简（du）单（liu）的图计数

济南市历城第二中学 _rqy

2019/03/19

有根树计数

给定正整数 n，求 n 个点的有标号有根树的个数。
答案对 998244353 取模。

做法

众所周知，答案就是 n^{n-1}。这可以用树的 Prufer 序列来证明，相信大家都会我就不讲了。

我们来讲一些有趣的东西。

递推式

递推式 qwq。

$$f_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{\sum_i a_i=n-1\\ a_i\geqslant 1\\ (1\leqslant i\leqslant k)}}\frac{(n-1)!}{\prod_i a_i!}\prod_i f_{a_i}$$

递推式

递推式 qwq。

$$f_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{\sum_i a_i=n-1\\ a_i\geqslant 1\\ (1\leqslant i\leqslant k)}}\frac{(n-1)!}{\prod_i a_i!}\prod_i f_{a_i}$$

显然这式子不是人看的~~虽然还算优美但是太长了~~。

Generating Function

另一件众所周知的事情是，两个 EGF 的乘积就是排列。

令 $F(x)$ 表示有根树计数的 EGF，那么 “两棵有根树” 的 EGF 就是 $F^2(x)/2$。除以二是因为两棵树之间是没有顺序的。推广下去，k 棵树的 EGF 就是 $F^k(x)/k!$。对 $k=0\ldots\infty$ 求和，我们将会得到（有根）森林的 EGF。

Generating Function

另一件众所周知的事情是，两个 EGF 的乘积就是排列。

令 $F(x)$ 表示有根树计数的 EGF，那么 "两棵有根树" 的 EGF 就是 $F^2(x)/2$。除以二是因为两棵树之间是没有顺序的。推广下去，k 棵树的 EGF 就是 $F^k(x)/k!$。对 $k=0\ldots\infty$ 求和，我们将会得到（有根）森林的 EGF。

于是森林的 EGF 就是

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^k(x)}{k!}=\exp F(x)$$

Generating Function

另一件众所周知的事情是，两个 EGF 的乘积就是排列。

令 $F(x)$ 表示有根树计数的 EGF，那么 “两棵有根树” 的 EGF 就是 $F^2(x)/2$。除以二是因为两棵树之间是没有顺序的。推广下去，k 棵树的 EGF 就是 $F^k(x)/k!$。对 $k = 0 \dots \infty$ 求和，我们将会得到（有根）森林的 EGF。

于是森林的 EGF 就是

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k(x)}{k!} = \exp F(x)$$

而一棵有根树就是一个有根森林加上一个点，于是就是森林的 EGF 乘 x。所以我们得到

$$F(x) = x \exp F(x)$$

至于为什么 $F(x)$ 的 n 次项系数就是 n^{n-1}，这不在我们的讨论范围内（神仙们可以去找 “拉格朗日反演定理” 之类的，或者直接去找 “Lambert W Function”）。

数列变换

本节内容是由 *OEIS: More Transformations of Integer Sequences* 启发而来。

在上面的引子中，我们通过一些~~奇技淫巧~~对不够熟练的人来说有些 Trick 的想法搞出了一个 $\exp$。这种方法是否可以抽离出来，抛开“树”和“森林”这些东西，搞一些比较通用的东西？

数列变换

本节内容是由 *OEIS: More Transformations of Integer Sequences* 启发而来。

在上面的引子中，我们通过一些~~奇技淫巧~~对不够熟练的人来说有些 Trick 的想法搞出了一个 $\exp$。这种方法是否可以抽离出来，抛开 “树” 和 “森林” 这些东西，搞一些比较通用的东西?

答案显然是肯定的~~不然我现在就可以滚下去了~~。

盒子与球

我们把“一棵树”看成一个盒子，“一棵有 n 个点的树”看成放有 n 个球的盒子，不同的有 n 个点的树可以看成盒子涂成了不同颜色。

那么问题就变成了“如果一个装有 i 个球的盒子有 a_i 种涂色方式，求把 n 个球放到若干（任意多个）盒子里的方案数 b_n”。

注意装有的球的个数不同的两个盒子涂的颜色也是不同的。

盒子与球

我们把“一棵树”看成一个盒子，“一棵有 n 个点的树”看成放有 n 个球的盒子，不同的有 n 个点的树可以看成盒子涂成了不同颜色。

那么问题就变成了“如果一个装有 i 个球的盒子有 a_i 种涂色方式，求把 n 个球放到若干（任意多个）盒子里的方案数 b_n”。

注意装有的球的个数不同的两个盒子涂的颜色也是不同的。

这么说很笼统，我们来细化一下具体的规则。

盒子顺序

盒子有五种顺序：

盒子顺序

盒子有五种顺序：

- A. 线性 (ordered): 盒子从左到右排成一行；

盒子顺序

盒子有五种顺序：

- A. 线性 (ordered): 盒子从左到右排成一行；
- B. 线性，可翻转 (reversible): 盒子排成一行，但翻转视为相同的；

盒子顺序

盒子有五种顺序：

- A. 线性 (ordered): 盒子从左到右排成一行；
- B. 线性，可翻转 (reversible): 盒子排成一行，但翻转视为相同的；
- C. 循环 (necklace): 盒子排成一圈。

盒子顺序

盒子有五种顺序：

- A. 线性 (ordered): 盒子从左到右排成一行；
- B. 线性，可翻转 (reversible): 盒子排成一行，但翻转视为相同的；
- C. 循环 (necklace): 盒子排成一圈。
- D. 循环，可翻转 (bracelet)，盒子排成一圈，翻转视为相同；

盒子顺序

盒子有五种顺序：

- A. 线性 (ordered): 盒子从左到右排成一行；
- B. 线性，可翻转 (reversible): 盒子排成一行，但翻转视为相同的；
- C. 循环 (necklace): 盒子排成一圈。
- D. 循环，可翻转 (bracelet)，盒子排成一圈，翻转视为相同；
- E. 无序 (unordered): 盒子无序，即任意重排都视为相同。

区分规则

盒子的区分规则 (distinctness rule，不知道怎么翻译了)，分为四种：

区分规则

盒子的区分规则 (distinctness rule，不知道怎么翻译了)，分为四种：

- F. 大小 (size): 任意两个盒子都能根据大小（指球的个数，下同）来区分，即大小两两不同；

区分规则

盒子的区分规则 (distinctness rule，不知道怎么翻译了)，分为四种：

- F. 大小 (size): 任意两个盒子都能根据大小（指球的个数，下同）来区分，即大小两两不同；
- G. 元素 (element, 不知道怎么翻译): 任意两个盒子都能由大小和颜色区分，即不存在两个盒子大小和颜色都相同。

区分规则

盒子的区分规则 (distinctness rule，不知道怎么翻译了)，分为四种：

- F. 大小 (size): 任意两个盒子都能根据大小（指球的个数，下同）来区分，即大小两两不同；
- G. 元素 (element，不知道怎么翻译): 任意两个盒子都能由大小和颜色区分，即不存在两个盒子大小和颜色都相同。
- H. Identity (连个凑活的翻译都找不到了): 任意两个盒子都能根据大小、颜色和位置区分（具体见下）；

区分规则

盒子的区分规则 (distinctness rule，不知道怎么翻译了)，分为四种：

- F. 大小 (size): 任意两个盒子都能根据大小（指球的个数，下同）来区分，即大小两两不同；
- G. 元素 (element, 不知道怎么翻译): 任意两个盒子都能由大小和颜色区分，即不存在两个盒子大小和颜色都相同。
- H. Identity (连个凑活的翻译都找不到了): 任意两个盒子都能根据大小、颜色和位置区分（具体见下）；
- I. 无限制 (indistinct): 没有这一类限制。

区分规则

盒子的区分规则 (distinctness rule，不知道怎么翻译了)，分为四种：

- F. 大小 (size): 任意两个盒子都能根据大小（指球的个数，下同）来区分，即大小两两不同；
- G. 元素 (element, 不知道怎么翻译): 任意两个盒子都能由大小和颜色区分，即不存在两个盒子大小和颜色都相同。
- H. Identity (连个凑活的翻译都找不到了): 任意两个盒子都能根据大小、颜色和位置区分（具体见下）；
- I. 无限制 (indistinct): 没有这一类限制。

区分规则

盒子的区分规则 (distinctness rule，不知道怎么翻译了)，分为四种：

- F. 大小 (size): 任意两个盒子都能根据大小（指球的个数，下同）来区分，即大小两两不同；
- G. 元素 (element，不知道怎么翻译): 任意两个盒子都能由大小和颜色区分，即不存在两个盒子大小和颜色都相同。
- H. Identity (连个凑活的翻译都找不到了): 任意两个盒子都能根据大小、颜色和位置区分（具体见下）；
- I. 无限制 (indistinct): 没有这一类限制。

规则 H 的含义是，不存在两个盒子的地位是完全等同的，或者说重排之后的序列不能和原序列相同。比如如果盒子是线性、可翻转的 (B)，那么 H 就是说翻转之后的序列不能和原来相同；如果盒子是循环的 (C)，那 H 就是说循环移位之后不能与原序列相同；如果盒子是循环、可翻转的 (D)，那 H 就是翻转和循环移位之后都不能和原来相同。

另外，$AH \Leftrightarrow AI$，因为 A (线性) 不存在重排；$EH \Leftrightarrow EG$，因为 E 可以任意重排。

球的标号

这个就很简单，一共有两种规则：

- J. 有标号 (labeled)：球有标号；

球的标号

这个就很简单，一共有两种规则：

- J. 有标号 (labeled)：球有标号；
- K. 无标号 (unlabeled)：球没有标号。

球的标号

这个就很简单，一共有两种规则：

- J. 有标号 (labeled)：球有标号；
- K. 无标号 (unlabeled)：球没有标号。

球的标号

这个就很简单，一共有两种规则：

- J. 有标号 (labeled): 球有标号；
- K. 无标号 (unlabeled): 球没有标号。

这三种规则各取一个，就可以拼出一个问题，比如 BGJ 就是 reversible, element, labeled，即盒子排成一排，可翻转、任意两个盒子都要不同，球有标号。

每个问题又输入给定的序列 $\{a_n\}$ 输出另一个序列 $\{b_n\}$，我们把它看成一个 $\{a_n\} \to \{b_n\}$ 的变换。例如，上述的就是 BGJ 变换。

常见的例子

ABCDE; FGHI; JK，一共可以拼出 40 种变换。去掉 AH* 和 EH*（分别等价于 AI* 和 EG*），还有 36 种。

36 种变换中有一些是很难计算的，但也有一些比较容易，而且有一些广为人知的变换可以归结到这一类变换上。

常见的例子

ABCDE; FGHI; JK，一共可以拼出 40 种变换。去掉 AH* 和 EH*（分别等价于 AI* 和 EG*），还有 36 种。

36 种变换中有一些是很难计算的，但也有一些比较容易，而且有一些广为人知的变换可以归结到这一类变换上。

以下，我们用 $A(x), B(x)$ 指代 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的 OGF；$\hat{A}(x), \hat{B}(x)$ 指代其 EGF。

1. AIK 变换，即盒子有序，球无标号，没有额外限制。那么容易得到 $A(x) = \sum_i B^i(x) = \frac{1}{1-B(x)}$。这个变换有时被称为 *INVERT*。

常见的例子

ABCDE; FGHI; JK，一共可以拼出 40 种变换。去掉 AH* 和 EH*（分别等价于 AI* 和 EG*），还有 36 种。

36 种变换中有一些是很难计算的，但也有一些比较容易，而且有一些广为人知的变换可以归结到这一类变换上。

以下，我们用 $A(x), B(x)$ 指代 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的 OGF；$\hat{A}(x), \hat{B}(x)$ 指代其 EGF。

1. AIK 变换，即盒子有序，球无标号，没有额外限制。那么容易得到 $A(x) = \sum_i B^i(x) = \frac{1}{1-B(x)}$。这个变换有时被称为 *INVERT*。
2. EIJ 变换，即盒子无序，球有标号，没有额外限制。也可以得到 $\hat{A}(x) = \exp \hat{B}(x)$，因此也被称为 *EXP* 变换。

不是很常见的例子

EGK 变换，即盒子无序，球无标号，相同大小颜色的盒子至多存在一个。

不是很常见的例子

EGK 变换，即盒子无序，球无标号，相同大小颜色的盒子至多存在一个。

不难发现这其实就是对盒子做一个 01 背包，即每种大小颜色的盒子是否要选。所以可以得到

$$A(x)=\prod_{box}(1+x^{|box|})=\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)^{b_i}$$

不是很常见的例子

EGK 变换，即盒子无序，球无标号，相同大小颜色的盒子至多存在一个。

不难发现这其实就是对盒子做一个 01 背包，即每种大小颜色的盒子是否要选。所以可以得到

$$A(x)=\prod_{box}(1+x^{|box|})=\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{i})^{b_i}$$

至于这个东西怎么用 $B(x)$ 表示...

不是很常见的例子

$$A(x)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)^{b_i}$$

$$\ln A(x)=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}x^{ij}}{j}$$

$$\ln A(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j}\sum_{i=1}^{\infty}b_ix^{ij}$$

$$A(x)=\exp\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^jB(x^j)}{j}$$

嗯... 总之你开心就好。这个变换似乎被叫做 WEIGH。我也不知道为什么。

另一个例子

EIK，即盒子无序，球无标号，没有额外限制。
顺着刚才的那个思路可以发现这其实就是个完全背包...
于是就是

$$A(x)=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^i)^{b_i}}$$

或者等价的，

$$A(x)=\exp\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B(x^j)}{j}$$

这个变换被叫做 EULER。~~可能是欧拉发明的?~~

无标号有根树

... 看标题应该就能知道题目了。给定 n，求 n 个点的无标号有根树计数。模数是一个你喜欢的不小于 10^8 的整数。

提示：不难做到 $O(n^2)$，实际上 $O(n\log^2 n)$ 也不是很难。

解法

不难发现，无标号有根树变成无标号有根森林的变换就相当于盒子无序，球无标号，无限制的变换。

而无标号有根森林加一个根结点就变成有根树了！

于是这个答案序列就是它的 EIK 变换再向右移一位。所以

$$A(x) = x\exp\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A(x^j)}{j}$$

解法

不难发现，无标号有根树变成无标号有根森林的变换就相当于盒子无序，球无标号，无限制的变换。

而无标号有根森林加一个根结点就变成有根树了！

于是这个答案序列就是它的 EIK 变换再向右移一位。所以

$$A(x) = x \exp \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A(x^j)}{j}$$

大家大概都知道如果 $F = \exp G$ 那么 $f_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i g_i f_{n-i}$（因为 $F' = G' \exp G = G' F$）。

所以我觉得你们已经知道怎么 $O(n^2)$ 求了。

解法

不难发现，无标号有根树变成无标号有根森林的变换就相当于盒子无序，球无标号，无限制的变换。

而无标号有根森林加一个根结点就变成有根树了！

于是这个答案序列就是它的 EIK 变换再向右移一位。所以

$$A(x) = x \exp \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A(x^j)}{j}$$

大家大概都知道如果 $F = \exp G$ 那么 $f_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i g_i f_{n-i}$（因为 $F' = G' \exp G = G' F$）。

所以我觉得你们已经知道怎么 $O(n^2)$ 求了。

至于 $O(n \log^2 n)$... 我怀疑你们都会分治 FFT/NTT 求 exp。于是显然可以算出一部分 A 之后就直接把右边的式子更新掉，分治 FFT 就可以了（可能稍微有一点点点麻烦？不过代码确实不比一般的分治 FFT 长多少）。

如果有人有更好的解法的话请务必告知。

有标号仙人掌

给定 n，求 n 个点的有标号仙人掌计数。

这个我是打算 $O(n \log n)$ 的。大家可能已经从 Joker 的课件上学过了。

解法

为了方便，我们还是对有根仙人掌计数，最后除以 n（反正是有标号的）。

有根仙人掌去掉根之后还剩什么？每个连通块要么是单个有根仙人掌，要么是若干个有根仙人掌的根结点串起来，并且是不分左右顺序的。

单个仙人掌可以看成只有一个仙人掌组成的“仙人掌串”。

解法

为了方便，我们还是对有根仙人掌计数，最后除以 n（反正是有标号的）。

有根仙人掌去掉根之后还剩什么？每个连通块要么是单个有根仙人掌，要么是若干个有根仙人掌的根结点串起来，并且是不分左右顺序的。

单个仙人掌可以看成只有一个仙人掌组成的 “仙人掌串”。

怎么从仙人掌得到 “一串仙人掌”？相当于盒子排成一排但是可翻转。于是这个东西就是仙人掌的 BIJ 变换。

那怎么再从 “一串仙人掌” 得到 “很多串仙人掌”？这就类似用树得到森林，做一个 EIJ 变换，即 EXP 变换即可。

然后再乘 x（加一个根），就是仙人掌了。

解法

来推式子。设答案的 EGF 是 $\hat{A}(x)$，则 BIJ 变换后就是

$$\hat{A}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\hat{A}^i(x) = \frac{2\hat{A}(x) - \hat{A}^2(x)}{2 - 2\hat{A}(x)}$$

再 $\exp$ 一下，乘个 x，就可以了，所以

$$\hat{A}(x) = x\exp\left(\frac{2\hat{A}(x) - \hat{A}^2(x)}{2 - 2\hat{A}(x)}\right)$$

牛顿迭代就可以了。

无标号有根仙人掌

至少在现在我做课件的时候感觉到这你们已经都掉线了。

~~放心，我没打算让你们重连。~~

给定 n，求 n 个点的无标号有根仙人掌计数。有根仙人掌是固定了一个结点作为根结点的仙人掌。

解法

类似无标号就可以做，只不过所有 J 都要改成 K。

设 $A(x)$ 为答案的 OGF，那么 BIK 变换可以这么做：先求出序列的方案数，再加上回文序列的方案数，再除以 2。

$$B(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{A(x)}{1-A(x)} + A(x)\frac{1}{1-A(x^2)} + \frac{A(x^2)}{1-A(x^2)}\right)$$

这是因为回文序列就相当于所有结点都双倍消耗，于是就是 $A(x^2)$。

解法

类似无标号就可以做，只不过所有 J 都要改成 K。

设 $A(x)$ 为答案的 OGF，那么 BIK 变换可以这么做：先求出序列的方案数，再加上回文序列的方案数，再除以 2。

$$B(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{A(x)}{1-A(x)}+A(x)\frac{1}{1-A(x^2)}+\frac{A(x^2)}{1-A(x^2)}\right)$$

这是因为回文序列就相当于所有结点都双倍消耗，于是就是 $A(x^2)$。

然后 $A(x)$ 就是 $B(x)$ 的 EULER 变换（EIK），所以

$$A(x)=x\exp\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B(x^j)}{j}$$

分治 FFT 就好了。

有标号仙人图计数

我们把每条边都至多在两个简单环上的简单连通无向图叫做仙人图。

求 n 个点的有标号仙人图计数。仙人图的名字取自 BZOJ 一道叫做动态仙人图的题目。

无标号有根仙人图计数

求 n 个点的无标号有根仙人图计数。

这 ** 能做?

有标号情况

可以发现，无论是仙人掌还是仙人图，都是限制了任意点双连通分量的形态。

对于仙人掌，我们发现根所在的一个点双去掉根结点之后就是一个可翻转的链；于是我们把链上每个点换成一个仙人掌即可。

对于可翻转的链，长度大于 2 时需要把答案除以 2，因为翻转之后和原来相同。

如何把它通用化?

抽象

抛开仙人掌和仙人图，假设我们给定了一个点双连通图的集合 S（不带标号），并要求图中的每个点双都属于 S（或者说和 S 中的某个图同构），求满足条件的图的个数。以下把满足条件的图称为“合法图”。

抽象

抛开仙人掌和仙人图，假设我们给定了一个点双连通图的集合 S（不带标号），并要求图中的每个点双都属于 S（或者说和 S 中的某个图同构），求满足条件的图的个数。以下把满足条件的图称为“合法图”。

仍然考虑有根合法图，设其 EGF 为 $\hat{A}(x)$；先考虑根只在一个点双 $G \in S$（$\in$ 是同构意义下的）的情况。

如果去掉这个点双中的所有边，那么会剩下一个单独的根结点，以及 $|G|-1$ 个有根合法图。

抽象

抛开仙人掌和仙人图，假设我们给定了一个点双连通图的集合 S（不带标号），并要求图中的每个点双都属于 S（或者说和 S 中的某个图同构），求满足条件的图的个数。以下把满足条件的图称为“合法图”。

仍然考虑有根合法图，设其 EGF 为 $\hat{A}(x)$；先考虑根只在一个点双 $G \in S$（$\in$ 是同构意义下的）的情况。

如果去掉这个点双中的所有边，那么会剩下一个单独的根结点，以及 $|G|-1$ 个有根合法图。

先用 $n-1$ 个点建出 $|G|-1$ 个有根合法图，对应的 EGF 就是 $\hat{A}^{|G|-1}(x)/(|G|-1)!$。

然后考虑怎么把这些合法图的根和整个图的根串到一个点双 G 里。

抽象

抛开仙人掌和仙人图，假设我们给定了一个点双连通图的集合 S（不带标号），并要求图中的每个点双都属于 S（或者说和 S 中的某个图同构），求满足条件的图的个数。以下把满足条件的图称为“合法图”。

仍然考虑有根合法图，设其 EGF 为 $\hat{A}(x)$；先考虑根只在一个点双 $G \in S$（$\in$ 是同构意义下的）的情况。

如果去掉这个点双中的所有边，那么会剩下一个单独的根结点，以及 $|G|-1$ 个有根合法图。

先用 $n-1$ 个点建出 $|G|-1$ 个有根合法图，对应的 EGF 就是 $\hat{A}^{|G|-1}(x)/(|G|-1)!$。

然后考虑怎么把这些合法图的根和整个图的根串到一个点双 G 里。

我们显然会认为方案数就是 $|G|!$ 。但是可能这个图的结点进行某种重排构之后和原来相同，这样就会算重。

图自同构

令 $Aut(G)$ 表示 G 的自同构群。如果你不理解的话，$Aut(G)$ 包含若干个结点的排列 p，使得图中的点这样排列之后得到的图和原来完全相同。

那么由于每种方案都会算 $|Aut(G)|$ 次，实际上的方案数就是 $\frac{|G|!}{|Aut(G)|}$。于是对应的 EGF 就是

$$\frac{|G|!}{|Aut(G)|}\frac{\hat{A}^{|G|-1}(x)}{(|G|-1)!}=\frac{|G|\hat{A}^{|G|-1}(x)}{|Aut(G)|}$$

对 $G\in S$ 求和，

$$\sum_{G\in S}\frac{|G|\hat{A}^{|G|-1}(x)}{|Aut(G)|}$$

注意这个 EGF 再乘 x 才算上了根。现在先不算根。

ps: 如果不好算的话可以先算 $\frac{\hat{A}^{|G|}}{|Aut(G)|}$，然后对 $\hat{A}$ 求导。

完整求法

如果根在多个点双里，那么其实就是对点双（实际上是去掉根节点的点双）做一个 exp，也就是若干个“去根点双”无序组合出 $n-1$ 个点，再加一个根结点。于是

$$\hat{A}(x) = x\exp\sum_{G\in S}\frac{|G|\hat{A}^{|G|-1}(x)}{|Aut(G)|}$$

例子

对于仙人掌，每个点双可能是一条边（两个点），或一个环。

如果是一条边，那么 $|Aut(G)| = |G| = 2$，EGF 是 $\hat{A}(x)$；

如果是 k 个点的环，$|Aut(G)| = 2k = 2|G|$，因为可以旋转和翻转，从而 EGF 是 $\frac{1}{2}\hat{A}^{k-1}(x)$。

所以我们又得到了之前的式子。

有标号仙人图

对于仙人图，可以发现又多出来一种情况，即恰好有两个点度数为 3。~~(懒得画图了，现场再画吧)~~

通过考虑这两个点之间是否直接连边，xjb 推导一番之后可以发现

$$\hat{A}(x) = x\exp\left(\hat{A} + \frac{\hat{A}^2}{2(1-\hat{A})} + \frac{4\hat{A}^3 - 2\hat{A}^4}{4(1-\hat{A})^3} + \frac{5\hat{A}^4 - 2\hat{A}^5}{12(1-\hat{A})^4}\right)$$
$$= x\exp\frac{\hat{A}(12 - 42\hat{A} + 66\hat{A}^2 - 43\hat{A}^3 + 10\hat{A}^4)}{12(1-\hat{A})^4}$$

有标号仙人图

对于仙人图，可以发现又多出来一种情况，即恰好有两个点度数为 3。~~(懒得画图了，现场再画吧)~~

通过考虑这两个点之间是否直接连边，xjb 推导一番之后可以发现

$$\begin{aligned}\hat{A}(x) &= x\exp\left(\hat{A}+\frac{\hat{A}^2}{2(1-\hat{A})}+\frac{4\hat{A}^3-2\hat{A}^4}{4(1-\hat{A})^3}+\frac{5\hat{A}^4-2\hat{A}^5}{12(1-\hat{A})^4}\right)\\ &= x\exp\frac{\hat{A}(12-42\hat{A}+66\hat{A}^2-43\hat{A}^3+10\hat{A}^4)}{12(1-\hat{A})^4}\end{aligned}$$

可以牛顿迭代。如果换元 $G=\hat{A}/x$ 并把它写作 $\ln G-\cdots=0$ 的形式似乎会快一点，我本机开 O2 1s 跑 1e5。

单次牛顿迭代的式子是（注意，由于存在 $\hat{A}/x$，所以实际上相当于对 $\hat{A}/x$ 做牛顿迭代，递归时需要对 $\lceil(n+1)/2\rceil$ 求）：

$$\hat{A}\leftarrow\frac{6(\hat{A}-1)\hat{A}((1-\hat{A})^4\ln\frac{\hat{A}}{x}-\frac{\hat{A}(10\hat{A}^4-43\hat{A}^3+66\hat{A}^2-42\hat{A}+12)}{12})}{-5\hat{A}^6+31\hat{A}^5-83\hat{A}^4+117\hat{A}^3-84\hat{A}^2+36\hat{A}-6}$$

变换

之前从“合法有根图”到“合法有根图构成的去根点双”（不知道怎么称呼了，大家感性理解吧）的变换

$$\hat{B}(x) = \sum_{G \in S} \frac{|G|\hat{A}^{|G|-1}(x)}{|Aut(G)|}$$

我们可能可以把这个变换叫做 SIJ 变换，例如 S 包含所有环的时候就是 BIJ，S 包含所有完全图的时候就是 EIJ (EXP)。

ps: 实际上 S 不需要只包含点双连通图，只不过上面的应用中是这样而已。

ps2: 不过 AIJ 和 BIJ, EIJ 我不会搞。

变换

之前从“合法有根图”到“合法有根图构成的去根点双”（不知道怎么称呼了，大家感性理解吧）的变换

$$\hat{B}(x) = \sum_{G \in S} \frac{|G| \hat{A}^{|G|-1}(x)}{|Aut(G)|}$$

我们可能可以把这个变换叫做 $\mathcal{S}$IJ 变换，例如 S 包含所有环的时候就是 BIJ，S 包含所有完全图的时候就是 EIJ (EXP)。

ps: 实际上 S 不需要只包含点双连通图，只不过上面的应用中是这样而已。

ps2: 不过 AIJ 和 BIJ, EIJ 我不会搞。

类似的可以定义 $\mathcal{S}$FJ, $\mathcal{S}$GJ, $\mathcal{S}$HJ 变换，其中 H 表示只对那些自同构之后不同于原图（不考虑结点标号）的图计数。

这些东西用处大概不大，我就不讲了~~（实际上是太麻烦而且大概时间不够）~~。

感性偷税

- 仙人堆计数：定义仙人堆，是一个有根仙人掌。对于它的每个子仙人掌，子仙人掌的根都是子仙人掌里最大的，并且任意一个环都可以拆成两条链使得两条链都是单调的。

感性偷税

- 仙人堆计数：定义仙人堆，是一个有根仙人掌。对于它的每个子仙人掌，子仙人掌的根都是子仙人掌里最大的，并且任意一个环都可以拆成两条链使得两条链都是单调的。
- 解法：xjb 推出来 $F' = \exp((\exp(2F) + 2F - 1)/4)$。分治 FFT。

感性偷税

- 仙人堆计数：定义仙人堆，是一个有根仙人掌。对于它的每个子仙人掌，子仙人掌的根都是子仙人掌里最大的，并且任意一个环都可以拆成两条链使得两条链都是单调的。
- 解法：xjb 推出来 $F' = \exp((\exp(2F) + 2F - 1)/4)$。分治 FFT。
- k-仙人图计数：定义 k 仙人图，是每条边都至多在 k 个环上的简单连通图。

感性偷税

- 仙人堆计数：定义仙人堆，是一个有根仙人掌。对于它的每个子仙人掌，子仙人掌的根都是子仙人掌里最大的，并且任意一个环都可以拆成两条链使得两条链都是单调的。
- 解法：xjb 推出来 $F' = \exp((\exp(2F) + 2F - 1)/4)$。分治 FFT。
- k-仙人图计数：定义 k 仙人图，是每条边都至多在 k 个环上的简单连通图。
- 解法：似乎没有通用的解法，不过有通用的推式子方式。从较小的情况可能可以看出来 $F = x\exp\frac{P(F)}{(1-F)^c}$，其中 P 是一个多项式，c 是一个常数 (可能是 $2k$)。但是由于 $k = 3$ 麻烦死了所以我也没办法搞下去了。

无标号情况

我好像只会做有根的情况。如果有人会做无根情况请务必告知。
类似有标号情况，设 $A(x)$ 为 OGF。

与有标号的区别

可以套一套无标号的做法，即直接除以 $|Aut(G)|$。

但是这样是有问题的，因为有标号的每种方案一定会算 $|Aut(G)|$ 次，而无标号不一定（例如可左右翻转的时候，回文序列只会被计算一次）。

与有标号的区别

可以套一套无标号的做法，即直接除以 $|Aut(G)|$。

但是这样是有问题的，因为有标号的每种方案一定会算 $|Aut(G)|$ 次，而无标号不一定（例如可左右翻转的时候，回文序列只会被计算一次）。

这时候就需要用到写在段标题上的 Polya 定理了。

缩减版 Polya 定理

缩减版的 Polya 定理是这样的：设 $c(g)$ 表示置换 g 的循环数，则所有 m 染色方案在置换群 G 下不同构的个数（即等价类数，或轨道数）为

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m^{c(g)}$$

这里不证。

完整版 Polya 定理

完整版的 Polya 定理：设 $c_i(g)$ 表示置换 g 的大小为 i 的循环数，定义多元生成函数

$$Z_G(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{n} t_i^{c_i(g)}$$

之后为了方便，我们将 $\prod_{i=1}^{n} t_i^{c_i(g)}$ 写作 $t^{c(g)}$。
假设每种颜色都是带权的，权值为 i 的颜色有 f_i 种。令

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$$

则颜色权值和恰好为 n 的互不同构的染色方案数就是

$$[x^n] Z_G(F(x), F(x^2), F(x^3) \dots F(x^n))$$

举例

对于一个可翻转的长为 k 的序列，那么 G 包含两个置换（恒等置换和翻转），

$$Z_G = \begin{cases} t_1^k + t_1 t_2^t & k = 2t+1 \\ t_1^k + t_2^t & k = 2t \end{cases}$$

对 k 求个和，代入 $t_1 = A(x), t_2 = A(x^2)$，就可以再次得到无标号仙人掌那个东西（BIK）。

无标号有根合法图

同样给定一个点双连通图集合 S，同样问每个点双连通分量都属于这个集合的方案数。只不过这次是无标号有根合法图。

类比于有标号的情况，令 $A(x)$ 表示答案。

无标号有根合法图

同样给定一个点双连通图集合 S，同样问每个点双连通分量都属于这个集合的方案数。只不过这次是无标号有根合法图。

类比于有标号的情况，令 $A(x)$ 表示答案。

先考虑根只在一个点双 $G \in S$ 里的方案。设图自同构群 $H = Aut(G)$。

枚举 G 中一个点 v 作为根，那么 “有根图” (G, v) 对应的自同构群就是 $H_v = \{g \in H \mid g(v) = v\}$，对应的函数 Z_{H_v} 就是

$$Z_{H_v} = \frac{1}{H_v} \sum_{g \in H_v} \frac{t^{c(g)}}{t_1}$$

除以 t_1 是为了把 v 自身的循环去掉。

无标号有根合法图

$$Z_{H_v} = \frac{1}{H_v} \sum_{g \in H_v} \frac{t^{c(g)}}{t_1}$$

但是这样直接对 v 求和会算重，因为如果 v_1 和 v_2 在同一个等价类里 $(\exists g \in H, g(v_1) = v_2)$，那么实际上 v_1 和 v_2 对应相同的方案。

令 Hv 表示 $\{gv|g \in H\}$（不要和 H_v 混起来），求和的时候在 Z_{H_v} 前面乘上 $1/|Hv|$ 就可以保证不算重（因为这样的话每个等价类的系数和都是 1）

式子

但是根据群作用有关定理，$|Hv||H_v|=|H|$，于是

$$\begin{aligned}&\sum_{v\in G}\frac{1}{|Hv|}Z_{H_v}(t_1,t_2\dots)\\=&\sum_{v\in G}\frac{1}{|Hv||H_v|}\sum_{g\in H_v}\frac{t^{c(g)}}{t_1}\\=&\frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}\frac{c_1(g)t^{c(g)}}{t_1}\\=&\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}t^{c(g)}\\=&\frac{\partial}{\partial t_1}Z_{Aut(G)}(t_1,t_2\dots)\end{aligned}$$

ps: 感性可以感觉这很有道理，不过我还是没办法找到一个严谨的组合意义（可能是我脑残了）。

最终式子

于是我们令 $B(x)$ 为合法图组成的去根点双的方案数，则有

$$B(x) = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\sum_{G\in S} Z_{Aut(G)}(t_1, t_2 \dots)\right)\Bigg|_{t_i=A(x^i)}$$

从 B 重新得到 A 只需要做一个 EIK 变换 (EULER) 即可。于是

$$A(x) = \exp\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B(x^j)}{j}$$

或

$$A(x) = \exp\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\sum_{G\in S} Z_{Aut(G)}(t_1, t_2 \dots)\right)\Bigg|_{t_i=A(x^{ij})}$$

例子

对于树，S 仅包含一个单独一条边的图，其自同构群包含恒等和对换，则 $Z_G = \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2)$，对 t_1 求偏导就是 t_1。于是

$$A(x) = \exp \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} A(x^j)$$

例子

对于树，S 仅包含一个单独一条边的图，其自同构群包含恒等和对换，则 $Z_G = \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2)$，对 t_1 求偏导就是 t_1。于是

$$A(x) = \exp \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} A(x^j)$$

对于仙人掌，S 还包含所有环。搞一搞也可以得到和之前相同的结论。

例子

对于树，S 仅包含一个单独一条边的图，其自同构群包含恒等和对换，则 $Z_G=\frac{1}{2}(t_1^2+t_2)$，对 t_1 求偏导就是 t_1。于是

$$A(x)=\exp\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}A(x^j)$$

对于仙人掌，S 还包含所有环。搞一搞也可以得到和之前相同的结论。

对于仙人图，或者说 2-仙人图，也可以按图同构数分类讨论。

无标号有根仙人图

$$= t_1 \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t_1^2}{1-t_1} + \frac{(1+t_1)t_2}{1-t_2}\right) \tag{2}$$

$$= \frac{t_1^4}{(1-t_1)(1-t_1^2)} \tag{3.1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t_1^3}{1-t_1^2} + \frac{t_1 t_2}{1-t_2}\right) \tag{3.2}$$

$$= \frac{t_1^4}{(1-t_1)^2(1-t_1^2)} \tag{4.1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t_1^3}{(1-t_1)(1-t_1^2)} + \frac{t_2(t_1+t_2)}{(1-t_2)^2}\right) \tag{4.2}$$

$$= \frac{t_1^7}{(1-t_1)(1-t_1^2)(1-t_1^3)} \tag{5.1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t_1^4}{(1-t_1)(1-t_1^2)} + \frac{t_1^2 t_2}{(1-t_1)(1-t_2)} - \frac{t_1^4}{1-t_1^3} - \frac{t_1^2 t_2}{1-t_1 t_2}\right) \tag{5.2}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{t_1^4}{1-t_1^3} + \frac{3t_1^2 t_2}{1-t_1 t_2} + \frac{2t_1 t_3}{1-t_3}\right) \tag{5.3}$$

$$= \frac{t_1^6}{(1-t_1)^2(1-t_1^2)^2} \tag{6.1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t_1^5}{(1-t_1)(1-t_1^2)^2} + \frac{t_2^2(t_1+t_1 t_2+t_1^2+t_2^2)}{(1-t_2)^2(1-t_2^2)}\right) \tag{6.2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t_1^5}{(1-t_1)(1-t_1^2)^2} + \frac{t_1^3 t_2}{(1-t_1)(1-t_1^2)(1-t_2)}\right) \tag{6.3}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t_1^4}{(1-t_1^2)^2} + \frac{t_2(t_1^2+t_2^2)}{(1-t_2)(1-t_2^2)} + \frac{t_1^2 t_2}{(1-t_1^2)(1-t_2)} + \frac{t_2^2}{(1-t_2)^2}\right) \tag{6.4}$$

Figure: 无标号有根仙人图的式子。分 12 类讨论求 Z。（可能方法比较麻烦，但是无论如何计算量大概不会少）。如果有哪位善良的人帮忙把这些式子加起来或者找到更简单的方法的话感激不尽。

变换

$$B(x) = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\sum_{G \in S} Z_{Aut(G)}(t_1, t_2 \dots)\right)\Bigg|_{t_i = A(x^i)}$$

可能我们可以把它叫做 $\mathcal{S}$IK 变换。
大概我们还可以定义 $\mathcal{S}$FK, $\mathcal{S}$GK, $\mathcal{S}$HK 变换。

~~这份课件，无疑是善良的笔者无私的馈赠。大量量产的毒瘤题，涵盖了一类图计数中几乎所有出现性质的组合。你可以利用这份课件，对自己的知识进行全面的检查。足量的数列变换、毒瘤的数据范围和多种多样的计数题目，能让你知识中的漏洞无处遁形。笔者相信，这份美妙的课件，可以给拼搏于 OI 的爆零之路上的你，提供一个有力的援助。~~

感谢大家的掉线倾听！