3.4.1 生成函数

- 例:求以下广义二项式系数$\binom{-2}{3}$，$\binom{1/2}{4}$，$\binom{-9}{0}$的值
- 解: $\binom{-2}{3}=\frac{(-2)*(-3)*(-4)}{3!}$=-4

$$\binom{1/2}{4}=\frac{(1/2)*(1/2-1)*(1/2-2)*(1/2-3)}{4!}=\frac{-5}{128}$$

$$\binom{-9}{0}=1$$

3.4.1 生成函数

- 根据广义二项式系数，对应定义**广义二项式定理**. 其证明略.
- 定义:x是实数且其绝对值小于1, u是实数, 那么

$$(1+x)^u=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{u}{k}x^k$$

【前面的二项式定理的基础知识】：$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$

3.4.2 生成函数

- 四大常见的有用的生成函数，$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$:
- 1(二项式)、$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \dots + x^n$

【二项式定理 $(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$ 】

  - 其中$G(x)=(1+x)^n$
  - $a_k=C(n,k)$
- 2(等比序列求和)、$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{n} x^k=1+x+x^2+\dots+x^n$
  - 其中$G(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
  - $a_k=1$, 如果$k\leq$�; 否则为0

【等比序列的求和公式$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$ 】

3.4.2 生成函数

- 四大常见的有用的生成函数，$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$:
- 3(无穷等比序列求和)、$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots$
  - 其中$G(x) = \frac{1}{1-x}$
  - $a_k = 1$
- 4(两生成函数相乘)、$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$
  - 见前面两个生成函数相乘的例子
  - 其中$G(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
  - $a_k = k + 1$

G(x)	a_k	G(x)	a_k
$(1+\boxed{x})^n=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$ $=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\ldots+x^n$	$C(n,k)$	$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{n} x^k=1+x+x^2+\ldots+x^n$	如果$k\le n$,则为1;否则为0
$(1+\boxed{ax})^n=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k$ $=1+C(n,1)ax+C(n,2)a^2x^2+\ldots+a^n x^n$	$C(n,k)a^k$	$\frac{1}{1-\boxed{x}}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=1+x+x^2+\ldots$	1
$(1+\boxed{x^r})^n=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk}$ $=1+C(n,1)x^r+C(n,2)x^{2r}+\ldots+x^{rn}$	如果$r\|k$,则$C(n,k/r)$;否则为0	$\frac{1}{1-\boxed{ax}}=\sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k=1+ax+a^2x^2+\ldots$	a^k

3.4.2 生成函数

□常见的有用的生成函数如下(续):

G(x)	a_k	G(x)	a_k
$\frac{1}{1-\boxed{x^r}}=\sum_{k=0}^{\infty} x^{rk}=1+x^r+x^{2r}+\ldots$	如果$r\|k$,则为1; 否则为0	$\frac{1}{(1\boxed{+x})^n}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)(-1)^k x^k=1-C(n,1)x+C(n+1,2)x^2-\ldots$	$(-1)^k C(n+k-1,k)=(-1)^k C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1-x\boxed{)^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k=1+2x+3x^2+\ldots$	$k+1$	$\frac{1}{(1\boxed{-ax})^n}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)a^k x^k=1+C(n,1)ax+C(n+1,2)a^2x^2+\ldots$	$C(n+k-1,k)a^k=C(n+k-1,n-1)\ a^k$
$\frac{1}{(1-x\boxed{)^n}}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k=1+C(n,1)x+C(n+1,2)x^2+\ldots$	$C(n+k-1,k)=C(n+k-1,n-1)$	(备注:Rosen第8版书上剩余两个指数型的公式自学)	

3.4.3 计数问题和生成函数

- 生成函数可以用于求解各种计数问题. 特别地, 他们可以用于计数各种类型的组合数.

- 例:有n种不同的物体, 分别为$I_1, I_2, \cdots, I_n$, 每个物体只有一件. 求取r个物体的方案数.

$$(1+\boxed{x})^n=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$$
$$=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\cdots+x^n$$

- 生成函数可以用于求解各种计数问题. 特别地, 他们可以用于计数各种类型的组合数.

- 例:有n种不同的物体, 分别为$I_1, I_2, \cdots, I_n$, 每个物体只有一件. 求取r个物体的方案数.
- 解:每种物体的生成函数都是$(x^0 + x^1)$，那么n种物体的生成函数就是$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^k$. 因此取$r$个物体, 则$k$=$r$, 系数为$C(n,r)$, 与之前学的不重复选择物体的一般组合的意义一致.

$$
\begin{aligned}
(1+\boxed{x})^n &= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k \\
&= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n
\end{aligned}
$$

- 例:有n种不同的物体, 分别为$I_1, I_2, \cdots, I_n$, 每个物体可以取任意件. 求取r个物体的方案数.

$$\frac{1}{1-\boxed{x}}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=1+x+x^2+\cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^{\boxed{n}}}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k =1+C(n,1)x+C(n+1,2)x^2+\cdots$$

3.4.3 计数问题和生成函数

- 例:有n种不同的物体, 分别为$I_1, I_2, \cdots, I_n$, 每个物体可以取任意件. 求取r个物体的方案数.
- 解:每种物体的生成函数都是$(x^0+x^1+x^2+\cdots)$，那么n种物体的生成函数就是$(1+x^1+x^2+\cdots)^n = \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$. 因此取$r$个物体, 则$k=r$, 系数为$C(n+r-1,r)$, 与之前学的可重复选择物体的组合的意义一致.

$\frac{1}{1-\boxed{x}}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=1+x+x^2+\cdots$

$\frac{1}{(1-x)^{\boxed{n}}}=$
$\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$
$=1+C(n,1)x+$
$C(n+1,2)x^2+\cdots$

3.4.3 计数问题和生成函数

- 例:求$e_1 + e_2 + e_3 = 17$的解的个数, 其中e_1, e_2, e_3都是非负整数, 且 $3 \le e_1 \le 6$, $3 \le e_2 \le 6$, $4 \le e_3 \le 7$.

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- 例:求$e_1 + e_2 + e_3 = 17$的解的个数, 其中e_1, e_2, e_3都是非负整数, 且$3 \le e_1 \le 6$, $3 \le e_2 \le 6$, $4 \le e_3 \le 7$.
- 解:具有以上限制的解的个数是$(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$中展开式$x^{17}$的系数. 这是因为我们在乘积中得到等于$x^{17}$的项是通过在第一个和中取项$x^{e_1}$, 在第二个和中取项$x^{e_2}$, 在第三个和中取项$x^{e_3}$, 其中幂指数$e_1, e_2, e_3$满足$e_1 + e_2 + e_3 = 17$和给出的限制. 很容易看出$x^{17}$的系数是6(4,6,7表示第一项中取$x^4$, 第二项中取$x^6$, 第三项中取$x^7$; 5,5,7; 5,6,6; 6,4,7; 6,5,6; 6,6,5), 因此存在6个解.

3.4.3 计数问题和生成函数

$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{n} x^k=1+x+x^2+\cdots+x^n$

$\frac{1}{(1-x)^{n}}$
$\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$
$=1+C(n,1)x+$
$C(n+1,2)x^2+\cdots$

- 另一种计算方式:
  - $(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^4+x^5+x^6+x^7)$ $=x^{10}(1+x+x^2+x^3)^3$
  - 求展开式x^{17}的系数, 那么相当于求$(1+x+x^2+x^3)^3$展开式x^7的系数.
  - $(1+x+x^2+x^3)^3=\frac{(1-x^4)^3}{(1-x)^3}=\frac{(1-3x^4+3x^8-x^{12})}{(1-x)^3}=\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{-3x^4}{(1-x)^3}+\frac{3x^8}{(1-x)^3}+\frac{-x^{12}}{(1-x)^3}$
    - 其中$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty} c(2+k,k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty} c(2+k,2)x^k$. 我们要找的是$x^7$的系数, 即$k=7$, 因此$c(2+7,2)=36$.
    - 其中$\frac{-3x^4}{(1-x)^3}=-3x^4\sum_{k=0}^{\infty} c(2+k,k)x^k=-3x^4\sum_{k=0}^{\infty} c(2+k,2)x^k$. 我们要找的是$x^3$的系数, 即$k=3$, 因此$-3*c(2+3,2)$=-30.
  - 其他剩余的2项不可能出现x^7的项，因此最后结果为36-30=6.

3.4.3 计数问题和生成函数

- 例:将9块相同的饼干分给3个不同的孩子，如果每个孩子至少收到2块最多不超过4块饼干, 那么有多少种不同的分配方式?

3.4.3 计数问题和生成函数

- 例:将9块相同的饼干分给3个不同的孩子，如果每个孩子至少收到2块最多不超过4块饼干, 那么有多少种不同的分配方式?
- 解:具有以上限制的解的个数是$(x^2+x^3+x^4)\ (x^2+x^3+x^4)\ (x^2+x^3+x^4)$中展开式$x^9$的系数. x^9的系数是7(234; 243; 324; 333; 342; 423; 432), 因此存在7个解.

3.4.4 使用生成函数求解递推关系

- 例:使用生成函数求解递推关系$a_k = 3a_{k-1,}\ k = 1,2,3\ldots, a_0 = 2$

3.4.4 使用生成函数求解递推关系

- 例:使用生成函数求解递推关系$a_k = 3a_{k-1}, k = 1,2,3\ldots, a_0 = 2$
- 解:
  - 设$G(x)$是序列$\{a_k\}$的生成函数，即$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
  - 则$xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$
  - 那么$G(x)-3xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k-3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$
  - $=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k-\sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1} x^k$
  - $=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} (a_k-3a_{k-1}) x^k$
  - $=a_0=2$
  - 在上述求解过程中, $G(x)-3xG(x)=2$. 因此, $G(x)=\frac{2}{1-3x}$

华中科技大学 计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology, HUST

- 解(续):
  - $G(x) = \frac{2}{1-3x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \times 3^k x^k$

    $\frac{1}{1-\boxed{ax}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$
  - 所以递推关系$a_k = 2 \times 3^k$

3.4.4 使用生成函数求解递推关系

- 使用生成函数求解关于$\{a_n\}$的递推方程, 主要步骤:
  - 1, 先设定序列$\{a_n\}$的生成函数$G(x)$;
  - 2, 利用递推方程的依赖关系导出关于生成函数$G(x)$的方程(可以是一次方程, 二次方程, 二元一次方程, 微分方程等不同的形式);
  - 3, 通过求解方程得到$G(x)$的函数表达式;
  - 4, 将$G(x)$展开成幂级数, 其中x^n项系数就是a_n.

3.4.5 使用生成函数证明恒等式

- 例:使用生成函数证明$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n)$其中$n$为正整数

$$(1+\boxed{x})^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$$
$$=1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$$

3.4.5 使用生成函数证明恒等式

- 例:使用生成函数证明$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n)$其中$n$为正整数
- 解:
  - 根据二项式定理$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}y^k$，$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} x^{2n-k}1^k$，注意到$k=n$时，$C(2n,n)$是$(1+x)^{2n}$中$x^n$的系数.
  - 另一方面, $(1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2 = [C(n,0) + C(n,1)x + \ldots + C(n,n)x^n]^2$
  - 在上等式中x^n的系数为$C(n,0)C(n,n) + C(n,1)C(n,n-1) + C(n,2)C(n,n-2) + \ldots + C(n,n)C(n,0) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2$，因为$C(n,n-k) = C(n,k)$.
  - 由于$C(2n,n)$和$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2$都表示$(1+x)^{2n}$中x^n的系数, 所以他们一定相等.
  - 得证.

$$(1+\boxed{x})^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$$