第3章 高级计数

崔金华

邮箱:jhcui@hust.edu.cn

主页: https://csjhcui.github.io/

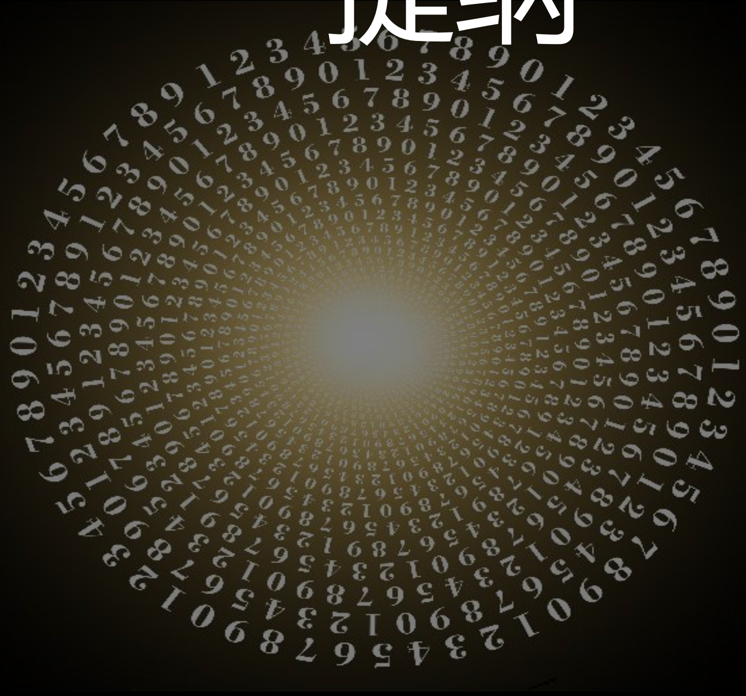
办公地址:华中科技大学南一楼东406 室



致谢:课件主要参考《 Discrete Mathematics and its application》(Eighth Edition) Keneth H. Rosen 和《离散数学》(第3版) 屈婉玲版本的相关课件, 特此致谢!!!

Contents

提纲



第3.1节递推关系的应用

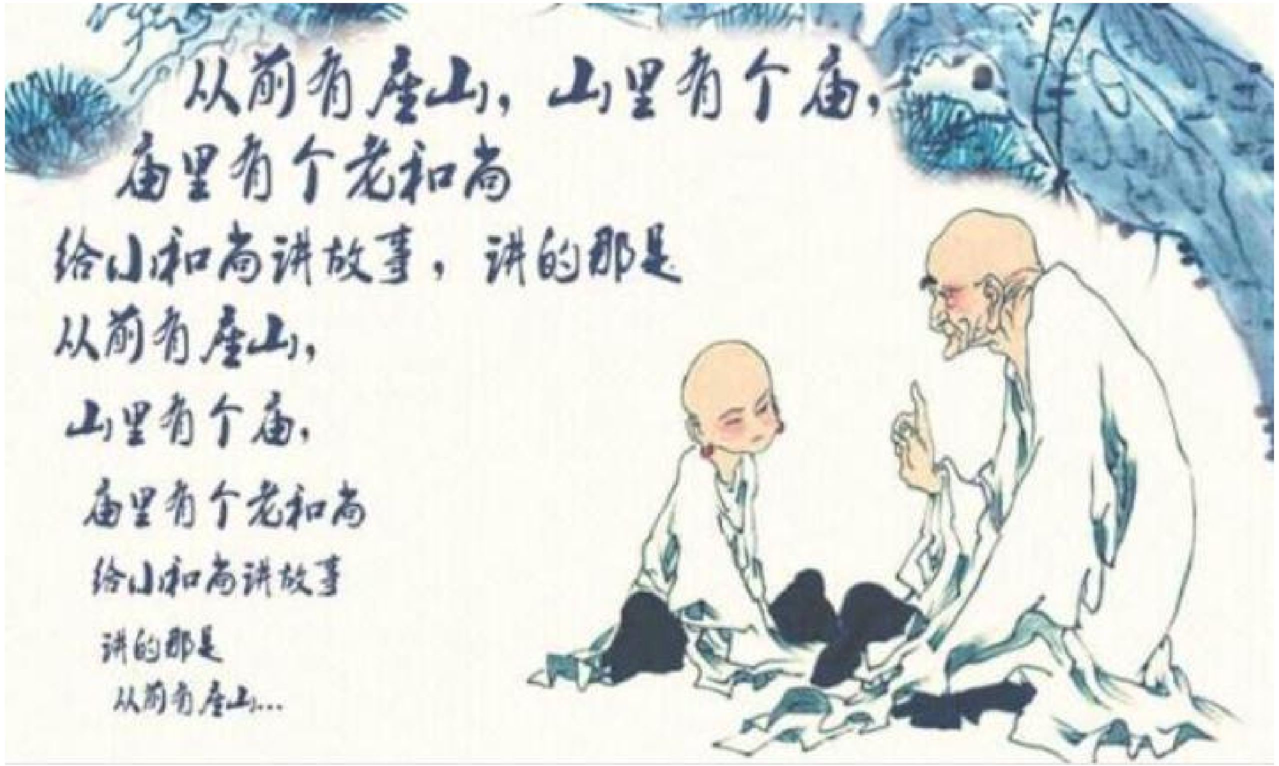
Section 3.1: Applications of Recurrence Relations

知识要点

1. 斐波那契数
2. 汉诺塔
3. 位串计数
4. 编码字的枚举
5. 卡塔兰数

递推关系(回顾)

- 从前有座山，山上有座庙，庙里有个老和尚，在给小和尚讲故事，讲的什么呢？
- 从前有座山，山上有座庙，庙里有个老和尚，在给小和尚讲故事，讲的什么呢？
- 从前有座山，山上有座庙，庙里有个老和尚，在给小和尚讲故事，讲的什么呢？
- ……



递推关系(回顾)

- **递推关系**:一个序列的递推定义指定了一个或多个初始的项以及一个由前项确定后项的规则. 这个从前项求后项的规则就称为递推关系. 如果一个序列的项满足递推关系, 则这个序列就叫做递推关系的解.
- **递归函数**, 递归定义以非负整数集合作为其定义域的函数, 包括两个步骤:
  - 基础步骤: 规定这个函数在0处的值;
  - 递归步骤: 给出从较小的整数处的值来求出当前的值得的规则.
- 例:假定f是用$f(0)=3$, $f(n+1)=2f(n)+3$来递归地定义的. 那么, $f(1)=2f(0)+3=9$, $f(2)=2f(1)+3=21$, $f(3)=2f(2)+3=45$, ……

兔子和斐波拉契数

- 在很多应用题中，我们可以通过使用递推关系构造各种问题的模型. 例如岛上的兔子问题，汉诺塔的移动次数等等.
- 例:一对刚出生的兔子(一公一母)放到一个无人岛上. 每对兔子出生两个月以后才开始繁殖后代，每对兔子每个月繁殖一对兔子. 假设兔子不会死去，n个月后该无人岛上的兔子将会有多少?
- 解:
  - 用$\boldsymbol{f_n}$表示n个月后兔子的总数. 我们将证明$\boldsymbol{f_n}$，n=1,2,3,...是**斐波拉契序列**($f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$)的项. 如下图所示，我们可以找出n个月后关于岛上的兔子的递推关系:

兔子和斐波拉契数

❑解(续):

月	已有的至少两个月的兔子对数	已有的小于两月的兔子对数	当前月新生的兔子对数
1			
2			
3			
4			
5			
6			

现有兔子对数	新生兔子对数	总对数
1	0	1
1	0	1
1	1	2
2	1	3
3	2	5
5	3	8

现有兔子数=上个月的总兔子数　　新生兔子数=上上个月的总兔子数

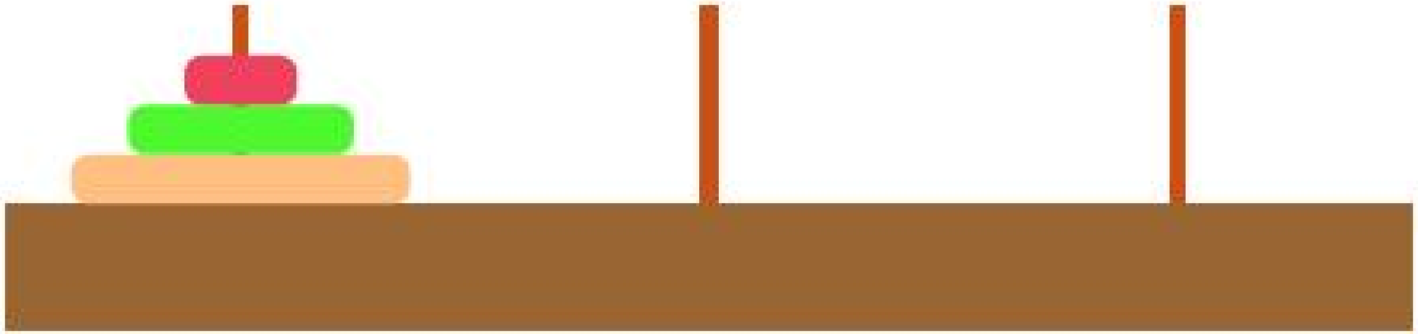
➢用递推关系建立兔子数量的模型. 在第一个月末f_1=1. 由于这对兔子在第二个月没有繁殖, 所以f_2 =1. 为找到n个月后兔子数, 要把前一个月的兔子数f_{n-1}加上新生的数量, 而这个新生数量等于f_{n-2}.

兔子和斐波拉契数

- 解(续):
  - 因为每对两个月大的兔子都生一对兔子. 所以序列$\{f_n\}$满足递推关系 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3$, 和初始条件 $f_1 = 1, f_2 = 1$. 由于这个递推关系和初始条件唯一的确定了该序列, 所以n个月后兔子的总数由第n个斐波那契数给出, 等于f_n.
  - 例如, $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8$

汉诺塔

- 例:19世纪后期法国数学家埃德沃德.卢卡斯发明了一个叫**汉诺塔**的游戏. 安装在板子上的3根柱子, 如果大小不同的n个盘子构成. 最开始的时候如柱子1上所示, 盘子根据从大到小的次序排列. 要求每次把1个盘子从一个柱子移动到另外一根柱子, 但是不允许这个盘子放在比它更小的盘子上面. 那么需要多少次移动以后才能将柱子1上的所有盘子移动到柱子2上.



汉诺塔