4.6.4 量化命题的推理

- 推理规则包括:
  - 1, 命题逻辑的推理规则 (前面已讲解)
  - 2, **谓词逻辑(量化命题)的逻辑等值演算和推理规则** (这儿4.6.4小节内容)
- 我们现在开始量化命题的部分

4.6.4 谓词逻辑等值式

- 定义: 设A, B是两个谓词公式, 如果$A\leftrightarrow B$是永真式, 则称A与B等值, 记作$A\Leftrightarrow B$, 并称$A\Leftrightarrow B$是**等值式**(或称等价式).
- **基本等值式第一组:** 命题逻辑中基本等值式的代换实例
  - 例如, $\neg\neg\forall xF(x)\Leftrightarrow \forall xF(x)$等
- **基本等值式第二组**:
- (1) 消去量词等值式. 设个体域D ={a1, a2, ... , an}
  - ①$\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a1)\wedge A(a2)\wedge\ldots\wedge A(an)$
  - ②$\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a1)\vee A(a2)\vee\ldots\vee A(an)$

4.6.4 谓词逻辑等值式

- (2) 量词否定等值式.
  - ① $\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$
  - ② $\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$
- (3) 量词辖域收缩与扩张等值式. $A(x)$ 是含x自由出现的公式，B 中不含x的自由出现.
  - ① $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$
  - ② $\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$
  - ③ $\forall x(A(x)\to B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\to B$
  - ④ $\forall x(B\to A(x)) \Leftrightarrow B\to\forall xA(x)$

$\forall x(A(x) \to B)$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg A(x) \vee B)$

$\Leftrightarrow (\forall x \neg A(x)) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg(\exists x A(x)) \vee B$

$\Leftrightarrow \exists x A(x) \to B$

4.6.4 谓词逻辑等值式

- ⑤ $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$
- ⑥ $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$
- ⑦ $\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$
- ⑧ $\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$

- (4) 量词分配等值式.
  - ① $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
  - ② $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
  - 注意: $\forall$对$\vee$, $\exists$对$\wedge$无分配律

4.6.4 常用规则

- **置换规则**: 设ø(A)是含A的公式, 那么, 若A $\Leftrightarrow$ B, 则ø(A)$\Leftrightarrow$ø(B).

- **换名规则**: 设A为一公式，将A中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号，其余部分不变，设所得公式为A'，则$A'\Leftrightarrow$A.

- **代替规则**: 设A为一公式，将A中某个个体变项的所有自由出现用A中未曾出现过的个体变项符号代替，其余部分不变，设所得公式为A', 则$A'\Leftrightarrow$A.

4.6.4 谓词逻辑等值式和置换规则实例

- 例: 将命题“没有不犯错误的人”用两种形式符号化, 并证明两者等值.
- 解: 令F(x): x是人, G(x):x犯错误, 论域为所有人. 两种量化命题 $\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$或$\forall x(F(x)\to G(x))$
- $\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$
- $\Leftrightarrow \forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$ 量词否定等值式
- $\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换
- $\Leftrightarrow \forall x(F(x)\to G(x))$ 置换

4.6.4 量化命题的推理规则1:全称实例

- **全称实例**(又名全称量词消去规则, ∀_): 从给定前提$\forall x P(x)$得出$P(c)$为真的推理规则, 其中c是论域里的一个特定成员.

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 例:p表示“Fido是一条狗” 论域U表为全部的狗. 假设语句“所有的狗都可爱”为真, 那么“Fido是可爱的”为真.

4.6.4 量化命题的推理规则2:全称引入

- **全称引入**(又名全称量词引入规则, $\forall_+$): 对论域里所有元素c都有$P(\mathrm{c})$为真的前提, 推出$\forall x P(x)$为真.

$$\frac{P(\mathrm{c}),\ \text{任意c}}{\therefore\ \forall x P(x)}$$

- 经常在数学证明中隐式使用该规则.

4.6.4 量化命题的推理规则3:存在实例

- **存在实例**(又名存在量词消去规则，∃_): 如果我们知道$\exists x P(x)$为真，得出在论域中存在一个元素c使得$P(\mathrm{c})$为真.

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(\mathrm{c}), \text{对某个元素}}$$

- 例:假设语句“有人在课程考试中获得成绩A”为真，那么“如果我们把他叫做a，我们可以说a获得成绩A”.

4.6.4 量化命题的推理规则4:存在引入

- **存在引入**(又名存在量词引入规则, $\exists_+$): 已知一个特定c使得$P(\mathrm{c})$为真, 得出结论$\exists xP(x)$为真

$$\frac{P(\mathrm{c}),\ \text{对某个元素}}{\therefore\ \exists xP(x)}$$

- 例:假设语句“张三在课程中获得了成绩A”为真, 那么可以得到推论“有人在课程中获得了成绩A”.

4.6.4 量化命题的推理规则

❑量化命题的推理规则总结:

推理规则	名称	符号化写法
$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$	全称实例	$\forall -$
$\dfrac{P(c), \text{任意c}}{\therefore \forall x P(x)}$	全称引入	$\forall +$
$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(c), \text{对某个元素}}$	存在实例	$\exists -$
$\dfrac{P(c), \text{对某个元素}}{\therefore \exists x P(x)}$	存在引入	$\exists +$

4.6.4 命题和量化命题的推理规则的组合使用

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology，HUST

- 例:使用推理规则证明“史密斯有两条腿”是以下前提的结论“每个人都有两条腿”和“史密斯是个人”.

- 例:使用推理规则证明"史密斯有两条腿"是以下前提的结论"每个人都有两条腿"和"史密斯是个人".
- 解: $M(x)$表示"x是个人", $L(x)$表示"x有两条腿", 史密斯是论域中的值. 翻译以上语句前提为$\forall x(M(x) \to L(x))$, $M(S)$, 结论为$L(S)$. 构造一个论证来证明以上前提能够推出结论, 推理过程如下:

步骤	理由
1. $\forall x(M(x) \to L(x))$	前提引入
2. $M(S) \to L(S)$	全称实例, 用步骤1
3. $M(S)$	前提引入
4. $L(S)$	假言推理, 用步骤2和3

其实全称实例和假言推理可以组合起来使用, 叫做**全称假言推理**

4.6.4 命题和量化命题的推理规则的组合使用

- 论证中常常组合使用全称实例和假言推理，这种组合被称为: **全称假言推理**

$$\forall x(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{Q}(x))$$

$$\frac{\mathrm{P}(a),\ a\text{是论域中的一个特定元素}}{\therefore Q(a)}$$

- 全称假言推理常常用于数学论证中，比如之前苏格拉底的例子.

$$\forall x(Man(x) \to Mortal(x))$$

$$\frac{Man(\mathrm{Socrates})}{\therefore Mortal(Socrates)}$$

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- 将全称实例和取拒式组合在一起的组合称为: **全称取拒式**

$$\forall x(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))$$

$\neg Q(a)$, a是论域中的一个特定元素

$$\therefore \neg P(a)$$

4.6.5 推理规则综合应用

- 例:公安人员审查了一起重大珠宝盗窃案, 已获得以下线索:
  - （1）张三或者李四盗窃了珠宝;
  - （2）若李四的证词正确, 则商店午夜时灯管未灭;
  - （3）若张三盗窃了珠宝, 则作案时间不可能发生在午夜前;
  - （4）若李四的证词不正确, 则作案时间发生在午夜前;
  - （5）午夜时商店的灯光灭了.

  请问张三和李四谁该受到法律的制裁?

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

张三或者李四盗窃了珠宝;
若李四的证词正确, 则商店午夜时灯管未灭;
若张三盗窃了珠宝, 则作案时间不可能发生在午夜前;
若李四的证词不正确, 则作案时间发生在午夜前;
午夜时商店的灯光灭了.

- 解:李四是盗窃犯.

设A:张三盗窃珠宝; B:李四盗窃珠宝; C:李四的证词正确; D:商店午夜时灯管未灭; E:作案时间发生在午夜前.

符号化为$(A \vee B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \rightarrow \neg E) \wedge (\neg C \rightarrow E) \wedge \neg D$, 推理得到结论A或B.

4.6.5 推理规则综合应用

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology，HUST

已知(A∨B)∧(C→D)∧(A→¬E)∧(¬C→E)∧¬D 推出A或者B

❑解(续): 步骤	理由
1. $\neg D$	前提引入
2. $C \to D$	前提引入
3. $\neg C$	取拒式, 用步骤1和2
4. $\neg C \to E$	前提引入
5. E	假言推理, 用步骤3和4
6. $A \to \neg E$	前提引入
7. $\neg A$	取拒式, 用步骤5和6
8. $A \vee B$	前提引入
9. B	析取三段论, 用步骤7和8

第4.6节 推理规则总结

- 1、命题逻辑的推理规则
  - 假言推理、取拒式、假言三段论、析取三段论、附加律、化简律、合取律、消解律、构造性二难推理、破坏性二难推理
- 2、量化命题的推理规则
  - 全称实例、全称引入、存在实例、存在引入、全称假言推理、全称取拒式
- 3、使用推理规则建立论证
  - 直接证明法
  - 附加前提证明法
  - 归谬法