矩阵往年考试题 A（一）

一、（20 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 1 & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & 2i\end{pmatrix}$， $x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

(1)求列范数 $\|A\|_1$ 与行范数 $\|A\|_\infty$.　　(2)求向量范数 $\|Ax\|_1$，$\|Ax\|_2$ 及 $\|Ax\|_\infty$.

(3)画出 A 的盖尔园（估计特征值范围)，判断 A 是否可逆

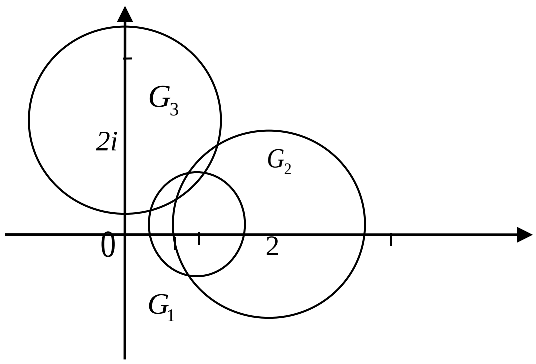
答 (1)列范数 $\|A\|_1=3+\frac{1}{2}$, 行范数 $\|A\|_\infty=3+\frac{1}{2}$；　　（6 分）

(2)向量范数 $\|Ax\|_1=2+\frac{1}{2}$，　$\|Ax\|_2=\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$，　$\|Ax\|_\infty=$　　（8 分)

(3) A 的盖尔园为：$G_1:|Z-1|\le\frac{5}{6}$，　$G_2:|Z-2|\le 1.5$,　$G_3:|Z-2i|\le 1.5$

画出 A 的盖尔园可知原点 0 不在盖尔园中，故 A 为可逆.　（6 分)

因为原点 0 不在盖尔园中，故 A 为可逆.



二、(15 分)设 $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 2a_1 & 2a_2 & \cdots & 2a_n\\ \cdots & & \cdots & \\ na_1 & na_2 & \cdots & na_n\end{pmatrix}$，$\mathbf{tr}A\ne 0$，　(1)求 A 的满秩分解

(2)计算 $A^2-(trA)A$ 与 A^{100}；(3) 证明 A 可对角化(A 为单阵).

答 (1) $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 2a_1 & 2a_2 & \cdots & 2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ na_1 & na_2 & \cdots & na_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\ \square\ \alpha\beta$(分解不唯一)（4 分)

(2)利用 $\beta\alpha=a_1+2a_2+\cdots+na_n=trA$

$$\Rightarrow A^2-(trA)A=0$$

$$\Rightarrow A^{100}=(\beta\alpha)^{99}A=(a_1+\cdots+na_n)^{99}A.\qquad（6 分)$$

(3) $A^2-(trA)A=0$ **,** $(trA\neq 0)\Rightarrow A$ 的一个零化式(也是极小式)为

$x^2-(trA)x=0$ 且无重根， 故 A 可对角化（ A 为单阵）　　　(5 分)

三、(18 分)设 $A=\begin{pmatrix}2&4\\5&3\end{pmatrix}$(1)求 A 的谱分解；(2) 求 $\sin A$ 与 $e^{t\sin A}$ 的谱分解

(3)求谱半径 $\rho(e^A)$ 与行列式 $\det(e^{\sin A})$. (4)：求 $\ln(I+A^2)=?$

答(1) $A=\begin{pmatrix}2&4\\5&3\end{pmatrix}$ 可知 A 的谱为 $\lambda(A)=\{7,\ \ -2\}$, 令 $\lambda_1=7,\ \lambda_2=-2$ 的

A 的谱分解公式为 $A=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2$ 其中

$$G_1=\frac{\cancel{(A-\lambda_1)}(A-\lambda_2)}{\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{(A-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)}=\tfrac{1}{9}(A+2)=\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}4&4\\5&5\end{pmatrix}$$

$G_2=I-G_1=\tfrac{1}{9}(7-A)=\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}5&-4\\-5&4\end{pmatrix}$ 即 A 的谱分解：

$$A=7G_1+(-2)G_2=7\times\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}4&4\\5&5\end{pmatrix}-2\times\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}5&-4\\-5&4\end{pmatrix}.$$

也可令 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=7$ 可写 A 的谱分解为(此时的 $G_1,\ G_2$ 与上面次序相反):

$A=-2G_1+7G_2=-2\times\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}5&-4\\-5&4\end{pmatrix}+7\times\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}4&4\\5&5\end{pmatrix}$ 其中 $G_1=\tfrac{1}{9}(7-A)=\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}5&-4\\-5&4\end{pmatrix}$

(2)可知 $f(A)$ 的谱公式为 $f(A)=f(\lambda_1)G_1+f(\lambda_2)G_2$,（且 $G_1,\ G_2$ 同上）,

令 $f(x)=\sin x\Rightarrow f(7)=\sin 7,\ f(-2)=-\sin 2$ 得 $\sin A$ 的谱分解为

$$\sin A=(\sin 7)G_1-(\sin 2)G_2=\sin 7\times\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}4&4\\5&5\end{pmatrix}-\sin 2\times\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}5&-4\\-5&4\end{pmatrix}$$

再令 $f(x)=e^{t\sin x}\Rightarrow f(7)=e^{t\sin 7},\ f(-2)=e^{-t\sin 2}$ 得 $e^{t\sin A}$ 的谱分解为

$$e^{t\sin A}=(e^{t\sin 7})G_1+(e^{-t\sin 2})G_2=e^{t\sin 7}\times\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}4&4\\5&5\end{pmatrix}+e^{-t\sin 2}\times\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}5&-4\\-5&4\end{pmatrix}$$

(3) 由 $\lambda(e^A)=\{e^7,\ e^{-2}\}\Rightarrow$ 谱半径 $\rho(e^A)=e^7$

由 $\lambda(e^{\sin A})=\{e^{\sin 7},\ e^{-\sin 2}\}\Rightarrow$ 行列式 $\det(e^{\sin A})=e^{\sin 7-\sin 2}$

四、（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，

(1)求 A 的一个满秩分解，并求 A^+

(2)证明 $Ax=b$ 相容，并求其极小范数解.

解 (1) 满秩分解 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}\triangleq BC$(分解不唯一)　　(3 分)

有满秩分解得公式 $A^+=C^+B^+$　　（若写出 A^+ 相关公式给 2 分）

其中 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B^+=(B^HB)^{-1}B^H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}\Rightarrow C^+=C^H(CC^H)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6\\6&14\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix}14&-6\\-6&3\end{pmatrix}=\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix}8&-3\\2&0\\-4&3\end{pmatrix}$$

$A^+=C^+B^+=\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix}8&-3\\2&0\\-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix}8&-3&0\\2&0&0\\-4&3&0\end{pmatrix}$（有 A^+ 过程与结果给 5 分）

备注：本题可用公式 $\begin{pmatrix}D\\0\end{pmatrix}^+=(D^+,\ 0)$ 与低阵公式 求 A^+

解 (1)方法 1, 用公式 $\begin{pmatrix}D\\0\end{pmatrix}^+=(D^+,\ 0)$ 求 A^+，其中 $D=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}$ 为行满秩，故

$D^+=D^H(DD^H)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6\\6&14\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix}14&-6\\-6&3\end{pmatrix}=\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix}8&-3\\2&0\\-4&3\end{pmatrix}$ 于是

$A^+=\begin{pmatrix}D\\0\end{pmatrix}^+=(D^+,\ 0)=\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix}8&-3&0\\2&0&0\\-4&3&0\end{pmatrix}$　　(6 分)

(2)证：因为 b 恰为 A 的一个列，则 $b\in R(A)$，可知 $Ax=b$ 相容，也可由

秩 $r(A\,|\,B)=r(A)=2\Rightarrow Ax=b$ 为相容.　　(3 分)

$Ax=b$ 极小范数解公式为 $x=A^{+}b$ （1 分）

得极小范数解 $x=A^{+}b=A^{+}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}8&-3&0\\2&0&0\\-4&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ （1 分）.

$$AA^{+}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$$

五、(17 分)设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&3&-2\end{pmatrix}$ (1)写出 A 的最小式，初等因子，不变因子；

(2)备用：求 A 与 $\frac{A}{2}$ 的 Jordan 形；(3) 备用：讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{A}{2}\right)^n$ 的收敛性

解 (1)因为 $(A-1)(A+2)\neq 0$ 得 A 的最小式 $m(x)=(x-1)(x+2)^2$ 由此得

初等因子：$(x-1)$, $(x+2)^2$，不变因子为 1, $(x-1)(x+2)^2$ （6 分）

(2) A 的 Jordan 形有 2 个 Jordan 块，$J_A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$ （4 分）

(3)同理可得 $\frac{A}{2}$ 的 Jordan 形为 $B=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\\&D\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$ （2 分）

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{A}{2}\right)^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(B)^n$ 有相同收敛性，又 $D^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&n(-1)^{n-1}\\&(-1)^n\end{pmatrix}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(B)^n=\begin{pmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2}\right)^n&\\&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}D^n\end{pmatrix}$，且

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}D^n=\begin{pmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^n&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n-1}\\0&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^n\end{pmatrix}$ 为收敛，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(B)^n$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{A}{2}\right)^n$ 为收敛 （4 分）

以下的六、七题中只需任选一题：

六、(15 分)(1) 设矩阵 A 最小式 $m(x)=(x-2)^2$ 且 $f(A)$ 收敛，推导 $f(A)$ 的广谱计算公式。解(1)由 $(A-2)^2=0$ 与台乐公式 $f(A)=\sum_0^{\infty}\frac{f'(2)}{k!}(A-2)^k$

可得公式 $f(A)=f(2)I+f'(2)(A$. (5 分)

(2)求 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}$ 的奇异值与奇异分解，

解(2) $A^HA=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$ 正奇异值为 $\sqrt{5}$, **1**

$A^HA=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}$ 有正交特征向量：$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $X_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix}\frac{AX_1}{|AX_1|} & \frac{AX_2}{|AX_2|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}&0\\0&1\\2/\sqrt{5}&0\end{pmatrix}$，令 $Q=(X_1, X_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

得简化奇异值分解为 $A=P\Delta Q^H=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}&0\\0&1\\2/\sqrt{5}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$

把 $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}&0\\0&1\\2/\sqrt{5}&0\end{pmatrix}$ 扩充为正交阵 $U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{\pm2}{\sqrt{5}}\\0&1&0\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{\mp1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$(不惟一)，令 $V=Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

奇异值分解为 $A=UDV^H=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{\pm2}{\sqrt{5}}\\0&1&0\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{\mp1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^H$ (共 10 分)

七、（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}-3&4&2\\-2&3&1\\-2&2&2\end{pmatrix}$，$b(t)=\begin{pmatrix}e^t\\0\\e^{2t}\end{pmatrix}$，$x=x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}$，(1)求 e^{At}

(2)求解齐次微分方程组 $\frac{dx}{dt}=Ax$，初始条件为 $x(0)=C=\begin{pmatrix}0, & 1, & 0\end{pmatrix}^T$

(3)（备用）推导微分方程 $\frac{dx}{dt}=Ax+b(t)$ 满足条件 $x(0)=C$ 的解公式：$x(t)=e^{At}C+e^{At}\int_0^t e^{-Av}b(v)dv$（不必求解，若求出解，附加 3 分）.

解(1)由 $A-I=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}(-2,\ 2,\ 1)$ 可知谱为 $\lambda(A)=\{0,\ 1,\ 1\}$

令 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1$ 可知最小式 $m(x)=(x-0)(x-1)$，故有 $f(A)$ 的谱公式为

$$f(A)=f(\lambda_1)G_1+f(\lambda_2)G_2$$ 其中

$$G_1=\frac{(A\times\lambda_1)(A-\lambda_2)}{(\lambda_1\times\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{(A-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)}=-(A-1)=I-A=\begin{pmatrix}4 & -4 & -2\\ 2 & -2 & -1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix},$$

$$G_2=I-G_1=A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$ ，(过程正确 4 分)

令 $f(x)=e^{tx}\Rightarrow f(0)=1,\ f(1)=e^t$，得 $e^{tA}=1G_1+e^tG_2=(I-A)+e^tA$ (2 分)

$$=\begin{pmatrix}4-3e^t & -4+4e^t & -2+2e^t\\ 2-2e^t & -2+3e^t & -1+e^t\\ 2-2e^t & -2+2e^t & -1+2e^t\end{pmatrix}$$ (最后结果 1 分)

(2)由齐次微分方程 $\dfrac{dx}{dt}=Ax,\ x(0)=C$ 的解公式 $x=e^{tA}C$ (2 分)

得 $x=e^{tA}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+4e^t\\ -2+3e^t\\ -2+2e^t\end{pmatrix}$ ， (1 分)

(3)由方程 $\dfrac{dx}{dt}=Ax+b(t)$ 可得

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x)=e^{-At}(-A)x+e^{-At}\frac{dx}{dt}=e^{-At}[\frac{dx}{dt}-Ax]=e^{-At}b(t)$$

上式两边积分得 $\int_0^t\dfrac{d}{dt}(e^{-At}x)dt=\int_0^t e^{-At}b(t)dt$，

即 $e^{-At}x(t)-x(0)=\int_0^t e^{-A\tau}b(v)dv$，于是解公式为

$$x(t)=e^{At}C+e^{At}\int_0^t e^{-Av}b(v)dv$$ (3 分)