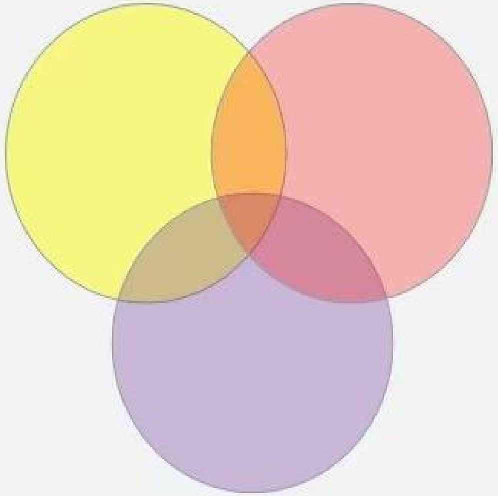


第3.5节 容斥和应用

Section 3.5: Inclusion-Exclusion and its Applications

知识要点

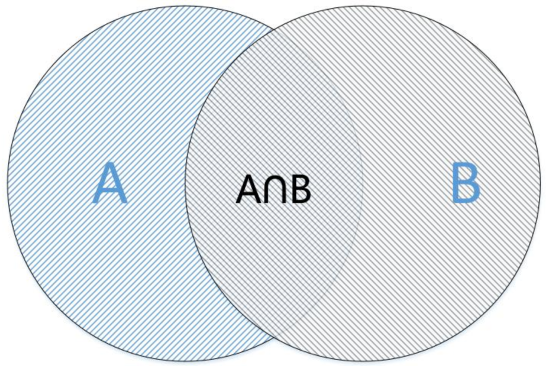
1 容斥

2 容斥原理的应用

3.5.1 容斥原理

- 在前面相关章节中证明了两个集合A和B的并集中的元素数是这些集合的元素数之和减去其交集的元素数, 即:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

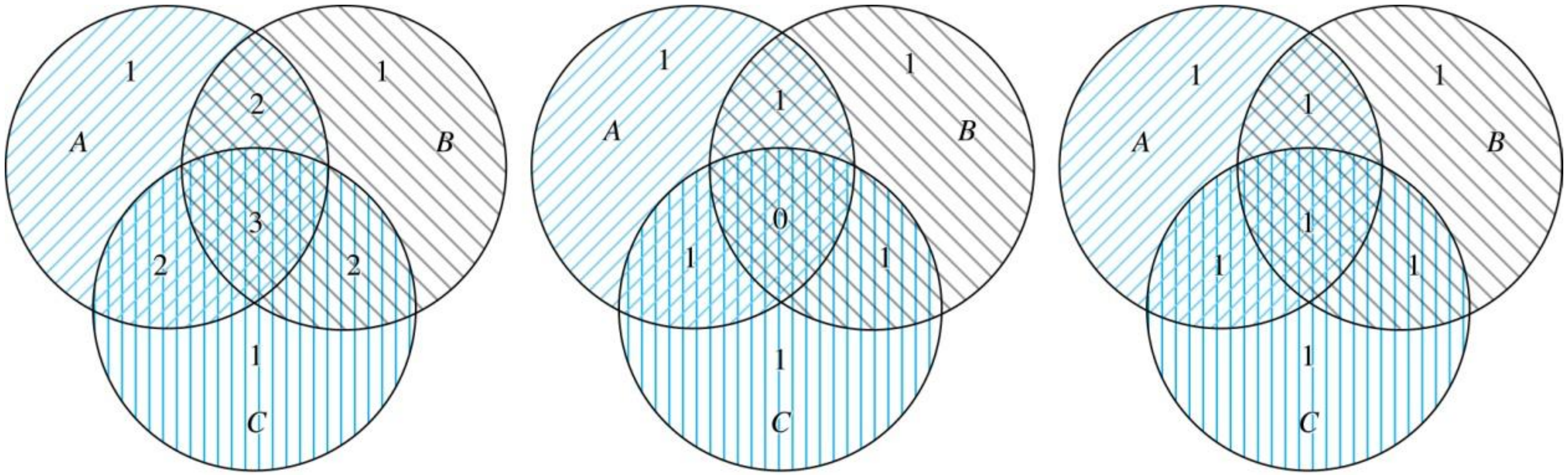


【基础知识: ∪并集, ∩交集】

3.5.1 容斥原理

- 三个集合A,B,C的并集可推广如下:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



(a) Count of elements by $|A|+|B|+|C|$

(b) Count of elements by $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$

(c) Count of elements by $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

3.5.2 容斥原理

- 例:某单位举行篮球, 长跑和跳绳比赛, 规定每人最多只能报两个比赛, 结果一共有40人报名. 篮球, 长跑和跳绳的报名人数分别为23人, 15人, 25人; 且同时报篮球,长跑的有7人; 同时报篮球,跳绳的有8人. 那么同时报长跑和跳绳的人数为多少?

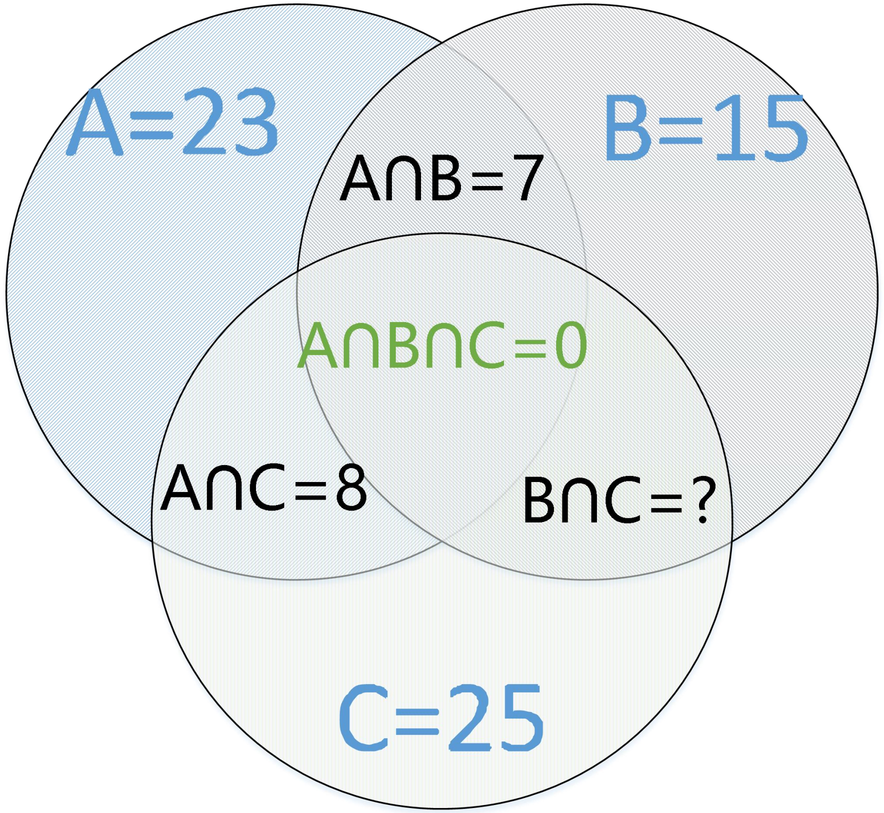
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

3.5.2 容斥原理

- 例:某单位举行篮球, 长跑和跳绳比赛, 规定每人最多只能报两个比赛, 结果一共有40人报名. 篮球, 长跑和跳绳的报名人数分别为23人, 15人, 25人; 且同时报篮球,长跑的有7人; 同时报篮球,跳绳的有8人. 那么同时报长跑和跳绳的人数为多少?
- 解:因为题目规定每个人最多只能报两个比赛, 所以此题没有三种都报的人. 我们设报篮球的为A, 报长跑的为B, 报跳绳的为C. 那么A∩B∩C为0, A∩B=7, A∩C=8, 所求为B∩C. 根据公式A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C=总体-三项都不，总体为40，代入数据有23+15+25-7-8-B∩C=40-0，得到B∩C=8.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- 解(续):



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

3.5.2 容斥原理

- 定理(**容斥原理**):设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是有穷集. 那么:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap a_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap a_n|$$

- 证明略. 计算n个集合的并集大小时, 需要将n个集合的元素个数相加, 然后减去所有两个集合交集的元素个数, 然后加上所有三个集合交集的个数，如此下去，直到所有集合的交集. 其中, 奇数集合个数时是加法，偶数集合个数时是减法.

【基础知识: ∪并集, ∩交集】

3.5.3 容斥原理的另一种形式

华中科技大学
计算机科学与技术学院
School of Computer Science &Technology, HUST

- 常用于求解在一个集合中的元素数, 使得这些元素不具有n个性质P_1, P_2, P_3, …, P_n中的任何一条性质.

- 设A_i是具有性质P_i的元素的子集. 具有所有这些性质$P_1, P_2, \ldots, P_k$的元素数记为$\boldsymbol{N(P_1P_2\ldots P_k)}$. 用集合的术语写:

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| = N(P_1P_2\ldots P_k)$$

- 如果不具有n个性质$P_1, P_2, \ldots, P_n$中的任何一个元素数记为$\boldsymbol{N(P_1'P_2'\ldots P_n')}$, 集合中的元素数为$N$, 那么有

$$N(P_1'P_2'\ldots P_n') = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

【基础知识: ∪并集, ∩交集】

3.5.3 容斥原理的另一种形式

- 根据容斥原理，

$$N(P_1'P_2'\ldots P_n')=N-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|$$

$$=N-\sum_{1\le i\le n}N(P_i)+\sum_{1\le i<j\le n}N(P_iP_j)-\sum_{1\le i<j<k\le n}N(P_iP_jP_k)+\ldots+(-1)^nN(P_1P_2\ldots P_n)$$

【基础知识: ∪并集, ∩交集】

3.5.3 容斥原理的另一种形式

- 例:$x_1+x_2+x_3=11$有多少个整数解？其中x_1，x_2，x_3为非负整数，且$x_1 \leq 4, x_2 \leq 4, x_3 \leq 6$.

$$N(P_1'P_2'\ldots P_n') = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$
$$= N - \sum_{1\le i\le n} N(P_i) + \sum_{1\le i<j\le n} N(P_iP_j) - \sum_{1\le i<j<k\le n} N(P_iP_jP_k) + \ldots + (-1)^n N(P_1P_2\ldots P_n)$$

3.5.3 容斥原理的另一种形式

- 例:$x_1+x_2+x_3=11$有多少个整数解？其中x_1，x_2，x_3为非负整数，且$x_1 \le 4, x_2 \le 4, x_3 \le 6.$
- 解:为了使用容斥原理，令P_1为$x_1 > 4$, P_2为$x_2 > 4$，P_3为$x_3 > 6$．那么整数解的个数为 $N(P_1'P_2'P_3')=N-N(P_1)-N(P_2)-N(P_3)+N(P_1P_2)+N(P_1P_3)+N(P_2P_3)-N(P_1P_2P_3)$

  以上公式中，N=解的个数=3元素集合的可重复的11组合=C(3+11-1,11)=78

  $N(P_1)$=（具有$x_1 \ge 5$解的个数）=C(3+6-1,6)=28

  $N(P_2)$=（具有$x_2 \ge 5$解的个数）=C(3+6-1,6)=28

  $N(P_3)$=（具有$x_3 \ge 7$解的个数）=C(3+4-1,4)=15

3.5.3 容斥原理的另一种形式

- 解(续):

$N(P_1P_2)$=（具有 $x_1 \geq 5$, $x_2 \geq 5$解的个数）=$C(3+1-1,1)$=3

$N(P_1P_3)$=（具有 $x_1 \geq 5$，$x_3 \geq 7$解的个数）=0

$N(P_2P_3)$=（具有$x_2 \geq 5$，$x_3 \geq 7$解的个数）=0

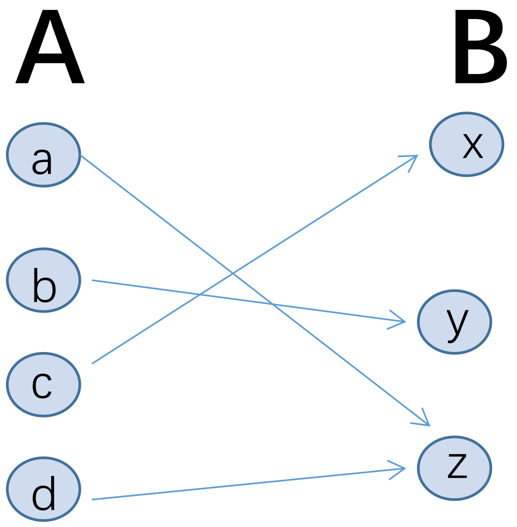
$N(P_1P_2P_3)$=（具有 $x_1 \geq 5$，$x_2 \geq 5$，$x_3 \geq 7$解的个数）=0

因此, $N(P_1'P_2'P_3')$=78-28-28-15+3+0+0-0=10

$N(P_1'P_2'\ldots P_n')$=N- $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$
=N-$\sum_{1\leq i\leq n} N(P_i)$ + $\sum_{1\leq i<j\leq n} N(P_iP_j)-\sum_{1\leq i<j<k\leq n} N(P_iP_jP_k)+\ldots+(-1)^n N(P_1P_2\ldots P_n)$

3.5.4 映上函数的个数

- 映上函数(或满射)的回顾:
- 定义: 一个从A到B的函数f称为映上函数，当且仅当对于每个$b \in B$，有元素$a \in A$使得$f(a) = b$



一个映上函数的示例

3.5.4 映上函数的个数

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology，HUST

- 我们可以用容斥原理确定从m元素到n元素集合的映上函数的个数.

- 例:从6元素到3元素集合有多少个映上函数?

$N(P_1'P_2'...P_n')=N-|A_1\cup A_2\cup ...\cup A_n|$
$=N-\sum_{1\le i\le n}N(P_i)+$
$\sum_{1\le i<j\le n}N(P_iP_j)-\sum_{1\le i<j<k\le n}N(P_iP_jP_k)+...+(-1)^n N(P_1P_2...P_n)$

3.5.4 映上函数的个数

- 我们可以用容斥原理确定从m元素到n元素集合的映上函数的个数.

- 例:从6元素到3元素集合有多少个映上函数?
- 解:
  - 假定在陪域中的元素是b_1, b_2, b_3. 设P_1, P_2, P_3分别表示b_1, b_2, b_3不在函数值域中的性质.
  - 一个函数是映上的，当且仅当它没有性质P_1, P_2, P_3. 那么,$N(P_1'P_2'P_3') = N-[N(P_1)+N(P_2)+N(P_3)]+[N(P_1P_2)+N(P_1P_3)+N(P_2P_3)]-N(P_1P_2P_3)$, 其中$N$表示从6元素到3元素集合的函数总数.

3.5.4 映上函数的个数

- 解(续):
  - $N=3^6$, 对于定义域中的每个元素的函数值有3种选择.
  - 注意$N(P_i)$是值域中不含b_i的函数的个数, 所以对于定义域中的每个元素的函数值有2种选择, 因此$N(P_i)=2^6$, 此外这种项有$C(3,1)$个.
  - 注意$N(P_iP_j)$是值域中不含b_i和b_j的函数的个数, 所以对于定义域中的每个元素的函数值有1中选择, 因此$N(P_iP_j)=1^6$, 此外这种项有$C(3,2)$个.
  - 注意$N(P_1P_2P_3)=0$, 因为这个项是值域中不含b_1, b_2, b_3的函数的个数. 显然没有这样的函数.
  - 于是$N(P_1'P_2'P_3')=3^6-C(3,1)\cdot 2^6+C(3,2)\cdot 1^6-0=540$.

3.5.4 映上函数的个数

- 定理:设m和n是正整数, 满足$m \geq n$. 那么存在

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \dots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)(1)^m$$

个从m元素集合到n元素集合的映上函数.