$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

T F

1 0

第4.5节 嵌套量词

Section 4.5: Nested Quantifiers

我们将学到的知识

- 嵌套量词
- 量词的顺序
- 数学语句到嵌套量词的翻译
- 嵌套量词到自然语句的翻译
- 汉语语句到逻辑表达式的翻译
- 嵌套量词的否定

4.5.1 嵌套量词

- 在语句中嵌套量词很常见, 在计算机科学和数学领域也很重要.
- 例: "每一个实数x, 都有一个实数y, 使得$x + y = 0$"可表示为$\forall x \exists y(x + y = 0)$, 其中$x$和$y$的论域都是实数.

- 常见的四种嵌套量词:
  - 1) $\forall x \forall y P(x,y)$
  - 2) $\forall x \exists y P(x,y)$
  - 3) $\exists x \forall y P(x, y)$
  - 4) $\exists x \exists y P(x, y)$

4.5.1 嵌套量词

- 为了确定$\forall x \forall y P(x,y)$是否为真，循环查找$x$的所有值
  - 在每个循环步骤中，循环查找y的值
  - 对于某些x和y，$P(x,y)$为假，那么$\forall x \forall y P(x,y)$为假，全部终止
  - $\forall x \forall y P(x,y)$为真，只有当外层循环执行查找完所有的$x$值

- 为了确定$\forall x \exists y P(x,y)$是否为真，循环查找$x$的所有值
  - 在每个循环步骤中，循环查找y的值
  - 当找到一对x和y让$P(x, y)$为真，那么内层循环结束
  - 如果没有找到y能让$P(x, y)$ 为真,那么$\forall x \exists y P(x,y)$为假
  - $\forall x \exists y P(x,y)$为真，只有当外层循环执行查找完所有的$x$值

4.5.1 嵌套量词

- 为了确定$\exists x \forall y P(x,y)$是否为真, 循环查找$x$的所有值
  - 在每个循环步骤中, 循环查找y的值
  - 对于某个x, 对所有y的值, $P(x,y)$为真, 那么$\exists x \forall y P(x,y)$为真, 全部终止
  - 如果循环执行完也总碰不到这样的x值, $\exists x \forall y P(x,y)$为假

- 为了确定$\exists x \exists y P(x,y)$是否为真, 循环查找$x$的所有值
  - 在每个循环步骤中, 循环查找y的值
  - 当找到一对x和y让$P(x,\ y)$为真, $\exists x \exists y P(x,y)$为真, 终止.
  - 那么循环结束也碰不到这样的值, $\exists x \exists y P(x,y)$为假

- 如果变量的论域是无限的, 那么这个过程不能真正执行.

4.5.2 量词的顺序

- 例:论域U为实数, $P(x,y)$表示"$x \cdot y = 0$" 求$\forall x \forall y P(x,y)$, $\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists x \forall y P(x,y)$, $\exists x \exists y P(x,y)$的真值.
- 解:
  - $\forall x \forall y P(x,y)$为假
  - $\forall x \exists y P(x,y)$为真
  - $\exists x \forall y P(x,y)$为真
  - $\exists x \exists y P(x,y)$为真

4.5.2 量词的顺序

- 例:$P(x,y)$表示“$x+y=y+x$” 论域U表示实数. 求解$\forall x\forall yP(x,y)$, $\forall y\forall xP(x,y)$ 的真值.$Q(x,y)$表示“$x + y = 0$” 论域U表示实数. 求解$\forall x\exists yQ(x,y)$, $\exists y\forall xQ(x,y)$的真值.

4.5.2 量词的顺序

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology，HUST

- 例:$P(x,y)$表示“$x+y=y+x$” 论域U表示实数. 求解$\forall x\forall yP(x,y)$, $\forall y\forall xP(x,y)$ 的真值.$Q(x,y)$表示“$x + y = 0$” 论域U表示实数. 求解$\forall x\exists yQ(x,y)$, $\exists y\forall xQ(x,y)$的真值.
- 解:
  - $\forall x\forall yP(x,y)$和$\forall y\forall xP(x,y)$有相同的真值, 为真.
  - $\forall x\exists yQ(x,y)$为真, 它表示对于每一个实数x都存在一个实数y使得$x+y=0$. 但$\exists y\forall xQ(x,y)$为假, 它表示存在一个实数y，使得对每一个实数x都满足$x+y=0$．但是实际上不管y取什么值，只存在一个x值能够满足$x+y=0$，所以$\exists y\forall xQ(x,y)$为假.

4.5.2 两个变量的量化式

- 总结以上规则为:

语句	何时为真?	何时为假?
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall y \forall x P(x,y)$	对每一对x, y, $P(x,y)$均为真	存在一对x, y,使得$P(x,y)$为假
$\forall x \exists y P(x,y)$	对每一个x, 都存在一个y, 使得$P(x,y)$为真	存在一个x, 使得$P(x,y)$对每一个y总为假
$\exists x \forall y P(x,y)$	存在一个x, 使得$P(x,y)$对所有y总为真	对每一个x, 都存在一个y, 使得$P(x,y)$为假
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists y \exists x P(x,y)$	存在一对x, y, 使得$P(x,y)$为真	对每一对x, y, $P(x,y)$均为假

4.5.3 嵌套量词到语句的翻译

- 例:翻译以下嵌套量词为自然语句: $\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x,\ y)))$, 其中$C(x)$表示"$x$有一台电脑", $F(x, y)$表示"x和y是朋友", 论域U是学校全体学生的集合.
- 解: 学校的每个学生, 或者有一台电脑, 或有一个有一台电脑的朋友.

- 例:翻译以下嵌套量词为自然语句: $\exists x \forall y \forall z((F(x,\ y) \wedge F(x, z) \wedge (y\ \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z))$
- 解: 有个学生, 他的朋友之间都不是朋友.

4.5.4 数学语句到谓词逻辑的翻译

- 例: 翻译以下语句成逻辑表达式“两个正整数的和总是正数”.
- 解:
  - 重写语句, 让隐含的量词和论域更明显: “对每两个整数, 如果它们都是正的, 那么它们的和是正数.”
  - 引入变量x和y, 明确论域. “对所有的正整数x和y, $x + y$是正数.”
  - 因此,$\forall x \forall y((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y > 0))$, 其中两个变量的论域都是全体整数.
- 解2:
  - $\forall x \forall y(x + y > 0)$, 其中两个变量的论域都是正整数.