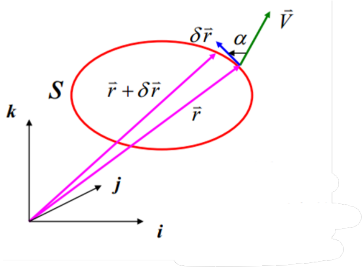
第三章 涡旋动力学

章节引入

中纬度大气运动是准涡旋的，为了描述大气中的涡旋运动及其变化规律，要对大气基本方程组做一些处理，并引入新的物理量：环流和涡度。

3.1 环流与环流定理



3.1.1 环流

3.1.1.1 环流的定义

环流　任取定一有向物质环线 $\vec S$，定义：$\boldsymbol{C=\oint \vec V\cdot\delta\vec r}$，即沿着环线速度的积分。

意义　流体沿闭合曲线的流动趋势

展开式　$C=\oint_s\vec V\cdot\delta\vec r=\oint_s|\vec V|\cos\alpha\,\delta\vec r$　　标量式：$C=\oint_s\vec V\cdot\delta\vec r=\oint_s udx+vdy+wdz$

观点情况　① 任取定：任意选取一物质环线，此环线上的质点是确定的，环线的形状位置是变化的。
② 物质环线是闭合的，环流表示流体随闭合环线运动的趋势，描述了涡旋的强度，是积分量。

注意　环线方向有正负之分，沿环线走，积分区域在左侧，则为正方向。
单联通区域：**以逆时针方向为正**；环流大于 0，称为气旋式环流；环流小于 0，称为反气旋式环流。

3.1.1.2 环流形式

纬圈环流　*zonal circulation*，**L 取为纬圈**，正向为自西向东，对环流有贡献的只有纬向速度 u，则原式变为：
$\boldsymbol{C_1=\oint_s u\delta x}$　称为**纬向环流**或者**西风环流**。

经圈环流　***meridional circulation***，**L 取为由经线和垂线构成的闭合回路**，规定其正方向在低层自北向南，高层自南向北，则对环流有贡献的是v和w，则有 $\boldsymbol{C_2=\oint_s v\delta y+w\delta z}$，称为经圈环流。例如 Hadlay 环流

气旋/反气旋　水平面环流，**L 为水平面上闭合流动的流线**，则对环流有贡献的水平风场$V_h(u,v)$，原式化为：
$\boldsymbol{C_3=\oint_s u\delta x+v\delta y}$　在北半球，气旋$C_3>0$，则C_3称为气旋式环流，反之，$C_3<0$为反气旋式环流。

3.1.1.3 环流的应用

主要作用　由环流概念引出环流定理，用以考察环流随时间的变化，以及引起环流变化的原因，可以用来定性解释海陆风，山谷风的形成。

3.1.2 绝对环流定理

3.1.2.1 定理的推导与形式

开尔文定理　$\boldsymbol{\frac{dC_a}{dt}=\frac{d}{dt}\oint_l\vec V\cdot\delta\vec r=\oint_l\frac{d_a\vec V_a}{dt}\cdot\delta\vec r}$　　**环流的加速度=加速度的环流**

环流变化　$\boldsymbol{\frac{dC_a}{dt}=\oint_l\frac{d_a\vec V_a}{dt}\cdot\delta\vec r=-\oint\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\vec r+\oint\vec g^*\cdot\delta\vec r+\oint\vec F_r\cdot\delta\vec r}$　$\boxed{\boldsymbol{\frac{dC_a}{dt}=-\iint_A\nabla\alpha\times\nabla p\,\vec n dA+\oint\vec F_r\cdot\delta\vec r}}$

定理推导

有绝对环流：$C_a\equiv\oint\vec V\cdot\delta\vec r$，则 $\frac{dC_a}{dt}=\frac{d}{dt}\oint\vec V_a\cdot\delta\vec r=\oint\frac{d\vec V_a}{dt}\cdot\delta\vec r+\oint\vec V_a\cdot\frac{d(\delta\vec r)}{dt}$，其中 $\frac{d(\delta\vec r)}{dt}=\delta\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)=\delta\vec V_a\Rightarrow\oint\vec V_a\cdot\frac{d(\delta\vec r)}{dt}=\oint\vec V_a\cdot\delta\vec V_a=\oint\delta\frac{1}{2}\vec V_a^2=0$。　因此 $\frac{dC_a}{dt}=\frac{d}{dt}\oint\vec V_a\cdot\delta\vec r=\oint_l\frac{d_a\vec V_a}{dt}\cdot\delta\vec r$

3.1.2.2 摩擦力

摩擦力 $\vec{F}_r = -\kappa\vec{V}$ 其中$\boldsymbol{\kappa}$为大于零的摩擦系数，认为摩擦力正比于速度，且与其相反。

即**摩擦力的作用总是使得环流减弱**：$\frac{dC_a}{dt} = -\oint \kappa\vec{V}\cdot\delta\vec{r} = -\kappa C_a$。

3.1.2.3 万有引力

万有引力 $\frac{dC_a}{dt} = \oint \vec{g}^*\cdot\delta\vec{r} = -\oint \nabla\Phi_a\cdot\delta\vec{r} = -\oint\left(\frac{\partial\Phi_a}{\partial x}\cdot\delta x + \frac{\partial\Phi_a}{\partial y}\cdot\delta y + \frac{\partial\Phi_a}{\partial z}\cdot\delta z\right) = -\oint\delta\Phi_a = 0$

万有引力对环流变化没有影响。

3.1.2.4 气压梯度力：力管项

力管项 $\frac{d_aC_a}{dt} = -\iint_A \nabla\alpha\times\nabla p\cdot\vec{n}dA$ 表示积分环线s包围的力管数目。即**皮耶克尼斯定理**，反映了**压力-密度项**(斜压性)引起环流的变化：取决于等密度面或者等比容面与等压面是否**斜交**。

力管项大小 由单位面积上力管数决定，$|-\nabla\alpha\times\nabla p| = |\nabla\alpha|\cdot|\nabla p|\cdot\sin\gamma$，$\gamma$ 为等压面与等比容面的交角。

正压大气中力管项为零；斜压大气中$|\nabla\alpha|\cdot|\nabla p|$越大，$\sin\gamma$约接近 1 (交角为 90 度)，则斜压性越强。

力管项方向 **即 $-\nabla p$到$-\nabla\alpha$的旋转方向**$(-\nabla\alpha\times\nabla p = (-\nabla p)\times(-\nabla\alpha))$，若为逆时针，则引起的环流变化为正。

力管项的推导

$$\frac{d_aC_a}{dt} = -\oint\alpha\nabla_3 p\cdot\delta\vec{r} = -\iint_A \nabla_3\times(\alpha\nabla_3 p)\cdot\vec{n}dA = -\iint_A \nabla_3\alpha\times\nabla_3 p\cdot\vec{n}dA - \iint_A \alpha\nabla_3\times\nabla_3 p\cdot\vec{n}dA$$

$$= -\iint_A \nabla_3\alpha\times\nabla_3 p\cdot\vec{n}dA = -\oint\alpha dp$$

其中A为闭合曲线S包围的面积，$\vec{n}$为A上某点外法线方向。

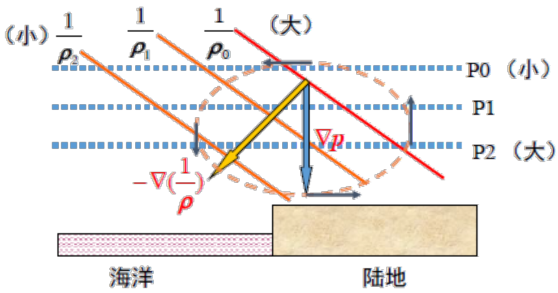
其中：$\nabla_3\times\nabla_3 p = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) = 0$，$\nabla_3 p\cdot\delta\vec{r} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(\delta x\vec{\imath}+\delta y\vec{\jmath}+\delta z\vec{k})$

热力环流

① 等压线基本与地表面平行

② 白日受太阳辐射，陆地升温更快，引起等密度线(红色直线)斜交，温度高，体积膨胀大，由此同一层次上，陆地密度更小。压力梯度向下，比容负值由大向小。涡度值垂直纸面向外。

③ $\frac{d_aC_a}{dt} > 0$，环流变化为正。



海陆风的形成

白天，低层由海洋吹向陆地；晚上，低层由陆地吹向海洋。根据静力平衡方程，等压面随高度增加向暖区倾斜；同一等压面上高温处比容大，低温比容小，等比容面随高度增加向冷区倾斜。

白天，陆地升温快，陆地温度高于海洋。如图所示$-\nabla P$转向$-\nabla\alpha$为逆时针，环流为正，形成气旋式环流。所以热空气上升，冷空气下沉，低层风由海洋吹向陆地，高层风由陆地吹向海洋。

注意

① 力管项存在的充要条件是大气的斜压性，故**斜压性是产生环流加速度的动力因素**。

② 斜压项的作用使得热空气上升、冷空气下沉。如果大气开始是静止的，则这种环流伴有的空气旋转会使得等比容面跟着旋转，最后趋于向等压面平行。即**大气斜压性自身存在使斜压性减弱**。

③ 这种环流在**大气斜压状态不变**的情况下不会无限增长。因为**摩擦作用**总是和力管的动力作用相反，并且随着环流的加大而作用加强，最后总会与力管的作用相互抵消而形成一个稳定的环流。

3.1.3 相对环流定理

定理描述 $C_a = C + C_e$ 绝对环流等于相对环流与牵连环流之和

牵连环流 $C_e \equiv \oint (\vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot d\vec{r} = \iint_A \nabla_3 \times (\vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot\vec{n}dA$ 其中 $\nabla_3\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = \nabla_3\times(\vec{\Omega}\times\vec{R}) = \nabla_3\times\vec{V}_e = 2\vec{\Omega}$

具体推导

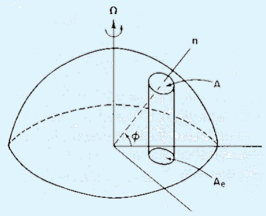
为方便推导，建立以地轴为 Z 轴的坐标系：

$$\nabla\times(\vec{\Omega}\times\vec{R}) = \nabla\times[\Omega\vec{k}\times(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})] = \Omega\nabla\times(-y\vec{\imath}+x\vec{\jmath}) = 2\Omega\vec{k} = 2\vec{\Omega}$$

相对定理 $\frac{dC_a}{dt} = -\iint_A \nabla\alpha\times\nabla p\,\vec{n}dA - 2\Omega\frac{dA_e}{dt} + \oint \vec{F}_r\cdot\delta\vec{r}$ 力管项+惯性项+摩擦项

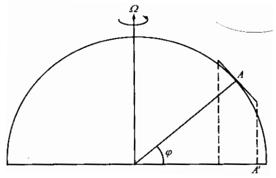
具体推导

$$C_e = \iint_A \nabla_3\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot\vec{n}dA = \iint_A 2\vec{\Omega}\cdot\vec{n}dA = \iint_A 2\Omega\sin\phi\,dA$$



$= \iint_A 2\Omega dA_e = 2\Omega A_e$ 其中 ϕ 是$\vec{n}$与赤道平面的交角；A_e为环线在赤道平面上的投影面积。又有 $C = C_a - C_e = C_a - 2\Omega A_e$，故将$C_a$表达式代入，即得相对环流定理。

物理意义 若为水平环流，由地球旋转所引起的环流变化：$\frac{dC}{dt} = -2\Omega\frac{dA_e}{dt} = -2\Omega\frac{d(A\sin\varphi)}{dt}$。（$\vec{n}$与赤道平面的夹角为纬度）**环线包围的面积变化**与辐合辐散有关；**纬度改变**和南北运动有关。展开有：$C_2 - C_1 = -2\Omega(A_2\sin\varphi_2 - A_1\sin\varphi_1)$



应用案例

假设中心在赤道上半径为 100 千米的圆形区域内的空气，起始时相对于地球是静止的，如果这个圆形气团沿着一等压面不变半径移向北极，则到北极时将以何速度作何运动？

围绕周线的环流将是：$C = -2\Omega\pi r^2(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)$ 因而在半径$r = 100$千米处的平均切线速度为：

$V = \frac{C}{2\pi r} = -\Omega r \approx -7m/s$ 表明到达北极时，气团将以 7m/s 的速度做顺时针运动。

总结 导致环流强弱变化的物理因子：

① **摩擦力总是使得环流减弱** ② **大气的斜压性** ③ **水平辐合辐散** ④ **气团的南北运动**

3.2 涡度与涡度方程

3.2.1 涡度

涡度定义 $\vec{\zeta} = \nabla\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = \xi\vec{\imath} + \eta\vec{\jmath} + \zeta\vec{k}$

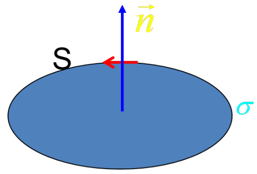
注意 ① 刚体的运动形式有平动和转动；流体的运动形式有平动，转动和形变，涡度表示的是流体涡旋运动的强度；散度表示形变运动的强度。

② 涡度是一个矢量。

③ 可以证明：$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega}$，涡度＝2 倍角速度。牵连涡度为：$\nabla\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = \nabla\times(\vec{\Omega}\times\vec{R}) = \nabla\times V_e = 2\vec{\Omega}$

对于地球旋转所导致的牵连涡度，为地球旋转角速度的两倍。

3.2.2 环流和涡度的关系



关系式 $C = \oint \vec{V} \cdot \delta \vec{r} = \iint_A \nabla \times \vec{V} \cdot \delta \vec{A} = \iint_\sigma \vec{n} \cdot \nabla \times \vec{V} \delta\sigma$ （stokes 定理）

沿任意闭合环线上的**环流**，等于环线所包围面积上**涡度法向分量的积分**。

对该式取面积趋于零的极限：$\lim\limits_{\delta\sigma \to 0} \frac{\delta C}{\delta \sigma} = (\nabla \times \vec{V})_{\vec{n}} = \zeta$

所以，涡度在方向$\vec{n}$**的分量**就等于**单位面积**上的环流，可认为涡度是对流体转动的微观度量。

涡度：流体旋转程度的**微观**表达 **环流：**流体旋转程度的**宏观**表达

环流与涡度 ① 环流是拉氏观点：任意选取一物质环线，此环线上的质点是确定的，环线的形状位置是变化；物质环线闭合，环流表示流体随闭合环线运动的趋势；环流是积分量，是标量。

② 涡度是欧氏观点：是微分量，是矢量。

3.2.3 大尺度大气涡旋运动

涡度简化 大尺度大气运动是**准水平运动**，所以涡度主要是在垂直方向上，即：$\vec{\zeta} \approx \zeta\vec{k}, \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

绝对涡度 **绝对涡度 = 相对涡度 + 牵连涡度(地转涡度)** $\zeta_a = \zeta + f$ $f = 2\Omega \sin\varphi$（行星涡度的垂直分量）

推导

$\zeta_a = (\nabla \times \vec{V}_a) \cdot \vec{k} = (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{k} + 2\vec{\Omega} \cdot \vec{k} = \zeta + 2\vec{\Omega} \cdot \vec{k}$ 涡度的垂直分量：$(\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{k} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta$

行星涡度的垂直分量：$2\vec{\Omega} \cdot \vec{k} = 2\Omega \sin\varphi \equiv f$ 最终得到 $\Rightarrow$ $\zeta_a = \zeta + f$

天气学意义 表征涡旋运动强度的物理量，如涡度代表天气系统的强度。

注意：不论南北半球，气旋性环流涡度为正，反气旋性环流涡度为负。