1.Bell 基

4 复合系统基矢之三（Bell基）

Bell基：

$$|\psi_{Bi}\rangle \propto \left(|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1\right)\sigma_i \begin{pmatrix}|\uparrow\rangle_2 \\ |\downarrow\rangle_2\end{pmatrix}$$

$i=0,1,2,3$

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$|\psi_{B0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2+|\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2\right),$$

$$|\psi_{B1}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2+|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\right),$$ 正交完备

$$|\psi_{B2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2-|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\right),$$ → EPR对

量子力学的非局域性

$$|\psi_{B3}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2-|\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2\right).$$

（$\sigma_1^x\sigma_2^x$, $\sigma_1^y\sigma_2^y$, $\sigma_1^z\sigma_2^z$ 的共同本征态，皆为纠缠态）

2.Bell 不等式

贝尔不等式（Bell's inequality）是一个有关是否存在完备局域隐变量理论的不等式。实验表明贝尔不等式不成立，说明不存在关于局域隐变量的物理理论可以复制量子力学的每一个预测（即贝尔定理）。

1 介绍

量子力学告诉我们，对于一个波函数 $|\Psi\rangle$ 和一个力学量 A，我们观测到的结果是概率性的，也就是说我们会观测到一个概率分布 $p(a)$，有时候为了强调 a 是 A 的本征值，也常常把这个概率分布记为 $p(a|A)$，要注意这里不是指条件概率分布。并且如果为了强调这个概率分布是 A 在 Ψ 上测量得到的，我们也常常更加明确地记为 $p_\Psi(a|A)$。如果记 Π_a 为本征值 a 对应的投影算子，那么 $p(a) = \langle\Psi|\Pi_A|\Psi\rangle$，而力学量 A 在波函数 $|\Psi\rangle$ 上的期望就是 $\langle\Psi|A|\Psi\rangle = \sum_a a\, p(a)$。

对于类空分离的两个实验者（也就是说处于不同位置的两个实验者）Alice 和 Bob，假设一个物理装置生成了一个两粒子态 $|\Psi_{AB}\rangle$，并且把两个粒子 1 和 2 分别传送给两个实验者 Alice 和 Bob，那么这两位实验者可以同时对两个力学量 A 和 B 进行测量，比如 Alice 选择的是力学量 A 而 Bob 选择的是力学量 B，由于是两粒子态，所以空间就是两个空间的直积，同时测量的话就对应力学量的直积 $A \otimes B$。测量的结果也是概率性的，是一个联合分布 $p(a, b)$，常常也被记为 $p(a, b|A, B)$，代表 Alice 测得 a 且 Bob 测得 b 的概率。所谓的 Correlation 就指的是联合分布 $p(a, b)$ 所展现出来的 Alice 方与 Bob 方之间的关联。如果把本征值 a, b 对应的投影算子分别记成 Π_a, Π_b，那么我们有 $p(a, b) = \langle\Psi|\Pi_a \otimes \Pi_b|\Psi\rangle$，而 A, B 的联合期望为 $\langle A \otimes B\rangle = \langle\Psi|A \otimes B|\Psi\rangle = \sum_a \sum_b ab\, p(a, b)$。

经典概率论告诉我们一个联合分布称为无关联的当且仅当 $p(a, b) = p(a)p(b)$，也就是说概率分布可以写成乘积形式。只要不能写成乘积形式的联合概率分布都认为是有关联的。经典关联指的是可以从局域隐变量理论得到的联合概率分布，一般的经典力学，以及经典统计力学里面得到的联合概率分布都属于经典关联。但 Bell 不等式证明了量子力学里面存在比所有经典关联都强的关联。

Recall: 条件概率分布 $p(x|y)$ 指的是在事件 y 发生的条件下 x 发生的概率，他的计算公式是 $p(x|y) = p(x, y)/p(y)$，其中 $p(x, y)$ 指的是联合概率分布，也就是 x, y 同时发生的概率分布。

2 局域隐变量理论

Bell 不等式是否定量子力学的测量概率的**局域隐变量理论**解释的，Bell 不等式不是指某个特殊的不等式，而是指一大类不等式。所以首先要看什么是局域隐变量理论，这分为两部分，局域理论加隐变量理论。

首先我们先考虑什么叫隐变量理论。隐变量理论指的是我们所观察到的物理现象以及我们用来描述这种物理现象的理论中有一些量没有被我们考虑进去，这些量叫做隐变量。比如你假想我们是生活在二维平面上的生物，如过有一个三维球体在竖直与平面的方向以速度 v 上下周期运动，那么我们会以一定的概率看到一个点（相切）、一根线（相交）、以及什么都没有（相离），我们的观测值就是线的长度 l，观测的概率我们记为 $p(l)$，其中 l 可以取 0 到球体直径 $2R$ 之间的任意值。那我们只能描述我们看到的东西，而球体的竖直位移 ξ 是超出我们所在的世界的量，所以就被称为是隐变量。假设我们能够以某种手段知晓 ξ 的分布规律 $p(\xi)$ 的话，我们就可以获知任意时刻球体的位置，进而获知我们观测到的线段长度 l，那严格看来，我们观测到的概率分布就是一种条件概率 $p(l) = \sum_\xi p(l, \xi) = \sum_\xi p(l|\xi)p(\xi)$。在这种直观的指导下，我们有下面的关于隐变量理论所能获得的概率分布的公设（假设 ξ 是隐变量）：

定义 2.1. 隐变量理论所能获得的概率分布的形式（公设）：$p(a) = \sum_\xi p(a|\xi)p(\xi)$。

要注意的是在一个隐变量 ξ 控制的隐变量理论里面，所有的观测值得概率分布都长上面那个样子。

为了解释量子力学里面的概率性，人们提出了许多不同的隐变量理论，比如 Bohm-de Broglie 的导波理论（也叫非局域隐变量理论），以及 Kochen-Specker 的非互文隐变量理论、Leggett-Garg 的宏观实在隐变量理论等等。Einstein-Podolsky-Rosen 和 Bell 的局域隐变量理论也是其中一种。不同的隐变量理论是在隐变量公设上再加一些限制。下面我们看看什么是局域隐变量理论。

讨论局域或非局域必须有在空间上分离的两个实验者 Alice 和 Bob，比如一个在中国一个在美国。他们能够在各自的实验室内做实验，并且两者可以通过对钟从而同时进行一些实验操作。由于局域性假设说的是类空分离的实验者之间互不影响，那么对应到概率分布上就是说 Alice 和 Bob 分别测量力学量 A, B 所得到的概率分布在隐变量给定的条件下可以写成乘积形式，也就是说我们有以下的局域隐变量理论的概率分布所应该满足的公设：

定义 2.2. 局域隐变量理论所能获得的概率分布的形式（公设）：Alice 自己，$p(a) = \sum_\xi p(a|\xi)p(\xi)$，Bob 自己 $p(b) = \sum_\xi p(b|\xi)p(\xi)$，Alice 和 Bob 联合实验：$p(a, b) = \sum_\xi p(a|\xi)p(b|\xi)p(\xi)$。

可以看出，联合测量的概率分布可以写成乘积形式，在隐变量 ξ 的条件分布下。

要注意的是，上面所给的都是公设，也就是说，在局域隐变量理论里面，我们不管你怎么操作，反正只要是你能通过实验，比如掷硬币，或者设计某些经典的统计物理过程获得的概率分布都要长成上面的样子。

3 Bell 不等式和它的证明

现在我们来考虑 Bell 不等式。Bell 不等式告诉我们，量子力学里面存在一些量子态，我们通过量子力学的测量方式获得的联合概率分布不可能写成局域隐变量所要求的那种形式。也就是说，Bell 不等式否定了量子力学的局域隐变量解释，即，量子力学中的概率性不能被解释为局域隐变量

理论的那种概率性。服从局域隐变量理论的联合概率分布都叫经典关联，而违反 Bell 不等式的联合概率分布都叫量子关联。因为纠缠态总能违反某个 Bell 不能使，所以说纠缠态所呈现的是量子关联。

下面我们看一下最简单的 Bell 不等式，也叫 CHSH 不等式。这种不等式是说，假设 Alice 和 Bob 共享了一个两自旋量子态（两比特量子态），并且 Alice 这一方选择测量两个力学量 $A_1 = \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}$ 和 $A_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}$，因为两个力学量都是自旋算子，所以对应的本征值都为 $a_1 = \pm 1, a_2 = \pm 1$；同样地，Bob 也选择测量两个自旋算子，$B_1 = \mathbf{m}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}$ 和 $B_2 = \mathbf{m}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}$，因为两个力学量都是自旋算子，所以对应的本征值都为 $b_1 = \pm 1, b_2 = \pm 1$。并且 Alice 和 Bob 联合测量四种联合概率分布 $p(a_1, b_1)$,$p(b_1, a_2)$,$p(a_2, b_2)$,$p(b_2, a_1)$, 我们考虑四个联合期望

$$\langle A_1 \otimes B_1 \rangle = \sum_{a_1=\pm 1} \sum_{b_1=\pm 1} a_1 b_1 p(a_1, b_1)$$

$$\langle A_1 \otimes B_2 \rangle = \sum_{a_1=\pm 1} \sum_{b_2=\pm 1} a_1 b_2 p(a_1, b_2)$$

$$\langle A_2 \otimes B_1 \rangle = \sum_{a_2=\pm 1} \sum_{b_1=\pm 1} a_2 b_1 p(a_2, b_1)$$

$$\langle A_2 \otimes B_2 \rangle = \sum_{a_2=\pm 1} \sum_{b_2=\pm 1} a_2 b_2 p(a_2, b_2)$$

在局域隐变量框架下，我们有 $p(a_i, b_i) = \sum_\xi p(a_i|\xi) p(b_j|\xi) p(\xi)$, 其中 $i, j = 1, 2$。于是我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \langle A_1 \otimes B_1 \rangle + \langle A_1 \otimes B_2 \rangle + \langle A_2 \otimes B_1 \rangle - \langle A_2 \otimes B_2 \rangle \\
&= \sum_{a_1=\pm 1} \sum_{b_1=\pm 1} a_1 b_1 p(a_1, b_1) + \sum_{a_1=\pm 1} \sum_{b_2=\pm 1} a_1 b_2 p(a_1, b_2) \\
&+ \sum_{a_2=\pm 1} \sum_{b_1=\pm 1} a_2 b_1 p(a_2, b_1) - \sum_{a_2=\pm 1} \sum_{b_2=\pm 1} a_2 b_2 p(a_2, b_2)
\end{aligned} \tag{1}$$

接着利用局域隐变量假设 $p(a_i, b_i) = \sum_\xi p(a_i|\xi) p(b_j|\xi) p(\xi)$, 其中 $i, j = 1, 2$，带入原式后我们会得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{a_1=\pm 1} \sum_{b_1=\pm 1} a_1 b_1 \sum_\xi p(a_1|\xi) p(b_1|\xi) p(\xi) \\
&+ \sum_{a_1=\pm 1} \sum_{b_2=\pm 1} a_1 b_2 \sum_\xi p(a_1|\xi) p(b_2|\xi) p(\xi) \\
&+ \sum_{a_2=\pm 1} \sum_{b_1=\pm 1} a_2 b_1 \sum_\xi p(a_2|\xi) p(b_1|\xi) p(\xi) \\
&- \sum_{a_2=\pm 1} \sum_{b_2=\pm 1} a_2 b_2 \sum_\xi p(a_2|\xi) p(b_2|\xi) p(\xi)
\end{aligned} \tag{2}$$

进一步整理合并后有

$$\begin{aligned}
&\sum_\xi p(\xi) \{ \sum_{a_1=\pm 1} a_1 p(a_1|\xi) [\sum_{b_1=\pm 1} b_1 p(b_1|\xi) + \sum_{b_2=\pm 1} b_2 p(b_2|\xi)] \\
&+ \sum_{a_2=\pm 1} a_2 p(a_2|\xi) [\sum_{b_1=\pm 1} b_1 p(b_1|\xi) - \sum_{b_2=\pm 1} b_2 p(b_2|\xi)] \}
\end{aligned} \tag{3}$$

我们命

$$x_1 = \sum_{a_1=\pm1} a_1 p(a_1|\xi)$$

$$x_2 = \sum_{a_2=\pm1} a_2 p(a_2|\xi)$$

$$y_1 = \sum_{b_1=\pm1} b_1 p(b_1|\xi)$$

$$y_2 = \sum_{b_2=\pm1} b_2 p(b_2|\xi)$$

注意到 $|x_1|, |x_2|, |y_1|, |y_2|$ 的都小于等于 1。那我们接下来考虑

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{B}| = |\langle A_1 \otimes B_1\rangle + \langle A_1 \otimes B_2\rangle + \langle A_2 \otimes B_1\rangle - \langle A_2 \otimes B_2\rangle| \\
&= |\sum_{\xi} p(\xi)\{\sum_{a_1=\pm1} a_1 p(a_1|\xi)[\sum_{b_1=\pm1} b_1 p(b_1|\xi) + \sum_{b_2=\pm1} b_2 p(b_2|\xi)] \\
&+ \sum_{a_2=\pm1} a_2 p(a_2|\xi)[\sum_{b_1=\pm1} b_1 p(b_1|\xi) - \sum_{b_2=\pm1} b_2 p(b_2|\xi)]\}| \\
&\le \sum_{\xi} p(\xi)|x_1(y_1+y_2) + x_2(y_1-y_2)| \\
&\le \sum_{\xi} p(\xi)(|x_1||y_1+y_2| + |x_2||y_1-y_2|) \\
&\le \sum_{\xi} p(\xi)(|y_1+y_2| + |y_1-y_2|)
\end{aligned}$$

上面用到了绝对值的三角不等式和 $|x_1| \le 1, |x_2| \le 1$。接着对 $|y_1+y_2| + |y_1-y_2|$ 做分析，因为 $-1 \le y_1, y_2 \le 1$, 通过对 y_1, y_2 的大小分情况讨论，我们会得到 $|y_1+y_2| + |y_1-y_2| \le 2$。带入上式我们就会得到非常有名的 CHSH 类型的 Bell 不等式。

定理 3.1. *在局域隐变量理论，local hidden variable(LHV)，理论中，Alice 和 Bob 各自任选两个力学量 A_1, A_2 和 B_1, B_2 进行联合测量，那他们所测得的联合概率分布对要满足一下的 CHSH 型 Bell 不等式*

$$|\mathcal{B}| = |\langle A_1 \otimes B_1\rangle + \langle A_1 \otimes B_2\rangle + \langle A_2 \otimes B_1\rangle - \langle A_2 \otimes B_2\rangle| \overset{LHV}{\le} 2$$

我这里给的是最严格的 Bell 不等式的推导，一般书里面为了简单会进行更加简单但不严格的推导。

所谓 Bell 不等式排除量子力学的局域隐变量解释就指的是，存在某些量子态，实际上就是纠缠态，在选定某些特殊的力学量进行测量的时候会违反上面的不等式。所以就说量子力学是不能不局域隐变量理论解释的。

给定的一些[1]联合概率分布 $p(a_1, b_1), p(a_1, b_2), p(a_2, b_1), p(a_2, b_2)$ 如果是满足 Bell 不等式的，那他们就叫经典关联，如果违反，那他们就叫量子关联。

[1]单个的联合概率分布是不存在违反 Bell 不等式的情况的，所以必须是数个。

我们来看一个量子力学违反 Bell 不等式的例子。考虑量子态

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle)$$

Alice 选择测量力学量

$$A_1 = \sigma_x; \ A_2 = \sigma_z$$

Bob 选择测量力学量

$$B_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z); \ B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z - \sigma_x)$$

可以验证在这时候

$$\langle A_1 \otimes B_1 \rangle_\Psi + \langle A_1 \otimes B_2 \rangle_\Psi + \langle A_2 \otimes B_1 \rangle_\Psi - \langle A_2 \otimes B_2 \rangle_\Psi = 2\sqrt{2}$$

所以量子力学是违反局域隐变量理论的。

Fact: 所有的纠缠态都会违反某个 Bell 不等式。

3. 张量网络

4.Py 合金的构成

坡莫合金是一种镍铁磁性合金，镍含量约为 80%，铁含量约为 20%。它由贝尔电话实验室的物理学家 GustavElmen 于 1914 年发明，以其非常高的磁导率而著称，这使得它可用作电气和电子设备的磁芯材料，也可用于屏蔽磁场的磁屏蔽。商业坡莫合金的相对磁导率通常约为 100,000，而普通钢的相对磁导率为数千。

5.Wick 理论

Exercise 5.1.3 Electro

romagnetically ordere

simplified s-f model:

$$H =$$

α = A, B denotes the

Examples

If the "original" a and a^{+}

according to (5.67) and (5.

It is important for our p

5.2.2
Wick's Theorem

Equation (5.71) yields t
products and contractio
n factors.

Theorem 5.2.1

U