第二章 尺度分析与自由大气中的风场

2.1 尺度概念和大气运动的分类

2.1.1 尺度概念

尺度 具有代表意义、能反映该物理量**一般大小**的量值，又称**特征值**。其大小是用数量级来表示的。

> 示例
>
> 水平风速在 5~25m/s 之间，特征值为 10m/s。$u=Uu^*, v=Uv^*$
>
> 其中，U~$10^1 m/s$是特征值 Q，u^*和v^*为数值在 0.5~2.5 之间的无量纲量 q^*。

物理量表示 将任一物理量写作： $q=Qq^*$

特征量 Q 表示该物理量的一般大小，常量，有量纲。 量纲不等同于单位，它表示了物理量的种类

无量纲量 q^* 无量纲量，**量级在10^0**，表示物理量的具体大小，变量，没有量纲。

比较物理量的大小，实际就是比较特征量的大小。这里的 q 是广义的，包括气象要素及方程各项。

> 示例
>
> 已知 $u=Uu^*, t=\tau t^*$，则：$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial Uu^*}{\partial \tau t^*}=\frac{U}{\tau}\frac{\partial u^*}{\partial t^*}$，$\frac{U}{\tau}$ 是 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的特征量，$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}$是其无量纲量。

2.1.2 大气运动的分类

水平尺度 根据大气运动的水平尺度，大气运动可以分为（单位为 km）：

行星尺度10^4	**长波**、副热带、高压	热带行星、尺度波动	（介于行星尺度与天气尺度之间）
天气尺度10^3	温带气旋、反气旋	云团、热带气旋	
中尺度10^2	锋面、背风波、飑线	中尺度对流群	
小尺度10^1	积雨云、龙卷	对流单体	
微尺度10^0	边界层涡动		

大尺度	L~$10^6 m$	D~$10^4 m$	U~$10\ m/s$	τ~$10^5 s$	**大尺度时间尺度为水平尺度/速度尺度**
中尺度	L~$10^5 m$	D~$10^4 m$	U~$10\ m/s$	τ~$10^5 s$	中尺度的时间尺度并不是这样
小尺度	L~$10^4 m$	D~$10^{3\sim4} m$	U~$10\ m/s$	τ~$10^4 s$	小尺度也不是这样

简化思想 **大气运动非常复杂→尺度的多样性→不同尺度的运动→运动性质不一样**，如何用可以描述一切现象的方程组来反应这种性质的不同？所以需要进行化简，来反映出不同尺度运动的独特性质。

简化意义 从物理角度看：影响大气的因子很多，重点不突出。

从数学角度看：大气运动基本方程组是一个高度非线性的偏微分方程组，求解困难。

本课程的研究目的：大尺度的大气运动。因此，需要简化大气运动基本方程组。

> 奥卡姆剃刀原理
>
> 在所有能够完美描述已有观测的可计算理论中，较短的可计算理论在估计下一次观测结果的概率时具有较大权重。同时，其假设需要尽可能地少，以便适用于更大的范围。

简化方法 从物理上看：抓住主要因子，忽略次要因子，把握运动的物理本质和基本性质，反映物理规律更清晰。

从数学上看：保留各方程中的大项，略去小项，使得简化后的方程组简单，便于数学处理。

尺度分析 Charney(1948)首先倡导利用**尺度分析法**，对大气运动基本方程组进行分析与简化。

Burger(1958)等人进一步发展完善，这一方法在现代大气动力学和数值天气预报研究中广泛应用。

2.2 基本方程组的尺度分析

2.2.1 分析基本概念

尺度分析法 尺度分析法是依据表征**某类运动系统**的运动状态和热力状态各物理量的特征值，估计大气运动方程中各项量级大小的一种方法。根据尺度分析的结果，结合物理上考虑，略去方程中量级较小的项，便可得到简化方程，并可分析运动系统的某些基本性质。

分析目的 对方程进行简化，突出主要因子，研究运动的主要特征。是理论分析的第一步。

基本规则 尺度的大小是用数量级表示的，在尺度分析中，必然涉及数量级的运算，故要明确**数量级运算规则**：

① **几个变量之和**数量级，认为**最大项的量级**就是变量之和的数量级。

② 有 **2-3 个变量的数量级相同**，如果它们之间**没有依从关系**，则其和(差)的数量级和**单个数量级相同**；如果**有依从关系**，则其和的数量级**可以小于单个变量**的数量级，究竟多大要进一步分析。

例如：水平散度 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\le\frac{U}{L}$ 对大尺度运动而言，$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 两项符号一般相反。

③ 两个**变量乘积**的数量级一般为变量**数量级的乘积**。

④ 在一个方程式中，数量级最大项**至少要有两项**。如果方程中只有一个最大项，不是各项量级估计不正确，就是原方程不成立。

基本步骤 ① 写出方程中各项的**特征值**　② 根据运动的类型写出各项的**数量级**

③ 略去小项、保留大项得到各级近似简化方程

④ 根据简化的结果，揭示出不同类型运动的基本性质和特点。

需求尺度 在尺度分析中，为了确定大气运动方程中各项的量级，应确定以下尺度：

① 空间和时间尺度　② 各物理量尺度　③ 各物理量变动尺度

2.2.2 物理量尺度

2.2.2.1 基本物理量尺度情况

运动尺度 物理量：**水平速度尺度 U**　**铅直速度尺度 W**

变动尺度：观测表明，速度场的变动尺度可以达到本身的量级：$\Delta u\sim U,\Delta v\sim U,\Delta w\sim W$

空间尺度 物理量：**水平(长度)尺度 L**　**铅直(厚度)尺度 D**　空间尺度没有变动

涡旋系统的水平尺度取其**特征半径**，波动则为**波长的 1/4**。

$$\frac{\partial u}{\partial x}\sim\frac{\partial u}{\partial y}\sim\frac{\partial v}{\partial x}\sim\frac{\partial v}{\partial y}\sim\frac{U}{L}\qquad\frac{\partial u}{\partial z}\sim\frac{\partial v}{\partial z}\sim\frac{U}{D}\qquad\frac{\partial w}{\partial x}\sim\frac{\partial w}{\partial y}\sim\frac{W}{L}\qquad\frac{\partial w}{\partial z}\sim\frac{W}{D}$$

时间尺度 物理量：运动系统演变**经历一个阶段**所需要的特征时间，用**符号τ**表示，一般表示为 $\tau=L/C$

对于**移速不太快**的系统，一般认为$C\sim U$，那么：$\tau=L/U$　称为**平流时间尺度**

大尺度系统：$\tau=L/U$　$\frac{\partial u}{\partial t}\sim\frac{\partial v}{\partial t}\sim\frac{CU}{L}\sim\frac{U^2}{L}$　$\frac{\partial w}{\partial t}\sim\frac{CW}{L}\sim\frac{UW}{L}$

中小尺度系统：$\tau\ge L/U$

热力学尺度 p,ρ,T,θ等。 变动尺度：时空变动值相对于其本身很小，达不到本身的量级。

可以分为两部分：　① 表征**基本状态**的基本热力学变量（仅与高度z有关）

② **扰动量**：相对于基本量的偏差（时空函数）

气压 $p=\bar{p}(z)+p'(x,y,z,t)\sim P+\Delta P$　密度 $\rho=\bar{\rho}(z)+\rho'(x,y,z,t)\sim\pi+\Delta\pi$

温度 $T=\bar{T}(z)+T'(x,y,z,t)\sim T^*+\Delta T^*$　位温 $\theta=\bar{\theta}(z)+\theta'(x,y,z,t)\sim\Theta+\Delta\Theta$

① **基本热力学变量随高度**的改变量 $\frac{d(\bar{x})}{dz}$ 可以达到**本身的量级**。

② **扰动热力学变量**的**时空变动值** $\frac{\partial(x')}{\partial x}$ 可达到**本身的量级**。

分析说明：量级分析

先定义基本状态的铅直厚度尺度（标高）$H=\frac{RT^*}{g}\sim 10^4 m$。则气压变换为 $p=\rho RT \Rightarrow P\sim\pi RT^*\sim\pi gH$

$\frac{d\bar{p}}{dz}=-\bar{\rho}g\sim\pi g\sim\frac{P}{H}$ $\frac{d\ln\bar{p}}{dz}\sim\frac{1}{H}\Rightarrow\frac{d\ln\bar{p}}{dz}\sim\frac{1}{H}$ 基本热力学变量随高度的改变量可以达到本身的量级

据观测：扰动热力学变量的时空变动值可以达到本身的量级

空间：$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial[\bar{p}(z)+p']}{\partial x}=\frac{\partial p'}{\partial x}\sim\frac{\Delta P}{L}\sim\frac{\partial p}{\partial y}$，时间：$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial p'}{\partial t}\sim\frac{\Delta P}{\tau}$，高度：$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial[\bar{p}(z)+p']}{\partial z}=\frac{\partial\bar{p}(z)}{\partial z}+\frac{\partial p'}{\partial z}\sim\pi g+\frac{\Delta P}{D}$

2.2.2.2 基本方程的物理量约束关系

尺度分析 各个物理量尺度不是孤立的，它们必须受基本方程组的制约，通过分析方程中各项量级，可以找到这些物理量之间的约束关系。

基本概念 已知量：一般认为L,D,τ,U可根据不同类型运动选定，**基本状态热力学变量、标高等**是已知的。

求解量：**垂直速度W**、**各类扰动尺度ΔP 〃$\Delta\pi$ 〃 ΔT^***等。

连续方程 第四条规则：$\frac{W}{D}\le\frac{U}{L}$ $\Rightarrow$ $W\le\frac{DU}{L}$ （给出W上限） 解释大尺度运动：$L\gg D\Rightarrow W\ll U$，准水平运动

连续方程的尺度分析与垂直速度约束关系的建立

假设大气不可压缩，$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0\Rightarrow\frac{d\ln\rho}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ 利用小扰动假设：

$\ln\rho=\ln(\bar{\rho}+\rho')=\ln\bar{\rho}\left(1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)=\ln\bar{\rho}+\ln\left(1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)$ 因为 $\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\ll 1\Rightarrow\ln\left(1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)\approx\frac{\rho'}{\bar{\rho}}$

所以 $\ln\rho\approx\ln\bar{\rho}+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}$ 回代原式 $\Rightarrow\frac{d\ln\bar{\rho}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ 对该式执行尺度分析：

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} w\frac{\partial\ln\bar{\rho}}{\partial z} & +\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) & +\vec{V}_h\cdot\nabla_h\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) & +w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) & +\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} & +\frac{\partial w}{\partial z}=0 \\ \frac{W}{H}\le\frac{W}{D} & \frac{\Delta\pi}{\pi\tau}\ll\frac{U}{L} & \frac{\Delta\pi}{\pi}\frac{U}{L}\ll\frac{U}{L} & \frac{\Delta\pi}{\pi}\frac{W}{D}\ll\frac{W}{D} & \frac{U}{L} & \frac{W}{D}\end{array}}$$

为了满足方程平衡，最后两项必须量级相当。同时因为 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\le\frac{U}{L}$，所以 $\frac{W}{D}\le\frac{U}{L}$或 $W\le\frac{D}{L}U$，这给出了W的上限。

水平方程 水平运动方程的尺度分析：$\frac{\Delta P}{\pi L}\approx\frac{U^2}{L}+f_0U$ 力的平衡取决于**特征惯性力项**和**科氏力项**的比值

推导

$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ 各项尺度分析为 $\frac{U}{\tau}+\frac{U^2}{L}+\frac{U^2}{L}+\frac{WU}{D}\Rightarrow\frac{U^2}{L}$，$fU$，$\frac{\Delta P}{\pi L}$ 即为上式

为了便于理解，此处引入罗斯贝数$Ro=U/f_0L$，表示惯性力和科氏力的相对重要性。

① 大尺度运动有：$\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}\ll 1$，$\frac{\Delta P}{\pi L}\approx f_0U$ $\Rightarrow$ $\frac{\Delta P}{\pi}\sim f_0UL\sim 10^3m^2/s^2$

压力变化的相对尺度：$P\sim\pi gH$，$\Delta P\sim\pi f_0UL\Rightarrow\frac{\Delta P}{P}\sim\frac{f_0LU}{gH}\sim 10^{-2}$ $P\sim 10^5N/m^2$ $\pi\sim 10^0kg\cdot m^{-3}$

② 中小尺度运动有：$\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}\ge 1\Rightarrow\frac{\Delta P}{\pi L}\approx\frac{U^2}{L}$

状态方程 $\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{\Delta T^*}{T^*}\sim\frac{\Delta\pi}{\pi}\sim\frac{\Delta P}{P}$ 大尺度运动：$\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{\Delta T^*}{T^*}\sim\frac{\Delta\pi}{\pi}\sim\frac{\Delta P}{P}\sim\frac{f_0LU}{gH}\sim 10^{-2}$

绝热方程 $\frac{U\Delta\Theta}{L\Theta}\sim\frac{N^2}{g}W\Longrightarrow W\sim\frac{Ug}{N^2L}\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\le 10^{-1}\frac{D}{L}U$ 大尺度运动：$\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{f_0LU}{gH}\Rightarrow W\sim\frac{f_0U^2}{HN^2}\sim 10^{-2}ms^{-1}$

水平平流引起的局地温度变化率~垂直运动引起的绝热加热/冷却率。

将其他热力学扰动与气压扰动联系起来（$\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{\Delta P}{P}$），并验证垂直速度 W 的估计是自洽的。

2.2.2.3 中纬度大尺度运动的特征尺度和环境参数

水平尺度	$\boldsymbol{L \sim 10^6\ m}$	时间尺度	$\boldsymbol{\tau \sim L/U \sim 10^5 s}$	铅直厚度尺度	$\boldsymbol{D \sim H \sim 10^4 m}$
水平速度尺度	$U \sim 10\ ms^{-1}$	铅直速度尺度	$W \sim 10^{-2}\ ms^{-1}$	大气标高	$H \sim 10^4 m$
中纬度地转参数	$f_0 \sim 10^{-4}\ s^{-1}$	重力加速度	$g \sim 10\ ms^{-2}$	层结参数	$N \sim 10^{-2} s^{-1}$
空气粘性系数	$\gamma \sim 10^1 m^2 s^{-1}$	气压尺度	$P \sim 10^5 N/m^2$	温度尺度	$T^* \sim 10^2 K$
密度尺度	$\rho_0 \sim \pi \sim 10^0 kg \cdot m^{-3}$		温度水平变动尺度	$\delta_h T^* \sim 10K$	
气压水平变动尺度	$\delta_h P \sim 10^3 N/m^2$		气压垂直变动尺度	$\delta_z P \sim P \sim 10^5 N/m^2$	
扰动密度变动尺度与密度尺度之比		$\Delta\pi/\pi \sim 10^{-2}$			
扰动气压变动尺度与密度尺度之比		$\Delta P/\pi \sim 10^3 m^2/s^2$			