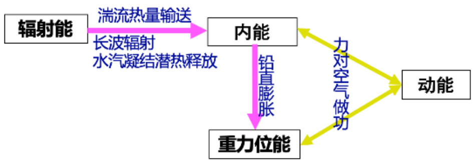
第五章 大气能量学



引言

能量转换和守恒定律是物质运动所遵循的普遍规律，大气中各种不同尺度运动的产生、发展和消亡，实质上是系统运动能量的积累、爆发和转换的结果。研究大气能量过程也是研究大气运动的有效途径。大气中常见的能量形式：辐射能、内能、重力位能、动能。

5.1 大气中主要能量形式

5.1.1 主要能量形式

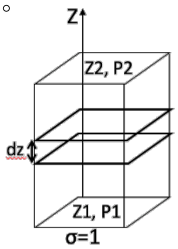
主要形式 位能 *Gravitational potential energy*、内能 *Internal energy*、动能 *Kinetic energy*、潜热能 *Latent heat*

过程分析 ① 最初的源是**太阳辐射能**，但大气只吸收很少一部分辐射能，其主要被地表吸收，然后通过**湍流热量输送**、**辐射热量传递**、**水汽凝结潜热释放**使大气得到热能，其导致**大气内能**增加。

② **非绝热加热**使**大气内能**增加同时，引起在铅直方向膨胀，从而增加**重力位能**。

③ **太阳辐射能**不能直接转换成大气动能，**动能**是由**内能**和**重力位能**转换来的，而且只包含力的过程，通过力对空气的**做功**实现**内能**、**重力位能**、**动能**之间的转换，且在热力学上是可逆的。

能量学研究 只需要知道**初态和终态**，对中间过程不关心。



5.1.1.1 位能

定义 质点处于地球表面附近重力场中的任一点，都具有**重力势能**，即**位能** $\boldsymbol{\Phi = gz}$。

公式 $\boldsymbol{\Phi = \int_{z_1}^{z_2} \rho gzdz = \int_{P_2}^{P_1} zdp}$

单位截面积气柱的位能的推导

考察单位截面积、dz厚度的气块薄片：dz薄片的质量为 $\rho\cdot 1\cdot dz=\rho dz$，则$dz$薄片的位能：$\delta\Phi=\rho gzdz$，则 $z_1{\sim}z_2$ 单位截面积气柱所具有的总位能：$\Phi=\int_{z_1}^{z_2}\rho gzdz$。利用静力学方程 $dp=-\rho gdz \Rightarrow dz=-\frac{dp}{\rho g}$，则

$$\Phi=\int_{z_1}^{z_2}\rho gzdz=\int_{p_1}^{p_2}\rho gz-\frac{dp}{\rho g}=-\int_{P_1}^{P_2}zdp=\int_{P_2}^{P_1}zdp$$

5.1.1.2 内能

定义 单位质量气块具有内能为 $\boldsymbol{I=C_VT}$。 C_V为**定容比热**，大气数值为 $717\ J/kg\cdot K$

公式 $\boldsymbol{I=\frac{C_V}{g}\int_{P_2}^{P_1}Tdp}$

单位截面积气柱的内能的推导

dz 厚度的簿块的内能：$dI=C_VT\rho dz$，$z_1{\sim}z_2$ 单位截面积气柱所具有的内能：$I=C_V\int_{z_1}^{z_2}T\rho dz$，$p$坐标下：

$$I=C_V\int_{z_1}^{z_2}T\rho dz=-\frac{C_V}{g}\int_{P_1}^{P_2}TdP=\frac{C_V}{g}\int_{P_2}^{P_1}TdP$$

5.1.1.3 动能

定义 单位质量气块所具有动能 $\boldsymbol{K=\frac{1}{2}V^2}$ 其中 $V^2=u^2+v^2+w^2$

公式 $\boldsymbol{K=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{2}\rho V^2dz=\frac{1}{2g}\int_{P_2}^{P_1}V^2dp}$

单位截面积气柱的动能的推导

dz厚度的簿块的动能：$dK=\frac{1}{2}V^2\rho d$，z坐标下：$K=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{2}\rho V^2 dz$，$p$坐标下：$K=-\frac{1}{2g}\int_{P_1}^{P_2}V^2 dP=\frac{1}{2g}\int_{P_2}^{P_1}V^2 dP$

5.1.1.4 潜热能

定义 系统中**所有水汽全部凝结所释放的能量**。实际大气中的潜热能不会被全部释放：对流降水潜热释放能够调整大气，使得原有的不稳定大气逐渐变得稳定，并停止对流凝结，致使潜热能不会完全释放。

汽化热L **相变潜热** **单位质量**水汽化到**气态**所**吸收的热量**，即**单位质量水凝结所能释放的热量**。

比湿 q =水汽质量/空气质量。则单位质量湿空气的潜热能为：$\boldsymbol{H=Lq}$ 如果把潜热能错误地理解为相变时释放的热量，潜热能应为$L\Delta q$（这里的Δq特指水汽相变导致的比湿的变化，不考虑混合、夹卷等过程）

公式 $\boldsymbol{H=\int_{z_1}^{z_2}Lq\rho dz=\frac{L}{g}\int_{P_2}^{P_1}qdP}$

单位截面积气柱的潜热能的推导

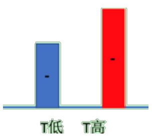
dz厚度的簿块的潜热能：$dH=Lq\cdot\rho dz$，$z_1\sim z_2$ 单位截面积气柱所具有的潜热能：

$$H=\int_{z_1}^{z_2}Lq\rho dz=-\frac{L}{g}\int_{P_1}^{P_2}qdP=\frac{L}{g}\int_{P_2}^{P_1}qdP$$

注意 由此可见，潜热能和实际大气的比湿q密切相关，潜热能的释放与降水相对应。
因此，中高纬度地区下雨少，q小，潜热能的释放也少，故H对中高纬天气系统不是很重要（重要的是斜压不稳定，即有效位能），但在热带地区，H对天气系统变化非常重要。

5.1.2 气柱位能和内能的关系

基本情况 一般对于固体而言，位能（机械能）与内能（热力学能）是无关的。而大气有其特殊性：
① 质量基本守恒　② 表面积不变



质量基本守恒

$\int_0^\infty\rho dz=-\int_{P_s}^{P_\infty}\frac{dP}{g}=-\frac{1}{g}\int_{P_s}^{P_\infty}dP=\frac{P_s}{g}$　可见，单位面积空气柱的质量是由柱底的气压决定的。

然而，气压的变化是很小的（台风也仅仅 50hPa 的变化），因此认为各个空气柱的质量应相当接近。

物理关系 从物理定性角度分析：温度升高→**内能增加**→气柱膨胀→质心抬升→**位能增加**
大气的**内能**与**位能**之间是**同向变化**：如果大气**动能增加**，必定是**内能**与**位能**同时减少向动能转换。

5.1.2.1 无限高气柱的情形

证明结论 下面证明在静力平衡条件下，无限高气柱所包含的**内能和位能成正比**。

位能 $\boldsymbol{\Phi=R\int_0^\infty\rho Tdz}$　**内能** $\boldsymbol{I=C_v\int_0^\infty\rho Tdz}$　（原始形式）

位能与温度的关系推导

$\Phi=\int_{P_2}^{P_1}zdP=\int_0^{P_0}zdP=\int_0^{P_0}[d(zP)-Pdz]=zP|_{P\to0,z\to\infty}^{P_0,z=0}-\int_\infty^0 Pdz$。显然，地面 $P=P_0,z=0\Rightarrow zP|_{P_0,z=0}=0$。高空考虑到气压满足 $P\sim e^{-\alpha z}\Rightarrow\lim_{z\to\infty}zP=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^{\alpha z}}=0$。因此 $\Phi=\int_0^\infty Pdz=\int_0^\infty\rho RTdz=R\int_0^\infty\rho Tdz$

比值 $\frac{\Phi}{I}=\frac{R}{C_v}=\frac{C_p-C_v}{C_v}\approx0.41\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{\Phi\propto I}}$
在静力平衡条件下，**从海平面向上伸展到大气顶部的单位截面积的垂直气柱（必要前提：无限高气柱）**所包含的**位能**和**内能**都是与**温度**有关，同向变化。
当整个气柱增温后，内能必然增加，而当温度增加，气柱又会垂直膨胀，从而位能增加。

5.1.2.2 全位能与热焓

全位能 对无限高气柱而言，大气的内能与位能成正比，且同时增减，故可以把它们结合起来考虑。

定义：**全位能E = 位能ϕ +内能I** $\boxed{E = I + \phi = c_v T + gz} = c_p \int_0^\infty \rho T dz$ （无穷高）

全位能的导出

$$E = I + \phi = I + \frac{RI}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} I = \frac{c_p}{c_v} I = \frac{c_p}{c_v} \cdot c_v \int_0^\infty \rho T dz = c_p \int_0^\infty \rho T dz \quad \text{（适用于无限高情况）}$$

热焓 *Enthalpy*，将单位质量气块的 $c_p T$ 称为**焓**。 c_p 为**定压比热**，大气数值为 $1005\ J/kg \cdot K$
焓和内能的关系是：$c_p T = c_v T + RT = c_v T_{内能} + p/\rho_{压力能}$ 即气柱的全位能就是气柱的焓
单位质量空气块所具有的焓称为**显热能（感热能）**，只与温度有关。

5.1.2.2 有限高气柱的情形

概述 对有限高气柱而言，位能不是简单的与内能成正比，还与气柱的底部、顶部的高度和气压有关。

公式 $\Phi = z_1 P_1 - z_2 P_2 + 0.41I$

有限高气柱位能和内能的关系

从位能定义出发$\Phi = \int_{p_2}^{p_1} z dp = zp|_{z_2,p_2}^{z_1,p_1} - \int_{z_2}^{z_1} p dz = (z_1 p_1 - z_2 p_2) + \int_{z_1}^{z_2} p dz = (z_1 p_1 - z_2 p_2) + R \int_{z_1}^{z_2} \rho T dz$

$= (z_1 p_1 - z_2 p_2) + \frac{R}{c_v} \int_{z_1}^{z_2} c_v \rho T dz$。发现 $I = c_v \int_{z_1}^{z_2} T \rho dz$，$\frac{R}{c_v} = \frac{287}{715.8}$，因此 $\Phi = z_1 P_1 - z_2 P_2 + 0.41I$。

全位能 $E = \phi + I = z_1 P_1 - z_2 P_2 + \frac{R}{c_v} I + I = z_1 P_1 - z_2 P_2 + \int_{z_1}^{z_2} c_p \rho T dz$

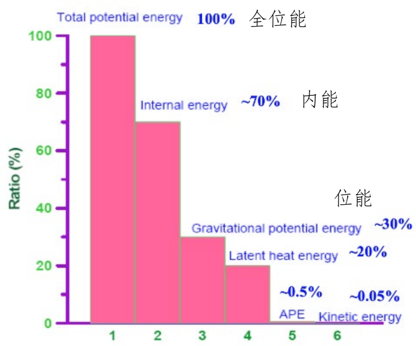
5.1.2.3 基本能量的比较

性质一 位能与内能具有同时增加或者减少的性质，且它们之间有确定比例，平均而言**位能是内能的 40%**。

性质二 在全位能中，**位能 30%，内能大约占 70%**。

性质三 平均而言，**潜热能相当于全位能的 20%**，这说明大气中潜热能应占有一定的地位，特别对强烈发展的系统（例如台风）。

性质四 在诸种能量形式中，**动能**在数量上一般较其它形式的能量小，**动能比全位能小 2-3 个量级**。虽然从数量上看，动能与全位能相比微不足道，但是这个小量对大气运动至关重要。这也说明，大气中全位能转变为动能的只是其中很小部分。



整个大气气柱各种能量的比较

首先给出一些常用典型值：

$R = 287J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$	$c_v = 717J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$	$c_p = 1004J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$
$L = 2.5 \times 10^6 J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$	$C_L = \sqrt{\kappa RT} \approx 300m \cdot s^{-1}$	$\bar{V} = 15m \cdot s^{-1}$
$\bar{q} = 2\%$	$\bar{T} = 250K$	$T' = 15K$

那么各个能量的比值有：

$\frac{位能}{内能}$：$\frac{\Phi}{I} = \frac{g^{-1} \int_0^{p0} RTdp}{g^{-1} \int_0^{p0} c_v Tdp} = \frac{R}{c_v} \approx 0.4$ $\frac{内能}{全位能}$：$\frac{I}{E} = \frac{g^{-1} \int_0^{p0} c_v Tdp}{g^{-1} \int_0^{p0} c_p Tdp} = \frac{c_v}{c_p} \approx 0.7$

$\frac{位能}{全位能}$：$\frac{\Phi}{E} = \frac{g^{-1} \int_0^{p0} RTdp}{g^{-1} \int_0^{p0} c_p Tdp} = \frac{R}{c_p} \approx 0.3$ $\frac{潜热能}{全位能}$：$\frac{H}{E} = \frac{g^{-1} \int_0^{p0} Lqdp}{g^{-1} \int_0^{p0} c_p Tdp} \approx \frac{L\bar{q}}{c_p \bar{T}} \approx 0.2$

$\frac{有效位能}{全位能}$：$\frac{A}{E} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{p0} \frac{\bar{T}}{\gamma d - \gamma} \overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2} dp}{g^{-1} \int_0^{p0} c_p Tdp} \approx \frac{3}{2} \left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2 \approx \frac{1}{200}$ $\frac{动能}{全位能}$：$\frac{K}{E} = \frac{g^{-1} \int_0^{p0} \frac{1}{2} V^2 dp}{g^{-1} \int_0^{p0} c_p Tdp} = \frac{R \int_0^{p0} V^2 dp}{2c_v \int_0^{p0} \kappa RTdp} \approx \frac{R\bar{V}^2}{2c_v CL^2} \approx \frac{1}{2000}$

5.2 大气能量平衡方程

5.2.1 单位质量气块的能量方程

5.2.1.1 单位质量气块的动能方程

方程 $\frac{d}{dt}K=-\frac{1}{\rho}\vec{V}\cdot\nabla p-gw+\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$ **动能的来源只能来自气压梯度力作功**

重力作功项：**动能**与**位能**之间的**转换项**

推导

已知p坐标系下的运动方程为：$\frac{d\vec{V}_h}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-2\vec{\Omega}\times\vec{V}+\vec{G}+\vec{F}_\gamma$，$"\vec{V}_h\cdot eq"\Rightarrow$ 单位质量质点的动能方程

（动能定义为 $K=\frac{1}{2}\vec{V}_h^2$，对其求导可得：$\frac{dK}{dt}=\vec{V}_h\cdot\frac{d\vec{V}_h}{dt}$，为了凑出这个形式）直接得到：$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{V}^2\right)=-\frac{1}{\rho}\vec{V}\cdot\nabla p-\vec{V}\cdot\left(2\vec{\Omega}\times\vec{V}\right)-gw+\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$ 其中柯氏力只改变运动方向，不改变大小，因此$-\vec{V}\cdot\left(2\vec{\Omega}\times\vec{V}\right)=0$

5.2.1.2 单位质量气块的位能方程

方程 $\frac{d\Phi}{dt}=g\frac{dz}{dt}=gw$ 表明**铅直运动**引起位能的变化（理所当然的结果）

转换项 能够发现，**动能方程中有$-gw$**，**位能方程中有gw**，这种**大小相等，符号相反**的项称为**转换项**。

上升运动：位能增加，动能减小，动能转化为位能 下沉运动：位能减小，动能增加，位能转化为动能

5.2.1.3 单位质量气块的内能方程

方程 $\frac{dI}{dt}=\dot{Q}-\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\vec{V}$ **非绝热加热项**：非绝热冷却→内能减小 非绝热加热→内能增加

反抗气压场的膨胀或压缩功率：辐散→反抗气压场，**内能减小** **辐合**→气压场对气块做功，**内能增加**

推导

单位质量内能为$I=c_vT$，则 $\frac{dI}{dt}=c_v\frac{dT}{dt}$。同时有热力学第一定律：$\delta q=dI+pd\alpha\Rightarrow\dot{Q}=\frac{dI}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt}$。我们有连续方程：$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\vec{V}=0$，则 $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}=-\frac{1}{\rho^2}\left(-\rho\nabla\cdot\vec{V}\right)=\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\vec{V}$，将其代入上式，可得 $\frac{dI}{dt}=\dot{Q}-\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\vec{V}$。

5.2.1.4 内能和动能的转换

问题 若考虑**固定体积**中或**整个大气**中内能和动能的变化，内能和动能的转换是如何实现的？

我们需要将**拉格朗日观点**（单位质量空气块）转换为**欧拉观点**（固定体积的某个地点）。

假设条件 单位体积空气质量：ρ 单位体积空气动能：ρK 固定体积τ动能：$\int\rho K\cdot d\tau$

转换情况 $\frac{\partial\rho K}{\partial t}=\rho\frac{dK}{dt}-\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}\right)$ $\frac{\partial\rho I}{\partial t}=\rho\frac{dI}{dt}-\nabla\cdot\left(\rho I\vec{V}\right)$ $\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t}=\rho\frac{d\Phi}{dt}-\nabla\cdot\left(\rho\Phi\vec{V}\right)$

推导

从拉格朗日形式出发：$\frac{d}{dt}K=-\frac{1}{\rho}\vec{V}\cdot\nabla p-gw+\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$，先乘$\rho$得到物质导数并代入微分算子：$\rho\frac{d}{dt}K=\rho\frac{\partial K}{\partial t}+\rho\vec{V}\cdot\nabla K$，用恒等式把右端组织成时间导数和通量散度形式：$\rho\frac{\partial K}{\partial t}=\frac{\partial(\rho K)}{\partial t}-K\frac{\partial\rho}{\partial t}$，因此原式：$\rho\frac{d}{dt}K=\frac{\partial(\rho K)}{\partial t}-K\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\vec{V}\cdot\nabla K$。用连续方程 $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)=0$，可得 $-K\frac{\partial\rho}{\partial t}=K\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)$，并注意恒等式：$\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}\right)=\rho\vec{V}\cdot\nabla K+K\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)$，于是得到关键转换：$\rho\frac{d}{dt}K=\frac{\partial(\rho K)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}\right)$，移项则得到转换形式：$\frac{d}{dt}\rho K=\rho\frac{\partial(K)}{\partial t}-\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}\right)$

欧拉观点 $\frac{\partial(\rho K)}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}+p\vec{V}\right)+p\nabla\cdot\vec{V}-\rho gw+\rho\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$

$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(\rho I\vec{V}\right)+\rho\dot{Q}-p\nabla\cdot\vec{V}$ $\qquad$ $\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(\rho\Phi\vec{V}\right)+\rho gw$

推导

对动能方程中的压力项做向量恒等变形 $-\frac{1}{\rho}\vec{V}\cdot\nabla p=-\frac{1}{\rho}\left(\nabla\cdot\left(p\vec{V}\right)-p\nabla\cdot\vec{V}\right)=-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(p\vec{V}\right)+\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\vec{V}$，代入物质导数形式的动能方程 $\frac{d}{dt}K=-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(p\vec{V}\right)+\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\vec{V}-gw+\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$。乘$\rho$并应用转换情况的式子：$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}\right)=-\nabla\cdot\left(p\vec{V}\right)+p\nabla\cdot\vec{V}-\rho gw+\rho\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$，移项可得最终形式 $\frac{\partial(\rho K)}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}+p\vec{V}\right)+p\nabla\cdot\vec{V}-\rho gw+\rho\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}$。

内能方程和位能方程类似。

全球大气 $\frac{\partial K^*}{\partial t}=\int_\tau\frac{\partial\rho K}{\partial t}\cdot d\tau=\int_\tau p\nabla\cdot\vec{V}d\tau-\int_\tau\rho gwd\tau+\int_\tau\rho\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}d\tau$ 其中颜色相同的项为转换项

$\frac{\partial I^*}{\partial t}=\int_\tau\frac{\partial\rho I}{\partial t}\cdot d\tau=\int_\tau\rho\dot{Q}d\tau-\int_\tau p\nabla\cdot\vec{V}d\tau$ 进行体积分可得固定体积中能量变化

$\frac{\partial\Phi^*}{\partial t}=\int_\tau\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t}\cdot d\tau=\int_\tau\rho gwd\tau$ 三项相加得到能量守恒

系统内气压场作压缩功实现闭合系统中动能和内能的转换（这说明了大气可压缩性的重要性）

5.2.2 单位质量气块的水平动能方程

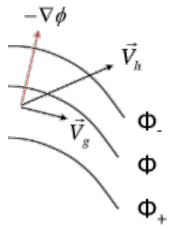
模型假设 由于大气中垂直速度远小于水平风速，因此在动能中可以**忽略垂直速度**。

方程 $\frac{dK}{dt}=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-D$ 其中**摩擦耗散**$-D=\vec{F}_\gamma\cdot\vec{V}_h<0$ **粘性力做功项** **压力做功项** $-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi$

结论 **动能的来源**只能来自**气压梯度力作功**，动能的耗散主要来源于摩擦耗散。

地转运动 $-\vec{V}_g\cdot\nabla\Phi=0$ 系统动能不发生变化，要使系统动能发生变化，一定要有穿越等位势高度线的运动

非地转运动 风从高位势吹向低位势：压力梯度力作正功，动能增加 $-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi>0$



反之，从低位势到高位势，压力梯度力作负功，质点动能减少 $-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi<0$

由此，**非地转运动是大气动能变化的重要原因。**

5.2.3 闭合系统中的水平动能方程

闭合系统 与外界**无质量交换**，**有能量交换**，即边界上的法向速度为 0：$V_n|_\Gamma=0$ （大气可以近似为闭合系统）

孤立系统 既没有质量又没有能量的交换 **开放系统**：质量和能量均有交换

方程 $\frac{\partial}{\partial t}\int_M KdM=-\int_M\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi dM-\int_M DdM$ **气压梯度力做功项** **摩擦耗散项**

推导

在静力平衡条件下，已知单位质量气块的水平动能方程为：$\frac{dK}{dt}=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-D$ 其中 $K=\frac{1}{2}\vec{V}_h^2$ 由拉格朗日观点转化为欧拉观点：$\frac{\partial}{\partial t}K+\vec{V}_h\cdot\nabla K+\omega\frac{\partial K}{\partial p}=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-D$ 对平流项做一变形：$\vec{V}_h\cdot\nabla K+\omega\frac{\partial K}{\partial p}+K\left(\nabla\cdot\vec{V}_h+\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)=\nabla\cdot\vec{V}_hK+\frac{\partial\omega K}{\partial p}$ （注意到 $\nabla\cdot\vec{V}_h+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0$ p坐标系连续方程=0），因此水平动能方程可写为：$\frac{\partial}{\partial t}K+\nabla\cdot\vec{V}_hK+\frac{\partial\omega K}{\partial p}=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-D$，进一步合并：$\frac{\partial}{\partial t}K+\nabla\cdot\left(\vec{V}K\right)=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-D$ $\quad\nabla\cdot\left(\vec{V}K\right)$ 这一项为通量项。

闭合系统系统质量为M，则系统的动能方程为：$\frac{\partial}{\partial t}\int_M KdM+\int_M \nabla\cdot\left(\vec{V}K\right)dM=-\int_M \vec{V}_h\cdot\nabla\Phi dM-\int_M DdM$

假设在上、下边界上垂直速度为0，闭合系统没有穿越边界的动能通量，$\int_\tau\nabla\cdot K\vec{V}d\tau=\oint_\sigma K\vec{V}\cdot d\vec{\sigma}=\oint_\sigma KV_n d\sigma=0$

通量项$\int_M \nabla\cdot(\vec{V}K)dM$由体积分转化为面积分：根据三维格林定理，将体积分转化为面积分$\int_M \nabla\cdot K\vec{V}dM=\rho\int_\tau\nabla\cdot K\vec{V}d\tau=\rho\oint_\sigma K\vec{V}\cdot d\vec{\sigma}=\rho\oint_\sigma KV_n d\sigma=0$。

5.3 闭合系统中能量转换与守恒

总体概述　闭合系统**动能增加**，则一定是$\begin{cases}\text{压力梯度力作正功} \Leftarrow \text{作功角度}\\ \text{全位能向动能转换} \Leftarrow \text{能量转换角度}\end{cases}$　本章利用闭合系统中的动能与全位能方程，考察闭合系统动能变化的同时，全位能的变化情况，讨论二者的转换关系。

5.3.1 水平动能方程

方程　$\frac{\partial}{\partial t}\int_M KdM=-\int_M \alpha\omega dM-\int_M DdM$　将气压梯度力做功项与垂直运动和温度之间的相关联系起来

推导过程

基于闭合系统中的水平动能方程 $\frac{\partial}{\partial t}\int_M KdM=-\int_M \vec{V}_h\cdot\nabla\Phi dM-\int_M DdM$。其中$-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-\Phi\left(\nabla\cdot\vec{V}_h+\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)$（新增项$p$坐标系连续方程为零）。继续展开：$-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi=-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi-\Phi\nabla\cdot\vec{V}_h-\Phi\frac{\partial\omega}{\partial p}=-\nabla\cdot\left(\Phi\vec{V}_h\right)-\left(\frac{\partial\Phi\omega}{\partial p}-\omega\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)=-\nabla\cdot\left(\Phi\vec{V}\right)-\alpha\omega$。($\frac{\partial\Phi}{\partial p}=-\frac{1}{\rho}$)　对闭合系统积分得：$\int_M(-\vec{V}_h\cdot\nabla\Phi)dM=-\int_M\nabla\cdot(\Phi\vec{V})dM-\int_M\alpha\omega dM$ $=-\int_M\alpha\omega dM=-R\int_M\frac{\omega T}{p}dM$。（通量项$-\nabla\cdot(\Phi\vec{V})$在闭合系统中的积分为0）

5.3.2 全位能方程

方程　$\frac{\partial}{\partial t}\int_M EdM=\int_M \alpha\omega dM+\int_M \dot{Q}dM$　垂直运动与温度之间的相关　用于闭合系统

非绝热加热项：**加热膨胀**→质心上抬→**位能增加**→加热温度升高→**内能增加**

推导过程

已知全位能：$E=\Phi+I=\frac{RI}{c_v}+I=\frac{c_v+R}{c_v}I=\frac{c_p}{c_v}I=c_pT$。已知热力学能量方程第二表达形式：$c_p\frac{dT}{dt}-\alpha\frac{dP}{dt}=\dot{Q}$。又由于 $\frac{dE}{dt}=c_p\frac{dT}{dt}$，且 $\omega=\frac{dp}{dt}$，有 $\frac{dE}{dt}-\alpha\omega=\dot{Q}$。我们下面着重推导 $\frac{dE}{dt}$ 这一项。

对于任意矢量，有 $\frac{dE}{dt}=\frac{\partial E}{\partial t}+\vec{V}_h\cdot\nabla E+\omega\frac{\partial E}{\partial p}$，利用连续性方程：$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial E}{\partial t}+\vec{V}_h\cdot\nabla E+\omega\frac{\partial E}{\partial p}+E\left(\nabla\cdot\vec{V}_h+\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)=\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\vec{V}_hE\right)+\frac{\partial}{\partial p}(\omega E)=\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot\left(E\vec{V}\right)$。其中$\nabla\cdot\left(E\vec{V}\right)$为通量项。对闭合系统积分，得到方程的左边：$\int_M\frac{dE}{dt}dM=\int_M\frac{\partial E}{\partial t}dM+\int_M\nabla\cdot\left(E\vec{V}\right)dM=\frac{\partial}{\partial t}\int_M EdM$。右边则直接积分即可。

5.3.3 闭合系统中的能量守恒与转换

5.3.3.1 闭合系统中的动能方程＋全位能方程

方程 $\frac{\partial}{\partial t}\int_M (K+E)dM = \int_M \dot{Q}dM - \int_M DdM$

描述 闭合系统内的**动能与全位能之和**的变化决定于系统的**非绝热加热**和**摩擦作功耗散**。

在**绝热、无摩擦条件下**，**总能量守恒**。 $\frac{\partial}{\partial t}\int_M (K+E)dM = 0$

5.3.3.2 全位能与动能的转换

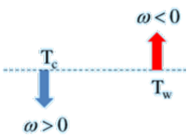
方程 $\frac{\partial}{\partial t}\int_M KdM = -\int_M \alpha\omega dM - \int_M DdM$ $\frac{\partial}{\partial t}\int_M EdM = \int_M \alpha\omega dM + \int_M \dot{Q}dM$

转换项 $\int_M \alpha\omega dM$ 同时在两个方程中出现，且正负相反，是**全位能**和**动能**之间的转换项。

注意 **非绝热加热不能直接转化成动能**（辐射能量被全位能吸收，通过转换项转换为动能）

$\int_M \alpha\omega dM \begin{cases} > 0 \Rightarrow E\uparrow, K\downarrow \Rightarrow K\to E \\ < 0 \Rightarrow E\downarrow, K\uparrow \Rightarrow E\to K \end{cases}$ 体现了二者之间的转换关系及机制。

如果$\omega=0$，则 $\Longrightarrow \int_M \alpha\omega dM = 0$。所以，**垂直运动**是闭合系统中动能与全位能转换的**必要条件**



充分条件的分析

进一步：$\int_M \alpha\omega dM = \int_M \frac{RT}{P}\omega\, dM$，如果$\omega\neq 0$，则系统必然有上升运动，也有下沉运动；且由连续方程知：上升质量等于下沉质量。不妨假设一半质量上升，一半质量下沉，如果α分布均匀，等压面上温度一致，那么 $\int_M \alpha\omega dM = 0$。因此，垂直运动不是能量转换的充分条件。

但**如果$\alpha(T)$ 与 ω 是负相关**，即：

① α大（T大）空气、$\omega<0 \Rightarrow$ 暖空气上升

② α小（T小）空气、$\omega>0 \Rightarrow$ 冷空气下沉。 那么总体 $\int_M \alpha\omega dM < 0$，全位能向动能转换。

物理本质 **暖空气→轻→上升**，**冷空气→重→下沉**，**总体系统质心下降**，**全位能减少**，**动能增加**。

案例

可以用“全位能→动能”分析海陆风或山谷风的形成。风由海洋向陆地：从能量角度看，暖空气一定上升，冷空气一定下沉，转换项 <0，位能向动能转换，这样的环流才能形成、维持。如果是暖空气下沉，冷空气上升，则动能的来源没有了，这样的环流就不能维持下去了。

5.3.3.3 静力平衡下全球大气能量平衡

平衡情况 $\int_M \dot{Q}dM \to \int_M EdM \overset{\int_M \alpha\omega dM}{\Longleftrightarrow} \int_M KdM \to \int_M DdM$

① **非绝热加热**增加了**大气全位能**。

② 通过**穿越等压线的水平运动** $\int_M \alpha\omega dM$（非地转运动导致的辐合辐散产生垂直运动），全位能转化为动能，以补偿摩擦对大气动能的耗散，从而维持全球大气运动。

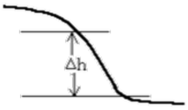
地球自转对能量转换有何影响？

地球自转所产生的地转偏向力虽然不能改变空气运动的动能，但它使空气运动趋向于沿等压线运动，这可使全位能和动能之间的能量转换的速度减缓。当空气严格按地转风运动时，空气就不穿越等压线运动，全位能与动能之间的转换将停止进行。

5.4 有效位能

5.4.1 有效位能

有效位能 ***Available Potential Energy . APE*** 动能与全位能间的转换导致动能变化，这是天气系统变化的重要机理。但大气中的全位能不能被全部释放（动能与全位能的比为 1:2000），在考虑天气系统变化时，有意义的是**能够转换成动能的那部分全位能**，称为**有效位能**。



形象案例

例如：水电站：位能→动能→电能。需要建在落差大的地方，而不是建在位能大的地方。落差大：能够转换成动能的位能大。

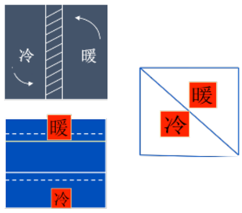
必要条件 **垂直运动**是闭合系统中动能与全位能转换的必要条件。当暖空气上升，冷空气下沉时，全位能向动能转换。显然，正压大气中没有这种转换，只有斜压大气中存在。

提出 有效位能是 1955 年 Lorenz 提出的一个概念。

A：初态：斜压，**全位能最大**。一旦垂直壁取走，一部份位能要转化成动能。

B：无科氏力作用下的终态，处于正压和稳定状态，**全位能最小**。

C：有科氏力作用下的终态，处于斜压状态，全位能**次最小**（相对于 B 而言）。



5.4.2 有效位能的定义

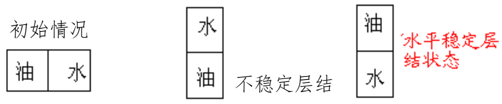
严格定义 在**闭合系统**中，经过**干绝热过程**（不考虑水汽），从任意**初始状态**调整到**水平稳定层结状态**时，系统所能释放的**最大全位能**，称为**有效位能**。即能够被释放出来的那部分全位能的上限。

说明 ① 闭合系统：外界没有质量通量输入

② 干绝热过程：无潜热释放和太阳辐射，全位能和动能守恒（不考虑摩擦）。

③ 水平稳定层结：水平的**等温面//等压面//等密度面（正压状态）**，**上轻下重**的**稳定层结**。即状态 B。

④ 正压大气无有效位能，斜压大气有效位能为正值。

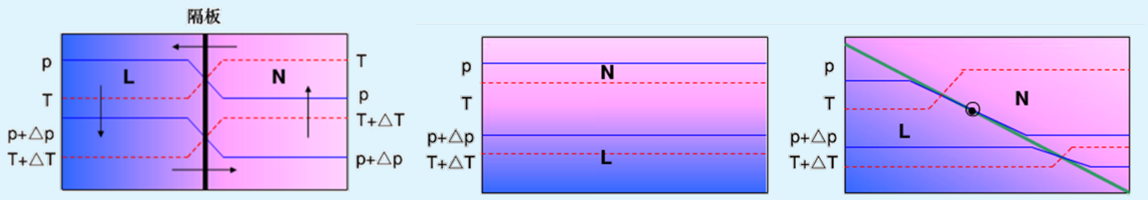


实际大气 实际大气中存在着两类由全位能转变为动能（有效位能释放）的过程：

① **上冷下暖**两气层叠置，通过**对流翻转**气层进行绝热调整释放全位能的过程。

② 冷空气和暖空气并列（比如锋面）通过**质量调整**使全位能转换为动能的过程。

锋面案例



初始状态：初始静止状态，密度不同，同一高度上的压强也不同；低层气压大，同一高度水平气压梯度力也大。一旦隔板拿开，由于低层水平气压梯度力大，将产生如图所示环流。此时只有位能和内能。当隔板抽开，暖空气上升、冷空气下沉，位能减少，动能增加。

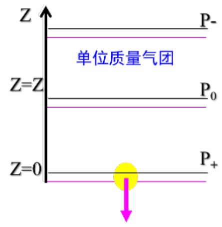
如果无柯氏力作用，则暖空气上升，冷空气下沉，最终密度大的流体完全位于密度小的流体下方，环流消失，水平压力梯度力为零，流体静止。正压状态，稳定层结，仍具有一部分全位能。但由于无外力作用，这部分全位能无法释放。此时系统具有最小全位能。

科氏力垂直屏幕向外，风向右旋转使得风最终平行于锋面，向外。实际上，因为有柯氏力作用，流体最终不能达到中图状态，而是流体之间维持一个冷空气的倾斜面，同时流体中出现与纸面垂直的运动，即锋面“大风”。柯氏力与倾斜界面产生的压力梯度力相平衡。此时静力平衡和地转平衡使得锋面得以维持，等压面上仍维持一定的水平温度梯度，部分能够释放的全位能没有释放出来。

5.4.3 有效位能的计算

两种算法 ① 算出初始状态的全位能和终态的全位能（参见课本）**有效位能 = 初态全位能 − 终态全位能**
计算时比较复杂，是因为终态不好确定。
② 气块法：计算从终态到初态，**气块反抗净浮力所做的功**

气块法思路 我们考虑终态时水平稳定层结 $N^2=\frac{g}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}>0$（净浮力与位移方向相反），故将垂直运动方程写为：$\frac{dw}{dt}=-N^2\delta z$。当把单位质量气团从 $z=0$ 移到 $z=z$，斜压状态具有有效位能，此过程中，受净浮力的作用，净浮力与位移相反，全位能的增加=有效位能的积累=气块反抗净浮力做的功。



具体计算

该过程为干绝热过程，气块位温守恒。到达$z=z$高度，气团的位温仍是$\theta_0(0)$，而$z=z$高度等压面上的平均位温是$\theta_0(z)$，在这个等压面上，产生了位温差：$\theta'=\theta_0(0)-\theta_0(z)=-\frac{\partial\theta_0}{\partial z}\cdot z$。考虑到有效位能 = 气块反抗净浮力做的功，而气块反抗净浮力做的功：$A=\int_0^z N^2zdz=\frac{1}{2}N^2z^2$，$\theta'=-\frac{\partial\theta_0}{\partial z}\cdot z\Rightarrow z=-\frac{\theta'}{\partial\theta_0/\partial z}$。因此单位质量气块具有的有效位能为：$A=\frac{1}{2}N^2\left(\frac{\theta'}{\partial\theta_0/\partial z}\right)^2$。则单位截面积的气柱具有的有效位能：

$A^*=\int_0^\infty\frac{1}{2}N^2\left(\frac{\theta'}{\partial\theta_0/\partial z}\right)^2\cdot\rho dz=\int_0^{P_0}\frac{1}{2g}N^2\left(\frac{\theta'}{\partial\theta_0/\partial z}\right)^2dP=\int_0^{P_0}\frac{1}{2g}N^2\left(\frac{\theta'}{\theta_0N^2/g}\right)^2dP$ 考虑到$N^2=\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\theta_0}{\partial z}$，最终得到 $A^*=\int_0^{P_0}\frac{g}{2N^2}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right)^2dP$。在等压面上有 $\frac{T'}{T_0}\approx\frac{\theta'}{\theta_0}$，则 $A^*=\int_0^{P_0}\frac{g}{2N^2}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right)^2dP\approx\int_0^{P_0}\frac{g}{2N^2}\left(\frac{T'}{T_0}\right)^2dP$。

有效位能 $\boldsymbol{A^*=\int_0^{p_0}\frac{g}{2N^2}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right)^2dp=\int_0^{p_0}\frac{g}{2N^2}\left(\frac{T'}{T_0}\right)^2dp}$

性质 有效位能正比于等压面上的**位温差或温度差的平方**。$\boldsymbol{A^*\propto\theta'^2}$**或**$\boldsymbol{T'^2}$

由此可见，有效位能与大气的**斜压性**相对应，正压大气没有有效位能；斜压性越强，力管项大，有效位能越大，由此也称有效位能为**斜压能**。

5.4.4 闭合系统中有效位能方程

方程 $\boldsymbol{\frac{\partial A^*}{\partial t}=\int_M\alpha\omega dM+\int_M\left[1-\left(\frac{\bar{p}}{p}\right)^{R/c_p}\right]\dot{Q}dM}$ **有效位能与动能之间的转换** **有效位能产生项**

说明 **等位温面**上，**高压区 $p>\bar{p}$ 增热**，**低压区 $p<\bar{p}$ 冷却**，将使**有效位能增加**。

推导

改写全位能方程 $\frac{\partial}{\partial t}\int_M EdM=\int_M\alpha\omega dM+\int_M\dot{Q}dM$。考虑热力学能量方程 $c_p\frac{T}{\theta}\frac{d\theta}{dt}=\dot{Q}$和位温定义$\theta=T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p}$，可得：$\dot{Q}=c_p\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p}\frac{d\theta}{dt}$。将其带入方程，有 $\frac{\partial}{\partial t}\int_M EdM=\int_M\alpha\omega dM+\int_M c_p\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p}\frac{d\theta}{dt}dM$。

水平稳定层结时，全位能达到最小：$\frac{\partial}{\partial t}\int_M E_{\min}dM=\int_M c_p\left(\frac{\bar{p}}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p}}\frac{d\theta}{dt}dM$。有效位能位的变率 $\frac{\partial A^*}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_M EdM-\frac{\partial}{\partial t}\int_M E_{\min}dM=\int_M\alpha\omega dM+\int_M c_p\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p}}\left[1-\left(\frac{\bar{p}}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}\right]\frac{d\theta}{dt}dM=\int_M\alpha\omega dM+\int_M\left[1-\left(\frac{\bar{p}}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}\right]\dot{Q}dM$

实际情况 $\frac{\text{动能}}{\text{有效位能}}$: $\frac{K}{A}\approx\frac{1}{10}$ 只有**十分之一**的有效位能真正可以转换为动能。
这是由于在有科氏力的影响下，现实大气无法达到真正理想的稳定层结。