

第一章 大气运动的基本方程组

章节目录

依据基本物理定律（牛二定律、质量守恒等），结合地球大气的特点，建立描写大气运动的基本方程组。

1.0 背景知识

1.0.1 地球特征

公转周期	365.25 天	自转周期	太阳日 24 小时，恒星日 23 小时 56 分 4 秒
自转角速度	$\vec{\Omega} = \frac{2\pi}{86164s} = 7.292 \times 10^{-5} s^{-1}$		
地球半径	平均半径 $a \approx 6.371 \times 10^6 m$	地球质量	$M \approx 5.976 \times 10^{24} kg$

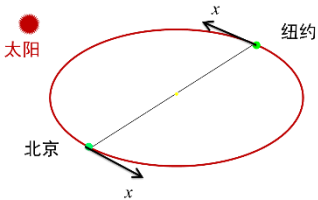
1.0.2 大气特征

总质量	$M_a \approx 5.136 \times 10^{18} kg$	比地球的总质量少六个量级
标准大气压	$p_0 = 1013.25 hPa \approx 1000 hPa$	大气密度值 $\rho_0 \approx 1.29 kg/m^3$

1.0.3 运动的描述

运动的性质 运动本质是位置随时间的改变，任何运动都是相对于确定的参考系的运动。运动本身不受参考系的影响，但其是对运动的描述却随着参考系的不同而不同。

在地球外某一固定点（惯性参考系）观测地球上大气运动，是绝对运动，可以看到大气和地球一起转动；在地球上观测大气运动，是相对运动，观测者和地球一起转动，感觉不到地球自转。如右图，发现北京与纽约风的方向明显不同，但地球上都是西风。



- 大气运动**
- ① 建立坐标系（随地球旋转的非惯性参考系）
 - ② 分析单位质量空气块的受力情况（拉格朗日观点）
 - ③ 建立单位质量空气块的运动方程（牛顿第二定律）
 - ④ 化为局地大气运动方程（观测数据为局地物理量场，转换为欧拉观点）
 - ⑤ 描写大气运动的其他方程：质量守恒、热力学第一定律、理想气体状态方程等。
 - ⑥ 运动矢量方程化为三维标量运动方程（坐标系的选择：球坐标还是直角坐标）
 - ⑦ 求解局地大气运动方程组

- 主要问题**
- ① 参考系的转变：如何将惯性参考系转换为旋转参考系？
 - ② 分析方法的转变：如何将拉格朗日观点转换为欧拉观点？
 - ③ 坐标系的选择：选择球坐标（尺度很大的运动）还是局地直角坐标（运动相对小）？

1.1 空气质点所受的力及运动方程

1.1.1 参考系的转变

引言

牛顿第二定律在惯性坐标系中成立，在非惯性坐标系中不成立，我们需要进行参考系的改变来适应定律。

1.1.1.1 惯性坐标系与旋转坐标系中矢量全导数的关系

微分算子 $\frac{d_a}{dt}(\quad) = \frac{d}{dt}(\quad) + \vec{\Omega} \times (\quad)$ ① 绝对变化项 ② 相对变化项 ③ 牵连变化项

对于任意矢量 \vec{A} , 满足: $\frac{d_a}{dt}(\vec{A}) = \frac{d}{dt}(\vec{A}) + \vec{\Omega} \times (\vec{A})$ 该算子是联系惯性坐标系与旋转坐标系的普遍关系

上述算子只适用于矢量的情形, 而标量的绝对变化与相对变化没有差别。

证明 → 《流体力学 第六章 旋转流体动力学》

对任意矢量 \vec{A} , 可写在不同的坐标系中, 用不同 i, j, k 表达:

绝对坐标系 惯性静止坐标系, 有 $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ 单位坐标矢量为常矢量

旋转坐标系 相对坐标系, 有 $\vec{A} = A'_x \vec{i}' + A'_y \vec{j}' + A'_z \vec{k}'$ 单位坐标矢量可变(x, y 轴会随着地球旋转改变)

求该矢量对时间 t 的导数:

$$\text{绝对: } \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d_a A_x}{dt} \vec{i} + \frac{d_a A_y}{dt} \vec{j} + \frac{d_a A_z}{dt} \vec{k} \quad \frac{d_r \vec{A}}{dt} = \frac{d \vec{A}}{dt} = \frac{d A'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{d A'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{d A'_z}{dt} \vec{k}' \quad (\text{省略下标 } r)$$

$$\frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d_a (A'_x \vec{i}' + A'_y \vec{j}' + A'_z \vec{k}')}{dt} \xrightarrow{\text{全微分展开}} \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d_a A'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{d_a A'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{d_a A'_z}{dt} \vec{k}' + A'_x \frac{d_a \vec{i}'}{dt} + A'_y \frac{d_a \vec{j}'}{dt} + A'_z \frac{d_a \vec{k}'}{dt} \quad \text{坐标的变化}$$

$$\frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d A'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{d A'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{d A'_z}{dt} \vec{k}' \quad A'_x, A'_y, A'_z \text{ 为标量在绝对坐标系和相对坐标系中的时间微商相同}$$

由于 \vec{i}' 是旋转系中的单位矢量, 所以 $\frac{d_a \vec{i}'}{dt}$ 表示 \vec{i}' 的转动速度, 有: (根据方向和大小可得)

$$\frac{d_a \vec{i}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{i}' \quad \frac{d_a \vec{j}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{j}' \quad \frac{d_a \vec{k}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{k}' \quad \text{上式变为: } \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d \vec{A}}{dt} + A'_x \vec{\Omega} \times \vec{i}' + A'_y \vec{\Omega} \times \vec{j}' + A'_z \vec{\Omega} \times \vec{k}'$$

$$\text{故有 } \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d \vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

1.1.1.2 绝对速度与相对速度之间的关系式

模型设置 将微分算子作用于位置矢量: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, 有 $(\frac{d_a}{dt} = \frac{d}{dt} + \vec{\Omega} \times) \vec{r}$

绝对速度 $\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} + x \frac{d \hat{i}}{dt} + y \frac{d \hat{j}}{dt} + z \frac{d \hat{k}}{dt}$ 利用 $\frac{d \hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}$, $\frac{d \hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}$, $\frac{d \hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}$

$$\vec{V}_a = \frac{d \vec{r}}{dt} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{R} \quad \text{绝对速度等于相对速度和牵连速度的矢量和}$$

相对速度 $\vec{V}_3 = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$ 牵连速度 $\vec{\omega} \times \vec{r}$

1.1.1.3 绝对加速度与相对加速度之间的关系

模型设置 将微分算子作用于绝对速度, 可以得到绝对加速度。

绝对加速度 $\vec{a} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d \vec{v}'}{dt} + \frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d \vec{r}}{dt}$ 其中 $\frac{d \vec{v}'}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{k} + \frac{dx}{dt} \frac{d \hat{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d \hat{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d \hat{k}}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$

其中 $\vec{\omega} \times \frac{d \vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r})$ 绝对加速度等于相对加速度、牵连加速度与科氏加速度的矢量和。

$$\text{得到表达式: } \vec{a} = \vec{a}' + \frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

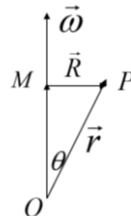
相对加速度 $\vec{a}' = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{k}$ 质点 P 相对 S' 系的加速度

牵连加速度 $\vec{a}_t = \frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ 其中 $\frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$ 由 $\vec{\omega}$ 的大小发生改变所产生的, 如参照系 S' 以恒定角速度转动, 则此项为零; $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ 由于 S' 系以角速度 $\vec{\omega}$ 转动所产生的

科氏加速度 $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ 由于质点P对转动的S'系有一相对速度 \vec{v}' ，从而与 $\vec{\omega}$ 相互影响所产生的。

地球加速度 如果S'系以匀角速转动， $\vec{\omega}$ 是一恒矢量(量值和方向都不变)以OB表示之，故 $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$

则： $\vec{a}_t = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{R}$ 在此情况下，加速度简化为： $\vec{a} = \vec{a}' - \omega^2 \vec{R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$



1.1.2 大气运动方程的建立

1.1.2.1 总体受力情况

牛二定律 $\frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F}_\gamma$ 真实力 又考虑到 $\frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \Omega^2 \vec{R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}$

最终形式 得到旋转坐标系下的相对加速度为： $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F}_\gamma + \Omega^2 \vec{R} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}$

真实力 真实力包括质量力：万有引力和表面力：气压梯度力（表面压力的合力）、分子粘性力

1.1.2.2 万有引力

地心引力 $\vec{g}^* = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \approx -\frac{GM}{a^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$, $r = a + z$ 单位质量块受到的引力， a 为地球平均半径， z 为海拔高度。

方向 指向地心，只与空气微团位置有关。

1.1.2.3 惯性离心力

概念 在作曲线运动的物体，时刻受到一个离开曲率半径向外的作用力，是物体为保持作曲线运动而产生的，即惯性离心力，它是视示力。

公式 $\vec{C} = \Omega^2 \vec{R}$ 其由于位于非惯性坐标系内观测运动并运用牛二解释的结果，是向心力的反号。

地球情况 $\Omega = 1.29 \times 10^{-5} s^{-1}$ 位于地球上观察时，地表上每一静止的物体都受到该力作用。

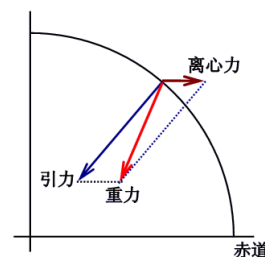
方向 惯性离心力与地轴垂直，在纬圈平面内，指向地球外侧，只与空气微团位置有关。
地球自转角速度是常数，惯性离心力的大小随纬度变化，赤道上最大，极地最小，在极地为0。

1.1.2.4 重力

概念 单位质量大气所受到的地心引力与惯性离心力的合力。

公式 $\vec{g} = \vec{g}^* + \vec{C} = \Omega^2 \vec{R} - \frac{GM}{a^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$

- 特点**
- ① 重力不指向地心，但重力垂直于地面，垂直于水平面。
 - ② 对正球体，重力可分解为指向球心和沿着经圈的切线方向指向赤道的两个分量，在后者的作用下地球变为一个椭球体，极半径短，赤道半径长（是一个等势面/水平面/等几何高度面）极半径与赤道半径相差20km左右。
 - ③ 重力随着纬度的增加而增加，在赤道最小，极地最大。重力随着高度 z 的增加而减小。
 - ④ 实际中重力和地心引力的夹角很小，一般在地球的旋转坐标系中就认为重力指向球心。



1.1.2.5 气压梯度力

气压 空气介质对空气微团的作用力，当气压梯度存在时，作用于单位质量空气上的力，称为气压梯度力。

定义 作用于单位质量气块上的净压力，由于气压分布不均匀而产生 $\vec{P}_G = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$

梯度力的推导

取质量 $m = \rho \delta x \delta y \delta z$ 空气块，对立两面泰勒展开 $F_{Ax} = -\left(p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z$ $F_{Bx} = +\left(p_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z$

则两面合力为： $F_x = F_{Ax} + F_{Bx} = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$ 因此，单位质量的空气微团， x 方向的气压梯度力为：

$P_x: \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x \delta y \delta z}{\rho \delta x \delta y \delta z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ 同理， $P_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ $P_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ 则得到 $\vec{P}_G = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$

风的形成 水平气压梯度力使空气从高压区流向低压区，产生了风。气压梯度力是大气水平运动的原动力。

1.1.2.6 科氏力

概念 当气块相对地球运动时使气块运动方向发生改变的一种惯性力
由于坐标系的旋转导致物体没有受力却出现加速度违反牛顿运动定律而引入的视示力

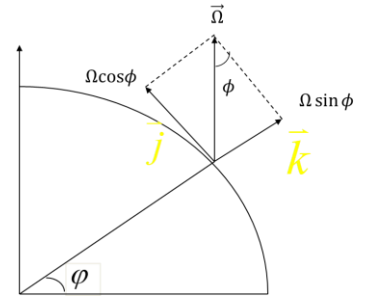
公式
$$\vec{A} = -2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \Omega \cos \phi & \Omega \sin \phi \\ u & v & w \end{vmatrix} = (2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi)\vec{i} - 2\Omega u \sin \phi \vec{j} + 2\Omega u \cos \phi \vec{k}$$

分量 若令地转参数(科里奥利参数) $f = 2\Omega \sin \phi$, $\tilde{f} = 2\Omega \cos \phi$

$$A_x = \frac{du}{dt} = 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi = f v - \tilde{f} w$$

则各个方向有: $A_y = \frac{dv}{dt} = -2\Omega u \sin \phi = -f u$

$$A_z = \frac{dw}{dt} = 2\Omega u \cos \phi = \tilde{f} u$$



- 特点**
- ① 地转偏向力 \vec{A} 与 $\vec{\Omega}$ 相垂直，在纬圈平面内。
 - ② 地转偏向力 \vec{A} 与风速 \vec{V} 垂直，只改变气块运动方向，不改变速度大小。
 - ③ 对水平运动，在北半球使得运动右偏；在南半球使得运动左偏。
 - ④ 地转偏向力 \vec{A} 与相对速度 \vec{V} 成比例， $\vec{V} = 0$ 时 \vec{A} 立即消失；水平地转偏向力与纬度的正弦成比例
 - ⑤ 科氏力包含水平与垂直科氏力，在赤道上空 $\phi = 0^\circ$ ：地转偏向力仍然存在，只有不考虑含w的项才为零；北极点上空 $\phi = 90^\circ$ ：仅存在水平地转偏向力。

1.1.2.7 摩擦力

来源 从分子运动论观点来看，摩擦力是不同速度两层空气的分子动量交换的结果。

公式 依广义牛顿粘性假设，有 $\vec{F}_r = \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}$

- 性质**
- ① 以近地面边界层最显著，随高度增加而迅速减弱，一般到1~2km以上分子粘性力作用甚小，可以忽略，此高度以上气层称为自由大气。实质上边界层最重要的耗散力是湍流。
 - ② 摩擦力方向与风向相反，使风速减小，导致地转偏向力也相应减弱，陆地摩擦力总是大于海洋。

最终方程
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{g} + \vec{F}_r$$
 物体绝对加速度表达式

补充内容：热寂与非线性动力学

在宇宙学中，热寂描述了系统熵增导致的终极无序，而非线性动力学表明，大气作为典型耗散系统，在远离平衡态时可通过能量交换形成有序结构，如气旋与行星波，体现了局部熵减与整体熵增的统一。

1.1.3 分析方法的转变

分析方法 大气作为流体，满足研究流体运动的两种方法：拉格朗日方法与欧拉方法

1.1.3.1 全导数与局地导数

关系
$$\frac{\partial(\quad)}{\partial t} = \frac{d(\quad)}{dt} - \vec{V} \cdot \nabla_h(\quad) - w \frac{\partial(\quad)}{\partial z}$$
 其中 $-\vec{V} \cdot \nabla_h(\quad)$ 称为平流变化， $-w \frac{\partial(\quad)}{\partial z}$ 称为对流变化

其中 $\vec{V}_h \equiv u\vec{i} + v\vec{j}$, $\nabla_h \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$ 它们是由于物理量分布不均和运动引起的。

推导与证明

→《天气学原理 第一章》

以温度场 $T = T(x, y, z, t)$ 为例，有空气微团轨迹与速度分量：

假设初始情况： (x_0, y_0, z_0, t) ，经过 δt 气块到达 $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$ ，且温度变化 δT

根据泰勒展开： $\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta z + \text{高阶项}$ 除以 δt ，并取 $\delta t \rightarrow 0$ ，有：

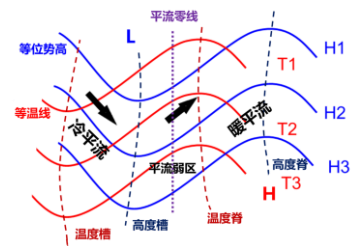
$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\delta x}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\delta y}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\frac{\delta z}{dt} \text{ 则得到 } \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T$$

1.1.3.2 平流变化的物理意义

假设条件 为讨论平流变化的意义，设： $\frac{dT}{dt} = 0, w = 0$ ，得到温度平流：

温度平流 $\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{V}_h \cdot \nabla_h T$ 其依赖于**风速、物理要素梯度和两者的夹角**。

物理含义 即使空气微团在运动过程中**自身温度**保持不变，**平流变化**也会引起**某一固定空间点**上温度的变化。



冷暖平流和平流零线示意图

1.1.3.3 相对运动方程的矢量形式

方程转化 $\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \vec{F}_\gamma - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}$ 可以转化为 $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \vec{F}_\gamma - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}$

物理情况 目前方程只考虑了速度变化，气压梯度力是**驱动**大气运动的主要因子，而气压的变化与**热力与动力过程**相关联，因此描写大气过程必须考虑**热力过程**。

数学情况 **运动方程**：1 个矢量或 3 个分量方程。

未知量：**速度、气压、密度**，必须寻找描写气压、密度变化的方程，使得方程闭合。

1.2 质量守恒定律

守恒定律 物质体积元在运动中尽管体积和形状都会发生变化，但质量保持不变。
连续方程描写了**速度场与密度场**之间的相互制约关系。

1.2.1 拉格朗日型

方程 $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$

速度散度 $\nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}$ ($\rho = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \ln \rho = \ln \frac{1}{\alpha}$) 单位时间内**体积的变化率**

$\nabla \cdot \vec{V} > 0$ **体积增大 辐散，其密度要减小**； $\nabla \cdot \vec{V} < 0$ 体积缩小 辐合，其密度要增大

水平散度 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ 流体在单位时间内**水平面积的相对膨胀率** 只考虑前两项

不可压流体 当流体不可压，**密度为常数**时： $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$ 不可压缩流体的速度散度为零。

1.2.2 欧拉型

方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$

质量散度 $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 是单位时间单位空间体积内**流体质量的流出量**。

$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) > 0$ **质量净流出，密度要减小** $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) < 0$ 质量净流入，密度要增大

质量散度为 0 时，密度变化定常，是**准不可压流体**；速度散度为 0 时，密度为常数，是不可压流体。

大气和海洋辐合辐散运动结果的区别？

① 大气低层辐合，质量堆积后上升至高层辐散，整层净辐合辐散很小，所以局地密度变化很小；若上升过程中绝热膨胀，密度变化会比较大，即热力过程中密度变化大。

② 海洋则是不可压流体，辐合海面会上升。