

1.Wick 定理

第一条规则是：每当两个相邻费米子算符的位置呼唤时，正负号就会发生改变

第二条规则涉及表示不同激发的算符组合的时序。例如考虑以下声子和电子算符的混排：

$$_0 \langle |T \hat{C}_p(t) \hat{C}_{p1}^\dagger(t_1) \hat{A}_{q1}(t_1) \hat{C}_{p2}(t_2) \hat{C}_{p3}^\dagger(t_3) \hat{A}_{q2}(t_2)| \rangle_0 = _0 \langle |T \hat{C}_p(t) \hat{C}_{p1}^\dagger(t_1) \hat{C}_{p2}(t_2) \hat{C}_{p3}^\dagger(t_3)| \rangle_0 \langle |T \hat{A}_{q1}(t_1) \hat{A}_{q2}(t_2)| \rangle_0 \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} _0 \langle |T \hat{C}_p(t) \hat{C}_{p1}(t_1) \hat{C}_{p2}(t_2) \hat{C}_{p3}(t_3)| \rangle_0 &= _0 \langle |T \hat{C}_p(t) \hat{C}_{p1}(t_1)| \rangle_0 \cdot _0 \langle |T \hat{C}_{p2}(t_2) \hat{C}_{p3}(t_3)| \rangle_0 \\ &+ _0 \langle |T \hat{C}_p(t) \hat{C}_{p2}(t_2)| \rangle_0 \cdot _0 \langle |T \hat{C}_{p1}(t_1) \hat{C}_{p3}(t_3)| \rangle_0 \\ &+ _0 \langle |T \hat{C}_p(t) \hat{C}_{p3}(t_3)| \rangle_0 \cdot _0 \langle |T \hat{C}_{p1}(t_1) \hat{C}_{p2}(t_2)| \rangle_0 \end{aligned} \quad (2)$$

第三条规则用于处理发生在同一时刻的两个算符的时间编序，在该情形下，消灭算符始终移至右边，这样我们可看出两个算符的组合为粒子数算符，但是当两个电子算符在一组配对中有不同的时间参量时，通常将产生算符放在右边，我们立刻便能识别出该项即为时序格林函数

$$\begin{aligned} _0 \langle |T \hat{C}_p(t) \hat{C}_{p1}(t_1) \hat{C}_{p2}(t_2) \hat{C}_{p3}(t_3)| \rangle_0 &= \delta_{p,p1} \delta_{p2,p3} G^{(0)}(t-t_1) G^{(0)}(t_2-t_3) \\ &- \delta_{p,p2} \delta_{p1,p3} G^{(0)}(t-t_2) G^{(0)}(t_1-t_3) \end{aligned} \quad (3)$$

2. 自能怎么算？

自能的实部表示外界耦合对粒子激发能量的修正，虚部表示准粒子的耗散

3.Heisenberg 绘景

The Heisenberg picture

海森堡绘景中波函数是不随时间变化的，而相应的算符对时间有依赖
state $|\psi_0\rangle$ time independent, operators $A(t)$ time dependent

$$\langle \psi^s(t) | A | \psi^s(t) \rangle = \langle \psi_0 | e^{iHt} A e^{-iHt} | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0^H | A(t) | \psi_0^H \rangle \quad (3)$$

the H-picture

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{state : } |\psi_0\rangle = e^{iHt} |\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle \\ \text{operators : } A(t) = e^{iHt} A e^{-iHt} \\ H : \text{does not depend on time} \end{array} \right. \quad (4)$$

对算符或力学量求导可以得到海森堡运动方程

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t) = e^{iHt} (iHA(t) - iA(t)H + \partial_t A(t)) = i[H, A(t)] + \partial_t A(t) \quad (5)$$

4.Goos-Hanchen 位移

概率波的传输性质 (如反射、折射等) 与电磁波的传输性质类似. 当一束电磁波在两种介质的分界面发生全反射时, 反射波将在界面上相对于入射波的位置, 有一个很小的侧向位移, 即称为古斯 - 汉森位移 (Goos - Hanchen shift)

5. 一些常用物理量用格林函数表达式

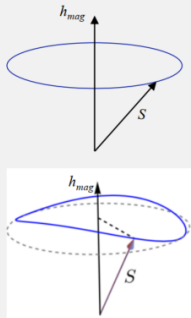
粒子数 $\langle \hat{n} \rangle = \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle = -iG^<(x, t; x', t')$

态密度 $DOS = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[Tr G^R]$

6. 热浴 (heat bath)

A thermal reservoir, also thermal energy reservoir or thermal bath, is a thermodynamic system with a heat capacity so large that the temperature of the reservoir changes relatively little when a much more significant amount of heat is added or extracted. As a conceptual simplification, it effectively functions as an infinite pool of thermal energy at a given, constant temperature. Since it can act as a source and sink of heat, it is often also referred to as a heat reservoir or heat bath.

7. 圆形极化和椭圆极化的磁子

Circularly and elliptically polarized magnon	Circularly and elliptically polarized magnon
<ul style="list-style-type: none"> A ferromagnetic insulator can be described by the Hamiltonian $\hat{H} = \hat{H}_H + \hat{H}_{mag} + \hat{H}_{ani}$ $= -\frac{J}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_{i+1} - h_{mag} \sum_{i=1}^N \hat{S}_i^z + \sum_{\nu \in \{x, y, z\}} \sum_{i=1}^N K_\nu (\hat{S}_i^\nu)^2$ Using H-P transformation $\hat{S}_i^x = \sqrt{\frac{S}{2}} (\hat{b}_i + \hat{b}_i^\dagger), \quad \hat{S}_i^y = -i\sqrt{\frac{S}{2}} (\hat{b}_i - \hat{b}_i^\dagger)$ $\hat{S}_i^z = S - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>J: Heisenberg exchange constant h_{mag}: Applied magnetic field K_ν: Anisotropy constant $\hat{b}_i^{(\dagger)}$: Magnon annihilation (creation) operator</p> </div>	<p>The Hamiltonian can be written as</p> $\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \hat{\phi}_i^\dagger \hat{h}_{ij} \hat{\phi}_j$ <p>Where $\hat{\phi}_i = (\hat{b}_i \quad \hat{b}_i^\dagger)^T$, $\hat{h}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{ij}^i & K\delta_{ij} \\ K\delta_{ij} & h_{ij}^i \end{pmatrix}$</p> <p>The matrix elements</p> <p style="color: red;">Diagonal element corresponds to $\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ term</p> <p style="color: red;">Off-diagonal element corresponds to $\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger$ and $\hat{b}_i \hat{b}_j$ term</p> $h_{ij}^i = [S(K_x + K_y - 2K_z + D) + h_{mag}] \delta_{i,j} - J(\delta_{i,j+1} + \delta_{i+1,j})$ $K = S(K_x - K_y)$
Circularly and elliptically polarized magnon	
<ul style="list-style-type: none"> If we don't consider anisotropy term, i.e. $K = 0$ $\hat{h}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{ij}^i & 0 \\ 0 & h_{ij}^i \end{pmatrix}$ Else, consider strong anisotropy $\hat{h}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{ij}^i & K\delta_{ij} \\ K\delta_{ij} & h_{ij}^i \end{pmatrix}$ <div style="text-align: center;">  </div>	

8. 酉矩阵

矩阵 U 为酉矩阵, 当且仅当它的厄密共轭为其逆矩阵

9. 谱函数

谱函数极点对应凝聚态体系元激发的能量

10. 自能怎么算？

推迟自能的虚部乘以-2 等于准粒子寿命的倒数

11. 一个典型布里渊光散射参数

The probing light generated by a single-frequency laser has a wavelength of 473 nm and a power of 0.25 mW and is focused by a microscope objective lens with a magnification of 100 and a numerical aperture of 0.9 into a diffraction-limited spot.

12. 数值孔径

对于高斯激光束，其数值孔径与激光最小束斑尺寸有关（其数值孔径表示激光的发散程度，激光发散程度与激光最小光束直径有关）：

$$NA \simeq \frac{\lambda_0}{\pi w_0},$$

其中 λ_0 是激光在真空中的波长， $2w_0$ 是光束最窄处的束斑直径（相当于辐照度衰减到 $1/e$ 时的全宽）。这意味着聚焦在小束斑上的激光会很快发散，而束斑直径较大的激光则能在很长的传播距离中几乎保持直径不变。分辨率 = 波长 / (2x 数值孔径) 数值孔径越大，分辨能力越强

13. 互补色



14. 超泊松分布和亚泊松分布

泊松分布是相干态在粒子数态表象下的投影分布 $P(n)$ ，它的特点是涨落等于期望。超泊松分布和亚泊松分布并没有具体的形式，我们只是用涨落大于或小于期望来表示这两个分布的特征，对于超泊松分布，涨落大于期望，亚泊松分布涨落小于期望。

15. 一维和二维伊辛模型

- 一维可以平均场近似解

伊辛模型中只考虑相邻粒子的相互作用。我们这里就以磁介质为例（我找不出其他的伊辛模型能简单描述的系统了）。

我们记原子 z 方向（晶轴方向）自旋为 σ ， σ 只能为 ± 1 （平行或反平行）。原子之间总的相互作用能可表示为： $E = -J \sum_{|i-j|=1} \sigma_i \sigma_j - \mu B \sum \sigma_i$ ，其中 μ 是单粒子磁矩（量子力学告诉我们 $\mu = \frac{e\hbar}{2m_e}$ ，但这不重要）。

记 $\{\sigma_i\}$ 是一种 σ 的位形，能量应当是 $\{\sigma_i\}$ 的函数。写出其配分函数：

$\backslash \text{Zeta} = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta E(\{\sigma_i\})} = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{-\beta E(\{\sigma_i\})}$ 。这就是求解伊辛模型的基本思路。

当屏幕上出现 'Undefined control sequence \Zeta' 的时候，建议刷新

数学家们已经成功地解出了一维和二维的严格解、三维及以上的级数解。

显然，我是不会做这种式子的，所以引入一个技巧：**平均场近似**。

改写能量式： $E = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \mu B \sum \sigma_i$ ， $J_{ij} = \begin{cases} J, & |i-j|=1 \\ 0, & |i-j| \neq 1 \end{cases}$

这样对于某一个特定的原子来说，感受到的外场就是 $B_i = B + \frac{1}{\mu} \sum_j J_{ij} \sigma_j$ ，然后再对其求平均。由于系统具有平移对称性，我们可以立刻写出 $\langle B \rangle = B + \frac{1}{\mu} J n \langle \sigma \rangle$ ，式中 n 为近邻自旋数，我们认为只有近邻的 n 个原子可以对我们研究的原子产生效应。

这个方法用 $\frac{1}{\mu} J n \langle \sigma \rangle$ 替代了近邻原子对目标原子的作用而忽略了涨落；这样各个原子自旋就转化为近独立系统。

重写简化后的配分函数： $\backslash \text{Zeta} = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \cdots \sum_{\sigma_N} e^{\beta \mu \langle B \rangle \sum \sigma_i}$ ，由于近独立，我们可以把配分函数写作 $\backslash \text{Zeta} = \backslash \text{Zeta}_1^N$ 的形式，其中 $\backslash \text{Zeta}_1$ 是单粒子配分函数。这是很好求的： $\backslash \text{Zeta}_1 = e^{\beta \mu \langle B \rangle} + e^{-\beta \mu \langle B \rangle}$ 。

这样我们就可以用正则系综的方法求系统总磁矩了：

$$m = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln \backslash \text{Zeta} = N \mu \tanh \frac{\mu \langle B \rangle}{k_B T} = N \mu \langle \sigma \rangle$$

这样我们就可以解出 $\langle B \rangle$ 和 $\langle \sigma \rangle$ 了！（很不幸，仍然只能做到数值求解）

在外场为零时， $\langle \sigma \rangle = \tanh(\beta J n \langle \sigma \rangle)$ 。

- 算法：

- 选择一个格点 i , 其自旋将考虑作翻转 $s_i = -s_i$.
- 计算与此翻转相联系的能量变化 dH .
- 计算这一翻转的转移几率 w .
- 产生一在 $[0,1]$ 之间均匀分布的随机数 x .
- 如果 $x < w$, 则翻转该自旋, 否则, 保持不变. 不论何种情况, 其结果都作为一新的状态.
- 分析该状态, 为计算平均值收集数据.

- 二维伊辛模型是最简单的包含相变现象的物理模型

16. 密度矩阵能写成 $\langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \rangle$ 的形式

$$\rho_{ij} = \langle \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \psi_j \rangle$$

由于 $\rho_{ii} = \langle \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \psi_i \rangle$ 的物理意义是处于状态 $|\psi\rangle_i$ 的粒子数, 即 $\langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \rangle$, 所以两个态的内积 $\langle \psi_i | \psi \rangle$ 可以记为 \hat{b}_i^\dagger

$$\text{所以 } \rho_{ij} = \langle \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \psi_j \rangle = \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \rangle$$

17. 相空间不可压缩

10 刘维尔定理: $\Gamma = \int \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$ 在系统演化的过程中不变.

$$\text{证明: } \Gamma = \int \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = \int \dots \int D \cdot dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s.$$

$$D = \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)} = \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)} \cdot \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}$$

$$= \frac{\partial(p_1, \dots, p_s)}{\partial(P_1, \dots, P_s)} \cdot \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s)}$$

(由运动中 P, q 的变化可看作正则变换 $dS = \sum (P_i dq_i - H dt) - \sum (H_0 dt)$)

选取母函数 $S(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s)$, 有 $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, $Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$

$$\therefore \frac{\partial p_i}{\partial P_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial P_i}, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i^2} \Rightarrow D = 1 \quad \square$$

18. 玻尔兹曼方程中碰撞项的形成

粒子传递能量的方式有两种, 第一种是粒子携带能量整体转移到别的位置, 另一种是粒子通过碰撞过程将自身携带的部分能量转移给别的位置的粒子, 后者造成的效应反映在玻尔兹曼方程里面就是碰撞项。

19. Dyson 方程中势能函数和自能函数的引入

单粒子情况下用自由格林函数描述粒子的状态, 在考虑多体问题中, 计入粒子间相互作用后的格林函数要在自由格林函数的基础上进行修正, 这时引入了势能函数, 在非平衡多体物理中, 计入外部对系统的影响后还要引入自能函数修正格林函数。

20. Gilbert 阻尼和 LL 阻尼系数的关系

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \gamma \vec{M} \times \vec{H} - \frac{\alpha}{M} \vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$$

$\gamma < 0$ 为旋磁比, $\vec{M} = \gamma \vec{S}$, $\alpha < 0$ 为阻尼常数.



将其表示成 γ 和 α 为正数的形式

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H} + \frac{\alpha}{M} \vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H}) + \frac{\alpha}{M} \vec{M} \times (\vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial t})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} A_j B_k C_m = \vec{e}_i (\delta_{ik} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jk}) A_j B_k C_m \\ &= \vec{e}_i A_j (B_i C_j - B_j C_i) \\ &= \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{M} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} &= -\gamma [(\vec{M} \cdot \vec{H}) \vec{M} - \vec{H} M^2] + \frac{\alpha}{M} [\vec{M} \cdot (\vec{M} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}) - \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} M^2] \\ &= -\gamma \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H}) - \alpha M \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H} + \frac{\alpha}{M} (-\gamma \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H}) - \alpha M \frac{\partial \vec{M}}{\partial t})$$

$$(\alpha^2 + 1) \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H} - \frac{\gamma \alpha}{M} \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\alpha^2 + 1} \vec{M} \times \vec{H} - \frac{\gamma \alpha}{M(\alpha^2 + 1)} \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H})$$

$$LL \text{ 方程: } \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \gamma \vec{M} \times \vec{H} - \frac{\lambda}{M^2} \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H})$$

$$|\gamma| = \left| \frac{\gamma}{\alpha^2 + 1} \right|, \quad \lambda = \frac{\gamma \alpha M}{\alpha^2 + 1}$$

21. 弹道输运

in a ferromagnetic insulator by Cornelissen *et al.* [7], although our work considers the ballistic regime ($\mu^B = 0$) rather than the diffusive regime.