2015～2016学年《矩阵论B》期末考试题

一、填空（共30分，每题2分）

1. 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-2\\0&-1&0&0\\-1&0&-2&1\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$，则$A$的秩等于________，$A$的零度等于________。

2. 若矩阵A的特征矩阵$A(\lambda)$的不变因子是$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda^2+1, d_3(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda+1)^2$，则$A(\lambda)$在$R$上的初等因子是__________，$A(\lambda)$在$C$上的初等因子是，$A$的最小多项式是_________，$A$的Jordan标准型为_________。

3. 设A为正交矩阵，则A的谱半径$\rho(A)=$_________，$\rho(A^5)=$_________。

4. E为幂等矩阵，则E的特征值为________，若E的迹为5，则$\mathrm{rank}(E)=$________。

5. 设$A=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&2&1&0\\0&1&2&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，则$||A||_F=$_________，$||A||_2=$_________，$||Ax||_\infty=$_________

6. 设$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，则$A^7-A^5-19A^4+28A^3+6A-4I=$_________。（$I$表示单位矩阵）

7. 已知$A=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&-3\\6&10\end{pmatrix}$，则矩阵幂级数$\sum_{k=1}^{\infty}kA^k=$_________。

二、（10分）设$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&2&2\\2&1&2\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的QR分解。

三、（10分）设R^4的两个子空间为

$V_1=\{(a_1,a_2,a_3,a_4)|a_1=a_2=a_3, a_i\in R, i=1,2,3,4\}$，

$V_2=L(x_1,x_2), x_1=(1,0,1,0), x_2=(0,1,0,1)$

求（1）V_1+V_2的基与维数；（2）$V_1\bigcap V_2$的基与维数。

四、（10分）求$A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$的谱分解。

五、（10分）已知$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}, b(t)=\begin{pmatrix}-e^{2t}\\0\\e^{2t}\end{pmatrix}, x(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

（1）求e^{At}；

（2）求微分方程$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+b(t)$满足初始条件$x(0)$的解。

六、（10分）用Gerschgorin定理（盖尔圆定理）隔离矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&9&1.3&-2\\1&0&15&1.4\\0&-1&0&4\end{pmatrix}$的特征值。（要求画图表示）

七、（10分）已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&2&-4&0\\2&0&0&6\\0&-3&6&0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-3\end{pmatrix}$.

（1）求A的满秩分解；

（2）求A^+；

（3）用广义逆矩阵方法判断线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$是否有解；

（4）若有解，求线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的极小范数解；若无解，求其最小范数最小二乘解。（要求指出所求的是哪种解）

八、（10分）已知多项式空间$P_3[t]$的子空间$W=span\{f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)\}$。其中$f_1(t)=1+t^3, f_2(t)=t+t^2, f_3(t)=1+t^2, f_4(t)=t+t^3$。

（1）求子空间W的一个基；

（2）对于W中的多项式$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$，定义线性变换$T[f(t)]=(a_0+a_1-a_2-a_3)+a_1t+(a_2-a_3)t^3+(a_0+2a_1-2a_2)t^3$，求线性变换$T$在（1）中所求的基下的矩阵；

（3）求W的一个基，使T在该基下的矩阵为对角矩阵。