球面上的面积并问题

周任飞

August 2, 2020

目录

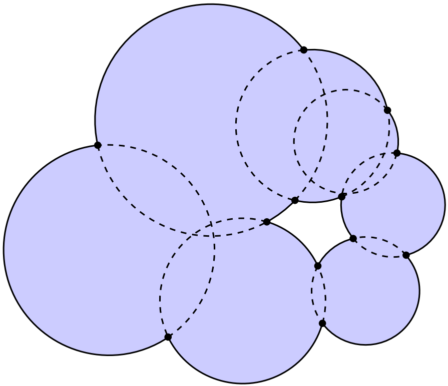
Section 1

平面上的面积并问题

面积并问题

问题描述

给出 n 个圆，被至少一个圆覆盖的部分称为阴影部分，求阴影部分面积。



面积并问题

这类问题在 NOI 中出现过多次:

- NOI 2004 降雨量（平行四边形面积并）
- NOI 2005 月下柠檬树（圆形和梯形面积并）
- NOI 2009 描边（圆形和长方形面积并）

当时还没有优秀的方法来解决这类问题，所以这些题目数据范围较小。

辛普森方法

辛普森方法

对于一个横坐标 x_0，令阴影部分与竖线 $x = x_0$ 交的总长度记为 $F(x_0)$，则阴影部分的面积就等于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x.$$

辛普森方法是解决这类问题的传统的通用算法。

使用辛普森方法来计算这个积分，就可以求得原问题的近似答案。这要求我们能够对函数 F 求值，而这是很简单的。

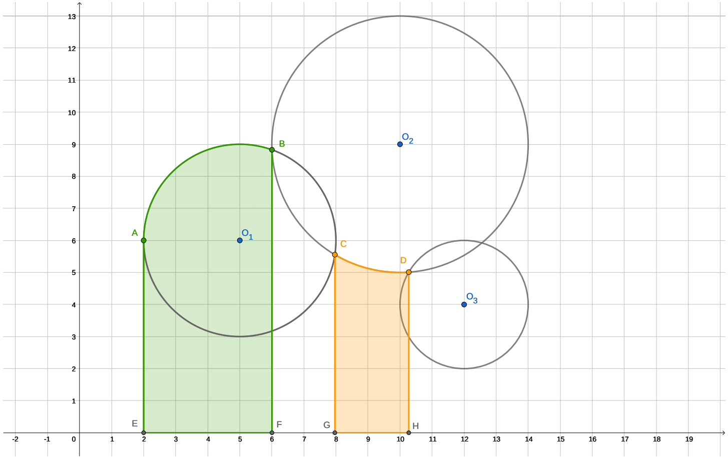
辛普森方法

这个方法既没有正确性保证也没有运行时间的保证，但是因为其代码易于编写，这个方法仍然被大量选手使用。

许多古老的题目（例如月下柠檬树）数据范围小、精度要求低，可以用辛普森方法直接通过。

格林公式方法

我们可以使用“上边界 – 下边界”的方法来计算阴影部分的面积。



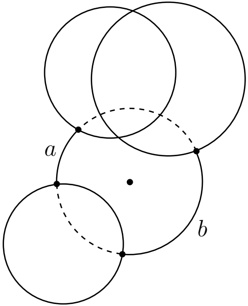
格林公式方法

具体来说，是“上边界的积分” − “下边界的积分”。此处，边界积分指的是边界曲线下方、x 轴上方的（有向）面积，见上一页图。

为什么这样计算出的就是阴影部分面积？用格林公式可以导出一个严谨的证明，具体细节留给大家思考。

格林公式方法

经过上面的转化，我们现在需要计算所有“边界的积分”。在此之前，我们需要找出所有的边界。



如图，每一个圆周上没有被其他圆覆盖的部分 (a, b)，组成了阴影部分的边界。

格林公式方法

对于每一个圆，分别计算它的圆周上，哪些部分没有被其他圆覆盖。

利用极角运算，将圆周上的点与 $[-\pi, \pi)$ 一一对应。圆周被另一个圆覆盖的部分，可以简单地用 $[-\pi, \pi)$ 上至多两个区间的并来表示。问题转化为：

子问题

给定 $[-\pi, \pi)$ 上的 n' 个区间，求出没有被任何一个区间覆盖的部分，用 $[-\pi, \pi)$ 上的若干个不交的区间来表示。

这是一个经典问题，可以在 $O(n' \log n')$ 的时间内解决。如此，我们便计算出了阴影部分的全部边界。

格林公式方法

最后，逐一计算阴影部分边界的积分。边界都是圆弧，通过考虑积分的几何意义，即一条圆弧的积分表示哪个区域的面积，就可以使用基础的计算几何方法来计算积分。至此，完整解决了原问题（平面上的面积并问题）。

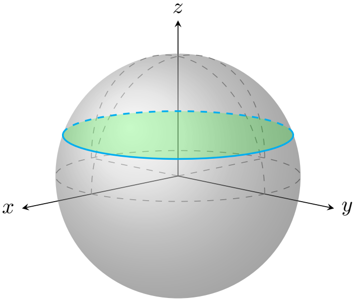
该算法的时间复杂度是 $O(n^2 \log n)$，且能够给出精确的答案，可以轻松通过上述三道 NOI 题。

Section 2

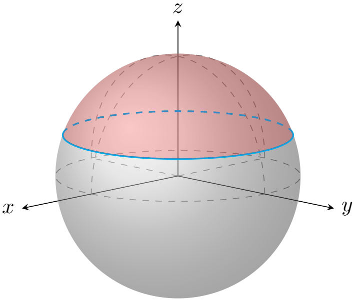
球面上的面积并问题

球面上的几何元素

　　球面有许多优美的性质和重要的现实意义，先简单介绍一些球面上的简单几何元素。



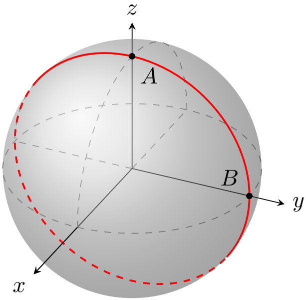
(a) 圆



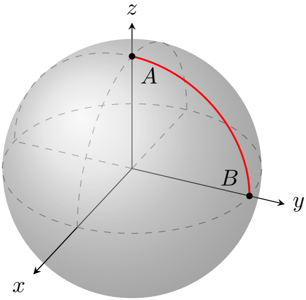
(b) 球冠

圆、球冠、大圆、小圆。

球面上的几何元素



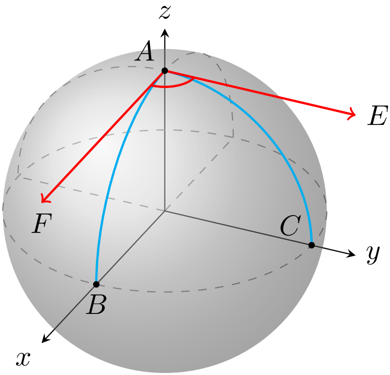
(c) 球面直线（大圆）



(d) 球面线段

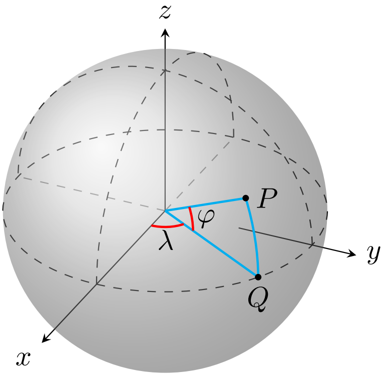
球面直线、球面线段、对径点。

球面上的几何元素



球面角、球面三角形。

球面上的几何元素



南极 P_S、北极 P_N、赤道、经度 λ、纬度 φ。

球面上的面积并问题

问题描述

给定球面上的 n 个球冠，被至少一个球冠覆盖的部分称为阴影部分，求阴影部分面积。

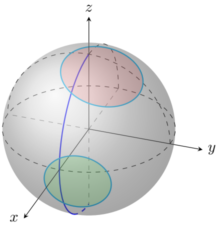
解决方法

通过模仿平面上的面积并问题，我们可以给出一个球面上的面积并问题的解决方法。

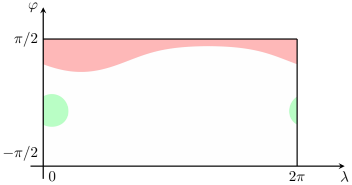
仍然使用“上边界的积分” − “下边界的积分”来计算阴影部分的面积。

同样地，算法正确性比较明显，此处不讨论每一处细节的严谨性。严谨的证明可以由格林公式导出，留给读者思考。

（提示：如图）



(e) 球面

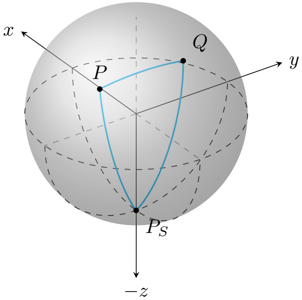


(f) 经纬平面

解决方法

球面上，边界积分的定义与平面有所不同。定义一条曲线的积分是它“南方”的面积。

具体地，假设有一条边界曲线 $P \sim Q$，且它不过北极点。令一个动点 A 沿着曲线从 P 向 Q 移动，在这个过程中 AP_S 连线扫过的面积，就是 $P \sim Q$ 的边界积分，其中 P_S 是南极。这个区域的边界是 $P \sim Q - P_S - P$。



解决方法

应当注意：如果北极点在阴影部分内，则北极点应该被视为一个“上边界”，其边界积分是整个球的表面积；如果南极点在阴影部分内，则南极点应该被视为一个“下边界”，其边界积分是 0。

略去一些几何上的实现细节，剩下的部分就和平面上没什么区别了——先计算出每个输入的圆周上未被覆盖的部分，它们组成阴影部分的边界；再对于阴影部分的每一段边界，计算其边界积分。

至此，在 $O(n^2 \log n)$ 的时间复杂度内解决了原问题。

Section 3

一些几何细节

球冠的面积

问题描述

给定球面上的一个球冠，求出它的面积。

经过简单的积分，可以得到

$$S = 2\pi RH,$$

其中 R 是球的半径，H 是球冠的高度。

球面三角形面积

问题描述

给定球面上三个点 A, B, C，求它们构成的球面三角形的面积。

这个问题在高中数学选修 3 - 3 中已经介绍了它的解决方法，并导出了面积公式：

$$S_{\Delta ABC} = R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi),$$

其中，$\angle A$ 是前面说过的球面角，它等于平面 OAB 与 OBC 的二面角。（O 为球心）

球面三角形面积

Spherical Trigonometry 一书中给出了**单位球**上数值稳定性更好的公式：

$$\tan\frac{S_{\Delta ABC}}{2}=\frac{\tan\frac{1}{2}a\ \tan\frac{1}{2}b\ \sin\angle C}{1+\tan\frac{1}{2}a\ \tan\frac{1}{2}b\ \cos\angle C},$$

其中 a,b 指三角形两边长， $\angle C$ 指两条边 a,b 夹的球面角。

球面两圆求交

问题描述

给定球面上的两个圆，求出它们的交点。

圆是一个平面与球面的交；两圆的交是两个平面与球面的交。先求出两个平面的交（一条直线），再求出这条直线与球面的交。

直线与球面求交与二维计算几何中的圆线求交类似，这里不展开介绍。

北极点的处理方法

我们的方法并不能解决有一段边界经过北极点的情况。

解决方法也很简单，随机选取球面上一个没有被经过的点，把它作为北极点，并整体旋转整个球面。

结尾

谢谢大家 ~

欢迎提问。