

1.3.6 欧几里得算法

□ **欧几里得算法**(辗转相除法): 令 $a = bq + r$, 其中 a, b, q, r 都是整数, 则 $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$.

□ 证:

- 假定 d 整除 a 和 b , 则可得 d 也能整除 $a - bq = r$ (来自推论: a, b, c 是整数, 且 a 不为 0, 当 $a|b, a|c$, 那么当 m 和 n 为整数时, 有 $a|mb + nc$). 因此, a 和 b 的任何公约数也是 b 和 r 的公约数.
- 类似地, 假定 d 整除 b 和 r , 则 d 也能整除 $bq + r = a$. 因此, b 和 r 的任何公约数也是 a 和 b 的公约数.
- 因此, $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$.

【备注: $a = bq + r$, 除法算法 a 除以 b 中, a 为除数, b 为被除数, q 为商, r 为余数】

1.3.6 欧几里得算法

□ 假定 a 和 b 为正整数, 且 $a \geq b$. 令 $r_0 = a, r_1 = b$. 我们连续地应用除法算法时, 可得:

$$\begin{array}{lcl} \text{除数} & \text{被除数} & \text{商} \\ r_0 & = & r_1 q_1 + r_2 \\ r_1 & = & r_2 q_2 + r_3 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ r_{n-2} & = & r_{n-1} q_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} & = & r_n q_n \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{余数} \\ 0 \leq r_2 < r_1, \\ 0 \leq r_3 < r_2, \\ \vdots \\ 0 \leq r_n < r_{n-1}, \end{array}$$

终止条件: 余数为0时, 结果等于最后的那个非零余数 r_n

最终在这一连续相除序列($a = r_0 > r_1 > r_2 > \cdots \geq 0$)中会出现余数为0, 那么 $\gcd(a, b) = \gcd(r_0, r_1) = \cdots = \gcd(r_{n-1}, r_n) = \gcd(r_n, 0) = r_n$. 也就是说最大公约数是这个序列中最后一个非零余数 r_n .

□ 备注: 以上除法算法共进行了 n 次

1.3.6 欧几里得算法

□例: 求 $\gcd(210, 715)$

□解:

$$715 = 210 \cdot 3 + 85$$

$$210 = 85 \cdot 2 + 40$$

$$85 = 40 \cdot 2 + 5$$

$$40 = 5 \cdot 8 + 0$$

因此 $\gcd(210, 715) = 5$

$$5 = 85 - 40 \cdot 2$$

$$= 85 - (210 - 85 \cdot 2) \cdot 2$$

$$= 85 \cdot 5 - 210 \cdot 2$$

$$= (715 - 210 \cdot 3) \cdot 5 - 210 \cdot 2$$

$$= 5 \cdot 715 - 17 \cdot 210$$

因此, 最大公约数可以表示为

$$s \times 715 + t \times 210$$

的形式, 其中 s 和 t 是整数

1.3.7 gcd的线性组合



Étienne Bézout
(1730-1783)



华中科技大学
计算机科学与技术学院
School of Computer Science & Technology, HUST

□一个重要结果: 两个正整数 a 和 b 的最大公约数可以表示为 $sa + tb$ 的形式, 其中 s 和 t 为整数. 换句话说, $\gcd(a, b)$ 可以表示为 a 和 b 的整系数的线性组合. 如 $\gcd(210, 715) = 5 = (-17) \cdot 210 + 5 \cdot 715$

□**贝祖定理**: 如果 a 和 b 为正整数, 则存在整数 s 和 t , 使得 $\gcd(a, b) = sa + tb$.

□【定义】: 如果 a 和 b 为正整数, 使得 $\gcd(a, b) = sa + tb$ 的整数 s 和 t 叫做**贝祖系数**, $\gcd(a, b) = sa + tb$ 叫做**贝祖恒等式**或**斐蜀(Bezout)等式**.

□备注: 此处不证明该定理, 有兴趣的同学自行阅读课外书籍.

1.3.7 gcd的线性组合

□例: 证明若 $d|a$, $d|b$, 则 $d|\gcd(a,b)$.

□证:

- 记 $e = \gcd(a, b)$
- 根据贝祖定理, 那么存在整数 x 和 y 满足 $e = ax + by$.
- 由于 $d|a, d|b$, 那么 $d|ax + by = e = \gcd(a, b)$
- 因此得证 $d|\gcd(a, b)$

1.3.7 gcd的线性组合

□ 如何找出两个整数的线性组合以使之等于其最大公约数呢？

➤ **方法1**: 使用欧几里得算法做反向处理, 获得线性组合的 s 和 t 值. 该方法因此需要将欧几里得算法的步骤正反各走一遍.

1.3.7 gcd的线性组合

□例: 把 $\gcd(252, 198) = 18$ 表示为252, 198的线性组合

□解: 首先用欧几里得算法可得 $\gcd(252, 198) = 18$

➤ $252 = 1 \cdot 198 + 54$

➤ $198 = 3 \cdot 54 + 36$

➤ $54 = 1 \cdot 36 + 18$

➤ $36 = 2 \cdot 18$

根据倒数第二行, 可以得到 $18 = 54 - 1 \cdot 36$, 这其中36又可以由倒数第三行得到 $36 = 198 - 3 \cdot 54$. 代入就可以得到 $18 = 54 - 1 \cdot (198 - 3 \cdot 54) = 4 \cdot 54 - 1 \cdot 198$, 这其中54又可以由第一行得到 $54 = 252 - 1 \cdot 198$. 代入就可以得到 $18 = 4 \cdot (252 - 1 \cdot 198) - 1 \cdot 198 = 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198$, 从而得解.

1.3.7 gcd的线性组合

□ 如何找出两个整数的线性组合以使之等于其最大公约数呢？

➤ 方法1: 使用欧几里得算法做反向处理, 获得线性组合的s和t值. 该方法因此需要将欧几里得算法的步骤正反各走一遍.

➤ 方法2(扩展欧几里得算法): 设置 $s_0=1, s_1=0, t_0=0, t_1=1$. 然后令

$$s_j = s_{j-2} - q_{j-1}s_{j-1}$$

$$t_j = t_{j-2} - q_{j-1}t_{j-1}$$

其中 $j = 2, 3, \dots, n$. q_j 表示欧几里得算法中做除法时的商. 最终求得 s_n 和 t_n . 因此 $\gcd(a, b) = s_na + t_nb$. 该方法只需要经历一遍欧几里得算法的步骤.

除数	被除数	商	余数	
r_0	$= r_1 q_1$	$+ r_2$		$0 \leq r_2 < r_1,$
r_1	$= r_2 q_2$	$+ r_3$		$0 \leq r_3 < r_2,$
\vdots				
r_{n-2}	$= r_{n-1} q_{n-1}$	$+ r_n$		$0 \leq r_n < r_{n-1},$
r_{n-1}	$= r_n q_n$			

1.3.7 gcd的线性组合

□例: 使用扩展欧几里得算法, 把 $\gcd(252, 198) = 18$ 表示为252, 198的线性组合

□解: 首先用欧几里得算法可得 $\gcd(252, 198) = 18$

- $252 = 1 \cdot 198 + 54$
- $198 = 3 \cdot 54 + 36$
- $54 = 1 \cdot 36 + 18$
- $36 = 2 \cdot 18$

其中 $q_1=1, q_2=3, q_3=1, q_4=2$. $s_0=1, s_1=0, t_0=0, t_1=1$. 那么根据 $s_j = s_{j-2} - q_{j-1}s_{j-1}$ 和 $t_j = t_{j-2} - q_{j-1}t_{j-1}$ 分别计算

$$s_2 = 1 - 1 \cdot 0 = 1,$$

$$t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$s_3 = 0 - 3 \cdot 1 = -3,$$

$$t_3 = 1 - 3 \cdot (-1) = 4$$

$$s_4 = 1 - 1 \cdot (-3) = 4,$$

$$t_4 = -1 - 1 \cdot 4 = -5$$

因此 $\gcd(252, 198) = 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198$

1.3.7 gcd的线性组合

□引理2: 如果 a, b, c 为正整数, 使得 $\gcd(a, b) = 1$, 且 $a|bc$, 则有 $a|c$.

□证明:

- 由于 $\gcd(a, b) = 1$, 根据贝祖定理知有整数 s 和 t , 使得 $sa + tb = 1$.
- 在等式两边乘以 c , 可得 $sac + tbc = c$.
- 根据定理1(如果 $a|b$, 则对所有的整数 c 有 $a|bc$), 已有 $a|bc$, 则 $a|tbc$ 成立.
- 因为 $a|sac$ (这是 sac 除以 a 一定没有余数), $a|tbc$, 由定理1[如果 $a|b, a|c$, 则有 $a|(b + c)$], 则有 $a|(sac + tbc)$.
- 因为 $sac + tbc = c$, 所以可得 $a|c$, 得证.

1.3.7 gcd的线性组合

□引理3: 如果 p 是素数, 且 $p|a_1a_2\cdots a_n$, 那么对于某个 i , $p|a_i$ 成立.

□备注:证明此处省略, 提示可以数学归纳法.

□定理 7 : 令 m 为正整数, a, b, c 为整数. 如果 $ac \equiv bc \pmod{m}$, $\gcd(c, m) = 1$, 则 $a \equiv b \pmod{m}$.

□证明:

- 因为 $ac \equiv bc \pmod{m}$, 则有 $m|ac - bc$, 整理为 $m|c(a - b)$.
- 根据引理2($\gcd(a, b) = 1$, 且 $a|bc$, 则有 $a|c$), 因为 $\gcd(c, m) = 1$, 所以 $m|a - b$.
- 从而, $a \equiv b \pmod{m}$.

1.3.7 gcd的线性组合

- 定理: 整数 a 和 b 互素的充分必要条件是存在整数 x 和 y 使得 $xa + yb = 1$
- 证明略.

【基础知识:如果 $a|b$, 且 b 不为0, 那么 $|a| \leq |b|$ 】

1.3.7 gcd的线性组合

□例: 如果 $a|c$, $b|c$, 且 a 和 b 互素, 那么证明 $ab|c$

□证:

- 根据上一个定理, a 和 b 互素, 那么存在整数 x 和 y 使得 $xa + yb = 1$.
- 在等式两边同乘以 c , 得到 $cxa + cyb = c$.
- 又由 $a|xa$ (根据整除的定义可得该结果), $b|c$, 那么 $ab|cxa$.
 - 这是因为 $a|xa$, 那么 $xa = xa$. $b|c$, 那么 $c = bt$, 其中 t 为整数. 因此 $cxa = xt * ab$. 即 $ab|cxa$.
- 类似地, $a|c$, $b|yb$, 那么 $ab|cyb$.
- 于是 $ab|cxa + cyb$.
- 由于 $cxa + cyb = c$, 所以 $ab|c$, 得证.

第1.3节 素数和最大公约数小结

- 素数, 大于1且恰只有1和它自身两个正因子的整数
- 合数, 大于1又不是素数的整数
- 最大公约数 $\gcd(a, b)$, 能整除 a 和 b 的最大整数
- 互素, 满足 $\gcd(a, b) = 1$ 的整数 a 和 b
- 最小公倍数 $\text{lcm}(a, b)$, 能被 a 和 b 整除的最小正整数
- 欧几里得算法求最大公约数
- 贝祖系数, $sa + tb = \gcd(a, b)$ 成立的整数 s 和 t , 欧几里得算法反向处理, 或者扩展欧几里得算法.