math notes

0.1 矩阵的三则运算性质

$A+B=B+A$ $(A+B)+C=A+(B+C)$ $(AB)C=A(BC)$ $(k+l)A=kA+lA$ $k(A+B)=kA+kB$ $A(B+C)=AB+AC$

0.2 矩阵转置的性质

$(A^T)^T=A$ $(kA)^T=kA^T$ $(AB)^T=B^TA^T$ $(A^{-1})^T=((A)^T)^{-1}$ $(A^T)^m=(A^m)^T$

0.3 伴随矩阵的性质

$(A^T)^*=(A^*)^T$ $(kA)^*=k^{n-1}A^*$ $(AB)^*=B^*A^*$

0.4 逆矩阵的性质

$(A^{-1})^{-1}=A$ $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A$ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

$A_{m*m},B_{n*n}:$ $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$

0.5 矩阵秩的性质

$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$ 设 A,B 都是同型矩阵，则 $r(A\pm B)\leq A+B$ 设 A,B 分别为 m*n,n*s 矩阵，且 $AB=O$，则 $r(A)+r(B)\leq n$

0.6 证明向量组 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量被其余向量线性表示

1. "$\Rightarrow$": 存在不全为 0 的 $k_1,k_2,...,k_n$ 使得 $k_1\alpha_1+...+k_n\alpha_n=0$ 设 $k_1\neq 0$, $\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-...-\frac{k_n}{k_1}\alpha_n$ 2. "$\Leftarrow$" $l_1\alpha_1+...+l_{k-1}\alpha_{k-1}+l_{k+1}\alpha_{k+1}+...+l_n\alpha_n$

$\Rightarrow l_1\alpha_1+...+l_{k-1}\alpha_{k-1}+(-1)\alpha_k+l_{k+1}\alpha_{k+1}+...+l_n\alpha_n=0$

所以 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性相关

0.7 证明 $\alpha\beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha\beta$ 成比例

证明:"$\Rightarrow$" $\exists$ 不全为 0 的 k_1k_2, 使得 $k_1\alpha+k_2\beta=0$ 设 $k_2\neq 0\Rightarrow\beta=-\frac{k_1}{k_2}\alpha\Rightarrow\alpha\beta$ 对应成比例

"$\Leftarrow$" 设 $\beta=l\alpha\Rightarrow l\alpha+(-1)\beta=0$ $\Rightarrow\alpha\beta$ 线性相关

0.8 向量祖相关性与线性表示的性质

2. 设 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性无关

(1) 若 $\alpha_1...\alpha_n,\beta$ 线性相关, 则向量 b 可以由 $\alpha_1...\alpha_n$ 唯一线性表示

"$\Rightarrow$"$\exists$ 不全为 0 的 $k_1...k_n,k_0$ 使 $k_1\alpha_1+...+k_n\alpha_n+k_0\beta=0$； 若 $k_0=0\Rightarrow k_1\alpha_1+...+k_n=0$,$k_0\neq 0\Rightarrow\beta=-\frac{k_0}{k_1}\alpha_1-...-\frac{k_n}{k_0}\alpha_n$

证明唯一性: 令 $\beta=l_1\alpha_1+...+l_n\alpha_n$； $\beta=t_1\alpha_1+...+t_n\alpha_n$ $\Rightarrow(l_1-t_1)\alpha_1+...+(l_n-t_n)\alpha_n=0$ 因为 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性无关, 所以 $l_1=t_1,...,l_n=t_n$, 证毕

(2)$\alpha_1...\alpha_n,b$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量 b 不可以由 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性表示;。

3. 全组线性无关 $\Rightarrow$ 部分组线性无关

4. 部分组相关 $\Rightarrow$ 全组线性相关

5.$\alpha_1\ldots\alpha_n$ 为 n 个 n 维向量 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $|\alpha_1,...,\alpha_n|\neq 0$

用结论 $A=(\alpha_1...\alpha_n),\alpha_1...\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow\alpha_1...\alpha_n$ 的秩 =n $\Leftrightarrow r(A)=n\Leftrightarrow|A|\neq 0$

6.$\alpha_1...\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow|\alpha_1...\alpha_n|=0$ 证: 令 $A=(\alpha_1...\alpha_n)$. $\alpha_1...\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1...\alpha_n$ 的秩 <n $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$ $\Leftrightarrow$ $|A|=0$

7. 设 $\alpha_1...\alpha_n$ 为 n 个 m 维向量, 若 $m<n$, 则向量组 $\alpha_1...\alpha_n$ 一定线性相关

qquad 口诀向量组左右长上下短一点线性相关

向量的维数代表了方程的个数; ; 方程数少了，有自由变量，一定有非零解，则一定线性相关

证明: 令 $A_{m*n}=(\alpha_1...\alpha_n)\Rightarrow r(A)\leq m<n\alpha_1...\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow\alpha_1...\alpha_n$ 的秩 <n $\Leftrightarrow r(A)<n$ $r(A)\leq m<n$. 所以 $\alpha_1...\alpha_n$ 线性相关

0.9 汤家凤行列式强化提高

$$1.\ D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\7&7&7&3&3\\3&2&4&5&2\\3&3&3&2&2\\4&6&5&2&3\end{vmatrix},\text{则}A_{31}+A_{32}+A_{33}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\7&7&7&3&3\\1&1&1&0&0\\3&3&3&2&2\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&3&3\\1&1&1&0&0\\0&0&0&2&2\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}=0$$

2. 已知 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}|=0$ 求 $\left|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}\right|$

解: 因为 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}|=0$ 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{3},\frac{1}{2}$,1

$(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$ $(uv)^{(n)}=C_n^0u^{(n)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^nuv^{(n)}$ $(sinx)^{(n)}=sin(x+\frac{n\pi}{2})$ $(cosx)^{(n)}=coss(x+\frac{n\pi}{2})$ $\frac{1}{(ax+b)^{(n)}}=\frac{(-1)^nn!a^n}{(ax+b)^{(n+1)}}$ 设 y=f(x) 可导且 $f'(x)\neq 0,x=\varphi(y)$ 为反函数, 则 $x=\varphi(y)$ 可导, 且 $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$

设 y=f(x) 二阶可导且 $f'(x)\neq 0,x=\varphi(y)$ 为反函数, 则 $x=\varphi(y)$ 二阶可导, 且 $\varphi''(y)=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$

$x\to 0$ 常用的等价无穷小 $x\sim sinx\sim tanx\sim arcsinx\sim arctanx\sim ln(1+x)\sim e^x-1,$ $1-cosx\sim\frac{x^2}{2},1-cos^ax\sim\frac{a}{2}x^2$

$(1+x)^a-1\sim ax,$ $a^x-1\sim xlna$

$x\to 0$ 常用的麦克劳林公式 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$ $sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$

$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$ $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+o(x^n)$

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$

$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$ $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{a(a-1)...(a+1-n)}{n!}x^n$

$f^{'}(x)\in C[a,b].(a,b)$ $f_+^{'}(a)>0f(a)=f(b)$ $:(1)\exists\xi\eta\in(a,b),f^{'}(\xi)>0,f^{'}(\eta)<0.$ $(2).\exists\xi\in(a,b),f^{''}(\xi)<0.$

$:(1)f_+^{'}(a)>0\Rightarrow c\in(a,b),f(c)>f(a);\exists\xi\in(a,c),\eta\in(c,b)$ $f^{'}(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0.f^{'}(\eta)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0.$

2.$f(x)\in C[0,1],(0,1)$ $,f(0)=0,f(1)=1,$ $:(1)\exists c\in(0,1),f(c)=\frac{2}{3};(2)\exists\xi,\eta\in(0,1)\frac{2}{f^{'}(\xi)}+\frac{1}{f^{'}(\eta)}=3$

$:(1)$, , $\varphi(x)=f(x)-\frac{2}{3}.\varphi(0)=-\frac{2}{3}<0,\varphi(1)=13>0.\exists c\in(0,1),$ $\varphi(c)=0\Rightarrow f(c)=\frac{2}{3}.$

(2) $0,1,c\ 2L;\exists\xi\in(0,c),\eta\in(c,1),$ $f^{'}(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{2}{3c},f^{'}(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1}{3(1-c)},$

3.ξ. ,

$P58\ 1\ f(x)\in C[a,b],(a,b)$ $,f(a)=f(b)=1,$ $\exists\xi,\eta\in(a,b),e^{\eta-\xi}[f^{'}(\eta)+f(\eta)]=1.$ $:$ $\varphi(x)=e^xf(x),\exists\in(a,b),\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\varphi^{'}(\eta)\Rightarrow$ $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\eta[f^{'}(\eta)+f(\eta)].\exists\xi\in(a,b),$ $\frac{e^b-e^a}{b-1}=e^\xi.$