



第2.2节 鸽巢原理

Section 2.2: The Pigeonhole Principle

知识要点

1

鸽巢原理

2

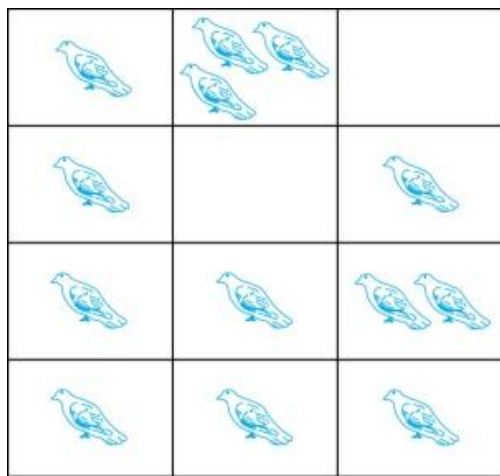
广义的鸽巢原理

3

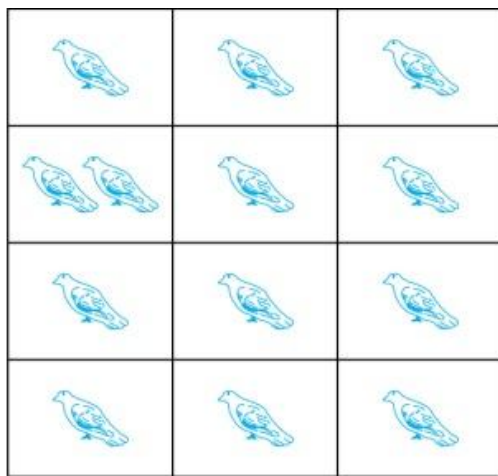
鸽巢原理的应用

2.2.1 鸽巢原理

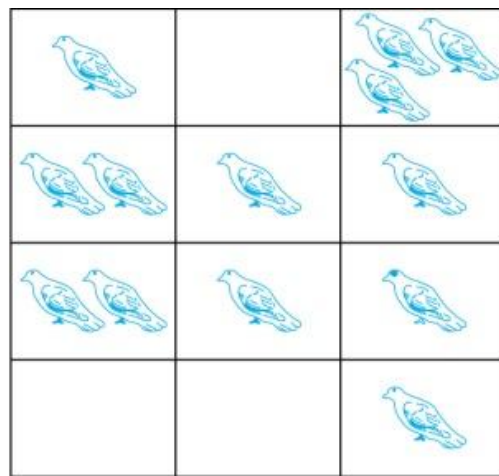
□如果有13只鸽子要飞往12个鸽巢. 在这种情况下, 一定会出现至少1个鸽巢中会最少有2只鸽子, 如下所示:



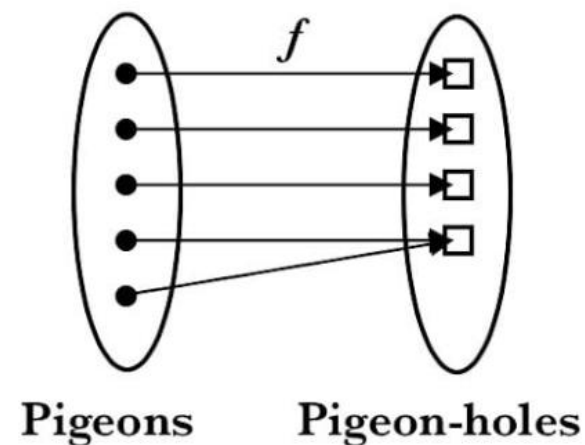
(a)



(b)

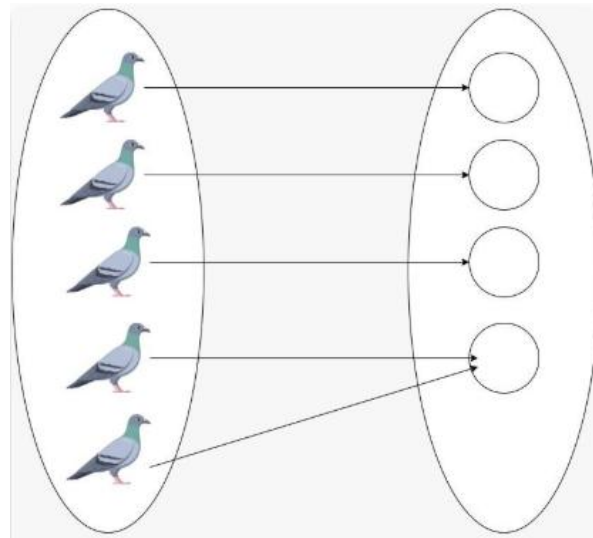


(c)



2.2.1 鸽巢原理

- **鸽巢原理**: 如果 $k + 1$ 个或更多的物体放入 k 个盒子, 那么至少有一个盒子包含了 2 个或更多的物体.
- 鸽巢原理也叫做**狄利克雷抽屉原理**, 或者**鸽洞原理**, 或者**鸽笼原理**. 难点在于实际应用中, 区分谁是物体, 谁是盒子.
- 证(反证法): 假设 k 个盒子中没有一个盒子包含的物体多于 1 个, 那么物体的总数至多为 k , 这与有 $k + 1$ 个物体矛盾. 得证.



2.2.1 鸽巢原理

- 从数学角度看, 鸽巢原理是关于映射的性质: 如果从一个有 $n + 1$ 个元素的集合到一个有 n 个元素的集合存在映射, 那么这个映射不可能是单射.
- 推论: 一个从有 $k + 1$ 甚至更多的元素的集合到 k 个元素的集合的函数 f 不是一对一函数.
- 证: 设函数 f 的陪域中每个元素 y 作为一个盒子, 包含了定义域中满足 $f(x) = y$ 的 x . 因为定义域有 $k + 1$ 或者更多的元素, 而陪域只有 k 个元素, 所以由鸽巢原理可知, 这些盒子中有一个包含了2个或者更多定义域的 x 的元素. 这就说明了 f 不是一对一函数.

【基础知识: 一对一函数(又称单射)的概念】

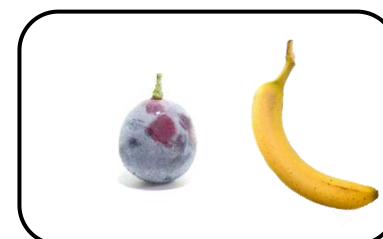
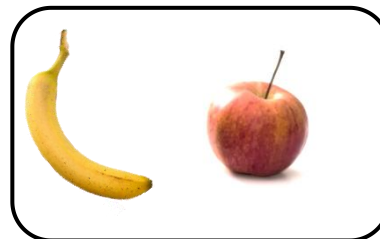
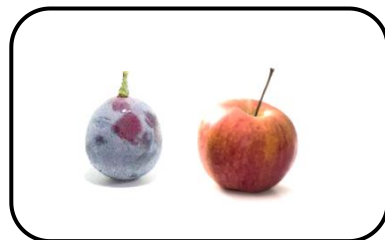
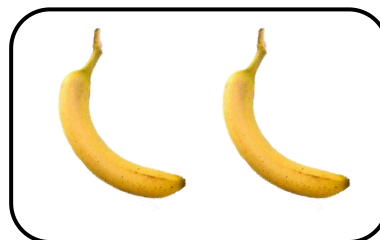
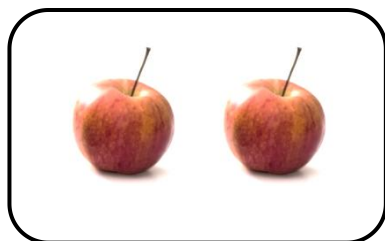
2.2.1 鸽巢原理

- 例:在一组367个人中一定至少有2个人有相同的生日.
- 解:根据鸽巢原理, 每一天作为盒子, 人作为需要放置的物体. 一定有至少2人的生日相同, 因为一年中最多只有366个可能的生日(2月有29天时).

- 例:期末考试分数从0到100. 班上必须有多少人才能保证至少有2个学生的分数相同?
- 解:根据鸽巢原理, 分数作为盒子对待, 共有101种情况, 那么102个学生中一定有至少2个人的分数相同.

2.2.1 鸽巢原理

- 例:某水果店里有苹果, 香蕉, 葡萄若干. 7位小朋友每人任选两种. 那么存在至少2位小朋友选择的水果种类相同.
- 解:三种水果任选两种共有如下6种不同情况



每种情况看作一个盒子, 7位小朋友看作物体. 那么一定有一个盒子会有至少2个物体.

2.2.1 鸽巢原理

- 例:在一个盒子中有10双黑色袜子, 12双蓝色袜子, 8双红色袜子, 那么拿出4只袜子一定能保证有相同颜色的两只袜子.
- 解:根据鸽巢原理, 这儿4只袜子作为需要放入盒子的物体, 袜子的颜色作为盒子(共3个), 那么一定有至少2只袜子是相同的颜色.

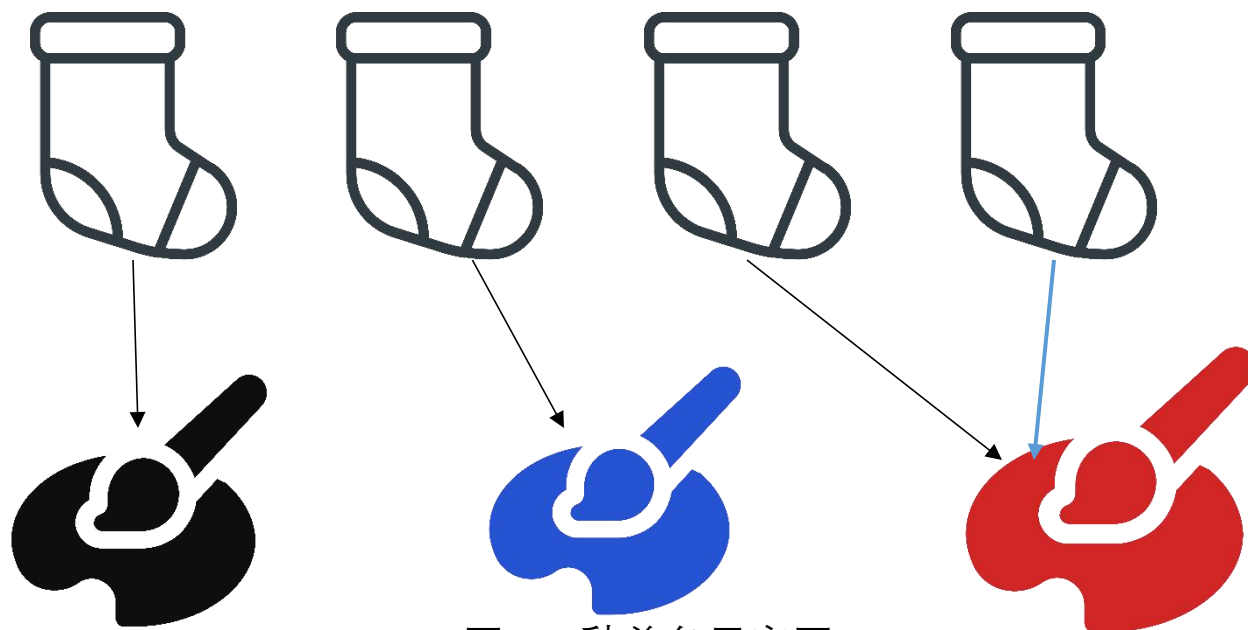


图1 一种着色示意图

2.2.1 鸽巢原理

□例:在1到10中选取6个数, 那么其中必定有两个数之和为11.

□解:这11个数中如下组合的两个数之和为11

$\{1,10\}, \{2,9\}, \{3,8\}, \{4,7\}, \{5,6\}$

根据鸽巢原理, 这儿以上5个组合作为盒子, 选取的数作为需要放入盒子的物体(共6个), 那么一定有两个数之和为11.

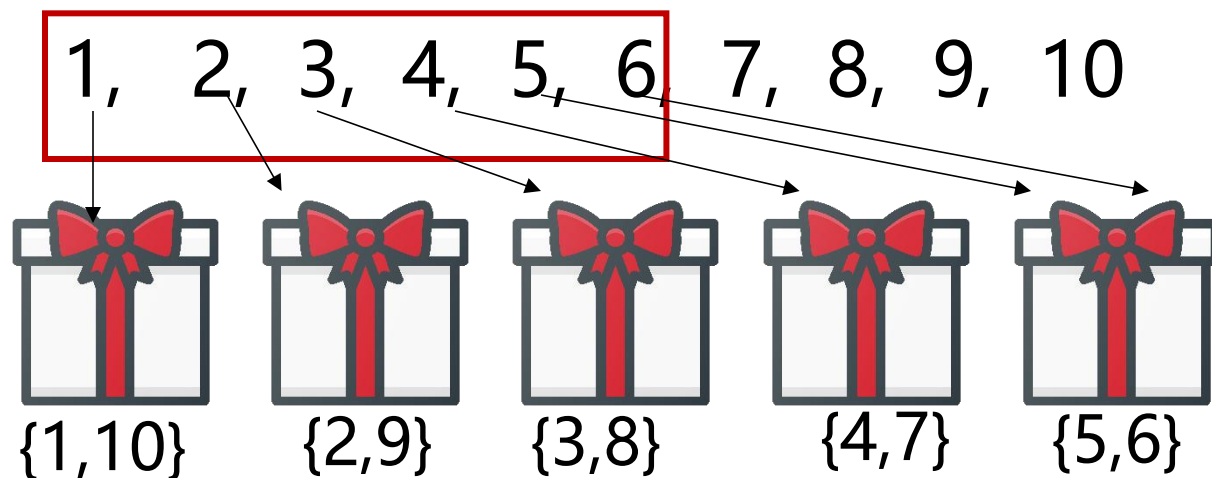


图2 一种选取6个数的方法

2.2.1 鸽巢原理

- 例:在边长为2厘米的正三角形中, 放入5个点, 那么一定存在两个点的距离小于1厘米.
- 解:如图所示将正三角形划分为4个小正三角形, 其中每个小正三角形的边长为1厘米. 那么该问题变为将5个物体放入4个盒子中, 一定有至少一个盒子中至少有两个点.

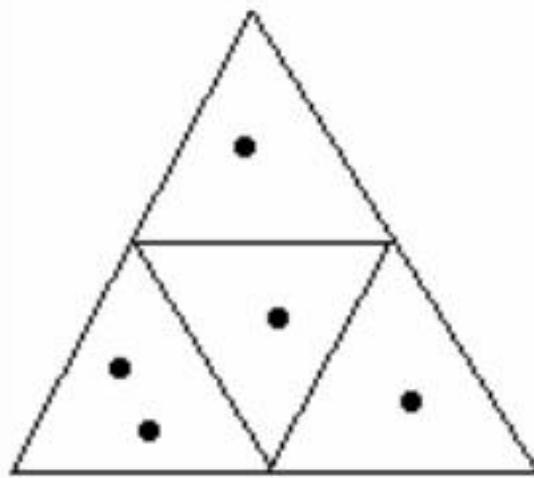


图3 一种放入5个点的方法

2.2.1 鸽巢原理

□例:在一次酒会上有 n 个来宾, 其中一些来宾互相握手致意. 已知没有人和自己握手, 两人之间最多握手一次. 那么一定有两名来宾的握手次数相同.

□解:

➤来宾作为需要放入盒子的物体(n 个), 握手的次数作为盒子. 那么盒子最少可以是0, 最多可以是 $n-1$. 但是握手次数不可能既有0, 又有 $n-1$:

- a)如果有来宾的握手次数为 $n-1$, 说明他和其他任何一个来宾都握手过, 则不存在某来宾没有和其他人握手过.
- b)类似地, 如果有来宾的握手次数为0, 说明他没有和其他任何一个来宾握手过, 那么就不可能存在某个来宾和其他所有人都握手过($n-1$).

➤综上, 盒子的个数最多为 $n-1$ 个(0, 1, 2, ..., $n-1$ 共有 n 个, 在此基础上减去1个), 物体个数为 n . 所以必定两个来宾具有相同的握手次数.

2.2.1 鸽巢原理

□例:证明对于每个整数 n , 存在一个数是 n 的倍数且在它的十进制表示中只出现0和1(例如 $n=4$, 那么存在100满足要求).

□解:

- 假设 $n+1$ (备注, 书上此处有误)个整数的表: 1, 11, 111, 111...1(有 $n+1$ 个).
- 一个整数去除以 n 时, 存在 n 个不同的可能余数, 0, 1, ..., $n-1$. 这里可能的余数当做盒子.
- 该表中有 $n+1$ 个数当做物体, 用这些数去除以 n 留下的余数的值确定放入的盒子. 根据鸽巢原理, 必定有两个整数在除以 n 时会有相同的余数.
- 那么这两个整数之差一定只有0和1, 并且它能够被 n 整除(备注, 这儿应用了数论的知识).

【同余: n 整除 $a - b$, $a \equiv b \pmod{n}$ 】

2.2.2 广义鸽巢原理

□ **广义鸽巢原理**: 如果 N 个物体放入 k 个盒子, 那么至少有一个盒子包含了 $\lceil N/k \rceil$ 个物体.

□ **证明**: 假定没有盒子中包含了比 $\lceil N/k \rceil - 1$ 多的物体, 那么物体的总数最多就只有:

$$k \left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 \right) < k \left(\left(\frac{N}{k} + 1 \right) - 1 \right) = N$$

这与存在的总数 N 个物体相矛盾. 得证.

【相关基础知识: $\lceil x \rceil$ 代表上取整函数, 大于或等于实数 x 的最小整数. $\lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$ 】

2.2.2 广义鸽巢原理

- **普遍问题:** 把物体分入 k 个盒子中, 使得某个盒子至少有 r 个物体, 求物体的最少个数.
- **解:** 物体设为 N , 根据广义鸽巢原理 $[N/k] \geq r$, 就能使得某个盒子至少有 r 个物体. 存在如下等式

$$r \leq [N/k] < (N/k) + 1$$

$$r - 1 < N/k$$

$$k(r - 1) < N$$

所以满足如上不等式的最小 N 值为 $N = k(r - 1) + 1$.

2.2.2 广义鸽巢原理

- 例:张三在15天内做了170道题, 那么他一定某天做了至少12道题.
- 解:根据广义鸽巢原理, 15天作为盒子 k , 170道题作为放入盒子的物体 N . 那么 $\lceil N/k \rceil = \lceil 170/5 \rceil = 12$ 表示某天做的最少题数 r .

2.2.2 广义鸽巢原理

- 例:如果有五种成绩A, B, C, D, E. 在一个班上最少有多少个学生才能保证, 至少6个学生都得到相同的成绩?
- 解:为了保证至少 $r = 6$ 个学生都得到相同的成绩, 五种成绩作为盒子 $k = 5$, 需要的最少学生数是使得 $\lceil N/5 \rceil = 6$ 的最小整数 N . 该整数 $N = k(r-1) + 1 = 5 * (6-1) + 1 = 26$, 所以需要26个学生才能满足要求.

2.2.2 广义鸽巢原理

□例:a)从一副标准的52张牌中必须选多少张才能保证选出的至少有3张是同样的花色? b) 必须选多少张才能保证选出的至少有3张是红心?

□解:

- a) 假设有 $k = 4$ 个盒子用来分别保存4种不同花色的牌. 使用广义鸽巢原理如果选 N 张, 那么至少有一个盒子含有至少 $\lceil N/4 \rceil$ 张牌. 现在 $r = 3$, 即需要 $\lceil N/4 \rceil \geq 3$, 所以最小的 N 值为 $N = k(r-1) + 1 = 4 * (3-1) + 1 = 9$.
- b) 在最坏情况下, 选一张红心前已经选了其他所有的黑桃、方块、梅花, 共计39张, 那么接下来选的3张牌都将只能是红心. 所以为了得到3张红心, 可能需要选42张(此处没有使用广义鸽巢原理).

2.2.3 鸽巢原理的应用

□例:在30天的某个月内, 某球队一天至少打一场比赛, 最多打45场. 证明一定有连续的若干天恰好打了14场.

□解:令 a_j 表示直到第 j 天共打的场数. 那么 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$ 是一个具有不同正整数的递增序列, 并且 $1 \leq a_j \leq 45$.

另一方面 $a_1 + 14, a_2 + 14, a_3 + 14, \dots, a_{30} + 14$ 是一个具有不同正整数的递增序列, 并且 $15 \leq a_j + 14 \leq 59$.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, a_3 + 14, \dots, a_{30} + 14$ 这个具有60个正整数的序列中每个值都小于59.

根据鸽巢原理, 一定有两个值相同. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$ 中各不相同, $a_1 + 14, a_2 + 14, a_3 + 14, \dots, a_{30} + 14$ 也各不相同. 所以存在下标 i 和 j 满足 $a_i = a_j + 14$. 也就是说从第 $j + 1$ 天到第 i 天打了14场比赛, 得证.

2.2.3 鸽巢原理的应用

□ 鸽巢原理在日常生活中的应用

1. 抽屉整理

如果你有10件衣物但只有7个抽屉, 那么至少有一个抽屉会放入2件或更多衣物.

2. 相同生日

在一个有367人的团队中, 那么一定至少有2个人有相同的生日.

3. 头发问题

北京有超过2000万人口, 但人的头发最多约15万根, 所以北京一定有至少2个人的头发数量相同.

4. 网络安全

在哈希函数中, 如果输入空间大于输出空间, 必然存在碰撞(不同输入产生相同输出).

❓ 思考: 你能想到鸽巢原理在生活中的其他应用吗?