# 第二章 尺度分析与自由大气中的风场

## 2.1 尺度概念和大气运动的分类

### 2.1.1 尺度概念

**尺度** 具有代表意义、能反映该物理量**一般大小**的量值，又称**特征值**。其大小是用数量级来表示的。

> **示例**
>
> 水平风速在 5~25$m/s$ 之间，特征值为 10$m/s$。$u = Uu^*, v = Uv^*$
> 其中，$U\sim10^1 m/s$是特征值 $Q$，$u^*$和$v^*$为数值在 0.5~2.5 之间的无量纲量 $q^*$。

**物理量表示** 将任一物理量写作： $q = Qq^*$

**特征量** $Q$ 表示该物理量的一般大小，常量，有量纲。 量纲不等同于单位，它表示了物理量的种类

**无量纲量** $q^*$ 无量纲量，量级在$10^0$，表示物理量的具体大小，变量，没有量纲。
比较物理量的大小，实际就是比较特征量的大小。这里的 $q$ 是广义的，包括气象要素及方程各项。

> **示例**
>
> 已知 $u = Uu^*, t = \tau t^*$，则：$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial Uu^*}{\partial \tau t^*} = \frac{U}{\tau}\frac{\partial u^*}{\partial t^*}$，$\frac{U}{\tau}$ 是 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的特征量，$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}$是其无量纲量。

### 2.1.2 大气运动的分类

**水平尺度** 根据大气运动的水平尺度，大气运动可以分为（单位为 km）：

| | | |
|---|---|---|
| **行星尺度$10^4$** | **长波**、副热带、高压 | 热带行星、尺度波动 （介于行星尺度与天气尺度之间） |
| **天气尺度$10^3$** | 温带气旋、反气旋 | 云团、热带气旋 |
| **中尺度$10^2$** | 锋面、背风波、飑线 | 中尺度对流群 |
| **小尺度$10^1$** | 积雨云、龙卷 | 对流单体 |
| **微尺度$10^0$** | 边界层涡动 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **大尺度** | $L\sim10^6m$ | $D\sim10^4m$ | $U\sim10\ m/s$ | $\tau\sim10^5s$ | **大尺度时间尺度为水平尺度/速度尺度** |
| **中尺度** | $L\sim10^5m$ | $D\sim10^4m$ | $U\sim10\ m/s$ | $\tau\sim10^5s$ | 中尺度的时间尺度并不是这样 |
| **小尺度** | $L\sim10^4m$ | $D\sim10^{3\sim4}m$ | $U\sim10\ m/s$ | $\tau\sim10^4s$ | 小尺度也不是这样 |

**简化思想** **大气运动非常复杂→尺度的多样性→不同尺度的运动→运动性质不一样**，如何用可以描述一切现象的方程组来反应这种性质的不同？所以需要进行化简，来反映出不同尺度运动的独特性质。

**简化意义** 从物理角度看：影响大气的因子很多，重点不突出。
从数学角度看：大气运动基本方程组是一个高度非线性的偏微分方程组，求解困难。
本课程的研究目的：大尺度的大气运动。因此，需要简化大气运动基本方程组。

> **奥卡姆剃刀原理**
>
> 在所有能够完美描述已有观测的可计算理论中，较短的可计算理论在估计下一次观测结果的概率时具有较大权重。同时，其假设需要尽可能地少，以便适用于更大的范围。

**简化方法** 从物理上看：抓住主要因子，忽略次要因子，把握运动的物理本质和基本性质，反映物理规律更清晰。
从数学上看：保留各方程中的大项，略去小项，使得简化后的方程组简单，便于数学处理。

**尺度分析** Charney(1948)首先倡导利用**尺度分析法**，对大气运动基本方程组进行分析与简化。
Burger(1958)等人进一步发展完善，这一方法在现代大气动力学和数值天气预报研究中广泛应用。

# 2.2 基本方程组的尺度分析

## 2.2.1 分析基本概念

**尺度分析法** 尺度分析法是依据表征**某类运动系统**的运动状态和热力状态各物理量的特征值，估计大气运动方程中各项量级大小的一种方法。根据尺度分析的结果，结合物理上考虑，略去方程中量级较小的项，便可得到简化方程，并可分析运动系统的某些基本性质。

**分析目的** 对方程进行简化，突出主要因子，研究运动的主要特征。是理论分析的第一步。

**基本规则** 尺度的大小是用数量级表示的，在尺度分析中，必然涉及数量级的运算，故要明确**数量级运算规则**：

① **几个变量之和**数量级，认为**最大项的量级**就是变量之和的数量级。

② 有 **2-3 个变量的数量级相同**，如果它们之间**没有依从关系**，则其和(差)的数量级和**单个数量级相同**；如果**有依从关系**，则其和的数量级**可以小于单个变量**的数量级，究竟多大要进一步分析。

例如：水平散度 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\leq\frac{U}{L}$ 对大尺度运动而言，$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 两项符号一般相反。

③ 两个**变量乘积**的数量级一般为变量**数量级的乘积**。

④ 在一个方程式中，数量级最大项**至少要有两项**。如果方程中只有一个最大项，不是各项量级估计不正确，就是原方程不成立。

**基本步骤** ① 写出方程中各项的**特征值** ② 根据运动的类型写出各项的**数量级**

③ 略去小项、保留大项得到各级近似简化方程

④ 根据简化的结果，揭示出不同类型运动的基本性质和特点。

**需求尺度** 在尺度分析中，为了确定大气运动方程中各项的量级，应确定以下尺度：

**① 空间和时间尺度** **② 各物理量尺度** **③ 各物理量变动尺度**

## 2.2.2 物理量尺度

### 2.2.2.1 基本物理量尺度情况

**运动尺度** 物理量：**水平速度尺度 $U$** **铅直速度尺度 $W$**

变动尺度：观测表明，速度场的变动尺度可以达到本身的量级：$\Delta u\sim U,\Delta v\sim U,\Delta w\sim W$

**空间尺度** 物理量：**水平(长度)尺度 $L$** **铅直(厚度)尺度 $D$** 空间尺度没有变动

涡旋系统的水平尺度取其**特征半径**，波动则为**波长的 1/4**。

$$\frac{\partial u}{\partial x}\sim\frac{\partial u}{\partial y}\sim\frac{\partial v}{\partial x}\sim\frac{\partial v}{\partial y}\sim\frac{U}{L}\qquad\frac{\partial u}{\partial z}\sim\frac{\partial v}{\partial z}\sim\frac{U}{D}\qquad\frac{\partial w}{\partial x}\sim\frac{\partial w}{\partial y}\sim\frac{W}{L}\qquad\frac{\partial w}{\partial z}\sim\frac{W}{D}$$

**时间尺度** 物理量：运动系统演变**经历一个阶段**所需要的特征时间，用**符号$\tau$**表示，一般表示为 $\tau=L/C$

对于**移速不太快**的系统，一般认为$C\sim U$，那么：$\tau=L/U$ 称为**平流时间尺度**

大尺度系统：$\tau=L/U$ $\qquad\frac{\partial u}{\partial t}\sim\frac{\partial v}{\partial t}\sim\frac{CU}{L}\sim\frac{U^2}{L}\qquad\frac{\partial w}{\partial t}\sim\frac{CW}{L}\sim\frac{UW}{L}$

中小尺度系统：$\tau\geq L/U$

**热力学尺度** $p,\rho,T,\theta$等。 变动尺度：时空变动值相对于其本身很小，达不到本身的量级。

可以分为两部分： ① 表征**基本状态**的基本热力学变量（仅与高度$z$有关）

② **扰动量**：相对于基本量的偏差（时空函数）

**气压** $p=\bar{p}(z)+p'(x,y,z,t)\sim P+\Delta P$ **密度** $\rho=\bar{\rho}(z)+\rho'(x,y,z,t)\sim\pi+\Delta\pi$

**温度** $T=\bar{T}(z)+T'(x,y,z,t)\sim T^*+\Delta T^*$ **位温** $\theta=\bar{\theta}(z)+\theta'(x,y,z,t)\sim\Theta+\Delta\Theta$

① **基本热力学变量随高度**的改变量 $\frac{d(\bar{x})}{dz}$ 可以达到**本身的量级**。

② **扰动热力学变量**的**时空变动值** $\frac{\partial(x')}{\partial x}$ 可达到**本身的量级**。

**分析说明：量级分析**

先定义基本状态的铅直厚度尺度（标高）$H=\frac{RT^*}{g}\sim 10^4 m$。则气压变换为 $p=\rho RT \Rightarrow P\sim \pi RT^*\sim \pi gH$

$\frac{d\bar{p}}{dz}=-\bar{\rho}g\sim \pi g\sim \frac{P}{H}$　$\frac{d\ln\bar{p}}{dz}\sim\frac{1}{H}\Rightarrow\frac{d\ln\bar{p}}{dz}\sim\frac{1}{H}$　基本热力学变量随高度的改变量可以达到本身的量级

据观测：扰动热力学变量的时空变动值可以达到本身的量级

空间：$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial[\bar{p}(z)+p']}{\partial x}=\frac{\partial p'}{\partial x}\sim\frac{\Delta P}{L}\sim\frac{\partial p}{\partial y}$，时间：$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial p'}{\partial t}\sim\frac{\Delta P}{\tau}$，高度：$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial[\bar{p}(z)+p']}{\partial z}=\frac{\partial\bar{p}(z)}{\partial z}+\frac{\partial p'}{\partial z}\sim\pi g+\frac{\Delta P}{D}$

### 2.2.2.2 基本方程的物理量约束关系

**尺度分析**　各个物理量尺度不是孤立的，它们必须受基本方程组的制约，通过分析方程中各项量级，可以找到这些物理量之间的约束关系。

**基本概念**　已知量：一般认为$\boldsymbol{L,D,\tau,U}$可根据不同类型运动选定，**基本状态热力学变量、标高等**是已知的。
求解量：**垂直速度$\boldsymbol{W}$**、**各类扰动尺度$\boldsymbol{\Delta P}$〃$\boldsymbol{\Delta\pi}$〃$\boldsymbol{\Delta T^*}$**等。

**连续方程**　第四条规则：$\frac{W}{D}\le\frac{U}{L}\Rightarrow \boldsymbol{W\le\frac{DU}{L}}$（给出$W$上限）　解释大尺度运动：$L\gg D\Rightarrow W\ll U$，准水平运动

**连续方程的尺度分析与垂直速度约束关系的建立**

假设大气不可压缩，$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0\Rightarrow\frac{d\ln\rho}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$　利用小扰动假设：

$\ln\rho=\ln(\bar{\rho}+\rho')=\ln\bar{\rho}\left(1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)=\ln\bar{\rho}+\ln\left(1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)$　因为 $\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\ll 1\Rightarrow\ln\left(1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)\approx\frac{\rho'}{\bar{\rho}}$

所以 $\ln\rho\approx\ln\bar{\rho}+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}$　回代原式 $\Rightarrow\frac{d\ln\bar{p}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho'}{\bar{p}}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ 对该式执行尺度分析：

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} w\frac{\partial\ln\bar{p}}{\partial z} & +\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho'}{\bar{p}}\right) & +\vec{V}_h\cdot\nabla_h\left(\frac{\rho'}{\bar{p}}\right) & +w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho'}{\bar{p}}\right) & +\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} & +\frac{\partial w}{\partial z}=0 \\ \frac{W}{H}\le\frac{W}{D} & \frac{\Delta\pi}{\pi\tau}\ll\frac{U}{L} & \frac{\Delta\pi}{\pi}\frac{U}{L}\ll\frac{U}{L} & \frac{\Delta\pi}{\pi}\frac{W}{D}\ll\frac{W}{D} & \frac{U}{L} & \frac{W}{D}\end{array}}$$

为了满足方程平衡，最后两项必须量级相当。同时因为 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\le\frac{U}{L}$，所以 $\frac{W}{D}\le\frac{U}{L}$ 或 $W\le\frac{D}{L}U$，这给出了$W$的上限。

**水平方程**　水平运动方程的尺度分析：$\boldsymbol{\frac{\Delta P}{\pi L}\approx\frac{U^2}{L}+f_0U}$　**力的平衡**取决于**特征惯性力项**和**科氏力项**的比值

**推导**

$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ 各项尺度分析为 $\frac{U}{\tau}+\frac{U^2}{L}+\frac{U^2}{L}+\frac{WU}{D}\Rightarrow\frac{U^2}{L}$，$fU$，$\frac{\Delta P}{\pi L}$ 即为上式

为了便于理解，此处引入罗斯贝数$Ro=U/f_0L$，表示惯性力和科氏力的相对重要性。

① 大尺度运动有：$\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}\ll 1$，$\boldsymbol{\frac{\Delta P}{\pi L}\approx f_0U}\Rightarrow\frac{\Delta P}{\pi}\sim f_0UL\sim 10^3m^2/s^2$

压力变化的相对尺度：$P\sim\pi gH$，$\Delta P\sim\pi f_0UL\Rightarrow\frac{\Delta P}{P}\sim\frac{f_0LU}{gH}\sim 10^{-2}$　$P\sim 10^5N/m^2$　$\pi\sim 10^0kg\cdot m^{-3}$

② 中小尺度运动有：$\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}\ge 1\Rightarrow\boldsymbol{\frac{\Delta P}{\pi L}\approx\frac{U^2}{L}}$

**状态方程**　$\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{\Delta T^*}{T^*}\sim\frac{\Delta\pi}{\pi}\sim\frac{\Delta P}{P}$　大尺度运动：$\boldsymbol{\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{\Delta T^*}{T^*}\sim\frac{\Delta\pi}{\pi}\sim\frac{\Delta P}{P}\sim\frac{f_0LU}{gH}\sim 10^{-2}}$

**绝热方程**　$\frac{U\Delta\Theta}{L\Theta}\sim\frac{N^2}{g}W\Longrightarrow W\sim\frac{Ug}{N^2L}\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\le 10^{-1}\frac{D}{L}U$　大尺度运动：$\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{f_0LU}{gH}\Rightarrow W\sim\frac{f_0U^2}{HN^2}\sim 10^{-2}ms^{-1}$

水平平流引起的局地温度变化率～垂直运动引起的绝热加热/冷却率。
将其他热力学扰动与气压扰动联系起来（$\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{\Delta P}{P}$），并验证垂直速度 $W$ 的估计是自洽的。

### 2.2.2.3 中纬度大尺度运动的特征尺度和环境参数

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 水平尺度 | $L\sim10^6\ m$ | 时间尺度 | $\tau\sim L/U\sim10^5s$ | 铅直厚度尺度 | $D\sim H\sim10^4m$ |
| 水平速度尺度 | $U\sim10\ ms^{-1}$ | 铅直速度尺度 | $W\sim10^{-2}\ ms^{-1}$ | 大气标高 | $H\sim10^4m$ |
| 中纬度地转参数 | $f_0\sim10^{-4}\ s^{-1}$ | 重力加速度 | $g\sim10\ ms^{-2}$ | 层结参数 | $N\sim10^{-2}s^{-1}$ |
| 空气粘性系数 | $\gamma\sim10^1m^2s^{-1}$ | 气压尺度 | $P\sim10^5N/m^2$ | 温度尺度 | $T^*\sim10^2K$ |
| 密度尺度 | $\rho_0\sim\pi\sim10^0kg\cdot m^{-3}$ | | 温度水平变动尺度 | $\delta_hT^*\sim10K$ | |
| 气压水平变动尺度 | $\delta_hP\sim10^3N/m^2$ | | 气压垂直变动尺度 | $\delta_zP\sim P\sim10^5N/m^2$ | |
| 扰动密度变动尺度与密度尺度之比 | $\Delta\pi/\pi\sim10^{-2}$ | | | | |
| 扰动气压变动尺度与密度尺度之比 | $\Delta P/\pi\sim10^3m^2/s^2$ | | | | |

## 2.2.3 基本方程组的简化

**基本特点** 根据实际观测，中纬度大尺度大气运动具有以下特点：**准定常，准水平，准地转平衡，准静力平衡，准水平无辐散，涡旋运动**。方程简化是否正确，与实际观测比较来验证。

### 2.2.3.1 运动方程的简化

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **x方向** | 方程 | $\frac{\partial u}{\partial t}$ | $+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}$ | $+w\frac{\partial u}{\partial z}$ | $=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ | $-\tilde{f}w$ | $+fv$ | $+\gamma\nabla^2u$ | |
| | 各项尺度 | $U/\tau$ | $U^2/L$ | $WU/H$ | $\frac{1}{\rho_0}\frac{\delta_hP}{L}$ | $f_0W$ | $f_0U$ | $\gamma\frac{U}{H^2}$ | |
| | 数量级 | $10^{-4}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-3}$ | $10^{-6}$ | $10^{-3}$ | $10^{-6}$ | 单位：$ms^{-2}$ |

其中摩擦力项的解释：$\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\sim\frac{U}{L^2}+\frac{U}{L^2}+\frac{U}{H^2}\sim\frac{U}{H^2}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **y方向** | 方程 | $\frac{\partial v}{\partial t}$ | $+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}$ | $+w\frac{\partial v}{\partial z}$ | $=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$ | $-fu$ | $+\gamma\nabla^2v$ | | |
| | 各项尺度 | $U/\tau$ | $U^2/L$ | $UW/H$ | $\frac{1}{\rho_0}\frac{\delta_hP}{L}$ | $f_0U$ | $\gamma\frac{U}{H^2}$ | | |
| | 数量级 | $10^{-4}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-3}$ | $10^{-3}$ | $10^{-6}$ | 单位：$ms^{-2}$ | |
| **z方向** | 方程 | $\frac{\partial w}{\partial t}$ | $+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}$ | $+w\frac{\partial w}{\partial z}$ | $=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$ | $-g$ | $+\tilde{f}u$ | $+\gamma\nabla^2w$ | |
| | 各项尺度 | $W/\tau$ | $UW/L$ | $W^2/H$ | $\frac{1}{\rho_0}\frac{\delta_zP}{H}$ | $G$ | $f_0U$ | $\gamma\frac{W}{H^2}$ | |
| | 数量级 | $10^{-7}$ | $10^{-7}$ | $10^{-8}$ | $10^1$ | $10^1$ | $10^{-3}$ | $10^{-9}$ | 单位：$ms^{-2}$ |

**分子粘性力** **分子粘性力可以忽略**。分子粘性很小，在短期天气过程不计，气候学中因为能量需要耗散，不能忽略

**高层：**层流，分子粘性力和湍流粘性力均可忽略（自由大气）

**低层：**湍流粘性力重要，分子粘性力可略去（湍流边界层）

**零级近似** 只保留量级最大项，得到

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv$$
$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-fu$$

**中纬度大尺度运动具有准地转特性**

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g$$

**中纬度大尺度运动具有准静力平衡特性**

如果三个运动方程中速度都取为零$(u,v,w=0)$，正好就是上式，故称为**流体静力平衡方程**。

然而，零级近似时并非没有速度，而是指没有加速度的存在。

**压力与高度** **垂直气压梯度力＝浮力**，大尺度运动中，气压相当精确地等于该点以上单位横截面积气柱的重量。

**一级近似**

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-fu$$

铅直运动的影响可略去不计。

零级近似方程不含有时间导数项，是诊断方程，不能作为预报方程，而一级近似可作为预报方程。

### 2.2.3.2 连续方程的简化

**连续方程** $\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}+\boldsymbol{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$ 原始方程中**密度可以变为基本量+扰动量**

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+u\frac{\partial\rho'}{\partial x}+v\frac{\partial\rho'}{\partial y}+w\frac{\partial\rho'}{\partial z}+w\frac{\partial\bar\rho}{\partial z}+\bar{\boldsymbol{\rho}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\boldsymbol{\rho'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

| 方程 | $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right)$ | $+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right)$ | $+\frac{w}{\bar\rho}\frac{\partial\rho'}{\partial z}$ | $+\boldsymbol{w\frac{\partial\ln\bar\rho}{\partial z}}$ | $+\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}}$ | $+\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial z}}$ | $+\frac{\rho'}{\bar\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right.$ | $\left.+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 尺度 | $\frac{U}{L}\frac{\Delta\pi}{\pi}$ | $\frac{U}{L}\frac{\Delta\pi}{\pi}$ | $\frac{W}{H}\frac{\Delta\pi}{\pi}$ | $\boldsymbol{\frac{W}{H}}$ | $\boldsymbol{\frac{U}{L}}$ | $\boldsymbol{\frac{W}{H}}$ | $\frac{U}{L}\frac{\Delta\pi}{\pi}$ | $\frac{W}{H}\frac{\Delta\pi}{\pi}$ |
| 数量级 | $10^{-7}$ | $10^{-7}$ | $10^{-8}$ | $\boldsymbol{10^{-6}}$ | $\boldsymbol{10^{-5}}$ | $\boldsymbol{10^{-6}}$ | $10^{-7}$ | $10^{-8}$ |

**零级简化** $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ 水平无辐散，**中纬度大尺度运动具有准水平无辐散特性**

**一级简化** $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial\ln\bar\rho}{\partial z}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\bar\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial\bar\rho w}{\partial z}=0}$

利用上、下边界条件 $z=0, w=0;\ z\to\infty, \bar\rho w=0$ 可得：$\int_0^\infty \bar\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz=0$

这表明上下层速度辐合、辐散相互补偿，**整层大气是水平无辐散的**，这就是著名的**达因补偿原理**。

### 2.2.3.3 热力学方程的简化

**方程变换**

考虑短期天气过程，可将大气运动视为绝热，不存在非绝热加热项，即 $c_p\frac{dT}{dt}-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=0$，展开：

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{1}{c_p\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0$ 引入静力平衡方程 $\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$

可得: $-\frac{w}{c_p\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{wg}{c_p}=\gamma_d w$ (考虑空气干绝热递减率 $\gamma_d=-\frac{dT}{dz}=\frac{g}{c_p}\approx 0.967K/100m$)

环境温度递减率 $\gamma=-\frac{\partial T}{\partial z}\approx 0.65K/100m$ $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w(\gamma_d-\gamma)-\frac{RT}{c_p p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0$

**尺度分析**

| 方程 | $\frac{\partial T}{\partial t}$ | $+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}$ | $+w(\gamma_d-\gamma)$ | $-\frac{RT}{c_p p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}\right.$ | $\left.+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 尺度 | $\boldsymbol{\frac{\delta_h T^*}{\tau}}$ | $\boldsymbol{\frac{U\delta_h T^*}{L}}$ | $\boldsymbol{W(\gamma_d-\gamma)}$ | $\frac{RT^*}{c_p\tau}\frac{\delta_h P}{P}$ | $\frac{RT^*U}{c_p}\frac{\delta_h P}{P}$ |
| 数量级 | $\boldsymbol{10^{-5}}$ | $\boldsymbol{10^{-5}}$ | $\boldsymbol{10^{-5}}$ | $10^{-6}$ | $10^{-6}$ |

温度的局地变化、温度平流和垂直运动所引起的温度变化为最大三项，空气膨胀对外做功项为最小项。

**零级简化** $\boldsymbol{\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w(\gamma_d-\gamma)=0}$ 在天气尺度运动中，**温度的局地变化**主要是由于**温度平流和垂直运动**所引起的温度变化引起的。在寒潮等情形下，温度平流是主要的影响因子。

### 2.2.3.4 总结

**平衡方程组**

$$\begin{cases}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv=0 & \text{水平运动方程，地转平衡}\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-fu=0 & \text{水平运动方程，地转平衡}\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g=0 & \text{垂直运动方程，静力平衡}\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 & \text{连续方程，水平速度散度为零}\end{cases}$$

**不含时间变化**，不含有热力学方程

揭示了**中纬度**($f=10^{-4}$)、**准定常**(无$t$)、**准水平**（无$w$）、**准地转平衡、准静力平衡、准水平无辐散**（连续方程无依从关系得到的）、**自由大气**(无摩擦力)**的大尺度运动、涡旋运动**(任意二维运动可以表示为无辐散涡旋流和无旋辐散流的组合，由于无辐散，所以定常涡旋)

### 2.2.4 无量纲方程及参数

#### 2.2.4.1 无量纲方程

**概述** 将动力学方程无量纲化后，一些由**基本尺度** $L, D, \tau, U$ 和**环境变量尺度** $f_0, g, H$ 组成的无量纲数，这些无量纲数有着明确的物理意义。无量纲方程和无量纲参数在大气运动进行动力分析时十分有用。

**步骤** ① 把方程各项写作**特征量×无量纲量**的形式。

② 用方程中某一项的特征量同除方程的每一项（量纲齐次性原理）

无量纲方程中各项前面的系数：无量纲数体现了各项的相对重要性。

**方程** $$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t^*}+R_o\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\frac{D}{H}\frac{1}{R_i}w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}=-R_1\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p'^*}{\partial x^*}+f^*v^*$$

**方程推导**

基于$x$方向运动方程：$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}+fv$ 令$(x,y)=L(x^*,y^*),(u,v)=U(u^*,v^*),p'=p'^*(\Delta P)$

$z=Dz^*, w=Ww^*, \bar\rho=\pi\rho^*, t=\tau t^*, f=f_0f^*$ 回代原式，可得：$\frac{U}{\tau}\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\frac{U^2}{L}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\frac{WU}{D}w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}$

$=-\frac{\Delta P}{\pi L}\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+f_0Uf^*\nu^*$ 同除$f_0U$，得到：$\frac{1}{f_0\tau}\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\frac{U}{f_0L}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\nu^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\frac{D}{H}\frac{U^2/D^2}{N^2}w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}=-\frac{\Delta p}{\pi f_0LU}\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p'^*}{\partial x^*}+f^*\nu^*$

根据前述分析可得：若 $\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}\ll 1, \frac{\Delta P}{\pi L}\approx f_0U$；若 $\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}\geq 1, \frac{\Delta P}{\pi L}\approx\frac{U^2}{L}$ $\Rightarrow$ 若 $\frac{U}{f_0L}\ll 1, \frac{\Delta P}{\pi Lf_0U}\approx 1$;

$\frac{U}{f_0L}\geq 1, \frac{\Delta P}{\pi Lf_0U}\approx\frac{U}{f_0L}$ 令$R_0=\frac{U}{f_0L}, R_1=\frac{\Delta P}{\pi Lf_0U}$，则:$\begin{cases}\text{若}R_0\ll 1, & R_1=1\\ \text{若}R_0\geq 1, & R_1=R_0\end{cases}$ 不管哪种情况，气压梯度力项都会保留。

令$\varepsilon=\frac{1}{f_0\tau}, Ri=\frac{N^2D^2}{U^2}$，方程可写为：$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t^*}+R_o\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\nu^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\frac{D}{H}\frac{1}{R_i}w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}=-R_1\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p'^*}{\partial x^*}+f^*\nu^*$

#### 2.2.4.2 基别尔数

**定义** $$\varepsilon=\frac{U/\tau}{f_0U}=\frac{1}{f_0\tau}=\frac{\tau_e}{\tau}=\frac{\text{惯性运动特征时间}}{\text{运动特征时间}}$$

**描述** $f_0$是大气中惯性运动的特征频率，$1/f_0$ 可看做惯性运动的特征时间尺度$\tau_e$，因此，基别尔数还可视为惯性运动的时间尺度与所研究运动的时间之比，从而**反映所研究运动的快慢问题**。

**反应内容** $\begin{cases}\varepsilon\ll 1 & \text{慢过程，准定常}\\ \varepsilon\geq 1 & \text{快过程，非定常}\end{cases}$

#### 2.2.4.3 罗斯贝数

**定义** $$R_0=\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}=\frac{\text{特征水平惯性力项}}{\text{特征水平科氏力项}}$$

**描述** 罗斯贝数的大小反映了**科氏力的相对重要性**

**反应内容** ① $R_0\leq 10^{-1}$，$L$较大，则特征惯性力很小，加速度很小，可忽略，满足准地转条件。

② $R_0\geq 10^0$，$L$较小，则为非地转。

#### 2.2.4.4 不同尺度运动的典型数据

**中纬度** 中纬度大尺度运动：$f_0\sim 10^{-4}s, U\sim 10^1 m/s \quad L\sim 10^6 m$ $R_0=\frac{U}{f_0L}\sim 10^{-1}\ll 1$ 准地转

中纬度中小尺度运动：$f_0\sim 10^{-4}s, U\sim 10^1 m/s \quad L<10^5 m$ $R_0=\frac{U}{f_0L}\sim 10^0$ 非地转

**热带** 热带大尺度运动：$f_0\sim 10^{-5}s, U\sim 10^1 m/s \quad L\sim 10^6 m$ $R_0=\frac{U}{f_0L}\sim 10^0$ 非地转

**海洋** $f_0\sim 10^{-4}s, U\sim 10^{-1}m/s$ 若要使 $R_0=\frac{U}{f_0L}<10^{-1}$ 达到准地转，需要 $L\geq 10^4 m$

海洋速度比较慢，不需要特别大的水平尺度，就能够达到准地转。

**总结** ① $\varepsilon \equiv \frac{1}{f_0\tau} \sim \frac{\partial u}{\partial t}/fv$ 准地转平衡运动是缓慢变化($\varepsilon \ll 1$)的

② $Ro \equiv \frac{U}{f_0 L} \sim \frac{\vec{V}\cdot\nabla u}{fv}$ 大尺度运动 ($Ro \ll 1$)

③ $Ri \equiv \frac{N^2 D^2}{U^2} \sim g\frac{\partial \ln\theta}{\partial z}/\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$ 同时大气层结应是高度稳定的($Ri \gg 1$)

④ $\lambda \equiv \frac{D}{H}$ $\delta \equiv \frac{D}{L}$ 同理可得：静力平衡近似的充分条件是$\lambda = 1$，$\delta \ll 1$

### 2.2.4.5 地转参数$f$的简化

**简化形式** $f = f_0 + \beta \cdot y + o\left(\frac{y^2}{a^2}\right)$, 其中$y = a(\varphi - \varphi_0)$

若令$L$代表运动的径向水平尺度，则前两项之比为：$\frac{\beta y}{f_0} \sim \frac{\cos\varphi_0 L}{\sin\varphi_0 a}$

**推导过程**

$f = 2\Omega\sin\varphi$，把 $f$ 在 $\varphi_0$ 处作泰勒级数展开 ⇒ 对$y$展开：$f = f|_{\varphi_0} + \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi_0}(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right|_{\varphi^2}(\varphi - \varphi_0)^2 + \cdots$

$= 2\Omega\sin\varphi_0 + 2\Omega\cos\varphi_0(\varphi - \varphi_0) + o[(\varphi - \varphi_0)^2] = f_0 + \beta\cdot y + o\left(\frac{y^2}{a^2}\right)$；$[y = a(\varphi - \varphi_0)]$

近似地，$f \approx f_0 + \beta y$，其中：$f_0 = 2\Omega\sin\varphi_0, \beta = \frac{2\Omega\cos\varphi_0}{a} = \frac{df}{dy}|_{\phi_0}$ 都是常量。

**讨论** ① 在中纬度地区，若运动的经向水平尺度远小于地球半径时$L \ll a$，可取$f \approx f_0$，称为 ***f* 平面近似**。

② 高一级的近似为 **$\beta$ 平面近似**：当$f$处于系数地位不被微商时，取 $f \approx f_0$ 为常数；当 $f$ 处于对 $y$ 求导时，取 $\frac{\partial f}{\partial y} = \beta$ 为常数。即 $f \approx f_0 + \beta y$ 其中 $f_0 = 2\Omega\sin\varphi_0, \beta = \frac{2\Omega\cos\varphi_0}{a} = \frac{df}{dy}|_{\phi_0}$ 都是常量

③ 科氏参数$f$是纬度$y$的非线性函数，$\beta$平面近似部分考虑地球球面性，即把地球当作平面，但又考虑科氏参数$f$的变化，是近似地将$f$表示成$y$的线性函数，而使大气运动方程组得到简化的近似方法。

④ 特别地，赤道附近，取赤道为中心纬度，则：$\varphi_0 = 0$，$f_0 = 0 \Rightarrow f \approx \beta y$，称为**赤道$\beta$平面近似**。