莫比乌斯反演和杜教筛

cly_none

一些基础

- 积性函数
- 狄利克雷卷积

反演

最基本的反演

若$f(S)=\sum_{T\subseteq S}g(T)$, 那么

$$g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$$

在$S=U$的时候，这正是容斥原理。
证明可以考虑这个式子：

$$\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}=[S=\emptyset]$$

推广

- 合并所有大小相等的集合。

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g(k)$$

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(k)$$

这叫二项式反演。

推广

- 多重集合。
  我们可以考虑把质因数分解理解为多重集合。
  那么，$a|b$就相当于a是b的子集。
  $gcd(a,b)$就相当于是a和b的交。
  $lcm(a,b)$就相当于是a和b的并。
  1就相当于是$\emptyset$。
  值得注意的是，这种理解方式存在局限性。

- 对于0/1集合，我们有函数$\mu(S)=(-1)^{|S|}$满足：

$$\sum_{T\subseteq S}\mu(S-T)=[S=\emptyset]$$

那对于多重集合，我们也需要有一个函数$\mu(x)$满足：

$$\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]$$

似乎来了一个熟悉的面孔……

- 求证：$\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]$。
- 证明：

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\prod_{p|n,p\text{ is prime}}\sum_{k=0}^{a_p}\mu(p^k)$$

若存在某个$a_p>0$，即$n>1$，则
$\sum_{d|n}\mu(d)=0$。
当$n=1$，$\sum_{d|n}\mu(d)=1$

证明莫比乌斯反演

洛谷P3911 最小公倍数之和

- 对于$A_1, A_2, \cdots, A_n$，求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} lcm(a_i, a_j)$$

- 其中$n, a_i \leq 50000$。

设$f(d)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n[gcd(a_i,a_j)=d]a_ia_j.$
设$g(d)=\sum_{d|a_i}\sum_{d|a_j}a_ia_j.$
那么$g(x)=\sum_{x|d}f(d)$
故$f(x)=\sum_{x|d}g(d)\mu\left(\frac{d}{x}\right).$

然而，这种方法不适合推导需要直接计算的式子.

一些常用等式

$$\phi * 1 = Id$$

$$\sum_{gcd(d,n)=1, d \le n} d = \begin{cases} \frac{\phi(n)n}{2}, \text{if n is greater then 1} \\ 1, \text{if n equals to 1} \end{cases}$$

$$gcd(a,b) = gcd(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$$

一些常用等式

$$\sum_{d|n} 2^{\omega(d)} = \sigma_0(n^2)$$

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} \mu^2(d)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^2(k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \left\lfloor \frac{n}{k^2} \right\rfloor$$

PS：$\omega(n)$表示n的质因子个数，$\sigma_0(n)$表示n的约数个数。

杜教筛

- 通过构造函数$g(x)$，计算一些特殊函数的前缀和。
- 往往与各种数论推式子结合。
- 要求$(f * g)$和g都很好求前缀和。

设$S(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(f*g)(k)&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{d|k}f(d)g(\frac{k}{d})\\&=\sum_{d=1}^{n}g(d)\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}f(k)\\&=\sum_{d=1}^{n}g(d)S(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)\end{aligned}$$

$$g(1)S(n)=\sum_{k=1}^{n}(f*g)(k)-\sum_{k=2}^{n}g(k)S(\lfloor\frac{n}{k}\rfloor)$$

时间复杂度

$$
\begin{aligned}
T(n) =& O\left(\sum_{k=1}^{\sqrt{n}}\sqrt{k}+\sqrt{\frac{n}{k}}\right)\\
=& O\left(\sum_{k=1}^{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{k}}\right)\\
=& O\left(\int_{1}^{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{x}}\,\mathrm{d}x\right)\\
=& O(n^{\frac{3}{4}})
\end{aligned}
$$

时间复杂度

但如果我们用线性筛预处理了$O(n^{\frac{2}{3}})$以内的答案?

$$
\begin{aligned}
T(n) &= O\left(\int_1^{n^{\frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{n}{x}}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= O(n^{\frac{2}{3}})
\end{aligned}
$$

示例

- 求ϕ函数的前缀和
- 求μ函数的前缀和

HDU5608 - function

- 定义域为N_+的函数$f(x)$满足

$$\sum_{d|n} f(d) = n^2 - 3n + 2$$

- 求$\sum_{k=1}^{n} f(k)$，对10^9+7取模。
- $n \le 10^9$

把$f(x)$拆成3个部分$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$.
其中，$f_3 * 1 = 1$即$f_3 = \epsilon$.
$f_2 * 1 = Id$即$f_2 = \phi$.
$f_3 * 1 = Id^2$，则我们可以取$g = 1$用杜教筛求出f_3的前缀和.
时间复杂度$O(n^{\frac{2}{3}})$.

PE448 Average least common multiple

- $S(L) = \sum_{n=1}^{L} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} lcm(k,n)$
- 求$S(99999999019)$，对999999017取模

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} lcm(k,n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{gcd(n,k)} \\
&= \sum_{d|n} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} k[gcd(k,\frac{n}{d}) = 1] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{d|n} d\phi(d) + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2S(L) - L &= \sum_{n=1}^{L} \sum_{d|n} d\phi(d) \\
&= \sum_{d=1}^{L} d\phi(d) \lfloor \frac{L}{d} \rfloor
\end{aligned}
$$

$$g(d) = d\phi(d)$$

$$h(d) = d$$

$$(h * g)(n) = \sum_{d|n} d\phi(d)\frac{n}{d} = n\sum_{d|n}\phi(n) = n^2$$

PE379 Least common multiple count

设$f_2(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}[lcm(i,j)=n]$.
设$g_2(n)=\sum_{k=1}^{n}f_2(k)$.
求$g(10^{12})$.

- 先设$f(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[lcm(i,j)=n]$，那么 $f_2(n)=\frac{f(n)+1}{2}$。
- 同样，设$g(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k)$，那么 $g_2(n)=\frac{g(n)+n}{2}$。

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[lcm(i,j)=n] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\frac{ij}{gcd(i,j)}=n] \\
&= \sum_{i|n}\sum_{j|n}[gcd(\frac{n}{i},\frac{n}{j})=1] \\
&= \sum_{i|n}\sum_{j|n}[gcd(i,j)=1]
\end{aligned}
$$

一个奇怪的做法

考虑$\sum_{i|n}\sum_{j|n}[gcd(i,j)=1]$的组合意义。
我们就能得到

$$\sum_{i|n}\sum_{j|n}[gcd(i,j)=1]=\sum_{d|n}2^{\omega(d)}=\sigma_0(n^2)$$

然后就和SPOJ - DIVCNT2撞题了。

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i|n} \sum_{j|n} [gcd(i,j) = 1] \\
&= \sum_{ij|n} [gcd(i,j) = 1] \\
&= \sum_{ij|n} \sum_{d|i,d|j} \mu(d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{k=1}^{n} f(k) \\
&= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{d \mid i} \sum_{d \mid j} \left\lfloor \frac{n}{ij} \right\rfloor \\
&= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{i,j} \left\lfloor \frac{n}{d^2 ij} \right\rfloor \\
&= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{x} \left\lfloor \frac{n}{d^2 x} \right\rfloor \sigma_0(x)
\end{aligned}
$$

SPOJ - DIVCNT2

- 求$\sum_{k=1}^{n} \sigma_0(k^2)$.
- $n \le 10^{12}$.

当然可以转化为上一道题来做了。
但还有一种做法。

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_0(k^2)=\sum_{d=1}^{n}2^{\omega(d)}\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor$$

$$\sum_{k=1}^{n}2^{\omega(d)}=\sum_{d=1}^{n}\mu^2(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor$$

$$\sum_{k=1}^{n}\mu^2(k)=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d^2}\right\rfloor$$

PE439 Sum of sum of divisors

- 设

$$S(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_1(ij)$$

- 求$S(10^{11})$，对10^9取模.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \sigma_1(ij) \\
&= \sum_{t} t \left\lfloor \frac{ni}{lcm(i,t)} \right\rfloor \\
&= \sum_{t} t \left\lfloor \frac{n \times gcd(t,i)}{t} \right\rfloor \\
&= \sum_{d|i} \sum_{t} t[gcd(i,t) = d] \left\lfloor \frac{nd}{t} \right\rfloor \\
&= \sum_{d|i} \sum_{t} td[gcd(d,t) = 1] \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}\sum_{t} t\frac{i}{d}[gcd(d,t)=1]\left\lfloor\frac{n}{t}\right\rfloor \\
=&\sum_{i\times d\le n}\sum_{t} ti[gcd(d,t)=1]\left\lfloor\frac{n}{t}\right\rfloor \\
=&\sum_{k}\mu(k)\sum_{k|d}\sum_{k|t}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor} ti\left\lfloor\frac{n}{t}\right\rfloor \\
=&\sum_{k}\mu(k)\sum_{i\times d\le\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor}\sum_{t} tki\left\lfloor\frac{n}{tk}\right\rfloor \\
=&\sum_{k}\mu(k)k\left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor}\sigma_1(i)\right)^2
\end{aligned}
$$

- $\sigma_1(n)$是可以用线性筛预处理的。
  当要求$\sigma_1(pi)$的时候，其中p为质数，$p|i$:
  我们求出$f(\frac{i}{p}) = v_0x$，$f(i) = v_0(xp+1)$.
  两式相除就能求出x了。
- 所以这是$O(n^{\frac{2}{3}})$的.

课后作业

- 51Nod 1237 最大公约数之和 V3
- BZOJ 3512 DZY Loves Math IV