

实验9-1 层次分析模型——正互反阵最大特征根和特征向量的实用算法

1. 幂法

A 为 $n \times n$ 正互反矩阵，算法步骤如下：

a. 任取 n 维非负归一化初始列向量（分量之和为 1） $w^{(0)}$ ；

b. 计算 $\tilde{w}^{(k+1)} = Aw^{(k)}, k=0, 1, 2, \dots$ ；

c. $\tilde{w}^{(k+1)}$ 归一化，即令 $w^{(k+1)} = \frac{\tilde{w}^{(k+1)}}{\sum_{i=1}^n \tilde{w}_i^{(k+1)}}$ ；

d. 对于预先给定的精度 ε ，当 $|w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)}| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n)$ 时， $w^{(k+1)}$ 即为所求的特征向量；

否则返回 b；

e. 计算最大特征根 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{w}_i^{(k+1)}}{w_i^{(k)}}$ 。

函数式 m 文件如下：

%9-1 层次分析模型——正互反阵最大特征根和特征向量的幂法

%文件名： MIfun.m

%输入参数： A 为正互反方阵，精度 e

%输出参数： lamda 为最大特征根，w 为其归一化特征列向量

function [lamda w]=MIfun(A,e)

if(nargin==1) %如果只输入一个变量（即 A），则 e 取 0.000001

e=0.000001;

end

n=size(A,1); %取 A 的行数

w0=ones(n,1)/n; %归一向量

while 1

ww=A*w0;

w=ww/sum(ww); %归一化

if all(abs(w-w0)<e)

break;

end

w0=w;

end

lamda=sum(ww./w0)/n;

2. 和法

A 为 $n \times n$ 正互反矩阵，算法步骤如下：

a. 将 A 的每一列向量归一化得 $\tilde{w}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}}$ ；

b. 对 \tilde{w}_{ij} 按行求和得 $\tilde{w}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{ij}$;

c. 将 \tilde{w}_i 归一化 $w_i = \frac{\tilde{w}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{w}_i}$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 即为近似特征向量;

d. 计算 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Aw)_i}{w_i}$, 作为最大特征根的近似值。

函数式 m 文件如下:

%9-1 层次分析模型——正互反阵最大特征根和特征向量的和法

%文件名: HEfun.m

%输入参数: A 为正互反方阵

%输出参数: lamda 为最大特征根, w 为其归一化特征列向量

function [lamda w]=HEfun(A)

n=size(A,1);

for k=1:n %a.将 A 的每一列向量归一化

AA(:,k)=A(:,k)./sum(A(:,k));

end

ww=sum(AA,2); %b.对 AA 按行求和, ww 为列向量

w=ww./sum(ww); %c.归一化, 得 w 为近似特征列向量

lamda=sum(A*w./w)/n; %d.计算最大特征根的近似值 λ

3. 根法

A 为 $n \times n$ 正互反矩阵, 算法步骤如下:

a. 将 A 的每一列向量归一化得 $\tilde{w}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}}$;

b. 对 \tilde{w}_{ij} 按行求积并开 n 次方得 $\tilde{w}_i = (\prod_{j=1}^n \tilde{w}_{ij})^{\frac{1}{n}}$;

c. 将 \tilde{w}_i 归一化 $w_i = \frac{\tilde{w}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{w}_i}$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 即为近似特征向量;

d. 计算 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Aw)_i}{w_i}$, 作为最大特征根的近似值。

实验要求:

已知正互反阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 4 \\ 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$

1. 用给出的幂法函数求 A 的最大特征根和特征向量。
2. 用给出的和法函数求 A 的最大特征根和特征向量。

3. 编写根法函数 RTfun.m, 用该函数求 A 的最大特征根和特征向量。

[提示]

对矩阵 A 按行求和的调用为 sum(A, 2)。

对矩阵 A 按行求积的调用为 prod(A, 2)。

实验报告提交:

1. 用给出的幂法函数求 A 的最大特征根和特征向量。调用命令和运行结果。
2. 用给出的和法函数求 A 的最大特征根和特征向量。调用命令和运行结果。
3. 编写根法函数, 用该函数求 A 的最大特征根和特征向量。程序、调用命令和运行结果。

实验9-2 层次分析模型——旅游决策问题

(参考教材 p250-256)

在下面程序中, 脚本式 m 文件 TR.m 调用函数式 m 文件 TRfun.m (求 A 的最大特征根及归一化特征列向量、一致性指标值 CI、一致性比率值 CR), TRfun.m 中调用另一个函数式 m 文件 HEfun.m (求 A 的最大特征根及归一化特征列向量)。

1. 脚本式 m 文件如下:

```
%9-1 层次分析——旅游决策问题
%文件名: TR.m
clear;clc; format compact;
%层次分析法的基本步骤:
%1.建立层次结构模型
% 见 p250 图 1 选择旅游地的层次结构
%2.构造成对比较阵
%第 2 层为准则层: 景色、费用、居住、饮食和旅途 5 个准则
A=[ 1  1/2  4   3   3 ;...
    2   1   7   5   5 ;...
    1/4 1/7  1  1/2 1/3;...
    1/3 1/5  2   1   1 ;
    1/3 1/5  3   1   1 ];
%第 3 层为方案层: P1、P2 和 P3 等 3 个供选择地点
B1=[1  2   5 ; 1/2  1  2 ; 1/5  1/2  1];
B2=[1 1/3 1/8; 3  1 1/3; 8  3  1];
B3=[1  1   3 ; 1  1  3 ; 1/3 1/3  1];
B4=[1  3   4 ; 1/3  1  1 ; 1/4  1  1];
B5=[1  1  1/4; 1  1 1/4; 4  4  1];

%3.计算权向量并做一致性检查
%第 2 层
[lamda2 w2 CI2 CR2]=TRfun(A);
if CR2>=0.1 % 成对比较阵 A 的一致性检验
    disp(['CR2=', num2str(CR2), '>0.1, A 没有通过一致性检查!'])
    return;
end
%第 3 层
[lamda3_1 w3_1 CI3_1 CR3_1]=TRfun(B1);
if CR3_1>0.1 %成对比较阵 B1 的一致性检验
```

```

        disp(['CR3_1=', num2str(CR3_1), '>0.1, B1 没有通过一致性检查!'])
        return;
    end
    [lamda3_2 w3_2 CI3_2 CR3_2]=TRfun(B2);
    if CR3_2>0.1 %成对比较阵 B2 的一致性检验
        disp(['CR3_2=', num2str(CR3_2), '>0.1, B2 没有通过一致性检查!'])
        return;
    end
    [lamda3_3 w3_3 CI3_3 CR3_3]=TRfun(B3);
    if CR3_3>0.1 %成对比较阵 B3 的一致性检验
        disp(['CR3_3=', num2str(CR3_3), '>0.1, B3 没有通过一致性检查!'])
        return;
    end
    [lamda3_4 w3_4 CI3_4 CR3_4]=TRfun(B4);
    if CR3_4>0.1 %成对比较阵 B4 的一致性检验
        disp(['CR3_4=', num2str(CR3_4), '>0.1, B4 没有通过一致性检查!'])
        return;
    end
    [lamda3_5 w3_5 CI3_5 CR3_5]=TRfun(B5);
    if CR3_5>0.1 %成对比较阵 B5 的一致性检验
        disp(['CR3_5=', num2str(CR3_5), '>0.1, B5 没有通过一致性检查!'])
        return;
    end

%4. 计算组合权向量并做组合一致性检验
w3=[w3_1,w3_2,w3_3,w3_4,w3_5]*w2; %最下层（第3层）对目标（第1层）的组合权向量
%第3层组合一致性检验(从第3层开始)
CI3=[CI3_1 CI3_2 CI3_3 CI3_4 CI3_5]*w2;
%随机一致性指标 RI 的数值（下标对应成对比较方阵的阶数）：
RI=[0 0 0.58 0.90 1.12 1.24 1.32 1.41 1.45 1.49 1.51];
RI3=[RI(3) RI(3) RI(3) RI(3) RI(3)]*w2;
CR3=CI3/RI3;
if CR3>0.1
    disp(['CR3=', num2str(CR3), '>0.1, 第3层没有通过组合一致性检查!'])
    return;
end
%最下层（第3层）对第1层的组合一致性比率为
CR=CR2+CR3;
if CR>0.1
    disp(['CR=', num2str(CR), '>0.1, 没有通过组合一致性检查!'])
    return;
end
%结果显示：

```

2. 函数式 m 文件如下:

```
%9-1 层次分析—求 A 的最大特征根及归一化特征列向量、一致性指标值 CI、一致性比率值 CR
%文件名: TRfun.m
%输入参数: A 为成对比较阵 (正互反方阵)
%输出参数:
% lamda 为最大特征根值
% w 为 A 的归一化特征列向量 (权向量)
% CI 为一致性指标值
% CR 为一致性比率值
function [lamda w CI CR]=TRfun(A)
[lamda w]=HEfun(A); %求 A 的最大特征根及归一化特征列向量
%随机一致性指标 RI 的数值 (下标对应成对比较方阵的阶数):
RI=[0 0 0.58 0.90 1.12 1.24 1.32 1.41 1.45 1.49 1.51];
n=size(A,1);
CI=(lamda-n)/(n-1); %一致性指标, CI=0 时 A 为一致阵; CI 越大 A 的不一致程度越严重
CR=CI/RI(n); %一致性比率, CR<0.1 时认为 A 的不一致程度在容许范围之内
```

实验要求:

请仔细阅读以上程序, 完成以下实验:

在脚本式 m 文件后面添加命令,

1. 显示第 2 层的以下数据:

最大特征根 λ ; 特征向量 (权向量) w ; 一致性指标 CI ; 一致性比率 CR 。

(与 p254 对应数据相比较)

2. 显示第 3 层的以下数据:

特征向量 (权向量) $w^{(3)}_k$; 最大特征根 λ_k ; 一致性指标 CI_k 。

(与 p255 表 3 对应数据相比较)

3. 显示最下层 (第 3 层) 对目标 (第 1 层) 的组合权向量。

(与 p255 对应数据相比较)

4. 显示第 2 层和第 3 层的组合一致性比率, 以及最下层对第 1 层的组合一致性比率。

(与 p256 对应数据相比较)

实验报告提交:

1. 显示第 2 层的以下数据:

最大特征根 λ ; 特征向量 (权向量) w ; 一致性指标 CI ; 一致性比率 CR 。

2. 显示第 3 层的以下数据:

特征向量 (权向量) $w^{(3)}_k$; 最大特征根 λ_k ; 一致性指标 CI_k 。

3. 显示最下层 (第 3 层) 对目标 (第 1 层) 的组合权向量。

4. 显示第 2 层和第 3 层的组合一致性比率, 以及最下层对第 1 层的组合一致性比率。