工资奖金制度の推导

Wage Bonus System Model

Dec 6, 2024

1. 问题背景

工资奖金制度模型以博弈论中的委托代理模型（Principal-Agent Model）为基础，是博弈论和激励理论中的重要工具，用于分析如何通过工资和奖金的设计激励员工努力工作，同时实现企业目标。在这个模型中，工资和奖金设计必须满足以下两项基本约束：

- **参与约束（Participation Constraint, PC）**：员工的效用必须至少等于其保留效用，即：

  $$w + b \cdot \mathbb{E}[g(y)] - c(e) \geq U_0,$$

  其中 w 是固定工资，b 是奖金系数，$g(y)$ 是奖金与绩效 y 的关系函数，$c(e)$ 是努力的成本，U_0 是保留效用。

- **激励约束（Incentive Compatibility Constraint, IC）**：员工选择努力水平 e 时，最大化自己的效用：

  $$e^* = \arg\max_e \left[w + b \cdot \mathbb{E}[g(f(e) + \varepsilon)] - c(e)\right].$$

在该模型中，员工的绩效由以下公式决定：

$$y_i(e_i) = e_i + \varepsilon_i, \quad y_j(e_j) = e_j + \varepsilon_j,$$

其中：

- e_i 和 e_j 是员工 i 和 j 的努力水平；
- ε_i 和 ε_j 是随机扰动项，表示外部环境对绩效的随机影响。

假设员工 i 和 j 的工资奖金由以下规则决定：

- 若 $y_i(e_i) > y_j(e_j)$，员工 i 获得高薪 w_H；
- 否则，员工 i 获得低薪 w_L。

因此，员工 i 获得高薪的概率为：

$$\Pr\{y_i(e_i) > y_j(e_j)\} = \Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\}.$$

2. 概率部分推导过程

2.1 原始积分公式

根据概率的定义，条件概率可以用联合分布的积分形式表示为:

$$\Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\} = \iint_{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i} f(\varepsilon_i) f(\varepsilon_j)\, d\varepsilon_i d\varepsilon_j.$$

假设:

- ε_i 和 ε_j 独立;
- ε_i 和 ε_j 服从相同分布（例如标准正态分布）。

在这种情况下，联合概率密度函数可以分解为:

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = f(\varepsilon_i) \cdot f(\varepsilon_j).$$

积分区域由条件 $\varepsilon_i > \varepsilon_j + (e_j - e_i)$ 定义，因此可以改写为:

$$\Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{\varepsilon_j + (e_j - e_i)}^{\infty} f(\varepsilon_i)\, d\varepsilon_i \right] f(\varepsilon_j)\, d\varepsilon_j.$$

2.2 化简为累积分布函数

对 ε_i 的积分可以用累积分布函数 $F(x)$ 表示:

$$\int_{\varepsilon_j + (e_j - e_i)}^{\infty} f(\varepsilon_i)\, d\varepsilon_i = 1 - F(e_j - e_i + \varepsilon_j),$$

因此，公式进一步化简为:

$$\Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\} = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F(e_j - e_i + \varepsilon_j)]\, f(\varepsilon_j)\, d\varepsilon_j.$$

2.3 假设为标准正态分布

假设 $\varepsilon_i, \varepsilon_j \sim N(0,1)$，即它们是独立的标准正态分布随机变量，其概率密度函数为:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/2}.$$

将 $f(\varepsilon_j)$ 代入公式，得到:

$$\Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F(e_j - e_i + \varepsilon_j)]\, e^{-\varepsilon_j^2/2}\, d\varepsilon_j$$

干得不错，但事实证明，这跟没写一样。

3. 最优激励设计

基于推导出的条件概率公式：

$$\Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F(e_j - e_i + \varepsilon_j)]\, e^{-\varepsilon_j^2/2}\, d\varepsilon_j,$$

最优激励设计需要满足以下约束条件（虽然在开始已经写了一遍），并优化激励结构：

3.1 参与约束（Participation Constraint, PC）

雇员的效用 U_i 必须满足：

$$U_i = w + b \cdot \Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\} - c(e_i) \geq U_0,$$

其中：

- w 是固定工资；
- b 是与绩效相关的奖金系数；
- $c(e_i)$ 是雇员努力 e_i 的成本函数；
- U_0 是雇员的保留效用。

3.2 激励约束（Incentive Compatibility Constraint, IC）

雇员在选择努力水平 e_i 时，必须最大化自身的期望效用：

$$e_i^* = \arg\max_{e_i} \left[w + b \cdot \Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\} - c(e_i) \right].$$

$\arg\max$ e_i^*

雇员只有在其边际收益等于边际成本时才会选择最优努力水平 e_i^*，即：

$$\frac{\partial}{\partial e_i} \left[b \cdot \Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\} \right] = \frac{\partial c(e_i)}{\partial e_i}.$$

3.3 雇主的目标

雇主设计激励方案的目标是最大化自身的期望收益：

$$\Pi = \mathbb{E}[y - (w + b \cdot \Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\})],$$

其中 $y = f(e_i) + \varepsilon_i$ 表示产出。将公式展开后，雇主的优化问题为：

$$\max_{w,b} \left\{ f(e_i^*) + \mathbb{E}[\varepsilon_i] - w - b \cdot \Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\} \right\}.$$

3.4 最优激励方案

通过分析可以得到以下最优激励方案的特性：

- 固定工资 w：应满足参与约束，确保 $w + b \cdot \Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\} \geq U_0 + c(e_i^*)$。
- 奖金系数 b：需要平衡激励强度和风险分担，通常随着雇员的风险厌恶程度调整。
- 努力水平 e_i^*：满足边际收益等于边际成本的条件，具体为：

$$b \cdot \frac{\partial \Pr\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > e_j - e_i\}}{\partial e_i} = \frac{\partial c(e_i)}{\partial e_i}.$$