

東南大學

# 毕业设计(论文)报告

题 目: 基于不完全信息分布式博弈算法加速机制研究

学 号: 07117127

姓 名: 冯章成

学 院: 数学学院

专 业: 数学与应用数学

指导教师: 许文盈、曹进德

起止日期: 2021 年 1 月-2021 年 6 月

## 东南大学毕业（设计）论文独创性声明

本人声明所呈交的毕业（设计）论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的科研成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得东南大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

论文作者签名：马章成 日期：2021年6月12日

## 东南大学毕业（设计）论文使用授权声明

东南大学有权保留本人所送交毕业（设计）论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布（包括刊登）论文的全部或部分内容。论文的公布（包括刊登）授权东南大学教务处办理。

论文作者签名：马章成  
日期：2021年6月12日

导师签名：王立军  
日期：2021年6月12日

# 摘 要

网络博弈近年来备受关注, 其中具有全局共享耦合约束的博弈在实际中应用广泛, 随着网络规模的不断增大, 不完全决策信息设定在诸多实际场景能够更好地满足博弈中信息交互的假设条件. 此外, 分布式计算方法比传统集中式方法更为灵活方便, 具有重要研究意义. 针对不完全信息设定下具有共享约束的博弈中的分布式计算问题, 本文从算法设计和理论证明角度给出了一些解决方法. 主要工作如下:

在部分决策信息设定下, 玩家只能从其邻居处得到信息, 而不是所有其它玩家, 为弥补缺失信息, 本文为每名玩家引入对其他玩家的决策的估计变量. 为提升均衡点搜索算法的收敛速度, 本文分别提出了具有惯性 (inertia) 和超松弛 (overrelaxation) 的完全分布式广义纳什均衡 (Generalized Nash equilibrium, GNE) 搜索算法. 惯性和超松弛步骤的加入, 提升了算法的收敛速度, 增大了每次迭代时玩家的计算量, 为了平衡收敛速度和计算成本, 本文进一步提出了具有切换惯性 (alternated inertia) 和切换超松弛 (alternated overrelaxation) 的完全分布式 GNE 搜索算法.

对于每一算法, 先进行问题描述, 建立所研究博弈问题的数学模型, 其次提出算法, 利用算子分裂法, 将广义纳什均衡点刻画为单调算子和的零点, 将算法重新表述为不动点迭代, 并在扩展伪梯度强单调和 Lipschitz 连续的假设下证明了算法的收敛性. 进一步减弱假设条件, 在扩展伪梯度缺失单调性的假设下重新证明了算法的收敛性, 最后通过 MATLAB 数值仿真验证了算法的性能和有效性.

关键词: 广义纳什均衡, 分布式算法, 部分决策信息

# ABSTRACT

In recent years, much research attention has been devoted to network games, especially those with global shared coupling constraints, owing to their wide applications in practice. With the increasing scale of networks, partial-decision information setting can better satisfy the assumptions of information exchange in many actual scenarios. In addition, distributed computation methods are more flexible and convenient than traditional centralized methods. This thesis presents some ideas to deal with the distributed computation problem in games with shared coupling constraints under partial-decision information setting. The main contributions are as follows:

Under partial-decision information setting, players can only get information from their neighbors rather than all the other players. In order to make up for the missing information, this thesis introduces the estimation variables of other players' decisions for each player. To improve the convergence rate of equilibrium seeking algorithm, this thesis proposes fully distributed GNE seeking algorithm with inertia and overrelaxation, respectively. In order to further reduce the computation cost, fully distributed GNE seeking algorithms with alternated inertia and alternated overrelaxation are proposed, respectively.

An appropriate mathematical model is first set up to describe the competition relationship of multiple players in a large-scale network. Then, several effective fully distributed algorithms are constructed to seek the GNE over the network. Using the operator splitting technique, the convergence of the proposed algorithms can be guaranteed under the assumptions of Lipschitz continuity and strong monotonicity of the extended pseudo-gradient mappings (EPGM). Furthermore, we relax the assumption of the monotonicity of the EPGM, and prove the convergence of the algorithms in the absence of such an assumption. Finally, numerical simulations are provided to illustrate the efficiency and performance of the developed algorithms.

**KEY WORDS:** Generalized Nash equilibrium, Distributed algorithm, Partial-decision

## 符号和注记

$\mathbf{R}^m(\mathbf{R}_+^m)$	$m$ -维（非负）实列向量
$\mathbf{R}^{m \times m}$	$m \times m$ -维实矩阵
$\mathbf{0}_n$	$n$ -维零向量
$I_m$	$m$ -维单位矩阵
$\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n (\prod_{i=1}^n \Omega_i)$	集合 $\Omega_i, i = 1, \cdots, n$ 的笛卡尔积
$[x]_l$	向量 $x$ 的第 $l$ 个元素
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	向量内积
$\  \cdot \ $	2 范数
$\langle \cdot, \cdot \rangle_B$	$B$ -内积
$\  \cdot \ _B$	$B$ -范数
$\Phi \succ (\succeq) 0$	$\Phi$ 是（半）正定矩阵
$\otimes$	矩阵的 Kronecker 积
$\text{diag}(A_1, \cdots, A_n)$	对角线上为 $A_1, \cdots, A_N$ 的分块对角矩阵
$\text{col}(x_1, \cdots, x_n)$	$[x_1^T, \cdots, x_n^T]^T$
$\ A\ _\infty$	$\max\{\sum_{k=1}^n  [A]_{1k} , \cdots, \sum_{k=1}^n  [A]_{mk} \}$

# 目 录

摘 要 .....	I
ABSTRACT .....	II
符号和注记 .....	III
目 录 .....	IV
第一章 绪论 .....	1
1.1. 课题背景及意义 .....	1
1.1.1 博弈论与纳什均衡 .....	1
1.1.2 分布式计算 .....	1
1.2. 研究现状 .....	2
1.2.1 均衡搜索 .....	2
1.2.2 不完全信息设定 .....	3
1.3. 本文研究内容 .....	3
1.4. 本文组织结构 .....	4
第二章 预备知识 .....	5
2.1. 图论 .....	5
2.2. 算子理论 .....	5
第三章 具有惯性的完全分布式广义纳什均衡搜索算法 .....	8
3.1. 问题描述 .....	8
3.2. 算法设计 .....	10
3.3. 收敛性分析 .....	12
3.4. 弱假设下的收敛性分析 .....	18
3.5. 数值仿真 .....	19
3.6. 小结 .....	21
第四章 具有切换惯性的完全分布式广义纳什均衡搜索算法 .....	22
4.1. 问题描述和算法设计 .....	22
4.2. 弱假设下的收敛性分析 .....	23
4.3. 数值仿真 .....	25
4.4. 小结 .....	25

第五章 两种具有超松弛的完全分布式算法 ..... 26

5.1. 具有超松弛的完全分布式算法 ..... 26

5.2. 具有切换超松弛的完全分布式算法 ..... 28

5.3. 数值仿真 ..... 31

5.4. 小结 ..... 31

第六章 总结与展望 ..... 37

6.1. 总结 ..... 37

6.2. 展望 ..... 37

参考文献 ..... 39

附 录 ..... 42

致 谢 ..... 43

# 第一章 绪论

本章首先详细介绍分布式纳什均衡点计算的研究背景和研究意义. 其次针对目前已有的研究工作进行总结归纳. 并在此基础上给出本文的主要研究内容及组织结构.

## 1.1 课题背景及意义

### 1.1.1 博弈论与纳什均衡

博弈论是现代数学的一个分支, 是使用严谨的数学模型研究现实世界中理性决策者之间冲突与合作的理论<sup>[1]</sup>, 帮助我们理解所观察到的决策主体相互作用时的现象, 博弈参与者亦称为玩家(竞争者、决策者、决策主体). 过去几年, 网络博弈由于其在不同领域中的广泛应用而备受关注, 如竞争型经济<sup>[2]</sup>, 干扰信道模型中的功率分配<sup>[3, 4]</sup>, 环境污染控制<sup>[5]</sup>, 云计算<sup>[6]</sup>, 无线通信<sup>[7-9]</sup> 和对抗性分类<sup>[10, 11]</sup>.

纳什均衡(Nash Equilibrium, NE)是博弈论中最基本的术语之一, 以约翰·纳什命名, 在一个博弈过程中, 如果任意一位决策者在其他所有决策者的策略确定的情况下, 其选择的策略是最优的, 那么这个组合就被定义为纳什均衡<sup>[12]</sup>. 在纳什均衡点上, 每一个理性决策者都不会有单独改变策略的冲动. 纳什均衡是决策者理性选择的结果. 纳什均衡的思想经常被应用于现代生活中, 例如智能电网中的需求侧管理<sup>[13]</sup>, 电动汽车充电<sup>[14]</sup> 和竞争型市场需求响应<sup>[15]</sup> 等, 从博弈论理论角度, 这些问题的关键挑战是给决策者设计行为规则以达到最终的均衡.

### 1.1.2 分布式计算

纳什均衡点搜索和计算是网络化博弈中的一个重要研究课题, 目前已有的纳什均衡搜索算法大多是集中式的. 集中式算法通常假设博弈中的每个个人能够充分了解/获知其他玩家的决策或行为信息; 或者假设存在一个中心节点, 该节点能与网络中所有节点通讯. 现有的集中式算法在一定程度上有效地解决了部分纳什均衡点问题, 但随着互联网的发展, 网络博弈的规模急剧增长, 使得现有集中式算法所依赖的假设条件难以满足, 因此如何有效处理大规模、大数据背景下纳什均衡点搜索问题成为一大研究难点, 亟待解决.

近些年来, 多机协作的分布式计算被提出, 分布式算法可大幅降低单机的计算负担, 对复杂大规模系统, 分布式方法比传统集中式方法更为灵活且操作更为方便. 现在分布式计算已经应用在科研、教育、天气预报分析、数据库搜索、生物技术等诸多领域, 成为当代系统和控制科学的重要发展方向之一, 具有重要的研究意义.

早期提出的分布式博弈算法目标是降低单机的计算负担, 其设计通常假设博弈中每个玩家(参与者)能获知其竞争者的信息, 这类网络化博弈统称之为基于完全信息的分布式博弈算法. 注意到在实际的大规模网络化博弈中, 由于物理空间限制、通信成本高昂等原因, 参与



博弈的每个个体仅能与其邻居交换信息，而无法获知所有竞争者的信息。在此情况下，决策主体无法直接获取优化目标函数所需的关键信息。实际中大规模网络博弈通常具有上述特征，因此如何在缺失关键决策信息的前提下设计有效的博弈算法成为当前网络化博弈研究的一大难点。此类基于局部信息所设计的分布式算法被统称为不完全信息（部分信息）设定下的分布式博弈算法，简称为完全分布式博弈算法。由于其在实际问题中广泛的应用性，完全分布式博弈算法成为近年来备受关注的研究课题。

算法的收敛性和收敛速度是分布式博弈算法（纳什均衡点搜索算法）设计和分析最关注的两大算法性能。若算法无法收敛或者收敛速度太慢将直接影响到算法的有效性和实用性，因此如何设计收敛速度快、准确率高、可扩展性强的算法是本文的一大关注点。在如今这个数据爆炸的时代，训练一个大规模的模型需要很庞大的数据，意味着需要高昂的人力物力财力和时间成本，加速算法的研究有助于降低能耗、节约成本等。

综上所述，本文拟围绕不完全信息分布式博弈算法加速机制展开理论研究，该研究有一定的深度和难度，同时也具有相当高的理论研究价值和广泛的实际应用前景，值得关注和深入探索。

## 1.2 研究现状

### 1.2.1 均衡搜索

分布式 NE 计算是多智能体网络博弈中的重要研究课题。[16] 中提出了一种基于收益的算法，形式为基于连续时间机制搜索的动力学，使用正弦扰动进行梯度估计，对于二次博弈证明了局部收敛性。自工作 [17, 18] 以来，基于梯度的动力学一直被采用。[19] 研究了两人矩阵博弈的虚拟游戏和（投影）梯度动力学，基于最近最佳响应，提出了一种用于伪梯度映射单调的博弈中的分布式 NE 搜索算法，作者将其推广到  $N$  人博弈并得到局部收敛结论。经典的 NE 问题没有考虑博弈中的全局共享耦合约束，即一名玩家的决策受到其它玩家策略的约束，这些约束彼此耦合，形成全局约束。全局约束在实际中应用广泛，如电网中的经济调度问题[20]，由于总产量需满足总需求，每一生产者的产量受到其它生产者产量的约束，又和需求侧管理，供电公司通过定价来影响用户的用电决策，而用户的决策也通过负载影响公司的定价等等。拥有全局共享约束的博弈中的 NE 被称为广义纳什均衡（Generalized Nash equilibrium, GNE）[21]。

为计算 GNE，大量技术被提出[22-26]。例如，为处理 GNE 问题，一些基于 KKT（Karush-Kuhn-Tucker）条件的算法被提出[24]。[25] 中构造了一种寻找 GNE 的近端最佳相应动力学，其中每名玩家需在每步迭代中解决一个优化问题。除此之外，一种结合了投影梯度下降法的分布式原始-对偶算法[26] 被提出用于处理网络上的 GNE 计算问题。值得注意的是，无论是使用最佳相应或基于（投影）梯度进行分布式网络搜索 GNE 的经典方法中，绝大部分已有算法都是

基于完全决策信息假设，即，每名玩家能够访问所有其它玩家的行动信息. 然而这种假设在现实中并不一定成立，如 [27] 中所述，在大规模网络中，由于有限的通信资源和通信成本限制，与所有其它玩家进行通信是困难的，或一个参与者天生局限于被其他几个参与者观察到并与之交流，且通常单人计算能力较弱. 因此，部分决策信息设定下的 GNE 计算问题成为近年来备受关注的研究热点.

### 1.2.2 不完全信息设定

在不完全决策信息设定下，为弥补缺失信息，玩家需对其他玩家的行为进行估计并与其邻居交换，通过设计合适的一致性协议，这种估计将最终趋于玩家的真实行为 [30]. 目前已有一些致力于部分决策信息下 GNE 计算问题的工作 [31, 32]，如 [31] 中提出了一种对于大规模博弈的自适应虚拟游戏算法，[32] 中研究了聚合博弈中的信息交换技术. 算子理论方法作为一种优雅的方法已被引入 GNE 问题的分析 [26, 30]，此方法通过原始-对偶分析，将 GNE 被刻画为单调算子和的零点，收敛到 GNE 的过程被重新表述为前向-后向不动点迭代. 借助于算子理论方法，一些有效的分布式 GNE 搜索算法被提出 [33, 34]. 然而，当涉及到部分决策信息下的分布式 GNE 计算问题时，结果是发散的，这也是本文的动机之一.

与已有的衰减步长分布式算法 [35] 相比，定步长算法有快速收敛的潜力 [26]. 最近，一些定步长分布式近端算法和投影梯度算法被提出 [26, 33, 36–38]. 值得注意的是，现有的大部分不完全决策信息设定下的算法，都要求扩展伪梯度映射（Extend pseudogradient mapping, EPGM）是强单调的，这一假设在现实中太强，如何减弱成为技术难题，本文研究了如 [30] 的弱假设条件下的 GNE 搜索算法.

## 1.3 本文研究内容

本文旨在设计新的分布式算法，用于在部分决策信息设置下寻找具有全局共享约束的一般博弈中的 GNE. 具体内容有：

- 本文运用算子理论方法（算子分裂法），将寻找 GNE 转化为寻找单调算子和的零点问题，进而转化为不动点迭代；
- 在具有任意无向拓扑的网络上分别提出具有惯性和过度松弛的分布式 GNE 动力学；
- 为了降低通信和计算成本，进一步构造具有切换惯性和切换过度松弛的改进算法；
- 理论证明方面，利用 KKT 条件和变分不等式，证明在 EPGM 的强单调性和李普希茨连续性假设下，所提出的算法全局收敛于 GNE；
- 减弱对 EPGM 的强单调性假设，仅在李普希茨连续性的假设下重新证明算法的收敛性；
- 利用数值仿真验证本课题提出的算法具有提高收敛速度的潜力.

## 1.4 本文组织结构

基于上述研究内容，本文组织结构如下：

第1章对博弈论，分布式计算，广义纳什均衡搜索及不完全信息设定的背景及研究现状做了简单介绍，在此基础上阐述了本文的研究内容及意义；

第2章介绍了本文用到的图论与算子理论知识；

第3章提出了具有惯性的完全分布式 GNE 搜索算法. 3.1节先进行问题描述，将本文所研究的博弈问题进行数学建模，定义了 GNE，说明了 GNE 的存在性；3.2提出了具有惯性的分布式算法，并利用算子知识将搜索算法转化为不动点迭代；3.3节对上节所提出算法进行收敛性分析，主要利用算子分裂法将 GNE 刻画为单调算子和的零点，在 EPGM 强单调和 Lipschitz 连续性假设下证明了算法的收敛性；3.4节减弱了对 EPGM 的假设，在更弱的假设条件下证明了算法的收敛性；3.5对经典博弈实例进行数值仿真，验证了算法的有效性；

第4章提出了具有切换惯性的完全分布式 GNE 搜索算法，我们采用与第3章类似的架构对该算法进行分析和讨论；

第5章提出了两种分别具有超松弛和切换超松弛的完全分布式算法，并在强假设及弱假设下证明了其收敛性，对算法效果进行了数值仿真验证；

第6章对全文进行了总结，并对未来的工作进行了展望.

## 第二章 预备知识

本章主要介绍图论及算子理论中的部分结论.

### 2.1 图论

图  $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$  描述了个体间的信息交换情况, 其中  $\mathcal{N} := \{1, \dots, N\}$  是玩家集合, 即点集,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$  是边集. 若玩家  $i$  能访问玩家  $j$  的决策, 则  $(i, j) \in \mathcal{E}$  且  $j$  属于玩家  $i$  的邻居集  $\mathcal{N}_i := \{j | (i, j) \in \mathcal{E}\}$ ,  $i \notin \mathcal{N}_i$ . 若  $(i, j) \in \mathcal{E}$  当且仅当  $(j, i) \in \mathcal{E}$ , 此时  $\mathcal{G}$  被称为无向的.  $\mathcal{G}$  中的一条路是不同的点和其对应的边交错出现的序列, 若有从  $i$  到  $j$  的路, 则称点  $i$  和  $j$  是连通的, 若  $\mathcal{G}$  中任意两点都连通, 则称图  $\mathcal{G}$  是连通的. 令  $W := [w_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$  表示  $\mathcal{G}$  的权重邻接矩阵, 其中当  $j \in \mathcal{N}_i$  时  $w_{ij} > 0$ , 否则  $w_{ij} = 0$ . 度矩阵定义为  $D := \text{diag}[d_1, \dots, d_N] = \text{diag}[\sum_{j=1}^N w_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^N w_{Nj}]$ , 图  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵为  $L := D - W$ . 当  $\mathcal{G}$  是无向连通图时, 0 是  $L$  的单特征值, 且  $L\mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$ ,  $\mathbf{1}_N^T L = \mathbf{0}_N^T$ , 其余特征值均大于 0.  $L$  的所有特征值按升序排列为  $0 < s_2(L) \leq \dots \leq s_N(L)$ .

### 2.2 算子理论

下列结论来自 [39]. 令  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  是非空集合,  $2^{\mathcal{Y}}$  为  $\mathcal{Y}$  的幂集, 即  $\mathcal{Y}$  的所有子集构成的集合. 记号  $\mathcal{F}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  表示算子  $T$  将  $\mathcal{X}$  中的每一点  $x$  映射到  $\mathcal{Y}$  中的点  $Tx$ . 因此, 记号  $T: \mathcal{X} \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$  表示  $T$  是一个从  $\mathcal{X}$  到  $\mathcal{Y}$  的集值算子, 即  $T$  将  $\mathcal{X}$  中的每一点  $x$  映射到一个集合  $Tx \subset \mathcal{Y}$ . 令  $T: \mathcal{X} \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$ , 则  $T$  的图为

$$\text{gra}T = \{(x, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} | u \in Tx\}. \quad (2.1)$$

若  $\mathcal{Y}$  是一向量空间, 则  $T$  的零集为

$$\text{zer}T = \{x \in \mathcal{X} | 0 \in Tx\}. \quad (2.2)$$

$T$  的预解算子为

$$R_T = (Id + T)^{-1}. \quad (2.3)$$

集合  $\Omega$  上的正规锥算子定义为

$$N_{\Omega}(x) = \begin{cases} \emptyset & x \notin \Omega \\ \{z | \langle z, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in \Omega\} & x \in bd(\Omega) \\ 0 & x \in int(\Omega). \end{cases} \quad (2.4)$$

设  $x$  在  $\Omega$  上的投影为  $P_{\Omega}(x) = \arg \min_{y \in \Omega} \|x - y\|$ , 有  $P_{\Omega}(x) = R_{N_{\Omega}}(x) = (Id + N_{\Omega})^{-1}(x)$ , 其中  $Id$  为恒等算子, 即  $Id(x) = x$ . 下面给出一些算子的常用性质,

**定义 2.1.** 令  $\mathfrak{A} : \mathbf{R}^m \rightarrow 2^{\mathbf{R}^m}$ , 则  $\mathfrak{A}$  是

(1) 单调的, 若

$$\forall (x, a), \forall (y, b) \in gra\mathfrak{A}, \quad \langle x - y, a - b \rangle \geq 0; \quad (2.5)$$

(2) 极大单调的, 若  $gra\mathfrak{A}$  不严格包含于任意其它算子的图中, 即

$$\forall (x, a) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m, \quad (x, a) \in gra\mathfrak{A} \Leftrightarrow \forall (y, b) \in gra\mathfrak{A}, \langle x - y, a - b \rangle \geq 0; \quad (2.6)$$

(3) 非扩张的, 若其是  $l$ -Lipschitz 连续的, 即

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^m, \quad \|\mathfrak{A}x - \mathfrak{A}y\| \leq \|x - y\|; \quad (2.7)$$

(4) 强非扩张的, 若

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^m, \quad \|\mathfrak{A}x - \mathfrak{A}y\|^2 + \|(Id - \mathfrak{A})x - (Id - \mathfrak{A})y\|^2 \leq \|x - y\|^2; \quad (2.8)$$

(5)  $\beta$ -协强制的, 对于  $\beta > 0$ , 若  $\beta\mathfrak{A}$  是强非扩张的, 即

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^m, \quad \beta\|\mathfrak{A}x - \mathfrak{A}y\|^2 \leq \langle x - y, \mathfrak{A}x - \mathfrak{A}y \rangle. \quad (2.9)$$

(6)  $\alpha$ -平均的,  $\alpha \in [0, 1]$ , 若

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^m, \quad \|\mathfrak{A}x - \mathfrak{A}y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \|(Id - \mathfrak{A})x - (Id - \mathfrak{A})y\|^2, \quad (2.10)$$

记为  $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(\alpha)$ .

**引理 2.1.** [39, Rem.4.24] 令  $\mathfrak{A} : \mathbf{R}^m \rightarrow 2^{\mathbf{R}^m}$ , 则有如下结论

(1) 若  $\mathfrak{A}$  是  $\alpha$ -平均的, 则它是非扩张的;

(2)  $\mathfrak{A}$  是强非扩张的，当且仅当它是  $\frac{1}{2}$ -平均的.

**引理 2.2.** [39, Prop.4.32] 设  $m$  是一正数，集合  $I = \{1, \dots, m\}$ ，令  $(T_i)_{i \in I}$  是从  $\mathbf{R}^m$  到  $2^{\mathbf{R}^m}$  的算子族， $(\alpha_i)_{i \in I}$  是  $[0, 1]$  上的实数，使得对于任意  $i \in I$ ， $T_i$  是  $\alpha_i$ -平均的，令

$$T = T_1 \cdots T_m, \quad \alpha = \frac{m}{m - 1 + \frac{1}{\max_{i \in I} \alpha_i}}, \quad (2.11)$$

则  $T$  是  $\alpha$ -平均的.

### 第三章 具有惯性的完全分布式广义纳什均衡搜索算法

本章先对所研究的博弈问题的数学模型进行说明，提出了具有惯性的完全分布式广义纳什均衡搜索算法，并分别在强假设及弱假设下分析了算法的收敛性，最后利用 MATLAB 数值仿真验证了算法的有效性。

#### 3.1 问题描述

考虑一个玩家的集合  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ ，每个玩家  $i \in \mathcal{N}$  从他们的私人可行集  $\Omega_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$  中选择自己的决策变量  $x_i$ 。令  $n := \sum_{i=1}^N n_i$  和  $\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N \in \mathbf{R}^n$ ，有所有玩家决策的聚合向量  $x := \text{col}(x_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \mathbf{R}^n$ ，称为决策分布。也可将  $x$  写作  $x = (x_i, x_{-i})$ ，其中  $x_{-i} := \text{col}(x_j)_{j \in \mathcal{N}/\{i\}} = \text{col}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$  表示除玩家  $i$  外其他所有玩家的决策。

$J_i(x_i, x_{-i})$  表示玩家  $i$  的局部目标函数，仿射耦合约束集定义为

$$\mathcal{K} := \prod_{i=1}^N \Omega_i \cap \{x \in \mathbf{R}^n | Ax \leq b\} \quad (3.1)$$

其中  $A := [A_1, \dots, A_N] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $A_i \in \mathbf{R}^{m \times n_i}$ ,  $b := \sum_{i=1}^N b_i \in \mathbf{R}^m$ .  $A_i$  和  $b_i$  为仅有玩家  $i$  可访问的局部数据。定义玩家  $i$  的可行集为  $\mathcal{K}_i(x_{-i}) := \{x_i \in \mathbf{R}^{n_i} | (x_i, x_{-i}) \in \mathcal{K}\}$ ，这意味着每名玩家的可行集取决于其他玩家的行为。每名玩家旨在最小化他的目标函数，故本文研究的博弈问题能表示为如下的互相依赖的最优化问题

$$\forall i \in \mathcal{N}, \min_{x_i \in \mathbf{R}^{n_i}} J_i(x_i, x_{-i}) \quad \text{s.t. } x_i \in \mathcal{K}_i(x_{-i}). \quad (3.2)$$

下面给出广义纳什均衡的定义，

**定义 3.1.** 博弈(3.2)的一个广义纳什均衡点是一个集体策略  $x^* = \text{col}(x_i^*)_{i \in \mathcal{N}}$  使得对任意  $i \in \mathcal{N}$

$$x_i^* \in \arg \min J_i(x_i, x_{-i}^*) \quad \text{s.t. } x_i \in \mathcal{K}_i(x_{-i}^*). \quad (3.3)$$

为处理耦合约束并计算 GNE，定义每名玩家  $i$  的拉格朗日函数如下，

$$\mathcal{L}_i(x_i, \lambda_i; x_{-i}) = J_i(x_i, x_{-i}) + \lambda_i^T (Ax - b) \quad (3.4)$$

其中  $\lambda_i \in \mathbf{R}_+^m$  是对偶变量。根据最优化理论，若  $x_i^*$  是(3.2)的一个最优解，则存在  $\lambda_i^* \in \mathbf{R}_+^m$  使

得如下的 KKT 条件满足：

$$\begin{cases} \nabla_{x_i} \mathcal{L}_i(x_i^*, \lambda_i^*; x_{-i}^*) = \mathbf{0}_{n_i} \\ \langle \lambda_i^*, Ax^* - b \rangle = 0 \\ -(Ax^* - b) \geq 0 \\ \lambda_i^* \geq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.5)$$

利用正规锥算子，KKT 条件等价于

$$\begin{cases} \mathbf{0}_{n_i} \in \nabla_{x_i} J_i(x_i^*, x_{-i}^*) + A_i^T \lambda_i^* + N_{\Omega_i}(x_i^*) \\ \mathbf{0}_m \in -(Ax^* - b) + N_{\mathbf{R}_+^m}(\lambda_i^*) \end{cases} \quad (3.6)$$

注意到由正规锥算子的定义，当  $\lambda_i^* \notin \mathbf{R}_+^m$  时  $N_{\mathbf{R}_+^m}(\lambda_i^*) = \emptyset$ ，可推出当(3.6)成立时， $\lambda_i^* \in \mathbf{R}_+^m$ （等价于  $[\lambda_i^*]_k \geq 0$ ）。进一步， $N_{\mathbf{R}_+^m} = \prod_{k=1}^m N_{\mathbf{R}_+}$ ，若  $[\lambda_i^*]_k = 0$ ，那么  $N_{\mathbf{R}_+}([\lambda_i^*]_k) = -\mathbf{R}_+$ ，且因此  $[Ax^* - b]_k \leq 0$ ；若  $[\lambda_i^*]_k > 0$ ，那么  $N_{\mathbf{R}_+}([\lambda_i^*]_k) = 0$ ，且因此  $[Ax^* - b]_k = 0$ 。这可推出  $Ax^* - b \leq 0$  和  $\langle \lambda_i^*, Ax^* - b \rangle = 0$ 。

主要考虑每名玩家具有相同拉格朗日乘子时的 GNE，即对任意  $i \in \mathcal{N}$ ,  $\lambda_i^* = \lambda^*$ ，此时称之为变分 GNE（v-GNE）。v-GNE  $x^*$  是变分不等式  $VI(F, \mathcal{K})$  的解：

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{K} \quad (3.7)$$

其中  $F$  称为博弈的伪梯度映射，定义为：

$$F(x) := \text{col}(\nabla_{x_i} J_i(x_i, x_{-i}))_{i \in \mathcal{N}} \quad (3.8)$$

**假设 3.1.** 给定  $x_{-i}$ ,  $J_i(x_i, x_{-i})$  连续可微且在  $x_i$  处凸，对每位玩家  $i$ ， $\Omega_i$  为非空、紧、凸集。  $\mathcal{K}$  非空且满足 Slater 约束条件。

**假设 3.2.**  $F$  是  $\mu$ -强单调且  $\theta_0$ -Lipschitz 连续的：  $\forall x, x', \langle F(x) - F(x'), x - x' \rangle \geq \mu \|x - x'\|^2$  且  $\|F(x) - F(x')\| \leq \theta_0 \|x - x'\|$ 。

由 [23, Thm.4.8] 可知  $x^*$  是  $VI(F, \mathcal{K})$ (3.7) 的解，当且仅当存在一个  $\lambda^* \in \mathbf{R}^m$  满足如下的 KKT 条件：

$$\begin{cases} \mathbf{0}_n \in F(x^*) + A^T \lambda^* + N_{\Omega}(x^*) \\ \mathbf{0}_m \in -(Ax^* - b) + N_{\mathbf{R}_+^m}(\lambda^*) \end{cases} \quad (3.9)$$

其中  $N_{\Omega}(x^*) = \prod_{i=1}^N N_{\Omega_i}(x_i^*)$ 。

根据 [40, Cor.2.2.5]，博弈(3.2)的 v-GNE 的存在性可由假设3.1保证，本文的目标是设计部分决策信息设定下搜索 v-GNE 的分布式算法，算法的计算成本和收敛速度均在本文考虑范围内。



### 3.2 算法设计

在这一节中，本文提出了在部分决策信息设定下具有惯性的分布式 v-GNE 搜索算法. 见算法1.

玩家  $i$  控制其私人决策变量  $x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$  和  $\lambda_i \in \mathbf{R}_+^m$ （即对于(3.9)中  $\lambda^*$  的估计）. 为了处理不完全决策信息设定，弥补缺失信息，为每一玩家  $i$  引入一个辅助变量  $\mathbf{x}_i$ ，用于提供其对于其它玩家的决策的估计. 具体地， $\mathbf{x}_i = \text{col}(\mathbf{x}_i^j)_{j \in \mathcal{N}}$ ，其中  $\mathbf{x}_i^j$  表示玩家  $i$  对玩家  $j$  的决策的估计，且  $\mathbf{x}_i^i = x_i$ .  $\mathbf{x}_i$  也可写为  $\mathbf{x}_i = (x_i, \mathbf{x}_i^{-i})$ ，其中  $\mathbf{x}_i^{-i}$  表示除去自身决策变量后，玩家  $i$  的估计向量. 除此之外，为每名玩家  $i \in \mathcal{N}$  再引入一个辅助变量  $z_i \in \mathbf{R}_+^m$ . 假设每名玩家通过通信网络  $\mathcal{G}$  与各自的邻居交换他们的局部变量  $\{\mathbf{x}_i, \lambda_i, z_i\}$ .

**假设 3.3.** 通信网络  $\mathcal{G}$  是无向连通的，其权重邻接矩阵  $W = [w_{ij}]$  满足  $W = W^T$ .

算法1是在部分决策信息设定下，一种具有惯性的分布式 v-GNE 搜索算法.  $x_{i,k}, \mathbf{x}_{i,k}^{-i}, z_{i,k}, \lambda_{i,k}$  分别表示第  $k$  次迭代时  $x_i, \mathbf{x}_i^{-i}, z_i, \lambda_i$  的值， $\alpha$  是惯性参数， $c$  是耦合参数， $\gamma_i, \xi_i, \kappa_i$  是玩家  $i$  在更新其决策时的固定步长， $P_{\Omega_i}$  是集合  $\Omega_i$  上的投影算子.

---

#### 算法 1 具有惯性的分布式 v-GNE 搜索算法

---

初始化:  $x_{i,0} \in \Omega_i, \mathbf{x}_{i,0}^{-i} \in \mathbf{R}^{n-n_i}, \lambda_{i,0} \in \mathbf{R}_+^m, z_{i,0} \in \mathbf{R}^m$

加速:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{i,k} &= x_{i,k} + \alpha(x_{i,k} - x_{i,k-1}) \\ \tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i} &= \mathbf{x}_{i,k}^{-i} + \alpha(\mathbf{x}_{i,k}^{-i} - \mathbf{x}_{i,k-1}^{-i}) \\ \tilde{z}_{i,k} &= z_{i,k} + \alpha(z_{i,k} - z_{i,k-1}) \\ \tilde{\lambda}_{i,k} &= \lambda_{i,k} + \alpha(\lambda_{i,k} - \lambda_{i,k-1})\end{aligned}$$

更新:

$$\begin{aligned}x_{i,k+1} &= P_{\Omega_i}(\tilde{x}_{i,k} - \gamma_i(\nabla_{x_i} J_i(\tilde{x}_{i,k}, \tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i}) + A_i^T \tilde{\lambda}_{i,k} + c \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\tilde{x}_{i,k} - \tilde{\mathbf{x}}_{j,k}^i))) \\ \mathbf{x}_{i,k+1}^{-i} &= \tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i} - \gamma_i c \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i} - \tilde{\mathbf{x}}_{j,k}^{-i}) \\ z_{i,k+1} &= \tilde{z}_{i,k} + \xi_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\tilde{\lambda}_{i,k} - \tilde{\lambda}_{j,k}) \\ \lambda_{i,k+1} &= P_{\mathbf{R}_+^m}(\tilde{\lambda}_{i,k} + \kappa_i(A_i(2x_{i,k+1} - \tilde{x}_{i,k}) - b_i \\ &\quad - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(2(z_{i,k+1} - z_{j,k+1}) - (\tilde{z}_{i,k} - \tilde{z}_{j,k})) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\tilde{\lambda}_{i,k} - \tilde{\lambda}_{j,k})))\end{aligned}$$


---

为利用算子简化算法形式，令  $\tilde{x}_{i,k}, \tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i}, \tilde{z}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{i,k}$  分别表示  $\tilde{x}_i, \tilde{\mathbf{x}}_i^{-i}, \tilde{z}_i, \tilde{\lambda}_i$  在第  $k$  次迭代时的值， $\tilde{\mathbf{x}}_i := (\tilde{x}_i, \tilde{\mathbf{x}}_i^{-i})$ . 除此之外，令  $\mathbf{x} := \text{col}(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathcal{N}}, \mathbf{z} := \text{col}(z_i)_{i \in \mathcal{N}}, \boldsymbol{\lambda} := \text{col}(\lambda_i)_{i \in \mathcal{N}}, \tilde{\mathbf{x}} := \text{col}(\tilde{\mathbf{x}}_i)_{i \in \mathcal{N}}, \tilde{\mathbf{z}} := \text{col}(\tilde{z}_i)_{i \in \mathcal{N}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}} := \text{col}(\tilde{\lambda}_i)_{i \in \mathcal{N}}, \mathbf{A} := \text{diag}((A_i)_{i \in \mathcal{N}}), \mathbf{L}_\lambda := L \otimes I_m, \mathbf{L}_x := L \otimes I_n, \mathbf{b} := \text{col}(b_i)_{i \in \mathcal{N}}, \boldsymbol{\gamma}^{-1} := \text{diag}((\gamma_i^{-1} I_n)_{i \in \mathcal{N}}), \boldsymbol{\xi}^{-1} := \text{diag}((\xi_i^{-1} I_n)_{i \in \mathcal{N}}), 和  $\boldsymbol{\kappa}^{-1} := \text{diag}((\kappa_i^{-1} I_n)_{i \in \mathcal{N}})$ .$

扩展伪梯度映射  $\mathbf{F}$  定义为

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \text{col}(\nabla_{x_i} J_i(x_i, \mathbf{x}_i^{-i}))_{i \in \mathcal{N}}. \quad (3.10)$$

**注 3.1.** 在算法 I 中, 每名玩家不基于真实策略计算其成本函数的梯度  $\nabla_{x_i} J_i(x_i, x_{-i})$ , 而是基于局部估计计算  $\nabla_{x_i} J_i(x_i, \mathbf{x}_i^{-i})$ . 扩展伪梯度  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  是  $F$  在决策和估计变量的增广空间的扩展, 当所有玩家  $i$  的估计都一致时, 即  $\forall i, \mathbf{x}_i = x$ , 有  $\mathbf{F}(\mathbf{1}_N \otimes x) = F(x)$ .

令  $\omega := \text{col}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) \in \Omega$ , 其中  $\Omega := \mathbf{R}^{Nn} \times \mathbf{R}^{Nm} \times \mathbf{R}_+^{Nm}$ , 且定义算子  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  和  $\Phi$  如下:

$$\mathfrak{A} : \omega \mapsto \begin{bmatrix} \mathcal{R}^T N_\Omega(\mathcal{R}\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \\ N_{\mathbf{R}_+^{Nm}}(\boldsymbol{\lambda}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{R}^T \mathbf{A}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_\lambda \\ -\mathbf{A}\mathcal{R} & \mathbf{L}_\lambda & \mathbf{0} \end{bmatrix} \omega \quad (3.11)$$

$$\mathfrak{B} : \omega \mapsto \begin{bmatrix} \mathcal{R}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) + c\mathbf{L}_x \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_\lambda \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$\Phi := \begin{bmatrix} \gamma^{-1} & \mathbf{0} & -\mathcal{R}^T \mathbf{A}^T \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\xi}^{-1} & \mathbf{L}_\lambda \\ -\mathbf{A}\mathcal{R} & \mathbf{L}_\lambda & \boldsymbol{\kappa}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

其中  $\mathcal{R} := \text{diag}(\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_N)$ ,

$$\mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_i \times n_{<i}} & I_{n_i} & \mathbf{0}_{n_i \times n_{>i}} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$n_{<i} := \sum_{j < i} n_j, \quad n_{>i} := \sum_{j > i} n_j.$$

下列引理给出了算法的算子等价形式,

**引理 3.1.** [30, Lem.2] 令  $\omega_k := \text{col}(\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)$ ,  $\tilde{\omega}_k := \text{col}(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{z}}_k, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)$ , 其中  $\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\lambda}_k, \tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{z}}_k, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k$  分别表示  $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  在第  $k$  次迭代时的值. 假设  $\Phi \succ 0$  且  $\Phi^{-1}\mathfrak{A}$  是极大单调的, 则算法 I 的更新步骤等价于

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_k &= \omega_k + \alpha(\omega_k - \omega_{k-1}) \\ \omega_{k+1} &= T(\tilde{\omega}_k), \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中  $T := T_2 \circ T_1$ ,  $T_1 := Id - \Phi^{-1}\mathfrak{B}$ ,  $T_2 := (Id + \Phi^{-1}\mathfrak{A})^{-1}$ .

### 3.3 收敛性分析

在这一节中，本文通过算子分裂法分析了算法1的收敛性（见定理3.1）。下列引理将算法1重新表述为不动点迭代。

**引理 3.2.** 设引理3.1中的假设成立，则算法1的任意极限点  $\bar{\omega} = \text{col}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$  都是  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  的零点和  $T_2 \circ T_1$  的固定点。

证明. 由(3.14)右端的连续性可知， $\bar{\omega} = T(\bar{\omega})$ . 由于  $\Phi$  是正定的，

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= T_2 \circ T_1(\bar{\omega}) = (Id + \Phi^{-1}\mathfrak{A})^{-1} \circ (Id - \Phi^{-1}\mathfrak{B})(\bar{\omega}) \\ &\Leftrightarrow (Id + \Phi^{-1}\mathfrak{A})(\bar{\omega}) \in (Id - \Phi^{-1}\mathfrak{B})(\bar{\omega}) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{0} \in \Phi^{-1}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\bar{\omega}) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{0} \in (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\bar{\omega}).\end{aligned}$$

□

下列引理将 GNE 刻画为算子和的零点，

**引理 3.3.** [30, Thm.1] 任意给定  $\omega^* = \text{col}(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in \text{zer}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ ，其中  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$ ，则  $x^*$  是  $VI(F, \mathcal{K})(3.7)$  的解，故  $x^*$  是博弈(3.2)的一个  $v$ -GNE。

为保证算法的收敛，需对扩展伪梯度映射加以额外的假设，

**假设 3.4.** 扩展伪梯度映射  $\mathbf{F}(3.10)$  是  $\eta$ -强单调的： $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}', \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}'), \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle \geq \eta \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2$ ，且  $\theta$ -Lipschitz 连续的： $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}', \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}')\| \leq \theta \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ 。

以下引理说明了算子  $\mathfrak{A}$  和  $\mathfrak{B}$  的性质，

**引理 3.4.** [26, Lem.5.4] 设假设3.1-3.4满足，则

- (1)  $\mathfrak{A}$  是极大单调的；
- (2)  $\mathfrak{B}$  是  $\beta$ -协强制的， $0 < \beta \leq \min\{\frac{1}{2d^*}, \frac{\eta}{\theta^2}\}$ ，其中  $d^*$  是图  $\mathcal{G}$  的最大度，即  $d^* = \max\{\sum_{j=1}^N w_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^N w_{Nj}\}$ 。

**引理 3.5.** 任意给定  $\delta > 0$ ，若每名玩家选取算法1中参数  $\gamma_i, \xi_i, \kappa_i$  使得

$$\begin{aligned}\gamma_i &\leq \frac{1}{\|A_i^T\|_\infty + \delta}, \\ \xi_i &\leq \frac{1}{2d_i + \delta} \\ \kappa_i &\leq \frac{1}{\|A_i\|_\infty + 2d_i + \delta}\end{aligned}\tag{3.15}$$

则  $\Phi$  是正定的，且  $\Phi - \delta I_{n+2mN}$  是半正定的。

证明. 由 Gershgorin 圆盘定理 ([41, §6.8 Thm.1]), 易得引理3.5的结论.  $\square$

接下来给出算法1的收敛性.

**定理 3.1.** 设假设3.1-3.4成立. 选取算法1中步长  $\gamma_i, \xi_i, \kappa_i$  使得引理3.5满足. 给定充分小的  $0 < \epsilon < 1$ , 取  $\delta > \frac{1}{2\beta}$  和  $0 < \alpha < 1$  使得  $2\beta\delta(1 - 3\alpha - \epsilon) \geq (1 - \alpha)^2$ , 其中  $0 < \beta \leq \min\{\frac{1}{2d^*}, \frac{\eta}{\theta^2}\}$ . 则由算法1生成的序列  $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\lambda}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  收敛到均衡点  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ , 其中  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$ ,  $x^*$  是博弈(3.2)的  $\nu$ -GNE.

证明. 此证明分为三部分,

I. 第一部分将得出  $\|\omega_{k+1} - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 \leq \alpha(\|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \|\omega_{k-1} - \omega^*\|_{\Phi}^2) + (\alpha + \alpha^2)\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_{\Phi}^2$ .

任意给定点  $\omega^* \in \text{zer}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ ,

$$\begin{aligned}
 & \|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_{\Phi}^2 \\
 &= 2\langle \omega_k - \omega_{k+1}, \omega_k - \omega^* \rangle_{\Phi} - \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_{\Phi}^2 \\
 &= 2\langle \omega_k - \omega_{k+1}, \omega_k - \omega_{k+1} + \omega_{k+1} - \omega^* \rangle_{\Phi} - \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_{\Phi}^2 \\
 &= \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_{\Phi}^2 + 2\langle \omega_k - \omega_{k+1}, \omega_{k+1} - \omega^* \rangle_{\Phi} \\
 &= \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_{\Phi}^2 + 2\langle \tilde{\omega}_k - \omega_{k+1}, \omega_{k+1} - \omega^* \rangle_{\Phi} - 2\alpha\langle \omega_k - \omega_{k-1}, \omega_{k+1} - \omega^* \rangle_{\Phi} \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

其中第一个等号成立根据等式  $\|r - t\|_Q^2 - \|s - t\|_Q^2 = 2\langle r - s, r - t \rangle_Q - \|r - s\|_Q^2$ , 最后一个等号成立根据(3.14).

为处理(3.16)右边的第二项, 继续分析如下. 由(3.14)可得  $\tilde{\omega}_k - \Phi^{-1}\mathfrak{B}(\tilde{\omega}_k) \in \omega_{k+1} + \Phi^{-1}\mathfrak{A}(\omega_{k+1})$ , 或等价地,

$$\Phi(\tilde{\omega}_k - \omega_{k+1}) - \mathfrak{B}(\tilde{\omega}_k) \in \mathfrak{A}(\omega_{k+1}). \quad (3.17)$$

由于  $\omega^* \in \text{zer}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ , 有

$$-\mathfrak{B}(\omega^*) \in \mathfrak{A}(\omega^*). \quad (3.18)$$

利用  $\mathfrak{A}$  的极大单调性, 有

$$\langle \Phi(\omega^* - \omega_{k+1}) - \mathfrak{B}(\tilde{\omega}_k) + \mathfrak{B}(\omega^*), \omega_{k+1} - \omega^* \rangle \geq 0 \quad (3.19)$$

或等价地,

$$\langle \tilde{\omega}_k - \omega_{k+1}, \omega_{k+1} - \omega^* \rangle_{\Phi} \geq \langle \mathfrak{B}(\tilde{\omega}_k) - \mathfrak{B}(\omega^*), \omega_{k+1} - \omega^* \rangle. \quad (3.20)$$

将(3.20)代入(3.16)中得出

$$\begin{aligned}
 & \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_\Phi^2 \\
 & \geq \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 + 2\langle \mathfrak{B}(\tilde{\omega}_k) - \mathfrak{B}(\omega^*), \omega_{k+1} - \omega^* \rangle \\
 & \quad - 2\alpha\langle \omega_k - \omega_{k-1}, \omega_{k+1} - \omega^* \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

注意到  $\mathfrak{B}$  是  $\beta$ -协强制的, 可得

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathfrak{B}(\tilde{\omega}_k) - \mathfrak{B}(\omega^*), \omega_{k+1} - \omega^* \rangle \\
 & = \langle \mathfrak{B}(\tilde{\omega}_k) - \mathfrak{B}(\omega^*), \omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k + \tilde{\omega}_k - \omega^* \rangle \\
 & \geq \beta\|\mathfrak{B}(\tilde{\omega}_k) - \mathfrak{B}(\omega^*)\|_2^2 \\
 & \quad + 2\langle \sqrt{\beta}(\mathfrak{B}(\tilde{\omega}_k) - \mathfrak{B}(\omega^*)), \frac{1}{2\sqrt{\beta}}(\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k) \rangle \\
 & \geq \beta\|\mathfrak{B}(\tilde{\omega}_k) - \mathfrak{B}(\omega^*)\|_2^2 \\
 & \quad - \beta\|\mathfrak{B}(\tilde{\omega}_k) - \mathfrak{B}(\omega^*)\|_2^2 - \frac{1}{4\beta}\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_2^2 \\
 & = -\frac{1}{4\beta}\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_2^2
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

其中第一个不等式成立由于协强制性质, 第二个不等式成立利用  $2\langle s, t \rangle \geq -\|s\|_2^2 - \|t\|_2^2$ .

结合(3.21)和(3.22)可得

$$\|\omega_{k+1} - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 \leq -\|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 + \frac{1}{2\beta}\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_2^2 + 2\alpha\langle \omega_k - \omega_{k-1}, \omega_{k+1} - \omega^* \rangle_\Phi \tag{3.23}$$

注意到事实  $\alpha(\|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_{k-1} - \omega^*\|_\Phi^2) = \alpha(2\langle \omega_k - \omega_{k-1}, \omega_k - \omega^* \rangle_\Phi - \|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Phi^2)$ .

则进一步有

$$\begin{aligned}
 & \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \alpha(\|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_{k-1} - \omega^*\|_\Phi^2) \\
 & \leq -\|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 + \frac{1}{2\beta}\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_2^2 \\
 & \quad + 2\alpha\langle \omega_k - \omega_{k-1}, \omega_{k+1} - \omega^* \rangle_\Phi \\
 & \quad - \alpha(2\langle \omega_k - \omega_{k-1}, \omega_k - \omega^* \rangle_\Phi - \|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Phi^2) \\
 & \leq -\|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 + \frac{1}{2\beta}\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_2^2 \\
 & \quad + 2\alpha\langle \omega_k - \omega_{k-1}, \omega_{k+1} - \omega_k \rangle_\Phi + \alpha\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Phi^2.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

(3.24)最后一个不等式中的第一项和第三项可改写为

$$\begin{aligned}
 & 2\alpha\langle\omega_k - \omega_{k-1}, \omega_{k+1} - \omega_k\rangle_\Phi - \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 \\
 &= 2\alpha\langle\frac{1}{\alpha}(\tilde{\omega}_k - \omega_k), \omega_{k+1} - \omega_k\rangle_\Phi - \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 \\
 &= 2\langle\tilde{\omega}_k - \omega_k, \omega_{k+1} - \omega_k\rangle_\Phi - \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 \\
 &= \|\omega_k - \tilde{\omega}_k\|_\Phi^2 - \|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_\Phi^2 \\
 &= \alpha^2\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Phi^2 - \|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_\Phi^2,
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

且  $\frac{1}{2\beta}\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_2^2 \leq \frac{1}{2\beta\delta}\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_\Phi^2$  由于  $\Phi \succ \delta I_{n+2mN}$ . 基于此, (3.24)可改写为

$$\begin{aligned}
 & \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \alpha(\|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_{k-1} - \omega^*\|_\Phi^2) \\
 & \leq -\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_\Phi^2 + \frac{1}{2\beta}\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_2^2 + (\alpha + \alpha^2)\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Phi^2 \\
 & \leq -(1 - \frac{1}{2\delta\beta})\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_\Phi^2 + (\alpha + \alpha^2)\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Phi^2.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

由于  $\delta > \frac{1}{2\beta}$ ,

$$\begin{aligned}
 & \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 \\
 & \leq \alpha(\|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_{k-1} - \omega^*\|_\Phi^2) + (\alpha + \alpha^2)\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Phi^2.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

(3.27)即本证明第一部分结论.

II. 第二步证明  $\sum_k \|\omega_{k+1} - \omega_k\|_\Phi^2 < \infty$  和  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{k+1} - \omega_k = 0$ .

令  $S := \Phi - \frac{1}{2\beta}I_{n+2mN}$ , 则(3.26)可改写为:

$$\begin{aligned}
 & \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \alpha(\|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_{k-1} - \omega^*\|_\Phi^2) \\
 & \leq -\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_S^2 + (\alpha + \alpha^2)\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Phi^2.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

考虑  $-\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_S^2$ ,

$$\begin{aligned}
 & -\|\omega_{k+1} - \tilde{\omega}_k\|_S^2 \\
 &= 2\langle\omega_k - \omega_{k+1}, \omega_k - \tilde{\omega}_k\rangle_S - \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_S^2 - \|\omega_k - \tilde{\omega}_k\|_S^2 \\
 &= -2\langle\omega_k - \omega_{k+1}, \alpha(\omega_k - \omega_{k-1})\rangle_S - \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_S^2 - \alpha^2\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_S^2 \\
 &\leq \alpha\|\omega_k - \omega_{k+1}\|_S^2 + \alpha\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_S^2 - \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_S^2 - \alpha^2\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_S^2 \\
 &= (\alpha - 1)\|\omega_k - \omega_{k+1}\|_S^2 + (\alpha - \alpha^2)\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_S^2
 \end{aligned}$$

令  $\Psi := 2\Phi - \frac{1-\alpha}{2\beta} I_{m+2mN}$ , 则(3.28)可写为

$$\begin{aligned} & \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \alpha(\|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_{k-1} - \omega^*\|_\Phi^2) \\ & \leq (\alpha - 1)\|\omega_k - \omega_{k+1}\|_S^2 + (\alpha - \alpha^2)\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_S^2 + (\alpha + \alpha^2)\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Phi^2 \\ & = (\alpha - 1)\|\omega_k - \omega_{k+1}\|_S^2 + \alpha\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Psi^2. \end{aligned}$$

令  $\nu_k := \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \alpha\|\omega_{k-1} - \omega^*\|_\Phi^2 + \alpha\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Psi^2$ , 则

$$\begin{aligned} \nu_{k+1} - \nu_k &= \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_\Phi^2 - \alpha\|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 \\ & \quad + \alpha\|\omega_{k+1} - \omega_k\|_\Psi^2 - \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 \\ & \quad + \alpha\|\omega_{k-1} - \omega^*\|_\Phi^2 - \alpha\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Psi^2 \\ &= \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 \\ & \quad - \alpha(\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Phi^2 - \|\omega_{k-1} - \omega^*\|_\Phi^2) \\ & \quad + \alpha\|\omega_{k+1} - \omega_k\|_\Psi^2 - \alpha\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Psi^2 \\ & \leq (\alpha - 1)\|\omega_k - \omega_{k+1}\|_S^2 + \alpha\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Psi^2 \\ & \quad + \alpha\|\omega_{k+1} - \omega_k\|_S^2 - \alpha\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Psi^2 \\ & = (\alpha - 1)\|\omega_k - \omega_{k+1}\|_S^2 + \alpha\|\omega_{k+1} - \omega_k\|_\Psi^2. \end{aligned} \tag{3.29}$$

设  $0 < \epsilon < 1$  充分小, 选取  $\alpha$  和  $\delta$  使得  $2\beta\delta(1 - 3\alpha - \epsilon) \geq (1 - \alpha)^2$ , 则

$$\begin{aligned} & -(\alpha - 1)(\Phi - \frac{1}{2\beta} I_{n+2mN}) - \alpha(2\Phi - \frac{1-\alpha}{2\beta} I_{n+2mN}) \\ & = (1 - 3\alpha)\Phi - \frac{(1 - \alpha)^2}{2\beta} I_{n+2mN} \geq \epsilon\Phi. \end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned} \nu_{k+1} - \nu_k & \leq \langle [(\alpha - 1)(\Phi - \frac{1}{2\beta} I) + \alpha(2\Phi - \frac{1-\alpha}{2\beta} I)]\omega_{k+1} - \omega_k, \omega_{k+1} - \omega_k \rangle \\ & \leq -\epsilon\|\omega_{k+1} - \omega_k\|_\Phi^2 \leq 0. \end{aligned}$$

这可推出  $\nu_k \leq \nu_1$ , i.e.

$$\|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \alpha\|\omega_{k-1} - \omega^*\|_\Phi^2 + \alpha\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_\Psi^2 \leq \nu_1. \tag{3.30}$$

进一步,

$$\|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 \leq \alpha\|\omega_{k-1} - \omega^*\|_\Phi^2 + \nu_1, \tag{3.31}$$

$$\|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 \leq \alpha^{k-1}(\|\omega_1 - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \frac{\nu_1}{1-\alpha}) + \frac{\nu_1}{1-\alpha}. \quad (3.32)$$

注意到  $\nu_{k+1} - \nu_1 \leq -\epsilon \sum_{i=1}^k \|\omega_{i+1} - \omega_i\|_{\Phi}^2$ , 这意味着

$$\begin{aligned} \epsilon \sum_{i=1}^k \|\omega_{i+1} - \omega_i\|_{\Phi}^2 &\leq \nu_1 - \nu_{k+1} \leq \nu_1 + \alpha \|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 \\ &\leq \nu_1 + \alpha^k (\|\omega_1 - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \frac{\nu_1}{1-\alpha}) + \frac{\nu_1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 有

$$\sum_k \|\omega_{k+1} - \omega_k\|_{\Phi}^2 < \infty, \quad (3.33)$$

因此  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{k+1} - \omega_k = 0$ .

III. 第三步证明任意给定  $\omega^* \in \text{zer}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ ,  $\{\|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2\}$  收敛, 进而证明算法1的收敛性.

定义  $\phi_k := \max\{0, \|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \|\omega_{k-1} - \omega^*\|_{\Phi}^2\}$  和  $\psi_k := (\alpha + \alpha^2)\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_{\Phi}^2$ . 由(3.27)可得  $\phi_{k+1} \leq \alpha\phi_k + \psi_k$ , 递归地,

$$\phi_{k+1} \leq \alpha^k \phi_1 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \psi_{k-i} \quad (3.34)$$

对(3.34)两边从  $k = 1$  到  $k = K$  求和可得

$$\sum_{k=1}^K \phi_{k+1} \leq \phi_1 \frac{1 - \alpha^K}{1 - \alpha} + \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i \psi_{k-i}. \quad (3.35)$$

令  $K \rightarrow \infty$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k &\leq \frac{\phi_1}{1-\alpha} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \sum_{t=1}^{\infty} \psi_t \\ &\leq \frac{\phi_1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{t=1}^{\infty} \psi_t \end{aligned} \quad (3.36)$$

由于  $0 < \alpha < 1$ . 注意到  $\sum_{t=1}^{\infty} \psi_t = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + \alpha^2)\|\omega_k - \omega_{k-1}\|_{\Phi}^2 < \infty$  由(3.33), 这可推出

$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k < \infty$ . 序列  $\{\sum_{i=1}^k \phi_i\}$  单调不减且非负, 因此收敛.



进一步考虑另一序列  $\{\|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \sum_{i=1}^k \phi_i\}$ , 可得

$$\begin{aligned}
 & \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \sum_{i=1}^{k+1} \phi_i \\
 &= \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \phi_{k+1} - \sum_{i=1}^k \phi_i \\
 &\leq \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_{\Phi}^2 + \|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \sum_{i=1}^k \phi_i \\
 &= \|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \sum_{i=1}^k \phi_i
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

其中第二个不等式成立根据  $\phi_k$  的定义.  $\{\|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \sum_{i=1}^k \phi_i\}$  单调有界, 因此收敛. 序列

$\{\|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2\}$  是两收敛序列  $\{\|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \sum_{i=1}^k \phi_i\}$  和  $\{\sum_{i=1}^k \phi_i\}$  的和, 因此也收敛.

由于序列  $\{\omega_k\}$  有界, 故存在子序列  $\{\omega_{n_k}\}$  收敛到  $\tilde{\omega}^*$ . 由 (II) 及  $T_2T_1$  的连续性, 有  $\tilde{\omega}^* = T_2T_1\tilde{\omega}^*$ , 所以  $\tilde{\omega}^* \in \text{zer}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ . 由 (III),  $\|\omega_k - \tilde{\omega}^*\|$  收敛. 由于  $\{\|\omega_{n_k} - \tilde{\omega}^*\|\}$  收敛到 0, 故  $\|\omega_k - \tilde{\omega}^*\| \rightarrow 0$ , 即  $\omega_k \rightarrow \tilde{\omega}^* \in \text{zer}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ .

□

### 3.4 弱假设下的收敛性分析

本节在更弱的假设条件下重新分析算法1的收敛性. 具体来说, 本节考虑将关于扩展伪梯度映射的假设3.4减弱为

**假设 3.5.** 扩展伪梯度映射  $\mathbf{F}$ (3.10)是  $\theta$ -Lipschitz 连续的, 即存在  $\theta > 0$  使得对任意  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{x}'$ , 有  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}')\| \leq \theta\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ .

**注 3.2.** 实际上, 与通常的分布式优化问题不同, 由于全局共享耦合约束的存在, 在博弈中  $\mathbf{F}$  的单调性并非自然满足. 接下来本节将说明, 在一般的耦合博弈中, 由假设3.5可推出  $\mathbf{F}$  的一种限制单调性.

**引理 3.6.** [30, Lem.3] 设假设3.1-3.3和3.5成立, 令

$$\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{N} & -\frac{\theta+\theta_0}{2\sqrt{N}} \\ -\frac{\theta+\theta_0}{2\sqrt{N}} & cs_2(L) - \theta \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

则对任意  $c > c_{\min}$ , 其中  $c_{\min}s_2(L) = \frac{(\theta+\theta_0)^2}{4\mu} + \theta$ ,  $\Psi \succ 0$ , 且  $\forall \mathbf{x}$  和  $\mathbf{x}' \in \mathbf{E}_x$ ,

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T (\mathcal{R}^T(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}')) + c\mathbf{L}_x(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \geq \bar{\mu}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2, \tag{3.39}$$

其中  $\bar{\mu} := s_{\min}(\Psi) > 0$ ,  $\mathbf{E}_x = \text{Null}(\mathbf{L}_x)$  是  $n$ -维一致子空间.

**注 3.3.** 注意到(3.39)中的限制单调性（与下文中所有的限制性质），仅将第二个变量  $\mathbf{x}'$  限制在一致子空间内，第一个变量  $\mathbf{x}$  无限制. 这是一种更弱的单调性，利用这一性质的关键是将增广空间  $\mathbf{R}^{Nn} = \mathbf{E}_x \oplus \mathbf{E}_x^\perp$  分成一致子空间  $\mathbf{E}_x = \text{Null}(\mathbf{L}_x)$  和它的正交补  $\mathbf{E}_x^\perp = \text{Null}(\mathbf{L}_x)^\perp$ .

基于引理3.6，如下引理说明了算子  $\mathfrak{B}$  的限制协强制性.

**引理 3.7.** 设假设3.1-3.3和3.5成立，选取  $c$  使得引理3.6中的  $c > c_{\min}$  成立，则  $\mathfrak{A}$  是极大单调的， $\mathfrak{B}$  是  $\beta$ -限制协强制的，即对任意  $\omega$  和  $\omega' \in \Omega_E$  有，

$$\langle \omega - \omega', \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{B}\omega' \rangle \geq \beta \|\mathfrak{B}\omega - \mathfrak{B}\omega'\|^2, \quad (3.40)$$

其中  $\Omega_E = \mathbf{E}_x \times \mathbf{R}^{Nm} \times \mathbf{R}_+^{Nm}$ ,  $\beta \in (0, \min\{\frac{\bar{\mu}}{\theta^2}, \frac{1}{2d^*}\}]$ ,  $\bar{\theta} = \theta + 2cd^*$ ,  $\bar{\mu} = s_{\min}(\Psi)$ ,  $\Psi$  如(3.38)所示， $d^*$  是  $\mathcal{G}$  的最大度.

**定理 3.2.** 设假设3.1-3.3及3.5成立. 取  $c$  使得引理3.6中的  $c > c_{\min}$  成立. 选取算法1中步长  $\gamma_i, \xi_i, \kappa_i$  使得引理3.5满足. 给定充分小的  $0 < \epsilon < 1$ , 取  $\delta > \frac{1}{2\beta}$  和  $0 < \alpha < 1$  使得  $2\beta\delta(1 - 3\alpha - \epsilon) \geq (1 - \alpha)^2$ , 其中  $0 < \beta \leq \min\{\frac{\bar{\mu}}{\theta^2}, \frac{1}{2d^*}\}$ . 则由算法1生成的序列  $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\lambda}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  收敛到均衡点  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ , 其中  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$ ,  $x^*$  是博弈(3.2)的  $v$ -GNE.

证明. 证明过程同定理3.1. 此处省略. □

### 3.5 数值仿真

这一节本文考虑一类经典的纳什-古诺博弈<sup>[30]</sup>，有  $N$  个公司且每一公司  $i \in \{1, \dots, N\}$  生产商品加入  $m$  个市场的竞争（见图3.1）. 每一市场（表示为  $M_1, \dots, M_m$ ）有容量限制. 此处考虑部分决策信息设定，每一公司通过图3.2所示的通信网络仅能访问其邻居公司的信息.

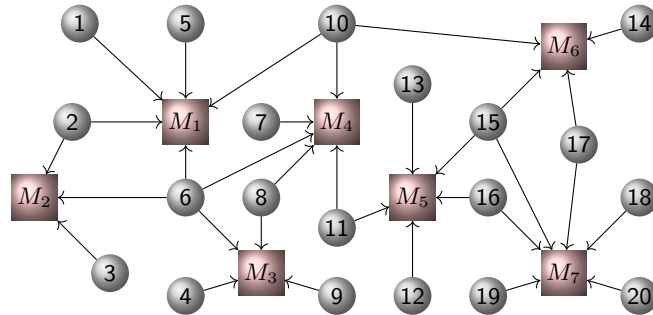
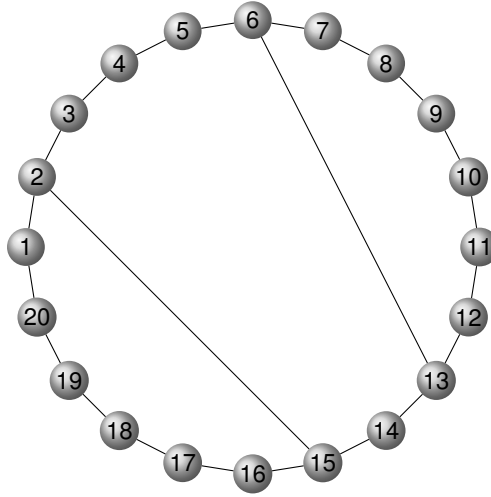
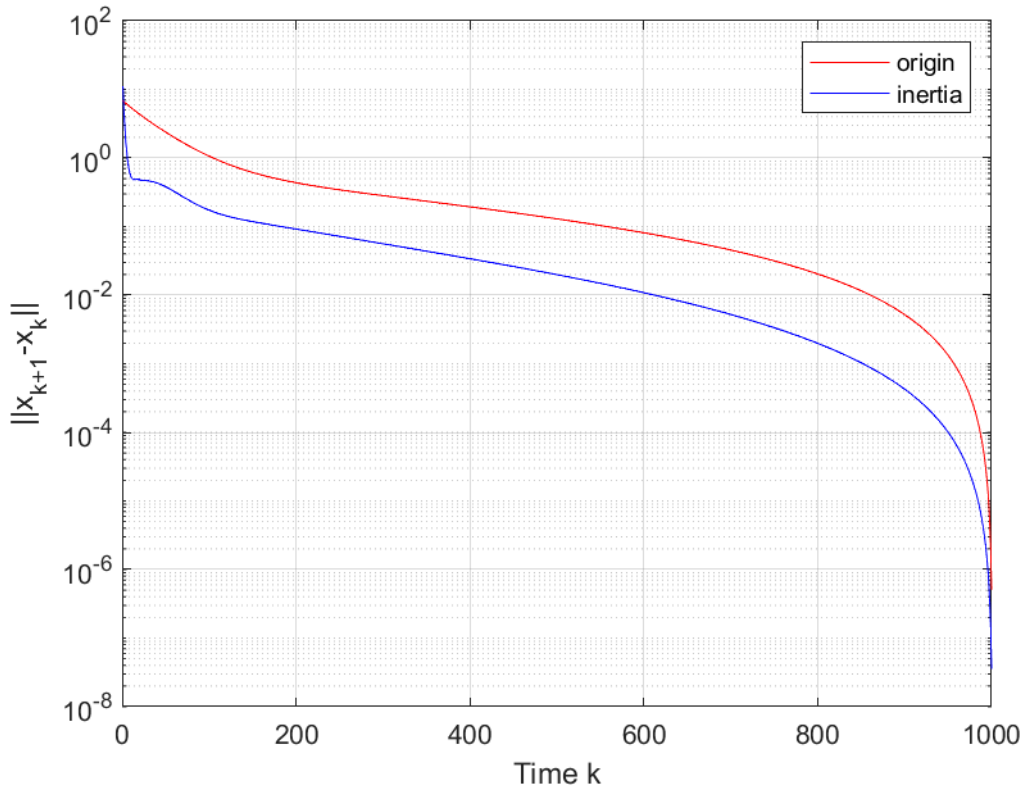


图 3.1 纳什-古诺博弈的网络图，其中从  $i$  指向  $M_k$  的箭头表示公司  $i$  参加市场  $M_k$  的竞争.

假设公司  $i$  通过生产  $x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$  数量的商品来参加  $n_i$  个市场的竞争，其产量被集合  $\Omega_i \in \mathbf{R}^{n_i}$  所限制. 公司  $i$  的局部信息矩阵  $A_i \in \mathbf{R}^{m \times n_i}$  表示其参加哪几个市场的竞争. 具体地， $A_i$  的第


 图 3.2 所有公司间的通信图，其中  $i$  和  $j$  间有边相连意味着公司  $i$  和  $j$  可以交换信息。

 图 3.3 由 [30, Alg.1] 和算法1生成的序列的相对误差  $\|x_k - x^*\|^2 / \|x^*\|^2$ 。

$j$  列的第  $k$  个元素为 1 当且仅当  $[x_i]_j$  数量的商品被公司  $i$  运送至市场  $M_k$  中，其余所有元素为 0。每一市场  $M_k$  有最大容量  $r_k$ ，即  $Ax \leq r$ ，其中  $A = [A_1, \dots, A_N]$ ,  $x = \text{col}(x_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \mathbf{R}^n$ ,  $n = \sum_{i=1}^N n_i$ ,  $r = \text{col}(r_k)_{k=1, \dots, m} \in \mathbf{R}^m$ 。假设每一公司  $i$  有生产成本  $\mathcal{C}_i(x_i) : \Omega_i \rightarrow \mathbf{R}$ ，和价格函数  $P : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  将所有公司的总供给映射到市场价格向量。公司  $i$  的目标函数是  $J_i(x_i, x_{-i}) = \mathcal{C}_i(x_i) - (P(Ax))^T A_i x_i$ 。

假设  $N = 20, m = 7$ 。令  $\Omega_i = \{x_i \in \mathbf{R}^{n_i} | 0 \leq x_i \leq X_i\}$ ，其中  $X_i$  的每一分量随机取自  $(5, 10)$ 。  $r_k$  随机取自  $(1, 2)$ 。成本函数为  $\mathcal{C}_i(x_i) = x_i^T Q_i x_i + q_i^T x_i$ ，其中  $Q_i$  是一元素随机取自  $(1, 8)$  的对角矩阵， $q_i$  随机取自  $(1, 2)$ 。价格函数  $P = \bar{P} - \Pi A x$ ，其中  $\bar{P} = \text{col}(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_m) \in \mathbf{R}^m$ ，

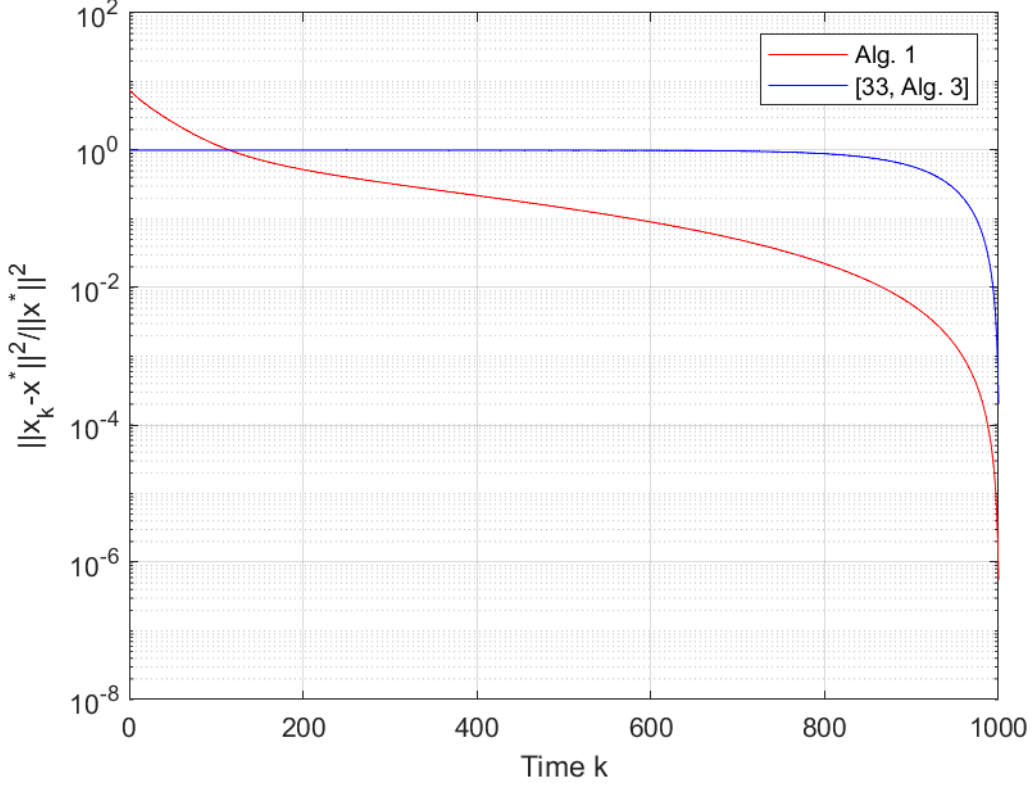


图 3.4 由算法1和 [33, Alg.3] 生成的序列的相对误差  $\|x_k - x^*\|^2 / \|x^*\|^2$ .

$\Pi = \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_m) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ , 其中  $\pi_k$  和  $\bar{P}_k$  分别随机取自  $(1, 3)$  和  $(10, 20)$ . 接下来, 选取  $c = 100$ ,  $\gamma_i = 0.003$ ,  $\xi_i = 0.02$ ,  $\kappa_i = 0.003$ . 则从图3.3和3.4中可以看出, 本文提出的算法1以比 [30, Alg.1] 和 [33, Alg.3] 更快的速度收敛到 GNE  $x^*$ . 除此之外, 算法1有更快的收敛速度, 但其每一步迭代有更大的计算量, 这提供了本文接下来的思路, 即设计同时考虑快的收敛速度和小的计算量的完全分布式算法.

### 3.6 小结

本章3.1节建立了本文所研究的博弈问题的数学模型, 给出了 v-GNE 的定义和等价条件, 为算法设计做铺垫; 3.2节提出了具有惯性的完全分布式 v-GNE 搜索算法, 并利用算子简化了算法形式; 3.3节提出了一些必要的假设, 并通过算子分裂法证明了上节所提出的算法的收敛性; 3.4节减弱了对于扩展伪梯度映射单调性的假设, 仅在其 Lipschitz 连续性的假设条件下重新证明了所提出算法的收敛性; 最后在3.5节中利用 MATLAB 对经典博弈实例进行仿真, 与已有算法对比, 说明了本文所提出算法的收敛及加速效果. 本章主要结论已被 11th International Conference of Information Science and Technology 收录<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Zhangcheng Feng, Wenying Xu, Jinde Cao, Shaofu Yang. Distributed alternated-inertia generalize Nash equilibrium seeking algorithm: The partial-decision-information case[C]. 11th International Conference of Information Science and Technology, 2021:106–112.

## 第四章 具有切换惯性的完全分布式广义纳什均衡搜索算法

上一章虽然提出了具有惯性的 v-GNE 搜索算法，并验证了其具有加速效果，但无法避免算法每一次迭代需要更大的计算资源. 实际上，在很多情况下计算资源是有限且成本高昂的. 鉴于上述讨论，本章主要设计了同时考虑快速收敛及低计算消耗的完全分布式 v-GNE 搜索算法，同样考虑共享耦合约束及部分决策信息设定，提出了具有切换惯性的算法. 本章仅证明弱假设条件下算法的收敛性.

### 4.1 问题描述和算法设计

本节提出了一种针对博弈(3.2)具有切换惯性的完全分布式 v-GNE 搜索算法，其中惯性项被间歇地采用（见算法2）. 在部分决策信息设定下，每名玩家控制其私人变量并通过通信网络与其邻居进行交换. 具体变量说明见3.2节.

---

#### 算法 2 具有切换惯性的分布式 v-GNE 搜索算法

---

初始化:  $x_{i,0} \in \Omega_i, \mathbf{x}_{i,0}^{-i} \in \mathbf{R}^{n-n_i}, \lambda_{i,0} \in \mathbf{R}_+^m, z_{i,0} \in \mathbf{R}^m$

加速: 当  $k$  是偶数时令  $\alpha_k = 0$ ,  $k$  是奇数时  $\alpha_k = \alpha$ .

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{i,k} &= x_{i,k} + \alpha_k(x_{i,k} - x_{i,k-1}) \\ \tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i} &= \mathbf{x}_{i,k}^{-i} + \alpha_k(\mathbf{x}_{i,k}^{-i} - \mathbf{x}_{i,k-1}^{-i}) \\ \tilde{z}_{i,k} &= z_{i,k} + \alpha_k(z_{i,k} - z_{i,k-1}) \\ \tilde{\lambda}_{i,k} &= \lambda_{i,k} + \alpha_k(\lambda_{i,k} - \lambda_{i,k-1})\end{aligned}$$

更新:

$$\begin{aligned}x_{i,k+1} &= P_{\Omega_i}(\tilde{x}_{i,k} - \gamma_i(\nabla_{x_i} J_i(\tilde{x}_{i,k}, \tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i}) + A_i^T \tilde{\lambda}_{i,k} + c \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\tilde{x}_{i,k} - \tilde{\mathbf{x}}_{j,k}^i))) \\ \mathbf{x}_{i,k+1}^{-i} &= \tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i} - \gamma_i c \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i} - \tilde{\mathbf{x}}_{j,k}^{-i}) \\ z_{i,k+1} &= \tilde{z}_{i,k} + \xi_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\tilde{\lambda}_{i,k} - \tilde{\lambda}_{j,k}) \\ \lambda_{i,k+1} &= P_{\mathbf{R}_+^m}(\tilde{\lambda}_{i,k} + \kappa_i(A_i(2x_{i,k+1} - \tilde{x}_{i,k}) - b_i \\ &\quad - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(2(z_{i,k+1} - z_{j,k+1}) - (\tilde{z}_{i,k} - \tilde{z}_{j,k})) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\tilde{\lambda}_{i,k} - \tilde{\lambda}_{j,k})))\end{aligned}$$


---

由引理3.1可知，算法2可写为

$$\begin{cases} \omega_{k+1} = T(\omega_k), & k \text{ 是偶数} \\ \omega_{k+1} = T(\omega_k + \alpha(\omega_k - \omega_{k-1})), & k \text{ 是奇数} \end{cases} \quad (4.1)$$

其中  $\alpha \in [0, 1)$  是惯性参数.

## 4.2 弱假设下的收敛性分析

这一节给出弱假设条件下算法2的收敛性证明. 强假设条件下的证明类似.

**定理 4.1.** 设假设3.1-3.3及3.5成立. 取  $c$  使得引理3.6中的  $c > c_{\min}$  成立. 选取算法2中步长  $\gamma_i, \xi_i, \kappa_i$  使得引理3.5满足. 取  $\alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\delta > \frac{1}{2\beta}$ , 其中  $0 < \beta \leq \min\{\frac{\bar{\mu}}{\theta^2}, \frac{1}{2d^*}\}$ . 则对任意  $\rho \in [0, \frac{1}{2})$ , 由算法2生成的序列  $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\lambda}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  收敛到均衡点  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ , 其中  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$ ,  $x^*$  是博弈(3.2)的  $\nu$ -GNE.

证明. 先 I. 证明  $\{\omega_{2k}\}$  收敛, 再 II. 说明  $\{\omega_k\}$  的收敛性.

由 [30, Lem.6] 知,  $T_2 \in \mathcal{A}(\frac{1}{2})$ ,  $T_1$  是  $\frac{1}{2\beta\delta}$ -限制平均的, 即对任意  $\omega$  和任意  $\omega' \in \Omega_E$ ,

$$\|T_1\omega - T_1\omega'\|_{\Phi}^2 \leq \|\omega - \omega'\|_{\Phi}^2 - (2\beta\delta - 1)\|\omega - \omega' - (T_1\omega - T_1\omega')\|_{\Phi}^2. \quad (4.2)$$

由引理2.2得, 当  $\delta > \frac{1}{\beta}$  时,  $T = T_2 \circ T_1$  是  $\alpha$ -限制平均的, 其中  $\alpha = \frac{2}{3}$ . 令  $\omega^*$  是  $T$  的一个固定点, 则由引理3.3知  $\omega^* \in \Omega_E$ .

I. 对于子序列  $\{\omega_{2k}\}$ , 由(4.1)可得  $\omega_{2(k+1)} = T(T(\omega_{2k}) + \rho(T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}))$ . 然后, 利用(4.2)有,

$$\begin{aligned} & \|\omega_{2k+2} - \omega^*\|_{\Phi}^2 \\ &= \|T(T(\omega_{2k}) + \rho(T(\omega_{2k}) - \omega_{2k})) - \omega^*\|_{\Phi}^2 \\ &\leq \|T(\omega_{2k}) + \rho(T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}) - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \|T(\omega_{2k}) + \rho(T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}) - \omega_{2k+2}\|_{\Phi}^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

利用等式关系  $\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2$ , 有

$$\begin{aligned} & \|T(\omega_{2k}) + \rho(T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}) - \omega^*\|_{\Phi}^2 \\ &= (1+\rho)\|T(\omega_{2k}) - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \rho\|\omega_{2k} - \omega^*\|_{\Phi}^2 + (1+\rho)\rho\|T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}\|_{\Phi}^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

再次利用(4.2), (4.3)可写为

$$\begin{aligned}
 & \|\omega_{2k+2} - \omega^*\|_{\Phi}^2 \\
 & \leq (1 + \rho) \|\omega_{2k} - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \rho \|\omega_{2k} - \omega^*\|_{\Phi}^2 \\
 & \quad - (1 + \rho) \frac{1 - \alpha}{\alpha} \|T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}\|_{\Phi}^2 \\
 & \quad + (1 + \rho) \rho \|T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}\|_{\Phi}^2 \\
 & \quad - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \|T(\omega_{2k}) + \rho(T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}) - \omega_{2k+2}\|_{\Phi}^2 \\
 & = \|\omega_{2k} - \omega^*\|_{\Phi}^2 - (1 + \rho) \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} - \rho \right) \|T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}\|_{\Phi}^2 \\
 & \quad - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \|T(\omega_{2k}) + \rho(T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}) - \omega_{2k+2}\|_{\Phi}^2.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

选取  $\rho \leq \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2}$ , 则

$$\|\omega_{2k+2} - \omega^*\|_{\Phi}^2 \leq \|\omega_{2k} - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \|T(\omega_{2k}) + \rho(T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}) - \omega_{2k+2}\|_{\Phi}^2. \tag{4.6}$$

这可推出序列  $\{\|\omega_{2k} - \omega^*\|_{\Phi}^2\}$  单调递减且非负, 因此收敛. 进一步有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T(\omega_{2k}) + \rho(T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}) - \omega_{2(k+1)}\|_{\Phi}^2 < \infty$$

故  $T(\omega_{2k}) + \rho(T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}) - \omega_{2(k+1)} \rightarrow 0$ . 注意到  $\{\omega_{2k}\}$  有界, 则存在一收敛子列  $\{\omega_{2n_k}\}$  收敛到  $\tilde{\omega}$ . 显然,

$$\omega_{2(n_k+1)} = T(T(\omega_{2n_k}) + \rho(T(\omega_{2n_k}) - \omega_{2n_k})).$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 有  $\tilde{\omega} = T\tilde{\omega}$ , 这推出  $\tilde{\omega}$  是  $T$  的一个不动点, 且因此  $\{\|\omega_{2k} - \tilde{\omega}\|_{\Phi}^2\}$  收敛. 由于  $\{\|\omega_{2n_k} - \tilde{\omega}\|_{\Phi}^2\}$  收敛到 0,  $\{\omega_{2k}\}$  收敛到  $\tilde{\omega}$ .

II. 由于  $T$  是  $\frac{2}{3}$ -限制平均的, 故其是限制非扩张的, 可得

$$\|\omega_{2k+1} - \tilde{\omega}\| = \|T\omega_{2k} - T\tilde{\omega}\| \leq \|\omega_{2k} - \tilde{\omega}\|, \tag{4.7}$$

这推出奇子列  $\{\omega_{2k+1}\}$  也收敛到  $\tilde{\omega}$ , 故  $\{\omega_k\}$  收敛到  $\tilde{\omega}$ . 注意到  $\Phi \succ 0$  且  $\Phi^{-1}\mathfrak{A}$  是极大单调的.  $\tilde{\omega}$  是  $T$  的一个不动点, 所以由引理3.2可知它是  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  的一个零点. 由引理3.3可知, 任意给定  $\tilde{\omega} := \text{col}(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in \text{zer}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ , 则  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$ , 且  $x^*$  是  $VI(F, \mathcal{K})(3.7)$  的解, 即  $x^*$  是博弈(3.2)的 v-GNE.

□

### 4.3 数值仿真

本节考虑如3.5节的纳什-古诺博弈实例，网络示意图如图3.1，通信网络如图3.2. 从图4.1中可看出，本文提出的算法1-2以比 [30, Alg.1] 更快的收敛速度收敛到 v-GNE  $x^*$ . 除此之外，虽然算法1有最快的收敛速度，其每次迭代比 [30, Alg.1] 和算法2需要更多的计算量. 因此，算法2是同时考虑快收敛速度和低计算成本下的最佳选择.

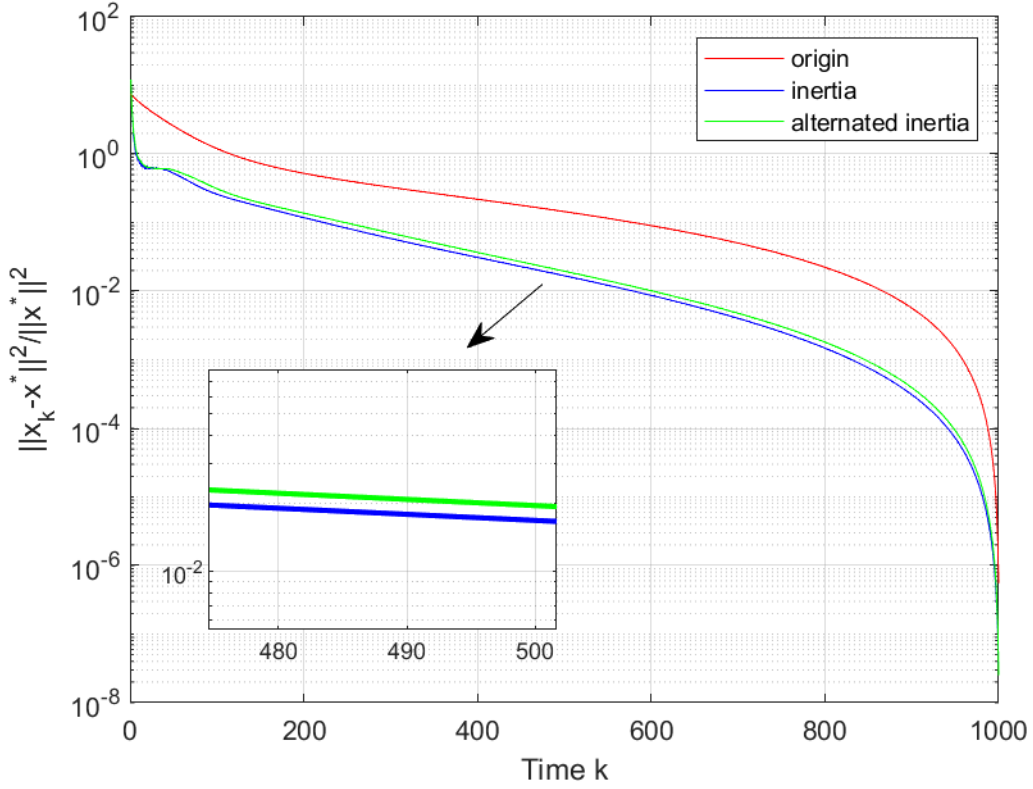


图 4.1 由 [30, Alg.1], 算法1和算法2生成的序列的相对误差  $\|x_k - x^*\|^2 / \|x^*\|^2$ .

### 4.4 小结

在第三章的基础上，本章进一步考虑了收敛速度和计算成本的平衡，提出了具有切换惯性的完全分布式 v-GNE 搜索算法，并在弱假设条件下证明了其收敛性，仿真验证了其收敛及加速效果. 本章主要内容已投稿至期刊 *Fractal and Fractional*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Zhangcheng Feng, Wenying Xu, Jinde Cao. Alternating inertial and overrelaxed algorithms for distributed generalized Nash equilibrium seeking in multi-player games. *Fractal and Fractional*, under 2nd-round review.



## 第五章 两种具有超松弛的完全分布式算法

继前两章提出了具有惯性的算法，仿照其加速思路，本章提出了两种分别具有超松弛和切换超松弛的完全分布式 v-GNE 搜索算法，证明了其收敛性，并数值仿真验证其收敛效果。

本章将进一步讨论博弈问题(3.2)，并提出新的分布式 v-GNE 搜索算法。

### 5.1 具有超松弛的完全分布式算法

本节提出了一种具有超松弛（overrelaxation）的完全分布式 v-GNE 搜索算法。见算法3。其中  $\tau \in [1, 2)$  是超松弛参数，其余变量说明见3.2节。

---

#### 算法3 带有超松弛的分布式 v-GNE 搜索算法

---

初始化:  $x_{i,0} \in \Omega_i, \mathbf{x}_{i,0}^- \in \mathbf{R}^{n-n_i}, \lambda_{i,0} \in \mathbf{R}_+^m, z_{i,0} \in \mathbf{R}^m$   
更新:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{i,k} &= P_{\Omega_i}(x_{i,k} - \gamma_i(\nabla_{x_i} J_i(x_{i,k}, \mathbf{x}_{i,k}^-) + A_i^T \lambda_{i,k} + c \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(x_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k}^i))) \\ \tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^- &= \mathbf{x}_{i,k}^- - \gamma_i c \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\mathbf{x}_{i,k}^- - \mathbf{x}_{j,k}^-) \\ \tilde{z}_{i,k} &= z_{i,k} + \xi_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\lambda_{i,k} - \lambda_{j,k}) \\ \tilde{\lambda}_{i,k} &= P_{\mathbf{R}_+^m}(\lambda_{i,k} + \kappa_i(A_i(2\tilde{x}_{i,k} - x_{i,k}) - b_i \\ &\quad - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(2(\tilde{z}_{i,k} - \tilde{z}_{j,k}) - (z_{i,k} - z_{j,k})) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\lambda_{i,k} - \lambda_{j,k})))\end{aligned}$$

加速:

$$\begin{aligned}x_{i,k+1} &= \tilde{x}_{i,k} + (\tau - 1)(\tilde{x}_{i,k} - x_{i,k}) \\ \mathbf{x}_{i,k+1}^- &= \tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^- + (\tau - 1)(\tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^- - \mathbf{x}_{i,k}^-) \\ z_{i,k+1} &= \tilde{z}_{i,k} + (\tau - 1)(\tilde{z}_{i,k} - z_{i,k}) \\ \lambda_{i,k+1} &= \tilde{\lambda}_{i,k} + (\tau - 1)(\tilde{\lambda}_{i,k} - \lambda_{i,k})\end{aligned}$$


---

由引理3.1可知，算法3可写为

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_k = T(\omega_k) \\ \omega_{k+1} = \tilde{\omega}_k + (\tau - 1)(\tilde{\omega}_k - \omega_k) \end{cases} \quad (5.1)$$

由3.4节的分析，弱假设条件下算法3的收敛性可类似得到，

**定理 5.1.** 设假设3.1-3.3及3.5成立。选取  $c$  使得引理3.6中的  $c > c_{\min}$  成立。选取算法3中步长  $\gamma_i, \xi_i, \kappa_i$  使得引理3.5满足。给定充分小的  $0 < \epsilon < 1$ ，取  $\delta > \frac{1}{2\tau\beta}$  和  $\tau$  使得  $-\epsilon = \frac{1}{2\tau\beta\delta} - \frac{2}{\tau} + 1 < 0$ ，其中取  $0 < \beta \leq \min\{\frac{\bar{\mu}}{\theta^2}, \frac{1}{2d^*}\}$ 。则由算法3生成的序列  $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\lambda}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  收敛到均衡点  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ ，

其中  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$ ,  $x^*$  是博弈(3.2)的  $v$ -GNE.

证明. I. 给定  $\omega^* \in \text{zer}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ ,

$$\begin{aligned}
 & \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_\Phi^2 \\
 &= \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 + 2\langle \omega_k - \omega_{k+1}, \omega_{k+1} - \omega^* \rangle_\Phi \\
 &= \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 \\
 &+ 2\langle \omega - \tilde{\omega}_{k+1} - (\tau - 1)(\tilde{\omega}_{k+1} - \omega_k), \\
 &\quad \tilde{\omega}_{k+1} - \omega^* + (\tau - 1)(\tilde{\omega}_{k+1} - \omega_k) \rangle_\Phi \\
 &= \|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 \\
 &+ 2\tau\langle \omega_k - \tilde{\omega}_{k+1}, \tilde{\omega}_{k+1} - \omega^* \rangle_\Phi - 2\tau(\tau - 1)\|\omega_k - \tilde{\omega}_{k+1}\|_\Phi^2
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

由(5.1)得  $\Phi(\omega_k - \tilde{\omega}_{k+1}) - \mathfrak{B}(\omega_k) \in \mathfrak{A}(\tilde{\omega}_{k+1})$ , 又  $-\mathfrak{B}(\omega^*) \in \mathfrak{A}(\omega^*)$ , 故由  $\mathfrak{A}$  的极大单调性可得,

$$\langle \omega_k - \tilde{\omega}_{k+1}, \tilde{\omega}_{k+1} - \omega^* \rangle_\Phi - \langle \mathfrak{B}(\omega_k) - \mathfrak{B}(\omega^*), \tilde{\omega}_{k+1} - \omega^* \rangle \geq 0 \tag{5.3}$$

由于  $\mathfrak{B}$  是  $\beta$ -协强制的,

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathfrak{B}(\omega_k) - \mathfrak{B}(\omega^*), \tilde{\omega}_{k+1} - \omega^* \rangle \\
 &= \langle \mathfrak{B}(\omega_k) - \mathfrak{B}(\omega^*), \tilde{\omega}_{k+1} - \omega_k + \omega_k - \omega^* \rangle \\
 &\geq \beta\|\mathfrak{B}(\omega_k) - \mathfrak{B}(\omega^*)\|^2 \\
 &+ 2\langle \sqrt{\beta}(\mathfrak{B}(\omega_k) - \mathfrak{B}(\omega^*)), \frac{1}{2\sqrt{\beta}}(\tilde{\omega}_{k+1} - \omega_k) \rangle \\
 &\geq \beta\|\mathfrak{B}(\omega_k) - \mathfrak{B}(\omega^*)\|^2 \\
 &- \beta\|\mathfrak{B}(\omega_k) - \mathfrak{B}(\omega^*)\|^2 - \frac{1}{4\beta}\|\tilde{\omega}_{k+1} - \omega_k\|^2 \\
 &= -\frac{1}{4\beta}\|\tilde{\omega}_{k+1} - \omega_k\|^2
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

故(5.2)可写为

$$\begin{aligned}
 & \|\omega_{k+1} - \omega^*\|_\Phi^2 - \|\omega_k - \omega^*\|_\Phi^2 \\
 &\leq -\|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 + \frac{\tau}{2\beta}\|\tilde{\omega}_{k+1} - \omega_k\|^2 \\
 &+ 2\tau(\tau - 1)\|\omega_k - \tilde{\omega}_{k+1}\|_\Phi^2 \\
 &\leq -\|\omega_k - \omega_{k+1}\|_\Phi^2 \\
 &+ [\frac{\tau}{2\beta\delta} + 2\tau(\tau - 1)]\frac{1}{\tau^2}\|\omega_{k+1} - \omega_k\|_\Phi^2 \\
 &= (\frac{1}{2\tau\beta\delta} - \frac{2}{\tau} + 1)\|\omega_{k+1} - \omega_k\|_\Phi^2
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

选取  $\tau$  使得  $-\epsilon = \frac{1}{2\tau\beta\delta} - \frac{2}{\tau} + 1 < 0$ , 有

$$\|\omega_{k+1} - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 \leq -\epsilon \|\omega_{k+1} - \omega_k\|_{\Phi}^2 \quad (5.6)$$

II. 累加得

$$\|\omega_{k+1} - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \|\omega_0 - \omega^*\|_{\Phi}^2 \leq -\epsilon \sum_{i=0}^k \|\omega_{i+1} - \omega_i\|_{\Phi}^2 \quad (5.7)$$

令  $k \rightarrow \infty$  有

$$\epsilon \sum_{i=0}^k \|\omega_{i+1} - \omega_i\|_{\Phi}^2 \leq \|\omega_0 - \omega^*\|_{\Phi}^2 \leq \infty \quad (5.8)$$

所以  $\sum_{i=0}^k \|\omega_{i+1} - \omega_i\|_{\Phi}^2$  收敛, 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k - \omega_{k+1} = 0$ .

III. 令  $\phi_k = \max\{0, \|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \|\omega_{k-1} - \omega^*\|_{\Phi}^2\}$ ,  $\psi_k = (\frac{1}{2\tau\beta\delta} - \frac{2}{\tau} + 1) \|\omega_{k+1} - \omega_k\|_{\Phi}^2$ , by  $\phi_k \leq \psi_k$ , 累加得

$$\sum_{i=1}^k \phi_i \leq \sum_{i=1}^k \psi_i \quad (5.9)$$

令  $k \rightarrow \infty$  由 (II) 得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i < \infty \quad (5.10)$$

故  $\{\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\}$  收敛.

考虑序列  $\{\|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\}$ , 易知其单调递减且有界, 故收敛. 所以序列  $\{\|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2\}$  为两收敛序列之和, 也收敛. 则算法的收敛性可由定理3.1的证明类似得到.

□

根据3.3节的分析, 可类似地给出强条件下算法3的收敛定理:

**定理 5.2.** 设假设3.1-3.4成立. 选取算法3中步长  $\gamma_i, \xi_i, \kappa_i$  使得引理3.5满足. 给定充分小的  $0 < \epsilon < 1$ , 取  $\delta > \frac{1}{2\beta}$  和  $\tau$  使得  $-\epsilon = \frac{1}{2\tau\beta\delta} - \frac{2}{\tau} + 1 < 0$ , 其中  $0 < \beta \leq \min\{\frac{1}{2d^*}, \frac{\eta}{\theta^2}\}$ . 则由算法3生成的序列  $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\lambda}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  收敛到均衡点  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ , 其中  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$ ,  $x^*$  是博弈(3.2)的  $v$ -GNE.

证明. 证明过程同定理5.2. 此处省略.

□

## 5.2 具有切换超松弛的完全分布式算法

沿用4.1的切换思想, 本节提出了一种具有切换超松弛的完全分布式  $v$ -GNE 搜索算法, 见算法4. 变量及参数说明同5.1.

**算法 4** 具有切换超松弛的分布式 v-GNE 搜索算法

 初始化:  $x_{i,0} \in \Omega_i, \mathbf{x}_{i,0}^{-i} \in \mathbf{R}^{n-n_i}, \lambda_{i,0} \in \mathbf{R}_+^m, z_{i,0} \in \mathbf{R}^m$ 

更新:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{i,k} &= P_{\Omega_i}(x_{i,k} - \tau_i(\nabla_{x_i} J_i(x_{i,k}, \mathbf{x}_{i,k}^{-i}) + A_i^\top \lambda_{i,k} + c \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(x_{i,k} - \mathbf{x}_{j,k}^i))) \\ \tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i} &= \mathbf{x}_{i,k}^{-i} - \tau_i c \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\mathbf{x}_{i,k}^{-i} - \mathbf{x}_{j,k}^{-i}) \\ \tilde{z}_{i,k} &= z_{i,k} + \nu_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\lambda_{i,k} - \lambda_{j,k}) \\ \tilde{\lambda}_{i,k} &= P_{\mathbf{R}_+^m}(\lambda_{i,k} + \sigma_i(A_i(2\tilde{x}_{i,k} - x_{i,k}) - b_i \\ &\quad - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(2(\tilde{z}_{i,k} - \tilde{z}_{j,k}) - (z_{i,k} - z_{j,k})) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\lambda_{i,k} - \lambda_{j,k})))\end{aligned}$$

 加速: 当  $k$  是偶数时  $\tau_k = 1$ ,  $k$  是奇数时  $\tau_k = \tau$ .

$$\begin{aligned}x_{i,k+1} &= \tilde{x}_{i,k} + (\tau_k - 1)(\tilde{x}_{i,k} - x_{i,k}) \\ \mathbf{x}_{i,k+1}^{-i} &= \tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i} + (\tau_k - 1)(\tilde{\mathbf{x}}_{i,k}^{-i} - \mathbf{x}_{i,k}^{-i}) \\ z_{i,k+1} &= \tilde{z}_{i,k} + (\tau_k - 1)(\tilde{z}_{i,k} - z_{i,k}) \\ \lambda_{i,k+1} &= \tilde{\lambda}_{i,k} + (\tau_k - 1)(\tilde{\lambda}_{i,k} - \lambda_{i,k})\end{aligned}$$

类似于(5.1), 算法4等价于

$$\begin{cases} \omega_{k+1} = T(\omega_k), & k \text{ 是偶数} \\ \omega_{k+1} = T(\omega_k) + (\tau - 1)(T(\omega_k) - \omega_k), & k \text{ 是奇数} \end{cases} \quad (5.11)$$

类似于定理4.1, 下面给出弱假设条件下算法4的收敛性, 强假设条件下的收敛性类似可证.

**定理 5.3.** 设假设3.1-3.3及3.5成立. 取  $c$  使得引理3.6中的  $c > c_{\min}$  成立. 选取算法4中步长  $\gamma_i, \xi_i, \kappa_i$  使得引理3.5满足. 取  $\alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\delta > \frac{1}{2\beta}$ , 其中  $0 < \beta \leq \min\{\frac{\bar{\mu}}{\theta^2}, \frac{1}{2d^*}\}$ . 则对任意  $\tau \in [1, \frac{3}{2})$ , 由算法4生成的序列  $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\lambda}_k\}_{k \in \mathbf{N}}$  收敛到均衡点  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ , 其中  $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$ ,  $x^*$  是博弈(3.2)的 v-GNE.

证明. 与定理4.1类似, 先证明  $\{\omega_{2k}\}$  的收敛性, 然后证明  $\{\omega_k\}$  也收敛. 注意到当  $\delta > \frac{1}{\beta}$  时,  $T = T_2 \circ T_1$  是  $\alpha$ -限制平均的, 其中  $\alpha = \frac{2}{3}$ . 令  $\omega^*$  为  $T$  的任一不动点.

I. 首先考虑子序列  $\{\omega_{2k}\}$ , 由(5.11)和(4.2)可得

$$\begin{aligned}
 & \|\omega_{k+2} - \omega^*\|_{\Phi}^2 \\
 & \leq \tau [\|T(\omega_k) - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \|T(\omega_k) - T(T(\omega_k))\|_{\Phi}^2] \\
 & \quad + (1-\tau) [\|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \|\omega_k - T(\omega_k)\|_{\Phi}^2] \\
 & \quad - \tau(1-\tau) \|T(T(\omega_k)) - T(\omega_k)\|_{\Phi}^2 \\
 & = (1-\tau) \|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 + \tau \|T(\omega_k) - \omega^*\|_{\Phi}^2 \\
 & \quad + [-\tau(\frac{1}{\alpha} - \tau)] \|T(\omega_k) - T(T(\omega_k))\|_{\Phi}^2 \\
 & \quad - (1-\tau) \frac{1-\alpha}{\alpha} \|T(\omega_k) - \omega_k\|_{\Phi}^2 \\
 & \leq \|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \|T(\omega_k) - \omega_k\|_{\Phi}^2 \\
 & \quad + [-\tau(\frac{1}{\alpha} - \tau)] \|T(\omega_k) - T(T(\omega_k))\|_{\Phi}^2
 \end{aligned}$$

其中第一个等式成立由于  $\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2$ . 通过选取  $\tau \leq \frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2}$ , 有

$$\|\omega_{k+2} - \omega^*\|_{\Phi}^2 \leq \|\omega_k - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \|T(\omega_k) - \omega_k\|_{\Phi}^2 \quad (5.12)$$

这可推出  $\{\|\omega_{k+2} - \omega^*\|_{\Phi}^2\}$  是单调递减且有界的, 因此收敛. 进一步,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\|\omega_{2(k+1)} - \omega^*\|_{\Phi}^2 - \|\omega_{2k} - \omega^*\|_{\Phi}^2) \leq -\frac{1-\alpha}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \|T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}\|_{\Phi}^2 \quad (5.13)$$

即,  $\sum_{k=0}^{\infty} \|T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}\|_{\Phi}^2 \leq \|\omega_0 - \omega^*\|_{\Phi}^2 < \infty$ , 因此

$$\|T(\omega_{2k}) - \omega_{2k}\| \rightarrow 0. \quad (5.14)$$

注意到  $\{\omega_{2k}\}$  有界, 故存在一收敛子列  $\{\omega_{2n_k}\} \rightarrow \tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\omega}$  是一极限点. 令(5.14)中  $k \rightarrow \infty$ , 得  $T(\tilde{\omega}) \rightarrow \tilde{\omega}$ , 这推出  $\tilde{\omega}$  是  $T$  的一不动点, 因此  $\{\|\omega_{2k} - \tilde{\omega}\|_{\Phi}^2\}$  收敛. 由于  $\{\|\omega_{2n_k} - \tilde{\omega}\|_{\Phi}^2\} \rightarrow 0$ ,  $\{\omega_{2k}\}$  收敛到  $\tilde{\omega}$ .

II.  $T$  是  $\frac{2}{3}$ -限制平均的, 因此是限制非扩张的, 所以有

$$\|\omega_{2k+1} - \tilde{\omega}\| = \|T(\omega_{2k}) - T(\tilde{\omega})\| \leq \|\omega_{2k} - \tilde{\omega}\|, \quad (5.15)$$

这推出序列  $\{\omega_{2k+1}\}$  收敛到与  $\{\omega_{2k}\}$  相同的极限, 故  $\{\omega_k\}$  收敛到  $\tilde{\omega}$ .

□

### 5.3 数值仿真

本节考虑如3.5节的纳什-古诺博弈实例，网络示意图如图3.1，通信网络如图3.2.

从图5.1中可看出，本章所提出的算法3-4以比 [30, Alg.1] 更快的速度收敛到 GNE  $x^*$ ，且算法3收敛速度最快. 另一方面，具有切换超松弛的算法4比具有超松弛的算法3需要更少的计算资源.

除此之外，由图5.2可以看出算法2和算法4可以保证收敛到 v-GNE，公司 1,6,10,11 的局部决策变量  $x_{i,k}$  的轨迹如图5.3所示. 从图5.4可以看出，利用算法2和算法4，关于公司 1 和 3 的策略的估计最终渐近收敛至其真实行为.

对具有惯性和超松弛的算法进行比较，从图5.5，图5.6可以看出，算法1-4都以比算法 [30, Alg.1] 更快的收敛速度收敛到 GNE  $x^*$ ，且具有惯性的普通算法和切换算法都比对应的具有超松弛的算法具有更快的收敛速度. 具有切换惯性的算法2需要更少的计算量，因此为同时考虑收敛速度和计算成本下的最佳选择.

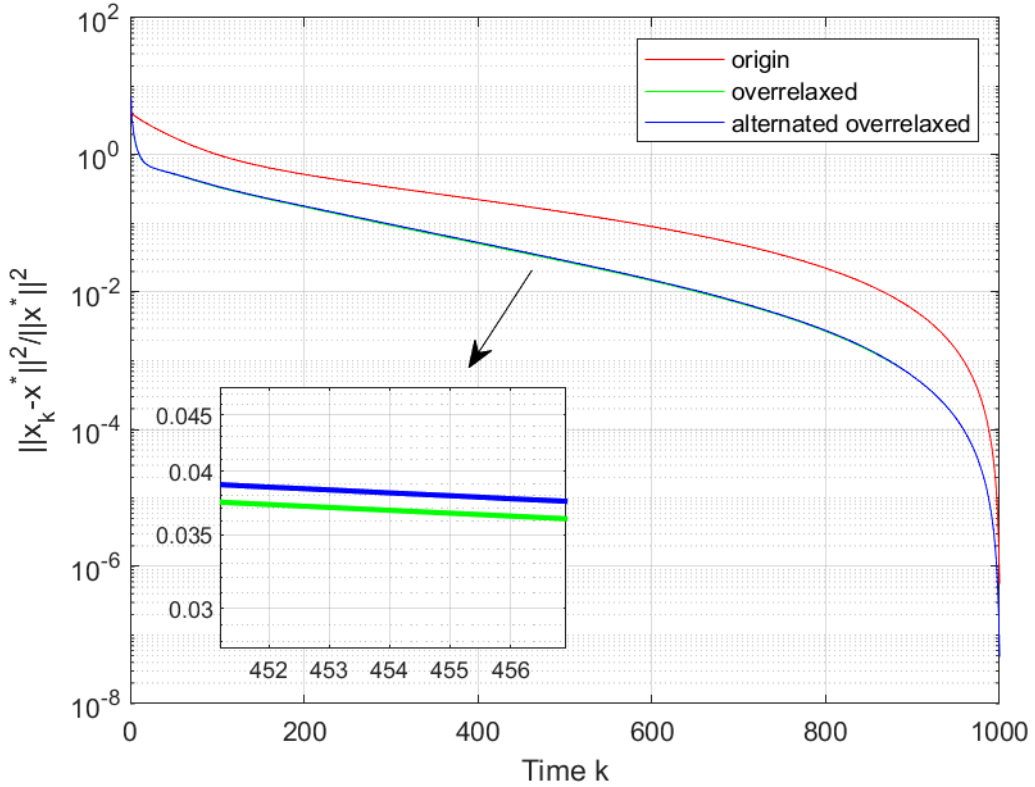


图 5.1 由算法 [30, Alg.1]，算法3和算法4生成的相对误差  $\|x_k - x^*\|^2 / \|x^*\|^2$ .

### 5.4 小结

本章提出了两种分别具有超松弛和切换超松弛的完全分布式 v-GNE 搜索算法，在强假设和弱假设条件下证明了其收敛性，并数值仿真验证了其收敛效果. 具有切换超松弛的算法及其

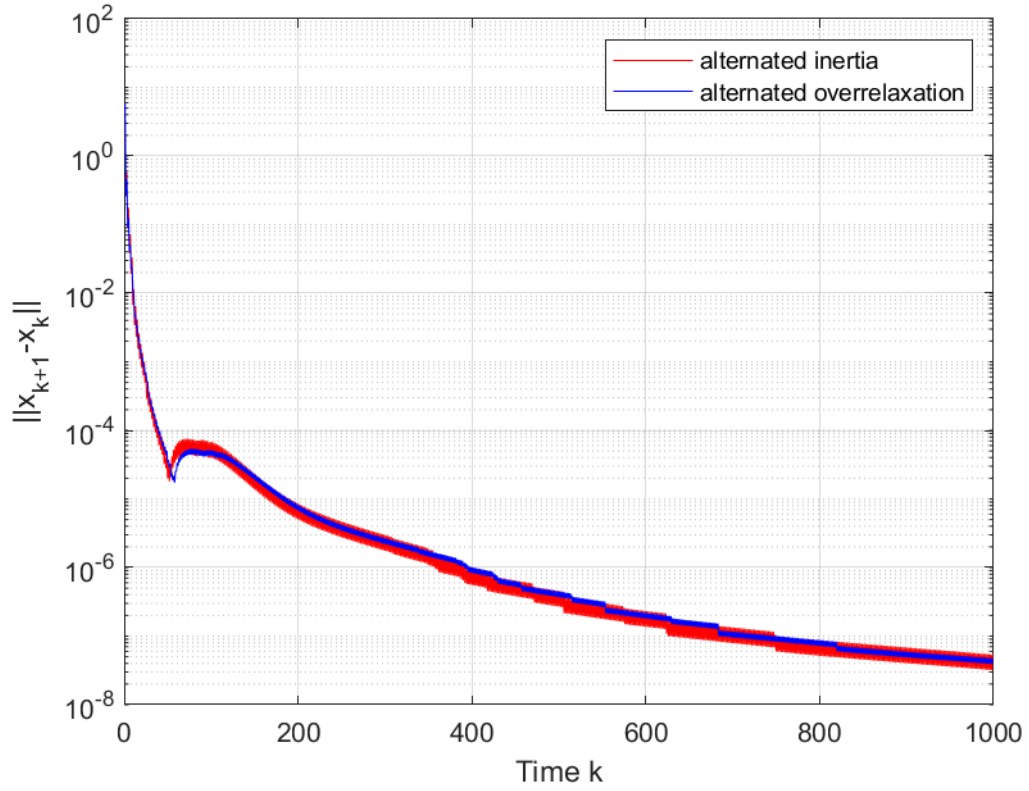
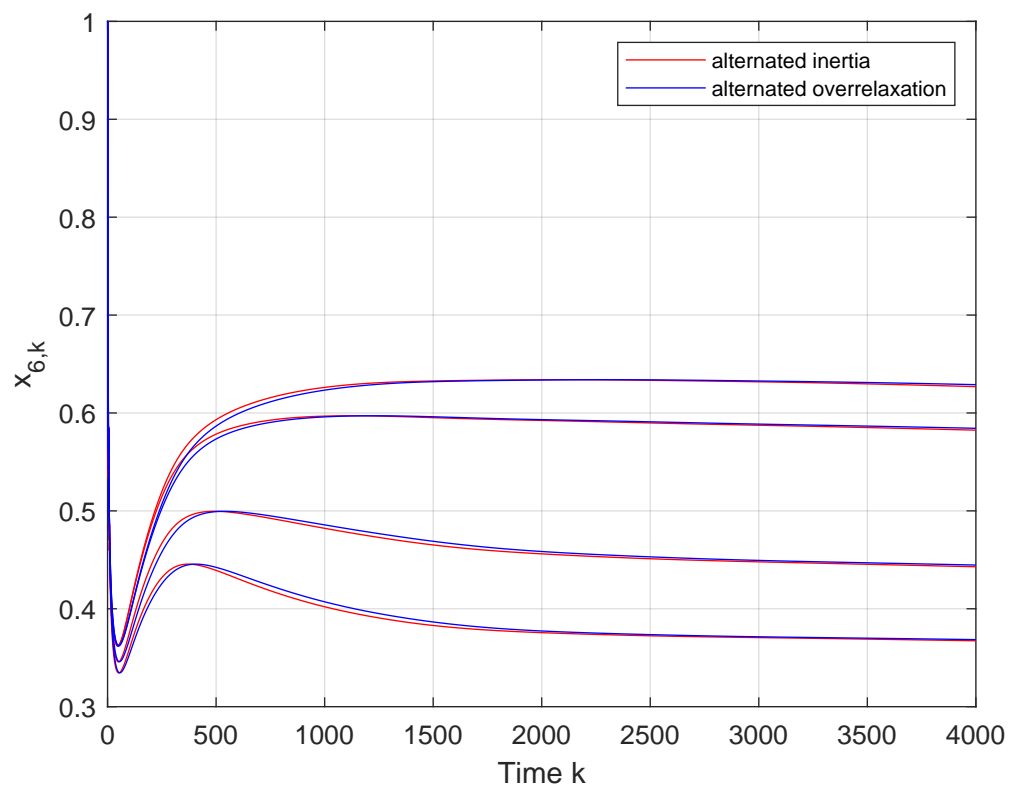
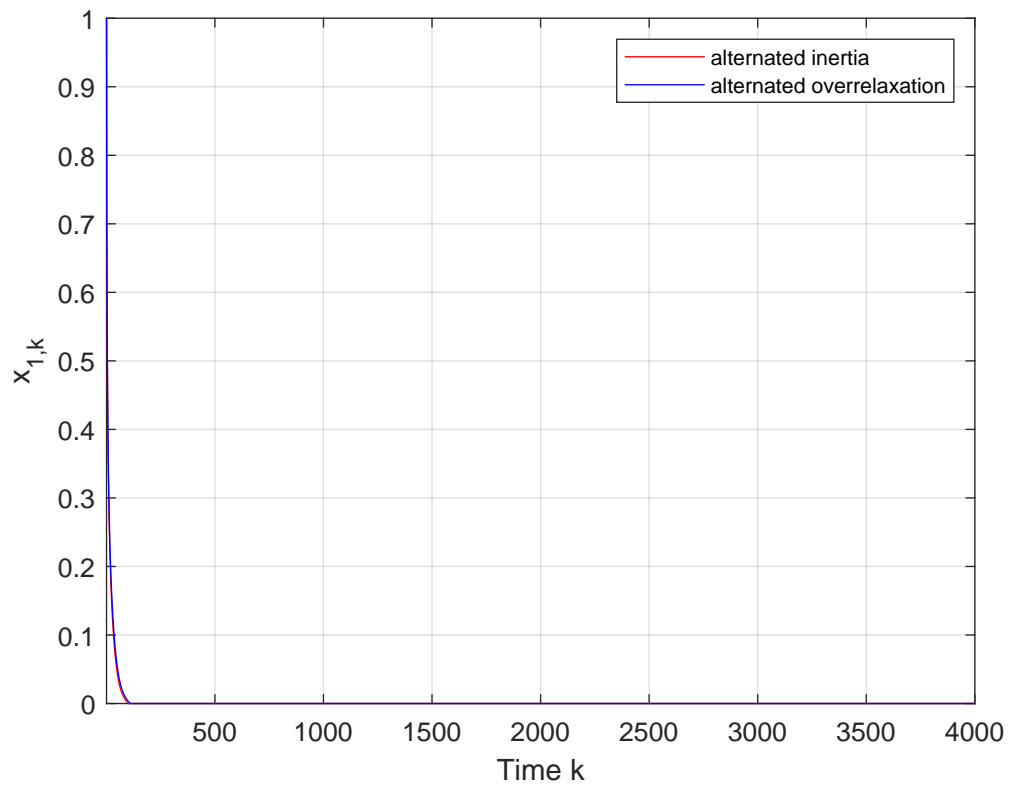


图 5.2 由算法2和算法4生成的序列  $\|x_{k+1} - x_k\|$  的轨迹.

收敛性结论等内容已投稿至期刊 Fractal and Fractional<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Zhangcheng Feng, Wenying Xu, Jinde Cao. Alternating inertial and overrelaxed algorithms for distributed generalized Nash equilibrium seeking in multi-player games. Fractal and Fractional, under 2nd-round review.





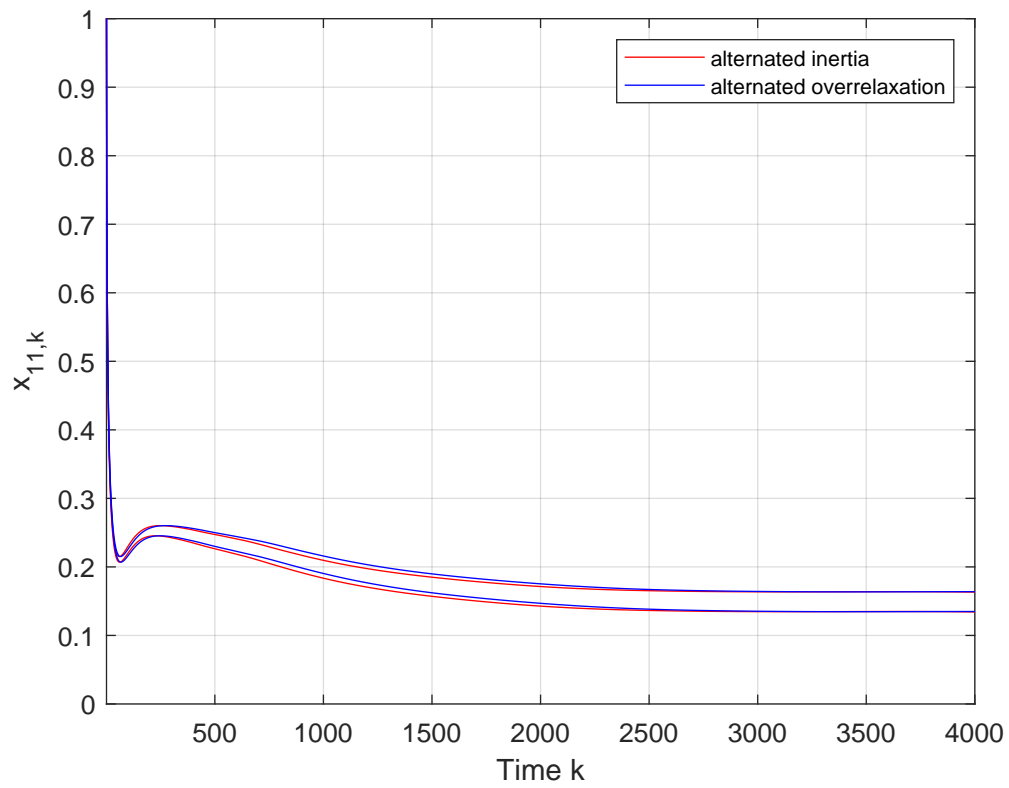
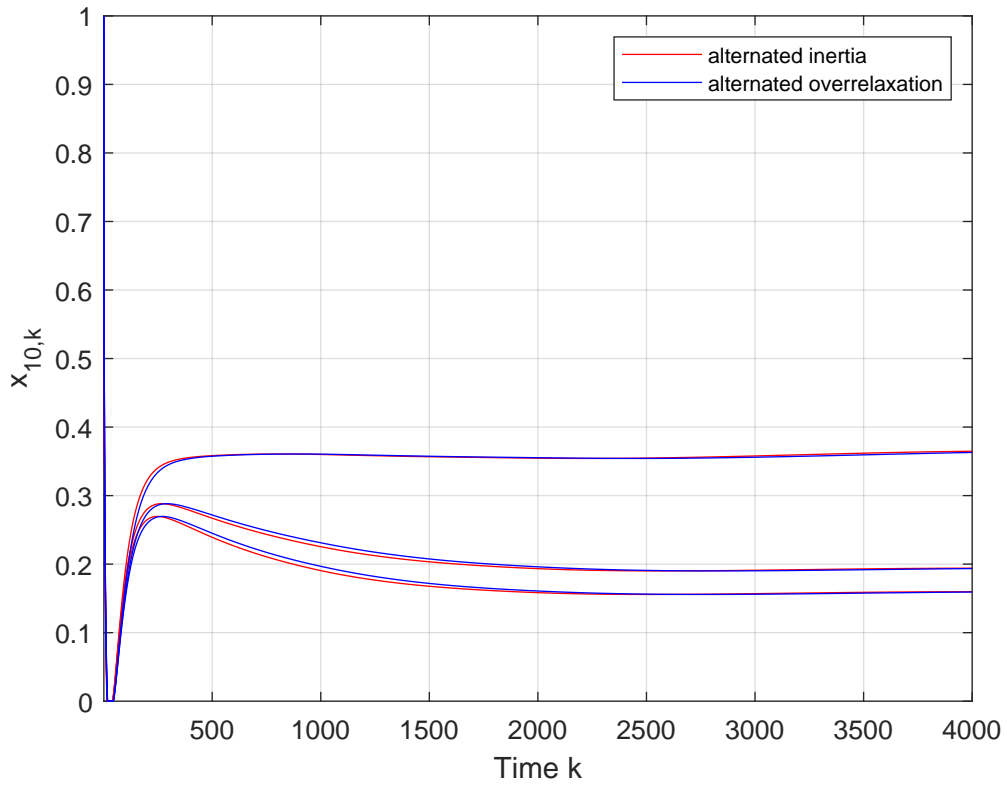
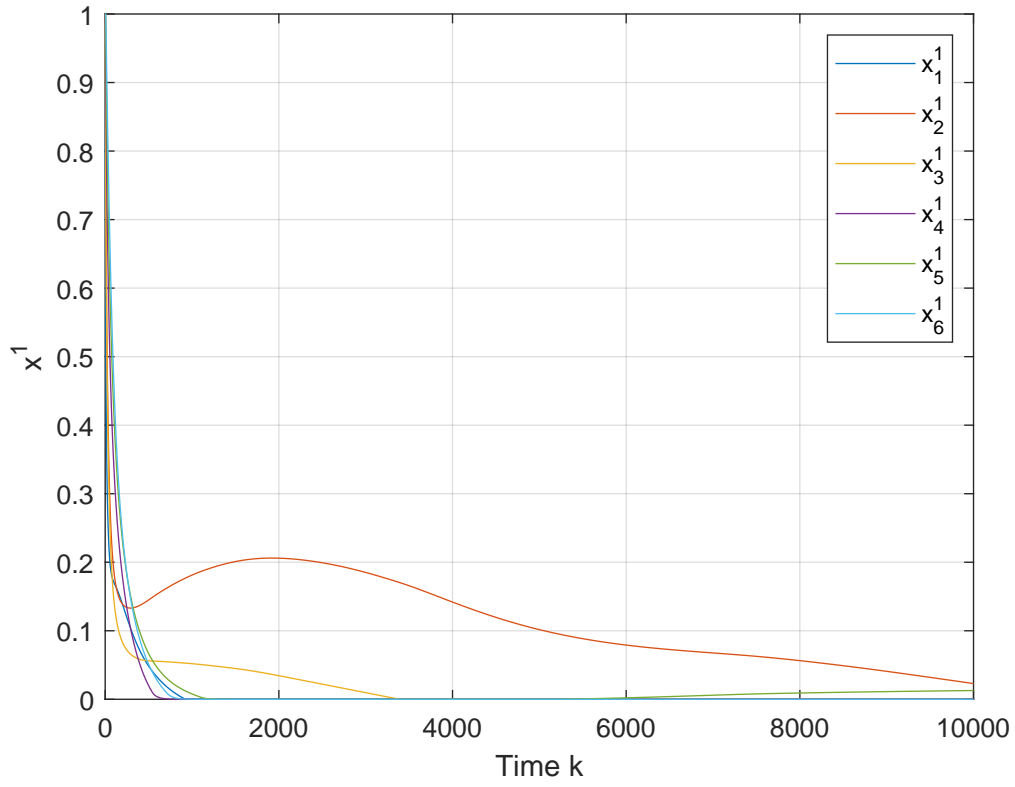
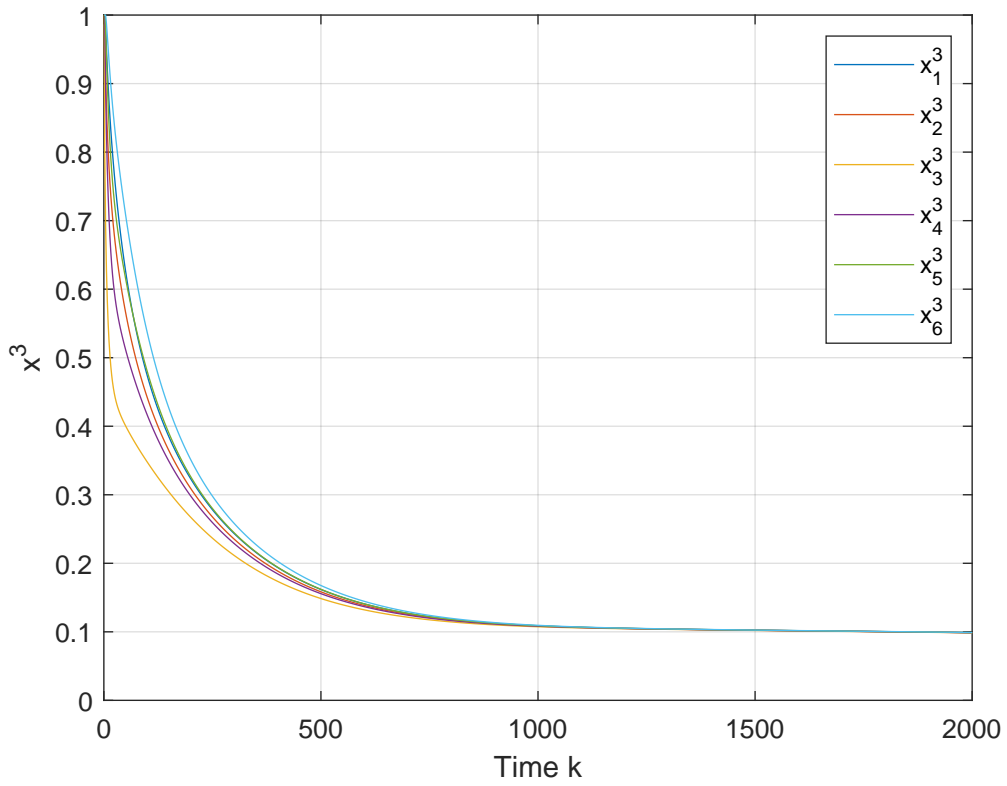


图 5.3 由算法2和算法4生成的公司 1,6,10,11 的局部决策变量  $x_{i,k}$  的轨迹.



(a) 由算法2生成的公司 1, 2, 3, 4, 5, 6 对公司 1 的估计变量  $\mathbf{x}_j^1$  的轨迹.



(b) 由算法4生成的公司 1, 2, 3, 4, 5, 6 对公司 3 的估计变量  $\mathbf{x}_j^3$  的轨迹.

图 5.4 六个公司的估计变量  $\mathbf{x}_j^1$  和  $\mathbf{x}_j^3$  的轨迹.

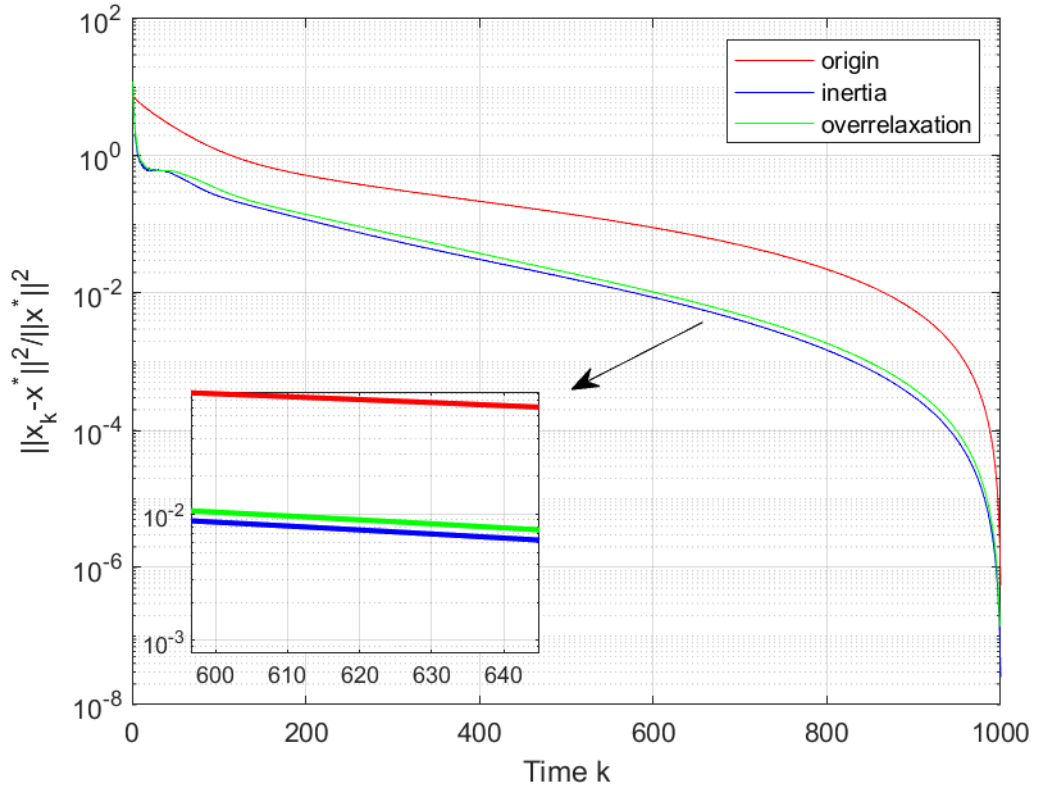


图 5.5 由算法 [30, Alg.1], 算法1和算法3生成的相对误差  $\|x_k - x^*\|^2 / \|x^*\|^2$ .

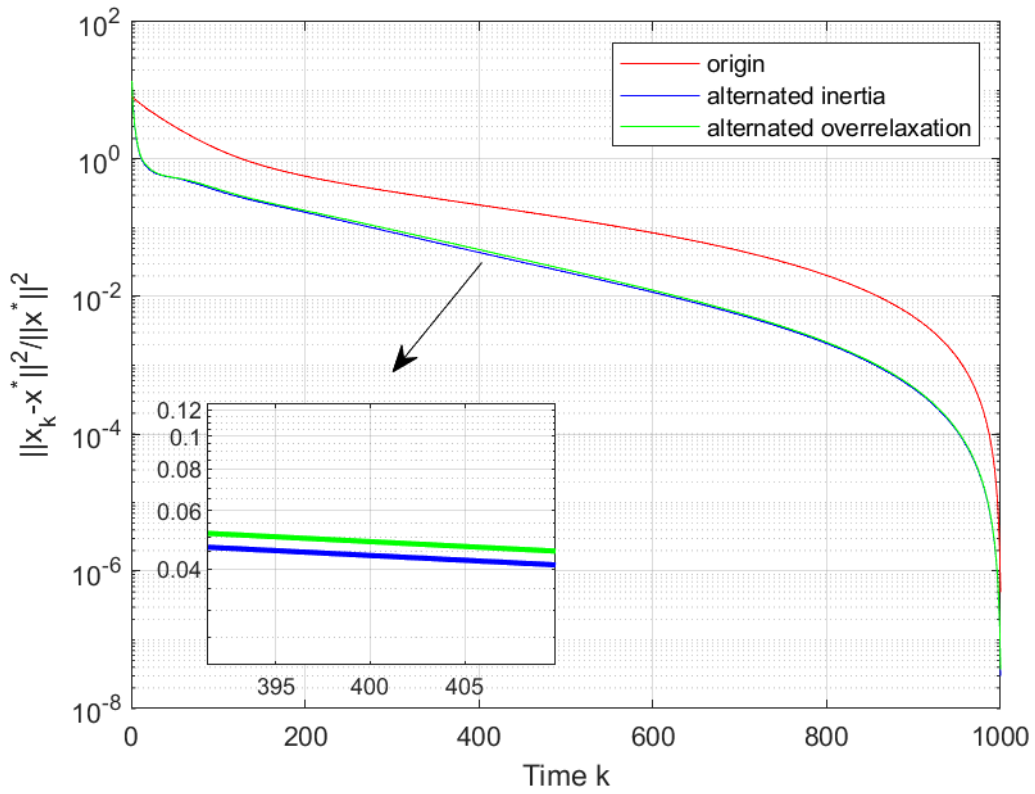


图 5.6 由算法 [30, Alg.1], 算法2和算法4生成的相对误差  $\|x_k - x^*\|^2 / \|x^*\|^2$ .

## 第六章 总结与展望

### 6.1 总结

本文研究了部分决策信息下，具有全局共享约束的多玩家博弈中的广义纳什均衡分布式计算问题。基于图论，算子理论，矩阵论，优化理论等知识，对广义纳什均衡点的计算问题进行了深入探讨，提出了新算法，验证了有效性。

1. 首先提出了具有惯性的完全分布式 v-GNE 搜索算法，验证了其具有加速效果，但无法避免每次迭代需要更大的计算量；
2. 同时考虑快速收敛及低计算消耗，进一步提出了具有切换惯性的完全分布式 v-GNE 搜索算法；
3. 借鉴惯性步骤的加速思想，分别提出了具有超松弛及切换超松弛的完全分布式 v-GNE 搜索算法。

针对每一类算法，我们进行如下讨论：

- i. 问题描述，建立所研究问题的数学模型。在部分决策信息设定下，玩家只能从其邻居处得到信息，而不是所有其它玩家，为弥补缺失信息，每名玩家需对其他玩家的决策进行估计；
- ii. 提出算法，利用算子分裂法，将 GNE 刻画为单调算子和的零点，将算法重新表述为不动点迭代；
- iii. 证明收敛性，在 EPGM 强单调性和 Lipschitz 连续性的假设下证明了算法的收敛性；
- iv. 减弱假设条件，在 EPGM 缺失单调性的假设下重新证明了算法的收敛性；
- v. 数值仿真，通过 MATLAB 对经典纳什-古诺博弈实例进行仿真，验证了所提出算法的性能和有效性。

### 6.2 展望

基于本文对具有全局约束的博弈问题的研究，未来我们将围绕网络结构的动态变化，个体决策和目标的不确定性及算法在实际中的应用三个角度展开研究。

1. 时变网络上的博弈均衡点搜索问题. 在本文所研究问题中，假设通信图不随时间发生改变，即通信网络是时不变的，但在现实中，有诸多情况将导致通信拓扑随时间、迭代次数而发生变化，如采用下述的通信协议. 在大多数关于多个体博弈问题的现有文献中，通常假设所有决策主体都能够同时加入通信网络来向其所有邻居传输信息。然而，这种假设对于网

络系统来说通常是不现实的，由于现实世界的网络不可避免地受到有限带宽的影响，这可能在同时进行多种信息传输的情况下导致数据冲突，因此需要通信协议来协调接入网络的节点的传输顺序，如 Round-Robin 协议. 与没有协议调度的传统传输方式相比，通信协议的使用将给动态分析问题带来某些根本性的挑战，如变化的网络拓扑结构，而变化的网络将导致通信图不能时刻保证无向连通，邻接矩阵不能时刻保证对称等问题，因此有必要研究通信协议影响下的时变网络中的控制问题.

2. 目标函数含有不确定性的随机纳什均衡问题（Stochastic Nash equilibrium problem, SNEP）. 本文考虑的问题为确定性问题，实际上现实中存在很多不确定性因素的影响，因此 SNEP 是值得研究的. 通常来说，SNEP 中个体  $i$  的局部成本函数定义为

$$\mathbb{J}_i(x_i, x_{-i}) = \mathbb{E}_\xi[J_i(x_i, x_{-i}, \xi(\omega))],$$

其中  $J_i : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ ，参与者  $i$  的成本函数  $\mathbb{J}_i$  依赖于局部变量  $x_i$ ，他人决策变量  $x_{-i}$  和表示不确定性的随机变量  $\xi : \Theta \rightarrow \mathbf{R}^d$ . 给定概率空间  $(\Theta, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\mathbb{E}_\xi$  表示给定随机变量  $\xi$  的分布下的数学期望，由于无法确切知道随机变量的真实分布或计算期望值的成本太高，在分析中可能用到样本分析等方法.

3. 本文研究内容具有广泛的应用前景，下一步我们计划将所提出的均衡点搜索算法应用于智能电网和机器学习，如对抗生成网络中.

## 参考文献

- [1] MYERSON R B. Game theory[M]. Harvard university press, 2013.
- [2] ARROW K J, DEBREU G. Existence of an equilibrium for a competitive economy[J]. *Econometrica*, 1954, 22(3):265–290.
- [3] PANG J-S, SCUTARI G, FACCHINEI F, et al. Distributed power allocation with rate constraints in Gaussian frequency-selective interference channels[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 54(8):3471–3489.
- [4] LIU Y, GUO L, LU C, et al. A fully distributed voltage optimization method for distribution networks considering integer constraints of step voltage regulators[J]. *IEEE Access*, 2019, 7:60055–60066.
- [5] BRETON M, ZACCOUR G, ZAHAF M. A game-theoretic formulation of joint implementation of environmental projects[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 168(1):221–239.
- [6] ARDAGNA D, PANICUCCI B, PASSACANTANDO M. A game theoretic formulation of the service provisioning problem in cloud systems[C]. *Proceedings of the 20th international conference on World wide web*, 2011:177–186.
- [7] PANG J-S, SCUTARI G, PALOMAR D P, et al. Design of cognitive radio systems under temperature-interference constraints: A variational inequality approach[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(6):3251–3271.
- [8] TANG Y, GAO H, ZHANG W, et al. Leader-following consensus of a class of stochastic delayed multi-agent systems with partial mixed impulses[J]. *Automatica*, 2015, 53:346–354.
- [9] ZHAO C, XIANG B, CHEN B. Fusion estimation for discrete time-varying systems with bounded nonlinearities[J]. *IEEE Access*, 2019, 7:27097–27105.
- [10] BRÜCKNER M, KANZOW C, SCHEFFER T. Static prediction games for adversarial learning problems[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2012, 13:2617–2654.
- [11] XU M, ZHANG Y, ZHANG D, et al. Distributed robust dimensionality reduction fusion estimation under dos attacks and uncertain covariances[J]. *IEEE Access*, 2021, 9:10328–10337.
- [12] HOLT C A, ROTH A E. The nash equilibrium: A perspective[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2004, 101(12):3999–4002.
- [13] SAAD W, HAN Z, BASAR T. Game-theoretic methods for the smart grid: An overview of microgrid systems, demand-side management, and smart grid communications[J]. *IEEE Signal Precessing Magazine*, 2012, 29(5):86–105.

- [14] GRAMMATICO S. Dynamic control of agents playing aggregative games with coupling constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(9):4537–4548.
- [15] LI N, CHEN L J, DAHLEH M A. Demand response using linear supply function bidding[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2015, 6(4):1827–1838.
- [16] FRIHAUF P, KRSTIC M, BASAR T. Nash equilibrium seeking in noncooperative games[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 57(5):1192–1207.
- [17] FLÂM S D. Equilibrium, evolutionary stability and gradient dynamics[J]. International Game Theory Review, 2002, 4(04):357–370.
- [18] ARROW K, HURWITZ L, UZAWA H. A gradient method for approximating saddle points and constrained maxima[M]//Traces and Emergence of Nonlinear Programming. Springer, 2014:45–60.
- [19] SHAMMA J S, ARSLAN G. Dynamic fictitious play, dynamic gradient play, and distributed convergence to Nash equilibria[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(3):312–327.
- [20] YAN Y M, CHEN Z Y, VARADHARAJAN V, et al. Distributed Consensus-Based Economic Dispatch in Power Grids Using the Paillier Cryptosystem[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, doi: 10.1109/TSG.2021.3063712.
- [21] DEBREU G. A social equilibrium existence theorem[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1952, 38(10):886–893.
- [22] DUTANG C. A survey of GNE computation methods : theory and algorithms. 2013.
- [23] FACCHINEI F, KANZOW C. Generalized Nash equilibrium problems[J]. Annals of Operations Research, 2010, 175(1):177–211.
- [24] DREVES A, FACCHINEI F, KANZOW C, et al. On the solution of the KKT conditions of generalized nash equilibrium problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 2011, 21(3):1082–1108.
- [25] CARLSON F, KRUPAR K R. Real and complex monotone communication games[J]. The English Journal, 2014, 64(9):65.
- [26] PAVEL L, YI P. A distributed primal-dual algorithm for computation of generalized Nash equilibria via operator splitting methods[C]. IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control, 2018:3841–3846.
- [27] MARDEN J R. Learning in large-scale games and cooperative control[D]. Los Angeles:University of California, 2007.
- [28] ZHU Y, YU W, WEN G, et al. Continuous-time distributed subgradient algorithm for convex optimization with general constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 64(4):1694–1701.
- [29] BIMPIKIS K, EHSANI S, İLKİLİÇ R. Cournot competition in networked markets[J]. Management Science, 2019, 65(6):2467–2481.

- [30] PAVEL L. Distributed GNE seeking under partial-decision information over networks via a doubly-augmented operator splitting approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(4):1584–1597.
- [31] SWENSON B, KAR S, XAVIER J. Empirical centroid fictitious play: An approach for distributed learning in multi-agent games[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(15):3888–3901.
- [32] KOSHAL J, NEDIA A, SHANBHAG U V. Distributed algorithms for aggregative games on graphs[J]. Operations Research, 2016, 64(3):680–704.
- [33] BIANCHI M, BELGIOIOSO G, GRAMMATICO S. Fast generalized Nash equilibrium seeking under partial-decision information. arXiv preprint arXiv:2003.09335, 2020.
- [34] PAVEL L, YI P. An operator splitting approach for distributed generalized Nash equilibria computation[J]. Automatica, 2019, 102:111–121.
- [35] ZHU M, FRAZZOLI E. Distributed robust adaptive equilibrium computation for generalized convex games[J]. Automatica, 2016, 63:82–91.
- [36] PAVEL L. A doubly-augmented operator splitting approach for distributed gne seeking over networks[J]. IEEE Conference on Decision and Control, 2018:3529–3534.
- [37] YE M, HU G. Distributed nash equilibrium seeking by a consensus based approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(9):4811–4818.
- [38] ZHU Y, YU W, WEN G, et al. Distributed nash equilibrium seeking in an aggregative game on a directed graph[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020.
- [39] BAUSCHKE H H, COMBETTES P L. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces[M]. New York:Springer, 2011.
- [40] FACCHINEI F, PANG J-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems[M]. Springer Science & Business Media, 2007.
- [41] Franklin J N. Matrix theory[M]. Courier Corporation, 2012.



## 附 录

本科期间撰写的文章：

- Zhangcheng Feng, Wenying Xu, Jinde Cao, Shaofu Yang. Distributed alternated-inertia generalize Nash equilibrium seeking algorithm: The partial-decision-information case[C]. 11th International Conference of Information Science and Technology, 2021:106–112.
- Zhangcheng Feng, Wenying Xu, Jinde Cao. Alternating inertial and overrelaxed algorithms for distributed generalized Nash equilibrium seeking in multi-player games. Fractal and Fractional, under 2nd-round review.

本科期间所获荣誉：

- 东南大学三好学生
- 东南大学优秀志愿者
- 东南大学诺得物流奖学金
- 东南大学课程奖学金

参与项目：

- 基于多智能体的分布式博弈算法分析与研究

参加学术活动情况：

- 2021 年 5 月 21-23 日，第 11 届信息科学与技术国际会议（ICIST2021）（成都）
- 2021 年 4 月 17-18 日，网络空间安全学术交流会（南京）

## 致 谢

写罢全文，恍然如梦，转眼本科四年时光已到达尾声，回首四年前初入校园的青涩懵懂，不敢说如今已成熟稳重，但总归是有所成长。闻前几日袁隆平、吴孟超院士仙逝，感慨万千，与时代的伟人身处同一时空，幸得无双国士，方令吾辈能逢盛世，国泰民安，每座高校都拥有无数安静的书桌，早已不需大学学子、教师顶冒风险，开启民智，也早无民族危亡之虑，但吾辈学子仍需抱定宗旨、砥砺德行，掌握专业技能，提升个人修养，不求在许多领域达平均水平，但求在某一领域远超平均水平，也应有忧国忧民之心，感恩时代的赠予，做好回馈社会的准备。私以为当今大学之道，不在学习知识的多少，而在学习能力的强弱和学习意识的觉醒，大学为进入社会前的最后一方天地，若能于此磨练心智，增长德行，宽大心胸，则无论今后所遇何事皆能泰然处之。

感恩父母，深谙教育之道，关注我之身心健康，学习状况，文体兴趣，做我坚定后盾，给予关心爱护，使我无近忧远虑，可安心读书，教我做人处事，给予人生建议。但是人生为自己所有，唯有亲身经历，方能体悟个中滋味，唯有跌倒过，方知挫折与成功都是收获。

感恩老师，不吝以人生所学倾囊相授，我深感自己禀赋有限，才疏学浅，无以为报，唯有持续努力，方能有所成绩，不负老师期望。特别要感谢许文盈老师对我的耐心指导，指引我于迷茫之际，给予我宝贵的人生建议。

感恩朋友，得意时恣意庆祝，低落时给予安慰，给我的生活注入生机活力，“何日功成名遂了，还乡，醉笑陪公三万场。”

最后，感谢自己，于纷乱世间保有自我的坚持与追求，不致自暴自弃，迷失颓废而令家人朋友失望，不求多大的个人成就，但求不添人麻烦，不辜负亲人老师，若能一直发挥自我的能力，做好分内之事，便是值得。

往者不谏，来者可追；和光同尘，与时舒卷；戢鳞潜翼，思属风云。