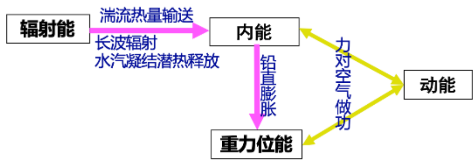
第五章 大气能量学



引言

能量转换和守恒定律是物质运动所遵循的普通规律，大气中各种不同尺度运动的产生、发展和消亡，实质上是系统运动能量的积累、爆发和转换的结果。研究大气能量过程也是研究大气运动的有效途径。大气中常见的能量形式：辐射能、内能、重力位能、动能。

5.1 大气中主要能量形式

5.1.1 主要能量形式

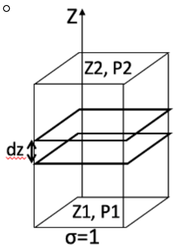
主要形式 位能 *Gravitational potential energy*、内能 *Internal energy*、动能 *Kinetic energy*、潜热能 *Latent heat*

过程分析 ① 最初的源是太阳辐射能，但大气只吸收很少一部分辐射能，其主要被地表吸收，然后通过湍流热量输送、辐射热量传递、水汽凝结潜热释放使大气得到热能，其导致大气内能增加。

② 非绝热加热使大气内能增加同时，引起在铅直方向膨胀，从而增加重力位能。

③ 太阳辐射能不能直接转换成大气动能，动能是由内能和重力位能转换来的，而且只包含力的过程，通过力对空气的做功实现内能、重力位能、动能之间的转换，且在热力学上是可逆的。

能量学研究 只需要知道**初态和终态**，对中间过程不关心。



5.1.1.1 位能

定义 质点处于地球表面附近重力场中的任一点，都具有重力势能，即位能 $\Phi = gz$。

公式 $\Phi = \int_{z_1}^{z_2} \rho gzdz = \int_{P_2}^{P_1} zdp$

单位截面积气柱的位能的推导

考察单位截面积、dz厚度的气块薄片：dz薄片的质量为 $\rho \cdot 1 \cdot dz = \rho dz$，则$dz$薄片的位能：$\delta\Phi = \rho gzdz$，则 $z_1 \sim z_2$ 单位截面积气柱所具有的总位能：$\Phi = \int_{z_1}^{z_2} \rho gzdz$。利用静力学方程 $dp = -\rho gdz \Rightarrow dz = -\frac{dp}{\rho g}$，则

$$\Phi = \int_{z_1}^{z_2} \rho gzdz = \int_{p_1}^{p_2} \rho gz - \frac{dp}{\rho g} = -\int_{P_1}^{P_2} zdp = \int_{P_2}^{P_1} zdp$$

5.1.1.2 内能

定义 单位质量气块具有内能为 $I = C_V T$。 C_V为定容比热，大气数值为 $715.8\,J/kg \cdot K$

公式 $I = \frac{C_V}{g}\int_{P_2}^{P_1} Tdp$

单位截面积气柱的内能的推导

dz 厚度的簿块的内能：$dI = C_V T\rho dz$，$z_1 \sim z_2$ 单位截面积气柱所具有的内能：$I = C_v \int_{z_1}^{z_2} T\rho dz$，$p$坐标下：

$$I = C_V \int_{z_1}^{z_2} T\rho dz = -\frac{C_V}{g}\int_{P_1}^{P_2} TdP = \frac{C_V}{g}\int_{P_2}^{P_1} TdP$$

5.1.1.3 动能

定义 单位质量气块所具有动能 $K = \frac{1}{2}V^2$ 其中 $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$

公式 $K = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2}\rho V^2 dz = \frac{1}{2g}\int_{P_2}^{P_1} V^2 dp$

单位截面积气柱的动能的推导

dz厚度的簿块的动能：$dK=\frac{1}{2}V^2\rho d$，z坐标下：$K=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{2}\rho V^2dz$，p坐标下：$K=-\frac{1}{2g}\int_{P_1}^{P_2}V^2dP=\frac{1}{2g}\int_{P_2}^{P_1}V^2dP$

5.1.1.4 潜热能

定义 系统中**所有水汽全部凝结所释放的能量**。实际大气中的潜热能不会被全部释放：对流降水潜热释放能够调整大气，使得原有的不稳定大气逐渐变得稳定，并停止对流凝结，致使潜热能不会完全释放。

汽化热L **相变潜热** **单位质量**水汽化到气态所**吸收的热量**，即单位质量水凝结所能释放的热量。

比湿 q =水汽质量/空气质量。则单位质量湿空气的潜热能为：$\boldsymbol{H=Lq}$ 如果把潜热能错误地理解为相变时释放的热量，潜热能应为$L\Delta q$（这里的Δq特指水汽相变导致的比湿的变化，不考虑混合、夹卷等过程）

公式 $\boldsymbol{H=\int_{z_1}^{z_2}Lq\rho dz=\frac{L}{g}\int_{P_2}^{P_1}qdP}$

单位截面积气柱的潜热能的推导

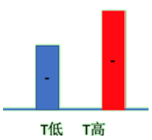
dz厚度的簿块的潜热能：$dH=Lq\cdot\rho dz$，$z_1\sim z_2$ 单位截面积气柱所具有的潜热能：

$$H=\int_{z_1}^{z_2}Lq\rho dz=-\frac{L}{g}\int_{P_1}^{P_2}qdP=\frac{L}{g}\int_{P_2}^{P_1}qdP$$

注意 由此可见，潜热能和实际大气的比湿q密切相关，潜热能的释放与降水相对应。
因此，中高纬度地区下雨少，q小，潜热能的释放也少，故H对中高纬天气系统不是很重要（重要的是斜压不稳定，即有效位能），但在热带地区，H对天气系统变化非常重要。

5.1.2 气柱位能和内能的关系

基本情况 一般对于固体而言，位能（机械能）与内能（热力学能）是无关的。而大气有其特殊性：
① 质量基本守恒 **② 表面积不变**



质量基本守恒

$\int_0^{\infty}\rho dz=-\int_{P_s}^{P_\infty}\frac{dP}{g}=-\frac{1}{g}\int_{P_s}^{P_\infty}dP=\frac{P_s}{g}$ 可见，单位面积空气柱的质量是由柱底的气压决定的。

然而，气压的变化是很小的（台风也仅仅 50hPa 的变化），因此认为各个空气柱的质量应相当接近。

物理关系 从物理定性角度分析：温度升高→**内能增加**→气柱膨胀→质心抬升→**位能增加**
大气的**内能**与**位能**之间是**同向变化**：如果大气**动能增加**，必定是**内能**与**位能**同时减少向动能转换。

5.1.2.1 无限高气柱的情形

证明结论 下面证明在静力平衡条件下，无限高气柱所包含的**内能和位能成正比**。

位能 $\boldsymbol{\Phi=R\int_0^{\infty}\rho Tdz}$ **内能** $\boldsymbol{I=C_v\int_0^{\infty}\rho Tdz}$ （原始形式）

位能与温度的关系推导

$\Phi=\int_{P_2}^{P_1}zdP=\int_0^{P_0}zdP=\int_0^{P_0}[d(zP)-Pdz]=zP|_{P\to0,z\to\infty}^{P_0,z=0}-\int_{\infty}^{0}Pdz$。显然，地面 $P=P_0,z=0\Rightarrow zP|_{P_0,z=0}=0$。高空考虑到气压满足 $P\sim e^{-\alpha z}\Rightarrow\lim_{z\to\infty}zP=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^{\alpha z}}=0$。因此 $\Phi=\int_0^{\infty}Pdz=\int_0^{\infty}\rho RTdz=R\int_0^{\infty}\rho Tdz$

比值 $\frac{\boldsymbol{\Phi}}{\boldsymbol{I}}=\frac{R}{C_v}=\frac{C_p-C_v}{C_v}\approx0.41\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{\Phi\propto I}}$
在静力平衡条件下，**从海平面向上伸展到大气顶部的单位截面积的垂直气柱（必要前提：无限高气柱）**所包含的**位能**和**内能**都是与**温度**有关，同向变化。
当整个气柱增温后，内能必然增加，而当温度增加，气柱又会垂直膨胀，从而位能增加。

5.1.2.2 全位能与热焓

全位能 对无限高气柱而言，大气的内能与位能成正比，且同时增减，故可以把它们结合起来考虑。

定义：**全位能E = 位能ϕ +内能I** $\boxed{E = I + \phi = c_vT + gz} = c_p\int_0^{\infty}\rho T dz$ （无穷高）

全位能的导出

$$E = I + \phi = I + \frac{RI}{c_v} = \frac{c_v+R}{c_v}I = \frac{c_p}{c_v}I = \frac{c_p}{c_v}\cdot c_v\int_0^{\infty}\rho T dz = c_p\int_0^{\infty}\rho T dz \quad \text{（适用于无限高情况）}$$

热焓 ***Enthalpy***，将单位质量气块的 c_pT 称为**焓**。 c_p为**定压比热**，大气数值为 $1005\ J/kg\cdot K$

焓和内能的关系是：$c_pT = c_vT + RT = c_vT_{\text{内能}} + p/\rho_{\text{压力能}}$ 即气柱的全位能就是气柱的焓

单位质量空气块所具有的焓称为**显热能（感热能）**，只与温度有关。

5.1.2.2 有限高气柱的情形

概述 对**有限高气柱**而言，位能不是简单的与内能成正比，还与气柱的底部、顶部的高度和气压有关。

公式 $\Phi = z_1P_1 - z_2P_2 + 0.41I$

有限高气柱位能和内能的关系

从位能定义出发$\Phi = \int_{p_2}^{p_1} zdp = zp|_{z_2,p_2}^{z_1,p_1} - \int_{z_2}^{z_1} pdz = (z_1p_1 - z_2p_2) + \int_{z_1}^{z_2} pdz = (z_1p_1 - z_2p_2) + R\int_{z_1}^{z_2}\rho T dz$

$= (z_1p_1 - z_2p_2) + \frac{R}{c_v}\int_{z_1}^{z_2} c_v\rho T dz$。发现 $I = c_v\int_{z_1}^{z_2} T\rho dz$，$\frac{R}{c_v} = \frac{287}{715.8}$，因此 $\Phi = z_1P_1 - z_2P_2 + 0.41I$。

全位能 $E = \phi + I = z_1P_1 - z_2P_2 + \frac{R}{c_v}I + I = z_1P_1 - z_2P_2 + \int_{z_1}^{z_2} c_p\rho T dz$

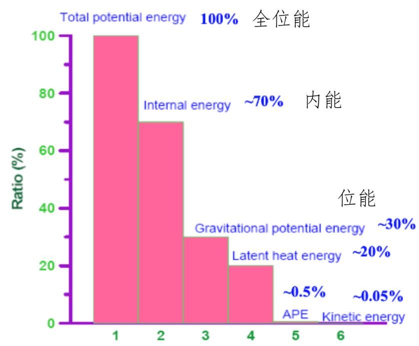
5.1.2.3 基本能量的比较

性质一 位能与内能具有同时增加或者减少的性质，且它们之间有确定比例，平均而言**位能是内能的 40%**。

性质二 在全位能中，**位能 30%，内能大约占 70%**。

性质三 平均而言，**潜热能相当于全位能的 20%**，这说明大气中潜热能应占有一定的地位，特别对强烈发展的系统（例如台风）。

性质四 在诸种能量形式中，**动能**在数量上一般较其它形式的能量小，**动能比全位能小 2-3 个量级**。虽然从数量上看，动能与全位能相比微不足道，但是这个小量对大气运动至关重要。这也说明，大气中全位能转变为动能的只是其中很小部分。



整个大气气柱各种能量的比较

首先给出一些常用典型值：

$R = 287J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}$ $c_v = 717J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}$ $c_p = 1004J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}$

$L = 2.5\times 10^6 J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}$ $C_L = \sqrt{\kappa RT} \approx 300m\cdot s^{-1}$ $V = 15m\cdot s^{-1}$

$\overline{q} = 2\%$ $T = 250K$ $T' = 15K$

那么各个能量的比值有：

$\frac{\text{位能}}{\text{内能}}$：$\frac{\Phi}{I} = \frac{g^{-1}\int_0^{p0} RTdp}{g^{-1}\int_0^{p0} c_vTdp} = \frac{R}{c_v} \approx \mathbf{0.4}$

$\frac{\text{内能}}{\text{全位能}}$：$\frac{I}{E} = \frac{g^{-1}\int_0^{p0} c_vTdp}{g^{-1}\int_0^{p0} c_pTdp} = \frac{c_v}{c_p} \approx \mathbf{0.7}$

$\frac{\text{位能}}{\text{全位能}}$：$\frac{\Phi}{E} = \frac{g^{-1}\int_0^{p0} RTdp}{g^{-1}\int_0^{p0} c_pTdp} = \frac{R}{c_p} \approx \mathbf{0.3}$

$\frac{\text{潜热能}}{\text{全位能}}$：$\frac{H}{E} = \frac{g^{-1}\int_0^{p0} Lqdp}{g^{-1}\int_0^{p0} c_pTdp} \approx \frac{L\overline{q}}{c_p\overline{T}} \approx \mathbf{0.2}$

$\frac{\text{有效位能}}{\text{全位能}}$：$\frac{A}{E} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{p0}\frac{\overline{T}}{\gamma d-\gamma}\overline{\left(\frac{T'}{\overline{T}}\right)^2}dp}{g^{-1}\int_0^{p0} c_pTdp} \approx \frac{3}{2}\left(\frac{T'}{\overline{T}}\right)^2 \approx \mathbf{\frac{1}{200}}$

$\frac{\text{动能}}{\text{全位能}}$：$\frac{K}{E} = \frac{g^{-1}\int_0^{p0}\frac{1}{2}V^2dp}{g^{-1}\int_0^{p0} c_pTdp} = \frac{R\int_0^{p0} V^2dp}{2c_v\int_0^{p0}\kappa RTdp} \approx \frac{R\overline{V}^2}{2c_vCL^2} \approx \mathbf{\frac{1}{2000}}$

5.2 大气能量平衡方程

5.2.1 单位质量气块的能量方程

5.2.1.1 单位质量气块的动能方程

方程 $\frac{d}{dt}K = -\frac{1}{\rho}\vec{V}\cdot\nabla p - gw + \vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$ **动能的来源只能来自气压梯度力作功**

重力作功项：**动能**与**位能**之间的**转换项**

推导

已知p坐标系下的运动方程为：$\frac{d\vec{V}_h}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\vec{\Omega}\times\vec{V} + \vec{G} + \vec{F}_\gamma$，"$\vec{V}_h\cdot eq$" $\Rightarrow$ 单位质量质点的动能方程

（动能定义为 $K = \frac{1}{2}\vec{V}_h^2$，对其求导可得：$\frac{dK}{dt} = \vec{V}_h\cdot\frac{d\vec{V}_h}{dt}$，为了凑出这个形式）直接得到：$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{V}^2\right) = -\frac{1}{\rho}\vec{V}\cdot\nabla p - \vec{V}\cdot\left(2\vec{\Omega}\times\vec{V}\right) - gw + \vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$ 其中柯氏力只改变运动方向，不改变大小，因此$-\vec{V}\cdot\left(2\vec{\Omega}\times\vec{V}\right) = 0$

5.2.1.2 单位质量气块的位能方程

方程 $\frac{d\Phi}{dt} = g\frac{dz}{dt} = gw$ 表明**铅直运动**引起位能的变化（理所当然的结果）

转换项 能够发现，**动能方程中有$-gw$**，**位能方程中有gw**，这种**大小相等，符号相反**的项称为**转换项**。

上升运动：位能增加，动能减小，动能转化为位能 下沉运动：位能减小，动能增加，位能转化为动能

5.2.1.3 单位质量气块的内能方程

方程 $\frac{dI}{dt} = \dot{Q} - \frac{p}{\rho}\nabla\cdot\vec{V}$ **非绝热加热项**：非绝热冷却→内能减小 非绝热加热→内能增加

反抗气压场的膨胀或压缩功率：辐散→反抗气压场，**内能减小** **辐合**→气压场对气块做功，**内能增加**

推导

单位质量内能为$I = c_v T$，则 $\frac{dI}{dt} = c_v\frac{dT}{dt}$。同时有热力学第一定律：$\delta q = dI + pd\alpha \Rightarrow \dot{Q} = \frac{dI}{dt} + p\frac{d\alpha}{dt}$。我们有连续方程：$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\vec{V} = 0$，则 $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho^2}\left(-\rho\nabla\cdot\vec{V}\right) = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\vec{V}$，将其代入上式，可得 $\frac{dI}{dt} = \dot{Q} - \frac{p}{\rho}\nabla\cdot\vec{V}$。

5.2.1.4 内能和动能的转换

问题 若考虑**固定体积**中或**整个大气**中内能和动能的变化，内能和动能的转换是如何实现的？

我们需要将**拉格朗日观点**（单位质量空气块）转换为**欧拉观点**（固定体积的某个地点）。

假设条件 单位体积空气质量：ρ 单位体积空气动能：ρK 固定体积τ动能：$\int\rho K\cdot d\tau$

转换情况 $\frac{\partial\rho K}{\partial t} = \rho\frac{dK}{dt} - \nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}\right)$ $\frac{\partial\rho I}{\partial t} = \rho\frac{dI}{dt} - \nabla\cdot\left(\rho I\vec{V}\right)$ $\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t} = \rho\frac{d\Phi}{dt} - \nabla\cdot\left(\rho\Phi\vec{V}\right)$

推导

从拉格朗日形式出发：$\frac{d}{dt}K = -\frac{1}{\rho}\vec{V}\cdot\nabla p - gw + \vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$，先乘$\rho$得到物质导数并代入微分算子：$\rho\frac{d}{dt}K = \rho\frac{\partial K}{\partial t} + \rho\vec{V}\cdot\nabla K$，用恒等式把右端组织成时间导数和通量散度形式：$\rho\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} - K\frac{\partial\rho}{\partial t}$，因此原式：$\rho\frac{d}{dt}K = \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} - K\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\vec{V}\cdot\nabla K$。用连续方程 $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right) = 0$，可得 $-K\frac{\partial\rho}{\partial t} = K\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)$，并注意恒等式：$\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}\right) = \rho\vec{V}\cdot\nabla K + K\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)$，于是得到关键转换：$\rho\frac{d}{dt}K = \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}\right)$，移项则得到转换形式：$\frac{d}{dt}\rho K = \rho\frac{\partial(K)}{\partial t} - \nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}\right)$

欧拉观点 $\frac{\partial(\rho K)}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}+p\vec{V}\right)+p\nabla\cdot\vec{V}-\rho g w+\rho\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$

$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(\rho I\vec{V}\right)+\rho\dot{Q}-p\nabla\cdot\vec{V}$ $\qquad$ $\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(\rho\Phi\vec{V}\right)+\rho g w$

推导

对动能方程中的压力项做向量恒等变形 $-\frac{1}{\rho}\vec{V}\cdot\nabla p=-\frac{1}{\rho}\left(\nabla\cdot\left(p\vec{V}\right)-p\nabla\cdot\vec{V}\right)=-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(p\vec{V}\right)+\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\vec{V}$，代入物质导数形式的动能方程 $\frac{d}{dt}K=-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(p\vec{V}\right)+\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\vec{V}-gw+\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$。乘$\rho$并应用转换情况的式子：$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}\right)=-\nabla\cdot\left(p\vec{V}\right)+p\nabla\cdot\vec{V}-\rho g w+\rho\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$，移项可得最终形式 $\frac{\partial(\rho K)}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}+p\vec{V}\right)+p\nabla\cdot\vec{V}-\rho g w+\rho\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$。

内能方程和位能方程类似。

全球大气 $\frac{\partial K^*}{\partial t}=\int_\tau\frac{\partial\rho K}{\partial t}\cdot d\tau=\int_\tau p\nabla\cdot\vec{V}d\tau-\int_\tau\rho g w d\tau+\int_\tau\rho\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}d\tau$ 其中颜色相同的项为转换项

$\frac{\partial I^*}{\partial t}=\int_\tau\frac{\partial\rho I}{\partial t}\cdot d\tau=\int_\tau\rho\dot{Q}d\tau-\int_\tau p\nabla\cdot\vec{V}d\tau$ 进行体积分可得固定体积中能量变化

$\frac{\partial\Phi^*}{\partial t}=\int_\tau\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t}\cdot d\tau=\int_\tau\rho g w d\tau$ 三项相加得到能量守恒

系统内气压场作压缩功实现闭合系统中动能和内能的转换（这说明了大气可压缩性的重要性）

5.2.2 单位质量气块的水平动能方程

模型假设 由于大气中垂直速度远小于水平风速，因此在动能中可以**忽略垂直速度**。

方程 $\frac{dK}{dt}=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-D$ 其中**摩擦耗散**$-D=\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}_h<0$ **粘性力做功项** **压力做功项**$-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi$

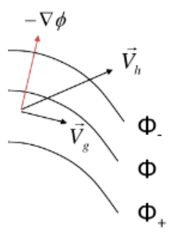
结论 **动能的来源**只能来自**气压梯度力作功**，动能的耗散主要来源于摩擦耗散。

地转运动 $-\vec{V}_g\cdot\nabla\Phi=0$ 系统动能不发生变化，要使系统动能发生变化，一定要有穿越等位势高度线的运动

非地转运动 风从高位势吹向低位势：压力梯度力作正功，动能增加 $-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi>0$

反之，从低位势到高位势，压力梯度力作负功，质点动能减少 $-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi<0$

由此，**非地转运动是大气动能变化的重要原因。**



5.2.3 闭合系统中的水平动能方程

闭合系统 与外界**无质量交换**，**有能量交换**，即边界上的法向速度为 0：$V_n|_\Gamma=0$ （大气可以近似为闭合系统）

孤立系统 既没有质量又没有能量的交换 **开放系统**：质量和能量均有交换

方程 $\frac{\partial}{\partial t}\int_M KdM=-\int_M\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi dM-\int_M DdM$ **气压梯度力做功项** **摩擦耗散项**

推导

在静力平衡条件下，已知单位质量气块的水平动能方程为：$\frac{dK}{dt}=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-D$ 其中 $K=\frac{1}{2}\vec{V}_h^2$ 由拉格朗日观点转化为欧拉观点：$\frac{\partial}{\partial t}K+\vec{V}_h\cdot\nabla K+\omega\frac{\partial K}{\partial p}=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-D$ 对平流项做一变形：$\vec{V}_h\cdot\nabla K+\omega\frac{\partial K}{\partial p}+K\left(\nabla\cdot\vec{V}_h+\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)=\nabla\cdot\vec{V}_h K+\frac{\partial\omega K}{\partial p}$ （注意到 $\nabla\cdot\vec{V}_h+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0$ p坐标系连续方程=0），因此水平动能方程可写为：$\frac{\partial}{\partial t}K+\nabla\cdot\vec{V}_h K+\frac{\partial\omega K}{\partial p}=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-D$，进一步合并：$\frac{\partial}{\partial t}K+\nabla\cdot\left(\vec{V}K\right)=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-D$ $\qquad$ $\nabla\cdot\left(\vec{V}K\right)$ 这一项为通量项。

闭合系统系统质量为M，则系统的动能方程为：$\frac{\partial}{\partial t}\int_M KdM+\int_M \nabla\cdot\left(\vec{V}K\right)dM=-\int_M \vec{V}_h\cdot\nabla\Phi dM-\int_M DdM$

假设在上、下边界上垂直速度为0，闭合系统没有穿越边界的动能通量，$\int_\tau \nabla\cdot K\vec{V}d\tau=\oiint_\sigma K\vec{V}\cdot d\vec{\sigma}=\oiint_\sigma KV_n\,d\sigma=0$

通量项$\int_M \nabla\cdot(\vec{V}K)dM$由体积分转化为面积分：根据三维格林定理，将体积分转化为面积分$\int_M \nabla\cdot K\vec{V}dM=\rho\int_\tau \nabla\cdot K\vec{V}d\tau=\rho\oint_\sigma K\vec{V}\cdot d\vec{\sigma}=\rho\oint_\sigma KV_n d\sigma=0$。

5.3 闭合系统中能量转换与守恒

总体概述 闭合系统**动能增加**, 则一定是$\begin{cases}\text{压力梯度力作正功}\Leftarrow\text{作功角度}\\\text{全位能向动能转换}\Leftarrow\text{能量转换角度}\end{cases}$ 本章利用闭合系统中的动能与全位能方程，考察闭合系统动能变化的同时，全位能的变化情况，讨论二者的转换关系。

5.3.1 水平动能方程

方程 $\frac{\partial}{\partial t}\int_M KdM=-\int_M \alpha\omega dM-\int_M DdM$ 将**气压梯度力做功项**与**垂直运动和温度之间的相关**联系起来

推导过程

基于闭合系统中的水平动能方程 $\frac{\partial}{\partial t}\int_M KdM=-\int_M \vec{V}_h\cdot\nabla\Phi dM-\int_M DdM$。其中$-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-\Phi\left(\nabla\cdot\vec{V}_h+\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)$（新增项$p$坐标系连续方程为零）。继续展开：$-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-\Phi\nabla\cdot\vec{V}_h-\Phi\frac{\partial\omega}{\partial p}=-\nabla\cdot\left(\Phi\vec{V}_h\right)-\left(\frac{\partial\Phi\omega}{\partial p}-\omega\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)=-\nabla\cdot(\Phi\vec{V})-\alpha\omega$。（$\frac{\partial\Phi}{\partial p}=-\frac{1}{\rho}$） 对闭合系统积分得：$\int_M(-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi)dM=-\int_M\nabla\cdot(\Phi\vec{V})dM-\int_M\alpha\omega dM$

$=-\int_M\alpha\omega dM=-R\int_M\frac{\omega T}{p}dM$。（通量项$-\nabla\cdot(\Phi\vec{V})$在闭合系统中的积分为0）