图论相关

罗进

长沙市一中

2018 年 3 月 31 日

Outline

Start

- 利用网络流算法来解决一些决策问题.
- 建立模型, 使得每一种流或割的方案代表原问题中的某种方案.
- 掌握一些经典的模型可以更快地想出网络流的题目.

带流量下界的最大流/费用流

- 建立新建立源点 SS, 以及汇点 TT.
- 对于边 $(u, v, cap, least)$, 连 $(u, TT, least)$, $(SS, v, least)$, $(u, v, cap - least)$.
- 最后连一条 (T, S, INF).
- 先跑一边 SS 到 TT 的最大流, 然后再跑一边 S 到 T 的最大流, 加起来就是答案.
- 如果有费用就把费用加到边上, 跑费用流即可.

Codeforces 704 D Captain America

- 平面上有 n 个点，第 i 个点的坐标为 (X_i, Y_i)，你需要把每个点染成红色或者蓝色，染成红色的花费为 r，染成蓝色的花费为 b。有 m 个限制条件，有两种类型，第一种类型为 $x = l_i$ 上的红点与蓝点个数差的绝对值不超过 d，第二种类型为 $y = l_i$ 上的红点与蓝点个数差的绝对值不超过 d。
- $n, m \leq 10^5$，坐标范围 $\leq 10^9$。

Solution

- 如果 $r < b$, 那么就是要最大化红点个数, 反之同理.

Solution

- 如果 $r < b$, 那么就是要最大化红点个数, 反之同理.
- 对于每一行和每一列都建一个点, 如果有个点的坐标为 (i, j), 那么连一条 $(i, j', 1)$ 的边, 源点与表示行的点连, 汇点与表示列的点连.
- 如果某行或某列有限制, 那么就相当于有一个上界和下界.
- 用 Dinic 跑带上下界的最大流.

消负环

- 使用流量平衡来消负环.
- 把点 x 拆成两个点 x, x'.
- 如果原图中有边 $(u, v, cap, cost)$, 那么就连 $(u, v', cap, cost)$.
- 对于每个 x 都连 $(S, x, INF, 0), (x', T, INF, 0), (x, x, INF, 0)$.

消负环

- 使用流量平衡来消负环.
- 把点 x 拆成两个点 x, x'.
- 如果原图中有边 $(u, v, cap, cost)$, 那么就连 $(u, v', cap, cost)$.
- 对于每个 x 都连 $(S, x, INF, 0), (x', T, INF, 0), (x, x, INF, 0)$.
- 一边相当于入度, 一边相当于出度, 保证了每个点出入度平衡, 就相当于选了一些环.

例题

- 给出一个有向图，问至少删掉多少条边使得这个图有欧拉回路.
- $n \leq 100$.

Solutio

- 给原图中的每个点建两个点，一个表示入度，一个表示出度.
- $(S, u, INF, 0), (u', T, INF, 0), (u, u', INF, 0)$.
- 如果图中有边 (u, v)，则连 $(u, v', 1, 1)$.
- 跑最大费用流，最终的方案肯定保证了每个点出度等于入度.

WF2011 Chips Challenge

- 在 $N \times N$ 的网格中放部件, 有些地方不能够放, 有些地方已经放好了, 要求第 x 行的部件数等于第 x 列, 且每行每列的部件数不能超过总数的 $\frac{A}{B}$, 求最多能放多少部件.
- $N \leq 40$.

Solution

- 如果没有后面的那个限制条件, 可以直接使用消负环的模型做.

Solution

- 如果没有后面的那个限制条件, 可以直接使用消负环的模型做.
- 设 i 表示第 i 行, i' 表示第 i 列.
- 如果 (i, j) 能放部件, 那么连一条 $(i, j', 1, 1)$, 对于每个 i, 连 $(S, i, N - num[i], 0)$, $(i', T, N - num[i'], 0)$, $(i, i', N, 0)$.

Solution

- 如果没有后面的那个限制条件, 可以直接使用消负环的模型做.
- 设 i 表示第 i 行, i' 表示第 i 列.
- 如果 (i, j) 能放部件, 那么连一条 $(i, j', 1, 1)$, 对于每个 i, 连 $(S, i, N - num[i], 0)$, $(i', T, N - num[i'], 0)$, $(i, i', N, 0)$.
- 对于后面那个限制, 可以通过枚举总数解决.

离散变量模型

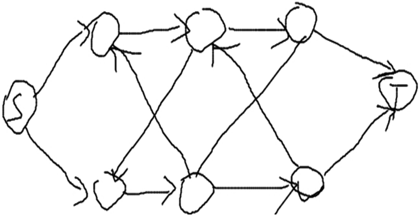
- 有一些变量，每个变量有若干取值 $0, 1, 2, \ldots, m_i$，取不同的值会获得不同的收益.
- 存在一些限制，某两个变量的差值有限制.
- 一般是对每个变量建一条链，割第 i 条边就代表选 i.

SRM590Hard FoxAndCity

- 有一个 N 个点的有向图，你可以加若干条边，最小化 $\sum_{i=1}(b_i - a_i)^2$，其中 b_i 为输入的值，a_i 为 1 到 i 的最短路.
- $N \leq 30$

Solution

- a_i 肯定不会大于原来的最短路，那么每个变量的取值为 $[1, d_i]$ 之间.
- 如果原图中有边 (i, j)，那么 $|a_i - a_j| \le 1$.
- 可以用离散变量模型解决.



Hall 定理

- 对于二分图 $G = (S \cup T, E)$, 设 T 中与 S' 中的点有边相连的点集为 $\Gamma(S')$, 它存在完美匹配当且仅当对于 $S' \subseteq S$, $|S'| \leq |\Gamma(S')|$.
- 拓展: 二分图的最大匹配数等于 $|S| - max(|S'| - |\Gamma(S')|)$.

Codeforces 720 A Closing ceremony

- 有一个 $n \times m$ 的网格，每个 $(x, y), (1 \le x \le n, 1 \le y \le m)$ 上有一个椅子.
- 有 k 个人在 $(0, 0)$，有 l 个人在 $(0, m+1)$，每个人有一个耐力值，能否给每个人都安排一个椅子，使得每个人从起始位置到椅子的曼哈顿距离不超过他的耐力值.
- $n \times m \le 10^4, k + l \le n \times m$.

Solution

- 设 $f(i,j)$ 为距离 $(0,0)$ 不超过 i 或距离 $(0,m+1)$ 不超过 j 的格子数量.
- 在 $\Gamma(S)$ 确定时, 肯定是要找元素最多的 S, 这里求出 $f(i,j)$ 之后肯定找在 $(0,0)$ 且体力值不超过 i, 在 $(0,m+1)$ 且体力值不超过 j 的人数.
- 以上要求的量都可以在 $O(nm)$ 内算出.

ARC076 F Exhausted?

- 有 N 个人, M 个位置, 第 i 个人想要坐再 $[1, L_i]$ 或 $[R_i, M]$ 之间, 求最少有多少人不能被满足. 不一定每个人都要安排位置.
- $N, M \leq 2 \times 10^5$.

Solution

- 设 X 为人的集合, $\Gamma(X)$ 肯定是 $[1,l] \cup [r,M]$, 也就是 (l,r) 不能被选.
- 我们要求最大的 $max(|X| - |\Gamma(X)|)$, 在确定了 $\Gamma(X)$ 之后肯定要 $|X|$ 尽可能大.
- 所有 $L_i \leq l$ 或 $R_i \geq r$ 的都要选上.
- 枚举 r 然后用线段数维护每个 l 的贡献.

题目

- 给出一张无向连通图，求有多少种最多删两条边的方案使得图不连通.
- $|V| \leq 10^5, |E| \leq 10^5$.

Solution

- 找出给定图的一个 dfs 树，显然不可能删两条非树边.

Solution

- 找出给定图的一个 dfs 树，显然不可能删两条非树边.
- 分两种情况，只删树边，以及删一条树边删一条非树边.

Solution

- 找出给定图的一个 dfs 树，显然不可能删两条非树边.
- 分两种情况，只删树边，以及删一条树边删一条非树边.
- 如果删一条树边和一条非树边，那么要求这条树边只被这条非树边覆盖，这个很好统计.

Solution

- 找出给定图的一个 dfs 树，显然不可能删两条非树边.
- 分两种情况，只删树边，以及删一条树边删一条非树边.
- 如果删一条树边和一条非树边，那么要求这条树边只被这条非树边覆盖，这个很好统计.
- 对于另一种情况，需要对于这两条树边，覆盖这两条树边的非树边集合相同.
- 可以对每条非树边赋一个随机值，把这条非树边所覆盖的树边都异或上这个值.
- 如果两条树边权值相等，那么可以近似认为集合相同，如果随机值得位数为 k，那么出错的概率为 $\frac{1}{2^k}$.

DZY Loves Chinese II

- 给出一张图，有 Q 个询问，每次个询问给出 K 条边，问在删掉这 K 条边后图是否连通，询问之间独立，强制在线。
- $|V| \leq 10^5, |E| \leq 5 \times 10^5, Q \leq 5 \times 10^4, K \leq 15.$

Solution

- 给每条非树边求一遍边权，一个点的点权为以它为端点向上的非树边边权的异或.
- 每条树边的边权等于较深节点的点权.
- 如果不连通，那么肯定有一个点向上的边全部都被删掉了. 也就是存在某个边的非空子集的异或和为 0，用线性基判断.

2-SAT 问题

- 有 n 个布尔变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- 有很多个子句，每个子句形如 $(x_i \vee x_j), (x_i \vee \neg x_j), (\neg x_i \vee \neg x_j)$.
- 你需要求出一组 x_i 使得所有子句逻辑与的值为真.

2-SAT 问题

- 对每个变量 x_i 建立两个点 $x_i, \neg x_i$, 分别代表 x_i 的取值为真和假.
- 如果某个子句为 $(x_i \vee x_j)$, 那么就连 $\neg x_i$ 到 x_j 和 $\neg x_j$ 到 x_i 的有向边.

2-SAT 问题

- 对每个变量 x_i 建立两个点 $x_i, \neg x_i$, 分别代表 x_i 的取值为真和假.
- 如果某个子句为 $(x_i \vee x_j)$, 那么就连 $\neg x_i$ 到 x_j 和 $\neg x_j$ 到 x_i 的有向边.
- 如果有一条 u 到 v 的边, 那么就意味这如果 u 成立, 那么 v 必须成立, 显然 x_i 和 $\neg x_i$ 不能同时成立.
- 先设 x_i 为真, 然后就能够确定一些其他的变量的取值, 如果发生矛盾, 则令 x_i 为假, 再试一次.
- 复杂度 $O(|V| \times |E|)$.

用对称性解 2-SAT

Theorem

如果有边 $(\neg x_i, x_j)$，就有边 $(\neg x_j, x_i)$.

- 对于图求强连通分量，如果 x_i 与 $\neg x_i$ 在同一个强连通分两中，那么显然无解.
- 对于同一个强连通分量中的点，要么都成立，要么都不成立.
- 由对称性可知 u 所在强连通分量内的点是 $\neg u$ 所在强连通分量内的点取反，u 能够到达的点是能够到达的点是能够到达 $\neg u$ 的点取反.
- 可以直接按照拓扑序来选取.
- 复杂度 $O(|V| + |E|)$

NOI2017 游戏

- 有一个长为 n 的序列 a_i, a_i 为 $\{0,1,2,3\}$ 中的数, 你需要找到一个长为 n 序列 b_i, b_i 为 $\{1,2,3\}$ 中的数, 且 $b_i \neq a_i$, 还有 m 个额外的条件, (i,h_i,j,h_j), 如果 $b_i = h_i$, 那么 $b_j = h_j$.
- $n \leq 50000, m \leq 100000$, 0 的个数不超过 8.

Solution

- 枚举 0 是什么，然后每个位置就只有两种取值，分别设为 x_i 和 $\neg x_i$.
- 直接用 $2-SAT$ 模型做，复杂度 $O(3^8 \times (n+m))$.

Solution

- 枚举 0 是什么，然后每个位置就只有两种取值，分别设为 x_i 和 $\neg x_i$.
- 直接用 $2-SAT$ 模型做，复杂度 $O(3^8 \times (n+m))$.
- 发现 0 只要枚举是 1 还是 2 就行了，复杂度就成了 $O(2^8 \times (n+m))$

Topcoder HiddenRabbits

- 有一棵 N 个点的树，有 M 只兔子，每只兔子要选择一个结点，两只兔子可以选择同一个结点.
- 有 K 个约束条件，每个条件有参数 r, a, b, x，意思是兔子 a, b 选的点在以 r 为根时的 lca 为 x.
- 求出一组合法的方案.
- $N, M, K \leq 250$.

- 先令这棵树以 0 为根, 对于每个兔子 i 都建立 N 个命题, $S(i,j)$ 表示兔子 i 是否在 j 的子树中.
- 首先 $S(i,0)$ 必须为真, 如果 $S(i,son[j])$ 为真, 那么 $S(i,j)$ 为真, 如果 $S(i,j)$ 为假, 那么 $S(i,son[j])$ 为假.
- 如果两个节点互为兄弟, 那么他们不能同时为真, 这个可以用前缀和的思想优化.

- 先令这棵树以 0 为根，对于每个兔子 i 都建立 N 个命题，$S(i,j)$ 表示兔子 i 是否在 j 的子树中.
- 首先 $S(i,0)$ 必须为真，如果 $S(i,son[j])$ 为真，那么 $S(i,j)$ 为真，如果 $S(i,j)$ 为假，那么 $S(i,son[j])$ 为假.
- 如果两个节点互为兄弟，那么他们不能同时为真，这个可以用前缀和的思想优化.
- 对于 K 个约束条件，分 r 是否在 x 的子树内两种情况讨论.
- 最终求解时，对于每个 i 找到 $S(i,j)$ 为真且 j 的深度最深的点，兔子 i 就在 j 上.

最短路算法

- Dijkstra, $O((N+M)\log N + M)$, 边权不能为负数.
- Bellman-Ford, $O(N \times M)$.
- Floyd-Warshall, $O(N^3)$, 多源最短路.

最短路算法

- Dijkstra, $O((N+M)\log N + M)$, 边权不能为负数.
- Bellman-Ford, $O(N \times M)$.
- Floyd-Warshall, $O(N^3)$, 多源最短路.
- 与最短路相关的题目一般考的是模型的建立.

bzoj 4152 AMPPZ The Captain

- 给定平面上 n 个点，定义 (x_1, y_1) 到 (x_2, y_2) 的费用为 $\min(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$，求 1 号点走到 n 号点的最小费用.
- $n \le 2 \times 10^5, x_i, y_i \le 10^9$.

Solution

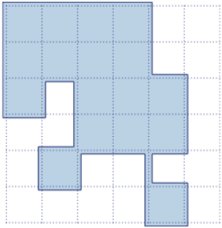
- 把所有点映射到 x 轴上去，相邻的点连边，然后在把所有点映射到 y 轴上去，相邻的点连边，跑 dijkstra.

Solution

- 把所有点映射到 x 轴上去，相邻的点连边，然后在把所有点映射到 y 轴上去，相邻的点连边，跑 dijkstra.
- 一个点走到另一个点要么是在 x 轴上走，要么是在 y 轴上走，肯定是走距离较小的.

CEOI2014 WALL

- 有一个 $N \times M$ 的网格，有些格子是特殊的，网格上的每条边有一个边权，你需要找到一条从格点 $(1,1)$ 出发的回路，使得这条回路包含了所有特殊的格子，求这条回路的最小权值，回路可以经过重复的点和边.
- $N, M \leq 400$, $0 \leq$ 边权 $\leq 10^9$.



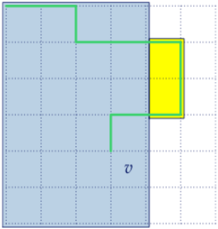
蓝色区域可以被围住.

Solution

- 对于每个特殊格子, 求出 $(1, 1)$ 到它左上角的一条最短路, 那么存在一组最优方案不会穿过这些路径.

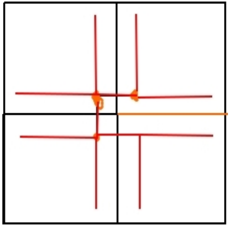
Solution

- 对于每个特殊格子，求出 $(1,1)$ 到它左上角的一条最短路，那么存在一组最优方案不会穿过这些路径.
- 如果穿过了这条路径而且又要包含这个格子，那么一定会穿过偶数次，那么由于穿过的是最短路，把穿过的那些段改成贴这最短路走不会变差.



Solution

- 现在就是有些边不能够被跨过，求一条最短的回路.
- 把每个格点拆成 4 个点，然后连边，用 dijkstra 跑最短路.



Codeforces Perishable Roads

- 有一个 N 个点的完全图，每条边有边权．这 N 个点中会有一个关键点，你需要给剩下的点指定一条出边，到了这个点之后只能走到它出边指向的点，必须满足所有点都能走到关键点．一个点会产生它走到关键点经过的最小边权的代价，方案的代价为所有点的代价之和．求出每个点作为关键点时最优方案的代价．
- $N \leq 2000.$

Solution

1. 最优方案肯定是一条链.

Solution

1. 最优方案肯定是一条链.
2. 图中边权最小的边肯定在这条链上.

Solution

1. 最优方案肯定是一条链.
2. 图中边权最小的边肯定在这条链上.
3. 把所有边权减去 MIN, 只需要考虑从 MIN 的端点出发的路径.

Solution

1. 最优方案肯定是一条链.
2. 图中边权最小的边肯定在这条链上.
3. 把所有边权减去 MIN, 只需要考虑从 MIN 的端点出发的路径.
4. 最有方案中这条路径除了最开始两条边的大小关系无法确定外, 其它的边权是递增的.

Solution

1. 最优方案肯定是一条链.
2. 图中边权最小的边肯定在这条链上.
3. 把所有边权减去 MIN, 只需要考虑从 MIN 的端点出发的路径.
4. 最有方案中这条路径除了最开始两条边的大小关系无法确定外, 其它的边权是递增的.
5. 递增的路径可以直接跑最短路解决.
6. 最开始两条边不递增的情况意味这每个点有个初始距离, 距离为它连出去的最小边权乘 2.

差分约束系统

- 有一些不等式限制 $x_i - x_j \le A_k$, 要求求出一组合法的 x.
- 利用最短路的三角不等式, $d_i - d_j \le w_{j \to i}$.
- 如果有不等式 $x_i - x_j \le A_k$, 那么连一条 j 到 i 权值为 A_k 的边.
- 跑最短路, 如果有负环则无解.

Codeforces 241 E

- 给出一个 N 个点 M 条边的 DAG, 每条边的长度为 1. 现在你需要将一些边的长度修改为 2, 使得 1 到 N 的所有路径长度都相等, 找出一个方案.
- $2 \leq N \leq 1000, 1 \leq M \leq 5000.$

Solution

- 只用考虑 1 能够到且能够到 n 的点，设 f_i 为 i 到 n 的路径长度.
- 如果有一条 i 到 j 的边，那么 $1 \leq f_i - f_j \leq 2$，直接用差分约束做.

Topcoder YamanoteLine

- 有一个地铁环线, 有 n 个站, 第 i 站到第 $(i+1) \mod n$ 站有一条边, 但是长度不知道, 只知道长度至少为 1. 给出 k 个条件, 第 s_i 站到第 e_i 站的距离至少或至多为 l_i. 求有多少环线总长有多少种可能, 无解或无穷解输出 -1.
- $n \leq 50$.

Solution

- 设 $f[i]$ 为 0 到 i 的路径长度，$f[n]$ 为总长.
- $f[i-1] \le f[i] - 1, f[0] = 0.$
- 对于 s_i 到 e_i 的距离至多为 l_i，有两种情况.

$$f[s_i] \le f[e_i] + l_i, \quad s_i < e_i$$

$$f[n] + f[e_i] - l_i \le f[s_i] \quad s_i > e_i$$

- 距离下限同理.

Solution

- 发现并不是简单的差分约束的形式，有一类不等式中有三个变量.
- 如果枚举 $f[n]$ 的值，可以判断 $f[n]$ 能否为这个值，如何判断?

Solution

- 发现并不是简单的差分约束的形式，有一类不等式中有三个变量.
- 如果枚举 $f[n]$ 的值，可以判断 $f[n]$ 能否为这个值，如何判断?
- 差分约束可以求每个变量最大值和和最小值，我们跑最短路的话，如果某个 $f[i] < 0$，那么肯定就不合法.

Solution

- 发现并不是简单的差分约束的形式，有一类不等式中有三个变量.
- 如果枚举 $f[n]$ 的值，可以判断 $f[n]$ 能否为这个值，如何判断?
- 差分约束可以求每个变量最大值和和最小值，我们跑最短路的话，如果某个 $f[i] < 0$，那么肯定就不合法.
- 猜想 $f[n]$ 可行的值为一段区间，可以考虑二分. 怎么判断 $f[n]$ 是大了还是小了?.

Solution

- 发现并不是简单的差分约束的形式，有一类不等式中有三个变量.
- 如果枚举 $f[n]$ 的值，可以判断 $f[n]$ 能否为这个值，如何判断?
- 差分约束可以求每个变量最大值和和最小值，我们跑最短路的话，如果某个 $f[i] < 0$，那么肯定就不合法.
- 猜想 $f[n]$ 可行的值为一段区间，可以考虑二分. 怎么判断 $f[n]$ 是大了还是小了?.
- 如果某个 $f[i] < 0$ 且 0 到它的路径中 $f[n]$ 的系数为负则说明 $f[n]$ 大了，否则说明 $f[n]$ 小了. 如果有负环，同样求出系数即可.