图题

demerzel

2018 年 9 月 28 日

题目描述

一个 n 个点 m 条边的无向连通图从 1 号点开始 bfs，可能得到的 bfs 序有很多，取决于出边的访问顺序。现在给出一个 1 到 n 的排列，判断是否可能是一个 bfs 序。

$n, m \leq 2 * 10^5$

题解

- 比较暴力一点的做法是按照到 1 号点的距离分层，然后讨论一番。

题解

- 比较暴力一点的做法是按照到 1 号点的距离分层，然后讨论一番。
- 有一个更为巧妙的做法。

题解

- 比较暴力一点的做法是按照到 1 号点的距离分层，然后讨论一番。
- 有一个更为巧妙的做法。
- 对于每个节点，令其权值为在给定序列中的位置。

题解

- 比较暴力一点的做法是按照到 1 号点的距离分层，然后讨论一番。
- 有一个更为巧妙的做法。
- 对于每个节点，令其权值为在给定序列中的位置。
- 然后从 1 号点开始正常的 bfs，出边的访问顺序按照权值从小到大访问。

题解

- 比较暴力一点的做法是按照到 1 号点的距离分层，然后讨论一番。
- 有一个更为巧妙的做法。
- 对于每个节点，令其权值为在给定序列中的位置。
- 然后从 1 号点开始正常的 bfs，出边的访问顺序按照权值从小到大访问。
- 最后将得到的 bfs 序与给定序列比较，若完全一致则是合法的。

题目描述

一个 n 个点 m 条边的无向连通图中每个点都有一个权值，现在要求给每条边定一个权值，满足每个点的权值等于所有相连的边权之和，权值可负。

题解

- 如果图是一棵树，那么方案就是唯一的，直接判一下就可以了。

题解

- 如果图是一棵树，那么方案就是唯一的，直接判一下就可以了。
- 否则随便搞一棵生成树，先不管其他边，跑一遍。

题解

- 如果图是一棵树，那么方案就是唯一的，直接判一下就可以了。
- 否则随便搞一棵生成树，先不管其他边，跑一遍。
- 这时根节点可能还不满足条件。

题解

- 如果图是一棵树，那么方案就是唯一的，直接判一下就可以了。
- 否则随便搞一棵生成树，先不管其他边，跑一遍。
- 这时根节点可能还不满足条件。
- 这时考虑其他的边，一条非树边会形成一个环。

题解

- 如果图是一棵树，那么方案就是唯一的，直接判一下就可以了。
- 否则随便搞一棵生成树，先不管其他边，跑一遍。
- 这时根节点可能还不满足条件。
- 这时考虑其他的边，一条非树边会形成一个环。
- 如果是一个偶环，那么无论这条非树边怎么变，都不会对根节点产生影响。

题解

- 如果图是一棵树，那么方案就是唯一的，直接判一下就可以了。
- 否则随便搞一棵生成树，先不管其他边，跑一遍。
- 这时根节点可能还不满足条件。
- 这时考虑其他的边，一条非树边会形成一个环。
- 如果是一个偶环，那么无论这条非树边怎么变，都不会对根节点产生影响。
- 否则是奇环，那么如果给这条非树边增加或减少权值，根节点会发生 2 的权值变化。

题解

- 如果图是一棵树，那么方案就是唯一的，直接判一下就可以了。
- 否则随便搞一棵生成树，先不管其他边，跑一遍。
- 这时根节点可能还不满足条件。
- 这时考虑其他的边，一条非树边会形成一个环。
- 如果是一个偶环，那么无论这条非树边怎么变，都不会对根节点产生影响。
- 否则是奇环，那么如果给这条非树边增加或减少权值，根节点会发生 2 的权值变化。
- 那么就可以了。

题目描述

给定一个 n 个点 m 条边的有向带权图，对于一条边权为 w 的边，经过时将获得 w 的收益，之后 $w = \lfloor \frac{w}{2} \rfloor$。

请问从 1 号点出发随便走最多能获得多少收益。

题解

- 一个强连通分量内部所有的边肯定可以被走到底。

题解

- 一个强连通分量内部所有的边肯定可以被走到底。
- 所以缩点后 dp 就行了。

题解

- 一个强连通分量内部所有的边肯定可以被走到底。
- 所以缩点后 dp 就行了。
- ~~这题是不是凑数的啊~~

题目描述

有 m 个人，n 张椅子，第 i 个人只能坐在第 u_i 或第 v_i 张椅子上。求有多少种方案满足没有人坐在同一张椅子上。

题解

- 把椅子作为点，人作为边，变成一个图。

题解

- 把椅子作为点，人作为边，变成一个图。
- 每个连通块可以分开考虑。

题解

- 把椅子作为点，人作为边，变成一个图。
- 每个连通块可以分开考虑。
- 假设某个连通块中有 v 个点，e 条边，由于连通，有 $v-1 \le e$，并且若 $e > v$ 则无解，所以 e 只有 $v-1$ 和 v 两种取值。

题解

- 把椅子作为点，人作为边，变成一个图。
- 每个连通块可以分开考虑。
- 假设某个连通块中有 v 个点，e 条边，由于连通，有 $v-1 \leq e$，并且若 $e > v$ 则无解，所以 e 只有 $v-1$ 和 v 两种取值。
- 假如 $e = v-1$，那么该连通块有 v 种方案：考虑枚举每个点不放的情况，其他的点都可以唯一确定。

题解

- 把椅子作为点，人作为边，变成一个图。
- 每个连通块可以分开考虑。
- 假设某个连通块中有 v 个点，e 条边，由于连通，有 $v-1 \le e$，并且若 $e > v$ 则无解，所以 e 只有 $v-1$ 和 v 两种取值。
- 假如 $e = v-1$，那么该连通块有 v 种方案：考虑枚举每个点不放的情况，其他的点都可以唯一确定。
- 假如 $e = v$ 且环长 > 1，那么该连通块有 2 种方案：考虑环上的一条边，这条边的放法确定后其他的都可以唯一确定。

题目描述

给定一个 v 个点 e 条边的带权无向图，在图上有 n 个人，第 i 个人位于点 x_i，一个人通过一条边需要花费这条边的边权的时间。现在每个人可以自由地走。求最短多少时间后满足结束后有人的节点数 $\geq m$

$n, v \leq 500$

题解

- 先 floyd 预处理出两两之间的距离。

题解

- 先 floyd 预处理出两两之间的距离。
- 然后可以二分答案。二分答案之后，每个人向能走到的点连边。

题解

- 先 floyd 预处理出两两之间的距离。
- 然后可以二分答案。二分答案之后，每个人向能走到的点连边。
- 可以发现合法的条件就是最大匹配数 $\geq m$。

题解

- 先 floyd 预处理出两两之间的距离。
- 然后可以二分答案。二分答案之后，每个人向能走到的点连边。
- 可以发现合法的条件就是最大匹配数 $\geq m$。
- 跑二分图匹配就可以了。

题目描述

一个竞赛图的度数集合是由该竞赛图中每个点的出度所构成的集合。

现给定一个 m 个元素的集合，第 i 个元素是 a_i。判断其是否是一个竞赛图的度数集合，如果是，找到点数最小的满足条件的竞赛图。

$m, a_i \leq 30$，a_i 互不相同。

题解

- 首先给出结论：假如给出每个点的出度，那么这些点能形成一个竞赛图当且仅当排序后的序列 $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ 满足对于所有 $k < n$ 有 $\sum_{i=1}^{k} d_i \geq \binom{k}{2}$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i = \binom{n}{2}$。

题解

- 首先给出结论：假如给出每个点的出度，那么这些点能形成一个竞赛图当且仅当排序后的序列 $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ 满足对于所有 $k < n$ 有 $\sum_{i=1}^{k} d_i \geq \binom{k}{2}$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i = \binom{n}{2}$。
- 证明很简单，对于竞赛图的任意点集 S，都必须满足 $\sum_{i \in S} d_i \geq \binom{|S|}{2}$，所以就是这样的。

题解

- 首先给出结论：假如给出每个点的出度，那么这些点能形成一个竞赛图当且仅当排序后的序列 $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ 满足对于所有 $k < n$ 有 $\sum_{i=1}^{k} d_i \ge \binom{k}{2}$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i = \binom{n}{2}$。
- 证明很简单，对于竞赛图的任意点集 S，都必须满足 $\sum_{i \in S} d_i \ge \binom{|S|}{2}$，所以就是这样的。
- 由于 $\binom{n}{2} = \sum_{i=1}^{n} \le n * max(a_i)$，所以 n 的大小是 $O(max(a_i))$ 级别的。

题解

- 首先给出结论：假如给出每个点的出度，那么这些点能形成一个竞赛图当且仅当排序后的序列 $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ 满足对于所有 $k < n$ 有 $\sum_{i=1}^{k} d_i \geq \binom{k}{2}$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i = \binom{n}{2}$。
- 证明很简单，对于竞赛图的任意点集 S，都必须满足 $\sum_{i \in S} d_i \geq \binom{|S|}{2}$，所以就是这样的。
- 由于 $\binom{n}{2} = \sum_{i=1}^{n} \leq n * max(a_i)$，所以 n 的大小是 $O(max(a_i))$ 级别的。
- 那么就可以 dp 了，先将给定集合中的元素从小到大排序。

题解

- 首先给出结论：假如给出每个点的出度，那么这些点能形成一个竞赛图当且仅当排序后的序列 $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ 满足对于所有 $k < n$ 有 $\sum_{i=1}^{k} d_i \geq \binom{k}{2}$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i = \binom{n}{2}$。
- 证明很简单，对于竞赛图的任意点集 S，都必须满足 $\sum_{i \in S} d_i \geq \binom{|S|}{2}$，所以就是这样的。
- 由于 $\binom{n}{2} = \sum_{i=1}^{n} \leq n * max(a_i)$，所以 n 的大小是 $O(max(a_i))$ 级别的。
- 那么就可以 dp 了，先将给定集合中的元素从小到大排序。
- 设 $f[i][j][sum]$ 表示考虑完前 i 个元素，当前图中已经有 j 个点了，度数之和为 sum，转移时枚举下一个元素出现了几次就行了。

题目描述

给定一个 n 个点 m 条边的带权无向连通图。从 1 号点出发，初始花费是 0，每经过一条边花费就会异或上这条边的权值，当你到达 n 号点时可以选择停下来。求停下来时的最小花费。

$n, m \leq 10^5$

题解

- 假设 s 和 t 是两条 1 到 n 的路径，C 是图中所有环的集合。那么 t 的权值一定可以通过 s 的权值异或上 C 中一些环的权值来得到。

题解

- 假设 s 和 t 是两条 1 到 n 的路径，C 是图中所有环的集合。那么 t 的权值一定可以通过 s 的权值异或上 C 中一些环的权值来得到。
- 那么先随便搞一棵生成树，然后对于每条非树边，都形成了一个环，这些环构成的集合是 D。

题解

- 假设 s 和 t 是两条 1 到 n 的路径，C 是图中所有环的集合。那么 t 的权值一定可以通过 s 的权值异或上 C 中一些环的权值来得到。
- 那么先随便搞一棵生成树，然后对于每条非树边，都形成了一个环，这些环构成的集合是 D。
- 那么 C 中的每个环的权值都可以通过 D 中的一些环的权值异或和来得到。

题解

- 假设 s 和 t 是两条 1 到 n 的路径，C 是图中所有环的集合。那么 t 的权值一定可以通过 s 的权值异或上 C 中一些环的权值来得到。
- 那么先随便搞一棵生成树，然后对于每条非树边，都形成了一个环，这些环构成的集合是 D。
- 那么 C 中的每个环的权值都可以通过 D 中的一些环的权值异或和来得到。
- 于是只要求出 D 的线性基，然后随便搞一条路径在线性基上跑一下。

题目描述

有一张图，初始时只有 S, T 两个点和一条边 (S, T)。接下来进行了 i 次操作，每次先选定一条存在的边 (u, v) 然后新增一个点 i 和两条边 (u, i) 和 (i, v)。

现在知道所有操作结束后 S, T 之间的最小割是 m，求有多少不同构的图满足这个条件。

此处的同构是指，能通过交换 1 到 n 之间节点的标号，但不能交换 S 和 T 的标号，可以使得两张图变得完全一样。

$n, m \le 50$

题解

- 这题跟图没什么关系。首先设 $f(i,j)$ 表示初始为 $s-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。$g(i,j)$ 表示初始为 $s-o-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。

题解

- 这题跟图没什么关系。首先设 $f(i,j)$ 表示初始为 $s-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。$g(i,j)$ 表示初始为 $s-o-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。
- 可以发现 $g(i,j) = 2\sum_{a=0}^{i}\sum_{b>j} f(a,j)f(i-a,b) + \sum_{a=0}^{i} f(a,j)^2$。

题解

- 这题跟图没什么关系。首先设 $f(i,j)$ 表示初始为 $s-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。$g(i,j)$ 表示初始为 $s-o-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。
- 可以发现 $g(i,j) = 2\sum_{a=0}^{i}\sum_{b>j} f(a,j)f(i-a,b) + \sum_{a=0}^{i} f(a,j)^2$。
- 而 $f(i,j)$ 则和 g 的组合有关。

题解

- 这题跟图没什么关系。首先设 $f(i,j)$ 表示初始为 $s-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。$g(i,j)$ 表示初始为 $s-o-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。
- 可以发现 $g(i,j)=2\sum_{a=0}^{i}\sum_{b>j}f(a,j)f(i-a,b)+\sum_{a=0}^{i}f(a,j)^2$。
- 而 $f(i,j)$ 则和 g 的组合有关。
- 由于 $g(i,j)$ 的计算只需用到 $a\le i$ 的 $f(a,b)$，所以可以按照第一维从小到大一次计算。

题解

- 这题跟图没什么关系。首先设 $f(i,j)$ 表示初始为 $s-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。$g(i,j)$ 表示初始为 $s-o-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。
- 可以发现 $g(i,j) = 2\sum_{a=0}^{i}\sum_{b>j} f(a,j)f(i-a,b) + \sum_{a=0}^{i} f(a,j)^2$。
- 而 $f(i,j)$ 则和 g 的组合有关。
- 由于 $g(i,j)$ 的计算只需用到 $a \le i$ 的 $f(a,b)$，所以可以按照第一维从小到大一次计算。
- 枚举到 i 的时候，先计算所有的 $g(i,j)$。每计算完一个 $g(i,j)$，就对于所有的 $f(u,v)$，进行一个转移：

$$f(u,v)\cdot calc(g(i,j),c) \to f(u+c(i+1), v+cj)$$

其中 $calc(x,y)$ 是 x 个元素选出大小为 y 的多重集合的方案数，其值为 $\binom{x+y-1}{y}$。

题解

- 这题跟图没什么关系。首先设 $f(i,j)$ 表示初始为 $s-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。$g(i,j)$ 表示初始为 $s-o-t$，操作 i 次之后最小割是 j 的方案数。
- 可以发现 $g(i,j) = 2\sum_{a=0}^{i}\sum_{b>j} f(a,j)f(i-a,b) + \sum_{a=0}^{i} f(a,j)^2$。
- 而 $f(i,j)$ 则和 g 的组合有关。
- 由于 $g(i,j)$ 的计算只需用到 $a \le i$ 的 $f(a,b)$，所以可以按照第一维从小到大一次计算。
- 枚举到 i 的时候，先计算所有的 $g(i,j)$。每计算完一个 $g(i,j)$，就对于所有的 $f(u,v)$，进行一个转移：

$$f(u,v)\cdot calc(g(i,j),c) \to f(u+c(i+1), v+cj)$$

  其中 $calc(x,y)$ 是 x 个元素选出大小为 y 的多重集合的方案数，其值为 $\binom{x+y-1}{y}$。
- 这样也就可以保证枚举到 i 时所有的 $f(a,b)(a \le i)$ 是已经计算好了的。