INTRODUCTION À LA MODÉLISATION DES TAUX DE CHANGE

ANAS ELKADDOURI, ECOLE CENTRALE PARIS

Résumé. Ce papier est constitué d'une série de deux conférences données à l'Ecole Centrale Paris (ce cours est complété par une troisième conférence qui porte sur l'aspect financier dit "trading"). Il s'agit d'une introduction à la modélisation mathématiques des taux de change. On établit d'abord l'équation générale de la dynamique des taux de change et on en déduit les prix de produits dérivés simples dans le cadre Black-Scholes. Une attention particulière est portée aux spécificités du marché des taux de change (notion de produit compo/quanto & symétrie). Enfin on considère deux modèles hybrides simples : action/taux de change et taux d'intêret/taux de change et on établit les prix de d'options vanilles dans ces hypothèses.
Le lecteur trouvera à la fin du document, une série d'exercices lui permettant de mettre en oeuvre les connaissances aquises durant ce cours (aussi bien durant la conférence quantitative que durant la conférence "trading").

1. Prix du contrat Forward et dynamique des taux de change

Supposons l'existence de deux économies, une économie domestique (la devise est DOM) et une économie étrangère ou $foreign$ (la devise est FOR).
Notons X_t le taux de change FORDOM à la date t c-à-d $1(FOR) = X_t(DOM)$.

1.1. **Prix du contrat Forward.** Le Forward de maturité T est l'obligation de délivrer à la date T une unité FOR contre $F_{t,T}$ DOM. Aucun flux ne survient à la date de conclusion.
Considérons les deux portefeuilles autofinancés suivants :

- Portefeuille A : A t, achat d'un zéro-coupon étranger d'échéance T $B^f(t,T)$. A T, on reçoit 1 FOR.
- Portefeuille B : A t, achat de $F_{t,T}$ zéro-coupon domestique d'échéance T et conclusion d'un contrat Forward de maturité T. A T, On reçoit $F_{t,T}$ DOM que j'échange contre 1 FOR.

Par AOA :

$$B^f(t,T) \cdot X_t = F_{t,T} \cdot B^d(t,T)$$

ainsi,

$$F_{t,T} = \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)} \cdot X_t \tag{1.1}$$

Notons B_t^d et B_t^f réspectivement les processus de cash domestique et étranger, et r_t^d et r_t^f les taux courts sans risque doméstique et étranger. Alors :

$$dB_t^d = r_t^d \cdot B_t^d \cdot dt$$

$$dB_t^f = r_t^f \cdot B_t^f \cdot dt$$

Date: version 2, Janvier, 2012.

d'où,

$$B^d(t,T) = E_t^d\left[\frac{B_t^d}{B_T^d}\right] = E_t^d\left[e^{\int_t^T -r_s^d\cdot dt}\right] \tag{1.2}$$

$$B^f(t,T) = E_t^f\left[\frac{B_t^f}{B_T^f}\right] = E_t^f\left[e^{\int_t^T -r_s^f\cdot dt}\right] \tag{1.3}$$

Ainsi, en cas de taux courts deterministes :

$$F_{t,T} = X_t \cdot e^{\int_t^T (r_s^d - r_s^f)\cdot dt} \tag{1.4}$$

1.2. **Dynamique du taux de change.** Considérons le point de vue d'un investisseur domestique (tous les flux sont évalués dans la monnaie DOM). On a donc deux actifs de base, le cash doméstique B_t^d et le cash étranger en monnaie doméstique $B_t^f \cdot X_t$.
Par AOA, il existe une probabilité risque neutre domestique Q_d sous laquelle tout portefeuille autofinancé admissible écrit en monnaie domestique a pour rendement r_t^d, autrement dit, si A_t est la valeur d'un tel protefeuille, alors $\frac{A_t}{B_t^d}$ est martingale.

$$dB_t^d = r_t^d \cdot B_t^d \cdot dt$$

$$dB_t^f = r_t^f \cdot B_t^f \cdot dt$$

Supposons la dynamique suivante du taux de change :

$$dX_t = X_t \cdot (\alpha_t \cdot dt + \sigma_t^X \cdot dW_t^X) \tag{1.5}$$

où W_t^X est un mouvement brownien unidimentionnel standard sous la probabilité Q_d.

$$\begin{aligned} d(B_t^f X_t) &= X_t dB_t^f + B_t^f dX_t + < X_t, B_t^f > \\ &= X_t B_t^f \left((\alpha_t + r_t^f)dt + \sigma_t^X \cdot dW_t^X\right) \end{aligned}$$

Or $B_t^f X_t$ (cash étranger vue par un investisseur domestique) est un actif échangeable dans l'économie domestique. Donc par AOA on sait que $B_t^f X_t$ à r^d comme rendement.
Ainsi,

$$\alpha_t = r_t^d - r_t^f \tag{1.6}$$

Finalement, sous la probabilité risque neutre domestique,

$$dX_t = X_t \cdot \left((r_t^d - r_t^f)\cdot dt + \sigma_t^X \cdot dW_t^X\right) \tag{1.7}$$

Remarque 1. *Le taux de change X_t n'est pas un actif échangeable ! son rendement n'est pas égal à r_t^d dans la mesure risque neutre domestique.*

2. QUELQUES PARTICULARITÉ DES TAUX DE CHANGE

2.1. **La symétrie des taux de change.** La symétrie est une des particularités qui distinguent les marchés des taux de change des autres marchés. En effet, si $EURUSD = 1.25$ alors il existe un taux de change USDEUR tq $USDEUR = 0.8$. Ainsi, si X_t appartient à une certaine classe de modèle, $1/X_t$ devrait appartenir à la même classe de modèle. Nous allons vérifier cette propriété dans le cadre d'un modèle lognormale à volatilité deterministe (fonction du temps).
Nous nous limitons à un modèle à volatilité déterministe dans la suite de cette section ($\sigma = \sigma(t)$).
Dans la mesure risque neutre domestique Q_d :

$$dX_t = X_t \cdot \left((r_t^d - r_t^f) \cdot dt + \sigma_t^X \cdot dW_t^X \right)$$

Notons $\tilde{X}_t = 1/X_t$. Soit $\tilde{X}_t = f(X_t)$ avec $f(x) = 1/x$.

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t &= df(X_t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + 1/2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}d < X_t, X_t > \\ &= \tilde{X}_t \left[((r_t^f - r_t^d) + \sigma^2)dt - \sigma dW_t^X \right] \end{aligned} \tag{2.1}$$

Rappelons que l'équation (2.1) est valide dans la mesure risque neutre domestique. Exprimons cette équation dans la mesure risque neutre étrangère. Soit A^f un actif échangeable dans l'économie étrangère de payoff V_T^f à T et de valeur à la date t, V_t^d et V_t^f respectivement du point de vue de l'investisseur domestique et étranger.

$$V_t^f = E_t^f \left[\frac{V_T^f}{B_T^f} \right]$$

et

$$V_t^d = E_t^d \left[\frac{V_T^f X_T}{B_T^d} \right]$$

or $\forall t$,

$$V_t^d = X_t V_t^f$$

donc,

$$X_t E_t^f \left[\frac{V_T^f}{B_T^f} \right] = E_t^d \left[\frac{V_T^f X_T}{B_T^d} \right]$$

Notons $Z_t = \frac{X_t}{X_0} \frac{B_t^f}{B_0^f} \frac{B_0^d}{B_t^d} = e^{(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds) + \int_0^t \sigma_s dW_s^X}$.
ainsi,

$$E_t^f \left[\frac{V_T^f}{B_T^f} \right] = E_t^d \left[Z_T \cdot \frac{V_T^f}{B_T^f} \right] \tag{2.2}$$

Sachant que $E^d[Z_T] = Z_0 = 1$ et sigma bornée, on déduit que Z_t est la densité de Radon-Nykodym qui permet de "passer" de la mesure risque neutre domestique à la mesure risque neutre étrangère (théorème de Girsanov). On a donc $\tilde{W}_t^X = W_t^X - \sigma_t t$ est un MBSU dans l'économie étrangère.
Finalement sous la mesure risque neutre étrangère :

$$d\tilde{X}_t = \tilde{X}_t \left[(r_t^f - r_t^d)dt - \sigma d\tilde{W}_t^X \right] \tag{2.3}$$

$\tilde{X}_t$ appartient donc bien à la même classe de modèle et le rendement de $\tilde{X}_t$ dans la mesure étrangère est cohérent.

Remarque 2. *Dans le cadre des taux de change, il est indispendable de prêter une attention particulière à la mesure dans laquelle on exprime les équations et de quel point de vue on se place (économie domestique ou étrangère). Le calcul précédent en est un exemple.*

Exercice 1. *Refaire le calcul précedent en considérant un modèle à volatilité locale puis un modèle heston.*
- *Modèle à volatilité locale :* $dX_t/X_t = (r_t^d - r_t^f)dt + \sigma(X_t,t)dW_t^X$ *avec* $(x,t) \longmapsto \sigma(x,t)$ *une fonction deterministe.*
- *Modèle heston :* $dX_t/X_t = (r_t^d - r_t^f)dt + \sqrt{\nu_t}dW_t^X$ *et* $d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}dW_t^\nu$ *.*

2.2. **Trio de devises.** Considérons à présent un trio de devises : USD, EUR, GBP. si on note $X_1 = EURUSD$, $X_2 = USDGBP$ et $X_3 = EURGBP$. Alors on a $X_3 = X_1 \cdot X_2$. Ainsi, si X_1 et X_2 appartiennent à une certaine classe de modèles, alors $X_1 \cdot X_2$ doit l'être également.
Dans la mesure risque neutre USD :

$$dX_{1,t} = X_{1,t} \cdot \left((r_t^{usd} - r_t^{eur}) \cdot dt + \sigma^{X_1}{}_t \cdot dW^{X_1}{}_t\right)$$

Dans la mesure risque neutre GBP :

$$dX_{2,t} = X_{2,t} \cdot \left((r_t^{gbp} - r_t^{usd}) \cdot dt + \sigma^{X_2}{}_t \cdot dW^{X_2}{}_t\right)$$

avec

$$d < W_t^{X_1}, W_t^{X_2} >= \rho_{1,2}dt$$

Exprimons la première équation dans la mesure risque neutre GBP. Pour passer de la mesure USD à la mesure GBP nous allons utiliser la densité $Z_t = \frac{X_{2,t}}{X_{2,0}}\frac{B_t^{usd}}{B_0^{usd}}\frac{B_0^{gbp}}{B_t^{gbp}} = e^{(} - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^{X_2}ds) + \int_0^t \sigma_s^{X_2}dW_s^{X_2}$.
D'après le théorème de Girsanov, $\tilde{W}_t^{X_1} = W_t^{X_1} + \rho_{1,2} \cdot \sigma^{X_2}{}_t \cdot t$ est un MBSU dans la mesure GBP. Ainsi la première équation s'exprime comme suit dans la mesure risque neutre GBP :

$$dX_{1,t} = X_{1,t} \cdot \left((r_t^{usd} - r_t^{eur} - \rho_{1,2}\sigma_t^{X_1}\sigma_t^{X_2}) \cdot dt + \sigma_t^{X_1} \cdot d\tilde{W}_t^{X_1}\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} d(X_{1,t}X_{2,t}) &= X_{1,t}dX_{2,t} + X_{2,t}dX_{1,t} + d < X_{1,t}, X_{2,t} > \\ &= X_{1,t}X_{2,t}\left((r_t^{eur} - r_t^{gbp}) \cdot dt + (\sigma_t^{X_1} \cdot d\tilde{W}_t^{X_1} + \sigma_t^{X_2} \cdot dW_t^{X_2})\right) \end{aligned}$$

Finalement X_3 appartient bien à la même classe de modèle que X_1 et X_2.

$$\begin{aligned} d(X_{3,t}) &= X_{3,t}\left((r_t^{eur} - r_t^{gbp}) \cdot dt + \sigma_t^{X_1} \cdot d\tilde{W}_t^{X_1} + \sigma_t^{X_2} \cdot dW_t^{X_2}\right) \\ &= X_{3,t}\left((r_t^{eur} - r_t^{gbp}) \cdot dt + (\sigma_t^{X_3} \cdot dW_t^{X_3}\right) \qquad (2.4) \end{aligned}$$

Exercice 2. *Refaire le calcul en considérant un modèle à volatilité locale puis un modèle heston de type heston.*

Exercice 3. *Exprimer* $\sigma_t^{X_3}$ *en fonction de* $\sigma_t^{X_1}$*,* $\sigma_t^{X_2}$ *et de* $\rho_{1,2}$*.*

Exercice 4. *Calculer la correlation entre* $W_t^{X_3}$ *et* $\tilde{W}_t^{X_1}$ *et* $W_t^{X_2}$ *respectivement.*

2.2.1. *Symétrie Call / Put.*

Definition 1. *Un Call sur devise est le droit d'acheter à une date T une certaine quantité de devises à un prix K fixé. Le Put est le droit de vendre.*

$$\begin{aligned}
Call(FORDOM, K, T) &= E^d[B_t^d \cdot \frac{(X_T - K)_+}{B_T^d}] \\
&= E^d[K \cdot X_t \cdot \frac{X_T}{X_t} \frac{B_T^f}{B_t^f} \frac{B_t^d}{B_T^d} \frac{\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{X_T}\right)_+}{B_T^f}] \\
&= X_t K E^f[\frac{\left(\tilde{K} - \tilde{X}\right)_+}{B_T^f}] \\
&= KPut(DOMFOR, \tilde{K}, T) \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

avec $\tilde{K} = \frac{1}{K}$ et $\tilde{X} = \frac{1}{X_t}$.
Autrement dit, un Call de strike K sur la devise FORDOM (investisseur domestique) vaut autant qu'un Put de strike $1/K$ sur la devise DOMFOR (investisseur étranger). Notons que volatilité implicite de ces deux options est égale (X_t et $\frac{1}{X_t}$ ont la meme volatilité).

2.2.2. *Formule fermées du Call.* On se place toujours dans le cadre d'un modèle lognormale (taux courts et volatilité deterministes).

$$\begin{aligned}
Call_t(FORDOM, K, T) &= E_t^d[\frac{B_t^d (X_T - K)_+}{B_T^d}] \\
&= B^d(t, T) E_t^d[(X_T - K)_+] \\
&= \frac{1}{B_T^f} B^d(t, T) E_t^d[(X_T \cdot B_T^f - K \cdot B_T^f)_+]
\end{aligned}$$

Rappelons que X_t n'est pas un actif échangeable. C'est $X_t \cdot B_t^f$ (cash étranger vue par un investisseur domestique) qui est échangeable. Le processus $X_t \cdot B_t^f$ a la meme volatilié que X_t et un rendement égale à r^d.
Finalement,

$$Call_t(FORDOM, K, T) = X_t B^f(t, T) N(d_1(t)) - K B^d(t, T) N(d_0(t)) \qquad (2.6)$$

$$avec, \begin{cases} d_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\int_t^T {\sigma_s^X}^2 ds}} [ln(\frac{X_t B^f(t,T)}{K B^d(t,T)}) - \frac{1}{2} \int_t^T {\sigma_s^X}^2 ds] \\ d_1(t) = d_0(t) + \sqrt{\int_t^T {\sigma_s^X}^2 ds}. \end{cases}$$

Le portefeuille de couverture se lit sur la formule :
- $B^f(t, T) N(d_0(t)) N(d_1(t))$ en cash étranger.
- $-K B^d(t, T) N(d_0(t))$ en cash domestique.

2.3. **Quantoisation.**

Definition 2. *Une option quanto est une option sur actif étranger avec un taux de change constant fixé à la signature du contrat.*

Exemple 1. *Un Call quanto-EUR sur l'EURUSD de strike K et de maturité T à pour payoff $[X_T - K]_+$ payé eu* ***EUR****.*
Ainsi $CallQuanto_t(EURUSD, K, T) = E^{eur}[\frac{B_t^{eur}(X_T - K)_+}{B_T^{eur}}]$.

Plaçons nous dans l'économie EUR. La dynamique du taux de change EURUSD s'écrit :

$$dX_t = X_t \cdot \Big((r_t^d - r_t^f + \sigma_{\mathbf{t}}^{\mathbf{X}\mathbf{2}}) \cdot dt + \sigma_t^X \cdot dW_t^X \Big)$$

Remarquons la 'correction quanto' qui apparaît via le terme $+\sigma^{X}{}_t^2 dt$ dans le rendement du taux de change.
On obtient après calcul :
(2.7)

$$CallQuanto_t^{for}(FORDOM, K, T) = \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)} \Big[e^{\int_t^T \sigma_s^{X\,2} ds} X_t B^f(t,T) N(d_1(t)) - K B^d(t,T) N(d_0(t)) \Big]$$

$$avec, \begin{cases} d_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\int_t^T \sigma_s^{X\,2} ds}} [\int_t^T \sigma_s^{X\,2} ds + ln(\frac{X_t B^f(t,T)}{K B^d(t,T)}) - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_s^{X\,2} ds] \\ d_1(t) = d_0(t) + \sqrt{\int_t^T \sigma_s^{X\,2} ds}. \end{cases}$$

3. Modèle hybride Action/Taux de change

Soit S_t un actif échangeable de l'économie étrangère et X_t le taux de change $FORDOM$.
On suppose les dynamique suivantes (dans leurs mesures naturelles respectives) :

$$dS_t = S_t \cdot \Big(r_t^f \cdot dt + \sigma_t^S \cdot dW_t^S \Big) \tag{3.1}$$

$$dX_t = X_t \cdot \Big((r_t^d - r_t^f) \cdot dt + \sigma_t^X \cdot dW_t^X \Big) \tag{3.2}$$

avec

$$d < W_t^S, W_t^X >= \rho_{X,S} dt \tag{3.3}$$

3.1. **Prix du Call quanto.** Considérons le Call sur l'action S_t de strike K et de maturité T **payé en monnaie domestique DOM**. On note V_t le prix à l'instant t de ce produit.
Ainsi,

$$V_t = E_t^d[\frac{B_t^d (S_T - K)_+}{B_T^d}]$$

Dans l'économie domestique la dynamique de S_t s'écrit :

$$dS_t = S_t \cdot \Big((r_t^f - \rho_{X,S} \sigma_t^X \sigma_t^S) \cdot dt + \sigma_t^S \cdot dW_t^S \Big)$$

Après calcul,

$$V_t = N(d_1(t)) S_t \frac{B^d(t,T)}{B^f(t,T)} e^{-\int_t^T \rho_{X,S} \sigma_s^X \sigma_s^S ds} - K B^d(t,T) N(d_0(t)) \tag{3.4}$$

$$avec, \begin{cases} d_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\int_t^T {\sigma_s^S}^2 ds}} [-\int_t^T \rho_{X,S}\sigma_s^X \sigma_s^S ds + ln(\frac{S_t}{KB^f(t,T)}) - \frac{1}{2}\int_t^T {\sigma_s^S}^2 ds] \\ d_1(t) = d_0(t) + \sqrt{\int_t^T {\sigma_s^S}^2 ds}. \end{cases}$$

3.2. **EDP d'évaluation 2D.** Soit un produit financier sur S_t de prix V_t et construisons un portefeuille de couverture à l'instant 0 :
- Δ_S quantité d'actif S_0 d'une valeur $\Delta_S S_0 X_0$.
- Δ_X quantité de cash FOR d'une valeur $\Delta_X X_0$.
- $(V_0 - \Delta_S S_0 X_0 - \Delta_X X_0)$ quantité de cash DOM d'une valeur $(V_0 - \Delta_S S_0 X_0 - \Delta_X X_0)$.

Variation des actifs $t \longmapsto t + dt$:
- $\Delta_X X_t \longmapsto \Delta_X X_t + r^f \Delta_X X_t dt + \Delta_X dX_t$.
- $(V_0 - \Delta_S S_0 X_0 - \Delta_X X_0) \longmapsto (V_0 - \Delta_S S_0 X_0 - \Delta_X X_0) + r^d(V_0 - \Delta_S S_0 X_0 - \Delta_X X_0)dt$.
- $\Delta_S S_0 X_0 \longmapsto \Delta_S S_0 X_0 + \Delta_S(X_t dS_t + S_t dX_t + < dX_t, dS_t >)$

Ainsi,

$$dV_t = r^f \Delta_X X_t dt + \Delta_X dX_t + r^d(V_0 - \Delta_S S_0 X_0 - \Delta_X X_0)dt + \Delta_S(X_t dS_t + S_t dX_t + < dX_t, dS_t > \tag{3.5}$$

Posons (pour simplifier les formules) dans la mesure domestique :

$$dS_t = S_t \cdot \left(\mu_S dt + \sigma_t^S \cdot dW_t^S\right) \tag{3.6}$$

et

$$dX_t = X_t \cdot \left(\mu_X dt + \sigma_t^X \cdot dW_t^X\right) \tag{3.7}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} dV_t &= r^d V_t dt + \Delta_S S_t X_t[\mu_S + \mu_X - r^d + \rho_{X,S}\sigma^X\sigma^S]dt + \Delta_X X_t(\mu_X + r^f - r^d)t \\ &+ \Delta_S S_t X_t[\sigma^X dW_t^X + \sigma^S dW_t^S] + \Delta_X X_t \sigma^X dW_t^X \end{aligned} \tag{3.8}$$

D'autre part, si $V_t(S_t, X_t, t) = V(x, y, t)$ est le prix du produit financier alors par Ito :

$$\begin{aligned} dV_t &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial x}dS_t + \frac{\partial V}{\partial y}dX_t + 1/2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < dS_t, dS_t > + 1/2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} < dX_t, dX_t > + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} < dS_t, dX_t > \\ &= [\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}S_t\mu_S + \frac{\partial V}{\partial y}X_t\mu_X + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \rho_{X,S}S_t X_t \sigma^S\sigma^X + 1/2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}{S_t}^2{\sigma^S}^2 + 1/2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}{X_t}^2{\sigma^X}^2] \cdot dt \\ &+ \frac{\partial V}{\partial x}S_t\sigma^S dW_t^S + \frac{\partial V}{\partial y}X_t\sigma^X dW_t^X \end{aligned} \tag{3.9}$$

Par AOA et en identifiant les deux équation de dV_t on obtient :

$$\begin{cases} \Delta_S = \frac{1}{X}\frac{\partial V}{\partial x} \\ \Delta_X = \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{S}{X}\frac{\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(r^f - \rho_{X,S}\sigma^X\sigma^S)x + \frac{\partial V}{\partial y}(r^d - r^f)y + 1/2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}{\sigma^S}^2 x^2 + 1/2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}{\sigma^X}^2 y^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\rho_{X,S}\sigma^X\sigma^S xy - r^d V_t = 0 \tag{3.10}$$

On pose $\tilde{x} = ln(x)$ et $\tilde{y} = ln(y)$. On obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}}(r^f - \rho_{X,S}\sigma^X\sigma^S - 1/2{\sigma^S}^2) + \frac{\partial V}{\partial \tilde{y}}(r^d - r^f - 1/2{\sigma^X}^2) + 1/2\frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{x}^2}{\sigma^S}^2 + 1/2\frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{y}^2}{\sigma^X}^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}}\rho_{X,S}\sigma^X\sigma^S - r^d V_t = 0 \tag{3.11}$$

Exemple 2. *Le Call quanto $[S_T - K]_+$ payé en DOM ne dépend pas de X_T à maturité. donc*

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0; \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} = 0 \tag{3.12}$$

On obtien l'équation d'évaluation 'quanto' (de dimension 1) :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}}(r^f - \rho_{X,S}\sigma^X\sigma^S - 1/2{\sigma^S}^2) + 1/2\frac{\partial^2 V}{\partial \tilde{x}^2}{\sigma^S}^2 - r^d V_t = 0 \tag{3.13}$$

4. Modèle hybride 3D taux d'intérêt/taux de change

Dans cette section nous allons établir le prix d'un call vanille dans le cadre d'un modèle hyrbide FX-IR. le taux de change suit une dynamique type BS et les taux court suivent une dynamique gaussienne (on s'inscrit dans le cadre HJM, cf cours des taux d'intérêt).

$$dr_t^d = \mu^d dt + \sigma^d dW_t^d \tag{4.1}$$

$$dr_t^f = \mu^f dt + \sigma^f dW_t^f \tag{4.2}$$

$$\frac{dX_t}{X_t} = (r_t^d - r_t^f)dt + \sigma^X dW_t^X \tag{4.3}$$

(4.4)

$$avec, \begin{cases} \rho_{X,d} = < dW^X, dW^d > \\ \rho_{X,f} = < dW^X, dW^f > \\ \rho_{d,f} = < dW^d, dW^f > \end{cases}$$

Proposition 1. *Dans le cadre HJM l'équation du prix à t du zéro coupon de maturité T, $B^i(t,T)$ ($i \in d, f$) s'écrit :*

$$\frac{dB^i(t,T)}{B^i(t,T)} = r_t^i dt - \Gamma^i(t,T)dW_t^i \tag{4.5}$$

avec $\Gamma^i(t,T) = f(\sigma_t)$.
(cf cours des taux d'intérêt pour une démonstration).

Par souci de simplification, on réécrit ces équations en utilisant un mouvement Brownien multi-dimentionel standard $\bar{B}_t = \begin{pmatrix} B_t^1 \\ B_t^2 \\ B_t^3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \frac{dB^d(t,T)}{B^d(t,T)} = r_t^d dt - \Gamma^d(t,T)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\bar{B}_t \\ \frac{dB^f(t,T)}{B^f(t,T)} = r_t^f dt - \Gamma^f(t,T)\begin{pmatrix} \rho_{d,f} \\ \sqrt{1-{\rho_{d,f}}^2} \\ 0 \end{pmatrix} d\bar{B}_t \\ \frac{dX_t}{X_t} = (r_t^d - r_t^f)dt + \sigma^X\begin{pmatrix} \rho_{X,d} \\ \tilde{\rho} \\ \sqrt{1-{\rho_{X,d}}^2-\tilde{\rho}^2} \end{pmatrix} d\bar{B}_t \end{cases}$$

$$Avec, \tilde{\rho} = \frac{\rho_{X,f} - \rho_{X,d}\rho_{d,f}}{\sqrt{1-{\rho_{d,f}}^2}}$$

Remarque 3. *On obtient la décompostion des mouvement browniens précédentes (dite décomposition de Cholesky) en utilisant l'algorithme de résolution 'LU'.*

Nous voulons calculer le prix d'un Call vanille de strike K et de maturité T.

$$\begin{aligned} Call(K,T) &= E_t^d[\frac{B_t^d[X_T-K]_+}{B_T^d}] \\ &= E_t^d[\frac{B_t^dB^d(T,T)}{B_T^dB^d(t,T)}\frac{B^d(t,T)[X_T-K]_+}{B^d(T,T)}] \end{aligned}$$

On pose $Z_t = \frac{B_t^dB^d(T,T)}{B_T^dB^d(t,T)}$.
On a $\forall t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} E_t^d[Z_t] &= E_t^d[\frac{B_t^dB^d(T,T)}{B_T^dB^d(t,T)}] \\ &= \frac{B^d(T,T)}{B^d(t,T)}E_t^d[\frac{B_t^d}{B_T^d}] \\ &= 1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

On applique donc le théorème de Girsanov pour se placer dans la mesure associée au numéraire $B^d(t,T)$ (appelée mesure T-Forward).
Ainsi,

$$\begin{aligned} Call(K,T) &= E_t^d[\frac{B^d(t,T)[X_T-K]_+}{B^d(T,T)}] \\ &= B^d(t,T)E_t^d[[X_T-K]_+] \end{aligned} \tag{4.7}$$

On not $S_t = \frac{B^f(t,T)X_t}{B^d(t,T)}$. Ainsi $S_T = X_T$. La dernière équation devient :

$$Call(K,T) = B^d(t,T)E_t^d[[S_T-K]_+] \tag{4.8}$$

On sait que $B^f(t,T)X_t$ est le zéro coupon étranger qui paie à maturité T vu par un investisseur domestique. $B^f(t,T)X_t$ est donc un actif échangeable. Or tout actif échangeable 'discounté' par le numéraire est une martingale (par AOA).
On en déduit que $S_t = \frac{B^f(t,T)X_t}{B^d(t,T)}$ est une martingale dans la mesure T-Forward, c-à-d $dS_t = \sigma^S dW_t^S$.
Par ailleurs :

$$\begin{aligned} dS_t &= d(\frac{B^f(t,T)X_t}{B^d(t,T)}) \\ &= \cdots dt + \frac{X_t}{B^d(t,T)}dB^f(t,T) + \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}dX_t + B^f(t,T)X_t d(\frac{1}{B^d(t,T)}) \\ &= \begin{pmatrix} -\Gamma^f(t,T)\rho_{d,f} + \sigma^X\rho^{X,d} + \Gamma^d(t,T) \\ -\Gamma^f(t,T)\sqrt{1-{\rho_{d,f}}^2} + \sigma^X\tilde{\rho} \\ \sigma^X\sqrt{1-{\rho_{X,d}}^2-\tilde{\rho}^2} \end{pmatrix} d\bar{B}_t \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ainsi, S_t est une martingale lognormale de volatilité $\Sigma_t^T = \int_t^T ||\Omega(t,T)||^2 ds$.
Après calcul,
(4.10)

$$\Sigma_t^T = {\sigma^X}^2 T + \int_t^T \Gamma^d(s,T)^2 ds + \int_t^T \Gamma^f(s,T)^2 ds - \rho_{X,f}\sigma^X \Gamma^f(s,T)ds + \rho_{X,d}\sigma^X \Gamma^d(s,T)ds + \rho_{d,f}\Gamma^d(s,T)\Gamma^f(s,T)ds$$

Finalement,

$$Call(K,T) = B^d(t,T)E_t^d[[S_T - K]_+] \tag{4.11}$$

$$Call_t(K,T) = N(d_1(t))X_t B^f(t,T) - KB^d(t,T)N(d_0(t)) \tag{4.12}$$

$$avec, \begin{cases} d_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\int_t^T {\Sigma_s^X}^2 ds}}[ln(\frac{X_t B^f(t,T)}{KB^d(t,T)}) - \frac{1}{2}\sqrt{\int_t^T {\Sigma_s^X}^2 ds}] \\ d_1(t) = d_0(t) + \sqrt{\int_t^T {\Sigma_s^X}^2 ds}. \end{cases}$$

Exercice 5. *Calculer le minimum de variance du processus de taux de change X_t étant données les volatilités domestiques, étrangères ainsi que les correlations $\Gamma^d(t,T), \Gamma^f(t,T), \rho^{d,f}, \rho^{X,d}, \rho^{X,f}$.*

5. Exercices d'application

5.1. Exercice portant sur la conférence "trading".

Exercice 6. *Exco Ltd, une PME basée en grande bretagne, a finalisé la vente de sa filiale Exco (North America) à la date du Mardi 8 juillet 2008 au profit de Abraxas International. Exco recevra 93.5 M\$ le vendredi 10 octobre, soit 94 jour plus tard (92 jours après la "spot value date").*
Le taux de change GBPUSD (livre sterling/dollar) a été très volatile durant les dernières années. Bien que le GBPEUR ait traité aux alentours de 1.95 - 2.00, Exco craint que la valeure de la livre augmente par rappot au dollar suite aux nombreuses notes négatives sur le dollar.

Objectifs de Exco
Exco a formulé deux besoins :
- *Eviter le risque de devise.*
- *Recevoir les fonds aujourd'hui plutot qu'attendre 3 mois.*

Données de marché
Votre desk de FX vous a transmis les données suivantes :
- *Taux FX : $1£ = 1.9720/24$ \$ spot et $155/153$ 92 jours plus tard.*
- *Taux d'interêt : US 3m $LIBOR = 2.75\%$ et UK 3m $LIBOR = 6\%$.*

Etant donné le risque de crédit de votre client, vous chargez 20 point de spread entre le bid et l'offer sur les transactions spot et forward.
Aussi, le credit spread de Exco est de 50bp pour l'emprûnt de GBP et 60bp pour le financement de l'USD.

Questions
(1) *Quelles sont les quotes bid et offer que vous communiqueriez à Exco concernant le spot FX et le forward FX 3mois (92 jours).*
(2) *Quels sont les taux d'emprûnt d'Exco en GBP et USD respectivement ?*

(3) *Quel est le meilleur moyen d'atteindre les objectifs de votre client ? en d'autres termes, quelles transactions doivent être réalisées pour obtenir le plus grand montant de GBP aujourd'hui ?*

(4) *En mettant en oeuvre la stratégie décrite dans le question précédente, quelle est la valeur en GBP du montant perçu aujourd'hui par le client ?*

5.2. Exercice portant sur les conférences "modélisation quantitative".

Exercice 7. *On considère deux marchés : l'un domestique, l'autre étranger. On note r^d (respectivement r^f) le taux sans risque constant domestique (resp. étranger). Notons B_t^d et B_t^f réspectivement les processus de cash domestique et étranger :*

$$dB_t^d = r^d \cdot B_t^d \cdot dt$$

$$dB_t^f = r^f \cdot B_t^f \cdot dt$$

On dispose sur le marché étranger d'un titre (S_t^f). Sous la probabilité risque neutre étrangère la dynamique de (S_t^f) s'écrit :

$$dS_t^f = S_t^f \cdot \left(r_t^f \cdot dt + < \sigma_t^S, dW_t^f > \right)$$

où (W_t^f) est un mouvement Brownien 2 dimentionnel et σ_t^S un vecteur colonne de taille 2. $< .,. >$ est le produit scalaire de dimension deux. Soit X_t le taux de change FORDOM c'est à dire qu'une unité étrangère vaut X_t unités domestiques. On suppose que sous la probabilité risque neutre domestique,

$$dX_t = X_t \cdot \left((r_t^d - r_t^f) \cdot dt + < \sigma_t^X, dW_t^d > \right)$$

où (W_t^d) est un mouvement Borownien 2 dimentionnel et σ_t^X un vecteur colonne de taille 2. $F_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ représente l'information disponible à l'instant t.
Soit Q_d (resp. Q_f) la probabilité risque neutre domestique (resp. étrangère) qui fait des prix domestiques (resp. étrangers) écrits dans le numéraire cash domestique (resp. étranger) des F_t martingales.

(1) *Pourquoi avoir choisi la dimension 2 ?*

(2) *Soit Y un flux étranger F_T mesurable (flux payé à l'instant T).*
Expliciter $\pi_t^f(y)$ le prix en monnaie étrangère à l'instant t de Y à l'aide de Q_f (c-à-d sous forme d'une espérance conditionnelle dans la mesure risque neutre étrangère).
Ce flux étranger correspond à un flux domestique $Y.X_T$; expliciter $\pi_t^d(y)$ le prix en monnaie domestique de ce flux à l'aide de Q_d.
Prouver que $\pi_t^d(y) = X_t \pi_t^f(y)$.
En déduire que :

$$E^{Q_e}[Y|F_t] = E^{Q_d}[\frac{\eta_t}{\eta_T} Y|F_t]$$

avec $\eta_t = exp(< \sigma^X, W_t > - \frac{1}{2}||\sigma^X||^2 t)$.

(3) *En déduire la relation entre (W_t^d), (W_t^f) et σ^X.*

(4) *On cherche à évaluer l'option de payoff final $(X_T - K)_+ S_T^f$. On appelle ces options les Equity Linked Foreign Exchange Option (ELF-X). C'est un contrat promettant l'actif étranger S^f en monnaie de domestique si le taux de change n'a pas dépassé un certain seuil.*
Exprimer le prix C_t de cette option à l'aide de Q_d.

(5) *En utilisant le résultat de la question 3, exprimer l'équation de* (S_t^f) *dans la mesure domestique.*
Résoudre l'EDS de (S_t^f) *dans la mesure domestique.*

(6) *On définit la probabilité* P^* *par :*

$$P^*|F_t = e^{<\sigma^S, W_t^d> - \frac{1}{2}||\sigma^S||^2 t}|F_t]$$

A noter que l'équation précedente équivaut à : pour tout Z F_t *mesurable,*

$$E^{P^*}[Z|F_t] = E^{Q^d}[e^{<\sigma^S, W_t^d> - \frac{1}{2}||\sigma^S||^2 t} Z|F_t]$$

Exprimer C_t *à l'aide de cette probabilité et d'un Brownien* W_t^* *sous* P^*.

(7) *Expliciter* C_t *à l'aide de la formule de Black Scholes.*