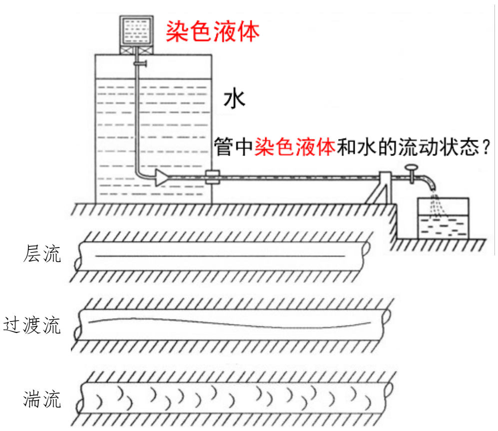
第四章 大气行星边界层



4.0 引言

4.0.1 流体流动状态

层流　　流体**分层流动，互不混合**，有规则性，称为层流 ***laminar flow***。
　　如右图，管中流速较小，红色液体线为一条直线

过渡流　　管中流速增大，红色液体线有波动，这是上下两者的中间状态。

湍流　　流体**不规则运动，运动杂乱**，这种运动称为湍流 ***turbulence***。
　　管中流速增大且超过临界值，红色液体与水混合，红色液体线不复存在。

> **湍流是一种随机运动吗？**
>
> “随机”的定义：对于一个确定性过程而言，方程中没有随机项，那么从给定的初始状态到下一个时刻只能有唯一的状态；而随机过程则下一个时刻可以有多种不同的状态。因此，湍流不是本质上的随机运动，而是确定性混沌系统。但由于其对初始条件的敏感性和非线性，它在外观和统计行为上类似于随机过程。

4.0.2 流体力学中的边界层

定义　　**流体与刚性边界之间**会形成一个运动性质与**流体内部**不同的区域，称为**边界层**。

特征　　① **几何学特征**：　$D \ll L$，纵向≪横向

② **运动学特征**：　无滑脱条件：$\vec{V}|_{z=0} = 0$　　边界线上速度为零

有很大的流速切变：$V(Z)$ = 垂直方向上动量分布不均匀　　导致湍流的重要因素

③ **动力学特征**：　**粘性力重要**。对于层流边界层：分子粘性力；对于湍流边界层：湍流粘性力。

4.0.3 大气行星边界层

引入　　前几章所讲述的**大尺度运动**，在尺度分析的基础上，合理地忽略了**气体内部的摩擦力**，忽略了**热传导和热扩散引起的热量输送**。但是，在接近地球表面的这一层大气中，不能忽略。因为这一层次受地表影响显著，运动具有湍流性。

观测现象　　目前地面气象自动观测系统风向风速的采样间隔时间为 1s。右图蓝线为 3s 的风速风向合成，黑色线为滤波结果（相当于做了滑动平均，去掉了随机性，表现出某种规律性的层流部分）。所谓湍流，就是蓝色的线减去黑色的线。

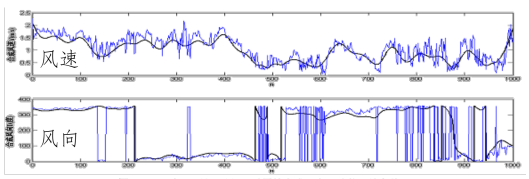
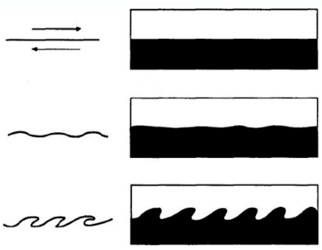
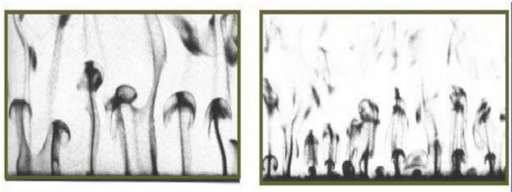
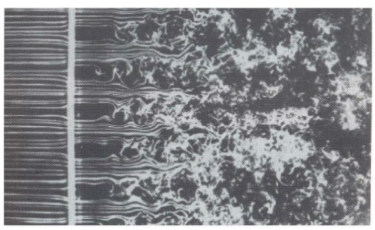


图5　1999年12月07日13时原始合成风风向风速值（浅色线）与滤波后合成风风向风速值（黑色线）的比较图

主要作用　　① **动力作用**：地球表面粗糙不平，流体的连续性→边界层的风垂直切变强→湍流发展
② **热力作用**：地球表面非均匀加热作用→低层大气温度垂直梯度大→湍流发展


动力作用


热力作用导致湍涡


从层流演变为湍流

PBL 定义　**大气行星边界层 PBL**：与**地表相接触**，厚度约为 **1~1.5km**，受地面**热力和动力**影响大，具有**湍流特性**的大气层。它是地球表面和大气间能量和物质交换的重要通道。

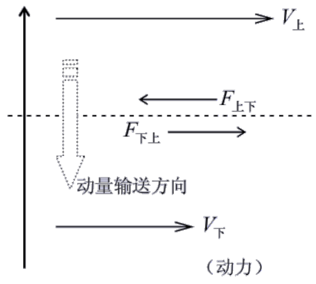
湍涡　湍流是不规则的涡旋运动，其中有许多使流体发生**混合**的涡旋，称之为湍涡，和分子不规则运动类似。

湍流作用　强烈的混合作用**引起物理量输送**，具体指：具有**存在物理量的梯度**，从物理量**大值区向小值区输送**，又考虑到边界层中物理量的**垂直梯度最大**，所以，湍流输送主要在**垂直方向**上。

大气行星边界层中物理量**水平方向输送**由风的平流输送完成，比湍流水平输送大很多。

湍流尺度　湍流的尺度一般小于 2m，属于 Micro σ 尺度

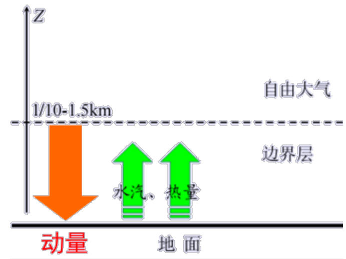
重要性　① 湍流的混合作用使得地面的**热量和水汽向上输送**，使得**动量向地球的表面输送**，比分子扩散的混合作用大几个数量级。



② 高层动量输送到低层，以补偿大气边界层和下垫面不光滑所造成的动量摩擦耗散。大气行星边界层几乎消耗整个大气动能的一半左右。

③ 根据观测，入射于地气系统的太阳能约有 43%被地面吸收，以潜热 23%、感热 6%和辐射 14%的形式进入大气边界层，然后通过大气边界层传输到自由大气。

④ 大气中的水汽来自于下垫面，几乎全部为大气边界层接受，通过大气边界层传输到高处，再通过各种垂直运动输送至自由大气；通过水汽向大气提供 50%的内能。



⑤ 大气边界层是整个大气主要的**热量源、水汽源、动量汇**。

⑥ 大气行星边界层过程的热力和动力强迫及其耗散作用是影响自由大气中天气系统发生、发展演变和消亡的重要因子。研究边界层过程的性质和特征是认识大气运动规律的重要组成部分。

研究目的　① 在整个大气中起重要作用：如数值预报中的物理过程描述，大气运动的强迫耗散问题。

② 边界层本身的特性：如污染物的扩散，飞机起降、植物生长等。

研究方法　由于对湍流结构还很不了解，本章将采用**半经验半理论**的方法，用平均运动的参数来表示湍流输送过程，即采用参数化方法模拟湍流对平均运动的影响，从而研究行星边界层中运动的规律。

4.1 大气行星边界层及其特征

概述　地表是大气的动力边界（无滑脱边界）和热力边界。受地表影响，大气边界层是**湍流边界层**。

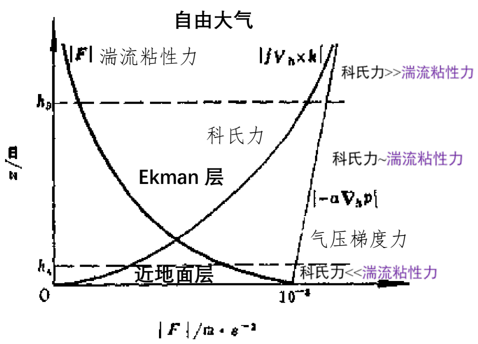
动力边界　大气最底层靠近地球表面，受**地面摩擦阻力**影响。大气流过地面时，地面上各种**粗糙元**（草、沙粒、庄稼、树木、房屋）会使大气流动受阻，这种摩擦阻力由于大气中的湍流而**向上传递**，并随高度的增加而逐渐减弱，达到某一高度后便可忽略。

地表对大气的影响随高度增加而减弱，湍流的强度随高度增加而减弱（切变减小），湍流粘性力随高度增加而减小，湍流粘性力的重要性随高度不同而不同。因此，不同高度上受力会不同。

受力分析　**水平气压梯度力**：气压梯度随高度的增加而缓慢减小，但比容随高度的增加呈指数增加，因而数值随高度的增加而增加。

水平科氏力：在地表面风速可认为是零，但风速的数值随高度的增加而增加，因而水平科氏力的数值随高度的增加而增加。

湍流摩擦力：风速垂直切变的数值随高度的增加而减小，而且在下界面附近，由于热力和动力原因，湍流交换剧烈，因而数值在下界面附近较大，粗略估计，湍流摩擦力的数值随高度的增加而呈 ***e* 指数减小**。



受力分析与大气分层图

4.1.1 大气分层

概述　按**湍流粘性力的重要性**，对稳定层结大气在垂直方向上进行分层。

贴地层　**贴地层一般几厘米**，具有如下特征：

① 附着在地表，$\vec{V} \approx 0$，无湍流。　② **湍流粘性力 = 0，分子粘性力最重要**。

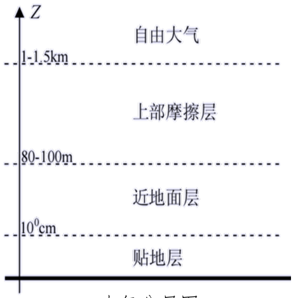
③ 温度垂直梯度很大，穿过 1 毫米厚度温度变化 10 度。（地表温度远高于大气温度）
④ 大气动力学很少研究，但在**农业气象**中重要。

近地面层 **常值通量层**，近地面层顶**高度为 80－100m**，具有如下特征：
① 湍流运动非常剧烈，以湍流粘性力和水平气压梯度力为主，科氏力忽略。
② 风向几乎不随高度变化，但风速随高度增加而增大。
③ 物理量的**垂直输送**几乎**不随高度改变**，故又称为常值通量层。
④ 地气相互作用强烈（热量与水汽）。

上部摩擦层 **Ekman 层**，上部摩擦**层顶高度为 1~1.5km**，具有如下特征：

① 湍流粘性力、科氏力、气压梯度力**同等重要**，三力平衡，$\vec{F}_{压}+\vec{F}_{科}+\vec{F}_{粘}\approx 0$。

② 风向、风速随高度均有变化。
③ 物理量的输送以垂直方向为主。
④ 下界面对近地面层的影响通过该层向上输送影响自由大气。



大气分层图

自由大气 ① 湍流粘性力可忽略，气压梯度力与科氏力相平衡：$\vec{F}_{压}+\vec{F}_{科}\approx 0$

② 自由大气不考虑摩擦，但它紧挨着边界层，因而受大气行星边界层顶垂直运动的影响，从而边界层的摩擦作用还会间接影响自由大气。

工作分层 一般实际工作中把大气分为三层：**近地面层、上部摩擦层、自由大气**

$$大气\begin{cases}边界层\begin{cases}近地面层\\上部摩擦层\end{cases} & 湍流粘性力重要\\自由大气 & 湍流粘性力可略\end{cases}$$

大气边界层占整个大气的 1/10

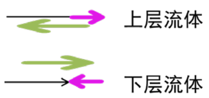
4.1.2 边界层的一般特点

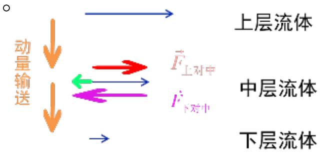
特点一 近地面层气象要素的**日变化大**：大气与地表相比，地表热容量小，由于地球自转和太阳辐射作用，其日变化大，而近地面层贴近地面，因而日变化大。

特点二 近地面层气象要素的**垂直梯度大**：与**近地面层外部**（自由大气）比梯度很大；与**水平方向**比梯度很大。

特点三 湍流运动引起物理量的输送：由于垂直梯度大，所以**垂直向输送≫水平向输送**。

特点四 比较刚体和流体运动中摩擦粘性力：
刚体：与相对运动**趋势相反**，有静摩擦的存在。
流体：在相对运动反方向，**无静摩擦的存在**。





静摩擦力

两个相互接触的物体，当其接触表面之间有相对滑动的趋势，但尚保持相对静止时，彼此作用着阻碍相对滑动的阻力，这种阻力称为静摩擦力。

分析中层流体：中层流体所受湍流粘性力等于**上、下层流体对其的合力**（上层加速，下层减速）。湍流粘性力在运动的反方向（不是完全如此，取决于上下层流体的相对大小）。
湍流粘性力在运动反方向一侧，$\vec{F}_k$不一定和$\vec{V}$正好相反，也可以出现在$\vec{V}$反方向的任意位置一侧。

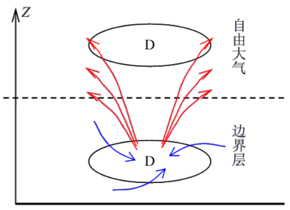
特点五 上部摩擦层中，满足**三力平衡**：$-\frac{1}{\rho}\nabla p-f\vec{k}\times\vec{V}+\vec{F}_k=0$

风穿越等压线指向低压一侧，湍流粘性力在运动反方向一侧，与地转偏差相垂直。

原理说明

$\vec{V}\cdot(eq.)\Rightarrow\vec{V}\cdot\left(-\frac{1}{\rho}\nabla p-f\vec{k}\times\vec{V}+\vec{F}_k\right)=0$ ① $\vec{V}\times\vec{F}_k<0$ 摩擦耗散动能 ② $\vec{V}\cdot\left(-f\vec{k}\times\vec{V}\right)=0$ 科氏力不做功 ③ $\vec{V}\cdot\left(-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)>0$ 气压梯度力作正功。因此从能量平衡角度看：风必然穿越等压线指向低压一侧。

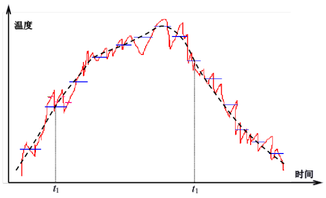
动量输送 边界层和自由大气**均为低压系统**时，边界层中穿越等压线指向低压，低压辐合运动，产生上升运动，进入自由大气。① 自由大气产生辐散，使得**气旋减弱**。② 边界层**气旋加强**，补偿湍流粘性耗散。（动量从上往下输送）相同的层结条件下，在正压和斜压条件下，在高层可形成不同的环流配置。



4.2 大气运动的湍流特性和平均运动方程组

湍流 湍流是**无规则的随机运动**，与分子运动类似（无规律、不确定性），无法描述其运动趋势，对其运动的描述也是没有意义的。类似分子运动的处理，对湍流的处理采用统计方法，即**大数平均量**。

观察右图可见，**瞬时值波动很大**（红线：某个时刻的瞬时值有可能比前一时刻大，也有可能小，并无规律），说明有很强的湍流作用。若取**适当的时间间隔**进行平均，既能去掉随机性，又能保留气温的日变化特征。如果进行滑动平均，则得到一条光滑的曲线（黑线）。



地面上自动温度仪记录的温度日变化曲线

重要特点 瞬时值是复杂的，但平均量是有规律的。我们不研究湍流运动的瞬时值，而是研究**平均运动规律**，但**考虑湍流运动的影响**。我们希望得到：$\frac{d\overline{\vec{V}}}{dt}=?$

4.2.1 平均量

平均量 对任意一个物理量q，我们令：$q=\bar{q}+q'$ 其中q为瞬时值，$\bar{q}$为**平均量**，q'为**脉动量**

脉动量是复杂的，体现的是无规则的湍流运动；平均运动是有规则的，体现的是物理量变化的趋势。

总体思想 把湍流场中任一点的**瞬时物理量**看成是**平均值**和**脉动值**之和，然后应用**统计平均**的方法研究其**平均运动**的变化规律。即 $\begin{cases} q=\bar{q}+q' \\ \frac{dq}{dt}=\cdots \end{cases} \Rightarrow \frac{d\bar{q}}{dt}=?$

4.2.1.1 平均量的取法

取值方法 ① **时间平均** $\bar{q}=\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} q(s)ds$ 相当于滑动积分，对于每个时间t，在以其为中心的长为Δt的区间作平均。

② 空间平均 $\bar{q}=\frac{1}{\tau}\int_{\tau} q d\tau$

③ 时空平均 $\bar{q}=\frac{1}{\tau\Delta t}\int_{\tau}\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} q dt d\tau$

实际情况 一般取时间平均，对时间平均容易通过试验检测。Δt的选取要**大于脉动周期**（去掉随机性），同时**小于流体特征时间尺度**，以免平均后物理量时间变化的主要趋势被平滑掉。气象上一般取 **1-2min**。

4.2.1.2 平均运动方程求法

总体思想 大气运动方程 $\frac{d\vec{V}}{dt}=\Sigma_i \vec{F}_i$ 其中$\vec{V}$是瞬时运动，是不确定的，因此需要得到平均运动方程。

具体步骤 ① 任一变量**拆解为两个量**：$q=\bar{q}+q'$，将其代入方程

② **对整个方程求平均**：$\overline{\text{eq.}}$ $\frac{\partial\bar{\vec{V}}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t}=\cdots\Rightarrow\overline{\left(\frac{\partial\bar{\vec{V}}}{\partial t}\right)}+\overline{\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t}}=\cdots$

③ 整理：$\Rightarrow\frac{\partial\overline{\vec{V}}}{\partial t}=\cdots\Rightarrow$ 得到平均方程 左侧为平均运动局地变化，右侧为原因，物理上更清楚。

4.2.1.3 常用的关系式

脉动量自身 $\bar{\bar{q}}=\bar{q}$（平均量的平均等于它本身） $\bar{q}=\overline{\bar{q}+q'}=\bar{\bar{q}}+\overline{q'}=\bar{q}+\overline{q'}\Rightarrow\overline{q'}=0$（脉动量求平均为 0）

基本运算 $\overline{q_1+q_2}=\overline{q_1}+\overline{q_2}$（两个量之和的平均等于两个平均之和）

$\overline{q_1q_2}=\overline{q_1}\,\overline{q_2}+\overline{q_1'q_2'}$ $\overline{\bar{q}_1q_2}=\bar{q}_1\bar{q}_2$ （相当于把$\bar{q}_1$提出来，对q_2作平均）

偏导运算 $\overline{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)}=\frac{\partial\bar{q}}{\partial x}$ $\overline{\left(\frac{\partial q_1q_2}{\partial x}\right)}=\overline{\left(\frac{\partial(\bar{q}_1\bar{q}_2+\overline{q_1'q_2'})}{\partial x}\right)}=\overline{\left(\frac{\partial\bar{q}_1\bar{q}_2}{\partial x}\right)}+\overline{\left(\frac{\partial\overline{q_1'q_2'}}{\partial x}\right)}=\frac{\partial\bar{q}_1\bar{q}_2}{\partial x}+\frac{\partial\,\overline{q_1'q_2'}}{\partial x}$

具体推导

$\overline{q_1 q_2} = \overline{(\overline{q_1} + q_1')(\overline{q_2} + q_2')} = \overline{(\bar{q}_1\bar{q}_2 + \bar{q}_1 q_2' + \bar{q}_2 q_1' + q_1' q_2')}$ 其中 $\overline{\bar{q}_1\bar{q}_2} = \bar{q}_1\bar{q}_2$， $\overline{\bar{q}_1 q_2'} = 0$， $\overline{\bar{q}_2 q_1'} = 0$

$\overline{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial(\bar{q}+q')}{\partial x}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial x}\right)} + \overline{\left(\frac{\partial q'}{\partial x}\right)} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}$

4.2.2 平均运动方程组

4.2.2.1 平均连续方程

连续方程 $\quad \boldsymbol{\nabla\cdot(\overline{\rho\vec{V}'})=0}$ $\quad$ 原始瞬时方程为: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right) = 0$

平均连续方程的推导

基于瞬时方程，将物理量写出：$\vec{V} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}'; \rho = \bar{\rho} + \rho' = \bar{\rho}$（注意有$\rho' \approx 0$），将其代入方程可得：

$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \nabla\cdot\bar{\rho}\left(\bar{\vec{V}} + \vec{V}'\right) = 0$。随后，我们对方程整体做平均：$\overline{\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \nabla\cdot\bar{\rho}\left(\bar{\vec{V}} + \vec{V}'\right)} = 0 \Rightarrow \overline{\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}\right)} + \overline{\nabla\cdot\bar{\rho}\left(\bar{\vec{V}} + \vec{V}'\right)} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \overline{\nabla\cdot\rho\bar{\bar{\vec{V}}}} + \overline{\nabla\cdot\rho\overline{\vec{V}'}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\bar{\vec{V}} + \nabla\cdot\rho\overline{\vec{V}'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\bar{\vec{V}} = 0$ 将式子相减，可以得到：

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \nabla\cdot\bar{\rho}\left(\bar{\vec{V}} + \vec{V}'\right) - \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} - \nabla\cdot\rho\bar{\vec{V}} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot(\overline{\rho\vec{V}'}) = 0}$$

4.2.2.2 平均运动方程

运动方程

$$\begin{cases}
\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{\vec{V}}\cdot\nabla\bar{u} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} + \frac{1}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial}{\partial x}T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}T_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}T_{zx}\right) \\
\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \bar{\vec{V}}\cdot\nabla\bar{v} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} + \frac{1}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial}{\partial x}T_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}T_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}T_{zy}\right) \\
\frac{\partial\bar{w}}{\partial t} + \bar{\vec{V}}\cdot\nabla\bar{w} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z} - \vec{g} + \frac{1}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial}{\partial x}T_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}T_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}T_{zz}\right)
\end{cases}$$

平均运动方程的推导

基于x方向运动方程：$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv\cdots$ 首先列出平均量：$\vec{V} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}', \rho = \bar{\rho}, P = \bar{P} + P', f$与湍流无关。将其回代：$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial u'}{\partial t}} + \bar{\vec{V}}\cdot\nabla\bar{u} + \cancel{\overline{\vec{V}}'}\cdot\nabla u' + \cancel{\vec{V}'}\cdot\nabla\bar{u} + \vec{V}'\cdot\nabla u' = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x} - \cancel{-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P'}{\partial x}} + f\bar{v} + \cancel{fv'}\cdots$

随后，对整个方程取平均：$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{\vec{V}}\cdot\nabla\bar{u} = -\overline{\vec{V}'\cdot\nabla u'} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x} + f\bar{v}\cdots$ 与上式对比，可以看到左边的瞬时值变为了右边的平均值；且右边多了一项：$-\overline{\vec{V}'\cdot\nabla u'}$ 是脉动项的二次乘积项（单位质量流团受到的湍流粘性力在x方向的分量）。该公式左边表示x向的加速度，右边为单位质量流团受到的合力在x向的分量。

进一步地，$-\overline{\vec{V}'\cdot\nabla u'} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\bar{\rho}\cdot\overline{\vec{V}'\cdot\nabla u'} = \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\nabla\cdot\left(-\bar{\rho}\overline{\vec{V}'u'}\right) - \overline{u'\cdot\nabla\cdot(-\bar{\rho}\vec{V}')}\right] \xrightarrow[\nabla\cdot(\bar{\rho}\vec{V}')=0]{\text{连续方程}} \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot\left(-\bar{\rho}\overline{\vec{V}'u'}\right) = \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\bar{\rho}\,\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\bar{\rho}\,\overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\bar{\rho}\,\overline{w'u'})\right]$ 表示单位质量流团所受的湍流粘性力在x方向的分量。由此整合。

平均方程

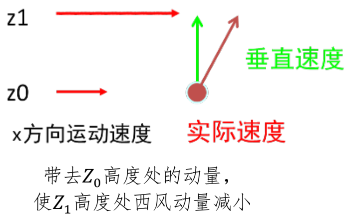
$$\frac{d_m\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x} + f\bar{v} + \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\bar{\rho}\,\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\bar{\rho}\,\overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\bar{\rho}\,\overline{w'u'})\right]$$

$$\frac{d_m\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial y} + f\bar{u} + \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\bar{\rho}\,\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\bar{\rho}\,\overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\bar{\rho}\,\overline{w'v'})\right]$$

$$\frac{d_m\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial z} - g + \frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\bar{\rho}\,\overline{u'w'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\bar{\rho}\,\overline{v'w'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\bar{\rho}\,\overline{w'w'})\right]$$

平均气压梯度力x,y,z方向分量　平均科氏力在x,y方向的分量　重力　湍流粘性力在x,y,z方向的分量

物理本质 以$-\bar{\rho}\ \overline{w'u'}$为例

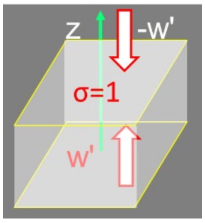


① $\rho w\cdot 1_{\text{单位时间}}\cdot 1_{\text{单位水平面积}}$ 表示**质量通量**（单位时间通过单位水平面积输送的质量）。

② ρwu则表示由于垂直运动引起的x**方向**的**质量通量**。

③ 对其求平均：$\overline{\rho wu}=\bar{\rho}\bar{w}\bar{u}+\bar{\rho}\ \overline{w'u'}$ 表示单位时间通过单位水平面积动量的平均垂直通量=**平均垂直运动**对**平均动量**的输送+**脉动垂直运动**引起的x方向**脉动动量**的垂直输送。

方向问题 $\bar{\rho}w'\cdot 1=\bar{\rho}w'$：由于垂直向的脉动运动引起的，**由下至上**，通过以z轴为法向的单位水平截面输送的质量通量，带去下面气块的特性。



① $\bar{\rho}w'u'$ **由下至上**，湍流通过以z轴为法向的单位水平截面输送的x方向的脉动动量通量

② $-\bar{\rho}w'u'$ **由上至下**，湍流通过以z轴为法向的单位水平截面输送的x方向的脉动动量通量：即下部流体单位时间、通过以z轴为法向的平面单位面积上x方向的脉动动量增加为$-\bar{\rho}w'u'$

黏性应力 根据冲量定理：$\Delta mv=F\cdot\Delta t\Rightarrow \boldsymbol{F}=\Delta mv/\Delta t=\boldsymbol{\Delta mv}\ (\Delta t=1)$ $-\bar{\rho}w'u'$ 可理解为**上部流体对下部流体的作用力**，表示**作用于法向为**z轴的单位截面上湍流粘性应力在x向的分量，记为$\boldsymbol{T_{zx}}$

其中第一个下标为**作用面方向**，第二个下标为**力分量方向**。

总结 ① $T_{zx}=-\bar{\rho}w'u'$ 表示作用于法向为z轴的平面上湍流粘性应力在x向的分量。

② 正法向流体对负法向流体的作用，**由上向下**，通过法向为z轴的单位截面输送的x方向脉动动量的平均值，表示上层流体对下层流体的作用。

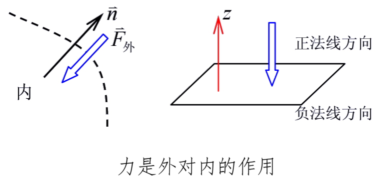
③ $Q_{zx}=\bar{\rho}\ \overline{w'u'}$ 则表示通过法向为z轴的单位截面，**由下向上**输送的x向脉动动量通量密度，表示下层流体对上层流体的作用。

④ 对于对于单位质量空气块，上表面湍流粘性力是上层流体对下层流体的作用，下表面湍流粘性力是下层流体对上层流体的作用。

问题：由垂直运动导致的x方向上的合力是?

对于单位质量空气块，上表面湍流粘性力在x方向分量$T_{zx}|_{z+\Delta z}$，下表面湍流粘性力在x方向分量$-T_{zx}|_z$，上下两个面在x方向的合力

$\frac{(T_{zx}|_{z+\Delta z}-T_{zx}|_z)\Delta x\Delta y}{\rho\Delta x\Delta y\Delta z}\to\frac{1}{\rho}\frac{\partial T_{zx}}{\partial z}$ 则 $\frac{\partial T_{zx}}{\partial z}=\frac{\partial(-\bar{\rho}\ \overline{w'u'})}{\partial z}$。



$\boldsymbol{\frac{\partial T_{zx}}{\partial z}=\frac{\partial(-\bar{\rho}\ \overline{w'u'})}{\partial z}}$ **表示通过以z轴为法向的平面、x方向脉动动量的净通量**（净收入量、合力）。若其值小于0，则表示由上向下、进入该体积的x方向上脉动动量减小，进而使平均纬向西风减小。

同理，单位质量空气块在垂直于x,y轴的平面上所受到的湍流粘性应力在x轴方向也会有分量。

$\frac{1}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\bar{\rho}\ \overline{u'u'})+\frac{\partial}{\partial y}(-\bar{\rho}\ \overline{v'u'})+\frac{\partial}{\partial z}(-\bar{\rho}\ \overline{w'u'})\right]=\frac{1}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial}{\partial x}T_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}T_{yx}+\frac{\partial}{\partial z}T_{zx}\right)$ **第一个下标：作用面方向**

第二个下标：力分量方向。

方程分析 与瞬时方程相比，发现右边多出了9项：$\boldsymbol{T_{ij}=-\bar{\rho}\ \overline{u_i'u_j'}}$ 脉动量的二次乘积项的平均值

① 从力的角度看，**作用于以i轴为法向的平面上**的**湍流粘性应力在j轴方向上的分量**。

② **由i轴的正向往负向**、通过以i轴为法向的单位截面输送的j**方向的脉动动量通量**的平均值。

③ i轴正法向流体对负法向流体的作用。

应力张量 湍流粘性应力 $T=\begin{pmatrix}T_{xx} & T_{yx} & T_{zx}\\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy}\\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz}\end{pmatrix}$ 是**对称张量**，6个分量独立。

行表示力的分量方向；列表示作用面的法向。

4.2.2.3 状态方程

状态方程 $\boldsymbol{\bar{p}=\bar{\rho}R\bar{T}}$

推导依据 瞬时方程为 $p=\rho RT$ 且 $\rho\approx\bar{\rho}$

4.2.2.4 热力学方程

热力学方程 $C_p\frac{d\bar\theta}{dt}=\frac{\bar\theta}{\bar T}\bar{\dot Q}-\frac{1}{\bar\rho}\nabla\cdot\vec h$ 其中 $\vec h=\bar\rho C_p\overline{\vec V'\theta'}$

考虑了湍流因素后，大气中的非绝热因子主要指：**太阳辐射、相变潜热和湍流热传导。**

平均热力学方程的推导

从热力学方程瞬时形式出发：$C_p\frac{d\theta}{dt}=C_p(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\vec V\cdot\nabla\theta)=\frac{\theta}{T}\dot Q$ ，令 $\frac{\theta}{T}=\frac{\bar\theta+\theta'}{\bar T+T'}=\frac{\bar\theta+\theta'}{\bar T(1+\frac{T'}{\bar T})}\overset{泰勒}{\Rightarrow}\frac{\bar\theta+\theta'}{\bar T(1-\frac{T'}{\bar T})}=\frac{\bar\theta}{\bar T}+\cdots\approx\frac{\bar\theta}{\bar T}$ (因为 $T\nearrow\Rightarrow\theta\nearrow$ 所以 $T'>0\Rightarrow\theta'>0$)，将其带入原式：$C_p\left[\frac{\partial}{\partial t}(\bar\theta+\theta')+\left(\bar{\vec V}+\vec V'\right)\cdot\nabla(\bar\theta+\theta')\right]=\frac{\bar\theta}{\bar T}\left(\bar{\dot Q}+\dot Q'\right)$；

对方程求平均：考虑到 $\overline{(\bar{\vec V}+\vec V')\cdot\nabla(\bar\theta+\theta')}=\bar{\vec V}\cdot\nabla\bar\theta+\bar{\vec V}\cdot\nabla\theta'+\overline{\vec V'}\cdot\nabla\bar\theta+\overline{\vec V'\cdot\nabla\theta'}\Rightarrow C_p\left[\frac{\partial}{\partial t}\bar\theta+\bar{\vec V}\cdot\nabla\bar\theta+\overline{\vec V'\cdot\nabla\theta'}\right]=\frac{\bar\theta}{\bar T}\bar{\dot Q}$

与瞬时方程比较：左边多了$\overline{\vec V'\cdot\nabla\theta'}$这一脉动量的二次乘积项：体现了湍流的作用——由湍流造成的物理量的输送。继续简化方程：$\Rightarrow C_p\frac{d\bar\theta}{dt}=\frac{\bar\theta}{\bar T}\bar{\dot Q}-\frac{1}{\bar\rho}\left(\bar\rho C_p\ \overline{\vec V'\cdot\nabla\theta'}\right)$ 其中 $\bar\rho C_p\ \overline{\vec V'\cdot\nabla\theta'}=\nabla\cdot\left(\bar\rho C_p\ \overline{\vec V'\theta'}\right)-\overline{C_p\theta'\nabla\cdot(\bar\rho\vec V')}$

因为 $\overline{C_p\theta'\nabla\cdot(\bar\rho\vec V')}=0$，所以$\bar\rho C_p\ \overline{\vec V'\cdot\nabla\theta'}=\nabla\cdot\left(\bar\rho C_p\ \overline{\vec V'\theta'}\right)$ 再定义 $\vec h=\bar\rho C_p\ \overline{\vec V'\theta'}$ 则得到最终方程。

物理量 C_vT：内能 C_pT：焓 $C_p\theta$: 位焓，与$\dot Q$有关

通量密度矢 称 $\vec h=\begin{pmatrix}h_x\\h_y\\h_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar\rho C_p\overline{u'\theta'}\\\bar\rho C_p\overline{v'\theta'}\\\bar\rho C_p\overline{w'\theta'}\end{pmatrix}$ 为**脉动位焓的通量密度矢**，都是脉动量的二次乘积项。

联系之前的内容，$\bar\rho\,\overline{w'u'}$ 是通过法向为z轴平面输送的自下而上x方向的**脉动动量通量密度**。
那么 $\bar\rho C_p\,\overline{w'\theta'}$ 是**通过法向为z轴平面**输送的自下而上**脉动位焓通量密度**。

$\nabla\cdot\vec h>0$，说明湍流引起的脉动位焓有**净输出** $\Rightarrow C_p\frac{d\bar\theta}{dt}=\frac{\bar\theta}{\bar T}\bar{\dot Q}-\frac{1}{\bar\rho}\nabla\cdot\vec h<0$ 从而导致**平均位焓下降**

$\nabla\cdot\vec h<0$，则平均温度升高。

4.2.2.5 水汽方程

水汽方程 $\frac{\partial\bar q}{\partial t}+\bar{\vec V}\cdot\nabla\bar q=\bar s-\frac{1}{\bar\rho}\nabla\cdot\left(\bar\rho\,\overline{\vec V'q'}\right)$ 与位温方程基本一致

在考虑了湍流因素后，大气中影响水汽变化的因子主要有：**水汽相变和湍流水汽扩散。**

水汽方程的推导

基于水汽方程：$\frac{\partial q}{\partial t}+\vec V\cdot\nabla q=s_{水汽的源}$，使用和热力学方程同样的方法可以得到：$\frac{\partial\bar q}{\partial t}+\bar{\vec V}\cdot\nabla\bar q+\overline{\vec V'\cdot\nabla q'}=\bar s$，$\frac{\partial\bar q}{\partial t}+\bar{\vec V}\cdot\nabla\bar q=\bar s-\frac{1}{\bar\rho}\left(\bar\rho\overline{\vec V'\cdot\nabla q'}\right)=\bar s-\frac{1}{\bar\rho}\left(\nabla\cdot\left(\bar\rho\ \overline{\vec V'q'}\right)-\overline{q'\nabla\cdot\bar\rho\vec V'}\right)$ 所以$\frac{\partial\bar q}{\partial t}+\bar{\vec V}\cdot\nabla\bar q=\bar s-\frac{1}{\bar\rho}\nabla\cdot\left(\bar\rho\ \overline{\vec V'q'}\right)$

通量密度矢 同样定义 $\vec q=\bar\rho\,\overline{\vec V'q'}=\begin{pmatrix}q_x\\q_y\\q_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar\rho\,\overline{u'q'}\\\bar\rho\overline{v'q'}\\\bar\rho\,\overline{w'q'}\end{pmatrix}$ 为**脉动水汽的通量密度矢**

$\nabla\cdot\vec q>0$，说明脉动引起的水汽有**净输出**，从而导致**平均水汽含量减少**。

4.2.2.6 总体平均运动方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u} = -\overline{\vec{V}' \nabla u'} - \dfrac{1}{\bar{\rho}} \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} \\
\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T} \\
C_p \dfrac{d \bar{\theta}}{dt} = \dfrac{\bar{T}}{\bar{\theta}} \bar{\dot{Q}} - \dfrac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \vec{h} \\
\dfrac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{q} = \bar{s} - \dfrac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \vec{q}
\end{cases}
$$

说明　与瞬时运动方程相比，湍流运动的作用表现为**脉动通量**（物理量的输送）上（具体就是脉动量二次乘积项的平均值）。作为一种统计量，该项反映了**脉动运动**引起物理量的**净输出**或**净输入**，从而导致该物理量平均值的减或增。