NOIP 数论基础

吴一岐

2018 年 7 月 5 日

目录

1 素数筛法

1.1 朴素版筛法

将每一个数的所有的倍数都筛去，由于素数只能被 1 和它本身整除，因此素数不会被筛到, 计算量为 n/2+n/3+n/4+... 这个是调和级数，复杂度 $O(nlogn)$

朴素版筛法

```
const int N = 100010;
bool flag[N];
int p[N], tot;
void init(int n) {
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
    for (int j = i + i; j <= n; j += i) {
      flag[j] = true;
    }
  }
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
    if (!flag[i]) {
      p[tot++] = i;
    }
  }
}
```

1.2 优化版筛法

我们注意到朴素版筛法里面 36 会被 2,3,4,6,9,12,18 这 6 个数筛到，相当于被 2*18，3*12，4*9，6*6，9*4，12*3，18*2 筛到，实际上 $a*b$ 跟 $b*a$ 是等价的，于是，我们可以通过枚举小的那个因子，来优化一半的计算量，相当于 $i*(i+1)$，$i*(i+2)$ 这样子去筛, 复杂度不变，常数上优化了

优化版筛法

```
void init(int n) {
  int up = (int)sqrt(1.0*n) + 1;
  for (int i = 2; i <= up; i++) {
    for (int j = i * i; j <= n; j += i) {
      flag[j] = true;
    }
  }
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
    if (!flag[i]) {
      p[tot++] = i;
    }
  }
}
```

1.3 线性筛法

那么存在 $O(n)$ 的筛法，使得每个数只被筛到一次么？答案是肯定的。下面这个代码短小精悍，可以做到每一个数只被其最小的素因子筛选到

线性筛法

```
void init(int n) {
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
    if (!flag[i]) {
      p[tot++] = i;
    }
    for (int j = 0; j < tot; j++) {
      if (i * p[j] > n) {
        break;
      }
      flag[i * p[j]] = true; //p[j]是i * p[j]的最小素因子
      if (i % p[j] == 0) { // 再往后p[j]就不是i * p[j]的最小素因子了
        break;
      }
    }
  }
}
```

2 欧几里得

2.1 辗转相减

利用辗转相减法求最大公约数, 即 $gcd(a,b)$。假设 $a > b$, 则 $gcd(a,b) = gcd(a-b,b)$, 不断的利用大的数减去小的数，就能得到最大公约数。

证明:

$a = k_1 * g$

$b = k_2 * g$

假设 g 为最大公约数, 那么 $gcd(k_1,k_2) = 1$, 设 $a > b$, 令 $a = a - b$,

$a = (k_1 - k_2) * g$

$b = k_2 * g$

我们发现 a，b 的变化为两个互质的系数在不断相减（始终还是互质），g 始终是它们的最大公约数，所以当有一个数变成 0 的时候，另一个数就是最大公约数

辗转相减

```
while (a != b) {
    if(a > b) {
        a -= b;
    } else {
        b -= a;
    }
}
```

2.2 辗转相除

我们发现当 a 一直大于 b 的时候，就会一直减去 b，其实就是变成 $a\%b$，于是我们可以利用辗转相除来优化,

辗转相除

```
while (a && b) {
    if (a > b) {
        a = a % b;
    } else {
        b = b % a;
    }
}//循环结束后 max(a,b) 就是答案
int gcd(int a, int b) {return !b ? a : gcd(b, a % b);}
```

3 扩展欧几里得

扩展欧几里得的典型应用是解决形如 $a*x+b*y=c$ 的二元一次方程的解的存在性问题以及求出特解和通解。

3.1 解的存在性问题

其实我们通过辗转相减就可以观察出来，a, b 辗转相减的时候相当于 $a*x+b*y$ 中的 x, y 在不断变化的过程, 比如 $a-b, a-2*b, 3*b-a$，我们通过前面知道这个过程一定能得到最大公约数, 所以 $a*x+b*y=gcd(a,b)$ 一定有解，那么是否 $gcd(a,b) \neq c$ 的时候就无解呢? 首先我们知道 c 是 $gcd(a,b)$ 的倍数才可能有解，因为左边一定含有因子 $gcd(a,b)$，左边等于右边，那么右边也一定含有 $gcd(a,b)$，因此我们可以通过两边同时除以最大公约数得到一个新的式子

$k_1*x+k_2*y=c/g.\ gcd(k_1,k_2)=1$

由辗转相减可得: $k_1*x+k_2*y=1$ 一定有解, 所以 $k_1*x+k_2*y=c/g$ 一定有解，所以当 c 是 $gcd(a,b)$ 的倍数的时候，方程一定有解

3.2 特解与通解

所以我们只需要求解形如

$$a*x+b*y=gcd(a,b)$$

然后将解扩大 $c/gcd(a,b)$ 倍就可以解出原方程的解了

观察到这个式子本质其实就是 a 和 b 辗转相减的过程, 假设已经求出了

$$(a-b)*x_1+b*y_1=gcd(a,b)$$

的解 x_1, y_1, 那么变换一下得到 $a*x_1+b*(y_1-x_1)=gcd(a,b)$, 我可以得出

$$x=x_1, y=y_1-x_1$$

得到了原方程的解，所以我们可以将原问题变成一个规模更小的子问题，然后根据子问题的答案推出原问题的答案，考虑到这个辗转相减可以用辗转相除来替代，我们可以将原问题变成求解

$$b*x_1+a\%b*y_1=gcd(a,b)$$

由

$$a\%b = a - a/b * b$$

代入得

$$b * x_1 + (a - a/b * b) * y_1 = gcd(a, b)$$

等价于

$$a * y_1 + b * (x_1 - a/b * y_1) = gcd(a, b)$$

得到

$$x = y_1, y = x_1 - a/b * y_1$$

因此我们只需一直缩小问题规模，直到变成 $gcd(a, b) * x + 0 * y = gcd(a, b)$，然后得到一组特解 $(1, 0)$，再将这组特解反推回去，得到一开始的方程的一组特解。这个过程可以用一个递归函数来实现。

exgcd

```
int extgcd(int a, int b, int &x, int &y) {
    int d = a;
    if(b != 0) {
        d = extgcd(b, a % b, x, y);
        x -= (a / b) * y;
        std::swap(x, y);
    } else {
        x = 1; y = 0;
    }
    return d;
}
```

函数执行完毕后代码里面的 (x, y) 就是 $a * x + b * y = gcd(a, b)$ 的一组特解, 通解的变化规律就是 x 和 y 的值往相反的方向变化，比如 x 变大一些，y 变小一些，使得答案不变，设这个变化的最小单位值为 d_1, d_2

$$a * (x + d_1) + b * (y - d_2) = gcd(a, b)$$

$$a * d_1 = b * d_2$$

两边同除 $gcd(a, b)$ 令 $k_1 = a/gcd(a, b)$, $k_2 = b/gcd(a, b)$

$$k_1 * d_1 = k_2 * d_2$$

这个时候 k_1, k_2 互质，显然 $d_1 = k_2, d_2 = k_1$，可得通解为

$$(x + k * d_1, y - k * d_2)$$

即

$$(x + k * b/gcd(a, b), y - k * a/gcd(a, b))$$

3.3 关于特解的绝对值大小

我们通过递归函数的实现可以观察到，解的绝对值是跟 a, b 的绝对值同一个级别的

4 欧拉函数

4.1 定义

欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示小于或者等于 n 的正整数中与 n 互质的数的数目，例如 $\varphi(8)=4$, 因为 1，3，5，7 与 8 互质。

前 20 个欧拉函数为 1 1 2 2 4 2 6 4 6 4 10 4 12 6 8 8 16 6 18 8

4.2 欧拉函数值

特殊的 $\varphi(1)=1$

若 n 是质数 p 的 k 次幂,

$$\varphi(n)=\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}=(p-1)*p^{k-1}$$

相当于总数减去 p 的倍数

利用类似的想法，我们发现 $\varphi(p_1^{k_1}*p_2^{k_2})$ =$\varphi(p_1^{k_1})*\varphi(p_2^{k_2})$, 等价于总数减去 p_1 的倍数，减去 p_2 的倍数，再加上 p_1,p_2 的倍数, 这个其实就是欧拉函数的积性性质，

积性函数

若 m,n 互质, 有 $f(mn)=f(m)*f(n)$, 那么称函数 f 为积性函数

因此若质因数分解后

$$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}$$

$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{r}p_i^{k_i-1}(p_i-1)=n*\prod_{i=1}^{r}(\frac{p_i-1}{p_i})$$

4.3 欧拉函数常用性质总结

1. 欧拉函数是积性函数，当正整数 m,n 互质时，$\varphi(m*n)=\varphi(m)*\varphi(n)$
2. 当 n 为奇数时，$\varphi(2*n)=\varphi(n)$
3. $\varphi(n)=\varphi(n/p)*p$, (p 能整除 n/p), 可以利用上一小节最后一个式子来推
4. $\varphi(n)=\varphi(n/p)*(p-1)$, (p 与 n/p 互质，且 p 是质数)
5. $\sum\limits_{d|n}\varphi(d)=n$

性质 3 证明:

性质 4 证明: 利用欧拉函数的积性性质即可

性质 5 证明: 设 $f(n)=\sum\limits_{d|n}\varphi(d)$. 若 n,m 互质,

$$f(nm)=\sum_{d|nm}\varphi(d)=(\sum_{d|n}\varphi(d))*(\sum_{d|m}\varphi(d))=f(n)*f(m)$$

, 所以 $f(n)$ 是积性函数.

$$f(p^m)=\sum_{d|p^m}\varphi(d)=\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+...+\varphi(p^m)=p^m$$

因此

$$f(n)=\prod_{i=1}^{m}f(p_i^{c_i})=\prod_{i=1}^{m}p_i^{c_i}=n$$

代码实现：

法一：利用普通筛法实现，直接根据定义来计算

普通筛法实现欧拉函数

```
void init(int n) {
    phi[1]=1;
    for(int i=2;i<=n;i++)
      phi[i]=i;
    for(int i=2;i<=n;i++)
       if(phi[i]==i)
          for(int j=i;j<=n;j+=i)
             phi[j]=phi[j]/i*(i-1);//先进行除法是为了防止中间数据的溢出
}
```

法二：利用线性筛递推实现, 利用到了第 3 和第 4 个性质

线性筛法实现欧拉函数

```
void init(int n) {
   phi[1] = 1;
   for (int i = 2; i <= n; i++) {
      if (!flag[i]) {
         p[tot++] = i;
         phi[i] = i - 1; // 素数的欧拉函数值等于素数-1
      }
      for (int j = 0; j < tot; j++) {
         if (i * p[j] > n) {
            break;
         }
         flag[i * p[j]] = true;
         if (i % p[j] == 0) {
            phi[i * p[j]] = phi[i] * p[j];//性质3
            break;
         }
         phi[i * p[j]] = phi[i] * (p[j] - 1);// 性质4

      }
   }
}
```

5 欧拉定理

欧拉定理的定义是：如果 a, n 为正整数, 且 $gcd(a, n) = 1$, 则

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1(mod\ n)$$

证明:

1: 令集合

$$S = \{x_1, x_2, ..., x_{\varphi(n)}\}$$

表示所有的小于 n 并且与 n 互质的数

$$T = \{a * x_1 \% n, a * x_2 \% n, ..., a * x_{\varphi(n)} \% n\}$$

由于 $gcd(a, n) = 1, gcd(x_i, n) = 1$, 所以 $gcd(a * x_i, n) = 1$, 所以

$$gcd(a * x_i \% n, n) = 1$$

容易通过反证得出 S 中的元素是两两不相同的，因此集合 S 跟 T 是相同的，所以

$$a^{\varphi(n)} * x_1 * x_2, ... * x_{\varphi(n)} \% n$$

$$\equiv a * x_1 * a * x_2 * ... * a * x_{\varphi(n)} \% n$$

$$\equiv x_1 * x_2 * ... * x_{\varphi(n)} \% n$$

所以，欧拉定理得证

6 费马小定理

费马小定理是欧拉定理的特殊情况，即当 n 是质数的时候

$$a^{n-1} \equiv 1(mod\ n)$$

7 乘法逆元

当我们需要计算 $a/b\%c$，又由于 a, b 在运算过程中会变得非常大，不能用高精度保存的时候，典型的就是算组合数取模，这个时候可以利用乘法逆元将除法转换成乘法，并提前进行取模运算。设 $inv * b \equiv 1(mod\ n)$ 假设

$$a/b = k * c + r$$

两边同乘以 b 可得

$$a = k * b * c + b * r$$

两边同乘以 inv 可得

$$a * inv \equiv k * c + r\ (mod\ n)$$

到此，除法已经转换成了乘法, 所以我们只需要求出 inv 就可以了,inv 的求解本质上就是解一个二元一次方程

$$inv * b + k * n = 1$$

的一个正整数解, 利用扩展欧几里得求解即可。

特殊的，当 n 是质数的时候, 利用费马小定理，$inv = b^{n-2}\%n$

7.1 线性递推求逆元

P 是质数

$$inv(i) = (P - P/i) * inv(P\%i)\%P$$

令 $t = P/i, k = P\%i$, 则

$$t * i + k \equiv 0(modP)$$

,

$$-t * i \equiv k(modP)$$

两边同除以 $i * k$

$$-t * inv(k) \equiv inv(i)(modP)$$

将 t, k 代入即可

8 中国剩余定理

设 $m_1, m_2, m_3..., m_n$ 两两互质,$m = \prod_{i=1}^{n} m_i$,$M_i = m/m_i$, s_i 是同余方程 $M_i\ s_i \equiv 1(modm_i)$ 的一个解。对于任意的 n 个整数 $a_1, a_2, ..., a_n$, 方程组

$$\begin{cases} x \equiv & a_1(mod\ m_1) \\ x \equiv & a_2(mod\ m_2) \\ ... & \\ x \equiv & a_n(mod\ m_n) \end{cases}$$

的解为 $x = \sum_{i=1}^{n} a_i * M_i * s_i$