



第4.7节 证明导论

Section 4.7: Introduction to Proofs

知识要点

- 1 直接证明法
- 2 间接证明法:反证法
- 3 间接证明法:归谬证明法

4.7.1 证明

- 证明是建立数学语句真实性的有效论证.
- 在数学, 计算机等学科中, 有时**非形式化证明**也会经常使用.
 - 证明过程中通常使用多个推理规则.
 - 推理规则可能隐式地被使用.
 - 更容易理解和向他人解释.

4.7.1 证明

□ 证明在计算机领域有许多实际应用, 例如:

- 验证计算机程序是否正确;
- 确定操作系统是安全的;
- 编写的程序能够在人工智能中做出推论;
- 表明系统规范是一致的;
-

4.7.1 证明

□论证一个性质相对于论域(例如整数或实数)中的所有元素都成立. 虽然描述需要全称量词, 但数学里通常省略全称量词.

➤例如“如果 $x > y$, 其中 x 和 y 是正实数, 那么 $x^2 > y^2$ ”实际上表示“对于所有的正实数 x 和 y , 如果 $x > y$, 那么 $x^2 > y^2$ ”

4.7.2 证明 $p \rightarrow q$

□为了证明定理 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, 引入 c 表示论域 U 中的任意一个元素, 然后采用全称引入规则, 以上语句的真实性如: $P(c) \rightarrow Q(c)$. 所以, 我们必须证明 $p \rightarrow q$.

4.7.2 直接证明法证明 $p \rightarrow q$

□ 立储风波：

《明朝那些事儿》：朱棣问“你认为该立谁？”解缙答“世子(指朱高炽)仁厚，当为太子。”朱棣不说话。解缙再答“好圣孙(指朱瞻基)！”朱棣笑了，解缙也笑了，事情就此定局。

□ 【直接证明法】：

- 第一步，假设 p 为真；
- 第二步，用推理规则构造；
- 第三步，表明 q 也必须为真。

4.7.2 奇/偶数, 有/无理数的定义回顾

- 回顾奇/偶数, 有/无理数的定义, 在接下来的例子中会用到.
- 定义: 如果存在整数 k 使得 $n = 2k$, 整数 n 是**偶数**. 如果存在整数 k 使得 $n = 2k + 1$, 则 n 是**奇数**. 注意每个整数是偶数或奇数, 但是没有整数既是偶数, 又是奇数.
- 定义: 如果存在整数 p 和 q , 其中 $q \neq 0$, 使得 $r = \frac{p}{q}$, 则实数 r 是**有理数**.
不是有理数的实数称为**无理数**.

4.7.2 直接证明法证明 $p \rightarrow q$

□例: 使用直接证明法证明“如果 n 是一个奇数, 那么 n^2 是奇数.”

4.7.2 直接证明法证明 $p \rightarrow q$

□例: 使用直接证明法证明“如果 n 是一个奇数, 那么 n^2 是奇数.”

□解:

- 假设 n 是奇数. 那么存在整数 k , $n = 2k + 1$.
- 公式两边取平方可以得到 $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2r + 1$, 其中 r 为整数, $r = 2k^2 + 2k$. 根据奇数的定义, n^2 是奇数.
- 因此, 我们证明 n 是奇数, 那么 n^2 也是奇数.

4.7.2 直接证明法证明 $p \rightarrow q$

□例:使用直接证明法证明两个有理数的和是有理数.

4.7.2 直接证明法证明 $p \rightarrow q$

- 例: 使用直接证明法证明两个有理数的和是有理数.
- 解: 假设 r 和 s 是两个有理数. 那么必须有整数 p, q 和 t, u 满足:

$$r = \frac{p}{q}, s = \frac{t}{u}, u \neq 0, q \neq 0$$

那么可得 r 和 s 的和为

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu + qt}{qu} = \frac{v}{w}, v = pu + qt, w = qu \neq 0$$

根据有理数的定义, 可知 r 和 s 的和也是有理数.

4.7.3 间接证明法证明 $p \rightarrow q$

□优孟马谏：

楚庄王之时,有所爱马,衣以文绣,置之华屋之下,席以露床,啖以枣脯.马病肥死,使群臣丧之,欲以棺椁大夫礼葬之.左右争之,以为不可.王下令曰:“有敢以马谏者,罪至死” 优孟闻之,入殿门.仰天大哭.王惊而问其故.优孟曰:“马者王之所爱也,以楚国堂堂之大,何求不得,而以大夫礼葬之,薄.请以人君礼葬之”王曰:“何如”对曰:“臣请以雕玉为棺,文梓为椁,齐、赵陪位于前,韩、魏翼卫其后,庙食太牢,奉以万户之邑.诸侯闻之,皆知大王贱人而贵马也”王曰:“寡人之过一至此乎!为之奈何?”优孟曰:“请为大王六畜葬之.以垅灶为椁,铜历为棺,赍以姜枣,荐以木兰,祭以粮稻,衣以火光,葬之于人腹肠”于是王乃使以马属太官,无令天下久闻也.

□有时直接证明法会走向死胡同. 不采用直接证明法, 即不从前提开始, 以结论结束来证明的方法叫做**间接证明法**. 其中, 一类非常有用的间接证明法称为**反证法**.

4.7.3 间接证明法-反证法证明 $p \rightarrow q$

- 【**反证法**】 假设 $\neg q$ 为真, 然后证明 $\neg p$ 为真. 如果证明 $\neg q \rightarrow \neg p$, 那么相当于证明了 $p \rightarrow q$.
- 备注: $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$, 条件语句和它的逆否命题是逻辑等价.

4.7.3 间接证明法-反证法证明 $p \rightarrow q$

□例:反证法证明如果 n 是整数且 $3n + 2$ 是奇数, 则 n 是奇数.

4.7.3 间接证明法-反证法证明 $p \rightarrow q$

□例: 反证法证明如果 n 是整数且 $3n + 2$ 是奇数, 则 n 是奇数.

□解:

- 假设 n 是偶数. 因此存在整数 k , $n = 2k$. 那么 $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1) = 2j$, 其中 $j = 3k + 1$. 因此 $3n + 2$ 是偶数.
- 由于我们已经证明了 $\neg q \rightarrow \neg p$, 那么 $p \rightarrow q$ 也就成立. 也就是说"如果 n 是整数并且 $3n + 2$ 是奇数(不是偶数), 则 n 是奇数(不是偶数)".