矩阵 A 班例题

一. 填空

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$，则 $(A-2I)^2=$______ ，极小多项式 $m(x)=$________

(2)写出子空间的维数公式：$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-$__________

(3) **I** 是单位矩阵，则范数 $\|\mathrm{I}\|_1=\|\mathrm{I}\|_\infty=$________

(4) $\dfrac{\mathrm{d}e^{tA}}{\mathrm{dt}}=$________，　　$\dfrac{\mathrm{d}e^{-tA}}{\mathrm{dt}}=$______

二. . 判断正误

(1) $\|A\|$ 是矩阵范数，$\rho(\mathrm{A})$ 是 A 的谱半径. 则 $\rho(A)\le\|A\|$ （　　）

(2) Hermite 阵的特征根全为实数 （　　）

(3) 如果 A 的极小多项式 $m(x)$ 无重根，则 A 可对角化（单阵） （　　）

(4) 如果 A 为方阵，则行列式 $|e^A|=e^{tr(A)}$ （　　）

(5) $(A^H A)$ 的特征根全为非负数 （　　）

(6) $A=(a_{ij})$, 则迹有公式：$\mathbf{tr}(A^H A)=\mathbf{tr}(AA^H)=\sum_{i,j}|a_{ij}|^2$ （　　）

(7) $\cos 0_{n\times n}=0$ （　　）；　$e^A e^B = e^{+A}$ （　　）

二. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ (1)求特征多项式与极小多项式 $m(x)$

(2)写出 $f(A)$ 的广谱公式；利用 $f(x)=e^{tx}$ 求 e^{tA}（见书例子）；

(3)求解 $\dfrac{\mathrm{d}x(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}=Ax(\mathrm{t}),\quad x(0)=(1,0,0)^T$ （见书例子）

一. 求 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的 QR 分解 $A=QR$，其中 $Q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$.

可知 $R=Q^TA=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&4&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\0&3\sqrt{2}&\sqrt{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$，得到

$$A=QR=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\0&3\sqrt{2}&\sqrt{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

四. (2)分别求下列 A 的最小多项式；写出 D 的 Jordan 形并判断 D 能否对角化 ，

$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$， . $\because (A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}=\mathbf{0}$

$\therefore\ m_A(x)=(x-1)(x-2)$

其中 $A=\begin{pmatrix}3&b&b^2\\-b&1&b^2\\-b&-b^2&5\end{pmatrix}$ ($b=\frac{1}{2}$)，判断 A 能否对角化.

$\because (A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}=\mathbf{0}\ \therefore\ m_A(x)=(x-1)(x-2)$

(3) A 的盖尔圆半径为 $r_1=r_2=r_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，3 个盖尔圆盘为

$|Z-3|\le\frac{3}{4}$；$|Z-1|\le\frac{3}{4}$；$|Z-5|\le\frac{3}{4}$ 画出 A 的盖尔圆盘如下：

$\cdots\cdots 0\cdots$□　□　□ $\cdots\to\to\to x$

Pf(证)：可知 3 个盖尔圆中心在轴上，都是独立的圆，且 A 为实数矩阵

故有 3 个不同实特征值；可知 3 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 适合

$\lambda_1\ge 1-\frac{3}{4},\lambda_2\ge 3-\frac{3}{4},\lambda_3\ge 5-\frac{3}{4}$

$$\Longrightarrow\quad |A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ge\frac{1}{4}\times\frac{9}{4}\times\frac{17}{4}=\frac{9\times 17}{64}.$$

A 有 3 个不同特征值，故 A 能对角化。

六.（本题共 10 分，每小题 5 分）

(1)设 $A=\begin{bmatrix}0&\frac{-1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$， 计算 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$

解 (1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|A\|=0.5<1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 绝对收敛。

由公式 $(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} A^k \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k=\frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

七． 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1)求 A 满秩分解 $A=\alpha\alpha^T$，其中 α 为列向量，并求 A 的特征根 $\sigma(A)$

$A=\alpha\alpha^T$ 的根（谱)为 $\lambda(A)=\{(\alpha^T\alpha),\ 0,\ 0\}=\{6,\ 0,\ 0\}$

(2)求广义逆 A^+ 与 $Ax=\mathbf{b}$ 的最佳极小二乘解.

解 (1) 秩 $r(A)=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 2)=\alpha\alpha^{\mathbf{T}}$, 其中 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\because$ 秩 $r(A)=1 \Rightarrow A^+=\frac{1}{\sum|a_{ij}|^2}A^{\mathbf{T}}=\frac{1}{36}A^{\mathbf{T}}=\frac{1}{36}A$.

(2)$\because$ $Ax=\mathbf{b}$ 是矛盾的，$\therefore$有最佳极小二乘解

$$x=A^+\mathbf{b}=\frac{1}{36}A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

八． 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，写出 A 的极小多项式；分别求 A, $f(A)$ 的谱分解公式

($f(x)$ 是解析函数)；计算 $\sin(\frac{\pi}{2}A)$.

解

$\because (A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}=\mathbf{0}$

$\therefore\ m_A(x)=(x-1)(x-2)$； 令 $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=2$

$$G_1=\frac{\cancel{(A-I)}(A-2I)}{(1-2)}=-(A-2I)=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\ \mathbf{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

令

$$G_2=\frac{(A-I)\cancel{(A-2I)}}{2-1}=A-I=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\ \mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

A，$f(A)$ 谱分解公式为 $A=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2=G_1+2G_2$

$$f(A)=f(\lambda_1)G_1+f(\lambda_2)G_2\text{；}$$

令 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x),\ \ f(\lambda_1)=\sin(\frac{\pi}{2})=1,\ f(\lambda_2)=0$

$$\therefore\ f(A)=\sin(\tfrac{\pi}{2}A)=1G_1+0G_2=G_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\ -1&0&1\\ -1&0&1\end{pmatrix}.$$

九. 若 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 3 阶阵 A 的特征根，设 $f(x)$ 是解析函数，且 $f(A)$ 有定义.

(1)试用许尔(Schur)公式证明 $f(A)$ 的特征根为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),f(\lambda_3)$.

Pf(证) (1) $\because$ 许尔(Schur)公式：$A\sim B=\begin{pmatrix}\lambda_1&&*\\ &\lambda_2&\\ 0&&\lambda_3\end{pmatrix}$(相似)

$$\Longrightarrow f(A)\sim f(B)=\begin{pmatrix}f(\lambda_1)&&*\\ &f(\lambda_2)&\\ &&f(\lambda_3)\end{pmatrix}\ \text{(相似)}$$

$\Longrightarrow f(A)$ 的特征根为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),f(\lambda_3)$.

(2) 令 $f(x)=e^x \Longrightarrow f(A)=e^A$ 的特征根为 $e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},e^{\lambda_3}$

$$\Longrightarrow |e^A|=e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}e^{\lambda_3}=e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=e^{tr(A)}.$$

7. 求 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}$ 的奇异值与简化奇异分解 $A=P\Delta Q^H$；利用 $A^+=Q\Delta^+P^H$

计算 A^+

7．已知 $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}_{5\times4}$，$\mathbf{b}=(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$

（1）求广义逆 A_1^+ 与 A_2^+；　（2）求 $Ax=$ b 的最佳最小二乘解

3　已知 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\3&-3\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}2\\0\\6\end{bmatrix}$，（1）求 A 的奇异值分解，（2）求 A 的广义逆 A^+

（3）求 $Ax=b$ 的极小范数解或最小二乘解

$$r(A)=1\Rightarrow A^+=\frac{1}{\sum|a_{ij}|^2}A^H=\tfrac{1}{20}A^T=\tfrac{1}{20}\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&0&-3\end{pmatrix}$$

可知 $Ax=b$ 是相容的，极小范数解为 $y=A^+b=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$（？？）

计算可得 A 的奇异值分解为（奇异值为 $\sqrt{20}$）

$$A=PDQ^H,P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&0&\frac{-3}{\sqrt{10}}\\0&1&0\\\frac{3}{\sqrt{10}}&0&\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix},D=\begin{bmatrix}\sqrt{20}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},Q=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

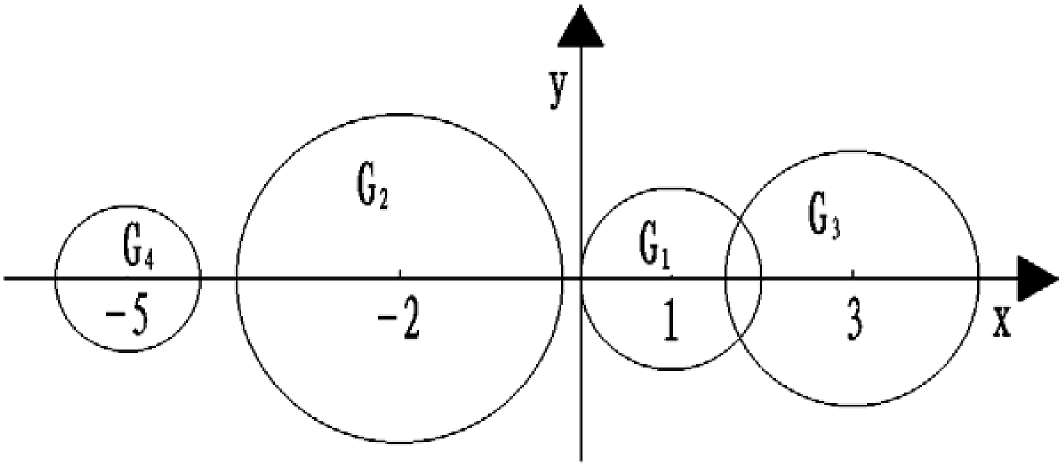
4.　已知 $A=\begin{bmatrix}1/2&1\\0&1/3\end{bmatrix}$。（1）证明 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 绝对收敛，（2）计算 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$.

（1）可知，谱半径 $\rho(A)=\frac{1}{2}<1\Rightarrow\sum A^k$ 绝对收敛

（2）$\sum_{k=0}^{\infty}A^k=(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&-1\\0&2/3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\0&3/2\end{pmatrix}$

2．(1)画出下列矩阵 **A** 的盖尔圆盘;　证明 A 至少有两个实特征值**.**

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0.2}&\mathbf{0.5}&\mathbf{0.3}\\\mathbf{0.6}&-2&\mathbf{-1}&\mathbf{0.2}\\0.3&\mathbf{0.4}&\mathbf{3}&\mathbf{0.7}\\\mathbf{0.2}&\mathbf{0.3}&\mathbf{0.3}&-5\end{pmatrix}.$$



A 的 4 个盖尔圆为： $G_1: |z-a_{11}| = |z-1| \le 1 = R_1$，

$G_2: |z-a_{22}| = |z+2| \le 1.8 = R_1$

$G_3: |z-a_{33}| = |z-3| \le 1.4 = R_3$， $G_4: |z-a_{44}| = |z+5| \le 0.8 = R_4$. 如图示。

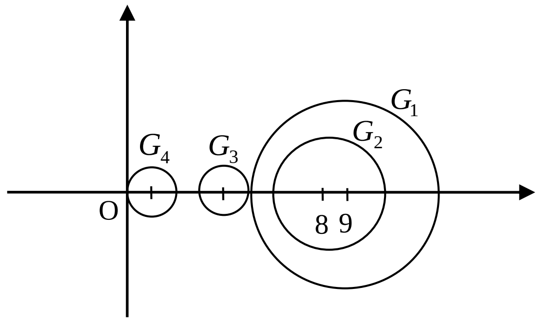
特别：一个孤立 Ger 圆中恰有一个特征值

A 至少有两个实特征值（利用实系数方程的虚根成双出现）

例 画出矩阵 **A** 的盖尔圆盘; 证明 A 至少有两个实特征根

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解：A 的盖尔圆 $G_1: |z-9| \le 4$，$G_2: |z-8| \le 2$，$G_3: |z-4| \le 1$，$G_4: |z-1| \le 1$.



如图，G_4 为孤立圆，有一个实特征值，$G_1 \cup G_2 \cup G_3$ 中含 A 的另三个特征值，其中必有一个为实特征值（否则 $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ 将出现四个特征值. 矛盾. ）

参考（例子） 设$A=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{pmatrix}$，求$\sin A$.

解 $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$，$(A-2I)(A-I)\neq 0$，最小式为$(\lambda-2)^2(\lambda-1)$），

可写广谱公式：$f(A)=f(1)G_1+f(2)G_2+f'(2)G_3$， $f(x)$为任意解析式

令 $f(x)=(x-2)^2$, 可知 $f(1)=1,\ f(2)=f'(2)=0$ 代入公式可得

$$G_1=(A-2I)^2=\cdots$$

再令 $f(x)=(x-2)(x-1)$, 可知 $f'(x)=(x-1)+(x-2),\ f'(2)=1$

代入公式可得 $G_3=(A-2I)(A-I)=\cdots$

令 $f(x)=(x-1)$, 可知 $f(1)=0,\ f(2)=1,\ f'(x)\equiv 1,\ f'(2)=1$

代入公式可得 $G_2+G_3=(A-I)$， $G_2=(A-I)(3I-A)=\cdots$

得公式：$f(A)=f(1)(A-2I)^2+f(2)(A-I)(3I-A)+f'(2)(A-2I)(A-I)$

令 $f(x)=\sin x,\quad f'(x)=\cos x$ 代入公式得

$$\sin A=f(A)=f(1)G_1+f(2)G_2+f'(2)G_3$$
$$=\begin{pmatrix}\sin 2 & 12\sin 1-12\sin 2+13\cos 2 & -4\sin 1+4\sin 2\\ 0 & \sin 2 & 0\\ 0 & -3\sin 1+3sin2 & \sin 1\end{pmatrix}$$

B 班原题 设$A=\begin{pmatrix}1+i&2&-1\\-i&-1&2+i\\3&1+2i&2i\end{pmatrix}$（$i^2=-1$），$x=\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}$

（1）计算$\|A\|_1$与$\|A\|_\infty$. （2）计算$\|Ax\|_1$，$\|Ax\|_2$及$\|Ax\|_\infty$.

解：1）、$\|A\|_1=\max\limits_{1\le i\le 3}\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{ji}|=4+\sqrt{2}$（列范数），$\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le 3}\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{ij}|=5+\sqrt{5}$（行范数）

2）、$Ax=(i-2,i+3,5i)^T$ 所以$\|Ax\|_1=|i-2|+|i+3|+|5i|=\sqrt{10}+\sqrt{5}+5$

$\|Ax\|_2=\sqrt{|i-2|^2+|i+3|^2+|5i|^2}=\sqrt{40}$，$\|Ax\|_\infty=\max\{|i-2|,|i+3|,|5i|\}=5$

补充（10 分）1.已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\\3 & -3\end{bmatrix}$，求 A 的正奇异值与奇异值分解

.答： $A^H A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\-1 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\\3 & -3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -10\\-10 & 10\end{pmatrix}=10\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$

计算可得 $A^H A$ 的 2 个根为｛20， 0｝，其中一个特征向量为

$X_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ； （ 另一个向量为 $X_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ）

可知正奇异值为 $\sqrt{20}$； 计算可得 A 的奇异值分解为

$$A=PDQ^T,P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\0 & 1 & 0\\\frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix},D=\begin{bmatrix}\sqrt{20} & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$ 即

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\0 & 1 & 0\\\frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{20} & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\0 & 1 & 0\\\frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{20} & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

也可得**简化奇异值分解为** $A=P\Delta Q^H=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\0\\\frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}(\sqrt{20})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}^H$

2． $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\\3 & -3\end{bmatrix}$， $b=\begin{bmatrix}2\\0\\6\end{bmatrix}$(1)求广义逆 A^+；(2)求 $Ax=b$ 的极小范数解；

解答: 因为秩 $r(A)=1\Rightarrow A^+=\dfrac{1}{\sum|a_{ij}|^2}A^H=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\-1 & 0 & -3\end{pmatrix}$

因为 $Ax=b$ 是相容的, 可知 极小范数解为 $y=A^+b=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

六. 1 $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$；(2) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$；,求 A 的奇异值分解或简化奇异值分解；

参考教材 47 页例题的 QR 分解**方法；再补充一个例子**

例：求下矩阵 A 的 QR（也叫 UR）分解，并说明 R=Q^{H}A 是否成立？

求 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$的 QR 分解 $A=QR$，其中 $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$.

可知 $R=Q^H A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，得到

$$A=QR=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

参考教材 111 页例题 2；利用 Ger 圆定理证明

参考教材 114 页习题 9：利用 Ger 圆定理证明 (1) A 与对角矩阵的相似；(2) A 的特征值全为实数；