

2.3.1 排列

- 定理: 具有 n 个不同元素的集合的 r 排列数是 $P(n, r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$, 其中 n 和 r 都是正整数, 且 $1 \leq r \leq n$.
- 证: 排列第一个元素可以有 n 种方法, 因为集合中有 n 个元素. 第二个元素有 $n-1$ 种方法, 因为集合中在第一次选择以后还剩下 $n-1$ 个元素. 以此类推, 直到选择第 r 个元素时有 $(n - (r - 1)) = n - r + 1$ 种方法. 根据乘法法则, 存在 $n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$ 个 r 排列.
- 推论: 如果 n 和 r 都是整数, 且 $0 \leq r \leq n$, 则
$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$
- 注意, $P(n, r) = 0$, 当 $r > n$ 时.

□推论:元素依次排成一个圆圈的排列称为**环排列**(或称循环排列). S 的 r 环排列数等于 $P(n, r)/r$.

□证:

- 假设排列的 r 个元素分别是 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$, 将 a_1 接在 a_r 的后边就组成一个环排列. 只要相邻关系不变, 这 r 个元素中的任何一个作为**线排列**(或称线性排列)的首元素, 首尾相连所构成的环排列都相同.
- 因此, 环排列数是线排列数的 $1/r = P(n, r)/r$

2.3.1 排列

- 例:懂排列的孙悟空. 从孙行者到者行孙, 再到行者孙. 请问还可能有多少个类似的名字?
- 解:由孙、行、者三个汉字组成的3排列共有 $P(3,3)=3!=6$ 种不同的排名方式. 所以还可能有的名字有 $3! - 3 = 3$ 个名字.



2.3.1 排列

- 例:字母ABCDEFGH有多少种排列包含串ABC?
- 解:因为ABC必须成组出现可以当做一个对象来看待, 我们通过找6个对象, ABC, D, E, F, G, H的排列数. 它们可以按任意的次序出现, 所以 $P(6,6)=6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ 种排列, 其中必定包含串ABC.

2.3.1 排列

- 例:有6名女生和6名男生坐成一排, 每个人的旁边都可以随便坐, 那么共有多少种方式?
- 解:具体座位没有任何限制, 相当于共12个人排列着坐, 所以共有 $P(12,12)=12! = 479001600$ 种坐法.

2.3.1 排列

□例:有6名女生和6名男生坐成一排, 每个人的旁边都只能坐异性, 那么共有多少种方式?

□解:具体座位有限制, 包括以下两大类坐法



因此共有 $2 \times 6! \times 6! = 1036800$ 种方式.

2.3.1 排列

□例: 从1到9的数字中取7个数构成一个排列, 要求5和6不相邻, 求总的方案数是多少?

□解:

- 不加任何限制的排列数为 $P(9, 7) = 181440$
- 5和6相邻的排列数: 有6种放置方法使得5后面是6, 而反过来也一样. 因此排列数为 $2 * 6 * P(7, 5) = 30240$
- 因此, 最终方案数为总排列数减去5和6相邻的排列数 $= 181440 - 30240 = 151200$

□例: 有10个人围坐一个圆桌, 其中有两个人不愿意挨着坐, 求多少种不同的座位方法?

□解:

- 所有人围成一个圆桌的排列数 = $P(10,10)/10 = 362880$
- 两个人挨着, 那么将这两个人看做一个整体, 插入剩下的8个人的空
= $2 \times 8! = 80640$
- 因此, 座位方法数 = 总排列数 - 两个人挨着的排列数 = $362880 - 80640 = 282240$

2.3.2 组合

- 定义: 集合元素的一个 **r 组合** 是从这个集中无序地选择 r 个元素. 一个 r 组合是这个集的一个 r 个元素的子集. 具有 n 个不同元素的集合的 r 组合数记作 $C(n, r)$ 或 $\binom{n}{r}$, 并且称为二项式系数(后续章节将学习这个记号).
- 条件: **可区分的物体, 没有先后顺序, 每一个元素同样不会被重复地被选择.** 注意 $C(n, 0) = 1$, 因为恰好有一种方法来选择 0 个元素.

2.3.2 组合

□例:令 S 是集合 $\{a, b, c, d\}$. 那么 $\{a, c, d\}$ 是一个3组合, 它和组合 $\{d, c, a\}$, $\{a, d, c\}$, $\{c, a, d\}$, $\{c, d, a\}$, $\{d, a, c\}$ 是一样的, 因为集合中的元素的顺序没有关系. S 的2组合共有 $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ 种, 所以 $C(4, 2) = 6$.

2.3.2 组合

□定理: 设 n 是正整数, r 是满足 $n \geq r \geq 0$ 的整数, n 元素的集合的 r 组合数为

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

□备注: $C(n, r) = 0$, 当 $r > n$ 时. 注意 $0! = 1$.

□证: 我们如果要得到该集合的 r 排序的话, 我们可以先构成集合的 r 组合, 然后再排序每个 r 组合中的元素 (这可以用 $P(r, r)$ 种方法来做). 因此 $P(n, r) = C(n, r) * P(r, r)$. 所以可以推出:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

推论: $P(n, r) = C(n, r) * r!$

□例:从一副52张标准牌中选择5张, 共有多少种不同的方法? 从一副52张标准牌中选择47张, 共有多少种不同的方法?

□解:

➤选5张, 这5张的次序不受限制, 所以 $C(52,5) = \frac{52!}{5!47!} = 2598960$

➤类似地, 选47张, 其次序不受限制, 所以 $C(52,47) = \frac{52!}{47!5!} = 2598960$

❓思考: $C(n,r)$ 和 $C(n,n-r)$ 有什么关系呢?

2.3.2 组合

□推论: 设 n 和 r 是满足 $r \leq n$ 的非负整数, 那么 $C(n, r) = C(n, n - r)$

□证: 根据定理我们可以计算

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$
$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-(n-r))! (n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

因此, $C(n, r) = C(n, n - r)$

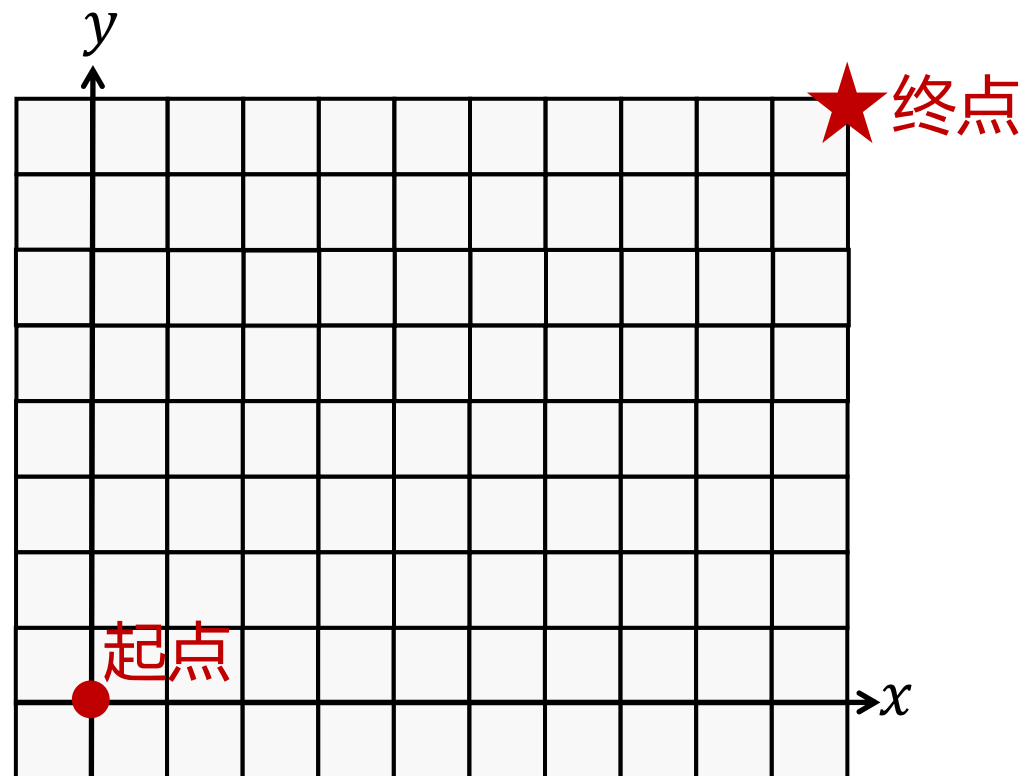
2.3.2 组合

□例:有多少种方式从10个选手的网球队中选择5个选手?

□解:从10个元素集合的5组合数给出, 根据定理可得 $C(10,5) = \frac{10!}{5!5!} = 252$

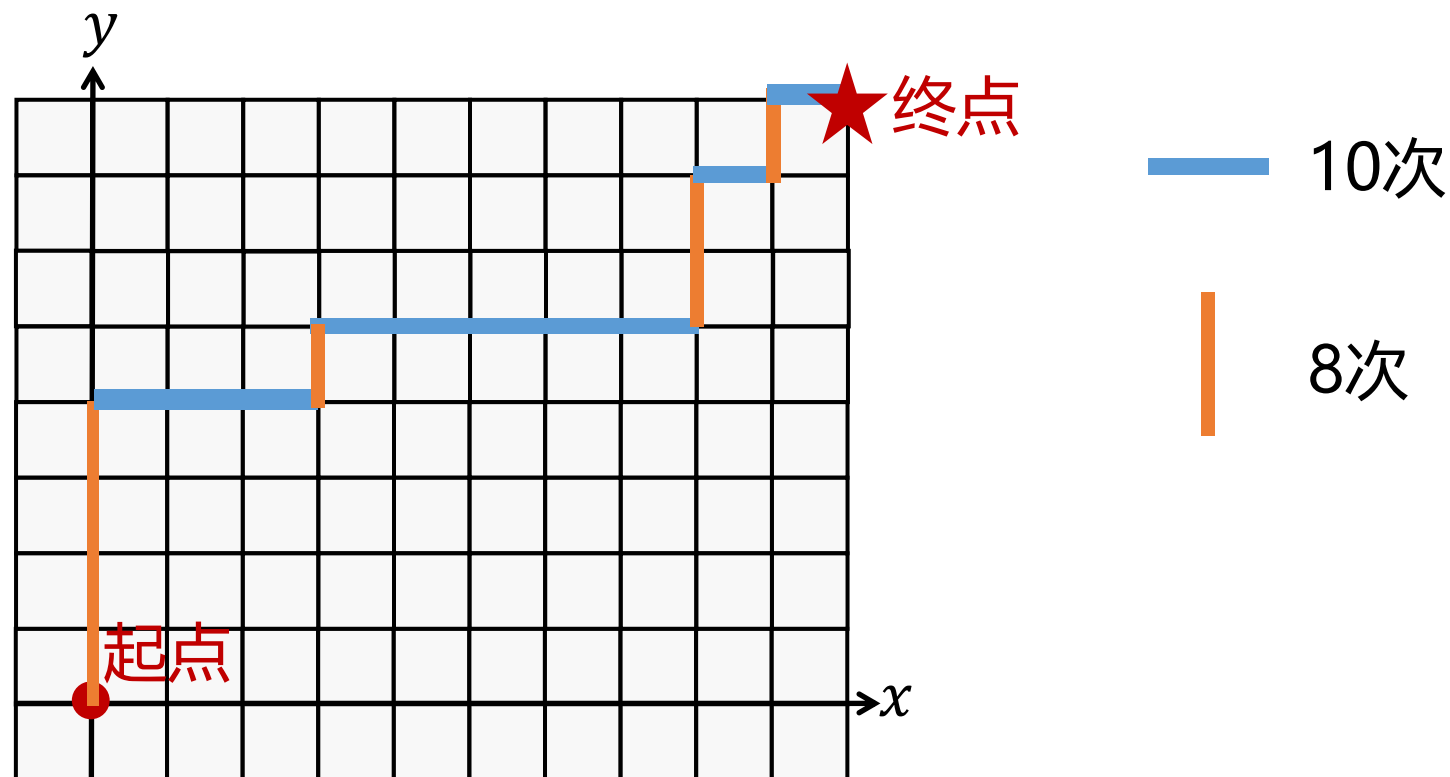
2.3.2 组合

□例:如下图中从(0,0)点出发沿着 x 轴或者 y 轴的正方向每步走一个单位,最终走到(10,8)点, 有多少种路径?



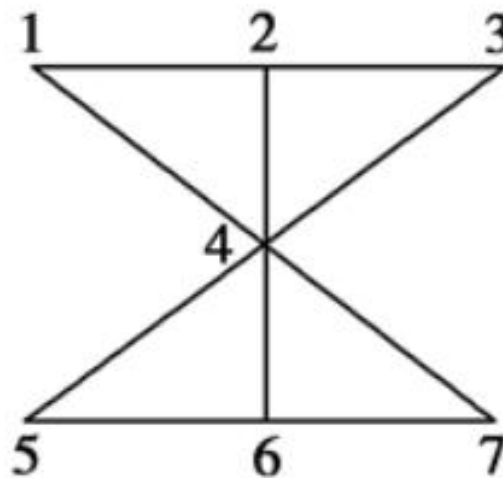
2.3.2 组合

□解:例如如下方式走, 其中 y 轴正方向走8次, x 轴正方向走10次, 所以共计有 $C(10+8,8)=43758$ 条路径.



2.3.3 排列与组合应用

□例:把3盆带不同序号的红玫瑰和4盆带不同序号的白玫瑰摆放到下图的1-7的位置上, 其中三盆红玫瑰不能放在一条直线上, 请问共有多少种方式?



□解:当不考虑限制时共有 $P(7,7)=7!=5040$ 种方式. 这其中三盆红玫瑰放在一条直线上的方法共有 $5*3!*4!=720$ 种. 因此, 满足要求的方法数共有 $5040-720=4320$ 种.

2.3.3 排列与组合应用

□例:(差额选举)某班级班委进行换届选举, 从已产生的甲乙丙丁四人中选出三位分别担任班长, 副班长, 学习委员. 并且要求上一届班长甲不能连任原职, 则换届后不同的任职结果有多少种?

□解:任职结果分两种情况考虑

- 若选出的三人中没有甲时, 那么有 $P(3,3)=6$ 种情况;
- 若选出的三人中有甲时, 那么还需要再从剩下的乙丙丁三人中选出两人. 甲只能从副班长, 学习委员中选出一个任职, 而剩下的两人排列确定剩下的两职位, 因此有 $C(3,2) * C(2,1) * P(2,2) = 12$ 种情况;
- 综上, 共有 $6+12=18$ 种不同情况.

2.3 排列与组合小结

□ 排列与组合的对比

特点	排列	组合
定义	从n个不同元素中取出m个元素按一定顺序排列	从n个不同元素中取出m个元素形成无序子集
顺序	重要	不重要
记法	$P(n, r)$	$C(n, r)$
公式	$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$	$C(n, r) = \frac{n!}{(n - r)! r!}$
关系	$P(n, r) = C(n, r) * r!$	$C(n, r) = P(n, r) / r!$