4.7.3 间接证明法-反证法证明p→q

- 例:反证法证明对于整数n, 如果n^2为奇数, 则n为奇数.

4.7.3 间接证明法-反证法证明p→q

- 例:反证法证明对于整数n, 如果n^2为奇数, 则n为奇数.
- 解:
  - 假设n为偶数. 那么存在一个整数k, 使得$n = 2k$. 公式两边取平方可得$n^2=4k^2=2(2k^2)$, 因此n^2为偶数.
  - 我们已经证明了n是偶数, 那么n^2也为偶数. 通过反证法, 对于整数n, 如果n^2为奇数, 那么n为奇数.

4.7.4 间接证明法-归谬法

- 困囚困境:

  冯梦龙《古今笑史·塞语部》: **徐孺子**,南昌人,11岁与太原**郭林宗**游,稚与之还家.林宗庭中有一树, 欲伐去之,云: “为宅之法,正如方口,口中有木,困字不详” 余曰:“为宅之法,正如方口,口中有人,囚字何殊? ”郭无以难.

- 归谬证明法是另外一种常用的间接证明法.

- 【**归谬证明法**】为了证明p为真, 先假设$\neg p$为真. 证明对于某个命题r, $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ 为真. 就能证明p为真.

- 备注:或称归谬法. 用到析取三段论:

$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow (r \wedge \neg r) \\ \neg(r \wedge \neg r) \\ \hline \therefore p \end{array}$$

4.7.4 间接证明法-归谬法证明p→q

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- 【**条件语句的归谬证明**】:
  - 1、条件语句的反证改写为归谬证明: 为证明$p \rightarrow q$ (等价的逆否命题$\neg q \rightarrow \neg p$)为真. 证明时, 先假定$p$和$\neg q$都为真, 然后证明出$\neg p$也为真. 导出矛盾$p \wedge \neg p$.
  - 2、条件语句的直接证明改写为归谬证明: 为了证明$p \rightarrow q$为真, 先假定p和$\neg q$都为真, 然后证明出q也为真. 这样导出矛盾$q \wedge \neg q$.

4.7.4 间接证明法-归谬法证明p→q

- 例:使用归谬证明法证明如果$3n + 2$是奇数, 则n是奇数.

4.7.4 间接证明法-归谬法证明p→q

- 例:使用归谬证明法证明如果$3n+2$是奇数, 则n是奇数.
- 解:
  - 假设p表示$3n+2$是奇数. q表示n是奇数. 用归谬证明需要假设p和$\neg q$都为真. 即$3n+2$是奇数, n是偶数.
  - 因为n是偶数, 那么存在整数k, 使得$n = 2k$. 从而, $3n+2=3(2k)+2=2(3k+1)$. 根据偶数的定义, $3n+2$是偶数.
  - 因此p为真, $\neg p$也为真, 导出矛盾�∧¬�. 从而得证如果$3n+2$是奇数, 则n是奇数.

4.7.5 平凡证明p→q

- 【**平凡证明**】如果已知q为真, 那么$p \rightarrow q$ 也为真.
- 例1: “如果下雨, 那么1=1.”
- 例2: 设$P(n)$是“如果a和b是满足$a \geq b$的正整数, 则$a^n \geq b^n$", 其中论域是所有非负整数集合, 证明$P(0)$为真.
- 证明: 命题$P(0)$是“如果$a \geq b$，则$a^0 \geq b^0$” 因为$a^0 = b^0$=1，所以条件语句“如果$a \geq b$，则$a^0 \geq b^0$”中结论为真. 综上, $P(0)$为真.

4.7.5 空证明p→q

- 【**空证明**】如果已知p为假, 那么$p \rightarrow q$为真.
- 例1: “如果我既贫穷又富有, 那么2 + 2 = 5.”
- 例2: 证明命题$P(0)$为真，其中$P(\mathrm{n})$ 是“如果n>1, 则$n^2 > \mathrm{n}$”论域是所有整数集合.
- 证明: 命题$P(0)$是"如果0>1, 则$0^2 > 0$”, 使用空证明来证$P(0)$为真, 前提0>1为假, 所以$P(0)$为真.

4.7.6 证明双条件命题的定理

- 【**等价证明法**】 为证明一个双条件命题的定理, 即$p \leftrightarrow q$, 需要同时证明$p \rightarrow q$和$q \rightarrow p$都为真.

- 扩展思考: 证明$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow p_3 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n$，只需要证明$(p_1 \rightarrow p_2) \land (p_2 \rightarrow p_3) \land \ldots \land (p_n \rightarrow p_1)$为真.

4.7.6 证明双条件命题的定理

- 例:证明如果n是整数, 则n是奇数当且仅当n^2是奇数.
- 解:我们前面已经证明过$p \rightarrow q$以及$q \rightarrow p$. 因此得出结论$p \leftrightarrow q$.
  - 假设n是奇数. 那么存在整数k, $n = 2k + 1$.
  - 公式两边取平方可以得到$n^2=(2k+1)^2= 4k^2+4k+1= 2(2k^2+2k)+ 1 = 2r+1$, 其中$r$为整数, $r=2k^2+2k$. 根据奇数的定义, n^2是奇数.
  - 因此, 我们证明n是奇数, 那么n^2也是奇数.

  - 假设n为偶数．那么存在一个整数k，使得$n = 2k$．公式两边取平方可得$n^2=4k^2=2(2k^2)$, 因此n^2为偶数.
  - 我们已经证明了n是偶数, 那么n^2也为偶数. 通过反证法, 对于整数n, 如果n^2为奇数, 那么n为奇数.

第4.7节 证明导论总结

- 常见条件语句p→q的证明方法:
- 1、直接证明法
- 2、间接证明法
  - 反证法
  - 归谬证明法