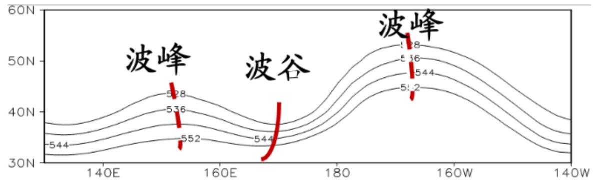
第六章 大气中的基本波动



大气长波

章节引入

天气图上可见：高度场、温度场基本呈波状分布。因此，可用物理学中研究波动现象的方法来讨论大气运动。注意，在高空天气图上直接看到的是气流的流型，并非是波动，但这种西风气流大幅度的弯曲流动的确折射出大气长波的存在。上章我们已经得到：大气运动＝纬向平均运动＋涡旋运动＝大气环流＋天气系统。

波动学 以**直观的天气学**（槽脊结构）和**物理学图像**（水波等）作为基础，在气象学中引入**波动**概念，并用**数学方式**进行理论探讨和完善，形成**大气波动理论**和**大气波动学**。目前波动学是**主流理论**。

波动学优点
① 可以利用成熟的波动学理论对天气系统形成机理、发生发展和移动进行研究。
② 由于槽脊的移动是等位相线的运动，即波的移动，所以槽脊的移速 = 相速 = 波速。
③ 波动学把气旋（低压）、反气旋（高压）系统联系起来，能够判断涡旋系统的发展和演变。

案例分析

① 气旋增强：漩涡动力学角度是涡度增加；能量学角度是K'增加；波动学角度则是槽的加深。

② 系统移动：波动学角度是槽脊东移；涡旋动力学角度是 $\left.\begin{array}{l}\text{气旋前：}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}>0,\text{即 }\zeta\uparrow\\ \text{气旋后：}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}<0,\text{即 }\zeta\downarrow\end{array}\right\}\Rightarrow$ 气旋东移

波动学目的 通过**大气运动方程组**，利用**波动学理论**讨论**天气系统**（大尺度）的形成、发生发展及移动的机理。

存在问题 大气基本方程中除了大尺度的天气波动外，还存在其他波动的干扰。

基本波动 大气中四类基本波动：**大气长波，声波，重力波**（水波就是一种重力波），**惯性波**。因为没有电磁学方程，不包含电磁波/光波（不考虑雷电现象）

波动

各种波动的形成机制、性质及对天气产生的影响有所不同，因此在进行大气波动学分析时，不可能把所有波动类型都考虑进去。最早的天气预报使用的是原始方程，因其包含各种波动，次要波动的噪声会将误差放大，导致几小时变压数百百帕的错误结果。

声波	弹性振动（大气的可压缩性）	快波
惯性波	惯性振荡（旋转性）+辐合辐散	高频波
重力内波	浮力振荡（层结性）+辐合辐散	高频波
重力外波	辐合辐散	快波
Rossby 波	β效应	慢波

滤波 可以把波动分类：$\begin{cases}\textbf{重要}\text{：大气长波}\Rightarrow\text{称为}\textbf{谐音}\text{：需要保留}\\ \textbf{次要}\text{：如声波等}\Rightarrow\text{称为}\textbf{噪音}\text{：需要去掉}\end{cases}\Rightarrow$ **滤波**

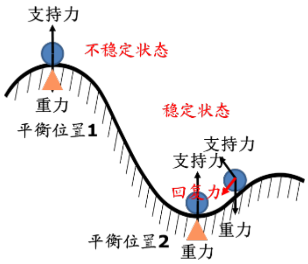
滤波目的 去除次要波动的干扰，讨论主要波动，在数值预报中滤波非常重要。
例如声波是由于大气可压缩性引起的，假设大气是不可压的就可以滤去声波，但对天气波动影响不大。因此，有必要研究包括次要波动在内所有波动的机制和性质，以实现滤波的目的。

误差的增长

如果取时间步长 Δt 为 10 分钟，对于时间尺度为 10^5s 的天气尺度波动来说，误差就较小。而对于像声波等快波来说，误差就很大（随机的），且是累积的，最终导致整体系统的不稳定性，此时就需要滤去快波。然而由于计算机资源限制，Δt 也不能取太小。

然而，考虑到大气系统的混沌性（初值敏感），一旦有误差，其放大的效应会十分显著且迅速。因此，一定时段内的天气预报是合理的，一旦超出一定时段，预报就会因为混沌性而失效。

6.1 波动的基本概念



回复机制与稳定性

6.1.1 波动的定义

波动定义 质点**受力的作用**围绕**某平衡位置**振动，振动**在空间的传播**形成波动。

基本条件 ① **振动**（回复力） ② **能够传播**（质点与质点之间建立联系）

例如单个单摆摆动，不能引起其它单摆摆动；但用一根线把它们连起来，一个摆动可以传播出去。

波动机制 波动的机制包括**振荡机制**和**传播机制**，二者缺一不可。学习每种波动都需要清楚这两种机制。

震荡机制 亦称**回复机制**，在机械学中的观点就是**回复力**。如右上图，稳定位置如果有偏移，就存在回复力。

大气层结中也具有类似的情况 $\begin{cases}\text{稳定：净浮力与位移方向相反，可以产生振荡}\\ \text{不稳定：净浮力与位移方向相同}\end{cases}$

传播机制 质点与质点之间的联系。波动传播的是**振荡的状态**，波动是**能量传播**的一种基本形式。

最大特点 波动的最大特点是**周期性**：**时间上**周期变化、**空间上**周期分布、有规律、重复发生、**可预测**。

6.1.2 波动的数学模型与波参数

6.1.2.1 简谐振动

简谐振动 回复力大小与位移成正比，方向与位移相反。设质量为M，回复力大小为 $-ky$（k为比例系数）。

根据牛顿第二定律：$M\frac{d^2y}{dt^2}=-ky\Rightarrow\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{M}y$ 令 $\frac{k}{M}=\omega^2$，则：$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0}$ **简谐振动方程**

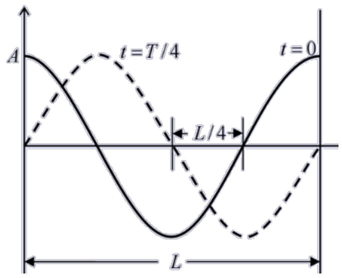
简谐振动方程的解：$y=c_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t=A\cos(\omega t-\alpha)$ 仅仅是时间的函数

振动是**单个质点**的运动，是仅以时间为自变量的运动，多属于常微分方程问题。

简谐波 简谐振动**稳定地传播**所形成的波动称为**简谐波**。一维简谐波解：$\boldsymbol{y=A\cos(kx-\omega t+\alpha)=A\cos\theta}$

波动是以**时间、空间**为变量的，属于偏微分方程问题。

6.1.2.2 波参数



等位相面与波速

振幅A	$A=A$	物体离开平衡位置的最大位移
周期T	$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{L}{C}$	空间固定位置上的点完成一次全振动所需时间
圆频率ω	$\boldsymbol{\omega=\frac{2\pi}{T}}$	2π时间内质点完成全振动的次数
波长L	$L=\frac{2\pi}{k}=CT$	相邻两个同位相点之间的距离
波数k	$\boldsymbol{k=\frac{2\pi}{L}}$	2π距离内包含了多少个波长
位相θ	$\boldsymbol{\theta=kx-\omega t+\alpha}$	波在x轴上各点各时刻的位置，**α为初位相**，**$\theta=const$ 的点构成的面**称**等位相面**
波速	$\boldsymbol{C=\frac{\omega}{k}=\frac{L}{T}}$	等位相线(面)的移速，即槽脊的移动速度。

波速推导

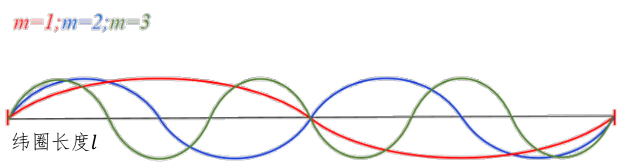
有速度 $C=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=常量}$，且等位相面 $\theta=kx-\omega t=常量\Rightarrow k\frac{dx}{dt}-\omega=0\Rightarrow C=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=常量}=\frac{\omega}{k}=\frac{L}{T}$

简谐波解 $\boldsymbol{S(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{L}x-\frac{2\pi}{T}t\right)=A\cos(kx-\omega t)=A\cos k\,(x-ct)}$ 初位相为零

纬向波数目 $\boldsymbol{m=\frac{l}{L}=\frac{2\pi R}{L}=\frac{2\pi\,a\cos\phi}{L}}$ 整个纬圈长度为 l，纬圈上m个谐波对应的波长为 $L=l/m$。

纬向波数 $\boldsymbol{k_m=\frac{2\pi}{L}}=\frac{2\pi}{l/m}=\frac{2\pi m}{l}=\frac{m}{a\cos\phi}$

纬向波数目与纬向波数是两个不同的东西

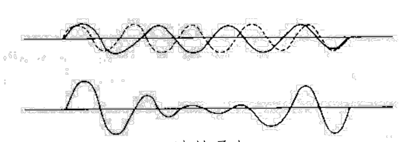


横波与纵波 按振动方向与波动传播方向的关系，可分为横波与纵波两大类：

① 若质点**振动方向与波的传播方向一致**，此种称为**纵波**，如水平声波。

② 若质点**振动方向与波的传播方向垂直**，此种称为**横波**，如重力水面波（上下振动，水平方向传播）

6.1.3 波动的数学表示



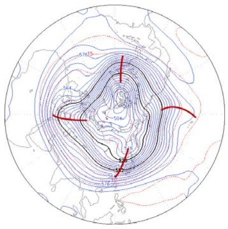
波的叠加

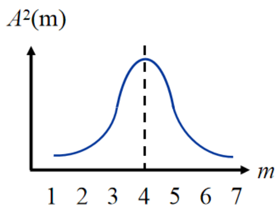
波的叠加 实际大气扰动不是单纯的简谐波，可以看成是各种不同波长、不同振幅的简谐波的**叠加**。各简谐波之间位相会有差异，因而出现振幅相抵消或叠加的现象。

分析方法 数学上任一函数都可以用**傅立叶级数**展开来表达。我们将某物理量的波在纬圈上展开成傅立叶级数：$\boldsymbol{S(x,t)} = \sum_m \boldsymbol{S_m}$（$m$纬向波数目 $= 1,2,3 \ldots$） 其中 $\boldsymbol{S_m} = B_m \cos k_m(x - c_m t) + D_m \sin k_m(x - c_m t)$ $= \boldsymbol{A_m \cos[k_m(x - c_m t) + \alpha_m]}$ 表示第m个谐波。 理论上已知$S(x,t)$，可以得到各B_m, D_m, A_m。

实际扰动虽然是许多简谐波组成，但往往只有几个谐波分量是主要的，其频率、振幅虽然不同，但动力学性质往往一样。因此如果想得到定性的结果，分析一个典型的谐波分量就足够了。

$$S(x,t) = \sum_i S_i \approx S_m$$





实际案例

例如右图，天气图上存在四个大脊大槽。我们只要研究纬向四个波其中一个的性质，就能得到整体的结果。

形式解 如果考虑**线性波动的传播问题**，可以近似把波动考虑为**简谐波形式解**。

线性波动

线性波动指发生在线性系统中的波动。线性系统指对它的输入和它产生的输出之间，满足比例关系和可加性。比如一根绷紧的琴弦，输出与输入成正比；且两个人同时在不同位置拨动这根弦，那么弦最终的振动形态就等于两个形态之和。大气中，当波动幅度很小，对背景场的扰动很微弱时，我们常常可以把它近似为线性波动来处理。

线性算子指满足上述比例性和可加性的算子，满足性质：$L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$。

如果是线性波动，波动方程为 $\boldsymbol{LS(x,t) = 0}$，L为线性算子，则有：

$$L \sum_m S_m = 0 \Rightarrow \sum_m LS_m = 0 \Rightarrow \boldsymbol{LS_m = 0}$$

总和为零，且每个LS_m是独立的，那么自然每一项LS_m都等于零。取这种波动形式解为**简谐波解**：

① **某个简谐波最具有代表性** ② **每个简谐波都满足原方程，都具有相同性质解。**

复数形式 对于 $S = A\cos(kx - \omega t)$，有 $\boldsymbol{S = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]}$。其中 $\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

传播问题 讨论**线性波动**的传播问题：振幅 A 为常量，不随时空变化，没有办法讨论波的强度变化，同样无法讨论频率、波数的时空变化。对于非线性波动：波-波相互作用的讨论需要使用别的方法。