

矩阵往年考试题 A (二)

注意事项: 考试时间 120 分钟

(注: \mathbf{I} 表示单位矩阵; A^H 表示 A 的共轭转置; $\det(A)$ 代表行列式)

一. 填空(35 分)

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $(A - 2I)^2 =$ _____, A 的极小式 = _____

备用: Jordan 形 $\mathbf{J}_A =$ _____

(2) 若 3 阶阵 $A \neq 2I$, 且 $A^2 - 4A + 4I = 0$, 则极小式 $m(x) =$ _____

(3) \mathbf{I} 是单位矩阵, 则范数 $\|\mathbf{I}\|_1 = \|\mathbf{I}\|_\infty =$ _____; $\cos 0_{n \times n} =$ _____

(4) Hermite 阵的特征根全为 _____, 斜(反)Hermite 阵的特征根必为纯虚数或 _____

(5) 备用: $(A \otimes B)^T - A^T \otimes B^T =$ _____; $(A \otimes B)^H - A^H \otimes B^H =$ _____

(6) 若 $A^2 + 3A + 2I = 0$, 则 A 一定相似于 _____

(7) $\frac{de^{tA}}{dt} =$ _____, $\frac{de^{-tA}}{dt} =$ _____, $\frac{d\sin(At)}{dt} =$ _____

(8) $(A^+ A)^2 =$ _____; $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^+ =$ _____; $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}^+ - (A^+, 0) =$ _____

(9) 设 A 的各列互相正交且模长为 1, 则 $A^+ - A^H =$ _____

(10) $A = (a_{ij})$, 则 $\text{tr}(A^H A) - \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \text{tr}(A A^H) - \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 =$ _____

(11) 若 $\text{tr}(A^H A) = 0$ 则 $A =$ _____

(12) (正规阵性质) 若 A 是上三角形正规阵, 则 A 一定是 _____

(13) 若 $\begin{pmatrix} B_{n \times n} & D \\ 0 & C_{n \times n} \end{pmatrix}$ 为正规阵, 则 $D =$ _____

(14) 备用: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A \otimes B$ 的特征根为 _____

(15) $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 则谱半径(备用)

$\rho(A)$ 范围是_____；且 $\|Ax\|_\infty =$ _____； $\|A\|_\infty =$ _____

(16) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $(e^A)^H e^A =$ _____

(17) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的极小二数解是_____； $A^+ =$ _____.

(18) 设矩阵 A 中各列都可用 B 的列线性表示，则有矩阵 P 使 $A =$ _____

(19) n 阶阵 A 的谱半径 $\rho(A)$ 与矩阵范数 $\|A\|$ 的关系是_____.

(20) A 是方阵 (k 是自然数), 则矩阵范数 $\|A^k\|$, $\|A\|^k$ 的关系为_____

且 $\rho(A^k) - [\rho(A)]^k =$ _____

(21) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 的满秩分解为_____

(22) 备用: 如果 AC , BD 有意义, 则 $(A \otimes B)(C \otimes D) - (AC) \otimes (BD) =$ _____

(23) 备用: 拉直公式 $\overrightarrow{ABC} - (A \otimes C^T) \vec{B} =$ _____

(24) 备用: A, B 为方阵, 则 $AX - XB = C$ 有唯一解 $\iff A$ 和 B 没有公共_____

二.(18 分) 计算下列各题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2i \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (1) 求行范数 $\|A\|_\infty$, 向量范数 $\|Ax\|_\infty$.

(2) 画出 A 的盖尔园, 判断 A 是否可逆

2. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.4 \end{pmatrix}$, 判定收敛性并计算: $(I - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

(2) I 为单位矩阵, 用 Taylor 公式验证 $e^{tI} = e^t I$ 且 $e^{0_{n \times n}} = I$

三.(14 分) 1 已知 $e^{tA} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{5t} + 2e^{2t} & 2e^{5t} - 2e^{2t} \\ e^{5t} - e^{2t} & 2e^{5t} + e^{2t} \end{pmatrix}$ 求矩阵 A (4 分)

2. 若已知 $\sin(At) = B(t)$, 如何用导数公式求 A (写一个公式) (3 分)

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, (1) 求 A 极小式; (2) 计算 $\cos(2\pi A)$ (7 分)

四.(备用) 已知矩阵 A 的最小式为 $(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$, 可知有以下公式(广谱公式):

$$f(A) = f(1)P_1 + f(2)P_2 + f'(2)P, \quad f(x) \text{ 为任意解析式.}$$

用选取 $f(x)$ 的方法求出 P_1, P_2, P 的表达式, 并求 $\cos(2\pi A)$

五.(7 分) 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 1)^T$, $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}_{4 \times 5}$.

求 A^+ 与 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的极小范数解或最佳极小二乘解

六.(9 分) 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的正奇异值与简化奇异值分解, 写出 A^+ 的简化奇异分解

七.1 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 e^{tA} 的谱分解与谱半径 $\rho(A)$ (5 分)

备注: 求 $\ln A$, $\ln(I+A)$ 与 $A^{\frac{1}{10}}$

2 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求一个矩阵 B (具有正的特征根), 使 $B^{10} = A$ (5 分)

附加题 (备用): 简证下题(任选 1 题) (3 分)

(1) $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 证明 $\mathbf{R}(A^H) \perp \mathbf{N}(A)$; (2) $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 可逆, 则 $\|A^{-1}\|_{\infty} \|A\|_{\infty} \geq 1$

.....
例 2. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 写出 $f(A)$ 的谱分解公式; 计算 $\cos(tA)$.

可知 $\sigma(A) = \{\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i\}$. $f(A)$ 的谱分解式为 $f(A) = f(i)G_1 + f(-i)G_2$

$$\text{其中 } G_1 = \frac{A+iI}{2i}, \quad G_2 = \frac{A-iI}{-2i} = \frac{iI-A}{2i}.$$

令 $f(x) = \cos(tx)$ 可得

$$\begin{aligned} \cos(tA) &= \cos(it)(G_1 + G_2) = \cos(it)I = \begin{pmatrix} \cos(it) & 0 \\ 0 & \cos(it) \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} I \quad (\text{用 Euler 公式}) \end{aligned}$$