矩阵理论 2023 春季　2023.6.12

学号_________　姓名__________　上课校区_________

注：A^H表示共轭转置,A^T表示转置，I 表示单位阵，i 表示虚数单位

一. 判断正误(20 分) (填√或×)

(1)减号逆A^-具有性质：$A^-AA^-=A^-$。　　(　　)

(2)在 R^2 内，在通常向量加法以及定义数乘为$k\circ(a,b)^T=(ka,0)^T$ 构成线性空间　(　　)

(3)设α是线性空间 V 中的固定非零向量,T 是 V 上的一个变换满足 $Tx=x+\alpha, \forall x\in V$，则 T 是 V 上的线性变换。(　　)

(4)设 3 阶方阵 $A\neq 0$，满足 $A^k=0, k>1$，则 A 不能相似对角化。　(　　)

(5)方阵 A 的特征根λ，谱半径 $\rho(A)$ 满足$|\lambda|\leq\rho(A)\leq\|A\|_1$。　(　　)

(6)若矩阵 A 可逆，则 cosA 也可逆。(　　)

(7)设 A 是 n 阶方阵，$e^{iA}=\cos A+i\sin A$。　(　　)

(8)设 $A\in C^{n\times n}$ 是幂等阵（A^2=A），则 $A^H,(I-A)$ 也是幂等阵。　(　　)

(9) n 阶 Hermite 阵 A $(A^H=A)$**的特征根**$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$**全为实数。**　(　　)

(10)Householder 矩阵的行列式等于 -1.（　　）

二.填空(每空 3 分，共 30 分)

(1)设 A=$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$\sqrt{A}$=____________________。

(2)相容线性方程组 Ax=b 解唯一当且仅当 A 是 _____________矩阵。

(3)设 A=$\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}A^k$ 是____________（填收敛或者发散）的。

(4)设 A 是 n 阶可逆矩阵，O 是 n 阶零矩阵，则$\begin{pmatrix}O&A\\O&O\end{pmatrix}$的**伪逆**是________________。

(5)设$A=\begin{pmatrix}7i&0&1\\1&7&0\\i&1&15\end{pmatrix}$. 写出 A 的三个盖尔圆盘 _________________________________。

(6) $A=\begin{pmatrix}a&1\\0&b\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$张量积 $A\otimes B$ 的行列式为_____________。

(7)对角矩阵为正交矩阵的充分必要条件是____________________。

(8)设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 的 Jordan 标准形 J=____________________________。

(9) 设实对称矩阵 A 满足 $A+I\neq 0$，而 $(A+I)(A+3I)=0$. 则 $\|A\|_2=$________________。

(10) λ 矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$ 的 smith 标准形为______________________。

三、(10 分) 设 T 是线性空间 R^3 上的线性变换，且它在 R^3 中的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵表示为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 求 T 在基 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 下的矩阵；

(2) 求 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的核与值域。

四.(10 分)求 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的简化奇异值分解。

五. (12 分)设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 判断方程 $Ax=\beta$ 是否相容，并求 $Ax=\beta$ 的最佳极小二乘解或极小范数解。

六. (12 分)**设** $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，求 e^{tA}，其中 t 是实参数。

七、(6 分)证明题：设 A 是 n 阶可逆矩阵， B 是 n 阶矩阵，如果对某种矩阵范数 $\|\bullet\|$，有 $\|B\|<\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$，证明 A ＋ B 可逆。