MODÉLISATION DES TAUX DE CHANGE – 2EME PARTIE

ANAS ELKADDOURI

ECOLE CENTRALE PARIS (P2007)

RATES STRATS, DEUTSCHE BANK

MODÉLISATION DES TAUX DE CHANGE

- Plan de la seconde séance:

1. 1. Rappel 1ere partie
2. Modèle Hybride 2F Action/Taux de change
   1. Quantoisation
3. Modèle Hybride 3F Taux d'intérêt /Taux de change
4. TD
   1. Exco Ltd
   2. Linked Foreign Exchange Option (ELF-X)
   3. Forward Starting FX Option

RAPPEL 1ERE PARTIE

- Plan de la seconde séance:

1. 1. Rappel 1ere partie
    1. Notations
    2. FX Forward
    3. Equation générale des taux de change
    4. Symétrie des taux de change
    5. Formule de Black
    6. Prix du Call (Modèle B&S)
    7. Trio de devises
2. Modèle Hybride 2F Action/Taux de change
3. Modèle Hybride 3F Taux d'intérêt /Taux de change
4. TD

1.1 NOTATIONS

- On note Xt le taux de change FOR/DOM à la date t
  - 1 (FOR) = Xt (DOM)
- On note B_t^d et B_t^f respectivement les processus de capitalisation du cash domestique et étranger, et r_t^d et r_t^f les taux cours sans risque associés:
- $dB_t^d = r_t^d . B_t^d . dt$
- $dB_t^f = r_t^f . B_t^f . dt$
- $B^d(t,T) = E_t^d[\frac{B_t^d}{B_T^d}] = E_t^d[\, e^{\int_t^T -r_s^d.ds} \,]$
- $B^f(t,T) = E_t^f[\frac{B_t^f}{B_T^f}] = E_t^f[\, e^{\int_t^T -r_s^f.ds} \,]$

1.2 FX FORWARD

- Définition:
  - Le Forward FOR/DOM de maturité T et de de valeur Ft,T est l'obligation de délivrer à la date T une unité FOR contre $F_{t,T}$ DOM.
- $F_{t,T} = \mathrm{X}_{\mathrm{t}}.\frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}.$

1.3 DYNAMIQUE DES TAUX DE CHANGE

- $dX_t = X_t.\left((r_t^d - r_t^f).dt + \sigma_t^x.dW_t^X\right)$ exprimée dans la mesure Q^d
- (X_t) n'est pas un actif échangeable dans l'économie domestique. Le cash étranger exprimé en DOM $(X_t.B_t^f)$ l'est

1.4 SYMÉTRIE DU TAUX DE CHANGE

- Sous Q^d: $dX_t = X_t.\left((r_t^d - r_t^f).dt + \sigma_t^x.dW_t^X\right)$
- On note $\tilde{X}_t = \frac{1}{X_t}$. Alors
- $d\tilde{X}_t = \tilde{X}_t.\left((r_t^f - r_t^d).dt - \sigma_t^x.d\widetilde{W}_t^X\right)$ sous Q^f
- Savoir appliquer Girsanov / changement de numéraire!

1.5 SYMÉTRIE ET PARITÉ CALL/PUT

- **Symétrie Call/Put:**
  - $Call(FORDOM, K, T) = K.X_t.Put(DOMFOR, 1/K, T)$
- **Parité Call/Put:**
  - $Call(FORDOM, K, T)\ -\ Put(FORDOM, K, T) = X_t.B^f(t, T) - K.B^d(t, T)$

1.6 FORMULE DE BLACK

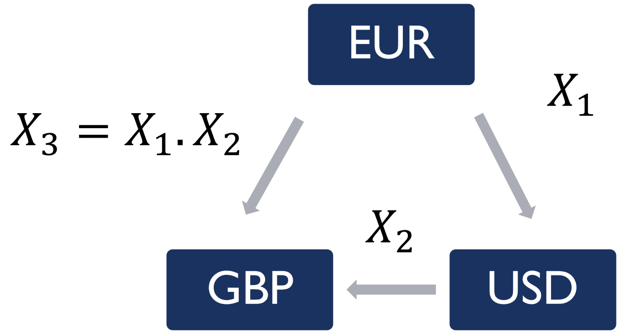
- Formule de Black:
  - Soit S_t un processus log-normal c.-à-d. Sous $dS_t = S_t.(\mu\_t.dt + \sigma_t.dW_t)$
  - Alors $Call(K,T) = B(t,T).\left[Fwd(t,T).N\big(d_1(t,T)\big) - K.N(d_2(t,T))\right]$
  - $Fwd(t,T) = E_t[S_T] = S_t.e^{\int_t^T \mu_s.ds}$
  - $d_1(t,T)=\frac{1}{\sqrt{\int_t^T \sigma_s^2.ds}}.\left[\ln\left(\frac{Fwd(t,T)}{K}\right) - \frac{1}{2}.\int_t^T \sigma_s^2.ds\right]$
  - $d_2(t,T)=\mathrm{d1(t,T)} + \sqrt{\int_t^T \sigma_s^2.ds}$

1.7 MODÈLE BLACK SCHOLES, PRIX DU CALL/PUT

- Sous Q^d: $dX_t = X_t.\left((r_t^d - r_t^f).dt + \sigma_t^x.dW_t^X\right)$ avec $\left(\mathrm{r_t^d}\right), \left(\mathrm{r_t^f}\right)$et (σ_t) *deterministes*
- $Call(t, FORDOM, K, T) = X_t.B^f(t,T).N\left(d_1(t,T)\right) - K.B^d(t,T).N(d_2(t,T))$
- Portefeuille de couverture:
  - $+B^f(t,T).N\left(d_1(t,T)\right)$ en cash étranger
  - $-K.B^d(t,T).N(d_2(t,T))$ en cash domestique
  - Le delta hedge se fait en disposant de deux en monnaies DOM et FOR

1.8 TRIO DE DEVISES

- EUR, GBP, USD et on note $X_1 = EUR/USD, X_2 = USD/\text{GBP}$ et $X_3 = EUR/\text{GBP}$
- Modèle multi facteurs à volatilité et corrélation locale:
- $dX_{1,t} = X_{1,t}.\left(\left(r_t^{usd} - r_t^{eur}\right).dt + \sigma_1(X_1, t).dW_{1,t}\right)$ dans Q^{usd}
- $dX_{2,t} = X_{2,t}.\left(\left(r_t^{gbp} - r_t^{usd}\right).dt + \sigma_2(X_2, t).dW_{2,t}\right)$ dans Q^{gbp}
- $dX_{3,t} = X_{3,t}.\left(\left(r_t^{gbp} - r_t^{usd}\right).dt + \sigma_3(X_3, t).dW_{3,t}\right)$ dans Q^{gbp}
- *la fonction* $\sigma_i:(x,t)\to \sigma_i(x,t)$ *etant deterministe calibree avec la formule de Dupire*
- $\rho_{1,2}(t, X_{1,t}, X_{2,t}) = \dfrac{\sigma_1^2(X_1,t)+\sigma_2^2(X_2,t)-\sigma_3^2(X_3,t)}{2.\sigma_1(X_1,t).\sigma_2(X_2,t)}$



MODÈLE HYBRIDE 2F ACTION / TAUX DE CHANGE

- Plan de la seconde séance:

1. 1. Rappel 1ere partie
2. Modèle Hybride 2F Action/Taux de change
    1. Quantoisation
    2. Call Quanto FORDOM
    3. Modèle 2F
3. Model Hybride 3F Taux d'intérêt /Taux de change
4. TD

2.1 QUANTOISATION

- **Definition:** Un payoff dit « Quanto » est un payoff lié à un actif étranger considéré du point de vue d'un investisseur domestique avec un taux de change constant fixé à la signature du contrat.
- Example: Call Quanto FOR/DOM de strike K et maturité T a pour payoff $[X_T - K]_+$payé en FOR
  - $Ainsi,$

$\mathrm{CallQuanto}(\mathrm{t}, \mathrm{FOR/DOM}, \mathrm{K}, \mathrm{T}) = E^f\left[\frac{B_t^f}{B_T^f}.(X_T - K)_+\right]$ (x facteur constant)

2.2 CALL QUANTO FOR/DOM

- Prix du Call Quanto
  - Sous Q^d: $dX_t = X_t.\left((r_t^d - r_t^f).dt + \sigma_t^x.dW_t^X\right)$
  - Or
  - $E_t^f\left[\frac{B_t^f}{B_T^f}.V_T^f\right] = E_t^d\left[Z_{t,T}.\frac{B_t^f}{B_T^f}.V_T^f\right]$ ou $Z_{t,T} = \frac{X_T}{X_t}.\frac{B_T^f}{B_t^f}.\frac{B_t^d}{B_T^d} = e\wedge\left(-\frac{1}{2}.\int_t^T \sigma_s^2.ds + \int_t^T \sigma_s.dW_s^X s\right)$
- Ainsi $Z_{t,T}$ est la densité de Radon-Nykodym qui permet de "passer" de la mesure risqué neutre domestique a celle étrangère (Théorème de Girsanov)
- $\overline{W}_t^X = W_t^X - \sigma_t.t$ est un MBSU dans l'économie étrangère
- Ainsi,
- Sous Q^f: $dX_t = X_t.\left((r_t^d - r_t^f).dt + \sigma_t^x.(d\overline{W}_t^X + \sigma_t^X.dt)\right)$
- $dX_t = X_t.\left((r_t^d - r_t^f + \sigma_t^{x2}).dt + \sigma_t^x.d\overline{W}_t^X\right)$
  - $\sigma_t^{x2}.dt$ terme de correction Quanto

2.2 CALL QUANTO FOR/DOM

- Application formule de Black:
  - $CallQuanto^{FOR}(t, FORDOM, K, T) = \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}\left[e^{\int_t^T \sigma_s^2 . ds} . X_t . B^f(t,T) . N\big(d_1(t,T)\big) - K . B^d(t,T) . N(d_2(t,T)\right]$
  - $d_1(t,T)=\frac{1}{\sqrt{\int_t^T \sigma_s^2 . ds}} . \left[\ln\left(\frac{X_t}{K}\right) + - \int_t^T (r_s^d - r_s^f + \frac{1}{2} . \sigma_s^2) . ds\right]$
  - $d_2(t,T)=\mathrm{d1(t,T)} + \sqrt{\int_t^T \sigma_s^2 . ds}$

2.3 MODELE HYBRIDE ACTION/TAUX DE CHANGE

- Soit S_t un actif échangeable de l'économie étrangère et X_t le taux de change FOR/DOM.
- Sous Q^f: $dS_t = S_t.\left(r_t^f.dt + \sigma_t^S.dW_t^S\right)$
- Sous Q^d: $dX_t = X_t.\left((r_t^d - r_t^f).dt + \sigma_t^x.dW_t^X\right)$
- $d < W_t^S, W_t^X > = \rho.dt$

2.3 MODELE HYBRIDE ACTION/TAUX DE CHANGE

- Definition: le Call Action Quanto sur S de strike K et maturité T est l'option d'achat de S a strike K paye en monnaie domestique a un taux fixé initialement α. Pout simplifier les formules on considére $\alpha = 1$
- Ainsi,
- $CallQuantoS(FORDOM, K, T) = E_t^d\left[B_t^d . \frac{[S_T - K]+}{B_T^d}\right]$
- or
- $E_t^f\left[\frac{B_t^f}{B_T^f} . V_T^f\right] = E_t^d\left[Z_{t,T} . \frac{B_t^f}{B_T^f} . V_T^f\right]$ ou $Z_{t,T} = \frac{X_T}{X_t} . \frac{B_T^f}{B_t^f} . \frac{B_t^d}{B_T^d} = e\hat{}\left(-\frac{1}{2} . \int_t^T \sigma_s^2 . ds + \int_t^T \sigma_s . dW_s^X s\right)$
- Ainsi $Z_{t,T}$ est la densité de Radon-Nykodym qui permet de "passer" de la mesure risqué neutre domestique a celle étrangère (Théorème de Girsanov)
- $\overline{W}_t^S = W_t^S + \rho . \sigma_t^X . t$ est un MBSU dans l'économie domestique
- Dans l'économie domestique: $dS_t = S_t . \left(r_t^f . dt + \sigma_t^S . (dW_t^S - \rho . \sigma_t^X . dt\right)$
- $dS_t = S_t . \left((r_t^f . -\rho . \sigma_t^X . \sigma_t^S) . dt + \sigma_t^S . (dW_t^S\right)$

2.3 MODELE HYBRIDE ACTION/TAUX DE CHANGE

- Application formule de Black:
  - $CallQuanto^{S}(t, FORDOM, K, T) = \frac{B^{d}(t,T)}{B^{f}(t,T)} . e^{-\int_t^T \rho.\sigma_s^X \sigma_s^S.ds} . S_t . N\left(d_1(t,T)\right) - K . B^{d}(t,T) . N(d_2(t,T))$
  - $d_1(t,T) = \frac{1}{\sqrt{\int_t^T \sigma{S}_s^2.ds}} . \left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \int_t^T (r_s^f - \int_t^T \rho.\sigma_s^X \sigma_s^S.ds - \frac{1}{2}.\sigma{S}_s^2).ds\right]$
  - $d_2(t,T) = \mathrm{d}_1(\mathrm{t},\mathrm{T}) + \sqrt{\int_t^T \sigma{S}_s^2.ds}$

MODÈLE HYBRIDE 3F TAUX D'INTÉRÊT / TAUX DE CHANGE

- Plan de la seconde séance:

1. 1. Rappel 1ere partie
2. Modèle Hybride 2F Action/Taux de change
3. Model Hybride 3F Taux d'intérêt /Taux de change
   1. Equations de diffusion
   2. Formule fermée prix du Calls
4. TD

3.1 ÉQUATIONS DE DIFFUSION MODEL 3F

- On suppose les taux d'intérêt stochastiques (cadre HJM cf. partie taux d'interet)
  - ➔ taux cours Gaussiens
  - $dr_t^d = \mu_t^d.dt + \sigma_t^d.dW_t^d$ sous Q^d
  - $dr_t^f = \mu_t^f.dt + \sigma_t^f.dW_t^f$ sous Q^f
  - $\frac{dX_t}{X_t} = \left(r_t^d - r_t^f\right).dt + \sigma_t^X.dW_t^X$ sous Q^d
  - Avec
    - $< dW_t^X, dW_t^d > = \rho_{X,d}$
    - $< dW_t^X, dW_t^f > = \rho_{X,f}$
    - $< dW_t^d, dW_t^f > = \rho_{d,f}$

3.1 ÉQUATIONS DE DIFFUSION MODEL 3F

- Dans le cadre HJM, l'équation du prix du zéro coupon de maturité T, $B^i(t,T)$ s'écrit:
  - $\frac{dB^i(t,T)}{B^i(t,T)} = r_t^i.dt \ - \Gamma^i(t,T).dW_t^i$ sous Q^i
  - avec $i \in \{d,f\}$
  - Et $\Gamma^i(t,T) = f\left((\sigma_t^i),t,T\right)$

3.2 FORMULE FERMÉE CALL

- Calcul du prix du Call FOR/DOM:
- $Call(FORDOM, K, T) = E_t^d \left[B_t^d . \frac{[X_T - K]+}{B_T^d} \right]$
- Changement du numéraire de risqué neutre domestique a "T-Forward" (le numéraire étant $B^d(t,T)$)
  - Sous la mesure domestique T-Forward tout actif échangeable actualisé au zéro coupon $B^d(t,T)$ est martingale
- $Call(FORDOM, K, T) = B^d(t,T). E_t^{d,T}\left[[X_T - K] + \right]$
- On pose $S_t = X_t . \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}$. On remarque que $S_T = X_T$.

3.2 FORMULE FERMÉE CALL

- On pose $S_t = X_t.\frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}$. On remarque que $S_T = X_T$
- Ainsi $Call(FORDOM, K, T) = B^d(t,T).E_t^{d,T}\left[[S_T - K] +\right]$
  - Or $(X_t.B^f(t,T))$ est un actif échangeable sous Q^d, donc $\mathrm{S_t} = \frac{X_t.B^f(t,T)}{B^d(t,T)}$ est martingale
- Appliquons Ito à pose $S_t = X_t.\frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}$

3.2 FORMULE FERMÉE CALL

- $dS_t = d(X_t.\frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)})$
- $= \cdots dt + \frac{X_t}{B^d(t,T)}.dB^f(t,T) + \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}.dX_t + B^f(t,T).X_t.d(\frac{1}{B^d(t,T)})$
- $= \cdots dt + \frac{X_t.B^f(t,T)}{B^d(t,T)}(r_t^f.dt - \Gamma^f(t,T).dW_t^f) + \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}.X_t.\left((r_t^d - r_t^f).dt + \sigma_t^X.dW_t^X\right) - B^f(t,T).X_t.\frac{1}{B^d(t,T)}(r_t^d.dt - \Gamma^d(t,T).dW_t^d)$
- $dS_t = S_t.\left(\Gamma^d(t,T).dW_t^d - \Gamma^f(t,T).dW_t^f + \sigma_t^X.dW_t^X\right)$

3.2 FORMULE FERMÉE CALL

- $dS_t = S_t.\left(\Gamma^d(t,T).dW_t^d - \Gamma^f(t,T).dW_t^f + \sigma_t^X.dW_t^X\right)$
- $dS_t = S_t.\Sigma_t^T.dW_t$
- Où
- ${\Sigma_t^T}^2 = {\sigma_t^X}^2 + \Gamma^d(t,T)^2 + \Gamma^f(t,T)^2 + 2.\rho_{d,X}.\ \Gamma^d(t,T).\sigma_t^X - 2.\rho_{f,X}.\ \Gamma^f(t,T).\sigma_t^X + 2.\rho_{d,f}.\Gamma^d(t,T).\Gamma^f(t,T)$

3.2 FORMULE FERMÉE CALL

- On applique la formule de Black:
- $Call(t, FORDOM, K, T) = X_t . B^f(t,T) . N\big(d_1(t,T)\big) - K . B^d(t,T) . N(d_2(t,T))$
  - $d_1(t,T) = \frac{1}{\sqrt{\int_t^T \Sigma_s^2 . ds}} . \left[\ln\left(\frac{X_t}{K}\right) + \int_t^T (r_s^d - r_s^f - \frac{1}{2} . \Sigma_s^2) . ds\right]$
  - $d_2(t,T) = \mathrm{d}_1(\mathrm{t},\mathrm{T}) + \sqrt{\int_t^T \Sigma_s^2 . ds}$
- Minimum de Σ_s?

3.2 FORMULE FERMÉE CALL

- ${\Sigma_t^T}^2 = {\sigma_t^X}^2 + \Gamma^d(t,T)^2 + \Gamma^f(t,T)^2 + 2.\rho_{d,X}.\,\Gamma^d(t,T).\sigma_t^X - 2.\rho_{f,X}.\,\Gamma^f(t,T).\sigma_t^X + 2.\rho_{d,f}.\Gamma^d(t,T).\Gamma^f(t,T)$
- Donc
- $\min({\Sigma_t^T}^2) = \Gamma^d(t,T)^2 + \Gamma^f(t,T)^2 + 2.\rho_{d,f}.\Gamma^d(t,T).\Gamma^f(t,T)$ (quand $\sigma_t^X = 0$)
- ➔couverture avec options de taux pour des call « long terme »

TD

- Plan de la seconde séance:

1. 1. Rappel 1ere partie
2. Modèle Hybride 2F Action/Taux de change
3. Model Hybride 3F Taux d'intérêt /Taux de change
4. TD
   1. Exco ltd
   2. Linked Foreign Exchange Option (ELF-X)
   3. Forward Starting FX Option

4.1 EXCO LTD

- Enoncé : Voir pdf du cours
- 1.1 Spot 1.9712 / 32
- 1.2 Forward 1.9558 / 78
- 2.1 2 alternatives:
- Alternative A:
- Exco emprunte en USD, de sorte que avec les intérêts, le montant a payer soit $ 93.5m; Ce montant sera finance par les $93.5m que Exco reçoit avec ses ventes. Les USD a emprunter peuvent être échangés en GBP au taux spot. Le résultat de la transaction spot sera le montant en GBP que Exco reçoit maintenant
- Donc en chiffres:
- Exco emprunte (93.5M/(1+3.35%x0.25)=92,723,441 USD sur 92 jours au taux 3.35% (actualisation de 93.5m)
- Vend USD et achète GBP at 1.9732. Résultat: 46,991,405 GBP

4.1 EXCO LTD

- 3.1
- Alternative B:
- Exco fait une transaction forward en échangeant les 93.5m recevable dans 92j en GBP. En même temps, Exco emprunte du GBP de façon a ce que avec les intérêts, le montant a payer soit égal a au résultat de la transaction fwd de la vente des USD
- en chiffres:
- Exco vend 93.5m usd au taux fwd 1.9578 et obtient 47,757,687 GBP
- elle emprunte du GBP a 6.50% sur 92j. Le montant a emprunter est alors de GBP 46,994,034 (actualisation a 1/(1+6.5%x0.25))
- Donc dans ce cas, l'alternative B fournit un meilleur résultat ! Difference de £2,629
- Explication: le fait que les taux gbp a 6% sont supérieurs au taux usd de 2.75% est reflété dans le prix forward. Mais c'est le fait que la marge de 50bps au dessus du libor en GBP comparé a une marge de 60bps en USD, rend l'emprunt en GBP a 6.50% moins cher que l'emprunt en USD a 3.35%
- Cela montre aussi qu'il n'est pas possible de comparer les taux d' intérêt de différentes devises juste en comparant le taux absolu. Ici l'emprunt du GBP a 6.50% était moins cher que l'emprunt des USD a 3.35%
- Donc Exco doit exécuter l'alternative B et ainsi elle couvre ses expositions futures des ventes de sa filiale US

4.2 LINKED FOREIGN EXCHANGE OPTION (ELF-X)

1. 2 actifs stochastiques indépendants ➔ au moins 2 dimensions au problèmes de couvertures/pricing
2. $\pi_t^f(y) = E_t^f\left[\frac{B_t^f}{B_T^f}.Y\right]$

$$\pi_t^d(y) = E_t^d\left[\frac{B_t^d}{B_T^d}.X_T.Y\right]$$

   $X_t.\pi_t^f(y) = \pi_t^d(y)$
   ➔ on en deduit l'equation de changement de mesure
3. $W_t^d = W_t^f + \rho.\sigma_t^X.t$ est un MBSU dans l'économie domestique
4. $C_t = E_t^d[\frac{B_t^d}{B_T^d}.[X_T - K]_+.S_T^f]$
5. $dS_t^f = S_t^f.\left((r_t^f.-\rho.\sigma_t^X.\sigma_t^S).dt + \sigma_t^S.(dW_t^d)\right)$

$$S_t^f = \frac{S_0^f}{B_t^f}.e^{\int_0^t -\rho.\sigma_s^S.\sigma_s^X.ds - \frac{1}{2}.\sigma_s^{S^2}.ds + \sigma_s^S.dW_s^d}$$

4.2 LINKED FOREIGN EXCHANGE OPTION (ELF-X)

6. $C_t = E_t^{P*}[\frac{B_t^d}{B_T^d}.\frac{B_T^f}{B_t^f}.e^{\int_0^t -\rho.\sigma_s^S.\,\sigma_s^X.ds}.[X_T - K]_+]$

Avec $\frac{dX_t}{X_t} = \left(r_t^d - r_t^f + \rho.\ \sigma_t^S.\ \sigma_t^X\right).dt + \sigma_t^X.dW_t^{*,X}$ sous Q^{P*}

7. Application formule de Black

$$C_t = \frac{B^d(t,T)}{B^f(t,T)}.e^{\int_0^t -\rho.\sigma_s^S.\,\sigma_s^X.ds}.E_t^{P*}[[X_T - K]_+]$$

Ou $E_t^{P*}[X_T] = X_t.\frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}.e^{\int_0^t +\rho.\sigma_s^S.\,\sigma_s^X.ds}$

4.3 FORWARD STARTING QAUNTO FX OPTION

1. $dX_t = X_t.\left((r_t^d - r_t^f + \sigma_t^{x\,2}).dt + \sigma_t^x.d\overline{W}_t^X\right)$
2. Prix d'un actif en mesure risque neutre foreign
3. a. $Q(t,T,K) = E_t^f\left[\frac{B_t^f}{B_T^f}.[X_T - K]_+\right]$

3.b. Application formule de Black:

- $Q(t,K,T) = X_t.\frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}\left[e^{\int_t^T \sigma_s^2.ds}.X_t.B^f(t,T).N\left(d_1(t,T)\right) - K.B^d(t,T).N(d_2(t,T)\right]$
- $d_1(t,T)=\frac{1}{\sqrt{\int_t^T \sigma_s^2.ds}}.\left[\ln\left(\frac{X_t}{K}\right) + -\int_t^T (r_s^d - r_s^f + \frac{1}{2}.\sigma_s^2).ds\right]$
- $d_2(t,T)=\mathrm{d1(t,T)} + \sqrt{\int_t^T \sigma_s^2.ds}$

4.3 FORWARD STARTING QUANTO FX OPTION

4.a $FSQ(t,T_1,T_2) = Q\left(t,T_2,X_{T_1}\right)$

- 4.b $Q\left(T_1,T_2,K_{T_1}\right) = X_{T_1}^2.\frac{B^f(T_1,T_2)}{B^d(T_1,T_2)}\left[e^{\int_{T_1}^{T_2}\sigma_s^2.ds} \quad .B^f(T_1,T_2).N\left(d_1(T_1,T_2)\right) - B^d(T_1,T_2).N(d_2(T_1,T_2)\right]$
- $Q\left(T_1,T_2,K_{T_1}\right) = X_{T_1}^2.\alpha_{T_1}$
- $d_1(T_1,T_2)=\frac{1}{\sqrt{\int_{T_1}^{T_2}\sigma_s^2.ds}}.\left[\int_{T_1}^{T_2}(r_s^d - r_s^f + \frac{1}{2}.\sigma_s^2).ds\right]$
- $d_2(T_1,T_2)=\mathrm{d1}(\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2) + \sqrt{\int_{T_1}^{T_2}\sigma_s^2.ds}$

4.3 FORWARD STARTING QUANTO FX OPTION

4.c $FSQ(t,T_1,T_2) = E_t^d\left[\frac{B_t^d}{B_{T_2}^d}.X_{T_2}.\left[X_{T_2} - X_{T_1}\right]_+\right]$

$$FSQ(t,T_1,T_2) = E_t^d\left[\frac{B_t^d}{B_{T_1}^d}.\frac{B_{T_1}^d}{B_{T_2}^d}.X_{T_2}.\left[X_{T_2} - X_{T_1}\right]_+\right]$$

$FSQ(t,T_1,T_2) = E_t^d\left[\frac{B_t^d}{B_{T_1}^d}.E_{T_1}^d\left[\frac{B_{T_1}^d}{B_{T_2}^d}.X_{T_2}.\left[X_{T_2} - X_{T_1}\right]_+\right]\right]$ espérance conditionelle (ower property)

$$FSQ(t,T_1,T_2) = E_t^d\left[\frac{B_t^d}{B_{T_1}^d}.Q(T_1,T_2,X_{T_1})\right]$$

4.3 FORWARD STARTING QUANTO FX OPTION

4.d $FSQ(t,T_1,T_2) = E_t^d\left[\frac{B_t^d}{B_{T_1}^d}.Q(T_1,T_2,X_{T_1})\right]$

$Q(T_1,T_2,K_{T_1}) = X_{T_1}^2.\alpha_{T_1}$

$FSQ(t,T_1,T_2) = B^d(t,T_1).\alpha_{T_1}.E_t^d\left[X_{T_1}^2\right]$

Or $X_{T_1} = X_t.\frac{B_t^d}{B_{T_1}^d}.\frac{B_{T_1}^f}{B_t^f}.e^{-\frac{1}{2}\int_t^{T_1}\sigma_s^2.ds+\int_t^{T_1}\sigma_s.dW_s}$

Thus

$$FSQ(t,T_1,T_2) = X_t^2.\alpha_{T_1}.\frac{B^f(t,T_1)^2}{B^d(t,T_1)}.e^{-\int_t^{T_1}\sigma_s^2.ds+2.\int_t^{T_1}\sigma_s.dW_s}$$

$$\beta_{T_1} = \alpha_{T_1}.\frac{B^f(t,T_1)^2}{B^d(t,T_1)}.e^{-\int_t^{T_1}\sigma_s^2.ds+2.\int_t^{T_1}\sigma_s.dW_s}$$

4.3 FORWARD STARTING QUANTO FX OPTION

5.a esperance conditionelle ➔ $QCl(t, T_1, T_2) = \frac{FSQ(T_1, T_1, T_2)}{X_{T_1}}$

5.b $QCl(t, T_1, T_2) = E_t^d \left[\frac{B_t^d}{B_{T_1}^d} . QCl(T_1, T_1, T_2) \right]$ esperance conditionelle

$$QCl(t, T_1, T_2) = E_t^d \left[\frac{B_t^d}{B_{T_1}^d} . \frac{FSQ(T_1, T_1, T_2)}{X_{T_1}} \right]$$

$$QCl(t, T_1, T_2) = E_t^d \left[\frac{B_t^d}{B_{T_1}^d} . \frac{\beta_{T_1} . X_{T_1}^2}{X_{T_1}} \right]$$

$$QCl(t, T_1, T_2) = X_t . B^f(t, T_1) . \beta_{T_1} .$$