

第2.4节 二项式系数和恒等式

Section 2.4: Binomial Coefficients and Identities

知识要点

1

二项式定理

2

帕斯卡恒等式和三角形

3

其他二项式系数恒等式

2.4.1 二项式定理

□具有 n 个元素的集合的 r 组合记作 $C(n, r)$, 也记作 $\binom{n}{r}$. 由于这些数出现在二项式的幂 $(a + b)^n$ 的展开式中作为系数, 所以这些数叫做**二项式系数**.

□例: $(x + y)^2$ 的展开式是多少? $(x + y)^3$ 的展开式是多少? $(x + y)^{100}$ 的展开式是多少?

□解:

- $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^{100}$ 的展开式稍后我们再回答.

2.4.1 二项式定理

□ **二项式定理:**设 x 和 y 是变量, n 是非负整数, 那么

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \\&= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n\end{aligned}$$

□ 二项式定理给出了二项式幂的展开式的系数. 一个二项式是两项的和, 例如 $x+y$.

2.4.1 二项式定理

□例:求 $(x + y)^5$ 的展开式

□解:根据二项式定理, 我们有

$$\begin{aligned}(x + y)^5 &= \sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} x^{5-j} y^j \\&= \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y^1 + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x^1 y^4 + \binom{5}{5} y^5 \\&= x^5 + 5x^4 y^1 + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5x^1 y^4 + y^5\end{aligned}$$

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

2.4.1 二项式定理

□例:求 $(x + y)^{100}$ 的展开式

□解:根据二项式定理, 我们有

$$\begin{aligned}(x + y)^{100} &= \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} x^{100-j} y^j \\&= \binom{100}{0} x^{100} + \binom{100}{1} x^{99} y^1 + \dots + \binom{100}{99} x^1 y^{99} + \binom{100}{100} y^{100}\end{aligned}$$

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

2.4.1 二项式定理

□例:在 $(2x - 3y)^{25}$ 的二项式展开式 $x^{12}y^{13}$ 的系数是多少?

□解:这个表达式等于 $((2x) + (-3y))^{25}$. 根据二项式定理, 我们有

$$(2x + (-3y))^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j} (-3y)^j$$

因此, 当 $j = 13$ 时可以得到 $x^{12}y^{13}$ 的系数, 即

$$\binom{25}{13} (2)^{25-13} (-3)^{13} = -\frac{25!}{13! 12!} 2^{12} 3^{13}$$

□扩展:展开式 $x^{13}y^{13}$ 的系数是多少?

□解:因为 $13 + 13 \neq 25$, 所以无该项展开式, 系数为0.

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

2.4.1 二项式定理

□推论:设 n 为非负整数, 那么

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

□证:用二项式定理, 令 $x=1, y=1$, 我们有:

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

2.4.1 二项式定理

□推论:设 n 为正整数, 那么 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

□证:用二项式定理, 令 $x=1, y=-1$, 我们有:

$$0 = ((1) + (-1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

2.4.1 二项式定理

□推论:设 n 为非负整数, 那么 $\sum_{k=0}^n (2)^k \binom{n}{k} = 3^n$

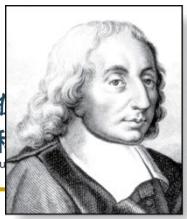
□证:用二项式定理, 令 $x=1, y=2$, 我们有:

$$3^n = ((1) + (2))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^{n-k} (2)^k = \sum_{k=0}^n (2)^k \binom{n}{k}$$

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

2.4.2 帕斯卡恒等式

Blaise Pascal
布歇·帕斯卡
(1623-1662)



□定理:(**帕斯卡恒等式**) 设 n 和 k 是满足 $n \geq k \geq 0$ 的正整数, 那么

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

□证(组合分析证明法):

- 假定 T 是包含 $n+1$ 个元素的集合. 令 a 是 T 的一个元素, 且 $S=T-\{a\}$.
- T 包含 k 个元素的子集有 $\binom{n+1}{k}$ 个.
- T 包含 k 个元素的子集, 或者包含 a 和 S 的 $k-1$ 个元素; 或者不包含 a 但包含 S 的 k 个元素.
- 由于 S 的 $k-1$ 个元素的子集数有 $\binom{n}{k-1}$ 个, 所以 T 含 a 在内的 k 元子集有 $\binom{n}{k-1}$ 个.
- 又由于 S 的 k 元素的子集有 $\binom{n}{k}$ 个, 所以 T 的不含 a 的 k 元子集有 $\binom{n}{k}$ 个.
- 从而得到 $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

【备注:答案非唯一】

2.4.3 帕斯卡三角形

□ 帕斯卡恒等式是二项式系数以三角形表示的几何排列的基础

- 该三角形叫做**帕斯卡三角形**, 或**杨辉三角形**. 三角形第 n 行由二项式系数 $\binom{n}{k}$ 组成.
- 其中相邻的二项式系数相加时, 就产生了下一行在这两个系数之间的二项式系数.

$\binom{0}{0}$		1	
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	1	1
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	1 2 1
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$
$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$
$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$
$\binom{8}{0}$	$\binom{8}{1}$	$\binom{8}{2}$	$\binom{8}{3}$
...		...	

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

【帕斯卡恒等式】 $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

2.4.4 其他二项式系数恒等式

□ **范德蒙恒等式**: m, n 和 r 是非负整数, 其中 r 不超过 m 或 n , 那么

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

□ **证(组合分析证明法)**: 假定从第一个集合有 m 项, 第二个集合有 n 项.
当从两个集合的并集中取 r 个元素的方式数为 $\binom{m+n}{r}$.

此外, 我们还可以采用另外一种方式来处理, 首先从第二个集合中取 k 个元素(方法是 $\binom{n}{k}$), 然后从第一个集合取 $r-k$ 个元素(方法是 $\binom{m}{r-k}$). 由乘积法则可知, 共有 $\binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$ 种方式完成. 得证.

2.4.4 其他二项式系数恒等式

□推论: n 是非负整数, 那么

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

□证: 范德蒙恒等式中 $m = r = n$, 可得 $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \binom{n}{k}$. 由于 $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, 所以上式 $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$, 得证.

【范德蒙恒等式 $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$ 】

思考: 如何用组合分析证明法来证明该恒等式呢?

2.4.4 其他二项式系数恒等式

□ 定理: n 和 r 是非负整数, 其中 r 不超过 n , 那么

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^n \binom{j}{r}$$

□ 证明略.

2.4.4 其他二项式系数恒等式

□例: 证明 $\binom{m}{0} \binom{n}{n} + \binom{m}{1} \binom{n}{n-1} + \dots + \binom{m}{n} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{n}$

□解:

➤ 将有 m 个男生, n 个女生的集合中选择出 n 个同学来参加比赛. 右边相当于从 $m + n$ 个学生的集合中选择 n 个学生的组合数, 共有 $\binom{m+n}{n}$ 种方法;

➤ 左边表示从这个集合里选取 n 个同学也可以等价地: 要么从 m 个男生中选择 0 个, 从 n 个女生中选择 n 个, 有 $\binom{m}{0} \binom{n}{n}$ 种方法; 要么从 m 个男生中选择 1 个, 从 n 个女生中选择 $n - 1$ 个, 有 $\binom{m}{1} \binom{n}{n-1}$ 种方法;; 要么从 m 个男生中选择 n 个, 从 n 个女生中选择 0 个, 有 $\binom{m}{n} \binom{n}{0}$ 种方法. 利用加法原理, 总数 = $\binom{m}{0} \binom{n}{n} + \binom{m}{1} \binom{n}{n-1} + \dots + \binom{m}{n} \binom{n}{0}$.

➤ 由此得证, 等式左边 = 右边.

2.4.4 其他二项式系数恒等式

□ 例: 使用组合分析法证明 $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = n \times 2^{n-1}$

【备注: 该题有一点难度】
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$