Notes for My Paper

0.1 矩阵的三则运算性质

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$

$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

0.2 矩阵转置的性质

$(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$

$(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}^T$

$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

$(\boldsymbol{A}^{-1})^T=((\boldsymbol{A})^T)^{-1}$

$(\boldsymbol{A}^T)^m=(\boldsymbol{A}^m)^T$

0.3 伴随矩阵的性质

$(\boldsymbol{A}^T)^*=(\boldsymbol{A}^*)^T$

$(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$

$(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

0.4 逆矩阵的性质

$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$

$(k\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{k}\boldsymbol{A}$

$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

$(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$

$(\boldsymbol{A}^n)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^n$

$\boldsymbol{A}_{m*m}, \boldsymbol{B}_{n*n}:$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

0.5 矩阵秩的性质

$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^T) = r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)$

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是同型矩阵，则 $r(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) \leq \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 m*n,n*s 矩阵, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leq n$

0.6 证明向量组 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量被其余向量线性表示

1. ”⇒”: 存在不全为 0 的 $k_1, k_2, ..., k_n$ 使得 $k_1\alpha_1 + ... + k_n\alpha_n = 0$

设 $k_1 \neq 0$, $\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - ... - \frac{k_n}{k_1}\alpha_n$

2. ”$\Leftarrow$” $l_1\alpha_1+...+l_{k-1}\alpha_{k-1}+l_{k+1}\alpha_{k+1}+...+l_n\alpha_n$

$\Rightarrow l_1\alpha_1+...+l_{k-1}\alpha_{k-1}+(-1)\alpha_k+l_{k+1}\alpha_{k+1}+...+l_n\alpha_n=0$

所以 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性相关

0.7 证明 $\alpha\beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha\beta$ 成比例

证明:”$\Rightarrow$” $\exists$ 不全为 0 的 k_1k_2, 使得

$k_1\alpha+k_2\beta=0$

设 $k_2\neq 0\Rightarrow\beta=-\frac{k_1}{k_2}\alpha\Rightarrow\alpha\beta$ 对应成比例

”$\Leftarrow$” 设 $\beta=l\alpha\Rightarrow l\alpha+(-1)\beta=0$

$\Rightarrow\alpha\beta$ 线性相关

0.8 向量祖相关性与线性表示的性质

2. 设 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性无关

(1) 若 $\alpha_1...\alpha_n,\beta$ 线性相关, 则向量 b 可以由 $\alpha_1...\alpha_n$ 唯一线性表示

”$\Rightarrow$”$\exists$ 不全为 0 的 $k_1...k_n,k_0$ 使

$k_1\alpha_1+...+k_n\alpha_n+k_0\beta=0$

若 $k_0=0\Rightarrow k_1\alpha_1+...+k_n=0$

$k_0\neq 0\Rightarrow\beta=-\frac{k_0}{k_1}\alpha_1-...-\frac{k_n}{k_0}\alpha_n$

证明唯一性: 令 $\beta = l_1\alpha_1 + ... + l_n\alpha_n$

$\beta = t_1\alpha_1 + ... + t_n\alpha_n$

$\Rightarrow (l_1 - t_1)\alpha_1 + ... + (l_n - t_n)\alpha_n = 0$

因为 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性无关, 所以 $l_1 = t_1, ..., l_n = t_n$, 证毕

(2)$\alpha_1...\alpha_n, b$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量 b 不可以由 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性表示

用反证法证明。

3. 全组线性无关 $\Rightarrow$ 部分组线性无关

4. 部分组相关 $\Rightarrow$ 全组线性相关

5.$\alpha_1...\alpha_n$ 为 n 个 n 维向量

$\alpha_1...\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $|\alpha_1, ..., \alpha_n| \neq 0$

用下面的结论

$A = (\alpha_1...\alpha_n), \alpha_1...\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha_1...\alpha_n$ 的秩 =n $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$

5.$\alpha_1...\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1...\alpha_n| = 0$

证: 令 $A = (\alpha_1...\alpha_n)$.

$\alpha_1...\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1...\alpha_n$ 的秩 <n $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow |A| = 0$

6. 设 $\alpha_1...\alpha_n$ 为 n 个 m 维向量, 若 $m < n$, 则向量组 $\alpha_1...\alpha_n$ 一定线性相关说明: 口诀向量组左右长上下短一点线性相关

向量的维数代表了方程的个数

向量的个数代表了未知数的个数

方程数少了，有自由变量，一定有非零解，则一定线性相关

证明: 令 $A_{m*n} = (\alpha_1 ... \alpha_n) \Rightarrow r(A) \leq m < n$

因为 $\alpha_1 ... \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1 ... \alpha_n$ 的秩 <n $\Leftrightarrow r(A) < n$

而 $r(A) \leq m < n$. 所以 $\alpha_1 ... \alpha_n$ 线性相关

0.9 汤家凤行列式强化提高

1. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, 则$A_{31} + A_{32} + A_{33} =$

$A_{31}+A_{32}+A_{33} = 1*A_{31}+1*A_{32}+1*A_{33}+0*A_{34}+0*A_{35} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

2. 已知

$$|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{E} - 3\boldsymbol{A}| = 0 \tag{1}$$

求 $|\boldsymbol{B}^{-1} + 2\boldsymbol{E}|$

解: 因为 $|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{E} - 3\boldsymbol{A}| = 0$ 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$,1