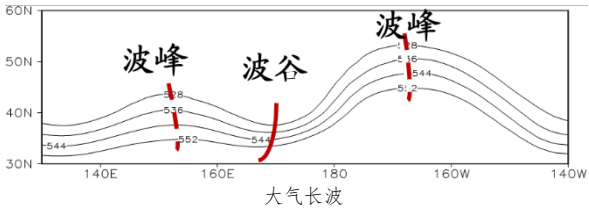


第六章 大气中的基本波动



章节引入

天气图上可见：高度场、温度场基本呈**波状分布**。因此，可用物理学中研究波动现象的方法来讨论大气运动。注意，在高空天气图上直接看到的是气流的流型，并非是波动，但这种西风气流大幅度的弯曲流动的确折射出大气长波的存在。上章我们已经得到：大气运动=纬向平均运动+涡旋运动=大气环流+天气系统。

波动学 以直观的**天气学**（槽脊结构）和**物理学图像**（水波等）作为基础，在气象学中引入**波动**概念，并用**数学方式**进行理论探讨和完善，形成**大气波动理论**和**大气波动学**。目前波动学是**主流理论**。

- 波动学优点**
- ① 可以利用**成熟的波动学理论**对天气系统形成机理、发生发展和移动进行研究。
 - ② 由于槽脊的移动是等位相线的运动，即波的移动，所以**槽脊的移速 = 相速 = 波速**。
 - ③ 波动学把气旋（低压）、反气旋（高压）系统联系起来，能够判断涡旋系统的发展和演变。

案例分析

- ① 气旋增强：涡旋动力学角度是涡度增加；能量学角度是 **K'** 增加；波动学角度则是槽的加深。
- ② 系统移动：波动学角度是槽脊东移；涡旋动力学角度是
$$\left. \begin{array}{l} \text{气旋前: } \frac{\partial \zeta}{\partial t} > 0, \text{ 即 } \zeta \uparrow \\ \text{气旋后: } \frac{\partial \zeta}{\partial t} < 0, \text{ 即 } \zeta \downarrow \end{array} \right\} \Rightarrow \text{气旋东移}$$

波动学目的 通过**大气运动方程组**，利用**波动学理论**讨论**天气系统**（大尺度）的形成、发生发展及移动的机理。

存在问题 大气基本方程中除了大尺度的天气波动外，还存在其他波动的干扰。

基本波动 大气中四类基本波动：**大气长波**，**声波**，**重力波**（水波就是一种重力波），**惯性波**。因为没有电磁学方程，不包含电磁波/光波（不考虑雷电现象）

波动

各种波动的形成机制、性质及对天气产生的影响有所不同，因此在进行大气波动学分析时，不可能把所有波动类型都考虑进去。最早的天气预报使用的是原始方程，因其包含各种波动，次要波动的噪声会将误差放大，导致几小时变压数百百帕的错误结果。

声波	弹性振动（大气的可压缩性）	快波
惯性波	惯性振荡（旋转性）+辐合辐散	高频波
重力内波	浮力振荡（层结性）+辐合辐散	高频波
重力外波	辐合辐散	快波
Rossby 波	β 效应	慢波

滤波 可以把波动分类： $\left\{ \begin{array}{l} \text{重要: 大气长波} \Rightarrow \text{称为} \text{谐波: 需要保留} \\ \text{次要: 如声波等} \Rightarrow \text{称为} \text{噪音: 需要去掉} \end{array} \right. \Rightarrow \text{滤波}$

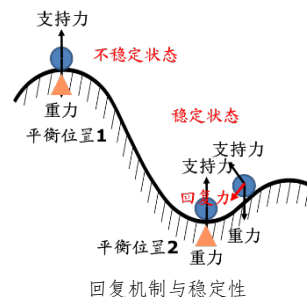
滤波目的 去除次要波动的干扰，讨论主要波动，在数值预报中滤波非常重要。
例如声波是由于大气可压缩性引起的，**假设大气是不可压的就可以滤去声波**，但对天气波动影响不大。因此，有必要研究包括次要波动在内所有波动的机制和性质，以实现滤波的目的。

误差的增长

如果取时间步长 Δt 为 10 分钟，对于时间尺度为 10^5s 的天气尺度波动来说，误差就较小。而对于像声波等快波来说，**误差就很大（随机的），且是累积的**，最终导致整体系统的不稳定性，此时就**需要滤去快波**。然而由于计算机资源限制， Δt 也不能取太小。

然而，考虑到大气系统的混沌性（初值敏感），一旦有误差，其放大的效应会十分显著且迅速。因此，一定时段内的天气预报是合理的，一旦超出一定时段，预报就会因为混沌性而失效。

6.1 波动的基本概念



6.1.1 波动的定义

波动定义 质点受力的作用围绕某平衡位置振动，振动在空间的传播形成波动。

基本条件 ① 振动（回复力） ② 能够传播（质点与质点之间建立联系）

例如单个单摆摆动，不能引起其它单摆摆动；但用一根线把它们连起来，一个摆动可以传播出去。

波动机制 波动的机制包括**振荡机制**和**传播机制**，二者缺一不可。学习每种波动都需要清楚这两种机制。

振荡机制 亦称**回复机制**，在机械学中的观点就是**回复力**。如右上图，稳定位置如果有偏移，就存在回复力。

大气层结中也具有类似的情况 { 稳定：净浮力与位移方向相反，可以产生振荡
不稳定：净浮力与位移方向相同

传播机制 质点与质点之间的联系。波动传播的是**振荡的状态**，波动是**能量传播**的一种基本形式。

最大特点 波动的最大特点是**周期性**：时间上周期变化、空间上周期分布、有规律、重复发生、可预测。

6.1.2 波动的数学模型与波参数

6.1.2.1 简谐振动

简谐振动 回复力大小与位移成正比，方向与位移相反。设质量为 M ，回复力大小为 $-ky$ （ k 为比例系数）。

根据牛顿第二定律： $M \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k}{M}y$ 令 $\frac{k}{M} = \omega^2$ ，则： $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$ **简谐振动方程**

简谐振动方程的解： $y = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t = A \cos(\omega t - \alpha)$ 仅仅是时间的函数

振动是单个质点的运动，是**仅以时间**为自变量的运动，多属于常微分方程问题。

简谐波 简谐振动**稳定地传播**所形成的波动称为**简谐波**。一维简谐波解： $y = A \cos(kx - \omega t + \alpha) = A \cos \theta$

波动是以**时间、空间**为变量的，属于偏微分方程问题。

6.1.2.2 波参数

振幅 A $A = A$ 物体离开平衡位置的最大位移

周期 T $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{L}{C}$ 空间固定位置上的点完成一次全振动所需时间

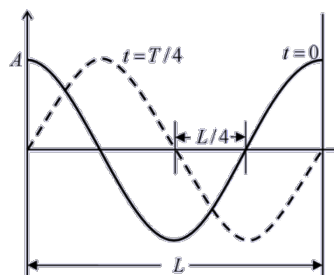
圆频率 ω $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 2π 时间内质点完成全振动的次数

波长 L $L = \frac{2\pi}{k} = CT$ 相邻两个同位相点之间的距离

波数 k $k = \frac{2\pi}{L}$ 2π 距离内包含了多少个波长

位相 θ $\theta = kx - \omega t + \alpha$ 波在 x 轴上各点各时刻的位置， α 为初位相， $\theta = \text{const}$ 的点构成的面称**等位相面**

波速 $C = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T}$ 等位相线(面)的移速，即槽脊的移动速度。



等位相面与波速

波速推导

有速度 $C = \frac{dx}{dt} \Big|_{\theta=\text{常量}}$ ，且等位相面 $\theta = kx - \omega t = \text{常量} \Rightarrow k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow C = \frac{dx}{dt} \Big|_{\theta=\text{常量}} = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T}$

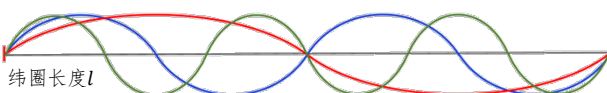
简谐波解 $S(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = A \cos(kx - \omega t) = A \cos k(x - ct)$ 初位相为零

纬向波数目 $m = \frac{l}{L} = \frac{2\pi R}{L} = \frac{2\pi a \cos \phi}{L}$ 整个纬圈长度为 l ，纬圈上 m 个谐波对应的波长为 $L = l/m$ 。

纬向波数 $k_m = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{l/m} = \frac{2\pi m}{l} = \frac{m}{a \cos \phi}$

纬向波数目与纬向波数是两个不同的东西

$m=1; m=2; m=3$



横波与纵波 按振动方向与波动传播方向的关系，可分为横波与纵波两大类：

- ① 若质点振动方向与波的传播方向**一致**，此种称为**纵波**，如水平声波。
- ② 若质点振动方向与波的传播方向**垂直**，此种称为**横波**，如重力水面波（上下振动，水平方向传播）

6.1.3 波动的数学表示

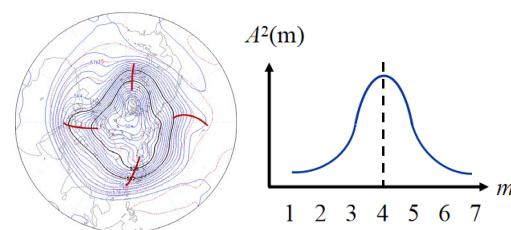
波的叠加 实际大气扰动不是单纯的简谐波，可以看成是**各种不同波长、不同振幅**的简谐波的**叠加**。各简谐波之间**位相会有差异**，因而出现**振幅相抵消或叠加**的现象。

分析方法 数学上任一函数都可以用**傅立叶级数**展开来表达。我们将某物理量的波在纬圈上展开成傅立叶级数： $S(x, t) = \sum_m S_m$ (m 纬向波数目 = 1, 2, 3 ...) 其中 $S_m = B_m \cos k_m(x - c_m t) + D_m \sin k_m(x - c_m t) = A_m \cos[k_m(x - c_m t) + \alpha_m]$ 表示第 m 个谐波。理论上已知 $S(x, t)$ ，可以得到各 B_m, D_m, A_m 。实际扰动虽然是许多简谐波组成，但往往**只有几个谐波分量是主要的**，其频率、振幅虽然不同，但动力学性质往往一样。因此如果想得到定性的结果，分析一个典型的**谐波分量**就足够了。

$$S(x, t) = \sum_i S_i \approx S_m$$

实际案例

例如右图，天气图上存在四个大脊大槽。我们只要研究纬向四个波其中一个的性质，就能得到整体的结果。



形式解 如果考虑**线性波动的传播问题**，可以近似把波动考虑为**简谐波形式解**。

线性波动

线性波动指发生在线性系统中的波动。线性系统指对它的输入和它产生的输出之间，满足**比例关系**和**可加性**。比如一根绷紧的琴弦，输出与输入成正比；且两个人同时在不同位置拨动这根弦，那么弦最终的振动形态就等于两个形态之和。大气中，当波动幅度很小，对背景场的扰动很微弱时，我们常常可以把它近似为线性波动来处理。

线性算子指满足上述比例性和可加性的算子，满足性质： $L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$ 。

如果是线性波动，**波动方程为 $LS(x, t) = 0$** ， L 为线性算子，则有：

$$L \sum_m S_m = 0 \Rightarrow \sum_m LS_m = 0 \Rightarrow LS_m = 0$$

总和为零，且每个 LS_m 是独立的，那么自然每一项 LS_m 都等于零。取这种波动形式解为**简谐波解**：

- ① **某个简谐波最具有代表性**
- ② **每个简谐波都满足原方程，都具有相同性质解。**

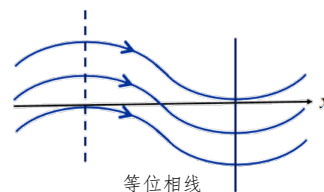
复数形式传播问题 对于 $S = A \cos(kx - \omega t)$ ，有 $S = \text{Re}[Ae^{i(kx - \omega t)}]$ 。其中 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 求导方便讨论**线性波动**的传播问题：振幅 A 为常量，不随时空变化，没有办法讨论波的强度变化，同样无法讨论频率、波数的时空变化。对于非线性波动：波-波相互作用的讨论需要使用别的方法。

6.1.4 二维与三维平面波

一维波动 相位只随 x 变化，波动在 x 方向上传播。例如渠道波

$$S(x, t) = Ae^{i\theta} = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad \theta = kx - \omega t = k(x - ct)$$

等位相面垂直于 x 轴，只在 x 方向移动。



注意

一维波动 \neq 一维运动，一维运动： $u \neq 0, v = w = 0, \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ ，一维波动： $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ ， v, w 可以不等于 0。就是说， v, w 在 y, z 方向上不存在梯度，始终共同运动，流体均匀。

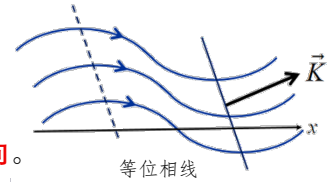
二维波动 在 x 和 y 方向均有传播，我们把函数加上 ly 扩展到二维。例如水面波

$$S(x, y, t) = Ae^{i\theta} \quad \theta = kx + ly - \omega t \quad k = \frac{2\pi}{L_x} \text{ 和 } l = \frac{2\pi}{L_y} \text{ 分别为 } x \text{ 方向和 } y \text{ 方向的波数}$$

则两个方向的相速度为: $c_{px} = \frac{\omega}{k}, c_{py} = \frac{\omega}{l}$ 。

大气长波的斜槽结构可用二维波动表达, 等位相面是倾斜的。例如 PNA 波列

定义波矢: $\vec{K} = k\vec{i} + l\vec{j} = \nabla\theta$ \vec{K} 垂直于等位相面, 表示等位相面传播的方向。



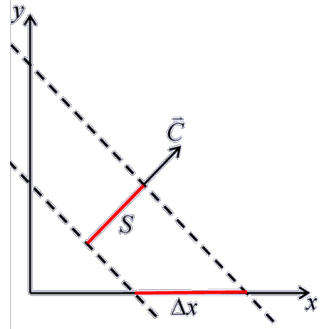
整体相速度 波动整体相速度 $\vec{C} = \frac{\omega}{K} \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|} = \frac{\omega}{K^2} \vec{K} = \frac{\omega}{k^2 + l^2} (k\vec{i} + l\vec{j})$ 其中 $K^2 = k^2 + l^2$

而各自方向 $c_{px} = \frac{\omega}{k}, c_{py} = \frac{\omega}{l}$, 明显 $\vec{C} \neq c_{px}\vec{i} + c_{py}\vec{j}$ 不满足矢量合成法则

相速在三个坐标方向的分量不等于三个方向的相速。

三维波动 $S(x, y, z, t) = Ae^{i\theta} = Ae^{i(kx+ly+nz-\omega t)}$ 把函数加上 nz 扩展到三维。

$\vec{K} = k\vec{i} + l\vec{j} + n\vec{k} = \nabla\theta$ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 例如声波、电磁球面波



相速度与方向上的相速

沿着各坐标轴波传播速度 (相速), 与波速在各坐标轴上的分量是两个不同的物理含义。

$C = \frac{S}{\Delta t}, c_{px} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, 由几何关系可得: $S < \Delta x$, 所以 $C < c_{px}$ 。同理, 各个方向上 $c_{py}, c_{pz} \geq C$, 由此

$\vec{C} \neq c_{px}\vec{i} + c_{py}\vec{j} + c_{pz}\vec{k}$ 。

6.2 波群与群速度

波群

振幅表示了波动强度 (能量 $E \propto A^2$)。如果 $S \approx S_{m0} \Rightarrow$ 单个简谐波, 振幅 A 是常量。

如果 $S = \sum_m S_m \Rightarrow$ 多个简谐波叠加可以表达实际的波动 \Rightarrow 那么振幅是时空的函数。考虑线性波动传播时, 使用单个简谐波解; 考虑波动强度变化时, 应该用多个简谐波叠加, 称波群或波列。

两个简谐波 考察两个振幅相同, 频率与波数相近的简谐波迭加的结果: $S = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) e^{i(kx-\omega t)}$

由上式可见, 波群中包含两个波动的乘积: 我们认为 $e^{i(kx-\omega t)}$ 代表原来两个波的性质, 是高频载波,

$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 代表波包 (其波长很长, 变化缓慢), 是低频包络。

令波包为: $A^*(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 则上式可简化为: $S = A^*(x, t) e^{i(kx-\omega t)}$

表示波数为 k , 圆频率为 ω , 振幅为 $A^*(x, t)$ 的波动。

具体推导

给定简谐波: $S_1 = Ae^{i(k_1x-\omega_1t)}, S_2 = Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$, 给定条件:

① $|k_2 - k_1| \ll |k_1| \& |k_2| \Rightarrow$ 波数相近 ② $|\omega_2 - \omega_1| \ll |\omega_1| \& |\omega_2| \Rightarrow$ 频率相近。则有:

$$S = S_1 + S_2 = Ae^{i(k_1x-\omega_1t)} + Ae^{i(k_2x-\omega_2t)} = Ae^{i\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)} \cdot \left[e^{i\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)} + e^{i\left(\frac{k_2-k_1}{2}x - \frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)} \right]$$

因为 $e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha + \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cos\alpha$, 令 $k = \frac{k_1+k_2}{2}, \omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}; \Delta k = k_2 - k_1, \Delta\omega =$

$\omega_2 - \omega_1$, 则有 $S = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) e^{i(kx-\omega t)}$ 。

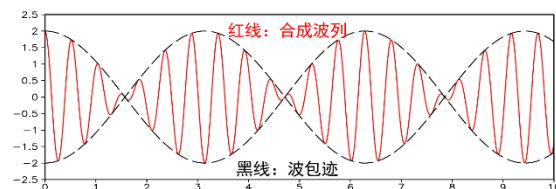
高频载波 其中 $e^{i(kx-\omega t)}$ 称为高频载波 (合成波列)。

载波的波数 k 和圆频率 ω 都分别接近各个单波的波数和圆频率。即: $k = \frac{k_1+k_2}{2} \cong k_1 \cong k_2$,

$\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \cong \omega_1 \cong \omega_2$ 载波的波速也接近于各个单波的波速, 即: $c = \frac{\omega}{k} \approx \frac{\omega_1}{k_1} \approx \frac{\omega_2}{k_2}$

低频包络

其中 $A^*(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 称为**低频包络**，它是载波的包络线，是**载波最大振幅点的连线**，又称**波包迹**。波包迹随时空是周期变化的，且传播的。



慢变波包

由于 $\Delta k \ll k, \Delta\omega \ll \omega$ ，因而波包迹（振幅）的波长和周期**远大于**单波的波长和周期，即波包迹（振幅）相对于载波随时空变化是相当缓慢的。所以经常称之为**慢变波包**。

注意

振幅 A 没有负的，出现负振幅代表着改变 π 个位相： $-A = Ae^{i\pi}$ 。

群速

波包迹的传播速度： $C_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \Rightarrow \frac{d\omega}{dk}$ **波的振幅（能量）的传播速度**称为**群速**： $c_g = \frac{d\omega}{dk} = c + k \frac{dc}{dk}$

综合分析，波群有两种速度：**相速度与群速度**

① **相速度**是**位相的传播速度**（如槽脊的移速），载波的移动速度。

② **群速度**是**振幅/能量的移动速度**，波包迹的移动速度。

一维波动

若频散关系式 $\omega = \omega(k)$ 已知 则相速度为 $c = \frac{\omega}{k}$ 群速度为 $c_g = \frac{d\omega}{dk}$

三维波动

若频散关系 $\omega = \omega(k, l, n) = \omega(\vec{K})$ 已知 则相速度为 $\vec{C} = \frac{\omega}{K^2} \vec{K}$ 群速度为 $\vec{C}_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} \vec{i} + \frac{\partial\omega}{\partial l} \vec{j} + \frac{\partial\omega}{\partial n} \vec{k}$

频散现象

若相速度大于群速度，则**波能量相对于合成波列有传输现象**，称为**频散现象**（如下图）。

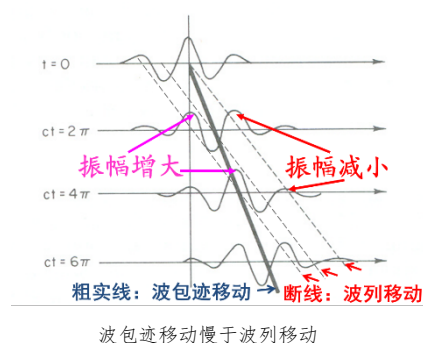
其原因在于各谐波分量相速 c 不同（ c 与 k 有关）。

相速度和群速度是否会不同？什么情况下相同？什么情况下不同？

有关系式： $\omega = kc \Rightarrow c_g = \frac{d\omega}{dk} = c + k \frac{dc}{dk}$ 讨论了相速度与群速度的关系。

① 若 c 与 k 无关 $\frac{dc}{dk} = 0, c_g = c$ 该波动的波速与波长无关，波动的能量随波动的传播而传播 \Rightarrow 非频散波，非频散波的波形不发生变化。

② 若 c 与 k 有关 $\frac{dc}{dk} \neq 0, c_g \neq c$ 该波动的波速与波长有关，波动的能量不随波动的传播而传播 \Rightarrow 频散波，频散波的波形会发生变化（右图）。

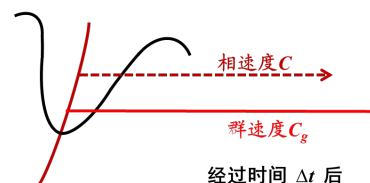


波包迹移动慢于波列移动

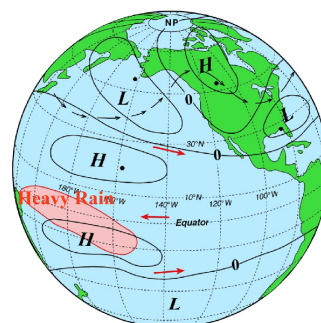
上游效应

\rightarrow 叶笃正，1949，能量频散理论

波动在传播过程中，会通过能量频散作用，上游波动的能量**先于**波动本身到达下游（即群速度大于相速度的情况），在下游激发新的波动或加强下游原有波动，称为上游效应。



Pacific-North American (PNA) Pattern



气候遥相关现象

① 直接环流的遥相关，如沃克环流。和群速度没有关系。

② 定常波列遥相关：PNA 遥相关，能量源在西太平洋赤道区域，往北形成正-负波列，**相速为零，群速不为零**，导致能量频散传输，形成波列。

这个形势维持时间较长，是气候问题，故这是一个驻波，或称“定常波”。

6.3 微扰动线性化方法

小节引入

本节是本章最重要的方法，后续的所有波动都采用该方法讨论。

总体方法论 **物理模型建立** (波动的机制) → **数学模型** (原始方程在物理约束基础上的简化) → 利用 **微扰法** 对数学模型 **线性化** → 求解模型 (标准波形法) 得到 **频散关系** → 根据解分析 **波动性质**

求解波动 求解波动从基本方程组入手，例如运动方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v$ 中存在未知量的二次及二次以上乘积项，即 **非线性项**。它使得求解困难，我们希望做 **线性化处理** 或者 **求数值解**。大气中存在非线性现象，如：多平衡态、突变现象，但讨论波动时可以线性化。

求解方法 非线性方程 → **作适当假设或近似** (物理模型) + **微扰法** → **线性化** + **标准波形法** → 近似解

基本思想 ① 任一气象要素，由 **已知基本量** 叠加上 **未知扰动量** 组成，即 $s = \bar{s} + s'$ ，且 $|s'| \ll |\bar{s}|$ ，是 **微扰动**。例如基本气流的取法：依据研究的问题决定。可以取静止基流 $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$ 或者沿纬圈的平均速度场 $\bar{u} = \text{const}, \bar{v} = \bar{w} = 0$ ，又或者考虑大气的斜压性 $\bar{u} = \bar{u}(y, z), \bar{v} = \bar{w} = 0$ 。

② **基本量** 满足 **原方程和边界条件**。

③ **扰动量及其改变量** 都是小量，其 **二次及二次以上乘积项** (非线性项) 可作为高阶小量 **忽略**，从而得到线性方程。扰动量充分小：热力学变量：指扰动量远小于基本场变量；运动学变量：是扰动量本身充分小，因为静止大气可作为基本态。

基本步骤 ① 将描写大气运动和状态的物理量分解为 **基本量** 与 **扰动量**，将变量分解带入方程及边界条件
② 将 **所得方程** 减去 **基本量** 所满足的方程
③ 略去上述方程中 **扰动量的高阶项**

运动方程
$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} + f v' \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} f \bar{u} - f u'$$

x方向运动方程的线性化

① $\bar{u} = \text{const}, \bar{v} = \bar{w} = 0$ 。变量分解 $u = \bar{u} + u', v = v', \omega = \omega', \phi = \bar{\phi} + \phi'$ 。代入方程：

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + (v') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial y} + (\omega') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial p} = -\frac{\partial(\bar{\phi} + \phi')}{\partial x} + f v'$$

② 写出基本量的方程： $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$ 。两式相减 (注意到 \bar{u} 不随空间变化)：

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial y} + \omega' \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial p} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} + f v'$$

③ 略去上述方程中 **扰动量的高阶项**，得到线性化后的方程： $\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} + f v'$

y方向运动方程的线性化

① 变量分解： $u = \bar{u} + u', v = v', w = w', p = \bar{p}(y, z) + p', \rho = \bar{\rho}(y, z) + \rho'$ 。代入方程： $\frac{\partial v'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} + w' \frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{1}{(\bar{\rho} + \rho')} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial y} - f(\bar{u} + u')$ ，需要将气压梯度力项拆分： $\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{1}{1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}} \sim \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)$ ，故得到：

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} + w' \frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \frac{\partial p'}{\partial y} - f \bar{u} - f u'$$

② 写出基本量的方程： $0 = -\frac{1}{\bar{\rho}(y, z)} \frac{\partial \bar{p}(y, z)}{\partial y} - f \bar{u}$ 。两式相减 (注意到其中 $\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} f \bar{u}$)：

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} + w' \frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}} f \bar{u} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial p'}{\partial y} - f u'$$

③ 略去上述方程中 **扰动量的高阶项**，得到线性化后的方程： $\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} f \bar{u} - f u'$ 。

适用范围

小扰动法只适用与**小振幅波**的讨论 $|q'| \ll |\bar{q}|$ ，对于**有限振幅波**此法失效
只适用于天气系统发展的**初始阶段**，在发展旺盛期和后期锢囚阶段都不能使用(槽脊波动很大)

① 小振幅扰动可以略去 $\vec{v}' \cdot \nabla \vec{v}'$ ，这表示 $\begin{cases} \text{数学上: 扰动量二次乘积项, 数值很小} \\ \text{物理上: 非线性作用不重要} \end{cases}$ 以小振幅扰动为主时，可近似为线性现象。

② 对于有限振幅的扰动，这时不满足 $|A'| \ll |\bar{A}|$ 扰动量的二次以上乘积项不能作为高阶小量忽略。此时非线性项重要。**有限(大)振幅扰动**为非线性现象。例如：阻塞形势是大振幅扰动，非线性过程，用线性过程就不能解释阻塞高压形成的机制和特征。