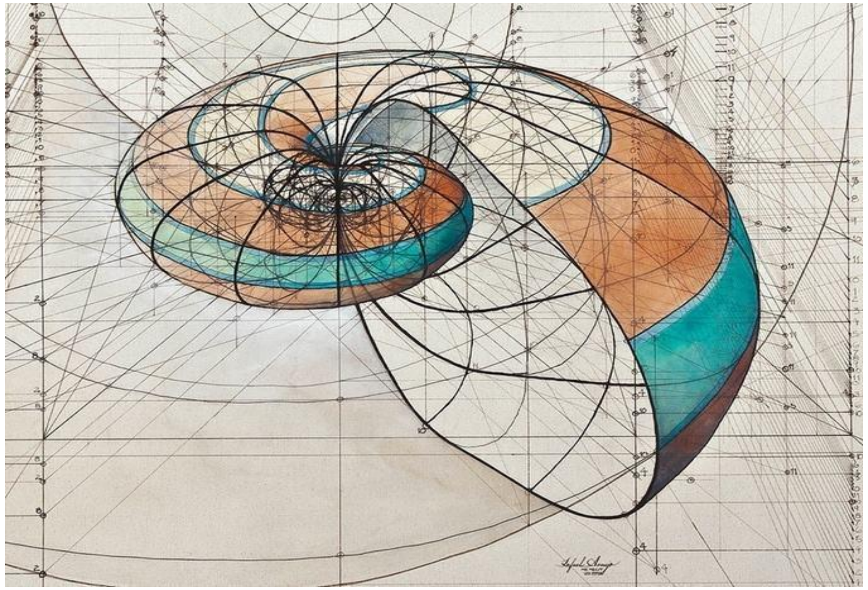

第3.2节求解线性递推关系

Section 3.2: Solving Linear Recurrence Relations

知识要点

1. 线性齐次递推关系
2. 求解常系数线性齐次递推关系
3. 求解常系数线性非齐次递推关系

线性递推关系

- 定义:一个常系数的***k*阶递推关系**是形如$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$的递推关系, 其中$c_1$, c_2, …, c_k是实数, 且$c_k \neq 0$.
- **阶**为k, 因为a_n由序列前面的k项来表示. k阶递推关系是**线性**的, 因为它的右边是序列前项的倍数之和.
- 这个递推关系是**齐次**的, 因为所出现的各项都是a_j的倍数. 序列各项的系数都是**常数**而不是依赖于n的函数.
- 满足这个定义的递推关系的序列由这个递推关系和k个初始条件$a_0 = M_0$, $a_1 = M_1$,… , $a_{k-1} = M_{k-1}$唯一地确定.

求解常系数线性齐次递推关系

- 求解常系数线性齐次递推关系的基本方法:
- 寻找形如$a_n = r^n$的解, 其中r是常数. 注意$a_n = r^n$是$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$的解当且仅当$r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} + \ldots + c_kr^{n-k}$
- 当等式的两边除以r^{n-k}, 然后左边减去右边可得

$$r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} \ldots - c_{k-1}r^1 - c_k = 0$$

- 因此, 序列$\{a_n\}$以$a_n = r^n$作为解, 当且仅当r是这后一个方程的解. 这个方程叫做该递推关系的**特征方程**. 方程的解叫做该递推关系的**特征根**.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:求解以下递推关系的特征方程
  - $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
  - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
  - $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-3}$
- 解:他们的特征方程分别为
  - $r^2 - r - 2 = 0$
  - $r^2 - r - 1 = 0$
  - $r^3 - 3r^2 + 2 = 0$