$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

T F

1 0

第4.4节 谓词和量词

Section 4.4: Predicates and Quantifiers

我们将学到的知识

- 谓词
- 变量
- 量词
  - 全称量词
  - 存在量词
  - 唯一性量词
- 否定量词
  - 德摩根的量词定律
- 将语句翻译为逻辑表达式

4.4.1 谓词逻辑

- 如果我们知道:
  "所有的人都是凡人."
  "苏格拉底是一个人."
- 能否得出"苏格拉底是一个凡人"？

- 不能够用命题逻辑表达出来. 需要一种新的逻辑来表达这种情况. 接下来, 我们介绍一种表达能力更强的逻辑---**谓词逻辑**.

4.4.1 谓词逻辑

- 谓词逻辑包含以下新特征:
  - **变量**: x, y, z
  - **谓词**: $P(x), M(x)$
  - **量词** (后续章节会详细讲)

- **命题函数**是命题的推广
  - 它包含各种变量和谓词, 例如$P(x)$
  - 变量可以被它域中的元素代替.

4.4.1 命题函数

- 命题函数将变为命题(具有真值), 当它的每个变量被由其域中的元素替换(或者被量词约束, 后续章节会讲).
- 语句$P(x)$表达函数P在x下的值. 例, $P(x)$表示“$x > 0$”, 域是整数. 那么:
  - $P(-3)$ 为假.
  - $P(0)$ 为假.
  - $P(3)$ 为真.
- 通常, 用U表示域. 在上面例子中U是整数.

4.4.1 命题函数

- 例:$R(x,y,z)$表示“$x+y=z$”, U(对于三个变量)表示整数. 确定下面的真值是什么: $R(3,4,7)$, $R(x, 3, z)$
- 解: $R(3,4,7)$为真, $R(x, 3, z)$不是命题.

- 表达式中包含变量, 那它就不是命题, 所以也不存在真值, 例如:

  $P(3) \wedge P(y)$

  $P(x) \rightarrow P(y)$
- 但是, 当用量词后, 这些表达式(命题函数)就变成了命题.

4.4.2 量词

- 我们需要**量词**来表达语句中的 “所有”，” 一些”：
  - “所有的人都是凡人”
  - “有些猫没有毛”

- 最重要的两个量词:
  - **全称量词**, “所有,” 符号∀称为全称量词.
  - **存在量词**, “有些,” 符号∃称为存在量词.

4.4.2 全称量词

- 定义: $P(x)$的**全称量化**是语句“$P(x)$对x在其论域的所有值为真.” 符号$\forall x P(x)$表示$P(x)$的全称量化, 其中$\forall$称为全称量词. 命题$\forall x P(x)$读作“对于所有x, $P(x)$”或“对于每一个x, $P(x)$”. 一个使$P(x)$为假的个体称为$\forall x P(x)$的反例.

命题	什么时候为真(T)	什么时候为假(F)
$\forall x P(x)$	对每一个x, $P(x)$都是真	有一个x, $P(x)$是假

- 例:
  - 如果$P(x)$表示“$x > 0$” , U表示正整数, 那么$\forall x P(x)$为真.
  - 如果$P(x)$表示“$x > 0$”, U表示整数, 那么$\forall x P(x)$为假.

4.4.2 存在量词

- 定义: $P(x)$的**存在量化**是命题"论域中存在一个个体x, 满足$P(x)$." 符号$\exists xP(x)$表示$P(x)$的存在量化, 其中$\exists$称为存在量词. 命题$\exists xP(x)$读作"有一个x, 满足$P(x)$"或"至少有一个x, 满足$P(x)$"或"对某个x, $P(x)$".

命题	什么时候为真(T)	什么时候为假(F)
$\exists xP(x)$	有一个x, $P(x)$为真	对每一个x, $P(x)$都为假

- 例:
  - 如果$P(x)$表示"$x > 0$", U表示整数, 那么$\exists xP(x)$为真.
  - 如果$P(x)$表示"$x < 0$", U表示正整数, 那么$\exists xP(x)$为假.

4.4.2 唯一性量词

- 对于我们能定义的不同量词的数量是没有限制的, 如“恰好有两个”. 所有其他量词中最常见的一个是**唯一性量词**.
- 定义:$\exists!\,xP(x)$或$\exists_1 xP(x)$表示存在一个唯一的x使得$P(x)$为真.
- 通常如下表述:
  - “恰好存在一个x使得$P(x)$”
  - “有且只有一个x使得$P(x)$”
- 例:
  - 如果$P(x)$表示“ x + 1 = 0 ”, U表示整数, 那么$\exists!\,xP(x)$为真.
  - 如果$P(x)$表示“x > 0 ”, U表示整数, 那么$\exists!\,xP(x)$为假.

4.4.2 关于量词的思考

- 当域是有限时, 我们可以将量化视为循环遍历域的元素.
- **1) 为了验证$\forall x P(x)$循环遍历域的所有元素:**
  - 如果每一个循环步骤$P(x)$为真, 那么$\forall x P(x)$为真.
  - 如果在某个循环步骤$P(x)$为假, 那么$\forall x P(x)$为假, 循环终止.
- **2) 为了验证$\exists x P(x)$循环遍历域的所有元素:**
  - 如果在某个循环步骤, $P(x)$为真, 那么$\exists x P(x)$为真, 循环终止.
  - 如果循环结束都没有找到$P(x)$为真的x, 那么$\exists x P(x)$为假.
- $\forall x P(x)$和 $\exists x P(x)$的真值取决于命题函数$P(x)$和域U.
- 即使域是无限的, 我们仍然可以采用如上方法, 但在某些情况下循环不会终止.

4.4.2 量词的属性

- 例: 判断$\forall xP(x)$和 $\exists xP(x)$的真值
  - 如果U是正整数, $P(x)$表示“$x < 2$”
  - 如果U是负整数, $P(x)$表示“$x < 2$”
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x > 2$”
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x < 2$”

4.4.2 量词的属性

- 例: 判断$\forall xP(x)$和 $\exists xP(x)$的真值
  - 如果U是正整数, $P(x)$表示“$x < 2$”
  - 如果U是负整数, $P(x)$表示“$x < 2$”
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x > 2$”
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x < 2$”
- 解:
  - 如果U是正整数, $P(x)$表示“$x < 2$”, 那么$\exists xP(x)$为真, $\forall xP(x)$ 为假.
  - 如果U是负整数, $P(x)$表示“$x < 2$”, 那么$\exists xP(x)$和$\forall xP(x)$都为真.
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x > 2$”, 那么$\exists xP(x)$和$\forall xP(x)$都为真.
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x < 2$”, 那么$\exists xP(x)$和$\forall xP(x)$都为假.

4.4.3 受限域的量词

- 约定: 在要限定一个量词的论域时通常会采用简单的表示法, 也就是变量必须要满足的条件直接放在量词的后面.
- 例: $\forall x(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$可以写作$\forall_{x<0}\ (x^2 > 0)$

4.4.4 量词的优先级

- 量词∀和∃的优先级高于所有的逻辑运算符.

运算符	优先级
$\forall\exists$ $\neg$	1 2
$\wedge$ $\vee$	3 4
$\rightarrow$ $\leftrightarrow$	5 6

- 例, $\forall xP(x)\vee Q(x)$表示$(\forall xP(x))\vee Q(x)$

思考:同时有全称量词和存在量词，那么优先级如何确定呢?

4.4.4 量词的约束

- 量词作用于变量x, 变量出现为**约束的**. 一个变量的出现是**自由的**，如果没有被量词约束或设置为等于某个特定值.

- 量词辖域的确定方法:
  - 若量词后有括号, 则括号内的子公式就是该量词的辖域;
  - 若量词后无括号, 则与量词邻接的子公式为该量词的辖域.
- 命题函数中所有的变量出现必须是约束或者被设定为某个特定值, 它才能转化为一个命题.

- 若公式A中不含自由出现的变量, 则称A为**封闭的公式**, 简称**闭式**.

4.4.4 量词的约束

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- 例, $\exists x(x+y=1)$中变量x受存在量词约束, y是自由的.

- 例, $\exists x(P(x)\wedge Q(x))\vee\exists yR(x,y)$

约束的　　自由的

- 第一个存在量词的作用域是$P(x)\wedge Q(x)$), 第二个存在量词的作用域是$R(x,y)$. 在一个公式中，某一个变元的出现既可以是自由的, 又可以是约束的. 为了使得我们的研究更方便，而不致引起混淆，同时为了使其式子给大家以一目了然的结果，对于表示不同意思的个体变元，我们总是以不同的变量符号来表示之.

4.4.4 量词的约束

- **规则1(约束变元的改名规则)**：
  - 将量词中出现的变元以及该量词辖域中此变量之所有约束出现都用新的个体变元替换;
  - 新的变元一定要有别于改名辖域中的所有其它变量.
  - 例: $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists y R(x, y)$改名为$\exists z(P(z) \wedge Q(z)) \vee \exists y R(x, y)$

- **规则2(自由变元的代入规则)**：
  - 将公式中出现该自由变元的每一处都用新的个体变元替换;
  - 新变元不允许在原公式中以任何约束形式出现.

4.4.5 将语句翻译为逻辑表达式

- 例: 翻译以下语句为谓词逻辑“这个课堂上的每个学生都学习过Java课程.”

4.4.5 将语句翻译为逻辑表达式

- 例: 翻译以下语句为谓词逻辑“这个课堂上的每个学生都学习过Java课程.”
- 解:首先确定域U.
  - 解1: 如果U表示这个课堂的所有学生, 定义命题函数$J(x)$为“x学习过Java课程”, 那么翻译为$\forall x J(x)$.
  - 解2: 如果U表示所有人, 定义命题函数$S(x)$为“x是在这堂课上的一个学生”, 那么可以翻译为$\forall x\big(S(x) \rightarrow J(x)\big)$. 【注意$\forall x\big(S(x) \land J(x)\big)$是不对的. 因为它表示所有人都是这个班上的学生, 并且都学习过Java课程】
- 思考:答案非唯一, 域U不同, 结果可能不同.

4.4.5 将语句翻译为逻辑表达式

- 例: 翻译以下语句为谓词逻辑“这个课堂上的某些学生学习过Java课程.”

4.4.5 将语句翻译为逻辑表达式

- 例: 翻译以下语句为谓词逻辑“这个课堂上的某些学生学习过Java课程.”
- 解:首先确定域U.
  - 解1: 如果U表示这个课堂的所有学生, 定义命题函数$J(x)$为“x参加过Java课程”, 那么翻译为$\exists xJ(x)$.
  - 解2: 如果U表示所有人, 定义命题函数$S(x)$为“x是在这堂课上的一个学生”, 那么可以翻译为$\exists x\big(S(x) \wedge J(x)\big)$. 【注意$\exists x\big(S(x) \to J(x)\big)$是不对的. 因为当一个人不是这个班上的学生时, 该表述也为真】

4.4.6 谓词逻辑中的逻辑等价

- 涉及谓词和量词的语句在逻辑上是等效的，当且仅当它们具有相同的真值时
  - 无论用什么样的谓词代入语句
  - 也无论为这些命题函数的变量指定什么域.
- $S \equiv T$ 表示S 和T 是逻辑等价的.
- 例: $\forall x \neg\neg J(x) \equiv \forall x J(x)$

4.4.6 思考量词为合取、析取

- 如果域是有限的, 全称量词等价于多个没有量词的命题的合取. 存在量词等价于多个没有量词的命题的析取.
- 如果U包含整数1,2,3:

$$\forall x P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$$
$$\exists x P(x) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3)$$

- 如果域是无限的, 仍然可以如上思考, 只是没有量词的等价式将无限长.

4.4.7 量化表达的否定

- **全称量词的否定**:
- 例: 思考$\forall x J(x)$表达“班上的每个学生都参加过微积分课程”, 这儿$J(x)$表达“x参加过微积分课程”, 域U为班上的所有同学. 那么该表达的否定是什么?
- 解: 考虑它的否定: “并非班上的每个学生都参加过微积分课程”, 等价于“班上有学生没有参加过微积分课程”. 翻译为$\exists x \neg J(x)$.

- **结论**:$\neg \forall x J(x)$和$\exists x \neg J(x)$是逻辑等价的.

$$\neg \forall x J(x) \equiv \exists x \neg J(x)$$

- **存在量词的否定**:
- 例: 思考$\exists x J(x)$表示"班上有一个学生学习过微积分课程", 这儿$J(x)$表达"x参加过微积分课程", 域U为班上的所有同学. 那么该表达的否定是什么?
- 解: 考虑它的否定:"并非班上有学生学习过微积分课程", 也可以表述为"班上每个学生都没有学习过微积分课程", 翻译为$\forall x \neg J(x)$.

- **结论**:$\neg \exists x J(x)$和$\forall x \neg J(x)$是逻辑等价的.

$$\neg \exists x J(x) \equiv \forall x \neg J(x)$$

4.4.7 量词的德摩根律

- 总结以上规则为:

否定	等价语句	何时为真	何时为假
$\neg\forall x J(x)$	$\exists x \neg J(x)$	有x, 使得$J(x)$为假	对每个x, $J(x)$为真
$\neg\exists x J(x)$	$\forall x \neg J(x)$	对每个�, $J(x)$为假	有�, 使得$J(x)$为真

- 表格中表明:
  - $\neg\forall x J(x) \equiv \exists x \neg J(x)$
  - $\neg\exists x J(x) \equiv \forall x \neg J(x)$

  (备注: 以上很重要, 后续将会用到)

4.4.8 系统规范说明

- 之前我们用命题来表示系统规范说明. 然而, 许多系统规范说明涉及谓词和量词. 谓词逻辑可以用来描述系统规范说明.
- 例:翻译以下语句:
  - “每封大于1MB的邮件会被压缩.”
  - “如果一个用户处于活动状态, 那么至少有一条网络链路是有效的.”

4.4.8 系统规范说明

- 之前我们用命题来表示系统规范说明. 然而, 许多系统规范说明涉及谓词和量词. 谓词逻辑可以用来描述系统规范说明.
- 例:翻译以下语句:
  - “每封大于1MB的邮件会被压缩.”
  - “如果一个用户处于活动状态, 那么至少有一条网络链路是有效的.”
- 解:
  - $L(m, y)$表示“邮件m大于yMB”
  - $C(m)$表示“邮件m会被压缩”
  - $A(u)$表示“用户u处于活动状态”
  - $S(n, x)$表示“网络链路n处于x状态”
  - 那么翻译为: $\forall m(L(m, 1) \rightarrow C(m))$
  - $\exists u A(u) \rightarrow \exists n S(n, \text{有效})$

4.4.8 路易斯.卡罗尔的例子

Charles Lutwidge Dodgson
(AKA Lewis Caroll)
(1832-1898)

- 前两句为前提, 第三句为结论.
  - “所有狮子都是凶猛的.”
  - “有些狮子不喝咖啡.”
  - “有些凶猛的动物不喝咖啡.”
- $P(x)$表示“x是狮子,” $Q(x)$表示“x是凶猛的,” $R(x)$表示“x喝咖啡”, 那么以上三句话可以表述为:
  - $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
  - $\exists x\big(P(x) \land \neg R(x)\big)$
  - $\exists x\big(Q(x) \land \neg R(x)\big)$

(备注: 推论过程后面章节会讲)