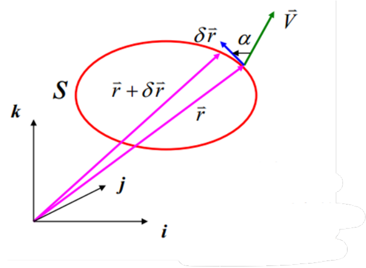
第三章 涡旋动力学

章节引入

中纬度大气运动是准涡旋的，为了描述大气中的涡旋运动及其变化规律，要对大气基本方程组做一些处理，并引入新的物理量：环流和涡度。

3.1 环流与环流定理



3.1.1 环流

3.1.1.1 环流的定义

环流 任取定一有向物质环线 $\vec{S}$，定义：$\boldsymbol{C=\oint \vec{V}\cdot\delta\vec{r}}$，即沿着环线速度的积分。

意义 流体沿闭合曲线的流动趋势

展开式 $C=\oint_s\vec{V}\cdot\delta\vec{r}=\oint_s|\vec{V}|\cos\alpha\,\delta\vec{r}$ 标量式：$C=\oint_s\vec{V}\cdot\delta\vec{r}=\oint_s udx+vdy+wdz$

观点情况 ① 任取定：任意选取一物质环线，此环线上的质点是确定的，环线的形状位置是变化的。

② 物质环线是闭合的，环流表示流体随闭合环线运动的趋势，描述了涡旋的强度，是积分量。

注意 环线方向有正负之分，沿环线走，积分区域在左侧，则为正方向。

单联通区域：**以逆时针方向为正**；环流大于 0，称为气旋式环流；环流小于 0，称为反气旋式环流。

3.1.1.2 环流形式

纬圈环流 *zonal circulation*，$\boldsymbol{L}$ **取为纬圈**，正向为自西向东，对环流有贡献的只有纬向速度 u，则原式变为：

$\boldsymbol{C_1=\oint_s u\delta x}$ 称为纬向环流或者西风环流。

经圈环流 *meridional circulation*，**$\boldsymbol{L}$ 取为由经线和垂线构成的闭合回路**，规定其正方向在低层自北向南，高层自南向北，则对环流有贡献的是v和w，则有 $\boldsymbol{C_2=\oint_s v\delta y+w\delta z}$，称为经圈环流。例如 Hadlay 环流

气旋/反气旋 水平面环流，**$\boldsymbol{L}$ 为水平面上闭合流动的流线**，则对环流有贡献的水平风场$V_h(u,v)$，原式化为：

$\boldsymbol{C_3=\oint_s u\delta x+v\delta y}$ 在北半球，气旋$C_3>0$，则C_3称为气旋式环流，反之，$C_3<0$为反气旋式环流。

3.1.1.3 环流的应用

主要作用 由环流概念引出环流定理，用以考察环流随时间的变化，以及引起环流变化的原因，可以用来定性解释海陆风，山谷风的形成。

3.1.2 绝对环流定理

3.1.2.1 定理的推导与形式

开尔文定理 $\boldsymbol{\frac{dC_a}{dt}=\frac{d}{dt}\oint_l\vec{V}\cdot\delta\vec{r}=\oint_l\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}\cdot\delta\vec{r}}$ **环流的加速度=加速度的环流**

环流变化 $\boldsymbol{\frac{dC_a}{dt}=\oint_l\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}\cdot\delta\vec{r}=-\oint\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\vec{r}+\oint\vec{g}^*\cdot\delta\vec{r}+\oint\vec{F}_r\cdot\delta\vec{r}}$ $\boxed{\boldsymbol{\frac{dC_a}{dt}=-\iint_A\nabla\alpha\times\nabla p\,\vec{n}dA+\oint\vec{F}_r\cdot\delta\vec{r}}}$

定理推导

有绝对环流：$C_a\equiv\oint\vec{V}\cdot\delta\vec{r}$，则 $\frac{dC_a}{dt}=\frac{d}{dt}\oint\vec{V}_a\cdot\delta\vec{r}=\oint\frac{d\vec{V}_a}{dt}\cdot\delta\vec{r}+\oint\vec{V}_a\cdot\frac{d(\delta\vec{r})}{dt}$，其中 $\frac{d(\delta\vec{r})}{dt}=\delta\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\delta\vec{V}_a\Rightarrow\oint\vec{V}_a\cdot\frac{d(\delta\vec{r})}{dt}=\oint\vec{V}_a\cdot\delta\vec{V}_a=\oint\delta\frac{1}{2}\vec{V}_a^2=0$。 因此 $\frac{dC_a}{dt}=\frac{d}{dt}\oint\vec{V}_a\cdot\delta\vec{r}=\oint_l\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}\cdot\delta\vec{r}$

3.1.2.2 摩擦力

摩擦力 $\vec{F}_r = -\kappa\vec{V}$ 其中κ为大于零的摩擦系数，认为摩擦力正比于速度，且与其相反。

即**摩擦力的作用总是使得环流减弱**：$\frac{dC_a}{dt} = -\oint \kappa\vec{V}\cdot\delta\vec{r} = -\kappa C_a$。

3.1.2.3 万有引力

万有引力 $\frac{dC_a}{dt} = \oint \vec{g}^* \cdot \delta\vec{r} = -\oint \nabla\Phi_a \cdot \delta\vec{r} = -\oint\left(\frac{\partial\Phi_a}{\partial x}\cdot\delta x + \frac{\partial\Phi_a}{\partial y}\cdot\delta y + \frac{\partial\Phi_a}{\partial z}\cdot\delta z\right) = -\oint\delta\Phi_a = 0$

万有引力对环流变化没有影响。

3.1.2.4 气压梯度力：力管项

力管项 $\frac{d_aC_a}{dt} = -\iint_A \nabla\alpha\times\nabla p\cdot\vec{n}dA$ 表示积分环线s包围的力管数目。即**皮耶克尼斯定理**，反映了**压力-密度项**（斜压性）引起环流的变化：取决于等密度面或者等比容面与等压面是否**斜交**。

力管项大小 由单位面积上力管数决定，$|-\nabla\alpha\times\nabla p| = |\nabla\alpha|\cdot|\nabla p|\cdot\sin\gamma$，$\gamma$ 为等压面与等比容面的交角。正压大气中力管项为零；斜压大气中$|\nabla\alpha|\cdot|\nabla p|$越大，$\sin\gamma$约接近 1 (交角为 90 度)，则斜压性越强。

力管项方向 **即 $-\nabla p$到$-\nabla\alpha$的旋转方向**$(-\nabla\alpha\times\nabla p = (-\nabla p)\times(-\nabla\alpha))$，若为逆时针，则引起的环流变化为正。

力管项的推导

$$\frac{d_aC_a}{dt} = -\oint\alpha\nabla_3 p\cdot\delta\vec{r} = -\iint_A \nabla_3\times(\alpha\nabla_3 p)\cdot\vec{n}dA = -\iint_A \nabla_3\alpha\times\nabla_3 p\cdot\vec{n}dA - \iint_A \alpha\nabla_3\times\nabla_3 p\cdot\vec{n}dA$$

$$= -\iint_A \nabla_3\alpha\times\nabla_3 p\cdot\vec{n}dA = -\oint\alpha dp$$

其中A为闭合曲线S包围的面积，$\vec{n}$为A上某点外法线方向。

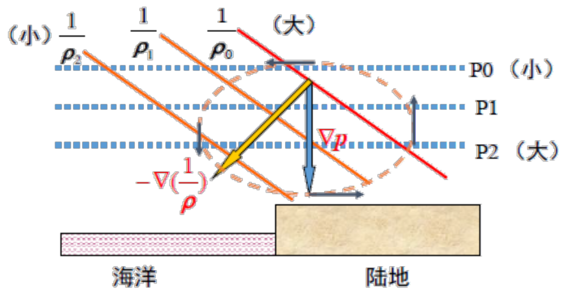
其中：$\nabla_3\times\nabla_3 p = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) = 0$，$\nabla_3 p\cdot\delta\vec{r} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(\delta x\vec{i}+\delta y\vec{j}+\delta z\vec{k})$

热力环流

① 等压线基本与地表面平行

② 白日受太阳辐射，陆地升温更快，引起等密度线（红色直线）斜交，温度高，体积膨胀大，由此同一层次上，陆地密度更小。压力梯度向下，比容负值由大向小。涡度值垂直纸面向外。

③ $\frac{d_aC_a}{dt} > 0$，环流变化为正。



海陆风的形成

白天，低层由海洋吹向陆地；晚上，低层由陆地吹向海洋。根据静力平衡方程，等压面随高度增加向暖区倾斜；同一等压面上高温处比容大，低温比容小，等比容面随高度增加向冷区倾斜。

白天，陆地升温快，陆地温度高于海洋。如图所示$-\nabla P$转向$-\nabla\alpha$为逆时针，环流为正，形成气旋式环流。所以热空气上升，冷空气下沉，低层风由海洋吹向陆地，高层风由陆地吹向海洋。

注意

① 力管项存在的充要条件是大气的斜压性，故**斜压性是产生环流加速度的动力因素**。

② 斜压项的作用使得热空气上升、冷空气下沉。如果大气开始是静止的，则这种环流伴有的空气旋转会使得等比容面跟着旋转，最后趋于向等压面平行。即**大气斜压性自身存在使斜压性减弱**。

③ 这种环流在**大气斜压状态不变**的情况下不会无限增长。因为**摩擦作用**总是和力管的动力作用相反，并且随着环流的加大而作用加强，最后总会与力管的作用相互抵消而形成一个稳定的环流。

3.1.3 相对环流定理

定理描述 $\boldsymbol{C_a = C + C_e}$ 绝对环流等于相对环流与牵连环流之和

牵连环流 $\boldsymbol{C_e} \equiv \oint(\vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot d\vec{r} = \iint_A \nabla_3\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot\vec{n}dA$ 其中 $\nabla_3\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = \nabla_3\times(\vec{\Omega}\times\vec{R}) = \nabla_3\times\vec{V}_e = \boldsymbol{2\vec{\Omega}}$

具体推导

为方便推导，建立以地轴为 Z 轴的坐标系：

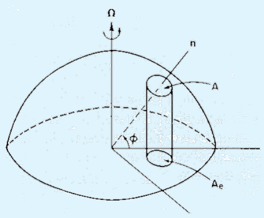
$$\nabla\times(\vec{\Omega}\times\vec{R}) = \nabla\times\left[\Omega\vec{k}\times(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})\right] = \Omega\nabla\times(-y\vec{\imath}+x\vec{\jmath}) = 2\Omega\vec{k} = 2\vec{\Omega}$$

相对定理 $\boldsymbol{\frac{dC_a}{dt} = -\iint_A \nabla\alpha\times\nabla p\,\vec{n}dA - 2\Omega\frac{dA_e}{dt} + \oint\vec{F}_r\cdot\delta\vec{r}}$ **力管项+惯性项+摩擦项**

具体推导

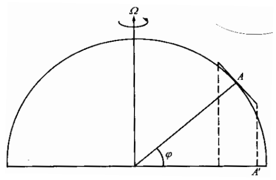
$$C_e = \iint_A \nabla_3\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot\vec{n}dA = \iint_A 2\vec{\Omega}\cdot\vec{n}dA = \iint_A 2\Omega\sin\phi\,dA$$

$= \iint_A 2\Omega dA_e = 2\Omega A_e$ 其中 ϕ 是$\vec{n}$与赤道平面的交角；A_e为环线在赤道平面上的投影面积。又有 $C = C_a - C_e = C_a - 2\Omega A_e$，故将$C_a$表达式代入，即得相对环流定理。



物理意义 若为水平环流，由地球旋转所引起的环流变化：$\boldsymbol{\frac{dC}{dt} = -2\Omega\frac{dA_e}{dt} = -2\Omega\frac{d(A\sin\varphi)}{dt}}$。

（$\vec{n}$与赤道平面的夹角为纬度）**环线包围的面积变化**与辐合辐散有关；**纬度改变**和南北运动有关。展开有：$C_2 - C_1 = -2\Omega(A_2\sin\varphi_2 - A_1\sin\varphi_1)$



应用案例

假设中心在赤道上半径为 100 千米的圆形区域内的空气，起始时相对于地球是静止的，如果这个圆形气团沿着一等压面不变半径移向北极，则到北极时将以何速度作何运动？

围绕周线的环流将是：$C = -2\Omega\pi r^2(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)$ 因而在半径$r = 100$千米处的平均切线速度为：

$V = \frac{C}{2\pi r} = -\Omega r \approx -7m/s$ 表明到达北极时，气团将以 7m/s 的速度做顺时针运动。

总结 导致环流强弱变化的物理因子：

① **摩擦力总是使得环流减弱** ② **大气的斜压性** ③ **水平辐合辐散** ④ **气团的南北运动**

3.2 涡度与涡度方程

3.2.1 涡度

涡度定义 $\boldsymbol{\vec{\zeta} = \nabla\times\vec{V}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = \xi\vec{\imath}+\eta\vec{\jmath}+\zeta\vec{k}$

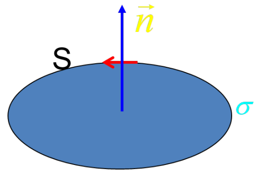
注意 ① 刚体的运动形式有平动和转动；流体的运动形式有平动，转动和形变，涡度表示的是流体涡旋运动的强度；散度表示形变运动的强度。

② 涡度是一个矢量。

③ 可以证明：$\boldsymbol{\vec{\zeta} = 2\vec{\omega}}$，涡度 = 2 倍角速度。牵连涡度为：$\nabla\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = \nabla\times(\vec{\Omega}\times\vec{R}) = \nabla\times V_e = 2\vec{\Omega}$

对于地球旋转所导致的牵连涡度，为地球旋转角速度的两倍。

3.2.2 环流和涡度的关系



关系式 $C=\oint\vec{V}\cdot\delta\vec{r}=\iint_A\nabla\times\vec{V}\cdot\delta\vec{A}=\iint_\sigma\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{V}\delta\sigma$ （stokes 定理）

沿任意闭合环线上的**环流**，等于环线所包围面积上**涡度法向分量的积分**。

对该式取面积趋于零的极限：$\lim\limits_{\delta\sigma\to 0}\frac{\delta C}{\delta\sigma}=(\nabla\times\vec{V})_{\vec{n}}=\vec{\zeta}$

所以，涡度在方向$\vec{n}$**的分量**就等于**单位面积**上的环流，可认为涡度是对流体转动的微观度量。

涡度：流体旋转程度的**微观**表达　　**环流：**流体旋转程度的**宏观**表达

环流与涡度 ① 环流是拉氏观点：任意选取一物质环线，此环线上的质点是确定的，环线的形状位置是变化；物质环线闭合，环流表示流体随闭合环线运动的趋势；环流是积分量，是标量。

② 涡度是欧氏观点：是微分量，是矢量。

3.2.3 大尺度大气涡旋运动

涡度简化 大尺度大气运动是**准水平运动**，所以涡度主要是在垂直方向上，即：$\vec{\zeta}\approx\zeta\vec{k},\ \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$

绝对涡度 **绝对涡度 = 相对涡度 + 牵连涡度(地转涡度)** $\zeta_a=\zeta+f$　$f=2\Omega\sin\varphi$（行星涡度的垂直分量）

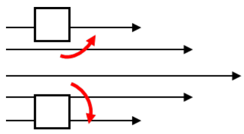
推导

$\zeta_a=(\nabla\times\vec{V}_a)\cdot\vec{k}=(\nabla\times\vec{V})\cdot\vec{k}+2\vec{\Omega}\cdot\vec{k}=\zeta+2\vec{\Omega}\cdot\vec{k}$　　涡度的垂直分量：$(\nabla\times\vec{V})\cdot\vec{k}=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\zeta$

行星涡度的垂直分量：$2\vec{\Omega}\cdot\vec{k}=2\Omega\sin\varphi\equiv f$　最终得到 $\Rightarrow$ $\zeta_a=\zeta+f$

天气学意义 表征涡旋运动强度的物理量，如涡度代表天气系统的强度。

注意：不论南北半球，气旋性环流涡度为正，反气旋性环流涡度为负。



切变涡度示意图

自然坐标系 $\zeta=V\frac{\partial\beta}{\partial s}-\frac{\partial V}{\partial n}=\underbrace{\frac{V}{R_s}}_{\text{曲率涡度}}\underbrace{-\frac{\partial V}{\partial n}}_{\text{切变涡度}}=VK_s-\frac{\partial V}{\partial n}$

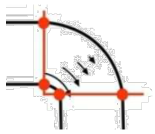
曲率涡度 表示由于**流线(或等高线)弯曲造成的涡度**，风速愈大，曲率愈大，涡度就愈大。

气旋性弯曲时，曲率涡度为正；反气旋性弯曲时，曲率涡度为负；等高线平直，曲率涡度为零。

切变涡度 速度在法线方向分布不均匀也就是**等高线沿着法线方向分布不均匀**。**急流附近切变涡度较为明显**。

急流轴的两侧：北侧具有正的切变涡度 $-\frac{\partial V}{\partial n}>0$，南侧具有负的切变涡度 $-\frac{\partial V}{\partial n}<0$，导致高空辐散

注意 弯曲流场的涡度可能等于零。 只要流体微团的环流保持不变。



$\oint_L\vec{V}\cdot d\vec{l}=0$　　　$\zeta=\frac{V}{R_s}--\frac{\partial V}{\partial n}=-\frac{a}{R^2}+\frac{a}{R^2}=0$

3.2.4 涡度与散度

3.2.4.1 速度势函数 χ

定义 据矢量分析知识，任意一函数的梯度，取旋度恒等于零 $\nabla\times\nabla\chi\equiv 0$

对于**无旋**流动，必定存在一个函数$\chi(x,y,z,t)$满足如 $\vec{V}=-\nabla\chi$　无旋流动的**速度矢**总可以用**函数χ的梯度**来表示，把函数$\chi(x,y,z,t)$ 叫做**速度的(位)势函数**。$u=-\frac{\partial\chi}{\partial x}$,$v=-\frac{\partial\chi}{\partial y}$,$w=-\frac{\partial\chi}{\partial z}$

散度 假如流体的散度为：$D=\nabla\cdot\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$　又有$\vec{V}=-\nabla\varphi$

根据势函数的定义有：$D=-\nabla^2\chi$ **(泊松方程)**　　其中$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为三维拉普拉斯算子

如果$\nabla^2\chi=0$，则称其为**拉普拉斯方程**

3.2.4.2 速度流函数 ψ

定义 **考虑二维无辐散流动**，即满足 $\begin{cases} w=0 \\ u=u(x,y,t), \quad v=v(x,y,t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \boldsymbol{\delta\psi=v\delta x-u\delta y}$

流速与该函数满足：$\boldsymbol{u=-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}}$，$\boldsymbol{v=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}$ 矢量形式：$\boldsymbol{\vec{V}=-\nabla\psi\times\vec{k}}$

涡度 由**涡度**的定义$\zeta=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$，可以得到用流函数来表示的涡度表达式：$\boldsymbol{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nabla^2\psi=\zeta}$

可见，对流函数取**拉普拉斯运算**即可得到流体的涡度。

3.2.5 铅直涡度方程

小节概述 由涡度概念引出涡度方程，用以考察涡度随时间的变化，以及引起涡度变化的原因。

方程推导思路

我们想要知道涡度变化的原因，而涡度本身 $\zeta=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}$，我们想得到 $\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}$。同时，运动方程是已知的，故对其两边做 $\dfrac{\partial\vec{V}_h}{\partial t}$，再作 $\nabla_h\times$，可得最终的方程。

涡度方程 $\boldsymbol{\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}=-\vec{V}\cdot\nabla\zeta-(\zeta+f)\nabla\cdot\vec{V}-\dfrac{\partial f}{\partial y}v+\left(\xi\dfrac{\partial w}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)+\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}-\dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\right)+\nabla\times\vec{F}_\gamma|_z}$

相对涡度的平流变化+涡度垂直输送+散度项+β效应项 +扭转项+力管项+粘性耗散项

涡度局地变化，$\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}>0$ 表示气旋性涡度增加，$\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}<0$ 表示反气旋性涡度增加。

相对平流项 **相对涡度的平流变化+涡度垂直输送** $\boldsymbol{-\vec{V}\cdot\nabla\zeta=-u\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}-v\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}-w\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}}$

相对涡度水平分布不均匀和由于大气的水平运动所引起的涡度局地变化和相对涡度垂直分布不均匀和由于大气的垂直运动所引起的涡度局地变化。

散度项 $-(\zeta+f)\nabla\cdot\vec{V}$ 对于中纬度地区大尺度运动：$\vec{\zeta}=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\propto\dfrac{V}{L}\approx10^{-5}s^{-1}\ll f\approx10^{-4}s^{-1}$，所以

$-(\zeta+f)\nabla\cdot\vec{V}\approx-f\nabla_h\cdot\vec{V}$ 因此**辐合导致涡度增加**。

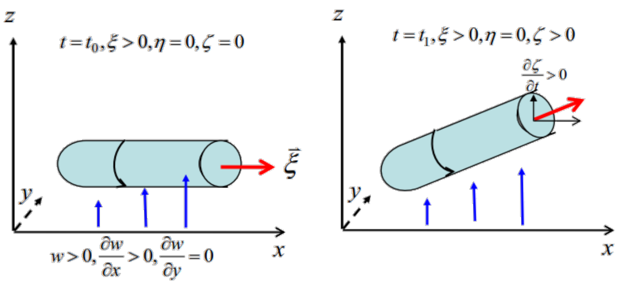
β效应项 $\boldsymbol{-\dfrac{\partial f}{\partial y}v=-\beta v}$ **科氏参数f 随纬度变化 + 南北运动：向北运动，涡度减小**

扭转项 $\boldsymbol{\xi\dfrac{\partial w}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial w}{\partial y}=(\vec{\zeta}\cdot\nabla)\vec{V}|_z}$ 表示垂直运动在水平方向分布不均匀，而使水平涡度ξ、η向垂直涡度ζ转变，一般很小，可以忽略。 其中 $\xi=\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i}$，$\eta=\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j}$

力管项 $\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}-\dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}=-\nabla\alpha\times\nabla p|_z=-\vec{k}\cdot\nabla\alpha\times\nabla p$ 力管项：单位面积上的力管数

大气的**斜压性**的作用，等压面和等容面相交

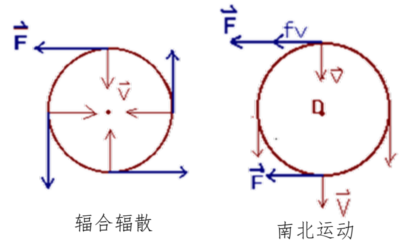
粘性耗散项 $\boldsymbol{\nabla\times\vec{F}_\gamma|_z}$ Rayleigh 摩擦力:$\vec{F}_\gamma=-\kappa\vec{V}$ 该项**总是使得涡度减小**



水平涡度和垂直涡度的转换

3.2.6 大尺度运动的涡度方程

涡度方程的物理图景



简化方程 $\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}=-f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\beta v\Rightarrow\boxed{\frac{d_h\zeta}{dt}=-f\nabla_h\cdot\vec{V}-\beta v}$

相对涡度的变化由**水平辐合辐散**和**β效应**引起。

$\frac{d_h(\zeta+f)}{dt}=-f\nabla_h\cdot\vec{V}$ （$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}$ 由此可由上式推得）

绝对涡度的变化由**水平辐合辐散**决定。

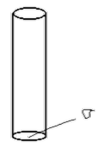
辐合辐散 $\begin{cases}\text{辐散：}\ \nabla_h\cdot\vec{V}>0,\ \text{则}\ \zeta\downarrow\Rightarrow\text{反气旋加强，气旋减弱}\\\text{辐合：}\ \nabla_h\cdot\vec{V}<0,\ \text{则}\ \zeta\uparrow\Rightarrow\text{气旋加强，反气旋减弱}\end{cases}$ 辐合辐散变化 $\Rightarrow\zeta$变化

物理解释：若有辐合作用，即V有一分量指向圆心 $\Rightarrow$ 科氏力F如图示方向 $\Rightarrow$ 产生**气旋性力矩** $\Rightarrow$ 使气旋性转动加强；反之，辐散作用 $\Rightarrow$ 产生反气旋力矩气旋性转动减弱。

南北移动 $\begin{cases}\text{向北}\ v>0\Rightarrow f\uparrow\text{，则}\zeta\downarrow\\\text{向南}\ v<0\Rightarrow f\downarrow\text{，则}\zeta\uparrow\end{cases}$ 系统南北运动，f变化 $\Rightarrow\zeta$变化

物理解释：假设气旋系统整体作向南的运动，因为**北边的科氏力>南边的科氏力**，所以**气旋性的力矩>反气旋性力矩** $\Rightarrow$ 气旋性转动加强。反之，系统整体作向北的运动 $\Rightarrow$ 反气旋性转动加强。

零级简化 $\frac{d(f+\zeta)}{dt}=-(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ 绝对涡度变化由水平散度项决定



$\Rightarrow\frac{d\zeta_a}{dt}+\zeta_a\nabla_h\cdot\vec{V}=0$ 与连续方程：$\frac{d\rho}{dt}=-\rho\nabla\cdot\vec{V}$ 形式一致，体现了**绝对角动量守恒**

绝对角动量守恒

水平散度＝水平截面积的相对变化率，即：$\nabla_h\cdot\vec{V}=\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}$ $\frac{d\zeta_a}{dt}+\zeta_a\nabla_h\cdot\vec{V}=0\Rightarrow$

$\frac{d\zeta_a}{dt}+\zeta_a\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}=0$ $\Rightarrow\frac{d}{dt}(\sigma\zeta_a)=0$ 因为刚体的角动量＝$I\omega$，I是转动惯量，正比于r^2，

又因为$\sigma\propto r^2$，$\zeta_a\approx 2\omega_a$，所以绝对角动量守恒。

例如 $(\zeta+f)\sigma=Const$ 气柱或者系统在运动过程中相对涡度变化取决于二个因素：f,σ

无辐散层 应用在无辐散层（一般在 500hPa 左右）即水平散度为零，则**绝对涡度守恒：**$\frac{d(\zeta+f)}{dt}=0$

故 $\frac{d\zeta}{dt}=-\frac{df}{dy}v=-\beta v$ 此时引起涡旋变化的是**β效应项**

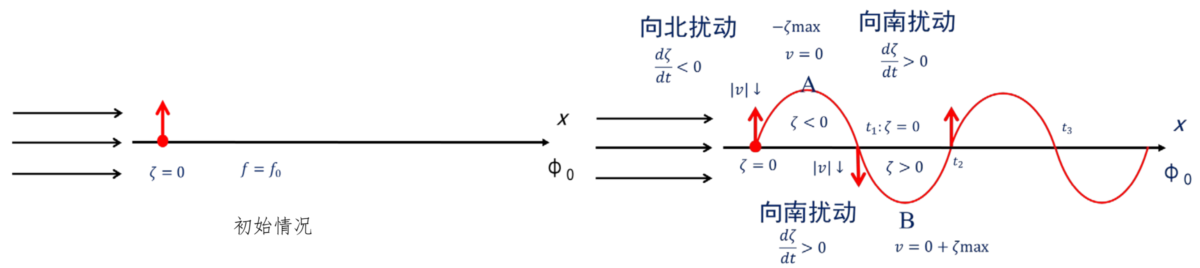
β效应 由于科氏参数随纬度变化（北边f大），当气块作南北运动时，牵连涡度f发生变化；为了保持绝对涡度守恒，这时相对涡度ζ会发生相应的变化（系统发生变化），这种效应称为β效应。

具体应用 解释均匀西风气流受扰动后呈波状轨迹的现象。

波状轨迹的解释

假设基本气流为均匀西风。初始时刻，质点未受到扰动，$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}=0$，$f=f_0=2\Omega\sin\phi_0\Rightarrow\zeta+f=f_0$。

现在，质点受到向北的扰动，由于β效应，$\frac{d\zeta}{dt}<0$，产生反气旋式运动，到一定时刻，必然要产生向南的运动（$v<0$），由于β效应，相对涡度$\zeta\uparrow$，这样反气旋式曲率要逐渐转化为气旋式曲率，所以空气微团水平运动过程中，要维持绝对涡度守恒，就要形成一个波状的轨迹。



3.2.7 p坐标系中涡度方程

涡度方程 $\boxed{\frac{d(f+\zeta)}{dt} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}\right) - (f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}$ **绝对涡度个别变化=涡度倾侧−绝对涡度水平散度项**

局地变化 $\boxed{\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) - \left(u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \omega\frac{\partial\zeta}{\partial p} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}\right) - (f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}$

涡度局地变化= −相对涡度平流−地转涡度平流−涡度垂直输送+涡度倾侧项−绝对涡度水平散度项

注意 ① 方程中少了力管项，这是由于**等压面是力管的管壁**。

② 尽管p坐标涡度方程中不含力管项，但绝不意味着大气的斜压性对涡度变化不起作用，实际上，斜压性的作用隐藏在散度项中。

不同坐标系中的涡度

ζ_z和ζ_p有所区别：$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x}|_z - \frac{\partial u}{\partial y}|_z$，利用转换关系：$\frac{\partial v}{\partial x}|_z = \frac{\partial v}{\partial x}|_p - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}|_p$，$\frac{\partial u}{\partial y}|_z = \frac{\partial u}{\partial y}|_p - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}|_p$，可以得到：

$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x}|_z - \frac{\partial u}{\partial y}|_z = \frac{\partial v}{\partial x}|_p - \frac{\partial u}{\partial y}|_p + \rho\vec{k}\cdot\left[\nabla_p\phi\times\frac{\partial\vec{V}_h}{\partial p}\right]_{\text{小项}}$，故有 $\zeta_z\approx\zeta_p = \frac{\partial v}{\partial x}|_p - \frac{\partial u}{\partial y}|_p$

3.3 位势涡度方程

小节引入

描述大气完整运动需要有动力学场（环流、涡度）、热力学场（连续方程、热流量方程），如何将两者统一起来，构建一个新的约束条件？需要有位势涡度 *Potential Vorticity* 的参与。

3.3.1 位涡与位涡方程

Ertel 位涡 $\frac{1}{\rho}\vec{\zeta}_a\cdot\nabla\theta$ 由 ρ,ζ,θ 组成的综合反映大气动力学、热力学性质的物理量。

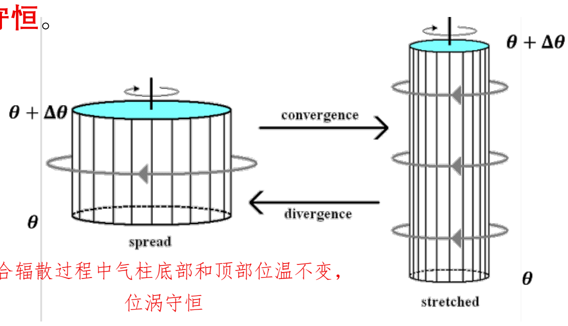
位涡方程 $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\zeta}_a\cdot\nabla\theta\right) = \frac{1}{\rho}\left[\nabla\theta\cdot(\nabla\times\vec{F}_r) + \vec{\zeta}_a\cdot\nabla\left(\frac{\dot{Q}}{C_pT}\right)\right]$ 由**涡度方程、连续方程、位温方程**三个方程导出。

左边包含三项：$\frac{d\rho}{dt}=\cdots$ 连续方程、$\frac{d\theta}{dt}=\cdots$ 位温方程（热力学方程）、$\frac{d\vec{\zeta}_a}{dt}=\cdots$ 涡度方程（运动方程）

右边包含**摩擦力**在位温梯度上的投影项、**非绝热加热项**。

守恒条件 **绝热无摩擦** $\vec{F}_\gamma = 0; \dot{Q}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\zeta}_a\cdot\nabla\theta\right)=0$，得到**位涡守恒**。

干绝热：空气微团位温守恒，即空气微团沿等位温面运动。



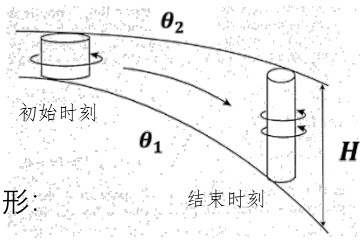
辐合辐散过程中气柱底部和顶部位温不变，位涡守恒

3.3.2 大尺度大气运动

条件假设 大尺度大气运动，且是均质大气。

垂直变化 因为铅直涡度主导 $\vec{\zeta}=\zeta\vec{k}$，$\rho=$ 常数，

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\vec{\zeta}_a\cdot\nabla\theta\right)=0$ 可化为 $\frac{d}{dt}\left(\zeta_a\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)=0$

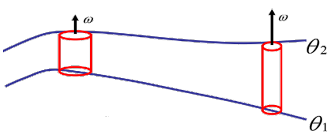


方程推导 假设**绝热**：上下层空气**位温守恒**（由于干绝热位温守恒）

上层 $\frac{d\theta_2}{dt}=0$，下层 $\frac{d\theta_1}{dt}=0$，$\frac{d}{dt}\left(\zeta_a\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)=0\xrightarrow{\frac{\partial\theta}{\partial z}\approx\frac{\theta_2-\theta_1}{H}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta_a}{H}\right)=\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta+f}{H}\right)=0}$

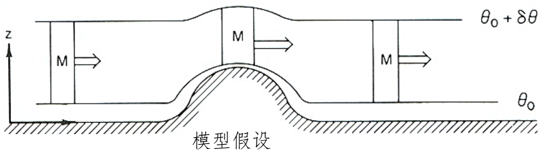
即**正压位涡守恒方程**。如果考虑气柱体积恒定，即$\tau=\sigma\cdot H$，则进一步变形：

$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta_a\sigma}{\tau}\right)=\frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}(\zeta_a\sigma)=0\Rightarrow\frac{d}{dt}(\zeta+f)\sigma=0$

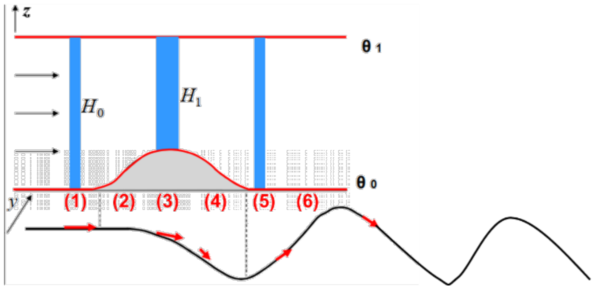


均质大气情形，位涡守恒可以化为涡度方程（纯动力过程）

3.3.3 位涡守恒的应用



3.3.3.1 定常西风越过南北向山脉



假设条件 ① 山脉**东西对称**，南北宽度无限

② 无限宽绝热西风气流**均匀**（密度不变），无水平切变

③ 运动定常（速度不变），层结稳定

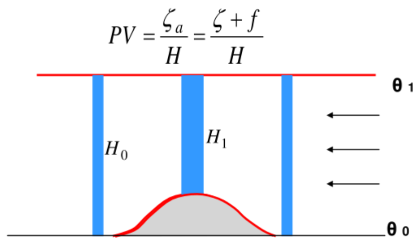
适用公式 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta_a}{H}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta+f}{H}\right)=0$　　$\frac{\zeta_a}{H}=\frac{\zeta+f}{H}=C$

现象 定常西风越过南北向山脉时，**迎风坡有脊，背风坡有槽**，且在它们的**下游交替出现一系列槽**。

推导

①	$H=H_0$	$\zeta_a=\zeta+f=f_0$	相对涡度为零，假设有绝对涡度f_0			
②	$H\downarrow$	$\zeta_a\downarrow$	$\zeta<0\downarrow$	反气旋偏转	$f\downarrow$	向南运动，地转涡度减小
③	H_{min}	$\zeta_{a\,min}$		惯性作用继续向南运动	$f\downarrow$	爬到山顶，H达到最小值
④	$H\uparrow$	$\zeta_a\uparrow$	$\zeta\uparrow$			
⑤	$H=H_0$	$\zeta_a=f_0$	$\zeta>0$	将向北运动	$f<f_0$	比原纬度偏南
⑥	$H=H_0$	$f=f_0$	$\zeta\downarrow$		$f\uparrow$	由于惯性作用继续向北运动

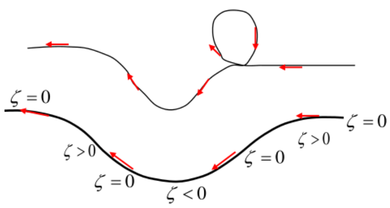
3.3.3.2 东风气流过山



现象 东风气流过山**不能形成背风槽**

解释 当东风气流接近南北向山脉时，爬坡使厚度变小，则减小形成**反气旋式曲率**并伴有**向北**的运动，使f变大。此时为了保持位涡守恒，将使得气旋式曲率负值更大，进一步导致f增加，致使气流折回向东，不可能保持住定常状态的位涡守恒的流型。

由于这个原因，东风气流必须在山岳上游就已经受到山岳的影响。



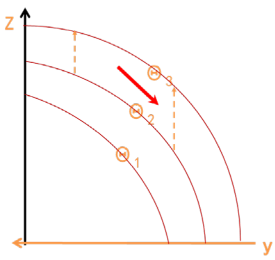
东风气流的提前影响

θ_1平面并不是平直的，而是随地形有一定的弧度（比地形更平缓），所以气柱在还未上山之前先被拉长，导致获得气旋性涡度，气流向南运动。即向西移动的气柱，在到达山岳之前，就先呈现气旋性弯曲，这样得到的正相对涡度抵消了f的减小，因此位涡守恒。

当气柱移到山顶时，仍向南移动，以使气柱厚度的减小被f的减小所平衡。最后，当气柱移下山岳并向西移动时，经历相反的过程，在下游若干距离处，气柱又回到它原来的纬度继续西移。

物理直觉 西风情况，气块在槽的位置**曲率涡度增大**，**地转涡度减小**；脊的位置曲率涡度减小，地转涡度增大，位涡守恒是可能的；东风情况，气块在槽的位置**曲率涡度和地转涡度都减小**，位涡是不可能守恒的。

3.3.3.3 暴雨的发生



解释 在涡柱沿着两个等熵面（等位温面）作绝热下沉运动时位涡守恒，即小气柱绝热下沉，$\frac{\partial\theta}{\partial z}\downarrow\Rightarrow\zeta_a\uparrow\Rightarrow\zeta\uparrow\Rightarrow D$ 散度加强，有利于暴雨的发生。

环流形成 假设对流层低层有正温度异常（温度异常可由温度平流引起），且初始时刻等θ线均匀随高度增加，若有温度异常，则**等熵面将向下凹**，**等熵面间距增加**，

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta_a}{H}\right)=C\Rightarrow\zeta_a$增大，导致气旋性涡度增大。

若有负温度异常，则等熵面将向上凸，等熵面间距减小，ζ_a减小，导致反气旋运动。