2.4.4 其他二项式系数恒等式

- 例: 使用组合分析法证明$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n\times 2^{n-1}$
- 解:
  - 在n个学生的集合中选择出$r(r=1,2,3,\ldots n)$个同学组成班长候选团, 然后再从中选择1个同学成为班长, 求解班长产生的方法有多少种?
  - 左边相当于先从n个人中选择r个成为子集, 有$\binom{n}{r}$种方法. 然后从r个子集中选择1个成为班长, 有$\binom{r}{1}$种方法. $r=1,2,3,\ldots n$, 因此总共有方法数$=\binom{n}{1}\binom{1}{1}+\binom{n}{2}\binom{2}{1}+\binom{n}{3}\binom{3}{1}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}$
  - 右边表示:先考虑确定一个同学当班长, 那么班长候选团除该同学以外可能有0, 1, 2,..., n-1个. 那么该同学当班长的方法数$=\binom{n-1}{0}*1+\binom{n-1}{1}*1+\binom{n-1}{2}*1+\ldots+\binom{n-1}{n-1}*1=2^{n-1}$(备注: 根据二项式定理中$x=1$, $y=1$得到的推论). 然后再考虑实际中每个同学都可能当班长, 也就是最终班长的方法数$=n\times 2^{n-1}$
  - 由此得证, 等式左边= 右边

【备注: 该题有一点难度】 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

- **多项式定理**:设n为正整，x_i为实数，$i=1，2，\ldots，t$. 其中$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$, 那么$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n=\sum\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$

  其中已知: $\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}=\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ \ldots\ n_t!}$

- 证: 展开式中的项$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$是如下构成的: 在$n$个因式中选$n_1$个因式贡献$x_1$, 从剩下$n$-$n_1$个因式选$n_2$个因式贡献$x_2$, …, 从剩下的$n$-$n_1$-$n_2$ −…− n_{t-1}个因式中选n_t个因式贡献x_t. 因此:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{t-1}}{n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}=\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}$$