Solution

Wearry

Stay determinded!

Bitcoin

注意到题目中的 K 比较小, 同时注意到题目名称提示了 BIT……

考虑二进制第 K 位为 1 的数, 在模 2^{K+1} 意义下是连续的. 于是可以考虑对于每一个 K 维护这样的一个数据结构, 做加法时维护区间整体加标记即可.

时间复杂度 $O(KN\log N)$.

Exam

不妨设 $A \le B \le C, N = \max\{A, B, C\}$, 那么:

$$d(i \times j \times k) = \sum_{x|i}\sum_{y|j}\sum_{z|k}[(x,y)=1][(y,z)=1][(z,x)=1]$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}\sum_{k=1}^{C} d(i\times j\times k)\\
=&\sum_{x=1}^{A}\sum_{y=1}^{B}\sum_{z=1}^{C}[(x,y)=1][(y,z)=1][(z,x)=1]\lfloor\frac{A}{x}\rfloor\lfloor\frac{B}{y}\rfloor\lfloor\frac{C}{z}\rfloor\\
=&\sum_{x=1}^{A}\lfloor\frac{A}{x}\rfloor\sum_{d=1,(x,d)=1}^{B}\mu(d)\sum_{y=1,(x,y)=1}^{\lfloor\frac{B}{d}\rfloor}\lfloor\frac{B}{dy}\rfloor\sum_{z=1,(x,z)=1}^{\lfloor\frac{C}{d}\rfloor}\lfloor\frac{C}{dz}\rfloor
\end{aligned}
$$

暴力计算上式可以做到 $O(N^2\ln N)$ 或者 $O(N^2)$ 的复杂度, 考虑优化, 不难发现:

- 对于 x 我们只关心它包含哪些质因子而不关心次数.
- 在不考虑互质的条件下这个式子是很好计算的.

定义:

$$f_x(n)=\sum_{i=1,(i,x)=1}^{n}\mu(i)$$

$$g_x(n)=\sum_{i=1,(i,x)=1}^{n}\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$$

考虑已知 f_x,g_x 求 f_{xp},g_{xp} (p 是质因子且 $(x,p)=1$) :

$$
\begin{aligned}
f_{xp}(n) &= f_x(n) - \sum_{i=1,(i,x)=1}^{n} \mu(i)[p \mid i] \\
&= f_x(n) - \sum_{i=1,(i,xp)=1}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \mu(i)\mu(p) \\
&= f_x(n) + f_{xp}(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor) \\
g_{xp}(n) &= g_x(n) - \sum_{i=1,(i,x)=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor [p \mid i] \\
&= g_x(n) - \sum_{i=1,(i,x)=1}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \lfloor \frac{n}{pi} \rfloor \\
&= g_x(n) - g_x(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor)
\end{aligned}
$$

从 $x = 1$ 开始搜索遍历每一种可能的质因子集合, 记录每一层的 f, g 并使用它们推出下一层的 f, g 即可, 同时我们只需要维护其中 $O(\sqrt{N})$ 个位置的值, 复杂度 $O(N\sqrt{N})$.

Graph

考虑将联通块个数 T 的 k 次方看成多项式 $(x_0 + x_1 + ... + x_T)^k$ 的展开. 那么展开的每一项相当于选择一些联通块然后任意排列:

$$
T^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{T}{i} \left\{ {k \atop i} \right\} i!
$$

考虑消去 T , 可以先枚举一个大小为 i 的联通块集合, 然后计算这个集合在多少张图中存在, 再乘上 $\left\{ {k \atop i} \right\} i!$ 计算贡献即可.

定义 g_t 表示包含 t 个联通块的突的生成函数，我们可以计算出 $g_1, g_2, \cdots, g_k$, g_1 就是非常熟悉的无向联通图的生成函数，对于 g_t, $t \geq 2$:

$$
g_t(n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} g_1(i) g_{t-1}(n-i)
$$

答案的式子就是:

$$\sum_{i=1}^{k} \left\{ {k \atop i} \right\} i! \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} g_i(n-j) 2^{\binom{j}{2}}$$

于是可以做到 $O(kn \log n)$ 预处理, $O(k)$ 询问.