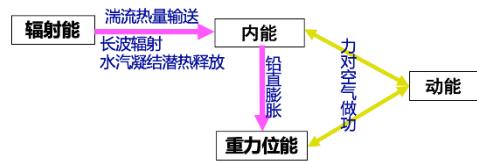


# 第五章 大气能量学



## 引言

能量转换和守恒定律是物质运动所遵循的普通规律，大气中各种不同尺度运动的产生、发展和消亡，实质上是系统运动能量的积累、爆发和转换的结果。研究大气能量过程也是研究大气运动的有效途径。大气中常见的能量形式：辐射能、内能、重力位能、动能。

## 5.1 大气中主要能量形式

### 5.1.1 主要能量形式

**主要形式** 位能 *Gravitational potential energy*、内能 *Internal energy*、动能 *Kinetic energy*、潜热能 *Latent heat*

**过程分析** ① 最初的源是太阳辐射能，但大气只吸收很少一部分辐射能，其主要被地表吸收，然后通过湍流热量输送、辐射热量传递、水汽凝结潜热释放使大气得到热能，其导致大气内能增加。

② 非绝热加热使大气内能增加同时，引起在铅直方向膨胀，从而增加重力位能。

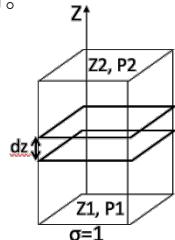
③ 太阳辐射能不能直接转换成大气动能，动能是由内能和重力位能转换来的，而且只包含力的过程，通过力对空气的做功实现内能、重力位能、动能之间的转换，且在热力学上是可逆的。

**能量学研究** 只需要知道初态和终态，对中间过程不关心。

#### 5.1.1.1 位能

**定义** 质点处于地球表面附近重力场中的任一点，都具有重力势能，即位能  $\Phi = gz$ 。

**公式**  $\Phi = \int_{z_1}^{z_2} \rho g z dz = \int_{P_2}^{P_1} z dp$



#### 单位截面积气柱的位能的推导

考察单位截面积、 $dz$ 厚度的气块薄片： $dz$ 薄片的质量为  $\rho \cdot 1 \cdot dz = \rho dz$ ，则 $dz$ 薄片的位能： $\delta\Phi = \rho g z dz$ ，则  $z_1 \sim z_2$  单位截面积气柱所具有的总位能： $\Phi = \int_{z_1}^{z_2} \rho g z dz$ 。利用静力学方程  $dp = -\rho g dz \Rightarrow dz = -\frac{dp}{\rho g}$ ，则

$$\Phi = \int_{z_1}^{z_2} \rho g z dz = \int_{P_1}^{P_2} \rho g z - \frac{dp}{\rho g} = - \int_{P_1}^{P_2} z dp = \int_{P_2}^{P_1} z dp$$

#### 5.1.1.2 内能

**定义** 单位质量气块具有内能为  $I = C_V T$ 。  $C_V$  为定容比热，大气数值为  $717 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$

**公式**  $I = \frac{C_V}{g} \int_{P_2}^{P_1} T dp$

#### 单位截面积气柱的内能的推导

$dz$  厚度的薄块的内能： $dI = C_V T \rho dz$ ， $z_1 \sim z_2$  单位截面积气柱所具有的内能： $I = C_V \int_{z_1}^{z_2} T \rho dz$ ， $p$  坐标下：

$$I = C_V \int_{z_1}^{z_2} T \rho dz = - \frac{C_V}{g} \int_{P_1}^{P_2} T dP = \frac{C_V}{g} \int_{P_2}^{P_1} T dP$$

#### 5.1.1.3 动能

**定义** 单位质量气块所具有动能  $K = \frac{1}{2} V^2$  其中  $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$

**公式**  $K = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2} \rho V^2 dz = \frac{1}{2g} \int_{P_2}^{P_1} V^2 dp$

## 单位截面积气柱的动能的推导

$$dz \text{ 厚度的簿块的动能: } dK = \frac{1}{2} V^2 \rho dz, z \text{ 坐标下: } K = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2} \rho V^2 dz, p \text{ 坐标下: } K = -\frac{1}{2g} \int_{P_1}^{P_2} V^2 dP = \frac{1}{2g} \int_{P_2}^{P_1} V^2 dP$$

### 5.1.1.4 潜热能

**定义** 系统中**所有水汽全部凝结所释放的能量**。实际大气中的潜热能**不会被全部释放**: 对流降水潜热释放能够调整大气, 使得原有的不稳定大气逐渐变得稳定, 并停止对流凝结, 致使潜热能不会完全释放。

**汽化热** **相变潜热** **单位质量水汽化到气态所吸收的热量**, 即**单位质量水凝结所能释放的热量**。

**比湿**  $q = \text{水汽质量}/\text{空气质量}$ 。则单位质量湿空气的潜热能为:  $H = Lq$  如果把潜热能错误地理解为相变时释放的热量, 潜热能应为  $L\Delta q$  (这里的  $\Delta q$  特指水汽相变导致的比湿的变化, 不考虑混合、夹卷等过程)

**公式**  $H = \int_{z_1}^{z_2} Lq\rho dz = \frac{L}{g} \int_{P_1}^{P_2} q dP$

## 单位截面积气柱的潜热能的推导

$dz$  厚度的簿块的潜热能:  $dH = Lq \cdot \rho dz$ ,  $z_1 \sim z_2$  单位截面积气柱所具有的潜热能:

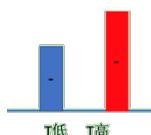
$$H = \int_{z_1}^{z_2} Lq\rho dz = -\frac{L}{g} \int_{P_1}^{P_2} q dP = \frac{L}{g} \int_{P_2}^{P_1} q dP$$

**注意** 由此可见, 潜热能和实际大气的比湿  $q$  密切相关, 潜热能的释放与降水相对应。  
因此, 中高纬度地区下雨少,  $q$  小, 潜热能的释放也少, 故  $H$  对中高纬天气系统不是很重要 (重要的是斜压不稳定, 即有效位能), 但在热带地区,  $H$  对天气系统变化非常重要。

### 5.1.2 气柱位能和内能的关系

**基本情况** 一般对于**固体**而言, 位能(机械能)与内能(热力学能)是**无关的**。而大气有其特殊性:

① 质量基本守恒 ② 表面积不变



#### 质量基本守恒

$$\int_0^\infty \rho dz = -\int_{P_s}^{P_\infty} \frac{dP}{g} = -\frac{1}{g} \int_{P_s}^{P_\infty} dP = \frac{P_s}{g} \quad \text{可见, 单位面积空气柱的质量是由柱底的气压决定的。}$$

然而, 气压的变化是很小的(台风也仅仅 50hPa 的变化), 因此认为各个空气柱的质量应相当接近。

**物理关系** 从物理定性角度分析: 温度升高  $\rightarrow$  内能增加  $\rightarrow$  气柱膨胀  $\rightarrow$  质心抬升  $\rightarrow$  位能增加  
大气的**内能与位能**之间是**同向变化**: 如果大气**动能增加**, 必定是**内能与位能**同时减少向动能转换。

#### 5.1.2.1 无限高气柱的情形

**证明结论** 下面证明在静力平衡条件下, 无限高气柱所包含的**内能和位能成正比**。

**位能**  $\Phi = R \int_0^\infty \rho T dz$       **内能**  $I = C_v \int_0^\infty \rho T dz$  (原始形式)

#### 位能与温度的关系推导

$$\Phi = \int_{P_2}^{P_1} z dP = \int_0^{P_0} z dP = \int_0^{P_0} [d(zP) - P dz] = zP|_{P=0, z=\infty}^{P_0, z=0} - \int_0^0 P dz。 \text{ 显然, 地面 } P = P_0, z = 0 \Rightarrow zP|_{P_0, z=0} =$$

0。高空考虑到气压满足  $P \sim e^{-\alpha z} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} zP = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^{\alpha z}} = 0$ 。因此  $\Phi = \int_0^\infty P dz = \int_0^\infty \rho RT dz = R \int_0^\infty \rho T dz$

**比值**  $\frac{\Phi}{I} = \frac{R}{C_v} = \frac{C_p - C_v}{C_v} \approx 0.41 \Rightarrow \boxed{\Phi \propto I}$

在静力平衡条件下, 从海平面向上伸展到大气顶部的单位截面积的垂直气柱(必要前提: 无限高气柱)所包含的**位能和内能都是与温度有关**, 同向变化。

当整个气柱增温后, 内能必然增加, 而当温度增加, 气柱又会垂直膨胀, 从而位能增加。

### 5.1.2.2 全位能与热焓

**全位能** 对无限高气柱而言，大气的内能与位能成正比，且同时增减，故可以把它们结合起来考虑。

定义：全位能  $E = \text{位能} \phi + \text{内能} I$   $E = I + \phi = c_v T + g z = c_p \int_0^\infty \rho T dz$  (无穷高)

#### 全位能的导出

$$E = I + \phi = I + \frac{Rl}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} I = \frac{c_p}{c_v} I = \frac{c_p}{c_v} \cdot c_v \int_0^\infty \rho T dz = c_p \int_0^\infty \rho T dz \quad (\text{适用于无限高情况})$$

### 热焓

**Enthalpy**，将单位质量气块的  $c_p T$  称为焓。  $c_p$  为定压比热，大气数值为  $1005 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$  焓和内能的关系是： $c_p T = c_v T + RT = c_v T_{\text{内能}} + p/\rho_{\text{压力能}}$  即气柱的全位能就是气柱的焓单位质量空气块所具有的焓称为显热能（感热能），只与温度有关。

### 5.1.2.2 有限高气柱的情形

**概述** 对**有限高气柱**而言，位能不是简单的与内能成正比，还与**气柱的底部、顶部的高度和气压**有关。  
**公式**  $\Phi = z_1 P_1 - z_2 P_2 + 0.41I$

#### 有限高气柱位能和内能的关系

从位能定义出发  $\Phi = \int_{p_2}^{p_1} z dp = zp|_{z_2, p_2}^{z_1, p_1} - \int_{z_2}^{z_1} pdz = (z_1 p_1 - z_2 p_2) + \int_{z_1}^{z_2} pdz = (z_1 p_1 - z_2 p_2) + R \int_{z_1}^{z_2} \rho T dz$   
 $= (z_1 p_1 - z_2 p_2) + \frac{R}{c_v} \int_{z_1}^{z_2} c_v \rho T dz$ 。发现  $I = c_v \int_{z_1}^{z_2} T \rho dz$ ,  $\frac{R}{c_v} = \frac{287}{715.8}$ , 因此  $\Phi = z_1 P_1 - z_2 P_2 + 0.41I$ 。

**全位能**  $E = \phi + I = z_1 P_1 - z_2 P_2 + \frac{R}{c_v} I + I = z_1 P_1 - z_2 P_2 + \int_{z_1}^{z_2} c_p \rho T dz$

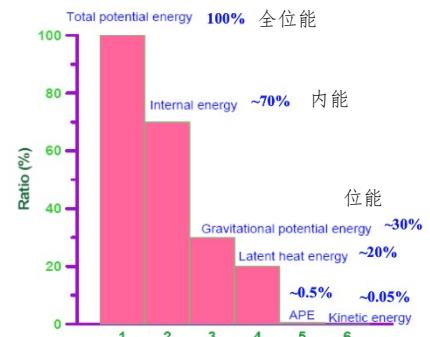
### 5.1.2.3 基本能量的比较

**性质一** 位能与内能具有同时增加或者减少的性质，且它们之间有确定比例，平均而言**位能是内能的 40%**。

**性质二** 在全位能中，**位能 30%，内能大约占 70%**。

**性质三** 平均而言，**潜热能相当于全位能的 20%**，这说明大气中潜热能应占有一定的地位，特别对强烈发展的系统（例如台风）。

**性质四** 在诸种能量形式中，**动能**在数量上一般较其它形式的能量小，**动能比全位能小 2-3 个量级**。虽然从数量上看，动能与全位能相比微不足道，但是**这个小量对大气运动至关重要**。这也说明，大气中全位能转变为动能的只是其中很小部分。



#### 整个大气气柱各种能量的比较

首先给出一些常用典型值：

$$R = 287 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \quad c_v = 717 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \quad c_p = 1004 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$L = 2.5 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \quad C_L = \sqrt{\kappa R T} \approx 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \bar{V} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\bar{q} = 2\% \quad \bar{T} = 250 \text{ K} \quad T' = 15 \text{ K}$$

那么各个能量的比值有：

$$\frac{\text{位能}}{\text{内能}} : \frac{\Phi}{I} = \frac{g-1 \int_0^{p_0} R T dp}{g-1 \int_0^{p_0} c_v T dp} = \frac{R}{c_v} \approx 0.4$$

$$\frac{\text{内能}}{\text{全位能}} : \frac{I}{E} = \frac{g-1 \int_0^{p_0} c_v T dp}{g-1 \int_0^{p_0} c_p T dp} = \frac{c_v}{c_p} \approx 0.7$$

$$\frac{\text{位能}}{\text{全位能}} : \frac{\Phi}{E} = \frac{g-1 \int_0^{p_0} R T dp}{g-1 \int_0^{p_0} c_p T dp} = \frac{R}{c_p} \approx 0.3$$

$$\frac{\text{潜热能}}{\text{全位能}} : \frac{H}{E} = \frac{g-1 \int_0^{p_0} L q dp}{g-1 \int_0^{p_0} c_p T dp} \approx \frac{L \bar{q}}{c_p \bar{T}} \approx 0.2$$

$$\frac{\text{有效位能}}{\text{全位能}} : \frac{A}{E} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{p_0} \frac{\bar{T}}{\gamma d - \gamma} \left( \frac{T'}{\bar{T}} \right)^2 dp}{g-1 \int_0^{p_0} c_p T dp} \approx \frac{3}{2} \left( \frac{T'}{\bar{T}} \right)^2 \approx \frac{1}{200}$$

$$\frac{\text{动能}}{\text{全位能}} : \frac{K}{E} = \frac{g-1 \int_0^{p_0} \frac{1}{2} V^2 dp}{g-1 \int_0^{p_0} c_p T dp} = \frac{R \int_0^{p_0} V^2 dp}{2 c_v \int_0^{p_0} \kappa R T dp} \approx \frac{R \bar{V}^2}{2 c_v L^2} \approx \frac{1}{2000}$$

## 5.2 大气能量平衡方程

### 5.2.1 单位质量气块的能量方程

#### 5.2.1.1 单位质量气块的动能方程

方程  $\frac{d}{dt}K = -\frac{1}{\rho}\vec{V} \cdot \nabla p - gw + \vec{F}_Y \cdot \vec{V}$  动能的来源只能来自气压梯度力作功

重力作功项：动能与位能之间的转换项

#### 推导

已知  $p$  坐标系下的运动方程为： $\frac{d\vec{V}_h}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{G} + \vec{F}_Y$ ， $"\vec{V}_h \cdot eq" \Rightarrow$  单位质量质点的动能方程

(动能定义为  $K = \frac{1}{2}\vec{V}_h^2$ ，对其求导可得： $\frac{dK}{dt} = \vec{V}_h \cdot \frac{d\vec{V}_h}{dt}$ ，为了凑出这个形式) 直接得到： $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{V}^2\right) = -\frac{1}{\rho}\vec{V} \cdot \nabla p - \vec{V} \cdot (2\vec{\Omega} \times \vec{V}) - gw + \vec{F}_Y \cdot \vec{V}$  其中柯氏力只改变运动方向，不改变大小，因此  $-\vec{V} \cdot (2\vec{\Omega} \times \vec{V}) = 0$

#### 5.2.1.2 单位质量气块的位能方程

方程  $\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{g} \frac{dz}{dt} = gw$  表明铅直运动引起位能的变化（理所当然的结果）

转换项 能够发现，动能方程中有  $-gw$ ，位能方程中有  $gw$ ，这种大小相等，符号相反的项称为转换项。  
上升运动：位能增加，动能减小，动能转化为位能 下沉运动：位能减小，动能增加，位能转化为动能

#### 5.2.1.3 单位质量气块的内能方程

方程  $\frac{dI}{dt} = \dot{Q} - \frac{p}{\rho}\nabla \cdot \vec{V}$  非绝热加热项：非绝热冷却  $\rightarrow$  内能减小 非绝热加热  $\rightarrow$  内能增加

反抗气压场的膨胀或压缩功率：辐散  $\rightarrow$  反抗气压场，内能减小 辐合  $\rightarrow$  气压场对气块做功，内能增加

#### 推导

单位质量内能为  $I = c_v T$ ，则  $\frac{dI}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}$ 。同时有热力学第一定律： $\delta q = dI + pd\alpha \Rightarrow \dot{Q} = \frac{dI}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt}$ 。我们有连续方程： $\frac{dp}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$ ，则  $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\rho^2}(-\rho \nabla \cdot \vec{V}) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{V}$ ，将其代入上式，可得  $\frac{dI}{dt} = \dot{Q} - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \vec{V}$ 。

#### 5.2.1.4 内能和动能的转换

问题 若考虑固定体积中或整个大气中内能和动能的变化，内能和动能的转换是如何实现的？  
我们需要将拉格朗日观点（单位质量空气块）转换为欧拉观点（固定体积的某个地点）。

假设条件 单位体积空气质量： $\rho$  单位体积空气动能： $\rho K$  固定体积  $\tau$  动能： $\int \rho K \cdot d\tau$

转换情况  $\frac{\partial \rho K}{\partial t} = \rho \frac{dK}{dt} - \nabla \cdot (\rho K \vec{V})$   $\frac{\partial \rho I}{\partial t} = \rho \frac{dI}{dt} - \nabla \cdot (\rho I \vec{V})$   $\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} = \rho \frac{d\Phi}{dt} - \nabla \cdot (\rho \Phi \vec{V})$

#### 推导

从拉格朗日形式出发： $\frac{d}{dt}K = -\frac{1}{\rho}\vec{V} \cdot \nabla p - gw + \vec{F}_Y \cdot \vec{V}$ ，先乘  $\rho$  得到物质导数并代入微分算子： $\rho \frac{d}{dt}K = \rho \frac{\partial K}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla K$ ，用恒等式把右端组织成时间导数和通量散度形式： $\rho \frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} - K \frac{\partial \rho}{\partial t}$ ，因此原式： $\rho \frac{d}{dt}K = \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} - K \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla K$ 。用连续方程  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$ ，可得  $-K \frac{\partial \rho}{\partial t} = K \nabla \cdot (\rho \vec{V})$ ，并注意恒等式： $\nabla \cdot (\rho K \vec{V}) = \rho \vec{V} \cdot \nabla K + K \nabla \cdot (\rho \vec{V})$ ，于是得到关键转换： $\rho \frac{d}{dt}K = \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho K \vec{V})$ ，移项则得到转换形式： $\frac{d}{dt}\rho K = \rho \frac{\partial(K)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho K \vec{V})$

欧拉观点  $\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho K \vec{V} + p \vec{V}) + p \nabla \cdot \vec{V} - \rho g w + \rho \vec{F}_y \cdot \vec{V}$

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \bar{V} \vec{V}) + \rho \dot{Q} - p \nabla \cdot \vec{V} \quad \frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \Phi \vec{V}) + \rho g w$$

## 推导

对动能方程中的压力项做向量恒等变形  $-\frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla p = -\frac{1}{\rho} (\nabla \cdot (p \vec{V}) - p \nabla \cdot \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \vec{V}) + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \vec{V}$ , 代入物质导数形式的动能方程  $\frac{d}{dt} K = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \vec{V}) + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \vec{V} - g w + \vec{F}_y \cdot \vec{V}$ 。乘  $\rho$  并应用转换情况的式子:  $\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho K \vec{V}) = -\nabla \cdot (p \vec{V}) + p \nabla \cdot \vec{V} - \rho g w + \rho \vec{F}_y \cdot \vec{V}$ 。

内能方程和位能方程类似。

全球大气  $\frac{\partial K^*}{\partial t} = \int_{\tau} \frac{\partial \rho K}{\partial t} \cdot d\tau = \int_{\tau} p \nabla \cdot \vec{V} d\tau - \int_{\tau} \rho g w d\tau + \int_{\tau} \rho \vec{F}_y \cdot \vec{V} d\tau$  其中颜色相同的项为转换项

$$\frac{\partial I^*}{\partial t} = \int_{\tau} \frac{\partial \rho I}{\partial t} \cdot d\tau = \int_{\tau} \rho \dot{Q} d\tau - \int_{\tau} p \nabla \cdot \vec{V} d\tau \quad \text{进行体积分可得固定体积中能量变化}$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} = \int_{\tau} \frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} \cdot d\tau = \int_{\tau} \rho g w d\tau \quad \text{三项相加得到能量守恒}$$

系统内气压场作压缩功实现闭合系统中动能和内能的转换 (这说明了大气可压缩性的重要性)

## 5.2.2 单位质量气块的水平动能方程

模型假设 由于大气中垂直速度远小于水平风速, 因此在动能中可以忽略垂直速度。

方程  $\frac{dK}{dt} = -\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi - D$  其中摩擦耗散  $-D = \vec{F}_y \cdot \vec{V}_h < 0$  粘性力做功项 压力做功项  $-\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi$

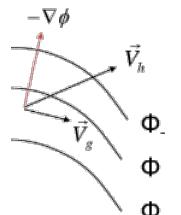
结论 动能的来源只能来自气压梯度力作功, 动能的耗散主要来源于摩擦耗散。

地转运动  $-\vec{V}_g \cdot \nabla \Phi = 0$  系统动能不发生变化, 要使系统动能发生变化, 一定要有穿越等位势高度线的运动

非地转运动 风从高位势吹向低位势: 压力梯度力作正功, 动能增加  $-\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi > 0$

反之, 从低位势到高位势, 压力梯度力作负功, 质点动能减少  $-\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi < 0$

由此, 非地转运动是大气动能变化的重要原因。



## 5.2.3 闭合系统中的水平动能方程

闭合系统 与外界无质量交换, 有能量交换, 即边界上的法向速度为 0:  $V_n|_r = 0$  (大气可以近似为闭合系统)

孤立系统 既没有质量又没有能量的交换 开放系统: 质量和能量均有交换

方程  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = -\int_M \vec{V}_h \cdot \nabla \Phi dM - \int_M D dM$  气压梯度力做功项 摩擦耗散项

## 推导

在静力平衡条件下, 已知单位质量气块的水平动能方程为:  $\frac{dK}{dt} = -\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi - D$  其中  $K = \frac{1}{2} \vec{V}_h^2$  由拉格朗日观点转化为欧拉观点:  $\frac{\partial}{\partial t} K + \vec{V}_h \cdot \nabla K + \omega \frac{\partial K}{\partial p} = -\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi - D$  对平流项做一变形:  $\vec{V}_h \cdot \nabla K + \omega \frac{\partial K}{\partial p} + K (\nabla \cdot \vec{V}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p}) = \nabla \cdot \vec{V}_h K + \frac{\partial \omega K}{\partial p}$  (注意到  $\nabla \cdot \vec{V}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$   $p$  坐标系连续方程=0), 因此水平动能方程可写为:  $\frac{\partial}{\partial t} K + \nabla \cdot (\vec{V}_h K) + \frac{\partial \omega K}{\partial p} = -\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi - D$ , 进一步合并:  $\frac{\partial}{\partial t} K + \nabla \cdot (\vec{V} K) = -\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi - D$   $\nabla \cdot (\vec{V} K)$  这一项为通量项。

闭合系统系统质量为  $M$ , 则系统的动能方程为:  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM + \int_M \nabla \cdot (\vec{V} K) dM = - \int_M \vec{V}_h \cdot \nabla \Phi dM - \int_M D dM$

假设在上、下边界上垂直速度为 0, 闭合系统没有穿越边界的动能通量,  $\int_{\tau} \nabla \cdot K \vec{V} d\tau = \oint_{\sigma} K \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \oint_{\sigma} K V_n d\sigma = 0$   
通量项  $\int_M \nabla \cdot (\vec{V} K) dM$  由体积分转化为面积分: 根据三维格林定理, 将体积分转化为面积分  $\int_M \nabla \cdot K \vec{V} dM = \rho \int_{\tau} \nabla \cdot K \vec{V} d\tau = \rho \oint_{\sigma} K \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \rho \oint_{\sigma} K V_n d\sigma = 0$ .

## 5.3 闭合系统中能量转换与守恒

**总体概述** 闭合系统动能增加, 则一定是  $\begin{cases} \text{压力梯度力作正功} \Leftarrow \text{作功角度} \\ \text{全位能向动能转换} \Leftarrow \text{能量转换角度} \end{cases}$  本章利用闭合系统中的动能与全位能方程, 考察闭合系统动能变化的同时, 全位能的变化情况, 讨论二者的转换关系。

### 5.3.1 水平动能方程

**方程**  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = - \int_M \alpha \omega dM - \int_M D dM$  将气压梯度力做功项与垂直运动和温度之间的相关联系起来

#### 推导过程

基于闭合系统中的水平动能方程  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = - \int_M \vec{V}_h \cdot \nabla \Phi dM - \int_M D dM$ 。其中  $-\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi = -\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi - \Phi \left( \nabla \cdot \vec{V}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} \right)$  (新增项  $p$  坐标系连续方程为零)。继续展开:  $-\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi = -\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi - \Phi \nabla \cdot \vec{V}_h - \Phi \frac{\partial \omega}{\partial p} = -\nabla \cdot (\Phi \vec{V}_h) - \left( \frac{\partial \Phi \omega}{\partial p} - \omega \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = -\nabla \cdot (\Phi \vec{V}) - \alpha \omega$ 。 $(\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho})$  对闭合系统积分得:  $\int_M (-\vec{V}_h \cdot \nabla \Phi) dM = - \int_M \nabla \cdot (\Phi \vec{V}) dM - \int_M \alpha \omega dM = - \int_M \alpha \omega dM = -R \int_M \frac{\omega^T}{p} dM$ 。(通量项  $-\nabla \cdot (\Phi \vec{V})$  在闭合系统中的积分为 0)

### 5.3.2 全位能方程

**方程**  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M E dM = \int_M \alpha \omega dM + \int_M \dot{Q} dM$  垂直运动与温度之间的相关 用于闭合系统  
**非绝热加热项:** 加热膨胀  $\rightarrow$  质心上抬  $\rightarrow$  位能增加  $\rightarrow$  加热温度升高  $\rightarrow$  内能增加

#### 推导过程

已知全位能:  $E = \Phi + I = \frac{RI}{c_v} + I = \frac{c_v + R}{c_v} I = \frac{c_p}{c_v} I = c_p T$ 。已知热力学能量方程第二表达形式:  $c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{Q}$ 。  
又由于  $\frac{dE}{dt} = c_p \frac{dT}{dt}$ , 且  $\omega = \frac{dp}{dt}$ , 有  $\frac{dE}{dt} - \alpha \omega = \dot{Q}$ 。我们下面着重推导  $\frac{dE}{dt}$  这一项。  
对于任意矢量, 有  $\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \nabla E + \omega \frac{\partial E}{\partial p}$ , 利用连续性方程:  $\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \nabla E + \omega \frac{\partial E}{\partial p} + E \left( \nabla \cdot \vec{V}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} \right) = \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}_h E) + \frac{\partial}{\partial p} (\omega E) = \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \vec{V})$ 。其中  $\nabla \cdot (E \vec{V})$  为通量项。对闭合系统积分, 得到方程的左边:  $\int_M \frac{dE}{dt} dM = \int_M \frac{\partial E}{\partial t} dM + \int_M \nabla \cdot (E \vec{V}) dM = \frac{\partial}{\partial t} \int_M E dM$ 。右边则直接积分即可。

### 5.3.3 闭合系统中的能量守恒与转换

#### 5.3.3.1 闭合系统中的动能方程 + 全位能方程

方程  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M (K + E) dM = \int_M \dot{Q} dM - \int_M D dM$

描述 闭合系统内的动能与全位能之和的变化决定于系统的非绝热加热和摩擦作功耗散。

在绝热、无摩擦条件下，总能量守恒。  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M (K + E) dM = 0$

#### 5.3.3.2 全位能与动能的转换

方程  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = - \int_M \alpha \omega dM - \int_M D dM \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_M E dM = \int_M \alpha \omega dM + \int_M \dot{Q} dM$

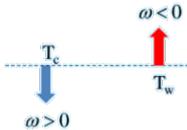
转换项  $\int_M \alpha \omega dM$  同时在两个方程中出现，且正负相反，是全位能和动能之间的转换项。

注意 非绝热加热不能直接转化成动能（辐射能量被全位能吸收，通过转换项转换为动能）

$\int_M \alpha \omega dM \begin{cases} > 0 \Rightarrow E \uparrow, K \downarrow \Rightarrow K \rightarrow E \\ < 0 \Rightarrow E \downarrow, K \uparrow \Rightarrow E \rightarrow K \end{cases}$  体现了二者之间的转换关系及机制。

如果  $\omega = 0$ ，则  $\Rightarrow \int_M \alpha \omega dM = 0$ 。所以，垂直运动是闭合系统中动能与全位能转换的必要条件

#### 充分条件的分析



进一步： $\int_M \alpha \omega dM = \int_M \frac{RT}{P} \omega dM$ ，如果  $\omega \neq 0$ ，则系统必然有上升运动，也有下沉运动；且由连续方程知：上升质量等于下沉质量。不妨假设一半质量上升，一半质量下沉，如果  $\alpha$  分布均匀，等压面上温度一致，那么  $\int_M \alpha \omega dM = 0$ 。因此，垂直运动不是能量转换的充分条件。

但如果  $\alpha(T)$  与  $\omega$  是负相关，即：

- ①  $\alpha$  大 ( $T$  大) 空气、 $\omega < 0 \Rightarrow$  暖空气上升
- ②  $\alpha$  小 ( $T$  小) 空气、 $\omega > 0 \Rightarrow$  冷空气下沉。那么总体  $\int_M \alpha \omega dM < 0$ ，全位能向动能转换。

物理本质 暖空气→轻→上升，冷空气→重→下沉，总体系统质心下降，全位能减少，动能增加。

#### 案例

可以用“全位能→动能”分析海陆风或山谷风的形成。风由海洋向陆地：从能量角度看，暖空气一定上升，冷空气一定下沉，转换项  $< 0$ ，位能向动能转换，这样的环流才能形成、维持。如果是暖空气下沉，冷空气上升，则动能的来源没有了，这样的环流就不能维持下去了。

#### 5.3.3.3 静力平衡下全球大气能量平衡

平衡情况  $\int_M \dot{Q} dM \rightarrow \int_M E dM \xleftrightarrow{\int_M \alpha \omega dM} \int_M K dM \rightarrow \int_M D dM$

- ① 非绝热加热增加了大气全位能。
- ② 通过穿越等压线的水平运动  $\int_M \alpha \omega dM$ （非地转运动导致的辐合辐散产生垂直运动），全位能转化为动能，以补偿摩擦对大气动能的耗散，从而维持全球大气运动。

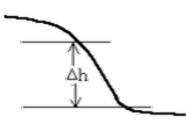
#### 地球自转对能量转换有何影响？

地球自转所产生的地转偏向力虽然不能改变空气运动的动能，但它使空气运动趋向于沿等压线运动，这可使全位能和动能之间的能量转换的速度减缓。当空气严格按照地转风运动时，空气就不穿越等压线运动，全位能与动能之间的转换将停止进行。

## 5.4 有效位能

### 5.4.1 有效位能

**有效位能 Available Potential Energy . APE** 动能与全位能间的转换导致动能变化，这是天气系统变化的重要机理。但大气中的全位能不能被全部释放（动能与全位能的比为 1:2000），在考虑天气系统变化时，有意义的是能够转换成动能的那部分全位能，称为**有效位能**。



#### 形象案例

例如：水电站：位能→动能→电能。需要建在落差大的地方，而不是建在位能大的地方。落差大：能够转换成动能的位能大。

#### 必要条件

**垂直运动**是闭合系统中动能与全位能转换的必要条件。当暖空气上升，冷空气下沉时，全位能向动能转换。显然，正压大气中没有这种转换，**只有斜压大气中存在**。

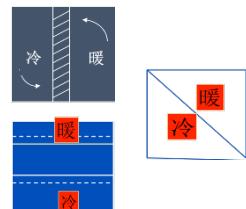
#### 提出

有效位能是 1955 年 Lorenz 提出的一个概念。

A：初态：斜压，**全位能最大**。一旦垂直壁取走，一部份位能要转化成动能。

B：无科氏力作用下的终态，处于正压和稳定状态，**全位能最小**。

C：有科氏力作用下的终态，处于斜压状态，全位能次最小（相对于 B 而言）。



### 5.4.2 有效位能的定义

#### 严格定义

在**闭合系统**中，经过**干绝热过程**（不考虑水汽），从任意**初始状态**调整到**水平稳定层结状态**时，系统所能释放的**最大全位能**，称为**有效位能**。即能够被释放出来的那部分全位能的上限。

#### 说明

① 闭合系统：外界没有质量通量输入

② 干绝热过程：无潜热释放和太阳辐射，**全位能和动能守恒**（不考虑摩擦）。

③ 水平稳定层结：水平的**等温面//等压面//等密度面（正压状态）**，**上轻下重的稳定层结**。即状态 B。

④ 正压大气无有效位能，斜压大气有效位能为正值。



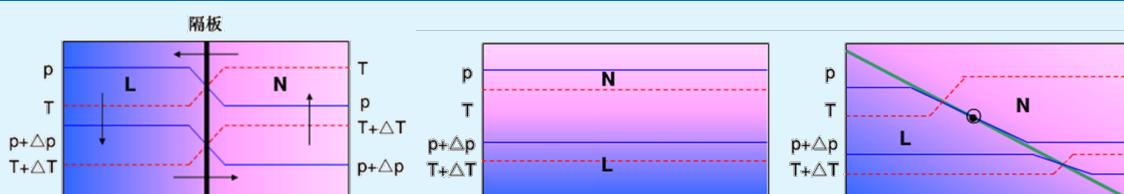
#### 实际大气

实际大气中存在着两类由全位能转变为动能（有效位能释放）的过程：

① 上冷下暖两气层叠置，通过对流翻转气层进行绝热调整释放全位能的过程。

② 冷空气和暖空气并列（比如锋面）通过质量调整使全位能转换为动能的过程。

#### 锋面案例



初始状态：初始静止状态，密度不同，同一高度上的压强也不同；低层气压大，同一高度水平气压梯度力也大。一旦隔板拿开，由于低层水平气压梯度力大，将产生如图所示环流。此时只有位能和内能。当隔板抽开，暖空气上升、冷空气下沉，位能减少，**动能增加**。

如果无柯氏力作用，则暖空气上升，冷空气下沉，最终密度大的流体完全位于密度小的流体下方，环流消失，水平压力梯度力为零，流体静止。正压状态，稳定层结，仍具有一部分全位能。但由于无外力作用，这部分全位能无法释放。此时系统具有**最小全位能**。

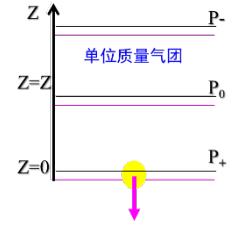
科氏力垂直屏幕向外，风向右旋转使得风最终平行于锋面，向外。实际上，因为有柯氏力作用，流体最终不能达到中图状态，而是流体之间维持一个冷空气的倾斜面，同时流体中出现与纸面垂直的运动，即锋面“大风”。柯氏力与倾斜界面产生的压力梯度力相平衡。此时静力平衡和地转平衡使得锋面得以维持，等压面上仍维持一定的水平温度梯度，部分能够释放的全位能没有释放出来。

### 5.4.3 有效位能的计算

**两种算法** ① 算出初始状态的全位能和终态的全位能（参见课本）**有效位能 = 初态全位能 - 终态全位能**  
计算时比较复杂，是因为终态不好确定。  
② 气块法：计算**从终态到初态，气块反抗净浮力所做的功**

**气块法思路** 我们考虑终态时水平稳定层结  $N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$ （净浮力与位移方向相反），故将

垂直运动方程写为： $\frac{dw}{dt} = -N^2 \delta z$ 。当把单位质量气团从  $z = 0$  移到  $z = z$ ，斜压状态具有有效位能，此过程中，受净浮力的作用，净浮力与位移相反，**全位能的增加=有效位能的积累=气块反抗净浮力做的功**。



#### 具体计算

该过程为干绝热过程，气块位温守恒。到达  $z = z$  高度，气团的位温仍是  $\theta_0(0)$ ，而  $z = z$  高度等压面上的平均位温是  $\theta_0(z)$ ，在这个等压面上，产生了位温差： $\theta' = \theta_0(0) - \theta_0(z) = -\frac{\partial \theta_0}{\partial z} \cdot z$ 。考虑到有效位能 = 气块反抗净浮力做的功，而气块反抗净浮力做的功： $A = \int_0^z N^2 z dz = \frac{1}{2} N^2 z^2$ ， $\theta' = -\frac{\partial \theta_0}{\partial z} \cdot z \Rightarrow z = -\frac{\theta'}{\partial \theta_0 / \partial z}$ 。因此单位质量气块具有的有效位能为： $A = \frac{1}{2} N^2 \left( \frac{\theta'}{\partial \theta_0 / \partial z} \right)^2$ 。则单位截面积的气柱具有的有效位能：

$$A^* = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} N^2 \left( \frac{\theta'}{\partial \theta_0 / \partial z} \right)^2 \rho dz = \int_0^{P_0} \frac{1}{2g} N^2 \left( \frac{\theta'}{\partial \theta_0 / \partial z} \right)^2 dP = \int_0^{R_0} \frac{1}{2g} N^2 \left( \frac{\theta'}{\theta_0 N^2 / g} \right)^2 dP \text{ 考虑到 } N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \text{，最终得到 } A^* = \int_0^{P_0} \frac{g}{2N^2} \left( \frac{\theta'}{\theta_0} \right)^2 dP \text{。在等压面上有 } \frac{T'}{T_0} \approx \frac{\theta'}{\theta_0} \text{，则 } A^* = \int_0^{P_0} \frac{g}{2N^2} \left( \frac{\theta'}{\theta_0} \right)^2 dP \approx \int_0^{P_0} \frac{g}{2N^2} \left( \frac{T'}{T_0} \right)^2 dP \text{。}$$

**有效位能**  $A^* = \int_0^{P_0} \frac{g}{2N^2} \left( \frac{\theta'}{\theta_0} \right)^2 dp = \int_0^{P_0} \frac{g}{2N^2} \left( \frac{T'}{T_0} \right)^2 dp$

**性质** 有效位能正比于等压面上的**位温差或温度差的平方**。 $A^* \propto \theta'^2$  或  $T'^2$

由此可见，有效位能与大气的**斜压性**相对应，正压大气没有有效位能；斜压性越强，力管项大，有效位能越大，由此也称有效位能为**斜压能**。

### 5.4.4 闭合系统中有效位能方程

**方程**  $\frac{\partial A^*}{\partial t} = \int_M \alpha \omega dM + \int_M \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p} \right] \dot{Q} dM \quad \text{有效位能与动能之间的转换} \quad \text{有效位能产生项}$

**说明** 等位温面上，高压区  $p > \bar{p}$  增热，低压区  $p < \bar{p}$  冷却，将使**有效位能增加**。

#### 推导

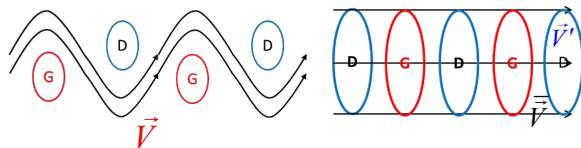
改写全位能方程  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M E dM = \int_M \alpha \omega dM + \int_M \dot{Q} dM$ 。考虑热力学能量方程  $c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{Q}$  和位温定义  $\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}$ ，

可得： $\dot{Q} = c_p \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p} \frac{d\theta}{dt}$ 。将其带入方程，有  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M E dM = \int_M \alpha \omega dM + \int_M c_p \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p} \frac{d\theta}{dt} dM$ 。

水平稳定层结时，全位能达到最小： $\frac{\partial}{\partial t} \int_M E_{min} dM = \int_M c_p \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{d\theta}{dt} dM$ 。有效位能位的变率  $\frac{\partial A^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_M E dM - \frac{\partial}{\partial t} \int_M E_{min} dM = \int_M \alpha \omega dM + \int_M c_p \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right] \frac{d\theta}{dt} dM = \int_M \alpha \omega dM + \int_M \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right] \dot{Q} dM$

**实际情况**  $\frac{\text{动能}}{\text{有效位能}} : \frac{K}{A} \approx \frac{1}{10}$  只有**十分之一**的有效位能真正可以转换为动能。

这是由于在有科氏力的影响下，现实大气无法达到真正理想的稳定层结。



## 5.5 实际大气中的能量循环过程

### 引入

5.3.3.2 节中讨论的是全位能 $\leftrightarrow$ 动能的转换，引入有效位能概念后，我们能够讨论有效位能 $\leftrightarrow$ 动能的转换。同时，此前计算的动能方程为总的动能，但考虑到实际大气在中纬度有很强的西风分量，所以我们将它分为两个部分：纬向平均运动（流）+ 涡旋运动（波）来分别计算动能和有效位能。

**大气分解**  $\vec{V} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}'$  纬向平均运动/流+涡旋运动/波 二者成因和变化时间尺度差异显著

**大气环流** 实质上就是纬向平均运动:  $\bar{\vec{V}} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \vec{V} dx$

**扰动运动** 天气系统就是涡旋运动/扰动运动  $\vec{V}' = \vec{V} - \bar{\vec{V}}$ 。

### 平均的含义

平均并不总是意味着叠加，有时还代表着忽略和滤波。例如：大气行星边界层中所作的时间平均，略去了湍流；7天的平均略去了天气尺度过程。虽然数值上看，纬向平均的经向风和垂直速度非常小，但它们在能量循环中很重要。

**平均动能** 纬向平均运动动能:  $\bar{K} = \frac{1}{2g} \int_{P_2}^{P_1} \bar{\vec{V}}^2 dP$  涡旋运动或扰动运动动能:  $K' = \frac{1}{2g} \int_{P_2}^{P_1} \vec{V}'^2 dP$

$\bar{K}$  与  $K'$  之间的相互转换，体现了大气环流与天气系统（瞬变波）间的相互作用，称为波流相互作用。

**小节目的** 考虑以下四个能量之间的转化：  $\begin{cases} \text{纬向平均运动动能 } \bar{K} \\ \text{纬向平均运动的有效位能 } \bar{A} \\ \text{涡旋运动动能 } K' \\ \text{涡旋运动有效位能 } A' \end{cases}$

我们需要求出对应的描写这四个能量的方程由此讨论这些能量之间的相互转换。

**具体说明**

- ① **纬向平均运动动能  $\bar{K}$** : 中纬度大尺度运动近似地转运动，可以利用等高线的疏密近似表示风的大小。因此，沿纬圈平直又密集的等高线，其平均动能就比较大。
- ② **涡旋运动动能  $K'$** : 扰动振幅大的密集等高线，其涡旋动能比较大。
- ③ **纬向平均有效位能  $\bar{A}$** : 一定纬带内，南北纬向平均温度差越大，平均有效位能就越大。沿纬圈平直的等温线密集的锋区，可以造成南北平均温度差大，因而平均有效位能就多。
- ④ **涡旋有效位能  $A'$** : 等温线扰动振幅越大，涡旋有效位能就越大。

### 5.5.1 动能方程

#### 5.5.1.1 纬向平均运动动能方程

**方程**  $\frac{\partial}{\partial t} \bar{K}^* = \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K} dM = - \int_M (\bar{u} \nabla \cdot \bar{\vec{V}}' u' + \bar{v} \nabla \cdot \bar{\vec{V}}' v') dM - \int_M \bar{\alpha} \bar{\omega} dM - \int_M \bar{D} dM$

动量的涡动输送 纬向平均运动的冷暖空气上升下沉 纬向平均运动的平均摩擦耗散

**推到思路** 动能方程的导出为:  $\vec{V} \cdot \text{运动方程} \rightarrow \vec{V}_h \cdot \frac{\partial \vec{V}_h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} K$ , 那么纬向平均动能方程:  $\bar{\vec{V}}_h \cdot \frac{\partial \bar{\vec{V}}_h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{K}$ 。

随后，根据连续方程得到通量项的积分为零，可以消去方程中的通量项，得到最终形式。

### 方程推导

已知水平运动方程  $\frac{\partial \vec{V}_h}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}_h = -\nabla_h \Phi - f \vec{k} \times \vec{V}_h + \vec{F}_T$ ，导出沿纬圈平均的运动方程  $\bar{e}\bar{q}$  得:  $\frac{\partial \bar{\vec{V}}_h}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{\vec{V}}_h + \bar{\vec{V}}' \cdot \nabla \bar{\vec{V}}'_h = -\nabla_h \bar{\Phi} - f \vec{k} \times \bar{\vec{V}}_h + \bar{\vec{F}}_T$ 。动能方程:  $\bar{\vec{V}}_h \cdot \bar{e}\bar{q}$  得  $\frac{\partial}{\partial t} \bar{K} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{K} + \bar{\vec{V}}_h \cdot \bar{\vec{V}}' \cdot \nabla \bar{\vec{V}}'_h = -\bar{\vec{V}}_h \cdot \nabla \bar{\Phi} + \bar{\vec{F}}_T \cdot \bar{\vec{V}}_h$ 。

由连续方程:  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$  可得:  $\nabla \cdot \bar{\vec{V}} = 0; \nabla \cdot \bar{\vec{V}}' = 0$ ，表明对全球（或半球）大气而言，闭合系统通量

项=0。所以我们想把  $\frac{\partial}{\partial t} \bar{K} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{K} + \bar{\vec{V}}_h \cdot \overline{\vec{V}' \cdot \nabla \vec{V}_h'} = -\bar{\vec{V}}_h \cdot \nabla \Phi + \bar{\vec{F}}_T \cdot \bar{\vec{V}}_h$  中的项凑为通量项而消去。

先看左侧第二项:  $\bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{K} = \nabla \cdot (\bar{\vec{V}} \bar{K}) - \bar{K} \nabla \cdot \bar{\vec{V}} = \nabla \cdot (\bar{\vec{V}} \bar{K})$  通量消去

再看左侧第三项: 涡旋运动的动量通量:  $\bar{\vec{V}}_h \cdot \overline{\vec{V}' \cdot \nabla \vec{V}_h'} = (\bar{u} \vec{i} + \bar{v} \vec{j}) \cdot (\vec{i} (\overline{\vec{V}' \cdot \nabla}) u' + \vec{j} (\overline{\vec{V}' \cdot \nabla}) v') = \bar{u} \overline{(\vec{V}' \cdot \nabla) u'} + \bar{v} \overline{(\vec{V}' \cdot \nabla) v'}$  因为  $\vec{V}' \cdot \nabla u' = \nabla \cdot (\vec{V}' u') - u' \nabla \cdot \vec{V}' = \nabla \cdot (\vec{V}' u')$ ;  $\vec{V}' \cdot \nabla v' = \nabla \cdot (\vec{V}' v')$ , 所以  $\bar{\vec{V}}_h \cdot \overline{\vec{V}' \cdot \nabla \vec{V}_h'} = \bar{u} \nabla \cdot \overline{\vec{V}' u'} + \bar{v} \nabla \cdot \overline{\vec{V}' v'}$

右侧第一项:  $\bar{\vec{V}}_h \cdot \nabla \Phi = \bar{u} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \bar{v} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  该项凑出形式:  $\bar{v} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\Phi \bar{v}) - \bar{\Phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$  利用纬向平均连续方程  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} = 0$  且  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$ , 可得  $-\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p}$ 。所以  $\bar{v} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\Phi} \bar{v}) + \bar{\Phi} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\Phi} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial p} (\bar{\omega} \bar{\Phi}) - \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p}$ , 最终得到:  $\bar{\vec{V}}_h \cdot \nabla \Phi = \nabla \cdot (\bar{\Phi} \bar{\vec{V}}) + \bar{\alpha} \bar{\omega}$ 。存在可消去通量项。现在有:

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t} \bar{K} + \nabla \cdot (\bar{\vec{V}} \bar{K}) + \bar{u} \nabla \cdot \overline{\vec{V}' u'} + \bar{v} \nabla \cdot \overline{\vec{V}' v'}} = -\nabla \cdot (\bar{\Phi} \bar{\vec{V}}) - \bar{\alpha} \bar{\omega} + \bar{\vec{F}}_T \cdot \bar{\vec{V}}_h$$

最后, 对全球大气  $M$  积分  $\int_M "eq" dM$  得到最终方程 (闭合系统通量项=0)。

### 5.5.1.2 涡旋运动动能方程

方程  $\frac{\partial}{\partial t} K'^* = \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K}' dM = \int_M (\bar{u} \nabla \cdot \overline{\vec{V}' u'} + \bar{v} \nabla \cdot \overline{\vec{V}' v'}) dM - \int_M \overline{\alpha' \omega'} dM - \int_M D' dM$

与纬向平均运动的相互作用 扰动运动的冷暖空气上升下沉 涡旋运动的平均摩擦耗散

推导思路一 和纬向平均方程一样, 先写出运动方程:  $\frac{\partial \bar{V}_h}{\partial t} - \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \bar{V}_h'}{\partial t}$ , 再导出动能方程:  $\bar{V}_h' \cdot "eq" \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} K' = \dots$

推导思路二 由总的动能方程以及纬向平均运动动能方程相减, 可得涡旋运动的动能方程。

#### 具体推导

总的动能为  $K = \frac{1}{2} (\bar{\vec{V}}_h + \bar{V}_h')^2 = \bar{K} + \bar{K}' + \bar{\vec{V}}_h \cdot \bar{V}_h'$ , 求纬向平均  $\overline{\bar{K}'} = \bar{K} + \bar{K}'$ , 可得:  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M \overline{\bar{K}'} dM = \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K} dM + \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K}' dM \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K}' dM = \frac{\partial}{\partial t} \int_M \overline{\bar{K}'} dM - \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K} dM$ 。

由 5.3.1, 我们已经知道:  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = - \int_M \alpha \omega dM - \int_M D dM$ , 对其求平均:  $\frac{\partial}{\partial t} \int_M \overline{\bar{K}'} dM = - \int_M \overline{\alpha \omega} dM - \int_M \overline{D} dM$ 。  
 $\int_M \overline{\alpha' \omega'} dM + \int_M \overline{\bar{F}_T' \cdot \bar{V}_h} dM + \int_M \overline{\bar{F}_T' \cdot \bar{V}_h'} dM$ 。

由 5.5.1.1, 我们已经知道:  $\frac{\partial}{\partial t} \bar{K}^* = \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K} dM = - \int_M (\bar{u} \nabla \cdot \overline{\vec{V}' u'} + \bar{v} \nabla \cdot \overline{\vec{V}' v'}) dM - \int_M \alpha \bar{\omega} dM - \int_M \bar{D} dM$ 。

两式相减:  $\frac{\partial}{\partial t} K'^* = \frac{\partial}{\partial t} \int_M \overline{\bar{K}'} dM - \frac{\partial}{\partial t} \bar{K}^* = \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K}' dM = \int_M (\bar{u} \nabla \cdot \overline{\vec{V}' u'} + \bar{v} \nabla \cdot \overline{\vec{V}' v'}) dM - \int_M \overline{\alpha' \omega'} dM - \int_M D' dM$ 。

## 5.5.2 有效位能方程

### 5.5.2.1 纬向平均有效位能方程

**基础方程** 已知热力学方程  $C_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{P} \omega = \dot{Q}$

将温度分解为:  $T = \bar{T} + T'$   $\bar{T}$  纬向平均(南北方向的温度分布)  $T'$  涡旋系统温度分布(冷暖中心)

**方程变换**  $\frac{EQ}{T}$  且分母上的  $T$  以**全球平均温度  $[T]$**  代替:  $\frac{C_p}{[T]} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T \right) - \frac{R}{P} \omega = \frac{\dot{Q}}{[T]}$

**定义** **有效位能**  $A = \frac{C_p}{2[T]} T^2$  **平均有效位能**  $\bar{A} = \frac{1}{2} \frac{C_p}{[T]} \bar{T}^2$  **涡动有效位能**  $A' = \frac{1}{2} \frac{C_p}{[T]} T'^2$

与 5.4.3 中定义的位温差有所区别

**方程**  $\frac{\partial}{\partial t} \bar{A}^* = \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{A} dM = -\frac{C_p}{[T]} \int_M \bar{T} \nabla \cdot \vec{V}' T' dM + \int_M \bar{\alpha} \bar{\omega} dM + \int_M \frac{\dot{Q} \bar{T}}{[T]} dM$

### 方程推导

基于变换后的方程:  $\frac{C_p}{[T]} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T \right) - \frac{R}{P} \omega = \frac{\dot{Q}}{[T]}$ , 对其取平均:  $\frac{C_p}{[T]} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{T} + \vec{V}' \cdot \nabla T' \right) - \frac{R}{P} \bar{\omega} = \frac{\dot{Q}}{[T]}$ 。用  $\bar{T}$  替换 "eq" 得到:  $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{A} + \frac{C_p}{[T]} \bar{T} \vec{V}' \cdot \nabla T' - \frac{R \bar{T}}{P} \bar{\omega} = \frac{\dot{Q} \bar{T}}{[T]}$ 。考虑到其中  $\vec{V} \cdot \nabla \bar{A} = \nabla \cdot (\vec{V} \bar{A}) - \bar{A} \nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot (\vec{V} \bar{A})$ ,  $\vec{V}' \cdot \nabla T' = \nabla \cdot (\vec{V}' T')$   $- T' \nabla \cdot \vec{V}' = \nabla \cdot (\vec{V}' T')$  为通量项。对全球(北半球)大气积分, 得到:  $\frac{\partial}{\partial t} \bar{A}^* = \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{A} dM = -\frac{C_p}{[T]} \int_M \bar{T} \nabla \cdot \vec{V}' T' dM + \int_M \bar{\alpha} \bar{\omega} dM + \int_M \frac{\dot{Q} \bar{T}}{[T]} dM$ 。

### 5.5.2.2 扰动有效位能方程

**方程**  $\frac{\partial}{\partial t} A'^* = \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{A}' dM = \frac{C_p}{[T]} \int_M \bar{T} \nabla \cdot \vec{V}' T' dM + \int_M \bar{\alpha}' \bar{\omega}' dM + \int_M \frac{\dot{Q}' T'}{[T]} dM$

**方法** 用类似于求解涡旋运动动能方程的方法 " $\bar{A}' = \bar{A} + A'$ " 得到全球涡旋扰动有效位能方程。

### 5.5.3 动能和位能方程及转换

**现有方程**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{K}^* &= \boxed{- \int_M (\bar{u} \nabla \cdot \vec{V}' u' + \bar{v} \nabla \cdot \vec{V}' v')} dM \quad \boxed{- \int_M \bar{\alpha} \bar{\omega} dM} - \int_M \bar{D} dM \\ \frac{\partial}{\partial t} K'^* &= \boxed{\int_M (\bar{u} \nabla \cdot \vec{V}' u' + \bar{v} \nabla \cdot \vec{V}' v')} dM \quad \boxed{- \int_M \bar{\alpha}' \bar{\omega}' dM} - \int_M D' dM \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{A}' &= \boxed{- \frac{C_p}{[T]} \int_M \bar{T} \nabla \cdot \vec{V}' T' dM} \quad \boxed{+ \int_M \bar{\alpha} \bar{\omega} dM} + \int_M \frac{\dot{Q} \bar{T}}{[T]} dM \\ \frac{\partial}{\partial t} A'^* &= \boxed{\frac{C_p}{[T]} \int_M \bar{T} \nabla \cdot \vec{V}' T' dM} \quad \boxed{+ \int_M \bar{\alpha}' \bar{\omega}' dM} + \int_M \frac{\dot{Q}' T'}{[T]} dM \end{aligned}$$

除了**非绝热加热项**和**耗散项**, 其余项都在两个不同的方程中各出现一次且符号相反, 它们是**转换项**。