第二章 尺度分析与自由大气中的风场

2.1 尺度概念和大气运动的分类

2.1.1 尺度概念

尺度 具有代表意义、能反映该物理量一般大小的量值，又称特征值。其大小是用数量级来表示的。

示例

水平风速在 5~25m/s 之间，特征值为 10m/s。$u = Uu^*, v = Uv^*$

其中，$U \sim 10^1 m/s$是特征值 Q，u^*和v^*为数值在 0.5~2.5 之间的无量纲量 q^*。

物理量表示 将任一物理量写作： $q = Qq^*$

特征量 Q 表示该物理量的一般大小，常量，有量纲。 量纲不等同于单位，它表示了物理量的种类

无量纲量 q^* 无量纲量，量级在10^0，表示物理量的具体大小，变量，没有量纲。

比较物理量的大小，实际就是比较特征量的大小。这里的 q 是广义的，包括气象要素及方程各项。

示例

已知 $u = Uu^*, t = \tau t^*$，则：$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial Uu^*}{\partial \tau t^*} = \frac{U}{\tau}\frac{\partial u^*}{\partial t^*}$，$\frac{U}{\tau}$ 是 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的特征量，$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}$是其无量纲量。

2.1.2 大气运动的分类

水平尺度 根据大气运动的水平尺度，大气运动可以分为（单位为 km）：

行星尺度10^4	长波、副热带、高压	热带行星、尺度波动	（介于行星尺度与天气尺度之间）
天气尺度10^3	温带气旋、反气旋	云团、热带气旋	
中尺度10^2	锋面、背风波、飑线	中尺度对流群	
小尺度10^1	积雨云、龙卷	对流单体	
微尺度10^0	边界层涡动		

大尺度	$L \sim 10^6 m$	$D \sim 10^4 m$	$U \sim 10\ m/s$	$\tau \sim 10^5 s$	大尺度时间尺度为水平尺度/速度尺度
中尺度	$L \sim 10^5 m$	$D \sim 10^4 m$	$U \sim 10\ m/s$	$\tau \sim 10^5 s$	中尺度的时间尺度并不是这样
小尺度	$L \sim 10^4 m$	$D \sim 10^{3\sim4} m$	$U \sim 10\ m/s$	$\tau \sim 10^4 s$	小尺度也不是这样

简化思想 **大气运动非常复杂→尺度的多样性→不同尺度的运动→运动性质不一样**，如何用可以描述一切现象的方程组来反应这种性质的不同？所以需要进行化简，来反映出不同尺度运动的独特性质。

简化意义 从物理角度看：影响大气的因子很多，重点不突出。

从数学角度看：大气运动基本方程组是一个高度非线性的偏微分方程组，求解困难。

本课程的研究目的：大尺度的大气运动。因此，需要简化大气运动基本方程组。

奥卡姆剃刀原理

在所有能够完美描述已有观测的可计算理论中，较短的可计算理论在估计下一次观测结果的概率时具有较大权重。同时，其假设需要尽可能地少，以便适用于更大的范围。

简化方法 从物理上看：抓住主要因子，忽略次要因子，把握运动的物理本质和基本性质，反映物理规律更清晰。

从数学上看：保留各方程中的大项，略去小项，使得简化后的方程组简单，便于数学处理。

尺度分析 Charney(1948)首先倡导利用尺度分析法，对大气运动基本方程组进行分析与简化。

Burger(1958)等人进一步发展完善，这一方法在现代大气动力学和数值天气预报研究中广泛应用。

2.2 基本方程组的尺度分析

2.2.1 分析基本概念

尺度分析法 尺度分析法是依据表征**某类运动系统**的运动状态和热力状态各物理量的特征值，估计大气运动方程中各项量级大小的一种方法。根据尺度分析的结果，结合物理上考虑，略去方程中量级较小的项，便可得到简化方程，并可分析运动系统的某些基本性质。

分析目的 对方程进行简化，突出主要因子，研究运动的主要特征。是理论分析的第一步。

基本规则 尺度的大小是用数量级表示的，在尺度分析中，必然涉及数量级的运算，故要明确**数量级运算规则**：

① **几个变量之和**数量级，认为**最大项的量级**就是变量之和的数量级。

② 有 **2-3 个变量的数量级相同**，如果它们之间**没有依从关系**，则其和(差)的数量级和**单个数量级相同**；如果**有依从关系**，则其和的数量级**可以小于单个变量**的数量级，究竟多大要进一步分析。

例如：水平散度 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\le\frac{U}{L}$　对大尺度运动而言，$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 两项符号一般相反。

③ 两个**变量乘积**的数量级一般为变量**数量级的乘积**。

④ 在一个方程式中，数量级最大项**至少要有两项**。如果方程中只有一个最大项，不是各项量级估计不正确，就是原方程不成立。

基本步骤 ① 写出方程中各项的**特征值**　② 根据运动的类型写出各项的**数量级**

③ 略去小项、保留大项得到各级近似简化方程

④ 根据简化的结果，揭示出不同类型运动的基本性质和特点。

需求尺度 在尺度分析中，为了确定大气运动方程中各项的量级，应确定以下尺度：

① 空间和时间尺度　② 各物理量尺度　③ 各物理量变动尺度

2.2.2 物理量尺度

2.2.2.1 基本物理量尺度情况

运动尺度 物理量：**水平速度尺度 $\boldsymbol{U}$**　**铅直速度尺度 $\boldsymbol{W}$**

变动尺度：观测表明，速度场的变动尺度可以达到本身的量级：$\boldsymbol{\Delta u\sim U,\Delta v\sim U,\Delta w\sim W}$

空间尺度 物理量：**水平(长度)尺度 $\boldsymbol{L}$**　**铅直(厚度)尺度 $\boldsymbol{D}$**　空间尺度没有变动

涡旋系统的水平尺度取其**特征半径**，波动则为**波长的 1/4**。

$$\frac{\partial u}{\partial x}\sim\frac{\partial u}{\partial y}\sim\frac{\partial v}{\partial x}\sim\frac{\partial v}{\partial y}\sim\frac{U}{L}\qquad\frac{\partial u}{\partial z}\sim\frac{\partial v}{\partial z}\sim\frac{U}{D}\qquad\frac{\partial w}{\partial x}\sim\frac{\partial w}{\partial y}\sim\frac{W}{L}\qquad\frac{\partial w}{\partial z}\sim\frac{W}{D}$$

时间尺度 物理量：运动系统演变**经历一个阶段**所需要的特征时间，用**符号τ**表示，一般表示为 $\boldsymbol{\tau=L/C}$

对于**移速不太快**的系统，一般认为$C\sim U$，那么：$\boldsymbol{\tau=L/U}$　称为**平流时间尺度**

大尺度系统：$\boldsymbol{\tau=L/U}$　$\frac{\partial u}{\partial t}\sim\frac{\partial v}{\partial t}\sim\frac{CU}{L}\sim\frac{U^2}{L}$　$\frac{\partial w}{\partial t}\sim\frac{CW}{L}\sim\frac{UW}{L}$

中小尺度系统：$\boldsymbol{\tau\ge L/U}$

热力学尺度 $\boldsymbol{p,\rho,T,\theta}$等。 变动尺度：时空变动值相对于其本身很小，达不到本身的量级。

可以分为两部分：　① 表征**基本状态**的基本热力学变量（仅与高度z有关）

② **扰动量**：相对于基本量的偏差（时空函数）

气压 $\boldsymbol{p}=\bar{p}(z)+p'(x,y,z,t)\sim\boldsymbol{P+\Delta P}$　密度 $\boldsymbol{\rho}=\bar{\rho}(z)+\rho'(x,y,z,t)\sim\boldsymbol{\pi+\Delta\pi}$

温度 $\boldsymbol{T}=\bar{T}(z)+T'(x,y,z,t)\sim\boldsymbol{T^*+\Delta T^*}$　位温 $\boldsymbol{\theta}=\bar{\theta}(z)+\theta'(x,y,z,t)\sim\boldsymbol{\Theta+\Delta\Theta}$

① **基本热力学变量随高度**的改变量 $\frac{d(\bar{x})}{dz}$ 可以达到**本身的量级**。

② **扰动热力学变量**的**时空变动值** $\frac{\partial(x')}{\partial x}$ 可达到**本身的量级**。

分析说明：量级分析

先定义基本状态的铅直厚度尺度（标高）$H=\frac{RT^*}{g}\sim 10^4 m$。则气压变换为 $p=\rho RT \Rightarrow P\sim \pi RT^*\sim \pi g H$

$\frac{d\bar{p}}{dz}=-\bar{\rho}g\sim \pi g\sim \frac{P}{H}$ $\quad \frac{d\ln\bar{p}}{dz}\sim\frac{1}{H}\Rightarrow\frac{d\ln\bar{\rho}}{dz}\sim\frac{1}{H}$ 基本热力学变量随高度的改变量可以达到本身的量级

据观测：扰动热力学变量的时空变动值可以达到本身的量级

空间：$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial[\bar{p}(z)+p']}{\partial x}=\frac{\partial p'}{\partial x}\sim\frac{\Delta P}{L}\sim\frac{\partial p}{\partial y}$，时间：$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial p'}{\partial t}\sim\frac{\Delta P}{\tau}$，高度：$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial[\bar{p}(z)+p']}{\partial z}=\frac{\partial\bar{p}(z)}{\partial z}+\frac{\partial p'}{\partial z}\sim\pi g+\frac{\Delta P}{D}$

2.2.2.2 基本方程的物理量约束关系

尺度分析 各个物理量尺度不是孤立的，它们必须受基本方程组的制约，通过分析方程中各项量级，可以找到这些物理量之间的约束关系。

基本概念 已知量：一般认为$\boldsymbol{L,D,\tau,U}$可根据不同类型运动选定，**基本状态热力学变量、标高等**是已知的。

求解量：**垂直速度$\boldsymbol{W}$**、**各类扰动尺度$\boldsymbol{\Delta P}$ ∥ $\boldsymbol{\Delta\pi}$ ∥ $\boldsymbol{\Delta T^*}$**等。

连续方程 第四条规则：$\frac{W}{D}\le\frac{U}{L}\Rightarrow \boldsymbol{W\le\frac{DU}{L}}$（给出$W$上限） 解释大尺度运动：$L\gg D\Rightarrow W\ll U$，准水平运动

连续方程的尺度分析与垂直速度约束关系的建立

假设大气不可压缩，$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0\Rightarrow\frac{d\ln\rho}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ 利用小扰动假设：

$\ln\rho=\ln(\bar{\rho}+\rho')=\ln\bar{\rho}\left(1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)=\ln\bar{\rho}+\ln\left(1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)$ 因为 $\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\ll 1\Rightarrow\ln\left(1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)\approx\frac{\rho'}{\bar{\rho}}$

所以 $\ln\rho\approx\ln\bar{\rho}+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}$ 回代原式 $\Rightarrow\frac{d\ln\bar{\rho}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ 对该式执行尺度分析：

$$\begin{array}{|cccccc|}
w\frac{\partial\ln\bar{\rho}}{\partial z} & +\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) & +\vec{V}_h\cdot\nabla_h\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) & +w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) & +\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} & +\frac{\partial w}{\partial z}=0\\
\frac{W}{H}\le\frac{W}{D} & \frac{\Delta\pi}{\pi\tau}\ll\frac{U}{L} & \frac{\Delta\pi}{\pi}\frac{U}{L}\ll\frac{U}{L} & \frac{\Delta\pi}{\pi}\frac{W}{D}\ll\frac{W}{D} & \frac{U}{L} & \frac{W}{D}
\end{array}$$

为了满足方程平衡，最后两项必须量级相当。同时因为 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\le\frac{U}{L}$，所以 $\frac{W}{D}\le\frac{U}{L}$或$W\le\frac{D}{L}U$，这给出了$W$的上限。

水平方程 水平运动方程的尺度分析：$\boldsymbol{\frac{\Delta P}{\pi L}\approx\frac{U^2}{L}+f_0U}$ 力的平衡取决于**特征惯性力项**和**科氏力项**的比值

推导

$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ 各项尺度分析为 $\frac{U}{\tau}+\frac{U^2}{L}+\frac{U^2}{L}+\frac{WU}{D}\Rightarrow\frac{U^2}{L}$，$fU$，$\frac{\Delta P}{\pi L}$ 即为上式

为了便于理解，此处引入罗斯贝数$Ro=U/f_0L$，表示惯性力和科氏力的相对重要性。

① 大尺度运动有：$\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}\ll 1$，$\boldsymbol{\frac{\Delta P}{\pi L}\approx f_0U}\Rightarrow\frac{\Delta P}{\pi}\sim f_0UL\sim 10^3m^2/s^2$

压力变化的相对尺度：$P\sim\pi gH$，$\Delta P\sim\pi f_0UL\Rightarrow\frac{\Delta P}{P}\sim\frac{f_0LU}{gH}\sim 10^{-2}$ $\quad P\sim 10^5N/m^2\quad \pi\sim 10^0kg\cdot m^{-3}$

② 中小尺度运动有：$\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}\ge 1\Rightarrow\boldsymbol{\frac{\Delta P}{\pi L}\approx\frac{U^2}{L}}$

状态方程 $\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{\Delta T^*}{T^*}\sim\frac{\Delta\pi}{\pi}\sim\frac{\Delta P}{P}$ 大尺度运动：$\boldsymbol{\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{\Delta T^*}{T^*}\sim\frac{\Delta\pi}{\pi}\sim\frac{\Delta P}{P}\sim\frac{f_0LU}{gH}\sim 10^{-2}}$

绝热方程 $\frac{U\Delta\Theta}{L\Theta}\sim\frac{N^2}{g}W\Longrightarrow W\sim\frac{Ug}{N^2L}\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\le 10^{-1}\frac{D}{L}U$ 大尺度运动：$\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{f_0LU}{gH}\Rightarrow W\sim\frac{f_0U^2}{HN^2}\sim 10^{-2}ms^{-1}$

水平平流引起的局地温度变化率~垂直运动引起的绝热加热/冷却率。

将其他热力学扰动与气压扰动联系起来（$\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\sim\frac{\Delta P}{P}$），并验证垂直速度 W 的估计是自洽的。

2.2.2.3 中纬度大尺度运动的特征尺度和环境参数

水平尺度	$L \sim 10^6\ m$	时间尺度	$\tau \sim L/U \sim 10^5 s$	铅直厚度尺度	$D \sim H \sim 10^4 m$
水平速度尺度	$U \sim 10\ ms^{-1}$	铅直速度尺度	$W \sim 10^{-2}\ ms^{-1}$	大气标高	$H \sim 10^4 m$
中纬度地转参数	$f_0 \sim 10^{-4}\ s^{-1}$	重力加速度	$g \sim 10\ ms^{-2}$	层结参数	$N \sim 10^{-2} s^{-1}$
空气粘性系数	$\gamma \sim 10^1 m^2 s^{-1}$	气压尺度	$P \sim 10^5 N/m^2$	温度尺度	$T^* \sim 10^2 K$
密度尺度	$\rho_0 \sim \pi \sim 10^0 kg \cdot m^{-3}$		温度水平变动尺度	$\delta_h T^* \sim 10K$	
气压水平变动尺度	$\delta_h P \sim 10^3 N/m^2$		气压垂直变动尺度	$\delta_z P \sim P \sim 10^5 N/m^2$	
扰动密度变动尺度与密度尺度之比	$\Delta\pi/\pi \sim 10^{-2}$				
扰动气压变动尺度与密度尺度之比	$\Delta P/\pi \sim 10^3 m^2/s^2$				

2.2.3 基本方程组的简化

基本特点 根据实际观测，中纬度大尺度大气运动具有以下特点：**准定常，准水平，准地转平衡，准静力平衡，准水平无辐散，涡旋运动**。方程简化是否正确，与实际观测比较来验证。

2.2.3.1 运动方程的简化

x方向	方程	$\frac{\partial u}{\partial t}$	$+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}$	$+w\frac{\partial u}{\partial z}$	$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$	$-\tilde{f}w$	$+fv$	$+\gamma\nabla^2 u$	
	各项尺度	U/τ	U^2/L	WU/H	$\frac{1}{\rho_0}\frac{\delta_h P}{L}$	$f_0 W$	$f_0 U$	$\gamma\frac{U}{H^2}$	
	数量级	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-6}	单位：ms^{-2}

其中摩擦力项的解释：$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \sim \frac{U}{L^2}+\frac{U}{L^2}+\frac{U}{H^2} \sim \frac{U}{H^2}$

y方向	方程	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}$	$+w\frac{\partial v}{\partial z}$	$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$	$-fu$	$+\gamma\nabla^2 v$	
	各项尺度	U/τ	U^2/L	UW/H	$\frac{1}{\rho_0}\frac{\delta_h P}{L}$	$f_0 U$	$\gamma\frac{U}{H^2}$	
	数量级	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-6}	单位：ms^{-2}

z方向	方程	$\frac{\partial w}{\partial t}$	$+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}$	$+w\frac{\partial w}{\partial z}$	$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$	$-g$	$+\tilde{f}u$	$+\gamma\nabla^2 w$	
	各项尺度	W/τ	UW/L	W^2/H	$\frac{1}{\rho_0}\frac{\delta_z P}{H}$	G	$f_0 U$	$\gamma\frac{W}{H^2}$	
	数量级	10^{-7}	10^{-7}	10^{-8}	10^{1}	10^{1}	10^{-3}	10^{-9}	单位：ms^{-2}

分子粘性力 **分子粘性力可以忽略**。分子粘性很小，在短期天气过程不计，气候学中因为能量需要耗散，不能忽略

高层：层流，分子粘性力和湍流粘性力均可忽略（自由大气）

低层：湍流粘性力重要，分子粘性力可略去（湍流边界层）

零级近似 只保留量级最大项，得到

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv$$
$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-fu$$

中纬度大尺度运动具有准地转特性

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g$$

中纬度大尺度运动具有准静力平衡特性

如果三个运动方程中速度都取为零$(u,v,w=0)$，正好就是上式，故称为**流体静力平衡方程**。

然而，零级近似时并非没有速度，而是指没有加速度的存在。

压力与高度 **垂直气压梯度力 = 浮力**，大尺度运动中，气压相当精确地等于该点以上单位横截面积气柱的重量。

一级近似

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-fu$$

铅直运动的影响可略去不计。

零级近似方程不含有时间导数项，是诊断方程，不能作为预报方程，而一级近似可作为预报方程。

2.2.3.2 连续方程的简化

连续方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$ 原始方程中**密度可以变为基本量+扰动量**

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+u\frac{\partial \rho'}{\partial x}+v\frac{\partial \rho'}{\partial y}+w\frac{\partial \rho'}{\partial z}+w\frac{\partial \bar\rho}{\partial z}+\bar\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\rho'\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

方程	$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right)$	$+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right)$	$+\frac{w}{\bar\rho}\frac{\partial \rho'}{\partial z}$	$+w\frac{\partial \ln\bar\rho}{\partial z}$	$+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$	$+\frac{\partial w}{\partial z}$	$+\frac{\rho'}{\bar\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right.$	$\left.+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$
尺度	$\frac{U}{L}\frac{\Delta\pi}{\pi}$	$\frac{U}{L}\frac{\Delta\pi}{\pi}$	$\frac{W}{H}\frac{\Delta\pi}{\pi}$	$\frac{W}{H}$	$\frac{U}{L}$	$\frac{W}{H}$	$\frac{U}{L}\frac{\Delta\pi}{\pi}$	$\frac{W}{H}\frac{\Delta\pi}{\pi}$
数量级	10^{-7}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}

零级简化 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ 水平无辐散，**中纬度大尺度运动具有准水平无辐散特性**

一级简化 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial \ln\bar\rho}{\partial z}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\bar\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial \bar\rho w}{\partial z}=0}$

利用上、下边界条件 $z=0, w=0$; $z\to\infty, \bar\rho w=0$ 可得: $\int_0^\infty \bar\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz=0$

这表明上下层速度辐合、辐散相互补偿，**整层大气是水平无辐散的**，这就是著名的**达因补偿原理**。

2.2.3.3 热力学方程的简化

方程变换

考虑短期天气过程，可将大气运动视为绝热，不存在非绝热加热项，即 $c_p\frac{dT}{dt}-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=0$，展开：

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{1}{c_p\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0$ 引入静力平衡方程 $\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$

可得: $-\frac{w}{c_p\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{wg}{c_p}=\gamma_d w$ （考虑空气干绝热递减率 $\gamma_d=-\frac{dT}{dz}=\frac{g}{c_p}\approx 0.967K/100m$）

环境温度递减率 $\gamma=-\frac{\partial T}{\partial z}\approx 0.65K/100m$ $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w(\gamma_d-\gamma)-\frac{RT}{c_p p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0$

尺度分析

方程	$\frac{\partial T}{\partial t}$	$+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}$	$+w(\gamma_d-\gamma)$	$-\frac{RT}{c_p p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}\right.$	$\left.+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0$
尺度	$\frac{\delta_h T^*}{\tau}$	$\frac{U\delta_h T^*}{L}$	$W(\gamma_d-\gamma)$	$\frac{RT^*}{c_p\tau}\frac{\delta_h P}{P}$	$\frac{RT^* U}{c_p}\frac{\delta_h P}{P}$
数量级	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-6}

温度的局地变化、温度平流和垂直运动所引起的温度变化为最大三项，空气膨胀对外做功项为最小项。

零级简化 $\boldsymbol{\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w(\gamma_d-\gamma)=0}$ 在天气尺度运动中，**温度的局地变化**主要是由于**温度平流和垂直运动**所引起的温度变化引起的。在寒潮等情形下，温度平流是主要的影响因子。

2.2.3.4 总结

平衡方程组

$$\begin{cases}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv=0 & \text{水平运动方程，地转平衡}\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-fu=0 & \text{水平运动方程，地转平衡}\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g=0 & \text{垂直运动方程，静力平衡}\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 & \text{连续方程，水平速度散度为零}\end{cases}$$

不含时间变化，不含有热力学方程

揭示了**中纬度**($f=10^{-4}$)、**准定常**(无t)、**准水平**（无w）、**准地转平衡、准静力平衡、准水平无辐散**（连续方程无依从关系得到的）、**自由大气**(无摩擦力)**的大尺度运动、涡旋运动**(任意二维运动可以表示为无辐散涡旋流和无旋辐散流的组合，由于无辐散，所以定常涡旋)

2.2.4 无量纲方程及参数

2.2.4.1 无量纲方程

概述 将动力学方程无量纲化后，一些由**基本尺度** L, D, τ, U 和**环境变量尺度** f_0, g, H 组成的**无量纲数**，这些无量纲数有着明确的物理意义。无量纲方程和无量纲参数在大气运动进行动力分析时十分有用。

步骤 ① 把方程各项写作**特征量×无量纲量**的形式。

② 用方程中某一项的特征量同除方程的每一项（量纲齐次性原理）

无量纲方程中各项前面的系数：无量纲数体现了各项的相对重要性。

方程 $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t^*}+R_o\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\frac{D}{H}\frac{1}{R_i}w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}=-R_1\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p'^*}{\partial x^*}+f^*v^*$

方程推导

基于x方向运动方程：$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x}+fv$ 令$(x,y)=L(x^*,y^*),(u,v)=U(u^*,v^*),p'=p'^*(\Delta P)$

$z=Dz^*,w=Ww^*,\bar{\rho}=\pi\rho^*,t=\tau t^*,f=f_0f^*$ 回代原式，可得：$\frac{U}{\tau}\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\frac{U^2}{L}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\frac{WU}{D}w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}$

$=-\frac{\Delta P}{\pi L}\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+f_0Uf^*\nu^*$ 同除f_0U，得到：$\frac{1}{f_0\tau}\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\frac{U}{f_0L}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\nu^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\frac{D}{H}\frac{U^2/D^2}{N^2}w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}=-\frac{\Delta p}{\pi f_0LU}\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p'^*}{\partial x^*}+f^*\nu^*$

根据前述分析可得：若 $\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}\ll1,\frac{\Delta P}{\pi L}\approx f_0U$；若 $\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}\geq1,\frac{\Delta P}{\pi L}\approx\frac{U^2}{L}$ $\Rightarrow$ 若 $\frac{U}{f_0L}\ll1,\frac{\Delta P}{\pi Lf_0U}\approx1$；

$\frac{U}{f_0L}\geq1,\frac{\Delta P}{\pi Lf_0U}\approx\frac{U}{f_0L}$ 令$R_0=\frac{U}{f_0L},R_1=\frac{\Delta P}{\pi Lf_0U}$，则：$\begin{cases}若R_0\ll1, & R_1=1\\若R_0\geq1, & R_1=R_0\end{cases}$ 不管哪种情况，气压梯度力项都会保留。

令$\varepsilon=\frac{1}{f_0\tau},Ri=\frac{N^2D^2}{U^2}$，方程可写为：$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t^*}+R_o\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\nu^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\frac{D}{H}\frac{1}{R_i}w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}=-R_1\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p'^*}{\partial x^*}+f^*\nu^*$

2.2.4.2 基别尔数

定义 $\varepsilon=\frac{U/\tau}{f_0U}=\frac{1}{f_0\tau}=\frac{\tau_e}{\tau}=\frac{惯性运动特征时间}{运动特征时间}$

描述 f_0是大气中惯性运动的特征频率，$1/f_0$ 可看做惯性运动的特征时间尺度τ_e，因此，基别尔数还可视为惯性运动的时间尺度与所研究运动的时间之比，从而**反映所研究运动的快慢问题**。

反应内容 $\begin{cases}\varepsilon\ll1 & 慢过程，准定常\\\varepsilon\geq1 & 快过程，非定常\end{cases}$

2.2.4.3 罗斯贝数

定义 $R_0=\frac{U^2/L}{f_0U}=\frac{U}{f_0L}=\frac{特征水平惯性力项}{特征水平科氏力项}$

描述 罗斯贝数的大小反映了**科氏力的相对重要性**

反应内容 ① $R_0\leq10^{-1}$，L较大，则特征惯性力很小，加速度很小，可忽略，满足准地转条件。

② $R_0\geq10^0$，L较小，则为非地转。

2.2.4.4 不同尺度运动的典型数据

中纬度 中纬度大尺度运动：$f_0\sim10^{-4}s,U\sim10^1m/s\quad L\sim10^6m$ $\quad R_0=\frac{U}{f_0L}\sim10^{-1}\ll1$ 准地转

中纬度中小尺度运动：$f_0\sim10^{-4}s,U\sim10^1m/s\quad L<10^5m$ $\quad R_0=\frac{U}{f_0L}\sim10^0$ 非地转

热带 热带大尺度运动：$f_0\sim10^{-5}s,U\sim10^1m/s\quad L\sim10^6m$ $\quad R_0=\frac{U}{f_0L}\sim10^0$ 非地转

海洋 $f_0\sim10^{-4}s,U\sim10^{-1}m/s$ 若要使 $R_0=\frac{U}{f_0L}<10^{-1}$ 达到准地转，需要 $L\geq10^4m$

海洋速度比较慢，不需要特别大的水平尺度，就能够达到准地转。

总结 ① $\varepsilon \equiv \frac{1}{f_0\tau} \sim \frac{\partial u}{\partial t}/fv$ 准地转平衡运动是缓慢变化($\varepsilon \ll 1$)的

② $Ro \equiv \frac{U}{f_0 L} \sim \frac{\vec{V}\cdot\nabla u}{fv}$ 大尺度运动（$Ro \ll 1$）

③ $Ri \equiv \frac{N^2D^2}{U^2} \sim g\frac{\partial \ln\theta}{\partial z}/\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$ 同时大气层结应是高度稳定的($Ri \gg 1$)

④ $\lambda \equiv \frac{D}{H}$ $\delta \equiv \frac{D}{L}$ 同理可得：静力平衡近似的充分条件是$\lambda = 1$，$\delta \ll 1$

2.2.4.5 地转参数f的简化

简化形式 $f = f_0 + \beta\cdot y + o\left(\frac{y^2}{a^2}\right)$, 其中$y = a(\varphi - \varphi_0)$

若令L代表运动的径向水平尺度，则前两项之比为：$\frac{\beta y}{f_0} \sim \frac{\cos\varphi_0 L}{\sin\varphi_0 a}$

推导过程

$f = 2\Omega\sin\varphi$，把 f 在 φ_0 处作泰勒级数展开 ⇒ 对y展开：$f = f|_{\varphi_0} + \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi_0}(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right|_{\varphi^2}(\varphi - \varphi_0)^2 + \cdots$

$= 2\Omega\sin\varphi_0 + 2\Omega\cos\varphi_0(\varphi - \varphi_0) + o[(\varphi - \varphi_0)^2] = f_0 + \beta\cdot y + o\left(\frac{y^2}{a^2}\right)$；$[y = a(\varphi - \varphi_0)]$

近似地，$f \approx f_0 + \beta y$，其中：$f_0 = 2\Omega\sin\varphi_0, \beta = \frac{2\Omega\cos\varphi_0}{a} = \frac{df}{dy}|_{\phi_0}$ 都是常量。

讨论 ① 在中纬度地区，若运动的经向水平尺度远小于地球半径时$L \ll a$，可取$f \approx f_0$，称为 ***f* 平面近似**。
② 高一级的近似为 **β 平面近似**：当f处于系数地位不被微商时，取 $f \approx f_0$ 为常数；当 f 处于对 y 求导时，取 $\frac{\partial f}{\partial y} = \beta$ 为常数。即 $f \approx f_0 + \beta y$ 其中 $f_0 = 2\Omega\sin\varphi_0, \beta = \frac{2\Omega\cos\varphi_0}{a} = \frac{df}{dy}|_{\phi_0}$ 都是常量

③ 科氏参数f是纬度y的非线性函数，β平面近似部分考虑地球球面性，即把地球当作平面，但又考虑科氏参数f的变化，是近似地将f表示成y的线性函数，而使大气运动方程组得到简化的近似方法。
④ 特别地，赤道附近，取赤道为中心纬度，则：$\varphi_0 = 0$，$f_0 = 0 \Rightarrow f \approx \beta y$，称为**赤道$\beta$平面近似**。

2.3 P 坐标系

引入

局地直角坐标系中垂直坐标轴z是以长度(米)为单位来度量，描述大气运动方程组物理意义比较清楚，且运动方程和连续方程中均含有密度项。然而，密度一般不是常规观测的物理量，分析对比不同高度处的气压梯度力很不方便。于是，在气象学中常采用气压p作为垂直坐标，在实际工作中也进行等压面图的分析。

2.3.1 P 坐标系概述

2.3.1.1 P 坐标系定义

坐标 (x, y, p, t) 水平坐标不变，z变为p

物理基础 Z坐标系转化为P坐标系的物理基础是**静力平衡**：$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \Rightarrow P(z) = \int_z^H \rho g dz$

气压相当精确的等于该高度以上单位截面积空气柱的质量，故气压与高度一一对应，p坐标轴与z坐标轴反向。使用压力坐标时，即默认静力平衡成立，研究强对流运动时，静力平衡不成立。

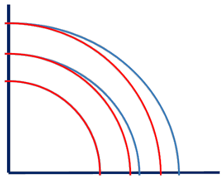
2.3.1.2 等高面与等压面

等高面 空间高度相同的点组成的面（气压不等）
等压面 **气压相同的点**组成的面（曲面，海拔高度不等）所以等压面分析位势高度场，即高空图；等高面分析

气压场，即地面图。

位势 重力位势 *geopotential*，单位质量空气从海平面上升到高度Z克服重力作功。

$d\phi = gdz \Rightarrow \boldsymbol{\phi = \int_0^z gdz} \approx gz \approx 9.8z$ 　　单位：焦耳/千克



等位势线示意图

位势米 当$Z=1$米时，$\phi = 9.8$焦耳/千克，定义：**1 位势米= 9.8 焦耳/千克**

位势高度 定义位势高度：$\boldsymbol{H = \frac{位势}{1位势米} = \frac{\int_0^z gdz}{9.8}}$

等位势面 **等位势面是水平面**，因为气块在等位势面上移动时，不需要克服重力做功，也就是说等位势面处处与重力相垂直，所以等位势面是水平面。蓝色圈表示等重力位势线，红色圈表示**等海拔高度线。**
等位势面与等高面不重合或不平行，只在海平面重合。因为重力是纬度和高度的函数，在不同纬度上物体改变相同的高度位势的增量不同，所以除海平面外，等位势面与等高面不重合或不平行。

2.3.2 p坐标系与z坐标系

2.3.2.1 p坐标系与z坐标系的转换关系

关系式 $\frac{\partial\phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$ 　　$\boldsymbol{\frac{1}{\rho}\nabla_h p = (\nabla_h \phi)_p}$ 　　**等高面上水平气压梯度力**可以用**等压面上的位势高度梯度表示**

$\boldsymbol{\frac{\Delta p}{\Delta t} \sim \frac{\Delta z}{\Delta t}}$ 　　正变压⇔正变高 　　负变压⇔负变高

垂直速度 $w = \frac{dz}{dt}$ 　$\omega = \frac{dp}{dt}$ 　　大尺度零级近似：$\boldsymbol{\omega \approx -\rho g w}$ 　上升 $w>0$，$\omega<0$

2.3.2.2 p坐标系下大气运动方程组

运动方程 $\left(\frac{du}{dt}\right)_p = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_p + fv$ 　　$\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_p - fu$ 　　主要是气压梯度力的转换

静力平衡 $\frac{\partial\phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}$ 　　其中：$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p + u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + v\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \omega\frac{\partial}{\partial p}$

连续方程 $\boldsymbol{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial\omega}{\partial p} = 0}$ 　　方程中不存在密度 　　哪一层上垂直运动最强？

热力学方程 $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_p + \left(u\frac{\partial T}{\partial x}\right)_p + \left(v\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p - S_p\omega = \frac{\dot{Q}}{c_p}$，其中$S_p \equiv -T\frac{\partial \ln\theta}{\partial p} = \frac{RT}{pg}(\gamma_d - \gamma)$

理想气体 $p = \rho RT$

2.3.2.3 p坐标系的优缺点

优点 ① 方程中减少密度变量，隐含在了等压面位势变化之中。气压梯度力变成了线性项，形式简单。
② 连续方程形式简单，成为一个诊断方程(没有时间导数项)。
③ 日常业务工作常采用等压面分析，便于利用 P 坐标系进行诊断计算与分析。
④ 等压面相对于水平面的坡度较小，它上面的分析近似地反映了等高面上的分析直观形象。

缺点 ① 大气下边界不是坐标面，P 随时间和空间而变化，在地形起伏区，不仅与地形相截形成许多空间，而且这些空间范围随时间变化，很难正确地给出边界条件。
② 相对于一些中小尺度运动，不满足静力平衡关系，不能使用 P 坐标系。如果使用常带来较大误差。

2.4 自由大气中的大气平衡运动

自由大气 距离地球表面 **1-2km 以上的大气层**，是大气的主体部分。在此层摩擦力可以忽略不计。

平衡运动 各种**力的平衡**条件下的大气水平运动。反映大气运动基本特征，有地转风、惯性运动、热成风等。
由尺度分析可知：中纬度大尺度运动是准水平的，在水平方向上作用于大气的力基本上相互平衡的准地转运动。在低阶近似上，平衡运动可视为实际大气运动的近似代表。
支配简单平衡运动的力的平衡关系（例如地转风平衡）常可作为理论分析或实际中的近似关系。

法向运动 自然坐标系中法向运动方程：$0=-\underbrace{\frac{V^2}{R_T}}_{\text{惯性离心力}}-\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}_{\text{气压梯度力}}-\underbrace{fV}_{\text{地转偏向力}}$ 详情参见天原 1.5.2.2

2.4.1 地转平衡与地转风

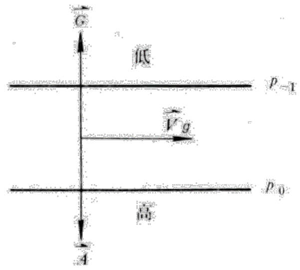
2.4.1.1 地转风的概念

地转关系 由零级近似中可知水平方向上**地转偏向力**与**气压梯度力**几乎平衡。即 $fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$ $fv=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$

地转风 满足上述关系的风称为地转风。即自由大气(无摩擦力)中空气的**水平**(无w)**等速**(无加速度)**直线**(无惯性离心力)**运动**，是指无加速度、惯性离心力不起作用情况下的运动。

地转风又可以看作是与等压线(等高线)平行的水平**匀速直线运动**。地转风**沿着等压线或等高线流动**。

2.4.1.2 描述地转风的公式



分量形式 由地转平衡方程变换可得：$\begin{cases}u_g=-\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial y}\\ v_g=\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial x}\end{cases}$ p系：$\begin{cases}u_g=-\frac{1}{f}\frac{\partial \phi}{\partial y}\\ v_g=\frac{1}{f}\frac{\partial \phi}{\partial x}\end{cases}$

向量形式 $\vec{V}_g=-\frac{1}{f\rho}\nabla_h p\times\vec{k}$ p坐标系形式：$\boldsymbol{\vec{V}_g=-\frac{1}{f}\nabla_h\phi\times\vec{k}}$ $=\frac{9.8}{f}\nabla H=-\frac{g}{f}\nabla z$

2.4.1.3 地转风的特点

适用范围 地转关系是在**无摩擦**，**不考虑加速度**和**垂直运动**引起的地转偏向力的情况下**近似成立的。**

这只是一种近似，绝对的地转平衡不存在，但实际风和地转风相差很小(由于气流曲率很小)。

需要注意：赤道上不能建立地转平衡关系，低纬地区地转风原理也不能适用。

风速特征 **地转风与气压梯度力成正比**，同纬度风速大的地方等压(高)线密集，风速小的地方等压(高)线稀疏。

地转风速大小与纬度成反比。纬度越高，同样风速地转偏向力越大→则**梯度力相同时，纬度越高，地转风速越小**。

运动学特征 地转风与等压线平行，在北半球，背风而立，低压在左，高压在右。 风压定律 南半球相反

散度特征 地转风基本水平**散度为零**（忽略$\frac{\partial f}{\partial y}$随纬度变化）。 $\nabla_p\cdot\vec{V}_g=\frac{\partial u_g}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial y}=-\frac{g}{f}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)+\frac{g}{f}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=0$

2.4.2 惯性运动和旋衡运动

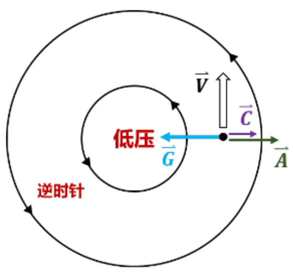
惯性运动 **气压分布均匀**时，**科氏力**与**惯性离心力**相平衡的大气运动流场。 $\boldsymbol{\frac{V^2}{R}+fV=0\longrightarrow R=-\frac{V_i}{f}}$

惯性运动为一个半径为$|R|$的圆，又称为惯性振荡。北半球 $R<0$ 为反气旋式的。

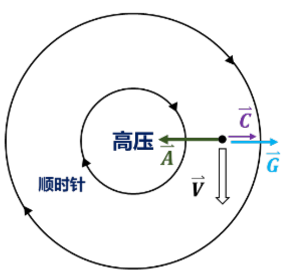
周期 $=\frac{|2\pi R|}{V_i}=\frac{2\pi}{|f|}$

旋衡运动 在**小尺度运动**中，**水平气压梯度力**与**惯性离心力**相平衡的大气运动流场。科氏力相对于水平气压梯度力可以忽略。$\boldsymbol{\frac{V^2}{R}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$ $\Rightarrow V_c=\sqrt{-\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$ 当 Ro 足够大时，可取旋衡近似。

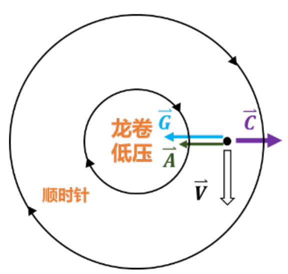
科氏力比惯性离心力小，水平气压梯度力与惯性离心力相平衡。



大尺度低压

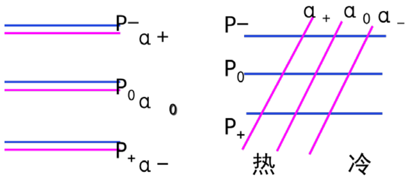


大尺度高压



小尺度低压的特殊情况

2.5 热成风



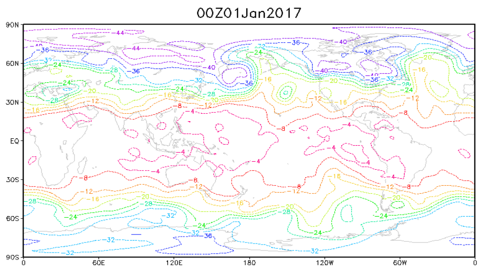
2.5.1 正压大气和斜压大气

正压大气　密度的空间分布只依赖于气压，即$\rho = \rho(p)$，这种大气状态称作正压大气。正压大气中等压面、等密度面和等温面重合在一起，地转风不随高度，温度分布均匀。

斜压大气　密度的空间分布不仅依赖于气压而且依赖于温度，即$\rho = \rho(p, T)$，这种状态称作斜压大气。斜压大气中等压面与等密度面、等温面是交割的。用**力管项（斜压矢量）$-\nabla\alpha \times \nabla P$来表征**。

力管项　**正压流体：**等压面平行于等容面，力管项为 0，等压面上温度相同。
斜压流体：等压面与等容面相交，力管项不为 0，等压面上有温度梯度。

$P = \rho RT, \rho = \frac{P}{RT} = f(P,T)$ ⇒ 大气一般是斜压的。



明显中纬度地区斜压性大

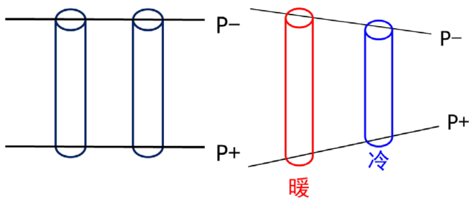
表现形式　由等压面上温度分布体现：$(\nabla T)_P$
存在等温线，即斜交；等温线越密集，则斜压性越强。

实际分析　大气斜压性与等压面上温度分布不均匀相联系，与热力过程相对应。驱动**中纬度**大气运动的主要机制是**斜压性**，驱动**热带**大气运动的主要机制是**潜热释放**。中纬度气压梯度大于低纬度，表明低纬度温度梯度小。

2.5.2 热成风

热成风　**地转风V_g随高度的改变量**，即上下两层地转风之矢量差：$V_T = V_{g上} - V_{g下}$ 方向**由低层指高层。**
其不是真实的风，热成风关系是一个极好的诊断关系，揭示了静力平衡大尺度运动中风场、气压场和温度场之间的关系。即 $\vec{V}_T = -\frac{1}{f}\nabla(\phi_{up} - \phi_{down}) \times \vec{k} = -\frac{1}{f}\nabla(9.8\Delta H_{与温度有关}) \times \vec{k}$

物理模型　① 若等压面上温度分布均匀，P^+与P^-之间二个气柱**重量相同**，**密度相同**，高度也相同，故两者平行，热成风为零。
② 若等压面上温度分布不均匀，**暖区密度减少**，气柱膨胀，P^+与P^-之间两个气柱**重量相同**，密度暖区小于冷区，**高度$h_1 > h_2$**，P^+与P^-不平行，两层压力梯度力必然不同，热成风不为零。



热成风方程　$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f}\vec{k} \times \nabla_p T$　　　$\vec{V}_T = \frac{g}{f}\ln\frac{p_0}{p_1}\,\vec{k} \times \nabla\bar{T} = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla(\phi_1 - \phi_0)$

热成风的推导

（1）已知地转风：$\vec{V}_g = -\frac{1}{f}\nabla\phi \times \vec{k}$，则其随高度的变化为：$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} = -\frac{1}{f}\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right) \times \vec{k}$，使用静力方程代入：$\frac{\partial\phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}$，

$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} = -\frac{R}{fP}\vec{k} \times (\nabla T)_P \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial \ln P} = -\frac{R}{f}\vec{k} \times (\nabla T)_P$　　可见：等压面上温度分布的不均匀，引起了热成风。

（2）或者根据定义：$\vec{V}_T = \vec{V}_g(P_1) - \vec{V}_g(P_2) = -\frac{R}{f}\int_{p_0}^{p_1}(\vec{k} \times \nabla T)_p d\ln p$，其中 $P_1 < P_0$，令$\bar{T}$代表两个等压面之间的平均温度，则 $\vec{V}_T = -\frac{R}{f}(\nabla\bar{T} \times \vec{k})_p \ln\frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_h(\phi_1 - \phi_0)$　可见热成风正比于上下两层位势高度差的梯度（而这一项正比于温度 $\frac{\partial\phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{RT}{p} \Rightarrow \partial\phi = -RT\partial\ln p$）　分量有：$u_T = u_g(P_1) - u_g(P_0) = -\frac{R}{f}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}\right)_p \ln\frac{p_0}{p_1}$

$u_T = -\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}(\phi_1 - \phi_0)$　　$v_T = v_g(P_1) - v_g(P_0) = \frac{R}{f}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}\right)_p \ln\frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}(\phi_1 - \phi_0)$

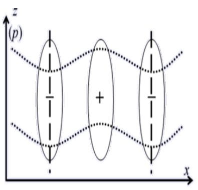
特点　① 热成风与等平均温度线平行，**北半球背热成风而立，低温在左，高温在右**。
② 热成风**风速大小**与平均温度梯度或厚度梯度成正比，**与纬度成反比**，等温线越密集热成风越大。
③ **斜压大气**是地转风随高度改变的**充要条件**，也就是正压大气中不存在热成风。

典型案例 ① 副热带高压：从低层、到中层、直到高层，**都表现为反气旋**，是一个**正压系统**，由动力作用导致。（不完全正确，副热带高压仍然存在一定的热力过程）

② 夏季的青藏高原：**高层是反气旋，低层是气旋**，是一个**斜压系统**，由热力作用导致。

③ 整层大气的平均运动，体现的是上下相同的部分，属于**正压分量**，动力过程结果。

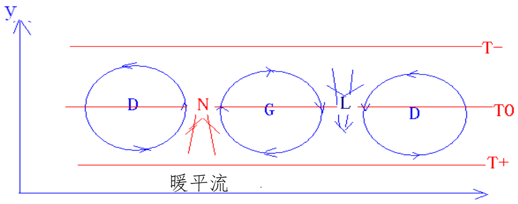
④ 上层与下层大气的差，体现的是上下不同的部分，属于**斜压分量**，热力过程结果。

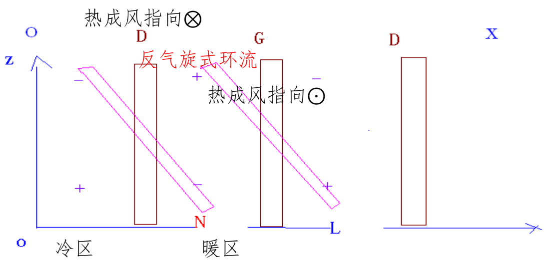


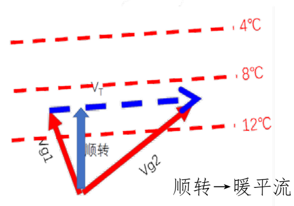
具体分析

整层运动的平均值 $\bar{\vec{V}}=\frac{1}{p_s-p_0}\int_{p_s}^{p_0}\vec{V}dp$ 属于正压分量；而 $\vec{V}-\bar{\vec{V}}$ 称为斜压分量。例如 500hPa 为对流层中层，体现的是大气上下平均状况，是相当正压层（中纬度斜压系统属于相当正压结构：风向不变，风速先增大后减小，整层风速平均约为 500hPa 风速）。

⑤ 天气系统槽脊倾斜：这种倾斜能够使得扰动吸收气流中的有效位能得以增长。







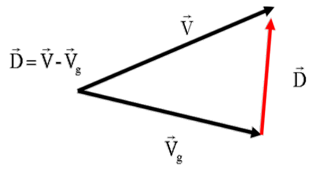
冷暖平流 地转风随高度**逆转**时 ⇒ 气层中有**冷平流**

地转风随高度**顺转**时 ⇒ 气层中有**暖平流**

稳定度分析 ① **上层风逆转**，**下层风顺转，气层不稳定**，因为上层风逆转有冷平流，上层温度降低，而下层风顺转有暖平流，下层温度升高，下暖上冷，暖空气上升，冷空气下沉，所以不稳定。

② **上层风顺转**，**下层风逆转**，**气层稳定**，因为上层风顺转有暖平流，上层温度升高，下层风逆转有冷平流，下层温度降低，下冷上热，所以稳定。

2.6 地转偏差



地转偏差 **实际风与地转风之间的矢量差**称为**地转偏差** $\vec{V}'=\vec{V}-\vec{V}_g$ 或**偏差风**

地转风是地转平衡情况下的大气风场，然而在实际大气中，地转风平衡只是相对而暂时的。

如果不平衡，可能有摩擦力或产生加速度，故分为两种情况讨论。

分类情况 $\frac{d\vec{V}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-f\vec{k}\times\vec{V}+\vec{F}$

① 可能**力不平衡产生加速度** ② 可能**梯度力、偏向力、摩擦力三力平衡**

2.6.1 自由大气中的地转偏差

自由大气 $\vec{V}'=\frac{1}{f}\vec{k}\times\frac{d\vec{V}_h}{dt}$ （不考虑摩擦力，地转偏向力与气压梯度力不平衡产生加速度）

地转偏差和水平加速度方向垂直，在北半球指向水平加速度的左侧。

公式推导

$\frac{d\vec{V}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-f\vec{k}\times\vec{V}$ 需要凑出 $\vec{V}_g=\frac{1}{f\rho}\vec{k}\times\nabla p$ $\vec{V}_{实际风}=-\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{V})$，用 $\vec{k}$ 左乘上式，$\frac{1}{f}\vec{k}\times\frac{d\vec{V}}{dt}=-\frac{1}{f\rho}\vec{k}\times\nabla p-\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{V})$ 可得 $\vec{D}=\vec{V}-\vec{V}_g=\frac{1}{f}\vec{k}\times\frac{d\vec{V}}{dt}$

这说明，如果地转偏差为零，则天气系统不会发生任何改变；地转偏差是天气系统变化的重要原因。

辐合辐散　地转偏差的辐散或辐合实际是水平风的辐散或辐合。地转偏差的存在，使空气微团穿越等压线，引起质量的重新分布，造成风压场的变化，是天气系统演变的一个动力因子。

若实际风由高压指向低压，**气压梯度力做正功**，制造动能；若实际风由低压指向高压，**气压梯度力做负功**，耗散动能。因此，地转偏差对大气动能的制造和转换有着重要作用。

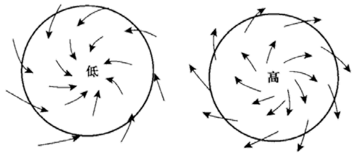
2.6.2 摩擦层中的地转偏差

情况分析　**摩擦力**导致**风速减小**，使**地转偏向力减小**，合力导致**向低压一侧运动**，导致**实际风穿越等压线**。

实际风可分解为平行和垂直于等压线的分量，平行的分量是满足地转关系的。 $\vec{G}_{梯度力} = \vec{A}_{偏向力} + \vec{F}$

公式　$\vec{D} = -\frac{1}{f}\vec{k}\times\vec{F}$　**地转偏差垂直于摩擦力的方向**，并指向**摩擦力方向的右方（风速左侧）**

推导　$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p - f\vec{k}\times\vec{V}_{实际风} + \vec{F}$　　$\vec{V}_{g地转风} = \frac{1}{f\rho}\vec{k}\times\nabla p$　　$\vec{V} = -\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{V})$



摩擦造成的辐合辐散

用$\vec{k}$左乘上式，两边同时除f，$0 = -\frac{1}{f\rho}\vec{k}\times\nabla p_{地转风} - \vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{V}) + \frac{1}{f}\vec{k}\times\vec{F}$

$0 = (\vec{V} - \vec{V}_g)_{地转偏差} + \frac{1}{f}\vec{k}\times\vec{F}$　　$\vec{D} = -\frac{1}{f}\vec{k}\times\vec{F}$