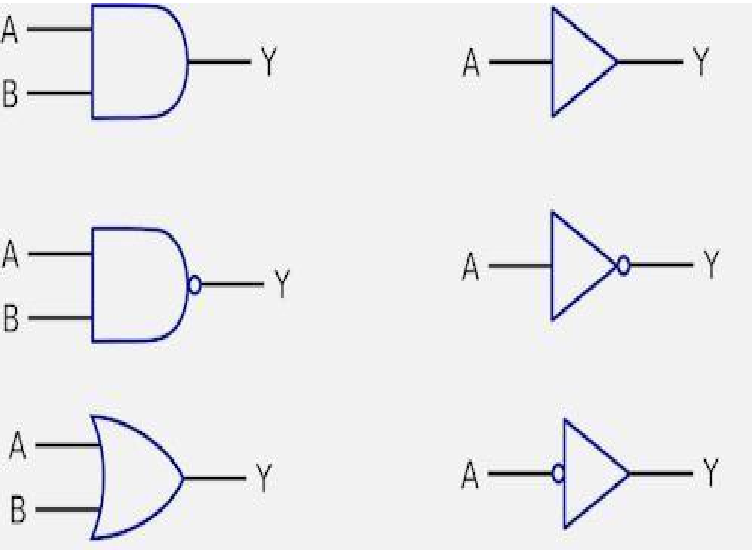
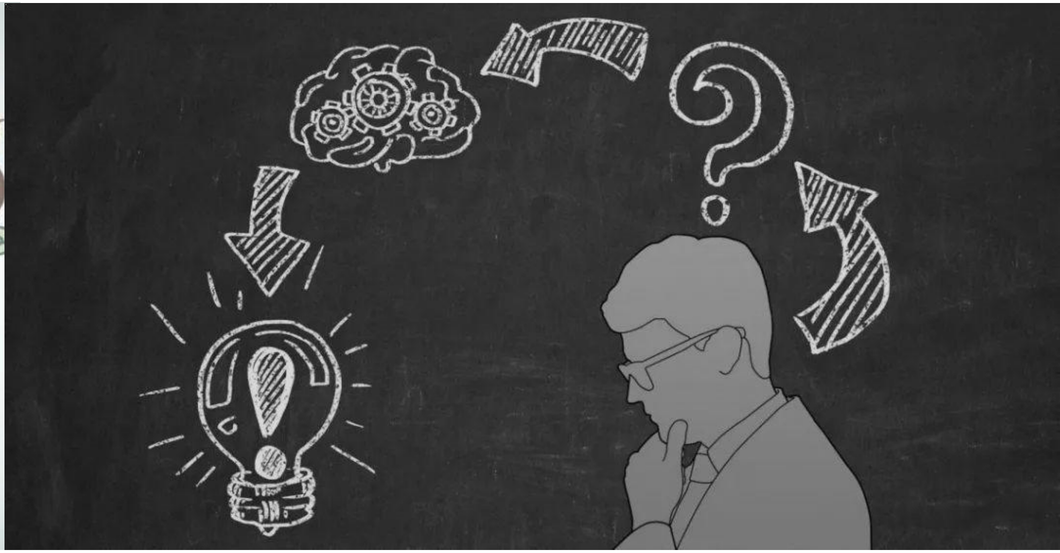
第4章 逻辑与证明

崔金华
邮箱:jhcui@hust.edu.cn
主页: https://csjhcui.github.io/
办公地址:华中科技大学南一楼东406 室





致谢:课件主要参考《 Discrete Mathematics and its application》(Seventh Edition) Keneth H. Rosen 和《离散数学》(第2版) 屈婉玲,耿素云,张立昂版本的相关课件, 特此致谢!!!

第4.6节 推理规则

Section 4.6: Rules of Inference

我们将学到的知识

- ❑命题逻辑的有效论证
- ❑命题逻辑的推理规则
- ❑使用推理规则建立论证
- ❑量化命题的推理规则

4.6.1 引言

❑再回顾苏格拉底的例子:

❑我们有两个前提:

- "所有人都是凡人"
- "苏格拉底是人"

❑我们得到结论:

- "苏格拉底是凡人"

❑我们如何通过前提来得到结论呢?

4.6.1 引言

- 我们可以将谓词逻辑中的前提(在行之上)和结论(在行之下)表示为一个参数:

$$\begin{array}{ll} & \forall x(Man(x) \rightarrow Mortal(x)) \\ & Man(Socrates) \\ \hline \therefore & Mortal(Socrates) \end{array}$$

- 我们很快就会看到这是一个**有效的论证**.

4.6.1 有效论证

- 我们将展示如何在两个阶段构建有效的参数: 首先是命题逻辑, 然后是谓词逻辑. 推理规则是构造有效论证的基本构件.
  - 命题逻辑
    - 推理规则
  - 谓词逻辑
    - 命题逻辑的推理规则, 以及处理变量和量词的附加推理规则

4.6.1 命题逻辑中的论证

- 命题逻辑中的论证是一系列命题. 除最终命题之外的所有命题都称为**前提**(或称作前件), 最后的陈述是**结论**.
  - 一个论证是有效的, 如果所有的前提为真蕴含, 则结论为真.
  - 论证形式是一连串涉及命题变元的复合命题. 无论什么命题被代入其命题变元, 如果前提为真, 结论为真, 则该论证形式是有效的.
  - 当$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$是永真式. 带有前提$p_1, p_2, \ldots, p_n$, 结论为$q$的论证形式就是有效的.

4.6.2 命题逻辑的推理规则1:假言推理

- 永真式 $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ 称为**假言推理**

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- 例:p表示“正在下雪” q表示“我要学离散数学” 假设条件语句“如果正在下雪, 我要学离散数学” 和“正在下雪”为真, 那么“我要学离散数学”为真.

4.6.2 命题逻辑的推理规则2:取拒式

- $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ 称为**取拒式**(或称拒取式)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

- 例:p表示“正在下雪” q表示“我要学离散数学” 假设条件语句“如果正在下雪, 我要学离散数学”和“我没有学习离散数学”为真, 那么“没有下雪”为真.

4.6.2 命题逻辑的推理规则3:假言三段论

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- $((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$称为**假言三段论**

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

- 例:p表示“正在下雪” q表示“我要学离散数学” r表示“我会得到成绩A” 假设条件语句“如果正在下雪，我要学离散数学” 和“如果我学习离散数学，我会得到成绩A”为真，那么“如果下雪，我会得到成绩A”为真.

4.6.2 命题逻辑的推理规则4:析取三段论

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$ 称为**析取三段论**

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- 例:p表示“我要学离散数学” q表示“我要学习英语” 假设语句“我要学习离散数学, 或者我要学习英语”和“我不会学离散数学”为真, 那么“我要学习英语”为真.

4.6.2 命题逻辑的推理规则5:附加律

- $p \rightarrow (p \vee q)$ 称为**附加律**

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

- 例:p表示“我要学离散数学” q表示“我要学习英语” 假设语句“我要学习离散数学”为真, 那么“我要学习离散数学, 或者我要学习英语”为真.

4.6.2 命题逻辑的推理规则6:化简律

- $(p \wedge q) \rightarrow q$ 称为**化简律**

$$\frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

- 也可以是$(p \wedge q) \rightarrow p$

- 例:p表示“我要学离散数学” q表示“我要学习英语” 假设语句“我要学习离散数学和英语”为真, 那么“我要学习离散数学”为真.

4.6.2 命题逻辑的推理规则7:合取律

- $((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$ 称为**合取律**(或称合取引入规则)

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

- 例:p表示"我要学离散数学" q表示"我要学习英语" 假设语句"我要学习离散数学"和"我要学英语"为真, 那么"我要学习离散数学和英语"为真.

4.6.2 命题逻辑的推理规则8:消解律

- $((\neg p \vee r) \wedge (p \vee q)) \rightarrow (q \vee r)$称为**消解律**.
- 在AI中有重要的作用, 被广泛使用在Prolog语言中. $q \vee r$称为消解式

$$\begin{array}{l} \neg p \vee r \\ p \vee q \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

- 例:p表示"我要学离散数学" q表示"我要学习英语" r表示"我要学习数据库"假设语句"我不会学习离散数学, 或者我要学习英语"和"我要学离散数学, 或者我要学习数据库"为真, 那么"我要学习英语, 或者我要学习数据库"为真.

4.6.2 命题逻辑的推理规则9:构造性二难推理

- $((p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)) \to (q \vee s)$称为**构造性二难推理**

$$\begin{array}{c} p \to q \\ r \to s \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$

- 例:p表示"正在下雪" q表示"我要学离散数学" r表示"我会得到成绩A" s表示"我会看一场电影". 假设条件语句"如果正在下雪, 我要学离散数学", "如果我得到成绩A, 我会看一场电影", 和"天正在下雪, 或者我得到成绩A"都为真, 那么"我学习离散数学, 或者我看一场电影"为真.

4.6.2 命题逻辑的推理规则10:破坏性二难推理

- $((p \to q) \land (r \to s) \land (\neg q \lor \neg s)) \to (\neg p \lor \neg r)$称为**破坏性二难推理**

$$\begin{array}{c} p \to q \\ r \to s \\ \neg q \lor \neg s \\ \hline \therefore \neg p \lor \neg r \end{array}$$

- 例:p表示"正在下雪" q表示"我要学离散数学" r表示"我会得到成绩A" s表示"我会看一场电影". 假设条件语句"如果正在下雪, 我要学离散数学", "如果我得到成绩A, 我会看一场电影", 和"我没有学习离散数学, 或者没有看电影"都为真, 那么"天没有下雪, 或者我没有得到成绩A"为真.

4.6.3 使用推理规则建立论证

概念

描述事实的语句

判断

对概念的肯定与否定的判断

推理

从一个/多个前提利用推理规则推出结论的思维过程

认识世界的渐进过程！

4.6.3 使用推理规则建立论证

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- 【**论证**】论证的**前提**为$A_1, A_2, \cdots, A_k$, **结论**为B. 只要$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k$为真, 并且$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \to B$为真, 那么$B$也肯定为真. 我们把语句的这种论证形式称为**有效的**.
- 因此也就是证明$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \to B$是重言式.
- 给定推理的前提为$A_1, A_2, \cdots, A_k$, 结论为B的写法形式也可以如下表示:$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \Rightarrow B$, 称B是$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k$的**逻辑结果**(或称$A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k$蕴涵$B$).

4.6.3 使用推理规则建立论证

- 多个前提时, 通常用到前面提及的推理规则来证明论证形式有效. 常用的论证方法包括:
  - 1) **直接证明法**: 由前提$A_1, A_2, \cdots,\ A_k$出发, 应用推理规则, 推出B
  - 2) **附加前提证明法**
  - 3) **归谬证明法(或简称归谬法)**

4.6.3 使用推理规则建立论证

- 例:大宋提刑官清水断油钱案. 某小伙偷肉铺老板钱反咬一口, 宋慈用清水找到铜钱主人. 如果钱不是从肉铺偷的, 放于水面就不会浮起油脂. 但该小偷的钱浮起了油脂. 请使用推理规则建立有效论证.

4.6.3 使用推理规则建立论证

- 例:大宋提刑官清水断油钱案. 某小伙偷肉铺老板钱反咬一口, 宋慈用清水找到铜钱主人. 如果钱不是从肉铺偷的, 放于水面就不会浮起油脂. 但该小偷的钱浮起了油脂. 请使用推理规则建立有效论证.
- 解:设A表示钱不是从肉铺偷的, B表示水面上没有油脂. 翻译前提为 $A \to B$, $\neg B$, 结论为$\neg A$. 论证如下所示:

步骤	理由
1. $A \to B$	前提引入
2. $\neg B$	前提引入
3. $\neg A$	拒取式, 用步骤1和2

4.6.3 使用推理规则建立论证

- 例:从命题$p\wedge(p \rightarrow q)$, 证明q是一个结论.

- 例:从命题$p\wedge(p\rightarrow q)$, 证明q是一个结论.
- 解:

步骤	理由
1. $p\wedge(p\rightarrow q)$	前提引入
2. p	化简律, 用1
3. $p\rightarrow q$	化简律, 用1
4. q	假言推理, 用2和3

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 常用的论证方法包括:
  - 1) **直接证明法**: 由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$出发, 应用推理规则, 推出B
  - 2) **附加前提证明法** (详见下页内容)
  - 3) 归谬证明法(或简称归谬法)

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 【**附加前提证明法**】推理形式为$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B)$. 将结论的前件$A$作为推理的前提(A称作附加前提), 结论为$B$, 即推理形式改写为$\boldsymbol{(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B}$，称作附加前提证明法(Conclusion Premise Rule, 简称**CP规则**).

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B
\end{aligned}
$$

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 例:根据以下前提(前三行), 用推理规则建立论证, 证明结论(第四行):
  - (1) “如果小张和小王去看电影, 则小李也去看电影.”
  - (2) “小赵不去看电影, 或小张去看电影.”
  - (3) “小王去看电影.”
  - (4) “如果小赵去看电影, 那么小李也去看电影.”

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 例:根据以下前提(前三行), 用推理规则建立论证, 证明结论(第四行):
  - (1) "如果<u>小张</u>和<u>小王</u>去看电影, 则<u>小李</u>也去看电影."
  - (2) "<u>小赵</u>不去看电影, 或小张去看电影."
  - (3) "小王去看电影."
  - (4) "如果小赵去看电影, 那么小李也去看电影."
- 解:
  - 设p: "小张去看电影" q: "小王去看电影" r: "小李去看电影" s: "小赵去看电影"
  - 翻译前提为: $(p \wedge q) \to r$, $\neg s \vee p$, q, 结论为$s \to r$. 论证如下所示:

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

已知$(p \wedge q) \to r$, $\neg s \vee p, q$
结论为$s \to r$

- 解(续): 步骤 理由
  - 1. s 附加前提引入
  - 2. $\neg s \vee p$ 前提引入
  - 3. p 析取三段, 用步骤1和2
  - 4. q 前提引入
  - 5. $p \wedge q$ 合取引入, 用步骤3和4
  - 6. $(p \wedge q) \to \mathrm{r}$ 前提引入
  - 7. r 假言推理, 用步骤5和6

4.6.3 构造证明法-归谬法

❑常用的论证方法包括:

- 1) **直接证明法**: 由前提$A_1, A_2, \cdots,\ A_k$出发, 应用推理规则, 推出B
- 2) **附加前提证明法**
- 3) **归谬证明法(或简称归谬法)** (详见下页内容)

4.6.3 构造证明法-归谬法

- 【**归谬法**】推理的形式为$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$. 将结论B的否定作为推理的附加前提引入, 即$\boldsymbol{A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B}$, 推出矛盾(例如$A \wedge \neg A$), 称作归谬证明法(或简称归谬法).

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

若$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$为矛盾式, 则说明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$为重言式, 即由前提能推出结论$B$.

4.6.3 构造证明法-归谬法

- 例:使用归谬法证明前提$(p \wedge q) \to r, \neg r \vee s, \neg s, p,$ 能推出结论$\neg q$.

4.6.3 构造证明法-归谬法

- 例:使用归谬法证明前提$(p \land q) \to r$, $\neg r \lor s$,$\neg s$, p, 能推出结论$\neg q$.
- 解:步骤　　理由

步骤	理由
1. q	结论的否定引入
2. $\neg r \lor s$	前提引入
3. $\neg s$	前提引入
4. $\neg r$	析取三段论, 用步骤2和3
5. $(p \land q) \to r$	前提引入
6. $\neg(p \land q)$	取拒式, 用步骤4和5
7. $\neg p \lor \neg q$	德摩根律, 用步骤6
8. p	前提引入
9. $\neg q$	析取三段论, 用步骤7和8
10. $q \land \neg q$	合取律, 用步骤1和9

- 最后得到矛盾式$q \land \neg q$, 即证明给定前提能推出结论$\neg q$.