简单数学杂讲

CaptainSlow

组合数学

基本计数原理

基本计数原理有**加法原理**，**乘法原理**，**减法原理**和**除法原理**。

集合的排列与组合

线性排列

n个元素的r排列个数$P(n,r) = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)$.

等价的：$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$.

多重集合的排列

1. 设多重集合$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$，那么，$S$的r排列数量是$k^r$.
2. 设多重集合$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\}$，S的大小$n=\sum\limits_{i=n}^{k} n_i$，则S的排列数目等于$\frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{k} n_k!}$
    - 依次为每一种元素确定它们要放的位置，即$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}{n_k}$

圆排列

n个元素的r圆排列个数$R(n,r)=\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r*(n-r)!}$.

集合的组合

记$\binom{n}{r}$为n个元素的r子集个数，显然：

- $\binom{n}{r}=0$，若$r>n$
- $\binom{n}{0}=1$

一般的，有$\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$.

多重集合的组合

设多重集合$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_k\}$，那么S的r组合数目为$\binom{r+k-1}{k-1}=\binom{r+k-1}{r}$.

- 等价于方程$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$非负整数解个数。
- 上式在每个元素重复数至少为r时仍然成立。

常用组合恒等式

帕斯卡公式:

对于所有满足$1 \le k \le n-1$的整数n和k，有$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

范德蒙恒等式：

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

- 可以用双计数法证明，或者生成函数。

其他组合恒等式：

- $m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}$
  - 展开即可
- $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$
  - 双计数（或二项式定理）
- $\sum\limits_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$
  - 利用前两个等式
- $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2\binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2}$
  - 综合第2、3个等式
- $\frac{\binom{n}{1}}{1} - \frac{\binom{n}{2}}{2} + \frac{\binom{n}{3}}{3} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{\binom{n}{n}}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$
  - 用数学归纳法，通过一些变式可证得
- $\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$
  - $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$

特殊计数序列

Catalan数列

通项：$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$（另一种形式是：$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$）

递推式：$C_0 = 1 \text{ and } C_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} \text{ for } n \ge 0.$

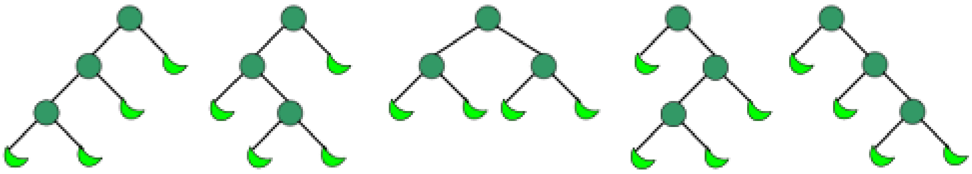
Catalan前20项为：

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190

应用

1. C_n表示长度2n的dyck word的个数。Dyck word是一个有n个X和n个Y组成的字串，且所有的前缀字串皆满足X的个数大于等于Y的个数。以下为长度为6的dyck words: XXXYYY XYXXYY XYXYXY XXYYXY XXYXYY

2. 将上例的X换成左括号，Y换成右括号，C_n表示所有包含n组括号的合法运算式的个数：((())) ()(()) ()()() (())() (()())
3. C_n表示有n个节点组成不同构二叉树的方案数。下图中，n等于3，圆形表示节点，月牙形表示什么都没有。
4. C_n表示有2n+1个节点组成不同构满二叉树（*full binary tree*）的方案数。下图中，n等于3，圆形表示内部节点，月牙形表示外部节点。本质同上。



5. C_n表示所有在$n*n$格点中不越过对角线的单调路径的个数。一个单调路径从格点左下角出发，在格点右上角结束，每一步均为向上或向右。计算这种路径的个数等价于计算Dyck word的个数：X代表"向右"，Y代表"向上"。
6. C_n表示通过连结顶点而将n + 2边的凸多边形分成三角形的方法个数。
7. C_n表示对$\{1,...,n\}$依序进出栈的置换个数。一个置换w是依序进出栈的当$S(w)=(1,...,n)$,其中$S(w)$递归定义如下：令$w=unv$，其中n为w的最大元素，u和v为更短的数列；再令$S(w)=S(u)S(v)n$，其中S为所有含一个元素的数列的单位元。
8. C_n表示用n个长方形填充一个高度为n的阶梯状图形的方法个数。

Stirling数

第一类Stirling数

n个元素分作k个环排列的方法数。记作：$s(n,k)$.

$s(n,0)=0, s(1,1)=1$，满足递推关系：$s(n,k)=s(n-1,k-1)+(n-1)S(n-1,k)$.

Table:

下三角形第i行第j个数表示s(i,j)（$1\le j\le i$）

```
    1,
    1,    1,
    2,    3,    1,
    6,   11,    6,    1,
   24,   50,   35,   10,    1,
  120,  274,  225,   85,   15,    1,
  720, 1764, 1624,  735,  175,   21,    1,
 5040,13068,13132, 6769, 1960,  322,   28,    1,
 ...
```

第二类Stirling数

n个元素放入k个相同的盒子的方案数。记作$S(n,k)$.

$S(n,n)=S(n,1)=1$，满足递推关系：$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$.

Table:

下三角形第i行第j个数表示S(i,j)（$1\le j\le i$）

```
    1,
    1,    1,
    1,    3,    1,
    1,    7,    6,    1,
    1,   15,   25,   10,    1,
    1,   31,   90,   65,   15,    1,
    1,   63,  301,  350,  140,   21,    1,
    1,  127,  966, 1701, 1050,  266,   28,    1,
    ...
```

好题小讲

由于我做的题有限，相信大家很多题都见过，那我们就做个复习。

CF408E Curious Array

N个数的数组，有M个形如(l_i, r_i, k_i)的操作，表示将第$l_i \le j \le r_i$个元素，加上$\binom{j-l_i+k_i}{k_i}$.求所有操作过后的数组。（$1 \le N, M \le 10^5, 0 \le k \le 100$）

分析

关键字：*差分*，*帕斯卡公式*

头一次看到把帕斯卡三角形出成这么好玩的题目。

利用帕斯卡公式，容易发现增量的差也是类似的一个组合数。我们一层一层差分下去，到第k_i阶差分数组时（原数组即0阶），刚好是形如$\binom{n}{0}$这类数，这样就可以直接$O(k)$地处理修改了，复杂度$O(nk)$.

CF340E Iahub and Permutations

求补全一个错排的方案数。

分析

关键字：*错排*，*容斥*

补上去的数分为两类：

- 它的位置已经被占用了，我们称这类数是自由的
- 它的位置还没有被占用，因此考虑放它的时候就不能放自己的位置。我们称这类数是受限制的。

这题用容斥比较方便，我们枚举受限制位不满足限制的个数，其他位置可以随便放，时间复杂度$O(n)$.

还可以DP，当然DP本质上也是容斥。

XJOI模拟16 种花

Description

小 H 是一个喜欢养花的女孩子。

她买了 n 株花，编号为一里香，二里香⋯⋯七里香⋯⋯n 里香，她想把这些花分别种在 n 个不同的花盆里。

对于一种方案，第 i 个花盆里种的是 a_i 里香，小 H 定义其美丽值为：

$$\sum_{i<j,a_i>a_j}(j-i)\times(a_i-a_j)$$

另外，由于一些特殊原因，第 i 个花盆里不能种 p_i 里香。

现在，小 H 想知道，所有合法方案的美丽值的和是多少。你能帮她解决这个问题吗?

Input Format

第一行一个整数 n，第二行有 n 个整数表示 $\{p_i\}$。

Output Format

一个整数，表示答案对 10^9+9 取模的结果。

Sample Input

```
3
2 1 3
```

Sample Output

```
7
```


分析

关键字：*错排，分类讨论，动态规划*

这题比较类似上面那题. 不过需要考虑的情况复杂了许多。 首先我们肯定是枚举一对数来计算他们的贡献，设我们枚举的是i和j（不妨设$i<j$），p[i] 和 p[j] 分别是它们不能放的位置，那么数值差的贡献就是 j - i 。我们对i和j的位置讨论：

1. 若 i 恰好在 p[j] 上，j 恰好在p[i]上，这时候位置的贡献就是max(p[j] - p[i], 0). 这时候i和j恰好错排，那么剩N - 2个有限制的数排列。
2. 若 i 在 p[j] 上，j 不在 p[i] 上

3. 若 j 在 p[i] 上，i 不在 p[j] 上

- 上面两种情况可以合并到一起来考虑，因为这时候i/j占用了一个原来是有限制的数的位置，于是它变得自由了，剩N - 3个有限制的数和1个自由的数排列。前者贡献为 $\sum_{k=p[i]+1}^{n} k - p[i]$，后者贡献为 $\sum_{k=1}^{p[j]-1} p[j] - k$. 当然，这会包含第一种情况，再减掉，贡献为 $\sum_{k=1}^{n-p[i]} k + \sum_{k=1}^{p[j]-1} k - 2c_1$（设$c_1$为第一种情况的贡献）

4. 若 i 不在 p[j] 上，j 也不在 p[i] 上. 这时候，除 i, j 外，i, j 分别占用了一个限制变量的位置，它们变得自由了，此时有N - 4个有限制的数和2个无限制的数排列。这时候我们可以直接“暴力”地枚举前两个数的位置计算贡献，设间距为$k-1$，那么贡献就是$\sum_{k=2}^{n}(n-k+1)(k-1)$，这可能包含了第一种情况和第二、三种情况（设这两种贡献和为c_2），还有，就是i可能在p[i]上，或者j在p[j]上这样的非法状态的贡献，所以贡献为 $c_3 = \sum_{k=2}^{n}(n-k+1)(k-1) - c_1 - c_2 - \left(\sum_{k=1}^{p[i]-1} k + \sum_{k=1}^{n-p[j]} k - max(0, p[i]-p[j])\right)$

我们再来看一下如何求方案数，设$DP[i][j]$表示共 i + j 个数，i个有限制，j个自由的排列方式，则：

- $DP[0][0] = 1$
- $DP[n][0] = (n-1)\big(DP[n-1][0] + DP[n-2][0]\big)$
- $DP[n][m] = nDP[n-1][m] + mDP[n][m-1]$
    - 利用序列中最后一个自由的数来转移，如果它放在n个限制数的位置中任意一个，这时候有限制的数减少了1个，不过自由的数少了一个又补上一个；如果它放在m个自由的位置中的一个，有限制的数数量不变，自由的数减少一个。

这样我们枚举i, j ($i < j$)，对应的贡献就是 $(j-i)(c_1 DP[N-2][0] + c_2 DP[N-3][1] + c_3 DP[N-4][2])$.

CF840C On the Bench

关键字：*动态规划*

给你N个数（$N \le 300$），求它们满足相邻两个数乘积不是完全平方数的排列个数。

分析

首先A * B是平方数，B * C是平方数，C * A也是平方数。那么问题就被转化为若干个集合，元素总个数为N，求这N个元素满足属于同一个集合元素不相邻的排列个数。

我们可以设计这样一个DP方程：设$DP[i][j]$表示已经放好了前i个集合，有j对相邻的数相乘为完全平方数的排列方案数。考虑放入第(i+1)个集合，设它的大小为s，前面已经放了的数总数为tot，我们将它分为k个部分插入前面已经排好的排列，插入这k个部分消除原排列中的d个相邻乘积为平方数的数对，那么要转移到的状态是$DP[i+1][j-d+s-k]$（原来对数减少了d，另外加上这个集合增加的s-k对），这样转移的方案数为$s!\binom{s-1}{k-1}\binom{j}{d}\binom{tot+1-j}{k-d}$（先排序，然后分组，然后插入消去

的，再插入不消去的，注意这里不用再乘上k里面选d的方案数，否则会有重复）。于是我们$O(n^4)$暴力转移就好，最终答案是$DP[m][0]$（m是集合个数）。

CF285E Positions in Permutations

好题！

排列$P(p_1,p_2,\ldots,p_n)$被认为是好的，当且仅当恰好有k个位置满足$|p_i-i|=1$，给定N,K($1\le n\le 1000, 0\le k\le n$)，求满足条件的好排列个数。

分析

关键字：*容斥，二项式反演*

我们发现直接算不是很方便，考虑用容斥。 设$g(k)$表示恰好k个位置满足的方案数，$f(k)$表示至少k个位置满足的方案数。我们先来看如何求f. 考虑条件$|p_i-i|=1$，对于位置集合$X=\{1,2,\ldots,n\}$，数集$Y=\{1,2,\ldots,n\}$，这个问题就转化为了X和Y构成的二分图的一个匹配问题，X中的元素x_i与Y中的元素x_i-1和x_i+1有边（1,n例外）。介于图较为复杂，我们用动态规划计数。设$DP[i][j]$表示我们匹配到X,Y的第i个位置，匹配的j对点的方案数（我们只考虑与当前点与之前的点匹配），发现这样的状态并不够。那么我们再加两维，表示X中的第i个点和Y中的第i个点的匹配状态，这样就可以进行转移了。那么$f(k)=\sum DP[N][k][0/1][0/1]*(N-k)!$. 接下来看一下f和g的关系：$f(n)=\sum\limits_{i\ge n}\binom{i}{n}g(i)$.这里我们知道了f，就可以用反演来推出g.推理如下：

首先$g(n)$可以被这样表示：

$$g(n)=\sum_{k\ge n}[k-n=0]\binom{k}{n}g(k)$$

由 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=[n=0]$

带入得

$$g(n)=\sum_{k\ge n}\sum_{i=0}^{k-n}(-1)^i\binom{k-n}{i}\binom{k}{n}g(k)=\sum_{k\ge n}\sum_{i=0}^{k-n}(-1)^i\binom{i+n}{n}\binom{k}{i+n}g(k)$$

其等价于

$$g(n)=\sum_{i\ge n}\sum_{k\ge i}(-1)^{i-n}\binom{i}{n}\binom{k}{i}g(k)=\sum_{i\ge n}(-1)^{i-n}\binom{i}{n}\sum_{k\ge i}\binom{k}{i}g(k)$$

将后面的和式替换为f，即：

$$g(n)=\sum_{i\ge n}(-1)^{i-n}\binom{i}{n}f(i)$$

类似地，我们也可以从g推到f.

事实上你会发现我们平时用到的容斥就是上式的**一般情况**。

代数

三角函数

常用三角函数：正弦函数sin，余弦函数cos，正切函数$cos.$

正弦、余弦、正切均是周期函数，正弦、余弦函数周期均为2π，正切函数周期为$\pi.$

正弦定理

对任意$\triangle ABC$，a,b,c分别为$\angle A,\angle B,\angle C$的对边，R为$\triangle ABC$的外接圆半径，则有：

$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=2R$

- $S=\frac{1}{2}acsinB=\frac{1}{2}bcsinA$

余弦定理

对$\triangle ABC$，a,b,c分别为$\angle A,\angle B,\angle C$的对边，则有：

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot cosC$

类似地，$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot cosB$，$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot cosA.$

- 用向量证明较为简洁。

常用公式

$tan\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

毕达哥拉斯恒等式

$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1.$

诱导公式

画图即可，这里不展开了。

两角和差公式

- $cos(\alpha-\beta)=cos\alpha\cdot cos\beta+sin\alpha sin\beta$
- $cos(\alpha+\beta)=cos\alpha\cdot cos\beta-sin\alpha\cdot sin\beta$
- $sin(\alpha+\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta+cos\alpha\cdot sin\beta$
- $sin(\alpha-\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sin\beta$
- $tan(\alpha+\beta)=\frac{tan\alpha+tan\beta}{1-tan\alpha\cdot tan\beta}$
- $tan(\alpha-\beta)=\frac{tan\alpha-tan\beta}{1+tan\alpha\cdot tan\beta}$

利用余弦定理和勾股定理推出第一个式子，接下来利用诱导公式，后面的五个式子也就相应推出了。

二倍角公式

- $sin2\alpha=2sin\alpha\cdot cos\alpha$
- $cos2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha=2cos^2\alpha-1=1-2sin^2\alpha$
- $tan2\alpha=\frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$

和差化积

- $sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $sin\alpha - sin\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
  - 证明：
  - $sin\alpha = sin(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}) = sin(\frac{\alpha+\beta}{2})cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) + cos(\frac{\alpha+\beta}{2})sin(\frac{\alpha-\beta}{2})......(1)$
  - $sin\beta = sin(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}) = sin(\frac{\alpha+\beta}{2})cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) - cos(\frac{\alpha+\beta}{2})sin(\frac{\alpha-\beta}{2})......(2)$
  - $(1)+(2) \implies$ 第一个式子，$(1)-(2) \implies$ 第二个式子
- $cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

积化和差

- $sin\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)]$
- $cos\alpha \cdot sin\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta) - sin(\alpha-\beta)]$
- $cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)]$
- $sin\alpha \cdot sin\beta = -\frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) - cos(\alpha-\beta)]$

辅助角公式

$asinx + bcosx = \sqrt{a^2+b^2}sin(x+\phi)$

其中ϕ的终边在点(a,b)所在象限，$sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

中国剩余定理

中国剩余定理（孙子定理，**C**hinese **R**emainder **T**heorem），是数论中关于一元线性同余方程组的一个定理。

形式描述

CRT给出了如下一元线性同余方程组：

$$(S): \begin{cases} x \equiv a_1 \pmod {m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod {m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod {m_n} \end{cases}$$

有解的判定条件，并用构造法给出了通解的具体形式。

中国剩余定理说明：若$m_1, m_2, \ldots, m_n$其中任意两数互质，则对于任意的整数$a_1, a_2, \ldots, a_n$，方程组(S)有解，并且通解可以通过如下方式构造得到：

- 设$M = \prod\limits_{i=1}^{n} m_i$，$M_i = \frac{M}{m_i} = \prod\limits_{j \neq i} m_j$.

- 设$t_i = M_i^{-1} \pmod{m_i}$，方程组$(S)$的通解形式为$x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i t_i M_i + kM$，$k \in \mathbb{Z}$. 在模$M$意义下，方程组$(S)$只有一个解$x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i t_i M_i$.

证明

由假设的条件可知，对任意$i \neq j$，$(m_i, m_j) = 1$，所以$(m_i, M_i) = 1$，t_i存在。

则对于$a_i t_i M_i$，有：

- $a_i t_i M_i \equiv a_i \cdot 1 \equiv a_i \pmod{m_i}$
- 对$\forall j \neq i$，$a_i t_i M_i \equiv 0 \pmod{m_j}$

所以$x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i t_i M_i$满足：

- 对$\forall i$，$x \equiv a_i t_i M_i + \sum\limits_{j \neq i} a_j t_j M_j \equiv a_i + 0 \equiv a_i \pmod{m_i}$

这样就完成了对一个解的构造。

并且，若x_1, x_2都是(S)的解，则对$\forall i$，都有$x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{m_i}$. 因为$m_1, m_2, \ldots, m_n$两两互质，所以$M \mid x_1 - x_2$. 这就说明了通解的形式为：

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i M_i + kM,\ k \in \mathbb{Z}$$

所以方程组(S)的解集：

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i t_i M_i + kM \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

例

韩信带1500名兵士打仗，战死四五百人，站3人一排，多出2人；站5人一排，多出4人；站7人一排，多出6人。问还剩几人？

解：

设还剩x人，由题意得：

$$(S):\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

则$M = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$，$M_1 = \frac{105}{3} = 35$，$M_2 = \frac{105}{5} = 21$，$M_3 = \frac{105}{7} = 15$，$t_1 = 2$，$t_2 = 1$，$t_3 = 1$. 所以$x = 2 \cdot 2 \cdot 35 + 4 \cdot 1 \cdot 21 + 6 \cdot 1 \cdot 15 + 105k = 314 + 105k,\ k \in \mathbb{Z}$. 由于战死四五百人，因此答案就是1049.

补充说明

另外，对于存在不互质的同余方程组，可以先化成两两互质的同余组，再运用定理计算。

若化出的同余组存在矛盾，则必无解。

事实上，CRT和拉格朗日插值法构造的时候是较为类似。这种构造思想非常通用。

那么我们接下来就来讲一讲拉格朗日插值法。

拉格朗日插值法

定义

对某个多项式函数，已知有给定的k+1个取值点：

$(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$

其中x_j对应着自变量的位置，而y_j对应着函数在这个位置的取值。

假设任意两个不同的x_j都互不相同，那么应用拉格朗日插值公式所得到的**拉格朗日插值多项式**为：

$$L(x) := \sum_{j=0}^{k} y_j \ell_j(x)$$

其中每个$\ell_j(x)$为**拉格朗日基本多项式**（或称**插值基函数**），其表达式为：

$$\ell_j(x) := \prod_{i=0, i\neq j}^{k} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} = \frac{x-x_0}{x_j-x_0} \cdots \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} \cdot \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}} \cdots \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$

拉格朗日基本多项式$\ell_j(x)$的特点是在x_j上取值为1，在其它的点$x_i, i \neq j$上取值为0.

利用这个方法我们可以较快地导出一个多项式。（如自然数幂和之类的）

证明

拉格朗日基本多项式的**存在性**由定义显然。

下面证明**唯一性**，即次数不超过k的拉格朗日多项式至多只有一个。

对任意两个不超过k的拉格朗日多项式P_1和P_2，它们的差$P_1 - P_2$在$x_0, x_1, \ldots, x_k$这所有k+1个点上的取值都是0，因此它必是多项式$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)$的倍数。所以，若$P_1 - P_2 \neq 0$，次数就一定不小于k+1；若$P_1 - P_2$是两个次数不超过k的多项式的差，则它的次数也不超过k，因此$P_1 - P_2 = 0$，即$P_1 = P_2$.这也就证明了唯一性。

例

求2次幂和公式。

解：

设$f(x) = \sum_{i=1}^{x} i^2$，易知$f(x)$是3次多项式。取$x = 1, 2, 3, 4$带入，得：

$x = 1$，$f(x) = 1$；$x = 2$，$f(x) = 5$；$x = 3$，$f(x) = 14$；$x = 4$，$f(x) = 30$.

$\ell_1(x) = \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} \cdot \frac{x-4}{1-4}$, $\ell_2(x) = \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} \cdot \frac{x-4}{2-4}$, $\ell_3(x) = \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} \cdot \frac{x-4}{3-4}$, $\ell_4(x) = \frac{x-1}{4-1} \cdot \frac{x-2}{4-2} \cdot \frac{x-3}{4-3}$.

所以$f(x) = \ell_1(x) + 5\ell_2(x) + 14\ell_3(x) + 30\ell_4(x) = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$.

等幂求和

求自然数幂和方法较多，这里介绍两种。

递推法

由

$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \binom{k+1}{1}n^k + \binom{k+1}{2}n^{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{k}n + 1$

得

$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum\limits_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} \sum\limits_{j=1}^{n} j^{k+1-i}$

移项，

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1} - \sum_{i=2}^{k+1}\binom{k+1}{i}\sum_{j=1}^{n} j^{k+1-i} - 1\right)$$

记$S_k(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i^k$，得出递推式：

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1} - \sum_{i=2}^{k+1}\binom{k+1}{i} S_{k+1-i}(n) - 1\right)$$

且$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

伯努利数

事实上，我们称上面定义的$S_m(n)$为**伯努利多项式**。伯努利多项式与伯努利数的关系如下：

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k} B_k^+ n^{m+1-k}\right)$$

其中B_n^+表示**第二类伯努利数**.

伯努利数可以用下列递推式计算：

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = 0$$

初始条件$B_0 = 1$.

例题选讲

HDU1573 X问题

求在小于等于N的正整数中有多少个X满足：X mod a[0] = b[0], X mod a[1] = b[1], X mod a[2] = b[2], ..., X mod a[i] = b[i], ... (0 < a[i] <= 10)

分析

关键字：*EXCRT*

考虑到模数不一定两两互质，不能直接用CRT.

于是有了一种被称作EXCRT的方法。

我们考虑方程$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$和$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$，它等价于：

$$\begin{cases} x = pm_1 + a_1 \ldots (*) \\ x = qm_2 + a_2 \end{cases}$$

也就是$pm_1 = qm_2 + a_2 - a_1$，$pm_1 \equiv a_2 - a_1 \pmod{m2}$.

首先要有$(m_1, m_2) \mid a_2 - a_1$，这样才能保证方程有解。

设$d = (m_1, m_2)$，$b = a_2 - a_1$，将上式两边同除d，得到$\frac{m_1}{d} p \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m_2}{d}}$，$p \equiv \frac{b}{d} (\frac{m_1}{d})^{-1} \pmod{\frac{m_2}{d}}$.

设$t = \frac{b}{d} (\frac{m_1}{d})^{-1}$，所以$p = y\frac{m_2}{d} + t$，带入(*)得到：

$$x = m_1(y\frac{m2}{d} + t) + a_1 = \frac{m_1 m_2}{d} y + m_1 t + a_1$$

那么就得到$x \equiv m_1 t + a_1 \pmod{\frac{m_1 m_2}{d}}$. 这样我们就可以将两个方程合并成一个了。如此一一合并下去即可。

当然实现是时候我们可以用extgcd求出p，直接带入即可。

另外，还有一种情况就是计数时模数非质数，这样我们就不能求逆元，于是我们可以分解这个模数，分别取模，最后再用CRT合并。

CF622F The Sum of the k-th Powers

求$\sum_{i=1}^{n} i^k$.（$1 \leq n \leq 10^9$，$1 \leq k \leq 10^6$）

分析

关键字：*插值法*

直接用插值法，将$(1,f(1))$，$(2,f(2))$，...，$(k+2,f(k+2))$这k+2个点带入即可。时间复杂度$O(klogk)$.

CF955F Cowmpany Cowmpensation

题意

用$[1,D]$中的数字给一棵N个节点树上的点标号，要求每个节点的标号不得大于它的父节点，求标号的方案数。（$1\le D\le 10^9,\ N\le 3000$）

分析

关键字：*树形DP、容斥、插值法*

我们先考虑一个树形DP，设$f[u][i]$表示节点u标号为i的方案数，那么$f[u][i]=\prod\limits_{v\in son_u}\sum\limits_{j\le i}f[v][j]$. 如果设$g[u][i]=\sum\limits_{j=1}^{i}f[u][j]$，方程就变成了$f[u][i]=\prod\limits_{v\in son_u}g[v][i]$. 但是D很大，不可能直接DP，接下来介绍两种方法绕过这个数据范围。

容斥

因为N很小，事实上树中用到的标号种树不会超过N，远小于D. 我们利用一个离散化的思想，稍微更改一下上面的DP方程，设$f[u][i]$表示节点u子树中标号种数不超过i的方案数（可以将i看做是离散化后的标号），那么我们求出答案后乘上$\binom{D}{i}$就是实际的方案数了。 但是这样会有重复，因为我们设的是不超过而不是恰好。令$f(x)=f[1][x]$表示树中用到的标号种数至多为x种的方案数，$g(x)$表示恰好x种的方案数。$f(x)$和$g(x)$满足这样的关系：$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}g(i)$. 注意这里的系数是$\binom{n-1}{i-1}$，这是因为$f(x)$实际上钦定了根节点就是离散后的最大的标号，因此最大的标号必须被选上。反演一下得到：$g(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n-1}{i-1}f(i)$. 答案就是$\sum\limits_{i=1}^{n}\binom{D}{i}g(i)$. 时间复杂度：$O(n^2)$.

插值

这里有一个不容易发现的性质，就是答案是一个关于D的N次多项式。再详细一些，就是$f[u][i]$是一个关于i次数为子树大小减一的多项式，$g[u][i]$是一个关于i次数等于子树大小的多项式。 这里用归纳法证明：

- 对于叶子节点，显然成立。
- 我们考虑转移的过程，$f[u][i]=\prod\limits_{v\in son_u}g[v][i]$，关于f的结论成立；因为g实际为f的前缀和，因此次数加一。

这样我们就可以DP出$f/g[1][1..N+1]$，然后插值即可。

这样复杂度也是$O(n^2)$的。

参考资料

- Wikipedia
- ACdreamers-CSDN
- Introductory Combinatorics(Fifth Edition)-Richard A. Brualdi