0.1 快读

```
int read()
{
    int x=0,f=1;
    char ch=getchar();
    while(ch<48|ch>57)
    {
        if(ch=='-') f=-1;
        ch=getchar();
    }
    while(ch>=48&&ch<=57) x=x*10+ch-48,ch=getchar();
    return x*f;
}
```

0.2 三分法

0.2.1 整数三分

```
int l,r;
while(r-l>10)
{
    int midl=l+(r-l)/3,midr=r-(r-l)/3;
    if(check(midl)<=check(midr)) l=midl; //这里是求凸性函数；如果求凹形，那么改为r=midr
    else r=midr;
}
int res=1e9;
for(int i=l;i<=r;i++) res=min(res,check(i)); //找到[l, r]区间的范围
```

0.2.2 浮点三分

```
double l,r;
while(r-l>1e-8)
{
    double midl=l+(r-l)/3,midr=r-(r-l)/3;
    if(check(midl)<=check(midr)) l=midl; //这里是求凸性函数；如果求凹形，那么改为r=midr
    else r=midr;
}
```

0.3 反悔贪心

种树

```
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const int maxn=5e5+7;
int n,k,a[maxn],pre[maxn],nex[maxn],vis[maxn],ans=0;
priority_queue<pair<int,int>>q;
void del(int x)
{
    pre[nex[x]]=pre[x];
    nex[pre[x]]=nex[x];
    vis[x]=1;
}
int gready()
{
    int res;
    while(vis[q.top().second]) q.pop();
    int u=q.top().second;
    q.pop();
    res=a[u];
    a[u]=-a[u]+a[pre[u]]+a[nex[u]];
    q.push({a[u],u});
    del(nex[u]);del(pre[u]);
    return res;
}
signed main()
{
    scanf("%lld%lld",&n,&k);
    for(int i=1;i<=n;i++) scanf("%lld",&a[i]),q.push({a[i],i
        });
    if(k*2>n)
    {
        puts("Error!");return 0;
    }
    for(int i=1;i<=n;i++) pre[i]=i-1,nex[i]=i+1;
    pre[1]=n;nex[n]=1;
    for(int i=1;i<=k;i++)
    {
        int res=gready();ans+=res;
    }
```

```
    printf("%lld\n",ans);
}
```

0.4 悬线法

最大的1组成的矩阵的面积

```
for(int i=1;i<=n;i++)
{
    for(int j=1;j<=m;j++)
    {
        l[i][j]=j,r[i][j]=j,up[i][j]=a[i][j];
    }
}
for(int i=1;i<=n;i++)
{
    for(int j=1;j<=m;j++)
    {
        if(j!=1&&a[i][j]==1&&a[i][j-1]==1) l[i][j]=l[i][j
            -1];
    }
    for(int j=m;j>=1;j--)
    {
        if(j!=m&&a[i][j]==1&&a[i][j+1]==1) r[i][j]=r[i][j
            +1];
    }
}
for(int i=1;i<=n;i++)
{
    for(int j=1;j<=m;j++)
    {
        if(i!=1&&a[i][j]==1&&a[i-1][j]==1)
        {
            r[i][j]=min(r[i][j],r[i-1][j]);
            l[i][j]=max(l[i][j],l[i-1][j]);
            up[i][j]=max(up[i][j],up[i-1][j]+1);
        }
        ans=max(ans,(r[i][j]-l[i][j]+1)*up[i][j]);
    }
}
printf("%d\n",ans);
```

0.5 分数规划

给出a_i和b_i，求一组$w_i \in \{0,1\}$，最小化或最大化。

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \times w_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i \times w_i}$$

另外一种描述：每种物品有两个权值a和b，选出若干个物品使得$\frac{\sum a}{\sum b}$最小/最大。

分数规划问题的通用方法是二分。假设我们要求最大值。二分一个答案mid，然后推式子（为了方便少写了上下界）：

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \times w_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i \times w_i} > mid \\ \Longrightarrow &\sum a_i \times w_i - mid \times \sum b_i \times w_i > 0 \\ \Longrightarrow &\sum w_i \times (a_i - mid \times b_i) > 0 \end{aligned}$$

```cpp
bool check(double mid)
{
    double s=0;
    for(int i=1;i<=n;i++)
        if(a[i]-mid*b[i]>0)  // 如果权值大于0
            s+=a[i]-mid*b[i];   // 选这个物品
    return s > 0;
}
```

0.6 约瑟夫问题

n个人标号$0, 1, \cdots, n-1$。逆时针站一圈，从0号开始，每一次从当前的人逆时针数K个，然后让这个人出局。问最后剩下的人是谁。

线性算法

设$J_{n,k}$表示规模分别为n, k的约瑟夫问题的答案。我们有如下递归式

$$J_{(n,k)} = (J_{(n-1,k)} + k) \bmod n$$

这个也很好推。你从0开始数k个，让第$k-1$个人出局后剩下$n-1$个人，你计算出在$n-1$个人中选的答案后，再加一个相对位移k得到真正的答案。这个算法的复杂度显然是$O(n)$的。

```
int josephus(int n,int k)
{
    int res=0;
    for(int i=1;i<=n;i++) res=(res+k)%i;
    return res;
}
```

对数算法

对于k较小n较大的情况，本题还有一种复杂度为$O(k\log n)$的算法。

考虑到我们每次走k个删一个，那么在一圈以内我们可以删掉$\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$个，然后剩下了$n-\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$个人。这时我们在第$\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \times k$个人的位置上。而你发现它等于$n - n \bmod k$。于是我们继续递归处理，算完后还原它的相对位置。还原相对位置的依据是：每次做一次删除都会把数到的第k个人删除，他们的编号被之后的人逐个继承，也即用$n-\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$人环算时每$k$个人即有1个人的位置失算，因此在得数小于0时，用还没有被删去k倍数编号的n人环的n求模，在得数大于等于0时，即可以直接乘$\frac{k}{k-1}$，于是得到如下的算法：

```
int josephus(int n,int k)
{
    if(n==1) return 0;
    if(k==1) return n-1;
    if(k>n) return(josephus(n-1,k)+k)%n; //线性算法
    int res=josephus(n-n/k,k);
    res-=n%k;
    if(res<0) res+=n; //mod n
    else res+=res/(k-1); //还原位置
    return res;
}
```

0.7 格雷码

格雷码是一个二进制数系，其中两个相邻数的二进制位只有一位不同。举个例子，3位二进制数的格雷码序列为

$$000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100$$

注意序列的下标我们以0为起点，也就是说$G(0) = 000, G(4) = 110$。

```
int g(int n){return n^(n>>1);}
```

镜像构造

k位的格雷码可以从$k-1$位的格雷码以上下镜射后加上新位的方式快速得到，如下图：

$$
\begin{array}{cccccccc}
k=1 & & & k=2 & & & & k=3 \\
0 & & 0 & 00 & & 00 & & 000 \\
1 & & 1 & 01 & & 01 & & 001 \\
 & & 1 & 11 & & 11 & & 011 \\
 & \rightarrow & 0 \rightarrow & 10 & \rightarrow & 10 & \rightarrow & 010 \\
 & & & & & 10 & & 110 \\
 & & & & & 11 & & 111 \\
 & & & & & 01 & & 101 \\
 & & & & & 00 & & 100
\end{array}
$$

格雷码矩阵

每次拓展两位，向三个方向镜像构造并分别用$01, 10, 11$作为开头：

$$
0 \rightarrow \begin{array}{cc} 00 & 10 \\ 01 & 11 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 0000 & 0010 & 1010 & 1000 \\ 0001 & 0011 & 1011 & 1001 \\ 0101 & 0111 & 1111 & 1101 \\ 0100 & 0110 & 1110 & 1100 \end{array}
$$

通过格雷码构造原数（逆变换）

```
int rev_g(int g)
{
    int n=0;
    for(;g;g>>=1) n^=g;
    return n;
}
```

实际应用

1. 格雷码被用于最小化数字模拟转换器（比如传感器）的信号传输中出现的错误，因为它每次只改变一个位。

0.8 Zobrist哈希

Zobrist哈希是一种专门针对棋类游戏而提出来的编码方式。

(1)对每个状态的各种情况都生成一个64位的数字。

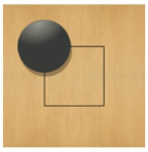
(2)将这些数字做异或操作，得到的数字即为哈希值。

```
mt19937_64 mrand(random_device{}());//64位数字随机生成
```

2X2的围棋棋盘一共有4个单位,每个单位有3种状态(黑子,白子,空点),则为每种状态生成1个8位的随机数:

位置	黑棋	白棋	空点
(0,0)	49	189	223
(0,1)	82	225	50
(1,0)	52	120	65
(1,1)	218	34	63

对于如下棋局：



Zobrist 哈希值为49 XOR 50 XOR 65 XOR 63 = 125，此时白棋落子：

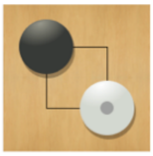


图 2-2 2 路棋盘棋局状态 2

落子之后的 Zobrist 哈希值为49 XOR 50 XOR 65 XOR 34 = 96，更为简单的计算方法则是只计算棋局变化发生变化的部分，125 XOR 63 XOR 34 = 96。

用 Zobrist 哈希来表示上述的小棋盘相较于其他表示方法不见得有很大的优势，但当棋盘很大时，Zobrist 哈希的极低冲突率与计算效率高的优势便十分明显。

0.9 石子合并

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const ll maxn=40005;
```

```
ll n,a[maxn],ans,now=1,pro;
int main()
{
        scanf("%lld",&n);
        for(int i=1;i<=n;i++) scanf("%lld",&a[i]);
        while(now<n-1)
        {
                for(pro=now;pro<n-1;pro++)
                {
                        if(a[pro+2]<a[pro]) continue;
                        a[pro+1]+=a[pro];
            ans+=a[pro+1];ll k;
                        for(k=pro;k>now;k--) a[k]=a[k-1];
            now++; k=pro+1;
                        while(now<k&&a[k-1]<a[k]) {a[k]^=a[k
                            -1]^=a[k]^=a[k-1];k--;}
                        break;
                }
                if(pro==n-1) {a[n-1]+=a[n];ans+=a[n-1];n--;}
        }
        if(now==n-1) ans+=(a[n-1]+a[n]);
    printf("%lld\n",ans);
}
```

0.10 STL

0.10.1 __int128

```
__int128 read() //1e36
{
    __int128 x=0,f=1;
    char ch=getchar();
    while(!isdigit(ch)&&ch!='-') ch=getchar();
    if(ch=='-')f=-1;
    while(isdigit(ch))x=x*10+ch-'0',ch=getchar();
    return f*x;
}
void print(__int128 x)
{
    if(x<0)putchar('-'),x=-x;
    if(x>9)print(x/10);
```

```
    putchar(x%10+'0');
}
```