

# 第四章 大气行星边界层

## 4.0 引言

### 4.0.1 流体流动状态

#### 层流

流体分层流动，互不混合，有规则性，称为**层流 laminar flow**。

如右图，管中流速较小，红色液体线为一条直线

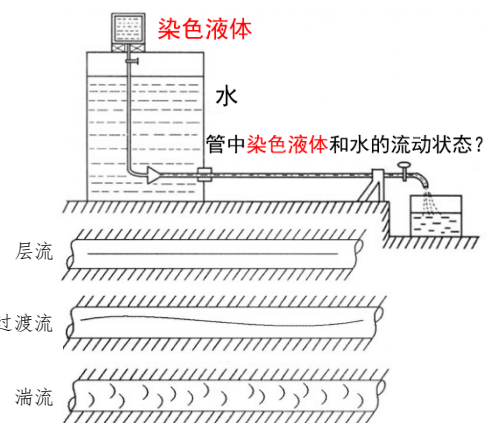
#### 过渡流

管中流速增大，红色液体线有波动，这是上下两者的中间状态。

#### 湍流

流体不规则运动，运动杂乱，这种运动称为**湍流 turbulence**。

管中流速增大且超过临界值，红色液体与水混合，红色液体线不复存在。



#### 湍流是一种随机运动吗？

“随机”的定义：对于一个确定性过程而言，方程中没有随机项，那么从给定的初始状态到下一个时刻只能有唯一的状态；而随机过程则下一个时刻可以有多种不同的状态。因此，湍流不是本质上的随机运动，而是确定性混沌系统。但由于其对初始条件的敏感性和非线性，它在外观和统计行为上类似于随机过程。

### 4.0.2 流体力学中的边界层

#### 定义

**流体与刚性边界之间**会形成一个运动性质与**流体内部**不同的区域，称为**边界层**。

#### 特征

① **几何学特征**：  $D \ll L$ ，纵向 $\ll$ 横向

② **运动学特征**： 无滑脱条件： $\vec{V}|_{z=0} = 0$  边界线上速度为零

**有很大的流速切变**： $V(z)$  = 垂直方向上动量分布不均匀 导致湍流的重要因素

③ **动力学特征**： **粘性力重要**。对于层流边界层：分子粘性力；对于湍流边界层：**湍流粘性力**。

### 4.0.3 大气行星边界层

#### 引入

前几章所讲述的大尺度运动，在尺度分析的基础上，合理地忽略了**气体内部的摩擦力**，忽略了**热传导和热扩散引起的热量输送**。但是，在接近地球表面的这一层大气中，不能忽略。因为这一层次**受地表影响显著**，运动具有**湍流性**。

#### 观测现象

目前地面气象自动观测系统风向风速的采样间隔时间为 1s。右图蓝线为 3s 的风速风向合成，黑色线为滤波结果（相当于做了滑动平均，去掉了随机性，表现出某种规律性的层流部分）。**所谓湍流，就是蓝色的线减去黑色的线。**

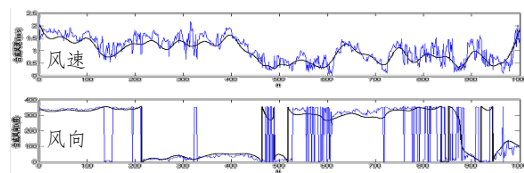


图 5 1999 年 12 月 07 日 13 时原始合成风向风速值（浅蓝色线）与滤波后合成风向风速值（黑色线）的比较图

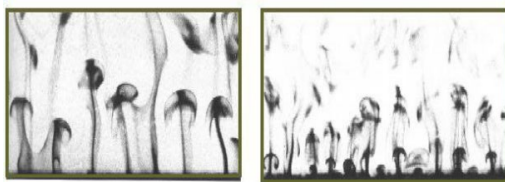
#### 主要作用

① **动力作用**：地球表面粗糙不平，流体的连续性 $\rightarrow$ 边界层的风垂直切变强 $\rightarrow$ 湍流发展

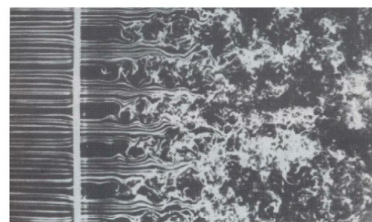
② **热力作用**：地球表面非均匀加热作用 $\rightarrow$ 低层大气温度垂直梯度大 $\rightarrow$ 湍流发展



动力作用

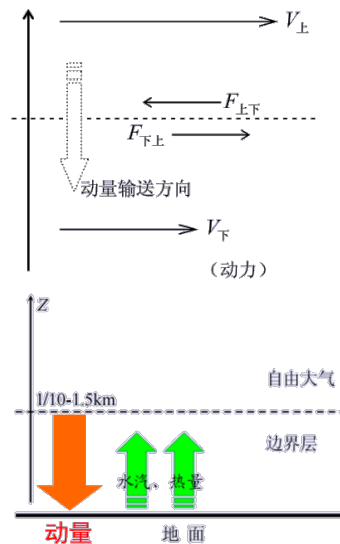


热力作用导致湍涡



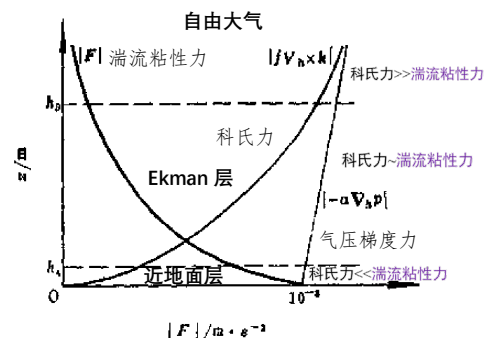
从层流演变为湍流

<b>PBL 定义</b>	<b>大气行星边界层 PBL</b> : 与 <b>地表相接触</b> , 厚度约为 <b>1~1.5km</b> , 受地面 <b>热力和动力</b> 影响大, 具有 <b>湍流特性</b> 的大气层。它是地球表面和大气间能量和物质交换的重要通道。
<b>湍流</b>	湍流是不规则的涡旋运动, 其中有许多 <b>使流体发生混合的涡旋</b> , 称之为 <b>湍涡</b> , 和分子不规则运动类似。
<b>湍流作用</b>	强烈的混合作用 <b>引起物理量输送</b> , 具体指: 具有 <b>存在物理量的梯度</b> , 从物理量大值区向小值区输送, 又考虑到边界层中物理量的 <b>垂直梯度最大</b> , 所以, <b>湍流输送主要在垂直方向上</b> 。 大气行星边界层中物理量 <b>水平方向输送</b> 由 <b>风的平流输送</b> 完成, 比湍流水平输送大很多。
<b>湍流尺度</b>	湍流的尺度一般小于 2m, 属于 Micro $\sigma$ 尺度
<b>重要性</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>① 湍流的混合作用使得地面的<b>热量和水汽向上输送</b>, 使得<b>动量向地球的表面输送</b>, 比分子扩散的混合作用大几个数量级。</li> <li>② 高层动量输送到低层, 以补偿大气边界层和下垫面不光滑所造成的动量摩擦耗散。<b>大气行星边界层几乎消耗整个大气动能的一半左右</b>。</li> <li>③ 根据观测, 入射于地气系统的太阳能约有 43% 被地面吸收, 以潜热 23%、感热 6% 和辐射 14% 的形式进入大气边界层, 然后通过大气边界层传输到自由大气。</li> <li>④ 大气中的水汽来自于下垫面, 几乎<b>全部为大气边界层接受</b>, 通过大气边界层传输到高处, 再通过各种垂直运动输送至自由大气; 通过水汽向大气提供 50% 的内能。</li> <li>⑤ 大气边界层是整个大气主要的<b>热量源、水汽源、动量汇</b>。</li> <li>⑥ 大气行星边界层过程的热力和动力强迫及其耗散作用是影响自由大气中天气系统发生、发展演变和消亡的重要因子。研究边界层过程的性质和特征是认识大气运动规律的重要组成部分。</li> </ol>
<b>研究目的</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>① 在整个大气中起重要作用: 如数值预报中的物理过程描述, 大气运动的强迫耗散问题。</li> <li>② 边界层本身的特性: 如污染物的扩散, 飞机起降、植物生长等。</li> </ol>
<b>研究方法</b>	由于对湍流结构还很不了解, 本章将采用 <b>半经验半理论</b> 的方法, 用平均运动的参数来表示湍流输送过程, 即采用参数化方法模拟湍流对平均运动的影响, 从而研究行星边界层中运动的规律。



## 4.1 大气行星边界层及其特征

<b>概述</b>	地表是大气的动力边界(无滑脱边界)和热力边界。受地表影响, 大气边界层是 <b>湍流边界层</b> 。
<b>动力边界</b>	大气最底层靠近地球表面, 受 <b>地面摩擦阻力</b> 影响。大气流过地面时, 地面上各种 <b>粗糙元</b> (草、沙粒、庄稼、树木、房屋)会使大气流动受阻, 这种摩擦阻力由于大气中的湍流而 <b>向上传递</b> , 并随高度的增加而逐渐减弱, 达到某一高度后便可忽略。 地表对大气的影随高度增加而减弱, <b>湍流的强度随高度增加而减弱(切变减小)</b> , <b>湍流粘性力随高度增加而减小</b> , 湍流粘性力的重要性随高度不同而不同。因此, <b>不同高度上受力会不同</b> 。
<b>受力分析</b>	<b>水平气压梯度力</b> : 气压梯度随高度的增加而缓慢减小, 但比容随高度的增加呈指数增加, 因而数值随高度的增加而增加。 <b>水平科氏力</b> : 在地表面风速可认为是零, 但 <b>风速的数值随高度的增加而增加</b> , 因而水平科氏力的数值随高度的增加而增加。 <b>湍流摩擦力</b> : 风速垂直切变的数值随高度的增加而减小, 而且在下界面附近, 由于热力和动力原因, 湍流交换剧烈, 因而数值在下界面附近较大, 粗略估计, 湍流摩擦力的数值随高度的增加而 <b>呈e指数减小</b> 。



受力分析与大气分层图

### 4.1.1 大气分层

<b>概述</b>	按湍流粘性力的重要性, 对稳定层结大气在垂直方向上进行分层。
<b>贴地层</b>	<b>贴地层一般几厘米</b> , 具有如下特征:

- ① 附着在地表,  $\vec{v} \approx 0$ , 无湍流。
- ② **湍流粘性力 = 0**, **分子粘性力最重要**。

- ③ 温度垂直梯度很大，穿过 1 毫米厚度温度变化 10 度。（地表温度远高于大气温度）
- ④ 大气动力学很少研究，但在**农业气象**中重要。

#### 近地面层

**常值通量层**，近地面层顶高度为 **80-100m**，具有如下特征：

- ① **湍流运动非常剧烈**，以湍流粘性力和水平气压梯度力为主，科氏力忽略。
- ② 风向几乎不随高度变化，但**风速随高度增加而增大**。
- ③ **物理量的垂直输送几乎不随高度改变**，故又称为常值通量层。
- ④ 地气相互作用强烈（热量与水汽）。

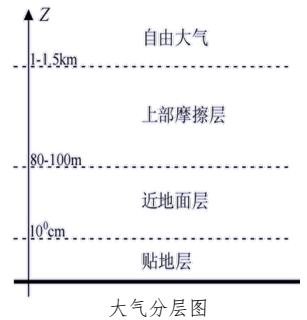
#### 上部摩擦层

**Ekman 层**，上部摩擦层顶高度为 **1~1.5km**，具有如下特征：

- ① **湍流粘性力、科氏力、气压梯度力同等重要**，三力平衡， $\vec{F}_{\text{压}} + \vec{F}_{\text{科}} + \vec{F}_{\text{粘}} \approx 0$ 。
- ② 风向、风速随高度均有变化。
- ③ 物理量的输送以垂直方向为主。
- ④ **下界面对近地面层的影响通过该层向上输送影响自由大气。**

#### 自由大气

- ① 湍流粘性力可忽略，**气压梯度力与科氏力相平衡**： $\vec{F}_{\text{压}} + \vec{F}_{\text{科}} \approx 0$
- ② 自由大气不考虑摩擦，但它紧挨着边界层，因而**受大气行星边界层顶垂直运动**的影响，从而边界层的摩擦作用还会**间接影响**自由大气。



#### 工作分层

一般实际工作中把大气分为三层：**近地面层、上部摩擦层、自由大气**

大气	边界层	湍流粘性力重要	大气边界层占整个大气的 1/10
	自由大气	湍流粘性力可略	
	近地面层		

### 4.1.2 边界层的一般特点

#### 特点一

近地面层**气象要素的日变化大**：大气与地表相比，地表热容量小，由于地球自转和太阳辐射作用，其日变化大，而近地面层贴近地面，因而日变化大。

#### 特点二

近地面层**气象要素的垂直梯度大**：与**近地面层外部**（自由大气）比梯度很大；与**水平方向**比梯度很大。

#### 特点三

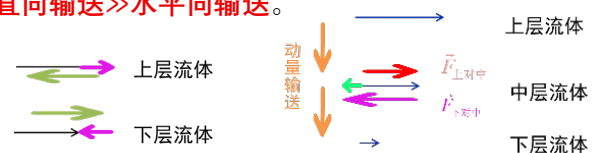
湍流运动引起物理量的输送：由于垂直梯度大，所以**垂直向输送**  $\gg$  **水平向输送**。

#### 特点四

比较刚体和流体运动中摩擦粘性力：

**刚体**：与相对运动**趋势相反**，有静摩擦的存在。

**流体**：在相对运动反方向，**无静摩擦的存在**。



#### 静摩擦力

两个相互接触的物体，当其接触表面之间有相对滑动的趋势，但尚保持相对静止时，彼此作用着阻碍相对滑动的阻力，这种阻力称为静摩擦力。

**分析中层流体**：中层流体所受湍流粘性力等于**上、下层流体对其的合力**（上层加速，下层减速）。湍流粘性力在运动的反方向（不是完全如此，取决于上下层流体的相对大小）。

湍流粘性力在运动反方向一侧， $\vec{F}_k$  不一定和  $\vec{V}$  正好相反，也可以出现在  $\vec{V}$  反方向的任意位置一侧。

#### 特点五

上部摩擦层中，满足三力平衡： $-\frac{1}{\rho} \nabla p - f \vec{k} \times \vec{V} + \vec{F}_k = 0$

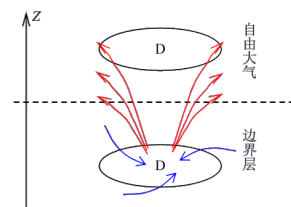
风穿越等压线指向低压一侧，湍流粘性力在运动反方向一侧，与地转偏差相垂直。

#### 原理说明

$\vec{V} \cdot (eq.) \Rightarrow \vec{V} \cdot \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p - f \vec{k} \times \vec{V} + \vec{F}_k \right) = 0$  ①  $\vec{V} \times \vec{F}_k < 0$  摩擦耗散动能 ②  $\vec{V} \cdot (-f \vec{k} \times \vec{V}) = 0$  科氏力不做功 ③  $\vec{V} \cdot \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p \right) > 0$  气压梯度力作正功。因此**从能量平衡角度看**：**风必然穿越等压线指向低压一侧**。

## 动量输送

边界层和自由大气均为低压系统时，边界层中穿越等压线指向低压，低压辐合运动，产生上升运动，进入自由大气。① 自由大气产生辐散，使得气旋减弱。② 边界层气旋加强，补偿湍流粘性耗散。（动量从上往下输送）相同的层结条件下，在正压和斜压条件下，在高层可形成不同的环流配置。

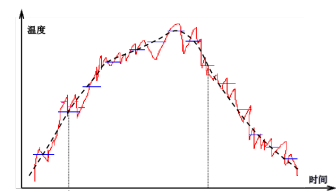


## 4.2 大气运动的湍流特性和平均运动方程组

### 湍流

湍流是无规则的随机运动，与分子运动类似（无规律、不确定性），无法描述其运动趋势，对其运动的描述也是没有意义的。类似分子运动的处理，对湍流的处理采用统计方法，即**大数平均量**。

观察右图可见，**瞬时值波动很大**（红线：某个时刻的瞬时值有可能比前一时刻大，也有可能小，并无规律），说明有很强的湍流作用。若取**适当的时间间隔**进行平均，既能去掉随机性，又能保留气温的日变化特征。如果进行**滑动平均**，则得到一条光滑的曲线（黑线）。



地面上自动温度仪记录的温度日变化曲线

### 重要特点

瞬时值是复杂的，但平均量是有规律的。我们不研究湍流运动的瞬时值，而是研究平均运动规律，但考虑湍流运动的影响。我们希望得到： $\frac{d\bar{V}}{dt} = ?$

### 4.2.1 平均量

#### 平均量

对任意一个物理量 $q$ ，我们令： $q = \bar{q} + q'$  其中 $q$ 为瞬时值， $\bar{q}$ 为平均量， $q'$ 为脉动量

脉动量是复杂的，体现的是无规则的湍流运动；平均运动是有规则的，体现的是物理量变化的趋势。

#### 总体思想

把湍流场中任一点的瞬时物理量看成是平均值和脉动值之和，然后应用统计平均的方法研究其平均运

动的变化规律。即  $\begin{cases} q = \bar{q} + q' \\ \frac{dq}{dt} = \dots \end{cases} \Rightarrow \frac{d\bar{q}}{dt} = ?$

#### 4.2.1.1 平均量的取法

##### 取值方法

① 时间平均  $\bar{q} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} q(s) ds$  相当于滑动积分，对于每个时间 $t$ ，在以其为中心的长为 $\Delta t$ 的

② 空间平均  $\bar{q} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} q d\tau$  区间作平均。

③ 时空平均  $\bar{q} = \frac{1}{\tau \Delta t} \int_{\tau} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} q dt d\tau$

##### 实际情况

一般取时间平均，对时间平均容易通过试验检测。 $\Delta t$ 的选取要**大于脉动周期**（去掉随机性），同时**小于流体特征时间尺度**，以免平均后物理量时间变化的主要趋势被平滑掉。气象上一般取**1-2min**。

#### 4.2.1.2 平均运动方程求法

##### 总体思想

大气运动方程  $\frac{d\bar{V}}{dt} = \Sigma_i \bar{F}_i$  其中 $\bar{V}$ 是瞬时运动，是不确定的，因此需要得到平均运动方程。

##### 具体步骤

① 任一变量**拆解为两个量**： $q = \bar{q} + q'$ ，将其代入方程

② **对整个方程求平均**：eq.  $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{V}'}{\partial t} = \dots \Rightarrow \overline{\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}\right)} + \frac{\partial \bar{V}'}{\partial t} = \dots$

③ 整理： $\Rightarrow \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \dots \Rightarrow$  得到平均方程 左侧为平均运动局地变化，右侧为原因，物理上更清楚。

#### 4.2.1.3 常用的关系式

##### 脉动量自身

$\bar{\bar{q}} = \bar{q}$ （平均量的平均等于它本身）

$\bar{q} = \overline{\bar{q} + q'} = \bar{q} + \bar{q}' = \bar{q} + \bar{q}' \Rightarrow \bar{q}' = 0$ （脉动量求平均为0）

##### 基本运算

$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$ （两个量之和的平均等于两个平均量之和）

$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_1 \bar{q}_2 + \overline{q'_1 q'_2}$

$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_1 \bar{q}_2$ （相当于把 $\bar{q}_1$ 提出来，对 $q_2$ 作平均）

##### 偏导运算

$\overline{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}$

$\overline{\left(\frac{\partial q_1 q_2}{\partial x}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial (\bar{q}_1 q_2 + q'_1 q'_2)}{\partial x}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{q}_1 q_2}{\partial x}\right)} + \overline{\left(\frac{\partial q'_1 q'_2}{\partial x}\right)} = \frac{\partial \bar{q}_1 q_2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{q'_1 q'_2}}{\partial x}$



## 具体推导

$$\overline{q_1 q_2} = (\overline{q_1} + \overline{q_1'}) (\overline{q_2} + \overline{q_2'}) = (\overline{q_1} \overline{q_2} + \overline{q_1} \overline{q_2'} + \overline{q_1'} \overline{q_2} + \overline{q_1'} \overline{q_2'}) \quad \text{其中 } \overline{q_1} \overline{q_2} = \overline{q_1} \overline{q_2}, \quad \overline{q_1} \overline{q_2'} = 0, \quad \overline{q_1'} \overline{q_2} = 0$$

$$\overline{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial(\bar{q}+q')}{\partial x}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial x}\right)} + \overline{\left(\frac{\partial q'}{\partial x}\right)} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}$$

## 4.2.2 平均运动方程组

### 4.2.2.1 平均连续方程

**连续方程**  $\nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{V}') = 0$  原始瞬时方程为:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$

### 平均连续方程的推导

基于瞬时方程, 将物理量写出:  $\vec{V} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}'; \rho = \bar{\rho} + \rho' = \bar{\rho}$  (注意有  $\rho' \approx 0$ ), 将其代入方程可得:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} (\bar{\vec{V}} + \vec{V}') = 0. \text{ 随后, 我们对方程整体做平均: } \overline{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')} = 0 \Rightarrow \overline{\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}\right)} + \nabla \cdot \bar{\rho} (\bar{\vec{V}} + \vec{V}') = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} \bar{\vec{V}} + \nabla \cdot \bar{\rho} \vec{V}' = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} \bar{\vec{V}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} \bar{\vec{V}} = 0 \text{ 将式子相减, 可以得到:}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} (\bar{\vec{V}} + \vec{V}') - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} - \nabla \cdot \bar{\rho} \bar{\vec{V}} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{V}') = 0}$$

### 4.2.2.2 平均运动方程

**运动方程** 
$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zx} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{v} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f \bar{u} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial}{\partial x} T_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zy} \right) \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{w} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \bar{g} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial}{\partial x} T_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} \right) \end{cases}$$

### 平均运动方程的推导

基于  $x$  方向运动方程:  $\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v \dots$  首先列出平均量:  $\vec{V} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}', \rho = \bar{\rho}, P = \bar{P} + P', f$  与湍流

无关。将其回代:  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u} + \bar{\vec{V}}' \cdot \nabla \bar{u}' + \bar{\vec{V}}' \cdot \nabla \bar{u} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u}' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} + f \bar{v} + f v' \dots$

随后, 对整个方程取平均:  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f \bar{v} \dots$  与上式对比, 可以看到左边的瞬时值变为了

右边的平均值; 且右边多了一项:  $-\overline{\vec{V}' \cdot \nabla u'}$  是脉动项的二次乘积项 (单位质量流团受到的湍流粘性力在  $x$  方向的分量)。该公式左边表示  $x$  向的加速度, 右边为单位质量流团受到的合力在  $x$  向的分量。

进一步地,  $-\overline{\vec{V}' \cdot \nabla u'} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \bar{\rho} \cdot \overline{\vec{V}' \cdot \nabla u'} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left[ \nabla \cdot (-\bar{\rho} \vec{V}' u') - u' \cdot \nabla \cdot (-\bar{\rho} \vec{V}') \right] \xrightarrow[\nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{V}') = 0]{\text{连续方程}} \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (-\bar{\rho} \vec{V}' u') =$

$\frac{1}{\bar{\rho}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{\rho} \overline{u' u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{\rho} \overline{v' u'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\bar{\rho} \overline{w' u'}) \right]$  表示单位质量流团所受的湍流粘性力在  $x$  方向的分量。由此整合。

**平均方程** 
$$\frac{d \bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f \bar{v} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{\rho} \overline{u' u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{\rho} \overline{v' u'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\bar{\rho} \overline{w' u'}) \right]$$

$$\frac{d \bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + f \bar{u} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{\rho} \overline{u' v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{\rho} \overline{v' v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\bar{\rho} \overline{w' v'}) \right]$$

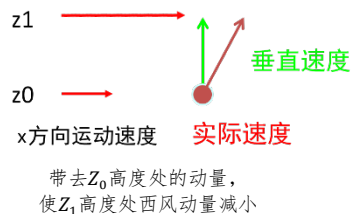
$$\frac{d \bar{w}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} - \bar{g} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{\rho} \overline{u' w'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{\rho} \overline{v' w'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\bar{\rho} \overline{w' w'}) \right]$$

平均气压梯度力  $x, y, z$  方向分量 平均科氏力在  $x, y$  方向的分量 重力 湍流粘性力在  $x, y, z$  方向的分量

## 物理本质

以  $-\bar{\rho} \overline{w'u'}$  为例

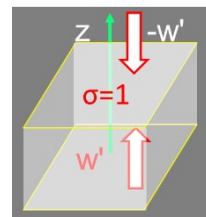
- ①  $\rho w \cdot 1$  单位时间  $\cdot$  1 单位水平面积 表示 **质量通量** (单位时间通过单位水平面积输送的质量)。
- ②  $\rho w u$  则表示由于垂直运动引起的 **x 方向的动量通量**。
- ③ 对其求平均:  $\overline{\rho w u} = \bar{\rho} \bar{w} \bar{u} + \bar{\rho} \overline{w'u'}$  表示单位时间通过单位水平面积动量的平均垂直通量 = 平均垂直运动对平均动量的输送 + **脉动垂直运动引起的 x 方向脉动动量的垂直输送**。



## 方向问题

$\bar{\rho} w' \cdot 1 = \bar{\rho} w'$ : 由于垂直向的脉动运动引起的, **由下至上**, 通过以 **z 轴为法向** 的单位水平截面输送的质量通量, 带去 **下面气块** 的特性。

- ①  $\bar{\rho} w' u'$  **由下至上**, 湍流通过以 z 轴为法向的单位水平截面输送的 x 方向的脉动动量通量
- ②  $-\bar{\rho} w' u'$  **由上至下**, 湍流通过以 z 轴为法向的单位水平截面输送的 x 方向的脉动动量通量: 即下部流体单位时间、通过以 z 轴为法向的平面单位面积上 x 方向的脉动动量增加为  $-\bar{\rho} w' u'$



## 黏性应力

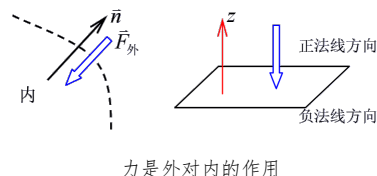
根据冲量定理:  $\Delta m v = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \Delta m v / \Delta t = \Delta m v$  ( $\Delta t = 1$ )  $-\bar{\rho} w' u'$  可理解为 **上部流体对下部流体的作用力**, 表示 **作用于法向为 z 轴的单位截面上湍流粘性应力在 x 向的分量**, 记为  $T_{zx}$  其中 **第一个下标为作用面方向**, **第二个下标为力分量方向**。

## 总结

- ①  $T_{zx} = -\bar{\rho} w' u'$  表示作用于法向为 z 轴的平面上湍流粘性应力在 x 向的分量。
- ② 正法向流体对负法向流体的作用, **由上向下**, 通过法向为 z 轴的单位截面输送的 x 方向脉动动量的平均值, 表示上层流体对下层流体的作用。
- ③  $Q_{zx} = \bar{\rho} \overline{w'u'}$  则表示通过法向为 z 轴的单位截面, **由下向上** 输送的 x 向脉动动量通量密度, 表示下层流体对上层流体的作用。
- ④ 对于单位质量空气块, 上表面湍流粘性力是上层流体对下层流体的作用, 下表面湍流粘性力是下层流体对上层流体的作用。

**问题: 由垂直运动导致的 x 方向上的合力是?**

对于单位质量空气块, 上表面湍流粘性力在 x 方向分量  $T_{zx}|_{z+\Delta z}$ , 下表面湍流粘性力在 x 方向分量  $-T_{zx}|_z$ , 上下两个面在 x 方向的合力

$$\frac{(T_{zx}|_{z+\Delta z} - T_{zx}|_z) \Delta x \Delta y}{\rho \Delta x \Delta y \Delta z} \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \quad \text{则} \quad \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial(-\bar{\rho} \overline{w'u'})}{\partial z}.$$


$\frac{\partial T_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial(-\bar{\rho} \overline{w'u'})}{\partial z}$  表示通过以 z 轴为法向的平面、x 方向脉动动量的 **净通量** (净收入量、合力)。若其值小于 0, 则表示由上向下、进入该体积的 x 方向上脉动动量减小, 进而使平均纬向西风减小。同理, 单位质量空气块在垂直于 x, y 轴的平面上所受到的湍流粘性应力在 x 轴方向也会有分量。

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{\rho} \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{\rho} \overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\bar{\rho} \overline{w'u'}) \right] = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zx} \right)$$

**第一个下标: 作用面方向 第二个下标: 力分量方向。**

## 方程分析

与瞬时方程相比, 发现右边多出了 9 项:  $T_{ij} = -\bar{\rho} \overline{u'_i u'_j}$  脉动量的二次乘积项的平均值

- ① 从力的角度看, **作用于以 i 轴为法向的平面上的湍流粘性应力在 j 轴方向上的分量**。
- ② **由 i 轴的正向往负向**、通过以 i 轴为法向的单位截面输送的 **j 方向的脉动动量通量** 的平均值。
- ③ i 轴正法向流体对负法向流体的作用。

## 应力张量

湍流粘性应力  $T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix}$  是 **对称张量**, 6 个分量独立。

行表示力的分量方向; 列表示作用面的法向。

### 4.2.2.3 状态方程

#### 状态方程

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}$$

#### 推导依据

瞬时方程为  $p = \rho R T$  且  $\rho \approx \bar{\rho}$

#### 4.2.2.4 热力学方程

**热力学方程**  $C_p \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{\bar{\theta}}{T} \bar{Q} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{h}$  其中  $\vec{h} = \bar{\rho} C_p \overline{\vec{V}'\theta'}$

考虑了湍流因素后，大气中的非绝热因子主要指：**太阳辐射、相变潜热和湍流热传导。**

##### 平均热力学方程的推导

从热力学方程瞬时形式出发： $C_p \frac{d\theta}{dt} = C_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \theta \right) = \frac{\theta}{T} \dot{Q}$ ，令  $\frac{\theta}{T} = \frac{\bar{\theta} + \theta'}{\bar{T} + T'} = \frac{\bar{\theta} + \theta'}{\bar{T}(1 + \frac{T'}{\bar{T}})} \xrightarrow{\text{泰勒}} \frac{\bar{\theta} + \theta'}{\bar{T}(1 - \frac{T'}{\bar{T}})} = \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} + \dots \approx \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}}$   
(因为  $T \nearrow \Rightarrow \theta \nearrow$  所以  $T' > 0 \Rightarrow \theta' > 0$ )，将其带入原式： $C_p \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\theta} + \theta') + (\vec{V} + \vec{V}') \cdot \nabla (\bar{\theta} + \theta') \right] = \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} (\bar{Q} + \dot{Q}')$ ；  
对方程求平均：考虑到  $\overline{(\vec{V} + \vec{V}') \cdot \nabla (\bar{\theta} + \theta')} = \vec{V} \cdot \nabla \bar{\theta} + \vec{V} \cdot \nabla \theta' + \overline{\vec{V}' \cdot \nabla \bar{\theta}} + \overline{\vec{V}' \cdot \nabla \theta'} \Rightarrow C_p \left[ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\theta} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{\theta} + \overline{\vec{V}' \cdot \nabla \theta'} \right] = \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \bar{Q}$

与瞬时方程比较：左边多了  $\overline{\vec{V}' \cdot \nabla \theta'}$  这一脉动量的二次乘积项：体现了湍流的作用——由湍流造成的物理量的输送。继续简化方程： $\Rightarrow C_p \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \bar{Q} - \frac{1}{\rho} \left( \bar{\rho} C_p \overline{\vec{V}' \cdot \nabla \theta'} \right)$  其中  $\bar{\rho} C_p \overline{\vec{V}' \cdot \nabla \theta'} = \nabla \cdot \left( \bar{\rho} C_p \overline{\vec{V}' \theta'} \right) - C_p \theta' \nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{V}')$   
因为  $\overline{C_p \theta' \nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{V}')} = 0$ ，所以  $\bar{\rho} C_p \overline{\vec{V}' \cdot \nabla \theta'} = \nabla \cdot \left( \bar{\rho} C_p \overline{\vec{V}' \theta'} \right)$  再定义  $\vec{h} = \bar{\rho} C_p \overline{\vec{V}' \theta'}$  则得到最终方程。

**物理量**  $C_v T$ : 内能  $C_p T$ : 焓  $C_p \theta$ : 位焓，与  $\dot{Q}$  有关

**通量密度矢** 称  $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} C_p \overline{u' \theta'} \\ \bar{\rho} C_p \overline{v' \theta'} \\ \bar{\rho} C_p \overline{w' \theta'} \end{pmatrix}$  为**脉动位焓的通量密度矢**，都是脉动量的二次乘积项。

联系之前的内容， $\bar{\rho} \overline{w' u'}$  是通过法向为z轴平面输送的**自下而上x方向的脉动动量通量密度**。  
那么  $\bar{\rho} C_p \overline{w' \theta'}$  是**通过法向为z轴平面输送的自下而上脉动位焓通量密度**。

$\nabla \cdot \vec{h} > 0$ ，说明湍流引起的脉动位焓有**净输出**  $\Rightarrow C_p \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \bar{Q} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{h} < 0$  从而导致**平均位焓下降**

$\nabla \cdot \vec{h} < 0$ ，则平均温度升高。

#### 4.2.2.5 水汽方程

**水汽方程**  $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{q} = \bar{s} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\bar{\rho} \overline{\vec{V}' q'})$  与位温方程基本一致

在考虑了湍流因素后，大气中影响水汽变化的因子主要有：**水汽相变和湍流水汽扩散。**

##### 水汽方程的推导

基于水汽方程： $\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla q = s_{\text{水汽的源}}$ ，使用和热力学方程同样的方法可以得到： $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{q} + \overline{\vec{V}' \cdot \nabla q'} = \bar{s}$ ，  
 $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{q} = \bar{s} - \frac{1}{\rho} \left( \overline{\bar{\rho} \vec{V}' \cdot \nabla q'} \right) = \bar{s} - \frac{1}{\rho} \left( \nabla \cdot \left( \bar{\rho} \overline{\vec{V}' q'} \right) - \overline{q' \nabla \cdot \bar{\rho} \vec{V}'} \right)$  所以  $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{q} = \bar{s} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left( \bar{\rho} \overline{\vec{V}' q'} \right)$

**通量密度矢** 同样定义  $\vec{q} = \bar{\rho} \overline{\vec{V}' q'} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \overline{u' q'} \\ \bar{\rho} \overline{v' q'} \\ \bar{\rho} \overline{w' q'} \end{pmatrix}$  为**脉动水汽的通量密度矢**

$\nabla \cdot \vec{q} > 0$ ，说明脉动引起的水汽有**净输出**，从而导致**平均水汽含量减少**。

#### 4.2.2.6 总体平均运动方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u} = -\overline{\vec{V}' \nabla u'} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{u} \\ \bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T} \\ C_p \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{\bar{T}}{\bar{\theta}} \bar{Q} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} C_p \overline{\vec{V}' \theta'}) \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{q} = \bar{s} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \overline{\vec{V}' q'}) \end{cases}$$

**说明** 与瞬时运动方程相比，湍流运动的作用表现为**脉动通量**（物理量的输送）上（具体就是脉动量二次乘积项的平均值）。作为一种统计量，该项反映了**脉动运动引起物理量的净输出或净输入**，从而导致该物理量平均值的减或增。

### 4.3 属性的湍流输送通量及其参数化

**章节引入** 平均方程中除了6个未知量 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{\rho}, \bar{T}$ 外，多了未知的**脉动量二次乘积项**。求解必须使方程组闭合，即必须知道如何描述脉动量二次乘积项。处理**脉动量的二次乘积项的平均值**有两种方法：

- ① **高阶矩闭合**      ② **半经验理论**（主流，例如分子粘性力处理，广义牛顿粘性假设）

#### 4.3.1 高阶矩闭合

**方法概述** 用**瞬时方程 - 平均方程**可以得到脉动量的方程： $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \dots\right) - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \dots\right) \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial t} = \dots + \overline{u'w'}$

同理： $\frac{\partial v'}{\partial t} = \dots + \overline{v'w'}$  分别用 $v'$ 和 $u'$ 乘上式，可得： $v' \times \left(\frac{\partial u'}{\partial t} = \dots + \overline{u'w'}\right) + u' \times \left(\frac{\partial v'}{\partial t} = \dots + \overline{v'w'}\right) \Rightarrow$

$\frac{\partial u'v'}{\partial t} = \dots + \overline{u'_i u'_j u'_k}$  得到某次乘积项： $\overline{u'v'} = \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial t} = \dots + \overline{u'_i u'_j u'_k}$  存在脉动量的三阶矩，可以忽略

发现其中出现更高次的三阶矩等高阶项，将其忽略，从而得到闭合方程组。

**缺点** **计算量大，可行性低**，效果差（要舍去高阶项），不使用。

**优点** **纯理论的，非经验的**（经验参数化理论根据观测从统计上给出拟合形式，不符合物理第一性原理）

#### 4.3.2 半经验参数化理论

**方法概述** 经验性的，基于假设，简单实用，效果较好。

##### 案例

例如用参数化理论研究分子粘性，即**牛顿分子粘性假设**： $\tau_{zx} = \mu \frac{du}{dz}$  用宏观运动速度 $u$ 来表达由于分子无规则运动引起的分子粘性力。还有案例如**积云对流参数化**、用气候量来表达天气过程影响（季节平均温度表示寒潮等天气系统的频数或强度）等。

**基本思想** **参数化**：用**平均量代表高阶矩**，通过大尺度的物理量来表征次网格或小尺度作用总体效应。将**脉动量的二次乘积项**表达为**平均运动量**的函数，即： $\overline{\rho u'_i q'} = f(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{T}, \bar{P}, \bar{\rho})$  我们接下来要知道表达式

##### 4.3.2.1 Prandtl 普朗特混合长理论

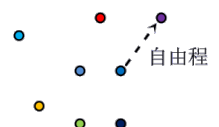
**基本思想** 发现由于湍流运动引起的物理量的输送与**分子运动情形非常相似**。

**运动自由程** 分子之间存在间隙，分子在与其它分子**发生碰撞前走过的距离**称为**自由程**。

在**自由程中**，**分子物理属性守恒**，发生碰撞后，分子的物理属性与其它分子进行了交换，属性发生改变。

**普朗特假设** 我们把**湍涡**想象为分子，尽管基于连续介质假设，湍涡间是无间隙的 $\Rightarrow$ 即湍涡在运动过程中是**不断**与周围发生混合而逐渐失去属性。但是，普朗特做了如下假设：**湍涡在运动过程中并不和周围发生混合，当经过混合长距离 $l$ 后才与周围流体发生混合失去其原有属性**。其完全模仿了分子运动。

可见，这里的混合长类似于分子自由程。在混合长前，湍涡的物理属性守恒。





## 混合长 $l$ 基本思想

湍涡在运动过程中失去其原有属性前所走过的最长距离。

- ① 不同的湍涡在固定点的置换引起了脉动。某个湍涡某时刻运动到某位置，则该处的瞬时物理性质就是这个湍涡的特性。
- ② 湍涡的特性为原位置周围介质特性的平均值。这是初始场。
- ③ 湍涡在运动过程中，在  $l$  内不与周围混合而失去其原有的特性：在混合长距离内，物理属性守恒。

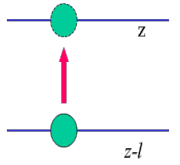
### 4.3.2.2 参数化

#### 量的联系

$z$  高度上的  $t$  时刻的脉动场：
$$u' = \bar{u}(z - l', 0) - \bar{u}(z, 0) = -l' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

脉动量与平均量之间建立了联系，脉动是由于平均物理量的分布不均匀（有梯度）引起的。

$$T_{zx} = -\bar{\rho u'w'} = \bar{\rho} \overline{l'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \bar{\rho} k_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad \text{定义：} k_z = \overline{l'w'} \text{ 湍流粘性系数}$$



#### 参数化的推导

假设 0 时刻： $z$  高度上平均速度为  $\bar{u}(z, 0)$ ， $t$  时刻：原本位于  $z - l'$  高度处的湍涡到达  $z$  高度。

由①知： $t$  时刻  $z$  高度该位置瞬时速度为  $u(\text{湍涡}, t)$ ，则： $u' = u(\text{湍涡}, t) - \bar{u}(z, 0)$ 。由②知：0 时刻， $u(\text{湍涡})$  与  $z - l'$  高度处的平均速度相同，即： $u(\text{湍涡}, 0) = \bar{u}(z - l', 0)$ 。由③知： $u(\text{湍涡})$  在混合长范围内守恒，湍涡在  $z$  处和  $z - l'$  处速度相同，即： $u(\text{湍涡}, t) = \bar{u}(z - l', 0)$  将其代入  $u' = u(\text{湍涡}, t) - \bar{u}(z, 0)$ ，可得  $u' = \bar{u}(z - l', 0) - \bar{u}(z, 0)$

### 4.3.3 湍流粘性系数

#### 4.3.3.1 湍流粘性系数

湍流系数  $k_z = \overline{l'w'}$  往上  $w' > 0, l' > 0$  }  $\Rightarrow k_z = \overline{l'w'} > 0$  形式上类同分子粘性情形： $\tau_{zx} = \mu \frac{du}{dz} = \rho \gamma \frac{du}{dz}$   
往下  $w' < 0, l' < 0$  }

然而，分子粘性系数是物质常数；湍流粘性系数与湍流运动本身有关，不是物质常数，会变化。

输送方向  $T_{zx} \propto \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} > 0, T_{zx} > 0 & \text{由上往下 (上面风速大)} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} < 0, T_{zx} < 0 & \text{由下往上 (上面风速小)} \end{cases}$  同理， $T_{yx} = \bar{\rho} k_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$

湍流输送脉动动量是由平均动量高值区向低值区输送，混合效果使得平均运动梯度减弱。

系数的导出 设湍流运动各向同性的性质： $|w'| \approx |u'| \approx |v'|$  三个方向速度量级一致，又有  $u' = -l' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$

$$w' > 0, l' > 0; w' < 0, l' < 0 \xrightarrow{\text{消掉负号}} w' \approx l' \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \text{ 代入 } k_z = \overline{l'w'} = \overline{l'^2} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \xrightarrow{l^2 = \overline{l'^2}} l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \Rightarrow$$

$$k_z = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| > 0$$

$l$ ：平均混合长，简称混合长，其由经验给出。湍流粘性系数正比于混合长的平方。

#### 4.3.3.2 位焓湍流扩散系数

位焓系数  $K_{z\theta} = \overline{l'_\theta w'}$  同理： $\left. \begin{aligned} h_z &= \bar{\rho} \overline{C_p w' \theta'} \\ \theta' &= -l'_\theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_z = -\bar{\rho} C_p \overline{l'_\theta w'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = -\bar{\rho} C_p K_{z\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$

其中  $K_{z\theta}$  称位焓湍流扩散系数， $K_z$  动量湍流扩散系数，或称湍流粘性系数，两者通常不同。

方向  $h_z \propto -C_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0, h_z < 0, \text{ 向下} \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} < 0, h_z > 0, \text{ 向上} \end{cases}$  位焓输送是由大值区向小值区输送的。

## 4.4 湍流运动发展的判据

**章节引言** 本节需要解释的问题是**影响湍流运动的因子**（层结和平均运动）有哪些。

### 4.4.1 层结的作用

#### 4.4.1.1 稳定度及其判据

**层结状态** 大气密度随高度变化称为层结大气。层结分为**稳定**、**不稳定**、**中性**三种状态。

**基本方程**  $\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g$  单位质量气团所受的净浮力（没有受到扰动时，静力平衡）  $-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P}{\partial z} - g = 0$

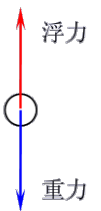
$\frac{\partial P}{\partial z} = -\bar{\rho}g$  气块内部气压与外部一致，大气**基本态静力平衡**（把外部环境看为基本态）

**净浮力**  $\rho \frac{dw}{dt} = \bar{\rho}g - \rho g$  **单位体积气团所受的净浮力**

$\bar{\rho}g$ 是排开周围环境气体的重量， $\rho g$ 是单位体积气团本身的重量。

**稳定性判定** 气团垂直向受到**净浮力**的作用，如果净浮力作正功，则不稳定，如果作负功，则稳定。

- ① **净浮力与位移一致**，则**作正功**，此时大气层结**不稳定**。
- ② 若相反，则作负功，大气**稳定**。
- ③ 若为零，则不做功，大气**中性**。



#### 环境大气的基本状态

**压强**:  $\bar{P}(z)$  由低层向高层，气柱的长度在减小  $\Rightarrow z \uparrow, \bar{P}(z) \downarrow$  随高度下降

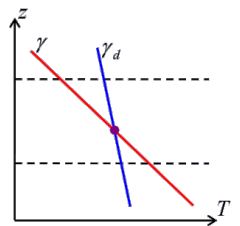
**密度**:  $\bar{\rho}(z)$  在重力的作用下，粒子集中在下层  $\Rightarrow z \uparrow, \bar{\rho}(z) \downarrow$  随高度下降

**温度**:  $\bar{T}(z)$  大气吸收地面的长波辐射而增温  $\Rightarrow z \uparrow, \bar{T}(z) \downarrow$  随高度下降

**递减率** **大气环境温度递减率**:  $\gamma = -\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$  （环境温度直减率，欧拉观点：偏导）

**气块本身的温度递减率**:  $\gamma_d = -\frac{dT}{dz}$  （干绝热递减率）

**公式扩展**  $\frac{dw}{dt} = \frac{\gamma - \gamma_d}{\bar{T}} g \delta z$  净浮力取决于**气团温度**和**环境温度**哪个减小的更快



不稳定层结情况

#### 温度形式的转换

此处涉及到气块的密度和环境的密度，然而密度不好测量，我们用温度来代替。

我们认为气块在上升过程中，满足以下条件：

① **准静力**：内部气压始终与环境气压一致，故气块在上升过程中通过膨胀使P下降

② **干绝热**：降温，由于热传导很慢， $P\rho^{-\kappa} = \text{Const}, \kappa = C_P/C_V$

$\rho \frac{dw}{dt} = \bar{\rho}g - \rho g \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho} g = \frac{\frac{\bar{P}}{RT} - \frac{P}{RT}}{\frac{P}{RT}} g = \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}} g$  气团上升过程中，周围气压减小，引起气团膨胀，温度、密度减小。同时，环境大气的密度、温度也在随高度减小。**净浮力取决于气团与环境大气的密度(温度)差**。因为  $T = T_0 + \frac{dT}{dz} \delta z = T_0 - \gamma_d \delta z$ ,  $\bar{T} = T_0 + \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \delta z = T_0 - \gamma \delta z$

所以  $\frac{dw}{dt} = \frac{(T_0 - \gamma_d \delta z) - (T_0 - \gamma \delta z)}{\bar{T}} g = \frac{\gamma - \gamma_d}{\bar{T}} g \delta z$

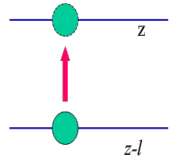
- 稳定度情况**
- ①  $\gamma > \gamma_d$  环境降温更快，气块温度大于周围温度，净浮力向上，**不稳定层结**，利于湍流发展。
  - ②  $\gamma < \gamma_d$  净浮力与位移相反，**稳定层结**，净浮力做负功，抑制湍流运动的发展。
  - ③  $\gamma = \gamma_d$  **中性层结**，净浮力=0，无影响

#### 一天中的稳定度情况

正午稳定度最不稳定，因为地面受热，环境递减率迅速增大。自由大气基本都是稳定层结，边界层可能出现不稳定层结。

#### 4.4.1.2 单位体积克服净浮力的功率

**湍涡受力** 单位质量湍涡受到的净浮力为:  $\frac{T_e - \bar{T}}{\bar{T}} g = \frac{-gl_T}{\bar{T}} (\gamma_d - \gamma)$



##### 推导

我们已经知道脉动量的关系:  $T_{z-l_T} = \bar{T} - l_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ 。而向上运动到达高度  $z$  时, **湍涡绝热降温为  $T_e$** ,  $\gamma_d = -\frac{dT}{dz} = -\frac{T_e - T_{z-l_T}}{l_T} \Rightarrow T_e = \bar{T} - l_T \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \gamma_d \right) = \bar{T} - l_T (\gamma_d - \gamma)$  将其代入  $\frac{dw}{dt} = \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}} g$  即可。

当  $\gamma_d > \gamma$ , 即不稳定时, 净浮力向上; 当  $\gamma_d < \gamma$ , 即稳定时, 净浮力向下。

**湍涡功率** 单位时间湍涡向上移动距离为  $w'$ , **克服净浮力消耗的功率为  $\frac{gl_T w'}{\bar{T}} (\gamma_d - \gamma)$**

**平均消耗的功率为  $\frac{g l_T \overline{w'}}{\bar{T}} (\gamma_d - \gamma)$**  定义湍流热扩散系数  $K_H = \overline{l_T w'}$ 。

故**单位体积湍涡所消耗的功率为  $\frac{\rho g K_H}{\bar{T}} (\gamma_d - \gamma)$**

#### 4.4.2 平均运动的作用

**总体作用** **湍流 (分子) 对平均运动 (宏观) 是耗散的**: 转化为湍流运动动能。即有序运动向无序运动的转化: 能量串级。如: 摩擦生热, 宏观运动动能转化为微观运动动能。**平均运动总是有利于湍流发展。**

**动能增加率**  $T_{zx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + T_{zy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \bar{\rho} K \left( \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial z} \right)^2$  为单位体积湍涡动能增加率

##### 推导

设平均运动只在  $z$  方向变化, **只考虑湍流运动**, 有:  $\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} T_{zx} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \right) = \bar{u} \frac{\partial}{\partial z} T_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} (T_{zx} \bar{u}) - T_{zx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} T_{zy} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \bar{v}^2}{2} \right) = \bar{v} \frac{\partial}{\partial z} T_{zy} = \frac{\partial}{\partial z} (T_{zy} \bar{v}) - T_{zy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \end{cases}$

将两式相加:  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (T_{zx} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (T_{zy} \bar{v}) - (T_{zx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + T_{zy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z})$  即为平均水平动能方程。

自地表积分至边界层顶, 有边界条件:  $z = 0: \bar{u} = \bar{v} = 0; z = De: T_{zx} = T_{zy} = 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{De} \frac{\rho \bar{V}_h^2}{2} dz = - \int_0^{De} \left( T_{zx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + T_{zy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) dz$$

又考虑到  $T_{zx} = \bar{\rho} K \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, T_{zy} = \bar{\rho} K \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$ , 最终得到:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{De} \frac{\rho \bar{V}_h^2}{2} dz = - \int_0^{De} \bar{\rho} K \left( \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial z} \right)^2 dz$$

即平均流垂直切变的平方, 负号表明湍流总是耗散平均流的动能。

#### 4.4.3 理查森数判据

**湍涡变化** 湍涡增强还是减弱, 取决于消耗的能量(稳定层结)和供给能量(平均运动)的大小。

① 当湍涡**克服净浮力消耗的功率**大于其**动能增加率**时, **湍流运动减弱**:

$$\bar{\rho} K \left( \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial z} \right)^2 < \frac{\bar{\rho} g K_H}{\bar{T}} (\gamma_d - \gamma) \text{ 此时, } \frac{\frac{g(\gamma_d - \gamma)}{\bar{T}}}{\left( \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial z} \right)^2} > \frac{K}{K_H} \quad K \text{ 湍流粘性系数; } K_H \text{ 湍流热扩散系数}$$

② 当湍涡**克服净浮力消耗的功率**小于其**动能增加率**时, **湍流运动增强**:

$$\bar{\rho} K \left( \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial z} \right)^2 > \frac{\bar{\rho} g K_H}{\bar{T}} (\gamma_d - \gamma) \text{ 此时, } \frac{\frac{g(\gamma_d - \gamma)}{\bar{T}}}{\left( \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial z} \right)^2} < \frac{K}{K_H}$$

**Ri 数定义**  $Ri = \frac{\text{反抗层结做功的湍能耗散率}}{\text{平均运动的湍能供给率}} = \frac{\frac{g}{T}(\gamma_d - \gamma)}{\left(\frac{\partial \bar{v}_h}{\partial z}\right)^2} = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial \bar{v}_h}{\partial z}\right)^2}$  其中  $N^2 = \frac{g}{T}(\gamma_d - \gamma)$  为 Brunt-Vaisala 频率

- ①  $\gamma_d - \gamma > 0, N^2 > 0$ , 稳定层结, 耗散。
- ②  $\gamma_d - \gamma < 0, N^2 < 0$ , 不稳定层结, 负耗散即为供给。

**临界 Ri 数** 我们定义一个**临界数**来判断湍流发展还是耗散。

- ①  $Ri < Ri_c \Rightarrow$  **湍流发展** 此时分子 $>0$ 时, 耗散 $<$ 供给; 分子 $<0$ 时, 无耗散, 全部是供给。
- ②  $Ri > Ri_c \Rightarrow$  **抑制湍流**, 耗散 $>$ 供给

**临界值  $Ri_c$  不是固定值**, 与流场有关, 变化范围 1.5~0.042。实际中, 一般取  $Ri_c = \frac{4}{11} \approx 0.36$

**位温形式** Ri 数还可写为位温形式:  $Ri = \frac{g \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{v}_h}{\partial z}\right)^2}$

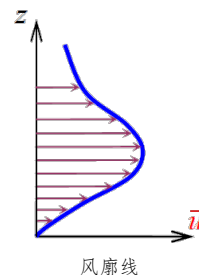
**物理含义** 湍流运动与**温度层结**和**风的垂直切变**有关。**层结越不稳定, 风的垂直切变越强, 则湍流活动越强。**因此, 容易发生湍流的区域有:

- ① **近地层** 层结不稳定,  $N^2 < 0$  地表加热导致环境温度直减率很大
- ② **对流层顶**  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$  很大, 常见高空急流, 导致**晴空湍流 CAT (Clear-air turbulence)**
- ③ **大气边界层**  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \rightarrow \max$ , 低空强垂直风切变
- ④ **锋面、飚线附近**  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$  很大

## 4.5 近地面层风随高度的分布

### 章节引入

了解不同层结大气中近地面层风的垂直分布对大气湍流、大气扩散、建筑物安全、飞行器发射等具有重要意义。



### 4.5.1 常值通量层的概念

**概念** 边界层最重要的特性是: **湍流性物理量输送**, 据观测近地面层中:  $|T_{zx}| \gg |\Delta T_{zx}|$  近地面层中, **物理量的通量几乎不随高度变化**, 因此又称**近地面层**称为**常值通量层**。

### 4.5.2 摩擦速度与摩擦速度方程

**中心目标** 求解  $\bar{u}(z)$

**摩擦速度** 近地面层是常值通量层, 湍流粘性应力不随高度改变, 风向不随高度改变(风速会变化)。

设  $x$  轴沿湍流粘性应力的方向, 且风向也沿  $x$  轴不改变。湍流黏性应力  $\bar{T}_z = \bar{T}_0 = \text{常矢量}$

取  $x$  轴沿  $\bar{T}_z$  方向, 则有:  $T_{zx} = \bar{\rho} l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  (4.3.2.2 参数化中  $T_{zx} = \bar{\rho} k_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ , 混合长理论  $k_z = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$ )

在近地面层中, 因为  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} > 0$ , 所以  $\bar{\rho} l^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 = T_0$   $l \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \sqrt{\frac{T_0}{\bar{\rho}}} = u^* = \text{Const}$   $u^*$  称为**摩擦速度**

**性质** ① 摩擦速度是常量 ② 根据量纲齐次性原理, 其有速度的量纲 ③ 它体现**湍流粘性力  $T_0$** 的大小

**待求解方程**  $l \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u^*$  求  $\bar{u}$  的基本思路:  $u^*$  可以通过观测来测量,  $l$  仍然未知。



## 4.5.3 风廓线的一般解法

**基础方程**  $l \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u^* \Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u^*}{l(z)}$  ① 一阶方程给一个边界条件就可以求解 ② 假设已知混合长  $l$

**边界条件**  $\bar{u}|_{z=z_0} = 0$  离地面一定高度  $z_0$  上风速减小到零,  $z_0$  体现了**地面状况粗糙程度**, 称为**粗糙度**。

### 粗糙度

粗糙度  $z_0$  反映了地表对风速的减弱作用, 取决于下垫面的性质 (粗糙程度、几何高度、形状、密度等)。风洞实验表明  $z_0$  的典型值约为覆盖下界面粗糙物平均高度的 1/30。

**求解**  $\Rightarrow \bar{u}(z) = \int_{z_0}^z \frac{u^*}{l(z)} dz$  **混合长  $l$  是与层结和高度有关的物理量**, 所以**不同层结下风廓线不同**。

**湍流强度** 取决于: **热力作用** (层结越稳定越弱) + **动力作用** (固壁地面作用, 越近越弱, 平均运动)

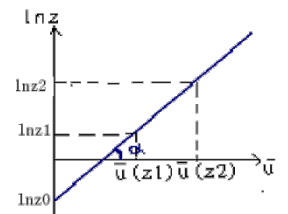
## 4.5.4 中性层结下的风廓线

**环境情况** 中性层结下层结对湍流不起作用, 即不考虑热力作用。仅考虑动力作用: 近地面层中, 越接近地面, 受到地面的限制越多, 湍流走的距离越短,  $l$  就越小, 所以做出如下假设:

**混合长** 设  $l = \kappa z$ , 其中  **$\kappa$  卡曼常数**, 一般  $\kappa = 0.4$ , 观测值介于 0.35-0.42。

**求解**  $\bar{u}(z) = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}$   $\bar{u} = \frac{u^*}{\kappa} (y - y_0)$  (对数坐标下)

在近地面层中的**中性层结下**, 风随高度变化**满足对数率分布**。



### 风速求解

直接求解:  $\bar{u}(z) = \int_{z_0}^z \frac{u^*}{\kappa z} dz = \frac{u^*}{\kappa} (\ln z - \ln z_0) = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}$  为方便计算, 引入对数坐标, 令  $y = \ln z$

则  $\bar{u} = \frac{u^*}{\kappa} (y - y_0)$  为一直线, 斜率为  $\tan \alpha = \frac{\kappa}{u^*}$ ,  $z$  轴上的截距为  $y_0 = \ln z_0$ 。

**实际应用** 两个点可以确定一直线, 所以两个高度上有观测, 就可以得到**风廓线**, 进而得到  $u^*$  及  $z_0$ 。

## 4.5.5 非中性层结下的风廓线

**混合长假设** 前苏联学者**拉依赫曼假设**:  $l = Az^{1-\varepsilon}$   $\begin{cases} -1 < \varepsilon < 0 & \leftarrow \text{不稳定层结} \\ \varepsilon = 0 & \leftarrow \text{中性层结} \\ 0 < \varepsilon < 1 & \leftarrow \text{稳定层结} \end{cases}$

$\varepsilon$  是一个与层结有关的参量,  $A$  是层结与粗糙度的待定函数, 即  $A(z_0, \varepsilon)$

### $A(z_0, \varepsilon)$ 的确定

在  $z = z_0$  处, 由于固壁, 动力作用  $\gg$  热力作用  $\Rightarrow$  近似为中性的。即:  $l|_{z=z_0} = Az_0^{1-\varepsilon} \approx \kappa z_0$

$\Rightarrow A(z_0, \varepsilon) = \kappa z_0^\varepsilon$  原式变为:  $l = Az^{1-\varepsilon} \Rightarrow l = \kappa z_0^\varepsilon z^{1-\varepsilon}$  故积分风廓线一般形式有:

$$\bar{u}(z) = \frac{u^*}{\kappa} \int_{z_0}^z z_0^{-\varepsilon} z^{\varepsilon-1} dz = \frac{u^*}{\kappa \varepsilon} \left[ \left( \frac{z}{z_0} \right)^\varepsilon - 1 \right], \quad [(x^a)' = ax^{a-1}]$$

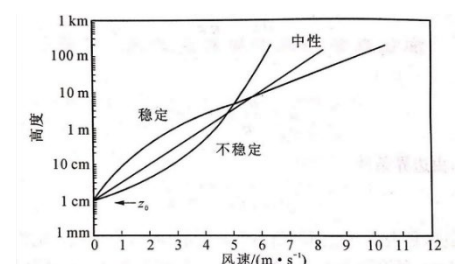
如果是中性层结: 可证  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u^*}{\kappa \varepsilon} \left[ \left( \frac{z}{z_0} \right)^\varepsilon - 1 \right] = \frac{u^*}{\kappa} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{z}{z_0} \right)^\varepsilon \ln \frac{z}{z_0} = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}$  退化为对数率。

**求解结果** **非中性层结下, 风廓线满足指数律**。当  $\varepsilon = 0$  时, 退化为中性层结的对数律。

**风切变情况** **稳定 > 中性 > 不稳定**

**稳定层结下**, 湍流混合弱, 风速切变大。

**不稳定层结下**, 湍流混合强, 上层动量传递到下层, 导致整体风速趋平, **风速**切变小。



近地层中典型风速廓线示意图

**底层风速**      **稳定<中性<不稳定**      稳定层结下，湍流受到抑制，动量难以下传，底层风速小。  
 不稳定层结下，湍流易发展，动量下传，底层风速大。

**日变化**      ① 清晨或傍晚，近中性层结，风廓线接近对数律。  
 ② 白天太阳辐射强，温度超绝热递减，不稳定层结，风廓线为下凹型。  
 ③ 夜晚地面辐射降温，稳定层结，风廓线为上凸型。

## 4.6 埃克曼层风随高度的分布

**总体情况**      上部摩擦层(Ekman 层)中，风廓线不仅有速度的变化，也有方向的变化。

**重要特点**      近似满足三力平衡： $-\frac{1}{\rho}\nabla p - f\vec{k} \times \vec{V} + \vec{F}_k = 0$       由于湍流粘性力的作用，风穿越等压线，从高压指向低压。存在地转偏差，有水平辐合辐散产生。

### 4.6.1 定解问题

**中心目标**      **求解  $u(z), v(z)$**       假设加速度为 0（三力平衡）      且由于都是平均量，方程中去除  $\bar{\phantom{x}}$ 。

#### 定解问题的导出

考虑到垂直项的输送  $\gg$  水平项的输送，且  $T_{zx} = \bar{\rho} k_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ ，三力平衡中湍流粘性力（x 方向）可以写为： $\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zx} \right) \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho K \frac{\partial u}{\partial z})$ ，其中  $K$  为湍流粘性系数。对  $y$  方向的湍流粘性力也做类似的近似，则三力平衡：

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho K \frac{\partial u}{\partial z}) = 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho K \frac{\partial v}{\partial z}) = 0 \end{cases} \quad \text{引入地转风，令 } \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -f v_g \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f u_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(v - v_g) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho K \frac{\partial u}{\partial z}) = 0 \\ -f(u - u_g) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho K \frac{\partial v}{\partial z}) = 0 \end{cases}$$

把 **x 轴取在等压线上**，则  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_g = 0$ ，假设  **$\rho = \text{Const}, K = \text{Const}$** ， $\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{f}{K} v = 0 \dots\dots\dots ① \\ \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{f}{K} (u - u_g) = 0 \dots\dots\dots ② \end{cases}$

**微分方程组**       $\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{f}{K} v = 0 & ① \\ \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{f}{K} (u - u_g) = 0 & ② \end{cases}$       **二元二阶常系数的微分方程组**

**边界条件**       $\begin{cases} z = 0 \text{ 时, } u = v = 0 & \text{底部风速为零} \\ z \rightarrow \infty \text{ 时, } u \rightarrow u_g, v \rightarrow v_g \rightarrow 0 & \text{顶部完全变为地转风} \end{cases}$

### 4.6.2 上部摩擦层中风随高度的变化

**求解方法**      **复数解法**：求解矢量方程，其只包含一个未知数，一个方程。  $\frac{d^2 \vec{V}}{dz^2} - \frac{1}{K} \vec{f} \times (\vec{V} - \vec{V}_g) = 0$

#### 具体求解

矢量与复数在几何表达上具有一致性： $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$       则速度可以变为： $\tilde{W} = u + iv \Rightarrow$  复速度  $\tilde{W}_g = u_g +$

$iv_g \Rightarrow$  复地转速度。原方程： $\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{f}{K} v = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dz^2} - i \cdot \frac{f}{K} v = 0 \rightarrow ① \\ \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{f}{K} (u - u_g) = 0 \Rightarrow i \frac{d^2 v}{dz^2} - i \frac{f}{K} (u - u_g) = 0 \rightarrow ② \times i \end{cases}$       两式相加：①+②  $\times i$

得到一元二阶常系数非齐次方程  $\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \tilde{W}}{dz^2} - i \frac{f}{K} (\tilde{W} - u_g) = 0 \\ z = 0, \tilde{W} = 0 \\ z \rightarrow \infty, \tilde{W} \rightarrow u_g \end{cases}$       使其齐次化：令  $\tilde{W}' = \tilde{W} - u_g = \tilde{W} - \tilde{W}_g$  为

复地转偏差。假设气压梯度力不随高度变化，即地转风不随高度变化。因为  $\frac{d^2 \tilde{W}_g}{dz^2} = 0$  所以  $\frac{d^2 \tilde{W}'}{dz^2} = \frac{d^2 \tilde{W}}{dz^2}$ ，代入非齐

次方程，可得齐次方程：
$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{W}'}{dz^2} - i \frac{f}{K} \tilde{W}' = 0 \\ z=0, \tilde{W}' = -u_g \\ z \rightarrow \infty, \tilde{W}' \rightarrow 0 \end{cases}$$
 其特征根为：
$$r^2 = i \frac{f}{K} \Rightarrow r = \pm \sqrt{i \frac{f}{K}}$$
 其通解为：
$$\tilde{W}' = A e^{\sqrt{i \frac{f}{K}} z} + B e^{-\sqrt{i \frac{f}{K}} z}$$

又考虑到：
$$\tilde{W}'|_{z \rightarrow \infty} = 0 \Rightarrow A = 0, \tilde{W}'|_{z=0} = -u_g \Rightarrow B = -u_g$$
 因此特解为：
$$\tilde{W}' = -u_g e^{-\sqrt{i \frac{f}{K}} z} = \text{Re}(\tilde{W}') + i \cdot \text{Im}(\tilde{W}')$$
 因为
$$i = \frac{2i}{2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{(1+i)^2}{2}$$
 所以
$$\tilde{W}' = -u_g e^{-(1+i)\sqrt{\frac{f}{2K}} z} = -u_g e^{-\frac{z}{h_E}} e^{-i \frac{z}{h_E}}$$

我们称
$$h_E = \sqrt{\frac{2K}{f}}$$
 为 Ekman 标高（特征厚度）
$$\Rightarrow \tilde{W}' = -u_g e^{-\frac{z}{h_E}} (\cos \frac{z}{h_E} - i \sin \frac{z}{h_E})$$
 而
$$\tilde{W}' = u + iv - u_g \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u(z) = u_g (1 - e^{-\frac{z}{h_E}} \cos \frac{z}{h_E}) \\ v(z) = u_g e^{-\frac{z}{h_E}} \sin \frac{z}{h_E} \end{cases}$$

风速变化 上部摩擦层(Ekman 层)中风速随高度的变化：
$$\begin{cases} u(z) = u_g \left(1 - e^{-\frac{z}{h_E}} \cos \frac{z}{h_E}\right) \\ v(z) = u_g e^{-\frac{z}{h_E}} \sin \frac{z}{h_E} \end{cases}$$
 其中
$$h_E = \sqrt{\frac{2K}{f}}$$

- U 分量**
- ①  $z < (\pi/2)h_E$   $u$  随高度快速上升
  - ②  $z = (\pi/2)h_E$   $u = u_g$
  - ③  $z = (3\pi/4)h_E$   $u$  达到最大值
  - ④  $z > (\pi/2)h_E$   $u$  随高度变化慢，逐渐接近  $u_g$
- V 分量**
- ①  $z = (\pi/4)h_E$   $v$  达到最大值
  - ②  $z < \pi h_E$   $v > 0$ ，风指向低压
  - ③  $z = \pi h_E$  第一次  $v = 0$ ， $u > u_g$ （梯度风高度）
  - ④  $z > \pi h_E$   $v$  在 0 附近徘徊

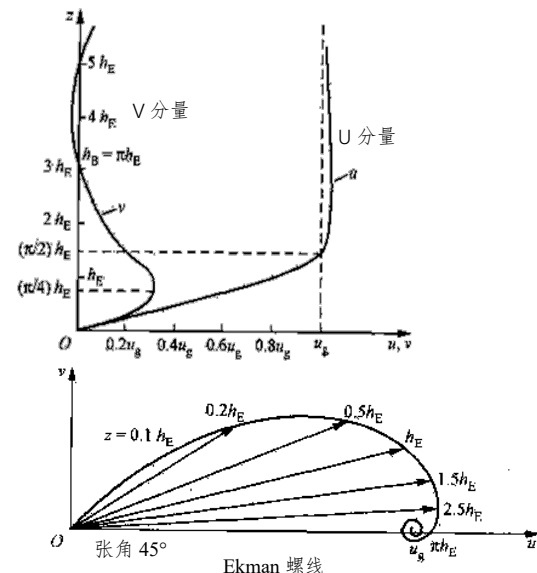
**Ekman 螺线** 在三力平衡之下，各高度上的风速矢端迹在水平面上的投影。上部摩擦层中，风随高度的分布满足 Ekman 螺线律。

**风速大小**

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = u_g \sqrt{1 - 2e^{-z/h_E} \cos z/h_E + e^{-2z/h_E}}$$

**风速方向** 风速与地转风向( $x$ 向)夹角：
$$\tan \theta = \frac{v}{u} = \frac{e^{-z/h_E} \sin z/h_E}{1 - e^{-z/h_E} \cos z/h_E}$$

$z \rightarrow 0$  时：  $\tan \theta \rightarrow 1$ ，即  $\theta \rightarrow 45^\circ$ 
 $z \uparrow \Rightarrow \begin{cases} \theta \downarrow \\ V \uparrow \end{cases}$  风向随高度右旋  
 风速随高度增大



## 4.6.3 Ekman 螺线的性质

### 4.6.3.1 风向随高度的变化

- 规律一**  $z = 0, \tan \theta \rightarrow 1, \theta \rightarrow 45^\circ$  **规律二**  $z \uparrow, \tan \theta \downarrow \Rightarrow$  风向随高度右旋
- 规律三**  $z > h_B$  梯度风高度后，随高度增加，风向在地转风向附近摆动，幅度逐渐减小。
- 规律四**  $z \rightarrow \infty$ ，风向趋近于地转风向。
- 梯度风高度** 风向第一次与地转风向一致的高度，称为梯度风高度  $h_B$ ，此时  $\tan \theta = 0$ 。

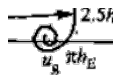
满足：
$$\sin \frac{z}{h_E} = 0 \Rightarrow \frac{z}{h_E} = n\pi$$
 当  $n = 1$  时，
$$h_B = \pi h_E = \pi \sqrt{\frac{2K}{f}}$$

- 规律**
- ①  $K$  越大，湍流越强，边界层厚度越厚。
  - ② 纬度越低， $f$  越小，边界层厚度越厚。热带地区边界层顶高于中纬度边界层。
- 注意** 通常取梯度风高度  $h_B$  为边界层顶的高度
- 从上式可看出， $h_E$  为边界层顶的特征厚度， $h_B$  为边界层顶的厚度。
- 典型值** 若  $K = 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \Rightarrow h_B = 10^3 \text{ m}$  若  $K = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \Rightarrow h_B = 1.5 \times 10^3 \text{ m}$
- 也可以根据实际边界层顶的值反推  $K$ 。

### 4.6.3.2 风速随高度变化

规律一	$z = 0, V = 0$	初始风速为零
规律二	$z \uparrow, V \uparrow$ , 直至 $z = h_B, V > u_g$	风速随高度上升, 直到边界层顶, 此时风速大于地转风
规律三	$z > h_B$ , 此时高度上升	$V$ 也在地转风速附近摆动, 且幅度逐渐减小
规律四	$z \rightarrow \infty, V \rightarrow V_g$	最终风速趋近于地转风风速

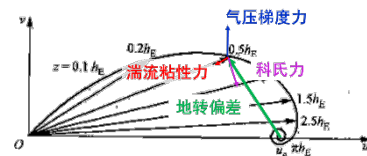
#### 注意



Ekman 解在  $z$  很大时绕地转风呈现螺旋旋转的性质是数学解的结果, 本身没有物理意义 (这样一种螺旋线)。应用时  $z$  取  $1 \sim 1.5 \text{ km}$  就够了。

### 4.6.3.3 上部摩擦层中湍流粘性力随高度的变化

变化情况  $K \frac{d^2 \tilde{W}'}{dz^2} = f |\tilde{W}'| e^{i(\theta_{\tilde{W}'} + \frac{\pi}{2})}$  大小:  $f |\tilde{W}'|$  方向:  $\theta_{\tilde{W}'} + \frac{\pi}{2}$



#### 变化推导

$x, y$  向的湍流粘性力:  $K \frac{d^2 u}{dz^2}; K \frac{d^2 v}{dz^2}$ , 写在复平面上  $K \frac{d^2 u}{dz^2} + i K \frac{d^2 v}{dz^2} = K \frac{d^2 \tilde{W}}{dz^2} = K \frac{d^2 \tilde{W}'}{dz^2}$ ,  $\frac{d^2 \tilde{W}'}{dz^2} - i \frac{f}{K} \tilde{W}' = 0 \Rightarrow K \frac{d^2 \tilde{W}'}{dz^2} = i f \tilde{W}' = e^{i\frac{\pi}{2}} f |\tilde{W}'| e^{i\theta_{\tilde{W}'}} \Rightarrow K \frac{d^2 \tilde{W}'}{dz^2} = f |\tilde{W}'| e^{i(\theta_{\tilde{W}'} + \frac{\pi}{2})}$

方向说明 垂直于  $\tilde{W}'$  在其左侧, 即湍流粘性力垂直于地转偏差, 在其左侧。

具体表达  $\vec{F}_T = K \frac{d^2 \tilde{W}'}{dz^2} = i f \tilde{W}' = i f \left( -u_g e^{-\frac{z}{h_E}} e^{-\frac{iz}{h_E}} \right) = f u_g e^{-z/h_E} e^{-i(\frac{\pi}{2} + \frac{z}{h_E})}$   $\vec{F}_T = f u_g e^{-z/h_E} e^{i(\frac{3\pi}{2} - \frac{z}{h_E})}$

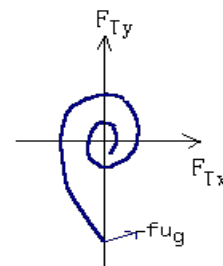
大小  $z = 0, F_T = f u_g$  随高度增加,  $F_T$  呈  $e$  指数衰减

方向  $z = 0, \theta = -\frac{\pi}{2}$  或  $\frac{3\pi}{2}$   $z \uparrow, \theta \downarrow$  右旋

地表处  $\vec{V} = 0, \vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_g = 0 - \vec{V}_g = -\vec{V}_g, z = 0, F_T = f u_g$ , 与  $x$  轴的夹角为  $90^\circ$

梯度风高度  $z = h_B, F_T = f u_g e^{-\pi}$ , 与  $x$  轴的夹角为  $\frac{\pi}{2}$

做功量 北半球, 只要风偏向低压 ( $v > 0$ ), 湍流粘性力做负功。



#### 湍流粘性力所做的功

有  $\vec{F}_T = K \frac{d^2 u}{dz^2} \vec{i} + K \frac{d^2 v}{dz^2} \vec{j}$ , 故单位体做功量为:  $\vec{F}_T \cdot \vec{V}_h = K \frac{d^2 u}{dz^2} u + K \frac{d^2 v}{dz^2} v$ , 考虑到:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{f}{K} v = 0 & \text{①} \\ \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{f}{K} (u - u_g) = 0 & \text{②} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_T \cdot \vec{V}_h = -f v u + f (u - u_g) v = -f u_g v$$









