2015～2016学年《矩阵论B》期末考试题

一、填空（共30分，每题2分）

1. 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-2\\0&-1&0&0\\-1&0&-2&1\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$，则$A$的秩等于$\underline{\ 4\ }$，$A$的零度等于$\underline{\ 0\ }$。

2. 若矩阵A的特征矩阵$A(\lambda)$的不变因子是$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda^2+1, d_3(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda+1)^2$，则$A(\lambda)$在$R$上的初等因子是$\underline{(\lambda+1)^2}$，$A(\lambda)$在$C$上的初等因子是$\cancel{\lambda^2+1}$ $(\lambda+i),(\lambda-i).$ $(\lambda+i).(\lambda-i).(\lambda+1)^2$，$A$的最小多项式是$\underline{(A^2+I)(A+I)^2}$ A的Jordan标准型为$\begin{pmatrix}i&&&&&\\&i&&&&\\&&-i&&&\\&&&-i&&\\&&&&-1&1\\&&&&&-1\end{pmatrix}$。

3. 设A为正交矩阵，则A的谱半径$\rho(A)=\underline{\ 1\ }$，$\rho(A^5)=\underline{\ 1\ }$。

4. E为幂等矩阵，则E的特征值为$\underline{0或1}$，若E的迹为5，则$\mathrm{rank}(E)=\underline{\ 5\ }$。

5. 设$A=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&2&1&0\\0&1&2&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，则$\|A\|_F=\underline{\sqrt{14}}$，$\|A\|_2=\underline{\sqrt{9}=3}$，$\|Ax\|_\infty=\underline{\ 8\ }$

6. 设$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，则$A^7-A^5-19A^4+28A^3+6A-4I=\underline{-13A^2+22A-8I}$（$I$表示单位矩阵）

$= \cancel{\begin{pmatrix}9&-4&0\\16&-7&0\\-9&-13&-16\end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix}-21&16&0\\-64&43&0\\19&-3&24\end{pmatrix}$

7. 已知$A=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&-3\\6&10\end{pmatrix}$，则矩阵幂级数$\sum_{k=1}^{\infty}kA^k=\begin{pmatrix}-52&-54\\108&110\end{pmatrix}$。

二、（10分）设$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&2&2\\2&1&2\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的QR分解。

$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{6}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}\sqrt2&\frac13\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{6}&\frac23\end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix}2\sqrt2&\frac{3\sqrt2}{2}&\frac{3\sqrt2}{2}\\0&\frac32\sqrt2&\frac76\sqrt2\\0&0&\frac43\end{pmatrix}.$

三、（10分）设R^4的两个子空间为

$V_1=\{(a_1,a_2,a_3,a_4)|a_1=a_2=a_3, a_i\in R, i=1,2,3,4\}$，

$V_2=L(x_1,x_2), x_1=(1,0,1,0), x_2=(0,1,0,1)$

求（1）V_1+V_2的基与维数；（2）$V_1\bigcap V_2$的基与维数。

(1). V_1+V_2的基，$3=\dim(V_1+V_2)$.
$(1,0,1,0),(0,0,0,1),(0,1,0,0)$

(2). $V_1\cap V_2$的基，$1=\dim(V_1\cap V_2)$.
$(1,1,1,1)$

四、（10分）求$A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$的谱分解。

$A=(-2)\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&-\frac12\\-\frac12&\frac32&-\frac12\\-1&1&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}\frac12&-\frac12&\frac12\\\frac12&-\frac12&\frac12\\1&-1&1\end{pmatrix}$

$$e^{At}=\begin{pmatrix}\frac{e^{2t}+1}{2} & 0 & \frac{1-e^{2t}}{2}\\ \frac{e^{2t}-1}{2} & e^{2t} & \frac{e^{2t}-1}{2}\\ \frac{1-e^{2t}}{2} & 0 & \frac{e^{2t}+1}{2}\end{pmatrix}. \qquad x(t)=\begin{pmatrix}-te^{2t}\\ e^{2t}\\ te^{2t}\end{pmatrix}.$$

五、（10分）已知$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $b(t)=\begin{pmatrix}-e^{2t}\\ 0\\ e^{2t}\end{pmatrix}$, $x(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

（1）求e^{At}；

（2）求微分方程$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+b(t)$满足初始条件$x(0)$的解。

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{3} & 0 & 0\\ \frac{3}{4} & 9 & \frac{39}{4} & -\frac{3}{2}\\ 1 & 0 & 15 & 1.4\\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 4\end{pmatrix}$$

六、（10分）用Gerschgorin定理（盖尔圆定理）隔离矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 9 & 1.3 & -2\\ 1 & 0 & 15 & 1.4\\ 0 & -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$的特征值。（要求画图表示）

$P=diag(1,\frac{3}{4},1,1)$.

$\therefore |\lambda_1-1|<1.\cancel{4}$

$|\lambda_2-9|<3.3$

$|\lambda_3-15|<2.4$

$|\lambda_4-4|<1.4$

七、（10分）已知$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -4 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 6\\ 0 & -3 & 6 & 0\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$.

$A=FG=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

（1）求A的满秩分解；

（2）求A^+；

$$A^+=G^H(F^HAG^H)^{-1}F^H=\begin{pmatrix}\frac{1}{50} & 0 & \frac{1}{25} & 0\\ 0 & \frac{2}{65} & 0 & \frac{-3}{65}\\ 0 & -\frac{4}{65} & 0 & \frac{6}{65}\\ \frac{3}{50} & 0 & \frac{3}{25} & 0\end{pmatrix}$$

（3）用广义逆矩阵方法判断线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$是否有解；

$\because AA^+b=b.\ \therefore$ 有解.

（4）若有解，求线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的极小范数解；若无解，求其最小范数最小二乘解。（要求指出所求的是哪种解）

$X=A^+b=(\frac{1}{10},\frac{1}{5},-\frac{2}{5},\frac{3}{10})^T$.

八、（10分）已知多项式空间$P_3[t]$的子空间$W=span\{f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)\}$。其中$f_1(t)=1+t^3, f_2(t)=t+t^2, f_3(t)=1+t^2, f_4(t)=t+t^3$。

（1）求子空间W的一个基；　$1+t^3,\ t+t^3,\ t^2-t^3$.

（2）对于W中的多项式$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$，定义线性变换$T[f(t)]=(a_0+a_1-a_2-a_3)+a_1t+(a_2-a_3)t^2+(a_0+2a_1-2a_2)t^3$，求线性变换$T$在（1）中所求的基下的矩阵；

$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$(未)

$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$(改).

（3）求W的一个基，使T在该基下的矩阵为对角矩阵。

$(e_1,e_2,e_3)=(1+t^3,\ t+t^3,\ t^2-t^3)$.

$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(e_1,e_2,e_3)\cdot C^{-1}=(e_1,e_2,e_3)\cancel{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\cancel{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t^2-t^3,\ 1+t,\ 1+t^3)}\ (t^2-t^3,\ t+t^2,\ \cancel{2t}\ 2+t^2+t^3)$.

则：$T(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.