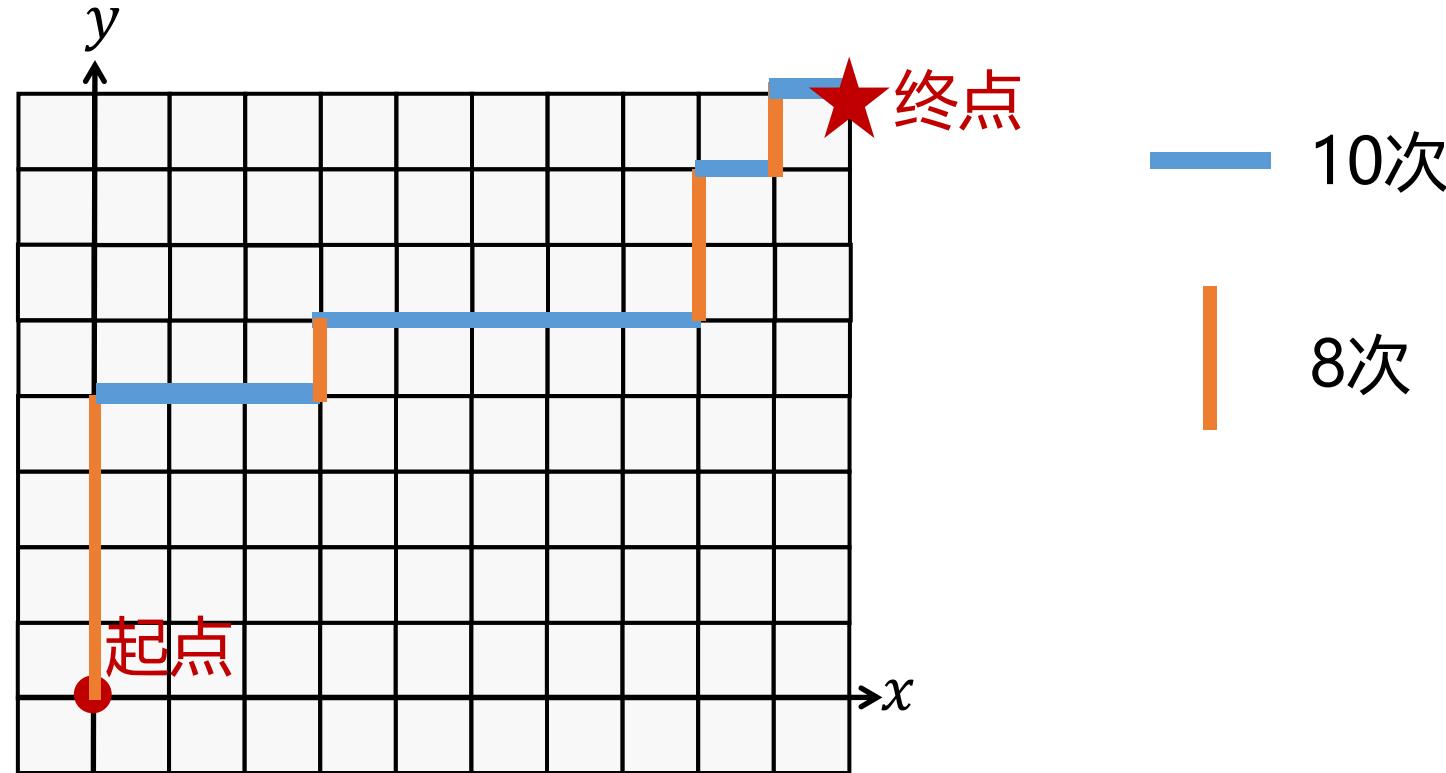
## 2.3.2 组合

□ 例如下图中从(0,0)点出发沿着 $x$ 轴或者 $y$ 轴的正方向每步走一个单位，最终走到(10,8)点，有多少种路径？



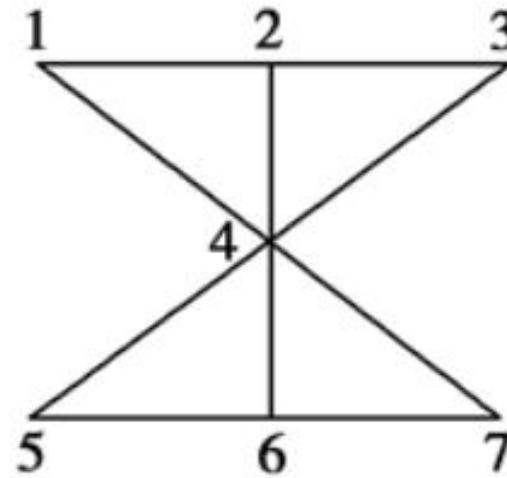
## 2.3.2 组合

□解:例如如下方式走, 其中 $y$ 轴正方向走8次,  $x$ 轴正方向走10次, 所以共计有 $C(10+8,8)=43758$ 条路径.



## 2.3.3 排列与组合应用

□例:把3盆带不同序号的红玫瑰和4盆带不同序号的白玫瑰摆放到下图的1-7的位置上, 其中三盆红玫瑰不能放在一条直线上, 请问共有多少种方式?



□解:当不考虑限制时共有 $P(7,7)=7!=5040$ 种方式. 这其中三盆红玫瑰放在一条直线上的方法共有 $5*3!*4!=720$ 种. 因此, 满足要求的方法数共有 $5040-720=4320$ 种.

## 2.3.3 排列与组合应用

□例:(差额选举)某班级班委进行换届选举, 从已产生的甲乙丙丁四人中选出三位分别担任班长, 副班长, 学习委员. 并且要求上一届班长甲不能连任原职, 则换届后不同的任职结果有多少种?

□解:任职结果分两种情况考虑

- 若选出的三人中没有甲时, 那么有 $P(3,3)=6$ 种情况;
- 若选出的三人中有甲时, 那么还需要再从剩下的乙丙丁三人中选出两人. 甲只能从副班长, 学习委员中选出一个任职, 而剩下的两人排列确定剩下的两职位, 因此有 $C(3,2) * C(2,1) * P(2,2) = 12$ 种情况;
- 综上, 共有 $6+12=18$ 种不同情况.

## 2.3 排列与组合小结

### □排列与组合的对比

特点	排列	组合
定义	从n个不同元素中取出m个元素按一定顺序排列	从n个不同元素中取出m个元素形成无序子集
顺序	重要	不重要
记法	$P(n, r)$	$C(n, r)$
公式	$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$	$C(n, r) = \frac{n!}{(n - r)! r!}$
关系	$P(n, r) = C(n, r) * r!$	$C(n, r) = P(n, r) / r!$