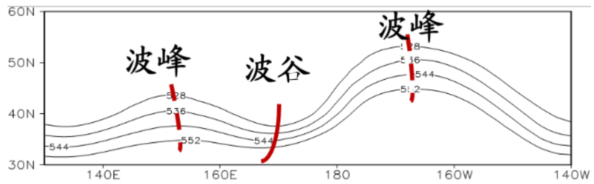
第六章 大气中的基本波动



大气长波

章节引入

天气图上可见：高度场、温度场基本呈波状分布。因此，可用物理学中研究波动现象的方法来讨论大气运动。注意，在高空天气图上直接看到的是气流的流型，并非是波动，但这种西风气流大幅度的弯曲流动的确折射出大气长波的存在。上章我们已经得到：大气运动＝纬向平均运动＋涡旋运动＝大气环流＋天气系统。

波动学 以**直观的天气学**（槽脊结构）和**物理学图像**（水波等）作为基础，在气象学中引入**波动**概念，并用**数学方式**进行理论探讨和完善，形成**大气波动理论**和**大气波动学**。目前波动学是**主流理论**。

波动学优点
① 可以利用成熟的波动学理论对天气系统形成机理、发生发展和移动进行研究。
② 由于槽脊的移动是等位相线的运动，即波的移动，所以槽脊的移速 = 相速 = 波速。
③ 波动学把气旋（低压）、反气旋（高压）系统联系起来，能够判断涡旋系统的发展和演变。

案例分析

① 气旋增强：漩涡动力学角度是涡度增加；能量学角度是K'增加；波动学角度则是槽的加深。

② 系统移动：波动学角度是槽脊东移；涡旋动力学角度是 $\left.\begin{array}{l}\text{气旋前：}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}>0,\text{即 }\zeta\uparrow\\ \text{气旋后：}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}<0,\text{即 }\zeta\downarrow\end{array}\right\}\Rightarrow$ 气旋东移

波动学目的 通过**大气运动方程组**，利用**波动学理论**讨论**天气系统**（大尺度）的形成、发生发展及移动的机理。

存在问题 大气基本方程中除了大尺度的天气波动外，还存在其他波动的干扰。

基本波动 大气中四类基本波动：**大气长波，声波，重力波**（水波就是一种重力波），**惯性波**。因为没有电磁学方程，不包含电磁波/光波（不考虑雷电现象）

波动

各种波动的形成机制、性质及对天气产生的影响有所不同，因此在进行大气波动学分析时，不可能把所有波动类型都考虑进去。最早的天气预报使用的是原始方程，因其包含各种波动，次要波动的噪声会将误差放大，导致几小时变压数百百帕的错误结果。

声波	弹性振动（大气的可压缩性）	快波
惯性波	惯性振荡（旋转性）+辐合辐散	高频波
重力内波	浮力振荡（层结性）+辐合辐散	高频波
重力外波	辐合辐散	快波
Rossby 波	β效应	慢波

滤波 可以把波动分类：$\left\{\begin{array}{l}\textbf{重要}\text{：大气长波}\Rightarrow\text{称为}\textbf{谐音}\text{：需要保留}\\ \textbf{次要}\text{：如声波等}\Rightarrow\text{称为}\textbf{噪音}\text{：需要去掉}\end{array}\right.\Rightarrow$ **滤波**

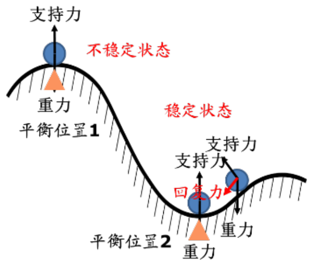
滤波目的 去除次要波动的干扰，讨论主要波动，在数值预报中滤波非常重要。
例如声波是由于大气可压缩性引起的，假设大气是不可压的就可以滤去声波，但对天气波动影响不大。
因此，有必要研究包括次要波动在内所有波动的机制和性质，以实现滤波的目的。

误差的增长

如果取时间步长 Δt 为 10 分钟，对于时间尺度为 10^5s 的天气尺度波动来说，误差就较小。而对于像声波等快波来说，误差就很大（随机的），且是累积的，最终导致整体系统的不稳定性，此时就需要滤去快波。然而由于计算机资源限制，Δt 也不能取太小。

然而，考虑到大气系统的混沌性（初值敏感），一旦有误差，其放大的效应会十分显著且迅速。因此，一定时段内的天气预报是合理的，一旦超出一定时段，预报就会因为混沌性而失效。

6.1 波动的基本概念



回复机制与稳定性

6.1.1 波动的定义

波动定义　质点**受力的作用**围绕**某平衡位置**振动，振动**在空间的传播**形成波动。

基本条件　① **振动**（回复力）　② **能够传播**（质点与质点之间建立联系）

例如单个单摆摆动，不能引起其它单摆摆动；但用一根线把它们连起来，一个摆动可以传播出去。

波动机制　波动的机制包括**振荡机制**和**传播机制**，二者缺一不可。学习每种波动都需要清楚这两种机制。

震荡机制　亦称**回复机制**，在机械学中的观点就是**回复力**。如右上图，稳定位置如果有偏移，就存在回复力。

大气层结中也具有类似的情况 $\begin{cases}\text{稳定：净浮力与位移方向相反，可以产生振荡}\\ \text{不稳定：净浮力与位移方向相同}\end{cases}$

传播机制　质点与质点之间的联系。波动传播的是**振荡的状态**，波动是**能量传播**的一种基本形式。

最大特点　波动的最大特点是**周期性**：**时间上**周期变化、**空间上**周期分布、有规律、重复发生、**可预测**。

6.1.2 波动的数学模型与波参数

6.1.2.1 简谐振动

简谐振动　回复力大小与位移成正比，方向与位移相反。设质量为M，回复力大小为 $-ky$（k为比例系数）。

根据牛顿第二定律：$M\frac{d^2y}{dt^2}=-ky \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{M}y$　令 $\frac{k}{M}=\omega^2$，则：$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0}$ **简谐振动方程**

简谐振动方程的解：$y=c_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t=A\cos(\omega t-\alpha)$　仅仅是时间的函数

振动是**单个质点**的运动，是仅以时间为自变量的运动，多属于常微分方程问题。

简谐波　简谐振动**稳定地传播**所形成的波动称为**简谐波**。一维简谐波解：$\boldsymbol{y=A\cos(kx-\omega t+\alpha)=A\cos\theta}$

波动是以**时间、空间**为变量的，属于偏微分方程问题。

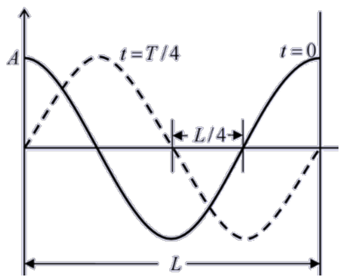
6.1.2.2 波参数

振幅A　$A=A$　物体离开平衡位置的最大位移

周期T　$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{L}{C}$　空间固定位置上的点完成一次全振动所需时间

圆频率ω　$\boldsymbol{\omega=\frac{2\pi}{T}}$　2π时间内质点完成全振动的次数

波长L　$L=\frac{2\pi}{k}=CT$　相邻两个同位相点之间的距离



等位相面与波速

波数k　$\boldsymbol{k=\frac{2\pi}{L}}$　2π距离内包含了多少个波长

位相θ　$\boldsymbol{\theta=kx-\omega t+\alpha}$　波在x轴上各点各时刻的位置，**α为初位相**，**$\theta=const$ 的点构成的面**称**等位相面**

波速　$\boldsymbol{C=\frac{\omega}{k}=\frac{L}{T}}$　等位相线(面)的移速，即槽脊的移动速度。

波速推导

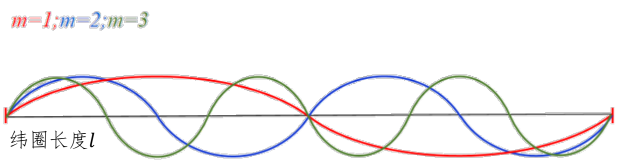
有速度 $C=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=\text{常量}}$，且等位相面 $\theta=kx-\omega t=$ 常量 $\Rightarrow k\frac{dx}{dt}-\omega=0\Rightarrow C=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=\text{常量}}=\frac{\omega}{k}=\frac{L}{T}$

简谐波解　$\boldsymbol{S(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{L}x-\frac{2\pi}{T}t\right)=A\cos(kx-\omega t)=A\cos k(x-ct)}$　初位相为零

纬向波数目　$\boldsymbol{m=\frac{l}{L}=\frac{2\pi R}{L}=\frac{2\pi a\cos\phi}{L}}$　整个纬圈长度为 l，纬圈上m个谐波对应的波长为 $L=l/m$。

纬向波数　$\boldsymbol{k_m=\frac{2\pi}{L}}=\frac{2\pi}{l/m}=\frac{2\pi m}{l}=\frac{m}{a\cos\phi}$

纬向波数目与纬向波数是两个不同的东西

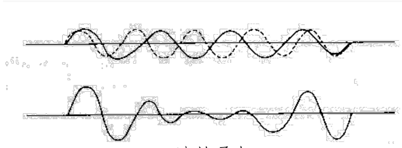


横波与纵波 按振动方向与波动传播方向的关系，可分为横波与纵波两大类：

① 若质点**振动方向与波的传播方向一致**，此种称为**纵波**，如水平声波。

② 若质点**振动方向与波的传播方向垂直**，此种称为**横波**，如重力水面波（上下振动，水平方向传播）

6.1.3 波动的数学表示



波的叠加

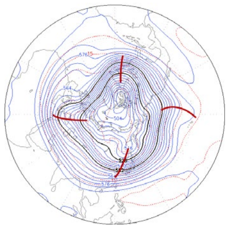
波的叠加 实际大气扰动不是单纯的简谐波，可以看成是各种不同波长、不同振幅的简谐波的**叠加**。各简谐波之间位相会有差异，因而出现振幅相抵消或叠加的现象。

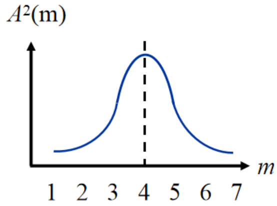
分析方法 数学上任一函数都可以用**傅立叶级数**展开来表达。我们将某物理量的波在纬圈上展开成傅立叶级数：

$\boldsymbol{S(x,t)=\sum_m S_m}$（$m$纬向波数目 = 1,2,3 ...） 其中 $\boldsymbol{S_m} = B_m\cos k_m(x-c_mt)+D_m\sin k_m(x-c_mt)$ $= \boldsymbol{A_m\cos[k_m(x-c_mt)+\alpha_m]}$ 表示第m个谐波。 理论上已知$S(x,t)$，可以得到各B_m, D_m, A_m。

实际扰动虽然是许多简谐波组成，但往往只有几个谐波分量是主要的，其频率、振幅虽然不同，但动力学性质往往一样。因此如果想得到定性的结果，分析一个典型的谐波分量就足够了。

$$S(x,t)=\sum_i S_i \approx S_m$$





实际案例

例如右图，天气图上存在四个大脊大槽。我们只要研究纬向四个波其中一个的性质，就能得到整体的结果。

形式解 如果考虑**线性波动的传播问题**，可以近似把波动考虑为**简谐波形式解**。

线性波动

线性波动指发生在线性系统中的波动。线性系统指对它的输入和它产生的输出之间，满足比例关系和可加性。比如一根绷紧的琴弦，输出与输入成正比；且两个人同时在不同位置拨动这根弦，那么弦最终的振动形态就等于两个形态之和。大气中，当波动幅度很小，对背景场的扰动很微弱时，我们常常可以把它近似为线性波动来处理。

线性算子指满足上述比例性和可加性的算子，满足性质：$L(af+bg)=aL(f)+bL(g)$。

如果是线性波动，波动方程为 $\boldsymbol{LS(x,t)=0}$，L为线性算子，则有：

$$L\sum_m S_m = 0 \Rightarrow \sum_m LS_m = 0 \Rightarrow \boldsymbol{LS_m = 0}$$

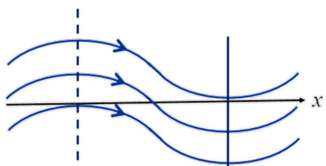
总和为零，且每个LS_m是独立的，那么自然每一项LS_m都等于零。取这种波动形式解为**简谐波解**：

① **某个简谐波最具有代表性** ② **每个简谐波都满足原方程，都具有相同性质解。**

复数形式 对于 $S=A\cos(kx-\omega t)$，有 $\boldsymbol{S=\mathrm{Re}\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]}$。其中 $\boldsymbol{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$ 求导方便

传播问题 讨论**线性波动**的传播问题：振幅 A 为常量，不随时空变化，没有办法讨论波的强度变化，同样无法讨论频率、波数的时空变化。对于非线性波动：波-波相互作用的讨论需要使用别的方法。

6.1.4 二维与三维平面波



等位相线

一维波动 位相只随x变化，波动在x方向上传播。

$S(x,t)=Ae^{i\theta}=Ae^{i(kx-\omega t)}$ $\theta = kx-\omega t = k(x-ct)$

等位相面垂直于x轴，只在x方向移动。

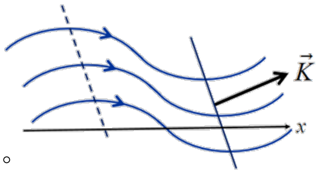
注意

一维波动≠一维运动，一维运动：$u\neq 0, v=w=0, \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0$，一维波动：$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0, v, w$可以不等于0。就是说，$v, w$在$y, z$方向上不存在梯度，始终共同运动，流体均匀。

二维波动 在x和y方向均有传播，我们把函数加上 ly 扩展到二维。

$S(x,y,t)=Ae^{i\theta}$ $\boldsymbol{\theta = kx+ly-\omega t}$ $k=\frac{2\pi}{L_x}$ 和 $l=\frac{2\pi}{L_y}$ 分别为x方向和y方向的波数

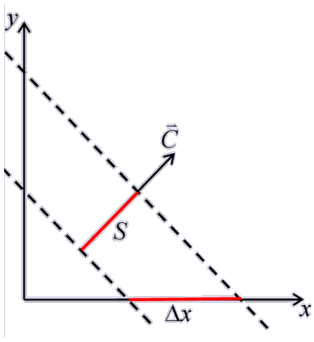
则两个方向的**相速度**为：$c_{px}=\frac{\omega}{k},c_{py}=\frac{\omega}{l}$。



大气长波的斜槽结构可用二维波动表达，等位相面是倾斜的。例如 PNA 波列

定义波矢：$\vec{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{i}}+\boldsymbol{l}\vec{\boldsymbol{j}}=\nabla\boldsymbol{\theta}$　　$\vec{K}$垂直于等位相面，表示**等位相面传播的方向**。

整体相速度　**波动整体相速度** $\vec{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{K}}\frac{\vec{\boldsymbol{K}}}{|\boldsymbol{K}|}=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{K}^2}\vec{\boldsymbol{K}}=\frac{\omega}{k^2+l^2}(k\vec{i}+l\vec{j})$ 其中 $K^2=k^2+l^2$



而各自方向 $c_{px}=\frac{\omega}{k},c_{py}=\frac{\omega}{l}$，明显 $\vec{C}\neq c_{px}\vec{i}+c_{py}\vec{j}$ 不满足矢量合成法则

相速在三个坐标方向的分量不等于三个方向的相速。

三维波动　$S(x,y,z,t)=Ae^{i\theta}=Ae^{i(kx+ly+nz-\omega t)}$ 把函数加上 nz 扩展到三维。

$\vec{K}=k\vec{i}+l\vec{j}+n\vec{k}=\nabla\theta$　　$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

相速度与方向上的相速

沿着各坐标轴波传播速度（相速），与波速在各坐标轴上的分量是两个不同的物理含义。

$C=\frac{S}{\Delta t}$，$c_{px}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$，由几何关系可得：$S<\Delta x$，所以$C<c_{px}$。同理，各个方向上$c_{py},c_{pz}\geq C$，由此

$\vec{C}\neq c_{px}\vec{i}+c_{py}\vec{j}+c_{pz}\vec{k}$。

6.2 波群与群速度

波群　振幅表示了波动强度（能量$E\propto A^2$）。如果 $S\approx S_{m0}\Rightarrow$单个简谐波，振幅$A$是常量。
如果 $S=\sum_m S_m\Rightarrow$多个简谐波叠加可以表达实际的波动⇒那么振幅是时空的函数。考虑线性波动传播时，使用单个简谐波解；考虑波动强度变化时，应该用多个简谐波叠加，称**波群或波列**。

两个简谐波　考察两个振幅相同，频率与波数相近的简谐波迭加的结果：$\boldsymbol{S=2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)e^{i(kx-\omega t)}}$

由上式可见，波群中包含两个波动的乘积：我们认为 $e^{i(kx-\omega t)}$ 代表原来两个波的性质，是**高频载波**，

$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 代表波包（其波长很长，变化缓慢），是**低频包络**。

令波包为：$\boldsymbol{A^*(x,t)}=2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 则上式可简化为：$\boldsymbol{S=A^*(x,t)e^{i(kx-\omega t)}}$

表示波数为k，圆频率为ω，振幅为 $A^*(x,t)$ 的波动。

具体推导

给定简谐波：$S_1=Ae^{i(k_1x-\omega_1t)},S_2=Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$，给定条件：

① $|k_2-k_1|\ll|k_1|\&|k_2|\Rightarrow$波数相近　　② $|\omega_2-\omega_1|\ll|\omega_1|\&|\omega_2|\Rightarrow$频率相近。则有：

$$S=S_1+S_2=Ae^{i(k_1x-\omega_1t)}+Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}=Ae^{i\left(\frac{k_1+k_2}{2}x-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)}\cdot\left[e^{i\left(\frac{k_1-k_2}{2}x-\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}+e^{i\left(\frac{k_2-k_1}{2}x-\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)}\right]$$

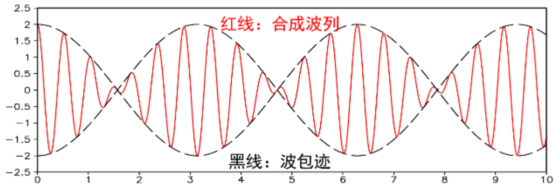
因为 $e^{-i\alpha}+e^{i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha+\cos\alpha+i\sin\alpha=2\cos\alpha$，令 $k=\frac{k_1+k_2}{2},\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2};\Delta k=k_2-k_1,\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$，则有 $S=2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)e^{i(kx-\omega t)}$。

高频载波　其中 $e^{i(kx-\omega t)}$ 称为**高频载波（合成波列）**。

载波的波数k和圆频率ω都分别接近各个单波的波数和圆频率。即：$k=\frac{k_1+k_2}{2}\cong k_1\cong k_2$，

$\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cong\omega_1\cong\omega_2$ 载波的波速也接近于各个单波的波速，即：$c=\frac{\omega}{k}\approx\frac{\omega_1}{k_1}\approx\frac{\omega_2}{k_2}$

低频包络　其中 $A^*(x,t)=2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 称为**低频包络**，它是载波的包络线，是载波最大振幅点的连线，又称**波包迹**。波包迹随时空是周期变化的，且传播的。



慢变波包　由于$\Delta k \ll k, \Delta\omega \ll \omega$，，因而波包迹（振幅）的波长和周期远大于单波的波长和周期，即波包迹（振幅）相对于载波随时空变化是相当缓慢的。所以经常称之为**慢变波包**。

注意　振幅A没有负的，出现负振幅代表着改变π个位相：$-A=Ae^{i\pi}$。

群速　**波包迹的传播速度**：$C_g=\frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2}=\frac{\Delta\omega}{\Delta k}\Rightarrow\frac{d\omega}{dk}$ **波的振幅（能量）的传播速度**称为**群速**：$c_g=\frac{d\omega}{dk}=c+k\frac{dc}{dk}$

综上分析，波群有两种速度：**相速度**与**群速度**

① **相速度**是位相的传播速度（如槽脊的移速），载波的移动速度。

② **群速度**是振幅/能量的移动速度，波包迹的移动速度。

一维波动　若频散关系式 $\omega=\omega(k)$ 已知　则相速度为 $c=\frac{\omega}{k}$　群速度为 $c_g=\frac{d\omega}{dk}$

三维波动　若频散关系 $\omega=\omega(k,l,n)=\omega(\vec{K})$已知　则相速度为$\vec{C}=\frac{\omega}{K^2}\vec{K}$　群速度为 $\vec{C_g}=\frac{\partial\omega}{\partial k}\vec{i}+\frac{\partial\omega}{\partial l}\vec{j}+\frac{\partial\omega}{\partial n}\vec{k}$

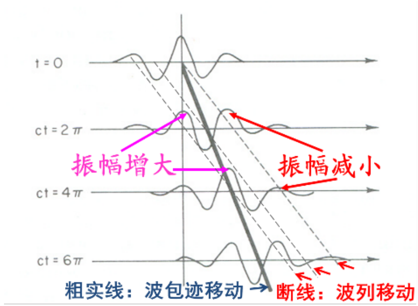
频散现象　若相速度大于群速度，则**波能量**相对于**合成波列有传输现象**，称为**频散现象**（如下图）。其原因在于各谐波分量相速c不同（c与k有关）。

相速度和群速度是否会不同？什么情况下相同？什么情况下不同？

有关系式：$\omega=kc\Rightarrow c_g=\frac{d\omega}{dk}=c+k\frac{dc}{dk}$ 讨论了相速度与群速度的关系。

① 若c与k无关 $\frac{dc}{dk}=0, c_g=c$ 该波动的波速与波长无关，波动的能量随波动的传播而传播⇒非频散波，非频散波的波形不发生变化。

② 若c与k有关 $\frac{dc}{dk}\neq 0, c_g\neq c$ 该波动的波速与波长有关，波动的能量不随波动的传播而传播⇒频散波，频散波的波形会发生变化（右图）。



波包迹移动慢于波列移动