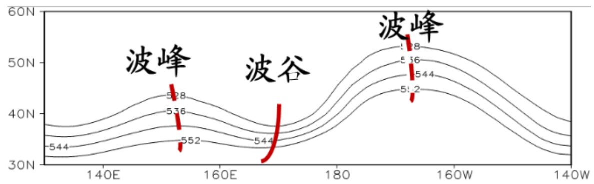
第六章 大气中的基本波动



大气长波

章节引入

天气图上可见：高度场、温度场基本呈波状分布。因此，可用物理学中研究波动现象的方法来讨论大气运动。注意，在高空天气图上直接看到的是气流的流型，并非是波动，但这种西风气流大幅度的弯曲流动的确折射出大气长波的存在。上章我们已经得到：大气运动＝纬向平均运动＋涡旋运动＝大气环流＋天气系统。

波动学 以**直观的天气学**（槽脊结构）和**物理学图像**（水波等）作为基础，在气象学中引入**波动**概念，并用**数学方式**进行理论探讨和完善，形成**大气波动理论**和**大气波动学**。目前波动学是**主流理论**。

波动学优点
① 可以利用成熟的波动学理论对天气系统形成机理、发生发展和移动进行研究。
② 由于槽脊的移动是等位相线的运动，即波的移动，所以槽脊的移速 = 相速 = 波速。
③ 波动学把气旋（低压）、反气旋（高压）系统联系起来，能够判断涡旋系统的发展和演变。

案例分析

① 气旋增强：漩涡动力学角度是涡度增加；能量学角度是K'增加；波动学角度则是槽的加深。

② 系统移动：波动学角度是槽脊东移；涡旋动力学角度是 $\left.\begin{array}{l}\text{气旋前：}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}>0,\text{即 }\zeta\uparrow\\ \text{气旋后：}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}<0,\text{即 }\zeta\downarrow\end{array}\right\}\Rightarrow$ 气旋东移

波动学目的 通过**大气运动方程组**，利用**波动学理论**讨论**天气系统**（大尺度）的形成、发生发展及移动的机理。

存在问题 大气基本方程中除了大尺度的天气波动外，还存在其他波动的干扰。

基本波动 大气中四类基本波动：**大气长波，声波，重力波**（水波就是一种重力波），**惯性波**。因为没有电磁学方程，不包含电磁波/光波（不考虑雷电现象）

波动

各种波动的形成机制、性质及对天气产生的影响有所不同，因此在进行大气波动学分析时，不可能把所有波动类型都考虑进去。最早的天气预报使用的是原始方程，因其包含各种波动，次要波动的噪声会将误差放大，导致几小时变压数百百帕的错误结果。

声波	弹性振动（大气的可压缩性）	快波
惯性波	惯性振荡（旋转性）+辐合辐散	高频波
重力内波	浮力振荡（层结性）+辐合辐散	高频波
重力外波	辐合辐散	快波
Rossby 波	β效应	慢波

滤波 可以把波动分类：$\left\{\begin{array}{l}\text{重要：大气长波}\Rightarrow\text{称为谐音：需要保留}\\ \text{次要：如声波等}\Rightarrow\text{称为噪音：需要去掉}\end{array}\right.\Rightarrow$ **滤波**

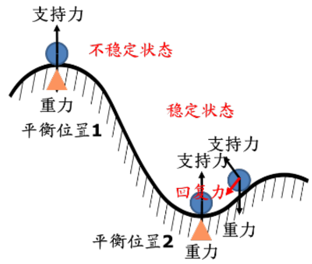
滤波目的 去除次要波动的干扰，讨论主要波动，在数值预报中滤波非常重要。
例如声波是由于大气可压缩性引起的，假设大气是不可压的就可以滤去声波，但对天气波动影响不大。
因此，有必要研究包括次要波动在内所有波动的机制和性质，以实现滤波的目的。

误差的增长

如果取时间步长 Δt 为 10 分钟，对于时间尺度为 10^5s 的天气尺度波动来说，误差就较小。而对于像声波等快波来说，误差就很大（随机的），且是累积的，最终导致整体系统的不稳定性，此时就需要滤去快波。然而由于计算机资源限制，Δt 也不能取太小。

然而，考虑到大气系统的混沌性（初值敏感），一旦有误差，其放大的效应会十分显著且迅速。因此，一定时段内的天气预报是合理的，一旦超出一定时段，预报就会因为混沌性而失效。

6.1 波动的基本概念



回复机制与稳定性

6.1.1 波动的定义

波动定义　质点**受力的作用**围绕**某平衡位置**振动，振动**在空间的传播**形成波动。

基本条件　① **振动**（回复力）　② **能够传播**（质点与质点之间建立联系）

例如单个单摆摆动，不能引起其它单摆摆动；但用一根线把它们连起来，一个摆动可以传播出去。

波动机制　波动的机制包括**振荡机制**和**传播机制**，二者缺一不可。学习每种波动都需要清楚这两种机制。

震荡机制　亦称**回复机制**，在机械学中的观点就是**回复力**。如右上图，稳定位置如果有偏移，就存在回复力。

大气层结中也具有类似的情况 $\begin{cases}\text{稳定：净浮力与位移方向相反，可以产生振荡}\\\text{不稳定：净浮力与位移方向相同}\end{cases}$

传播机制　质点与质点之间的联系。波动传播的是**振荡的状态**，波动是**能量传播**的一种基本形式。

最大特点　波动的最大特点是**周期性**：**时间上**周期变化、**空间上**周期分布、有规律、重复发生、**可预测**。

6.1.2 波动的数学模型与波参数

6.1.2.1 简谐振动

简谐振动　回复力大小与位移成正比，方向与位移相反。设质量为M，回复力大小为 $-ky$（k为比例系数）。

根据牛顿第二定律：$M\frac{d^2y}{dt^2}=-ky\Rightarrow\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{M}y$　令 $\frac{k}{M}=\omega^2$，则：$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0}$　**简谐振动方程**

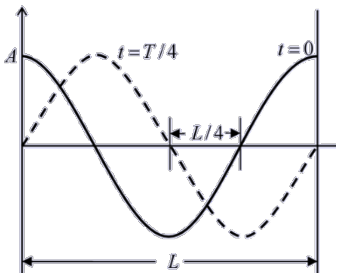
简谐振动方程的解：$y=c_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t=A\cos(\omega t-\alpha)$　仅仅是时间的函数

振动是**单个质点**的运动，是仅以时间为自变量的运动，多属于常微分方程问题。

简谐波　简谐振动**稳定地传播**所形成的波动称为**简谐波**。一维简谐波解：$\boldsymbol{y=A\cos(kx-\omega t+\alpha)=A\cos\theta}$

波动是以**时间、空间**为变量的，属于偏微分方程问题。

6.1.2.2 波参数



等位相面与波速

振幅A　$A=A$　物体离开平衡位置的最大位移

周期T　$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{L}{C}$　空间固定位置上的点完成一次全振动所需时间

圆频率ω　$\boldsymbol{\omega=\frac{2\pi}{T}}$　2π时间内质点完成全振动的次数

波长L　$L=\frac{2\pi}{k}=CT$　相邻两个同位相点之间的距离

波数k　$\boldsymbol{k=\frac{2\pi}{L}}$　2π距离内包含了多少个波长

位相θ　$\boldsymbol{\theta=kx-\omega t+\alpha}$　波在x轴上各点各时刻的位置，**α为初位相**，**$\theta=const$ 的点构成的面**称**等位相面**

波速　$\boldsymbol{C=\frac{\omega}{k}=\frac{L}{T}}$　**等位相线(面)的移速**，即槽脊的移动速度。

波速推导

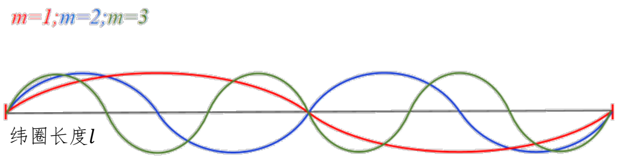
有速度 $C=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=\text{常量}}$，且等位相面 $\theta=kx-\omega t=\text{常量}\Rightarrow k\frac{dx}{dt}-\omega=0\Rightarrow C=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=\text{常量}}=\frac{\omega}{k}=\frac{L}{T}$

简谐波解　$\boldsymbol{S(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{L}x-\frac{2\pi}{T}t\right)=A\cos(kx-\omega t)=A\cos k\,(x-ct)}$　初位相为零

纬向波数目　$\boldsymbol{m=\frac{l}{L}=\frac{2\pi R}{L}=\frac{2\pi\,a\cos\phi}{L}}$　整个纬圈长度为 l，纬圈上m个谐波对应的波长为 $L=l/m$。

纬向波数　$\boldsymbol{k_m=\frac{2\pi}{L}}=\frac{2\pi}{l/m}=\frac{2\pi m}{l}=\frac{m}{a\cos\phi}$

纬向波数目与纬向波数是两个不同的东西

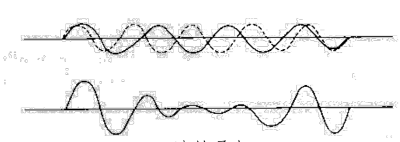


横波与纵波 按振动方向与波动传播方向的关系，可分为横波与纵波两大类：

① 若质点**振动方向与波的传播方向一致**，此种称为**纵波**，如水平声波。

② 若质点**振动方向与波的传播方向垂直**，此种称为**横波**，如重力水面波（上下振动，水平方向传播）

6.1.3 波动的数学表示



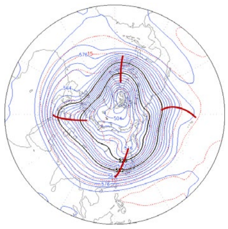
波的叠加

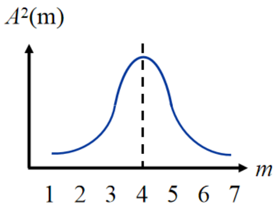
波的叠加 实际大气扰动不是单纯的简谐波，可以看成是各种不同波长、不同振幅的简谐波的**叠加**。各简谐波之间位相会有差异，因而出现振幅相抵消或叠加的现象。

分析方法 数学上任一函数都可以用**傅立叶级数**展开来表达。我们将某物理量的波在纬圈上展开成傅立叶级数：$\boldsymbol{S(x,t)=\sum_m S_m}$（$m$纬向波数目 = 1,2,3 ...） 其中 $\boldsymbol{S_m}=B_m\cos k_m(x-c_mt)+D_m\sin k_m(x-c_mt)$ $=\boldsymbol{A_m\cos[k_m(x-c_mt)+\alpha_m]}$ 表示第m个谐波。 理论上已知$S(x,t)$，可以得到各B_m,D_m,A_m。

实际扰动虽然是许多简谐波组成，但往往只有几个谐波分量是主要的，其频率、振幅虽然不同，但动力学性质往往一样。因此如果想得到定性的结果，分析一个典型的谐波分量就足够了。

$$S(x,t)=\sum_i S_i\approx S_m$$





实际案例

例如右图，天气图上存在四个大脊大槽。我们只要研究纬向四个波其中一个的性质，就能得到整体的结果。

形式解 如果考虑**线性波动的传播问题**，可以近似把波动考虑为**简谐波形式解**。

线性波动

线性波动指发生在线性系统中的波动。线性系统指对它的输入和它产生的输出之间，满足比例关系和可加性。比如一根绷紧的琴弦，输出与输入成正比；且两个人同时在不同位置拨动这根弦，那么弦最终的振动形态就等于两个形态之和。大气中，当波动幅度很小，对背景场的扰动很微弱时，我们常常可以把它近似为线性波动来处理。

线性算子指满足上述比例性和可加性的算子，满足性质：$L(af+bg)=aL(f)+bL(g)$。

如果是线性波动，波动方程为 $\boldsymbol{LS(x,t)=0}$，L为线性算子，则有：

$$L\sum_m S_m=0\Rightarrow\sum_m LS_m=0\Rightarrow \boldsymbol{LS_m=0}$$

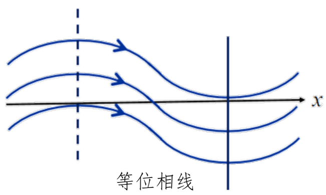
总和为零，且每个LS_m是独立的，那么自然每一项LS_m都等于零。取这种波动形式解为**简谐波解**：

① **某个简谐波最具有代表性**　　② **每个简谐波都满足原方程，都具有相同性质解。**

复数形式 对于 $S=A\cos(kx-\omega t)$，有 $\boldsymbol{S=\mathrm{Re}\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]}$。其中 $\boldsymbol{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$ 求导方便

传播问题 讨论**线性波动**的传播问题：振幅 A 为常量，不随时空变化，没有办法讨论波的强度变化，同样无法讨论频率、波数的时空变化。对于非线性波动：波-波相互作用的讨论需要使用别的方法。

6.1.4 二维与三维平面波



一维波动 位相只随x变化，波动在x方向上传播。例如渠道波

$S(x,t)=Ae^{i\theta}=Ae^{i(kx-\omega t)}$　　$\theta=kx-\omega t=k(x-ct)$

等位相面垂直于x轴，只在x方向移动。

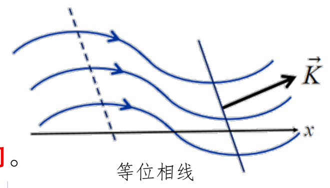
注意

一维波动≠一维运动，一维运动：$u\neq 0,v=w=0,\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0$，一维波动：$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0$，$v,w$可以不等于0。就是说，$v,w$在$y,z$方向上不存在梯度，始终共同运动，流体均匀。

二维波动 在x和y方向均有传播，我们把函数加上 ly 扩展到二维。例如水面波

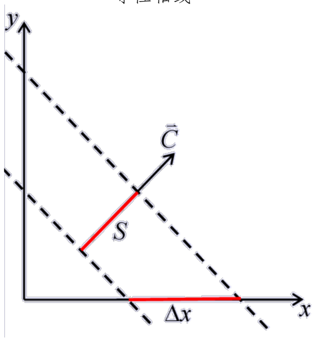
$S(x,y,t)=Ae^{i\theta}$　　$\boldsymbol{\theta=kx+ly-\omega t}$　　$k=\frac{2\pi}{L_x}$ 和 $l=\frac{2\pi}{L_y}$ 分别为x方向和y方向的波数

则两个方向的**相速度**为：$c_{px}=\frac{\omega}{k}, c_{py}=\frac{\omega}{l}$。



大气长波的斜槽结构可用二维波动表达，等位相面是倾斜的。例如 PNA 波列

定义波矢：$\vec{K}=k\vec{\imath}+l\vec{\jmath}=\nabla\theta$　　$\vec{K}$垂直于等位相面，表示**等位相面传播的方向**。



整体相速度　**波动整体相速度** $\vec{C}=\frac{\omega}{K}\frac{\vec{K}}{|K|}=\frac{\omega}{K^2}\vec{K}=\frac{\omega}{k^2+l^2}(k\vec{\imath}+l\vec{\jmath})$ 其中 $K^2=k^2+l^2$

而各自方向 $c_{px}=\frac{\omega}{k}, c_{py}=\frac{\omega}{l}$，明显 $\vec{C}\neq c_{px}\vec{\imath}+c_{py}\vec{\jmath}$ 不满足矢量合成法则

相速在三个坐标方向的分量不等于三个方向的相速。

三维波动　$S(x,y,z,t)=Ae^{i\theta}=Ae^{i(kx+ly+nz-\omega t)}$ 把函数加上 nz 扩展到三维。

$\vec{K}=k\vec{\imath}+l\vec{\jmath}+n\vec{k}=\nabla\theta$　　$\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$　例如声波、电磁球面波

相速度与方向上的相速

沿着各坐标轴波传播速度（相速），与波速在各坐标轴上的分量是两个不同的物理含义。

$C=\frac{S}{\Delta t}$，$c_{px}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$，由几何关系可得：$S<\Delta x$，所以$C<c_{px}$。同理，各个方向上$c_{py},c_{pz}\geq C$，由此

$\vec{C}\neq c_{px}\vec{\imath}+c_{py}\vec{\jmath}+c_{pz}\vec{k}$。

6.2 波群与群速度

波群　振幅表示了波动强度（能量$E\propto A^2$）。如果 $S\approx S_{m0}$ ⇒单个简谐波，振幅A是常量。

如果 $S=\sum_m S_m$ ⇒**多个简谐波叠加**可以表达实际的波动⇒那么振幅是时空的函数。考虑线性波动传播时，使用单个简谐波解；**考虑波动强度变化时**，应该用多个简谐波叠加，称**波群或波列**。

两个简谐波　考察**两个振幅相同，频率与波数相近**的简谐波迭加的结果：$\boldsymbol{S=2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)e^{i(kx-\omega t)}}$

由上式可见，波群中包含两个波动的乘积：我们认为 $e^{i(kx-\omega t)}$ 代表原来两个波的性质，是**高频载波**，

$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 代表波包（其波长很长，变化缓慢），是**低频包络**。

令波包为：$\boldsymbol{A^*(x,t)}=2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 则上式可简化为：$\boldsymbol{S=A^*(x,t)e^{i(kx-\omega t)}}$

表示波数为k，圆频率为ω，**振幅为 $A^*(x,t)$** 的波动。

具体推导

给定简谐波：$S_1=Ae^{i(k_1x-\omega_1t)}, S_2=Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$，给定条件：

① $|k_2-k_1|\ll|k_1|\&|k_2|$ ⇒波数相近　　② $|\omega_2-\omega_1|\ll|\omega_1|\&|\omega_2|$ ⇒频率相近。则有：

$$S=S_1+S_2=Ae^{i(k_1x-\omega_1t)}+Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}=Ae^{i\left(\frac{k_1+k_2}{2}x-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)}\cdot\left[e^{i\left(\frac{k_1-k_2}{2}x-\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}+e^{i\left(\frac{k_2-k_1}{2}x-\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)}\right]$$

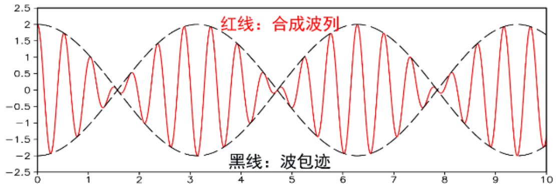
因为 $e^{-i\alpha}+e^{i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha+\cos\alpha+i\sin\alpha=2\cos\alpha$，令 $k=\frac{k_1+k_2}{2}$，$\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$；$\Delta k=k_2-k_1, \Delta\omega=\omega_2-\omega_1$，则有 $S=2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)e^{i(kx-\omega t)}$。

高频载波　其中 $e^{i(kx-\omega t)}$ 称为**高频载波（合成波列）**。

载波的波数k和圆频率ω都**分别接近各个单波**的波数和圆频率。即：$k=\frac{k_1+k_2}{2}\cong k_1\cong k_2$，

$\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cong\omega_1\cong\omega_2$ 载波的**波速也接近于各个单波的波速**，即：$c=\frac{\omega}{k}\approx\frac{\omega_1}{k_1}\approx\frac{\omega_2}{k_2}$

低频包络　其中 $A^*(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 称为**低频包络**，它是载波的包络线，是**载波最大振幅点的连线**，又称**波包迹**。波包迹随时空是周期变化的，且传播的。



慢变波包　由于$\Delta k \ll k, \Delta\omega \ll \omega$ ，因而波包迹（振幅）的波长和周期远大于单波的波长和周期，即波包迹（振幅）相对于载波随时空变化是相当缓慢的。所以经常称之为**慢变波包**。

注意　振幅A没有负的，出现负振幅代表着改变π个位相：$-A = Ae^{i\pi}$。

群速　**波包迹的传播速度**：$C_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \Rightarrow \frac{d\omega}{dk}$ **波的振幅(能量)的传播速度**称为**群速**：$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c + k\frac{dc}{dk}$

综上分析，波群有两种速度：**相速度**与**群速度**

① **相速度**是位相的传播速度（如槽脊的移速），载波的移动速度。

② **群速度**是振幅/能量的移动速度，波包迹的移动速度。

一维波动　若频散关系式 $\omega = \omega(k)$ 已知 则相速度为 $c = \frac{\omega}{k}$　群速度为 $c_g = \frac{d\omega}{dk}$

三维波动　若频散关系 $\omega = \omega(k,l,n) = \omega(\vec{K})$已知　则相速度为$\vec{C} = \frac{\omega}{K^2}\vec{K}$　群速度为 $\vec{C}_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}\vec{i} + \frac{\partial\omega}{\partial l}\vec{j} + \frac{\partial\omega}{\partial n}\vec{k}$

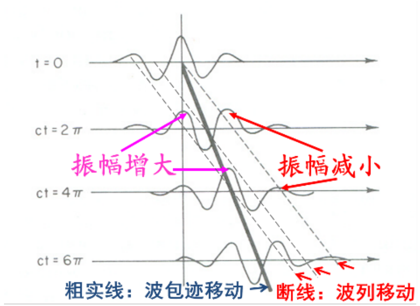
频散现象　若相速度大于群速度，则**波能量相对于合成波列有传输现象**，称为**频散现象**(如下图)。其原因在于各谐波分量相速c不同（c与k有关）。

相速度和群速度是否会不同？什么情况下相同？什么情况下不同？

有关系式：$\omega = kc \Rightarrow c_g = \frac{d\omega}{dk} = c + k\frac{dc}{dk}$ 讨论了相速度与群速度的关系。

① 若c与k无关 $\frac{dc}{dk} = 0, c_g = c$ 该波动的波速与波长无关，波动的能量随波动的传播而传播⇒非频散波，非频散波的波形不发生变化。

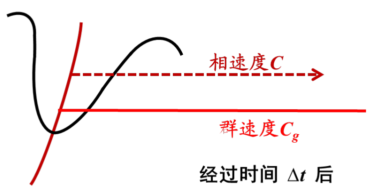
② 若c与k有关 $\frac{dc}{dk} \neq 0, c_g \neq c$ 该波动的波速与波长有关，波动的能量不随波动的传播而传播⇒频散波，频散波的波形会发生变化（右图）。



波包迹移动慢于波列移动

上游效应　→ 叶笃正，1949，能量频散理论

波动在传播过程中，会通过能量频散作用，上游波动的能量先于波动本身到达下游（即群速度大于相速度的情况），在下游激发新的波动或加强下游原有波动，称为上游效应。



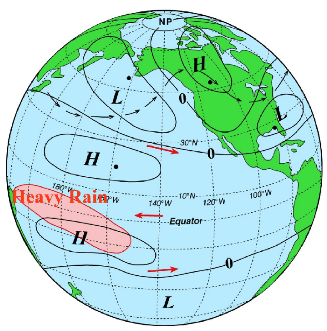
气候遥相关现象

① 直接环流的遥相关，如沃克环流。和群速度没有关系。

② 定常波列遥相关：PNA 遥相关，能量源在西太平洋赤道区域，往北形成正-负波列，相速为零，群速不为零，导致能量频散传输，形成波列。

这个形势维持时间较长，是气候问题，故这是一个驻波，或称“定常波”。

Pacific-North American (PNA) Pattern



6.3 微扰动线性化方法

小节引入

本节是本章最重要的方法，后续的所有波动都采用该方法讨论。

总体方法论 **物理模型建立**(波动的机制)→**数学模型**(原始方程在物理约束基础上的简化)→利用**微扰法**对数学模型**线性化**→求解模型(标准波形法)得到**频散关系式**→求解**波速**和**群速度**→根据解分析**波动性质**

求解波动 求解波动从基本方程组入手，例如运动方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv$ 中存在未知量的二次及二次以上乘积项，即**非线性项**。它使得求解困难，我们希望做**线性化处理**或者**求数值解**。大气中存在非线性现象，如：多平衡态、突变现象，但讨论波动时可以线性化。

求解方法 非线性方程→**作适当假设或近似**(物理模型)**+微扰动法→线性化+标准波形法**→近似解

基本思想 ① 任一气象要素，由**已知基本量**叠加上**未知扰动量**组成，即 $s=\bar{s}+s'$，且 $|s'|\ll|\bar{s}|$，是**微扰动**。例如基本气流的取法：依据研究的问题决定。可以取静止基流 $\bar{u}=\bar{v}=\bar{w}=0$ 或者沿纬圈的平均速度场$\bar{u}=const,\bar{v}=\bar{w}=0$，又或者考虑大气的斜压性 $\bar{u}=\bar{u}(y,z),\bar{v}=\bar{w}=0$。

② **基本量**满足**原方程和边界条件**。

③ **扰动量及其改变量**都是小量，其**二次及二次以上乘积项**（非线性项）可作为高阶小量**忽略**，从而得到线性方程。 扰动量充分小：热力学变量：指扰动量远小于基本场变量；运动学变量：是扰动量本身充分小，因为静止大气可作为基本态。

基本步骤 ① 将描写大气运动和状态的物理量分解为**基本量**与**扰动量**，将变量分解带入方程及边界条件

② 将所得方程减去基本量所满足的方程

③ 略去上述方程中扰动量的高阶项

运动方程 $\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+fv'$ $\quad\quad$ $\frac{\partial v'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial y}-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}f\bar{u}-fu'$

x方向运动方程的线性化

① $\bar{u}=const,\ \bar{v}=\bar{\omega}=0$。变量分解 $u=\bar{u}+u'$，$v=v'$，$\omega=\omega'$，$\varphi=\bar{\varphi}+\varphi'$。代入方程：

$$\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}+(v')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial y}+(\omega')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial p}=-\frac{\partial(\bar{\varphi}+\varphi')}{\partial x}+fv'$$

② 写出基本量的方程：$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=-\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}=0$。两式相减（注意到$\bar{u}$不随空间变化）：

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+u'\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial y}+\omega'\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial p}=-\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+fv'$$

③ 略去上述方程中扰动量的高阶项，得到线性化后的方程：$\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+fv'$

y方向运动方程的线性化

① 变量分解：$u=\bar{u}+u'$，$v=v',w=w',p=\bar{p}(y,z)+p',\rho=\bar{\rho}(y,z)+\rho'$。代入方程：$\frac{\partial v'}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial y}+w'\frac{\partial v'}{\partial z}=-\frac{1}{(\bar{\rho}+\rho')}\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial y}-f(\bar{u}+u')$，需要将气压梯度力项拆分：$\frac{1}{\bar{\rho}+\rho'}=\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{1}{1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}}\sim\frac{1}{\bar{\rho}}\left(1-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)$，故得到：

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial y}+w'\frac{\partial v'}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}-\frac{1}{\bar{\rho}}\left(1-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)\frac{\partial p'}{\partial y}-f\bar{u}-fu'$$

② 写出基本量的方程：$0=-\frac{1}{\bar{\rho}(y,z)}\frac{\partial\bar{p}(y,z)}{\partial y}-f\bar{u}$。两式相减（注意到其中$\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}=\frac{\rho'}{\bar{\rho}}f\bar{u}$）：

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial y}+w'\frac{\partial v'}{\partial z}=-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}f\bar{u}-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial y}+\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2}\frac{\partial p'}{\partial y}-fu'$$

③ 略去上述方程中扰动量的高阶项，得到线性化后的方程：$\frac{\partial v'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial y}-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}f\bar{u}-fu'$。

适用范围 小扰动法只适用与**小振幅波**的讨论 $|q'| \ll |\bar{q}|$，对于**有限振幅波**此法失效

只适用于天气系统发展的**初始阶段**，在发展旺盛期和后期锢囚阶段都不能使用(槽脊波动很大)

① 小振幅扰动可以略去 $\vec{V}' \cdot \nabla \vec{V}'$，这表示 $\begin{cases} \text{数学上：扰动量二次乘积项，数值很小} \\ \text{物理上：非线性作用不重要} \end{cases}$ 以小振幅扰动为主时，可近似为线性现象。

② 对于有限振幅的扰动，这时不满足$|A'| \ll |\bar{A}|$扰动量的二次以上乘积项不能作为高阶小量忽略。此时非线性项重要。**有限(大)振幅扰动**为非线性现象。例如：阻塞形势是大振幅扰动，非线性过程，用线性过程就不能解释阻塞高压形成的机制和特征。

标准波形法 ***normal modes method***，假设变量具有波形式解：$\boldsymbol{\phi = Ae^{i(kx+ly-\omega t)}}$ 这里实际上取实部，暂时忽略

对时间t求偏导：$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -i\omega\phi, \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-i\omega)^2 \phi \dots \dots \frac{\partial^n \phi}{\partial t^n} = (-i\omega)^n \phi$

对空间x求偏导：$\frac{\partial \phi}{\partial x} = ik\phi, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = (ik)^2 \phi \dots \dots \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} = (ik)^n \phi$ 同理对y求偏导：$\frac{\partial \phi}{\partial y} = il\phi, \dots$

得到如下符号关系式：$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \leftrightarrow (-i\omega)^2 \dots \dots \frac{\partial^n}{\partial t^n} \leftrightarrow (-i\omega)^n$ 微分项转变为代数项

$\frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow ik \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \leftrightarrow (ik)^2 \dots\dots \frac{\partial^n}{\partial x^n} \leftrightarrow (ik)^n \quad \frac{\partial}{\partial y} \leftrightarrow il, \dots \dots$

示例

$$\text{地转风：} \begin{cases} \bar{\rho}\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \bar{\rho} f v' \\ \bar{\rho}\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y} - \bar{\rho} f u' \end{cases} \text{设} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ P \end{pmatrix} e^{i(kx+ly-\omega t)} \Rightarrow \begin{cases} -i\omega\bar{\rho}U - \bar{\rho}fV + ikP = 0 \\ -i\omega\bar{\rho}V + \bar{\rho}fU + ilP = 0 \end{cases}$$

则微分方程组化为代数方程组。

频散关系式与案例分析

对于波动方程 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$ 设波动解：$\varphi = Ae^{i(kx-\omega t)}$，代入方程中：$(-i\omega)^2 - a^2 (ik)^2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm ak$。

表示频率和波数之间关系的式子：**频散关系式** $\boldsymbol{\omega = \Omega(k)}$。由频散关系式容易求出相速、群速：

$$c = \frac{\omega}{k} = \pm a, c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \pm a。$$

可见这是个非频散波。然而，对于$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b^2 \phi = 0$，求解后发现：$\omega = \pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}$，有$c = \frac{\omega}{k} = \pm\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{k^2}}$，

不难发现，如果原始方程中多了 $b^2\phi$ 这一项可能的耗散项，非频散波就变为了频散波。

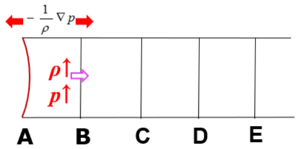
6.4 声波和兰姆波

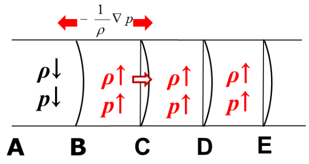
6.4.1 声波

6.4.1.1 基础概念

声波起源 *Sound wave*，大气是**可压缩**流体，局地空气被压缩或膨胀时，周围空气会依次被压缩或膨胀，声音就是由于这种绝热膨胀或压缩形成的

模型假设 绝热过程，压缩膨胀过程很快，忽略与外界热交换。





物理分析 ① AB间空气块受压缩，产生水平辐合→根据连续方程：密度增大→根据状态方程：气压增大→产生向左/向右的压力梯度力→AB区空气块向右加速运动，B处有加速度：水平运动→使得AB区水平辐散，密度/气压减小；同时，BC区空气受到压缩，密度/气压增大→在BC区域产生了向左和向右的压力梯度力→使得BC区域的右侧又产生了新的压缩区。

可见，A位置空气的运动引起其他空气质点也运动起来。**【传播机制】**

② BC区域产生向左的压力梯度力，对向右运动的AB区空气块施加了回复力→B处空气向右运动速度减小，最终使其向左运动→AB区空气再次受到压缩，空气辐合，气压增大，产生水平气压梯度力……这样循环往复，管子中出现了**压缩-膨胀-压缩**的声波。 **【振荡机制】**

内在条件 **大气可压缩性**是声波产生的内在条件。

传播机制 **辐合辐散交替变化**是声波的传播机制。

性质 ① 声波的振动，与传播方向一致，属于**典型纵波**。 ② 声波是多向传播的（球面波）。

③ 与天气系统（振荡周期为几天，传播速度为 10m/s～与风速相当）相比，声波是**高频波、快波**，如果不滤去，会引起不稳定。

6.4.1.2 声波的物理模型

中心思想 ① 物理模型首先要**突出研究对象的产生机制**：声波产生的机制、过程、物理条件要保留和突出。

② **去掉次要的波动**，即**滤波**：给出的条件要能去掉其它波动，保留声波。

③ 尽量**使问题简化**，声波可以是三维传播的，但为简单起见，可简化为一维问题，机制没发生变化。

物理假设 ① 大气是**可压缩的**。

② 大气运动仅仅局限在x轴上，$v \equiv 0, w \equiv 0$。由于声波是纵波，则声波只在x向传播，简化问题的同时可滤掉横波（如重力波、大气长波等）。

③ 不计科氏力$f=0$：科氏力不是引起声波的主要作用，滤去由科氏力产生波：惯性波、大气长波等。

④ 膨胀和压缩是**绝热过程**。

6.4.1.3 声波的数学模型

原始方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} & \text{运动方程}\\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 & \text{连续方程}\\ \dfrac{d\ln\theta}{dt}=0 \quad \left(\theta=\dfrac{p}{R\rho}\left(\dfrac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}\right) & \text{绝热方程}\end{cases}$$

三个方程、三个未知量，是一个闭合方程组

绝热方程 $\dfrac{dp}{dt}-\dfrac{\kappa p}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt}=0$，其中$\kappa=\dfrac{c_p}{c_v}\approx 1.4$。 将方程改为明确含有$p,\rho$的方程

绝热方程的推导

改写热力学能量方程：$\dfrac{d\ln\theta}{dt}=0$。由于膨胀和压缩是绝热过程：$\theta=\dfrac{p}{R\rho}\left(\dfrac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}=p^{1-\frac{R}{c_p}}\cdot\dfrac{1}{R\rho}\cdot p_0^{\frac{R}{c_p}}$

$\dfrac{d\ln\theta}{dt}=\left(1-\dfrac{R}{c_p}\right)\dfrac{d\ln p}{dt}-\dfrac{d\ln\rho}{dt}\Rightarrow\dfrac{1}{\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=\left(1-\dfrac{R}{c_p}\right)\dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dt}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt}\Rightarrow 0=\dfrac{c_v}{c_p}\dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dt}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt}$，令$\kappa=\dfrac{c_p}{c_v}\approx 1.4$，则得上式。

数学模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ \dfrac{dP}{dt}-\dfrac{\kappa P}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt}=0\end{cases}$$

下面两式联立消去 $\dfrac{d\rho}{dt}$ 得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial t}+u\dfrac{\partial P}{\partial x}+\kappa P\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}=0\end{cases}$$

具体过程

$\dfrac{dP}{dt}=\dfrac{\partial P}{\partial t}+u\dfrac{\partial P}{\partial x}$（不考虑$y,z$方向），$\dfrac{d\rho}{dt}=\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial\rho}{\partial x}$，故将②代入③，可得 $\dfrac{\partial P}{\partial t}+u\dfrac{\partial P}{\partial x}-\dfrac{\kappa P}{\rho}\left(-\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0$。

① 连续方程：$\dfrac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\vec{V}=0$ ② 大气的可压缩性 $\dfrac{d\rho}{dt}\neq 0$

③ 水平辐合辐散 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\neq 0$ ④ 绝热方程将p与ρ的变化联系起来，气压梯度力驱动大气运动。

线性化 ① 设：$\begin{matrix}P=\bar{P}+P'\\ u=\bar{u}+u'\\ \rho=\bar{\rho}+\rho'\end{matrix}$ 且 $\begin{matrix}\bar{P}=Const\\ \bar{u}=Const\\ \bar{\rho}=Const\end{matrix}$ 表示某纬度某高度

② 注意：$\frac{1}{\rho}\approx\frac{1}{\bar\rho}-\frac{\rho'}{\bar\rho^2}$ $\begin{cases}\frac{\partial P'}{\partial t}+\bar u\frac{\partial P'}{\partial x}+u'\frac{\partial P'}{\partial x}+\kappa\bar P\frac{\partial u'}{\partial x}+\kappa P'\frac{\partial u'}{\partial x}=0\\ \frac{\partial u'}{\partial t}+\bar u\frac{\partial u'}{\partial x}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial P'}{\partial x}-\frac{\rho'}{\bar\rho^2}\frac{\partial P'}{\partial x}=0\end{cases}$

③ 略去扰动量的二次乘积项即非线性项：$\begin{cases}\frac{\partial P'}{\partial t}+\bar u\frac{\partial P'}{\partial x}+\kappa\bar P\frac{\partial u'}{\partial x}=0 & ①\\ \frac{\partial u'}{\partial t}+\bar u\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial P'}{\partial x}=0 & ②\end{cases}$

求波动解 可以使用**消元法**或**行列式方法**。

消元法

消去u',即$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar u\frac{\partial}{\partial x}\right)①-\kappa\bar P\frac{\partial}{\partial x}②$：$\Rightarrow\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar u\frac{\partial}{\partial x}\right)^2P'-\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P'=0$ 双曲型的波动方程，令形式解为

$P'=Ae^{ik(x-ct)}$，有 $\frac{\partial P'}{\partial t}=Ae^{ik(x-ct)}\cdot(-ikc)=-ikcP'\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\sim-ikc$，$\frac{\partial P'}{\partial x}=Ae^{ik(x-ct)}\cdot(ik)=ikP'\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\sim ik$

$\Rightarrow(-ikc+\bar uik)^2P'-\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}(ik)^2P'=0\Rightarrow\left[(c-\bar u)^2-\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}\right]P'=0$ P'具有零解，P'存在非零解即波动存在的条件为：

$(c-\bar u)^2-\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}=0\Rightarrow c=\bar u\pm\sqrt{\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}}\xrightarrow{\text{状态方程}}\boldsymbol{c=\bar u\pm\sqrt{\kappa R\bar T}}$ 令$c_s=\sqrt{\kappa R\bar T}$(绝热声速)，则：$c=\bar u\pm c_s$

表明大气声波的相速决定于基本气流和大气的热性质和热状态。

行列式方法

形式解：$P'=Ae^{ik(x-ct)},u'=Be^{ik(x-ct)}$，又有 $\frac{\partial}{\partial t}\sim-ikc,\frac{\partial}{\partial x}\sim ik$，可得$\begin{cases}(-ikc+ik\bar u)P'+(ik\kappa\bar P)u'=0 & ③\\ \left(i\frac{k}{\bar\rho}\right)P'+(-ikc+ik\bar u)u'=0 & ④\end{cases}$

如果有非平凡解，则行列式为零：$\begin{vmatrix}-c+\bar u & \kappa\bar P\\ 1/\bar\rho & -c+\bar u\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-c+\bar u)^2=\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}\Rightarrow c=\bar u\pm\sqrt{\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}}=\bar u\pm\sqrt{\kappa R\bar T}$

（若行列式为零，则矩阵为奇异 *singular* 且不可逆的，则不能通过求逆的方法来解方程，此时矩阵的行向量线性相关，则两个方程实际上只提供了一个约束条件，一个约束条件无法确定两个未知数，因此方程将有无穷多解，这些解构成一个解空间，即存在非平凡解）

6.4.1.4 声波的性质与滤波条件

声速方程 $\boldsymbol{c=\bar u\pm\sqrt{\kappa R\bar T}=\bar u\pm c_s}$ $c_g=c$

讨论 ① 声波是线性叠加在基本气流上的一维波动，是**双向传播**的。
② 波速c与k无关，是**非频散波**。
③ 声波的传播速度c，决定于基本气流和大气的**热性质**（物质常数κ）和**热状态**（平均温度），这表明声波的传播速度取决于介质。
④ 声波传播速度大小：$c\approx(10\pm330)\mathrm{ms^{-1}}$ 基本气流和大气长波移速为$10\mathrm{ms^{-1}}$左右，声波为**快波**。
⑤ 声波为**高频波**。除个别情况外，声波对天气变化无影响。

滤波条件 ① **大气不可压**。注意滤波的方法不是唯一的。
② 水平无辐散或准地转近似，可以去掉水平向的声波。
③ 静力平衡，气压取决于气柱重量而不是压缩程度，可以去掉垂直向的声波。

6.4.2 兰姆波

兰姆波 *Lamb wave*，若考虑地球的旋转作用，在静力平衡大气中存在一种只沿水平方向传播的特殊声波，我们称其为兰姆波。

物理假设 ① 大气是**可压缩的**。
② **静力平衡**，且 $w\equiv0$，即大气运动为水平运动，滤掉重力波。
③ 考虑地球旋转，但地转参数f为常数，滤去了大气长波。
④ 膨胀和压缩是**绝热过程**。

数学模型

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+f_0v\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-f_0u\\ -\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g=0 \quad \text{静力平衡}\\ \frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0\\ \frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}=0 \quad \text{绝热，位温守恒}\end{cases}$$

线性化与求解过程

① 取静止大气作为基本大气状态。设$u=u',v=v',\bar{u}=\bar{v}=0 \quad p=\bar{p}+p',\rho=\bar{\rho}+\rho',\theta=\bar{\theta}+\theta'$，同时在某个高度上，$\bar{p}=const,\bar{\rho}=const,\bar{\theta}=const$。此外，基本态满足原方程：$\begin{cases}0=-\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial\bar p}{\partial x},0=-\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial\bar p}{\partial y},-\frac{\partial\bar p}{\partial z}-\bar\rho g=0\\ \frac{\partial\bar\rho}{\partial t}=0,\frac{\partial\bar\theta}{\partial t}=0\end{cases}$

② 代入方程，注意 $\frac{1}{\rho}\approx\frac{1}{\bar\rho}-\frac{\rho'}{\bar\rho^2}$ ，得到：

$$\begin{cases}\frac{\partial u'}{\partial t}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}=-\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}+f_0v'\\ \frac{\partial v'}{\partial t}+u'\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial y}=-\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial p'}{\partial y}-f_0u'\\ -\frac{\partial\bar p}{\partial z}-\bar\rho g-\frac{\partial p'}{\partial z}-\rho' g=0\\ \frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho'\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)+u'\frac{\partial\rho'}{\partial x}+v'\frac{\partial\rho'}{\partial y}+\bar\rho\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0\\ \frac{\partial\theta'}{\partial t}+u'\frac{\partial\theta'}{\partial x}+v'\frac{\partial\theta'}{\partial y}=0\end{cases}$$

其中 静止大气基本态：$\bar{u}=\bar{v}=0$基本量满足原方程：$\frac{\partial\bar\rho}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial\bar\theta}{\partial t}=0-\frac{\partial\bar p}{\partial z}-\bar\rho g=0$。

③ 略去高阶小量，并考虑基本方程组，可得到线性化方程组：$\frac{\partial u'}{\partial t}-f_0v'+\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}=0,\frac{\partial v'}{\partial t}+f_0u'+\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial p'}{\partial y}=0,\frac{\partial p'}{\partial z}=-\rho' g,\frac{\partial\theta'}{\partial t}=0,\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\bar\rho\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0$ 此外 $\frac{\theta'}{\bar\theta}=\frac{1}{\kappa}\frac{p'}{\bar p}-\frac{\rho'}{\bar\rho}$，若初始无位温扰动，则$\theta'\equiv0$，所以 $\rho'=\frac{\bar\rho}{\kappa}\frac{p'}{\bar p}=\frac{p'}{\kappa R\bar T}=\frac{p'}{c_s^2}$，$\rho'=\frac{\bar\rho}{\kappa}\frac{p'}{\bar p}=\frac{p'}{\kappa R\bar T}=\frac{p'}{c_s^2}$。令$\pi'=\frac{p'}{\bar\rho}$，有：$\frac{\partial u'}{\partial t}-f_0v'+\frac{\partial\pi'}{\partial x}=0,\frac{\partial v'}{\partial t}+f_0u'+\frac{\partial\pi'}{\partial y}=0,\frac{\partial\pi'}{\partial t}+c_s^2\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0$。

④ 消元：$\frac{\partial(1)}{\partial t}-\frac{\partial(3)}{\partial x}$: 消去$\pi'$ $\quad \frac{\partial^2u'}{\partial t^2}-f_0\frac{\partial v'}{\partial t}-c_s^2\left(\frac{\partial^2u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v'}{\partial x\partial y}\right)=0 \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u'-\left(f_0\frac{\partial}{\partial t}+c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)v'=0$

$\frac{\partial(2)}{\partial t}-\frac{\partial(3)}{\partial y}$: 消去$\pi'$ $\quad \frac{\partial^2v'}{\partial t^2}+f_0\frac{\partial u'}{\partial t}-c_s^2\left(\frac{\partial^2u'}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2v'}{\partial y^2}\right)=0 \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v'+\left(f_0\frac{\partial}{\partial t}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\right)u'=0$

$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(4)+\left(f_0\frac{\partial}{\partial t}+c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)(5)$ 消去v' $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u'+\left(f_0\frac{\partial}{\partial t}+c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)\left(f_0\frac{\partial}{\partial t}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\right)u'=0 \quad L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+f_0^2\right]$ 假设扰动与y无关：$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+f_0^2\right]$

⑤ 设波动解：$u'=Ue^{i(kx-\omega t)}$，代入（6）式 $\omega^2(\omega^2-c_s^2k^2-f_0^2)=0$，最终可解得 $\omega=\pm(c_s^2k^2+f_0^2)^{1/2}$。

波速 取$\omega>0$，$\boldsymbol{c=(c_s^2+f_0^2/k^2)^{1/2}}>c_s$ **快波** $\qquad \boldsymbol{c_g=c_s^2/(c_s^2+f_0^2/k^2)^{1/2}}<c_s$ **频散波**

垂直结构 $\frac{\partial p'}{\partial z}=-\frac{g}{c_s^2}p' \qquad p'=P(z)e^{i(kx-\omega t)} \qquad \frac{dP}{dz}=-\frac{g}{c_s^2}P(z) \qquad P(z)=P(0)e^{-gz/c_s^2}$

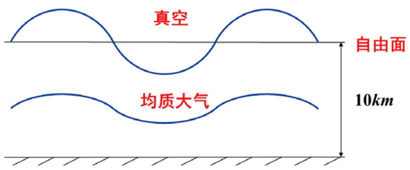
$p'=P(0)e^{-gz/c_s^2}e^{i(kx-\omega t)}$ 若地面无气压扰动，则 $p'=0$，此时无波动。

因此，兰姆波属于外波，扰动气压随高度按指数减小。但扰动速度随高度几乎不变。

6.5 重力外波和重力惯性外波

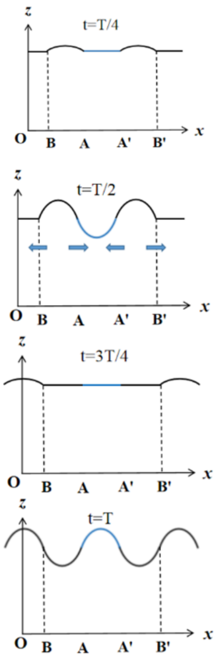
重力波 *gravity wave*，是大气在重力作用下产生的一种波动，它的产生和垂直运动联系在一起，要求 w 不等于零。分为重力内波、重力外波。

重力外波 平静水面（上下两层密度差异巨大）受到扰动后形成的**水面波**是典型的重力外波。但是，实际大气没有自由面（自由面是指密度不同流体的交界面），**对流层顶**可以认为一个界面。



假设 在讨论大气动力过程时（正压情况），可视大气为具有一定厚度的**均质大气**，具有了自由面。在大气边界面上的空气受到垂直扰动后，偏离平衡位置，在重力作用下可以产生类似于水面波的波动，称为重力外波。

6.5.1 重力外波



6.5.1.1 物理机制

物理机制 **均质流体**的**自由表面**上产生的波动，与**水面波**相同。我们以一维渠道波为例：

假设初始时刻，给 AA' 向上的扰动：AA' 间的压强（水柱高度）大于 BA 间和$A'B'$ 间的压强→A 线向左，A' 线向右的压力梯度力→A 线向左运动，A' 线向右运动。这产生两种作用：

① AA' 间产生辐散，自由面下降，压力减小，压力梯度力减小，但继续加速辐散→直到自由面水平，压力梯度力为零→由于惯性继续辐散→产生向内的压力梯度力→辐散减弱至 0，这时向内的压力梯度力最大→产生辐合，自由面上升→产生振荡。因此从力的角度讲，**压力梯度力**是回复机制（由气柱重量差产生）；从运动角度讲，**水平的辐合辐散运动**是回复机制。 **【振荡机制】**

② AA' 间辐散→BA 间、$A'B'$ 间辐合→自由面上升→扰动向左右两边传播

传播的机制：水平辐合辐散 **【传播机制】**

性质 ① **双向传播** ② 上下振荡、水平传播，是**垂直向横波**

形成条件 ① **自由表面**的存在 ② **水平辐合辐散**是其产生、传播的重要机制。

6.5.1.2 大气中重力外波物理模型

假设条件 ① **均质不可压**，且具有**自由表面**，可以滤去重力内波（没有内部的密度层结）、声波

② 不计科氏力作用 $f = 0$，可以滤去惯性波、大气长波

③ 波动是一维的，运动限制在xz平面内（$v = 0$），简化问题、滤去水平向横波：大气长波。

6.5.1.3 数学模型

原始方程
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}\\ \lambda\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}-g\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0\end{cases}$$

边界条件： $\begin{cases}z=0, w=0\\ z=H, \dfrac{dp}{dt}=0\end{cases}$ 上部流体压力不变

其中 **λ为示踪系数**，$\lambda=0$为静力平衡，$\lambda=1$为非静力平衡。 可以观察静力平衡对重力外波的作用

无扰动时，流体深度为H。

线性化 假设**基本气流为均匀西风**，$\bar{u}=const$，$\bar{w}=0$。

$u=\bar{u}+u'$，$w=w'$，$\rho=\bar{\rho}=\rho_0$，$\rho'=0$（扰动均质不可压），$p=\bar{p}(y,z)+p'$ 代入原式：

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial u'}{\partial x}+u'\dfrac{\partial u'}{\partial x}+w'\dfrac{\partial u'}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x}\\ \lambda\left(\dfrac{\partial w'}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial w'}{\partial x}+u'\dfrac{\partial w'}{\partial x}+w'\dfrac{\partial w'}{\partial z}\right)=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial z}-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial z}-g\\ \dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial w'}{\partial z}=0\end{cases}$$

基本量满足静力平衡：$-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial z}-g=0$

并略去二次及以上乘积项，代入静力平衡，得到线性化方程组。（基本量还有不少方程，但用不到）

线性方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial u'}{\partial x}=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x} & ① \\ \lambda\left(\dfrac{\partial w'}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial w'}{\partial x}\right)=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial z} & ② \\ \dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial w'}{\partial z}=0 & ③\end{cases}$$

边界条件　边界条件的线性化：$z=0, w=0\Rightarrow w'=0$　得到下边界条件

$$z=H,\ \frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+w\frac{\partial p}{\partial z}=0\ \Rightarrow\frac{\partial p'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial p'}{\partial x}+u'\frac{\partial p'}{\partial x}+w'\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+w'\frac{\partial p'}{\partial z}=0$$

略去小量 $\Rightarrow\dfrac{\partial p'}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial p'}{\partial x}+w'\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial z}=0$　再代入静力平衡，可得到上边界条件

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}-g=0\Rightarrow\frac{\partial p'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial p'}{\partial x}-\rho_0 g w'=0$$ （此处没有科氏力）

标准波形　令 $\left(u',w',\dfrac{p'}{\rho_0}\right)=[\boldsymbol{U(z)},\boldsymbol{W(z)},\boldsymbol{P(z)}]\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i(kx-\omega t)}}$（分离变量）　代入方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial u'}{\partial x}=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x} & ① \\ \lambda\left(\dfrac{\partial w'}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial w'}{\partial x}\right)=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial z} & ② \\ \dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial w'}{\partial z}=0 & ③\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\bar{u}k-\omega)U=-kP & ④ \\ i\lambda(\bar{u}k-\omega)W=-\dfrac{dP}{dz} & ⑤ \\ ikU+\dfrac{dW}{dz}=0 & ⑥\end{cases}$$ 常微分方程，无法用行列式

边界条件：$z=0,\quad W=0$　⑦　　$z=H,\quad i(\bar{u}k-\omega)P-gW=0$　⑧

消元法求解方程

$$\begin{cases}(\bar{u}k-\omega)U=-kP & ④ \\ i\lambda(\bar{u}k-\omega)W=-\dfrac{dP}{dz} & ⑤ \\ ikU+\dfrac{dW}{dz}=0 & ⑥\end{cases}$$ 求 $\dfrac{d}{dz}$④ $\Rightarrow\dfrac{(\bar{u}k-\omega)}{k}\dfrac{dU}{dz}=-\dfrac{dP}{dz}$　⑨

将⑨式代入⑤式消去 $P\ \Rightarrow\dfrac{(\bar{u}k-\omega)}{k}\dfrac{dU}{dz}=i\lambda(\bar{u}k-\omega)W$　⑩　求 $\dfrac{d}{dz}$⑥ $\Rightarrow ik\dfrac{dU}{dz}+\dfrac{d^2W}{dz^2}=0$ ，

则⑩式和⑪式消去 $\dfrac{dU}{dz}\Rightarrow\boldsymbol{\dfrac{d^2W}{dz^2}-\lambda k^2W=0}$　Q　　二阶常系数微分方程

边界条件 $\begin{cases}z=0,\quad W=0 & ⑦ \\ z=H,\quad i(\bar{u}k-\omega)P-gW=0 & ⑧\end{cases}$　且④式变为 $(\bar{u}k-\omega)U=-kP\Rightarrow U=-\dfrac{k}{(\bar{u}k-\omega)}P$　⑬

⑬式代入⑥式 $ikU+\dfrac{dW}{dz}=0\ \Rightarrow P=\dfrac{(\bar{u}k-\omega)}{ik^2}\dfrac{dW}{dz}$　⑭　⑭式代入上边界⑧，$\Rightarrow z=H,\left(\dfrac{\bar{u}k-\omega}{k}\right)^2\dfrac{dW}{dz}-gW=0$　⑮

则边界条件变为：$\begin{cases}z=0,\quad W=0 & ⑦ \\ z=H,\quad \left(\dfrac{\bar{u}k-\omega}{k}\right)^2\dfrac{dW}{dz}-gW=0\end{cases}$　待求解方程为：$\dfrac{d^2W}{dz^2}-\lambda k^2W=0$　⑫

现在考虑静力平衡大气的情况：$\lambda=0$　则⑫变为 $\dfrac{d^2W}{dz^2}-\lambda k^2W=0\Rightarrow\dfrac{d^2W}{dz^2}=0\Rightarrow\boldsymbol{\dfrac{dW}{dz}=B}$　通解 $W=A+Bz$

代入边界条件：$\begin{cases}z=0,\quad W=0\Rightarrow A+B\times 0=0\Rightarrow A=0 \\ z=H,\quad \left(\dfrac{\bar{u}k-\omega}{k}\right)^2\dfrac{dW}{dz}-gW=0\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{W=Bz}$

$$\Rightarrow\left(\frac{\bar{u}k-\omega}{k}\right)^2B-gBH=0\quad\Rightarrow\bar{u}k-\omega=\pm\sqrt{gH}k\ \Rightarrow c=\bar{u}\pm\sqrt{gH}$$ 重力外波波速公式

波速公式　$\boldsymbol{c=\bar{u}\pm\sqrt{gH}}$　均质大气，由静力平衡条件积分，并假设为等温大气，则有 $gH=\dfrac{\bar{p}}{\rho_0}=R\bar{T}$

$c=\bar{u}\pm\sqrt{gH}=\boldsymbol{\bar{u}\pm\sqrt{R\bar{T}}\sqrt{R\bar{T}}}$　称为**牛顿声速**，它将声速与平均温度联系起来。

$ikU+\dfrac{dW}{dz}=0$　⑥ $\Rightarrow\boldsymbol{U=-\dfrac{1}{ik}\dfrac{dW}{dz}=\dfrac{i}{k}B}$. $\boldsymbol{i=e^{i\frac{\pi}{2}}}$

性质 ① **铅直速度扰动振幅随高度线性增加 ($W = Bz$)**。
② 水平速度扰动振幅为常值。
③ **水平**速度扰动与**铅直**速度扰动有 **90°位相差**。 辐合辐散与垂直运动

非静力平衡大气的求解

非静力平衡大气：$\lambda = 1$，则⑫变为 $\frac{d^2W}{dz^2} - \lambda k^2 W = 0 \Rightarrow \frac{d^2W}{dz^2} - k^2 W = 0$ 存在通解：$W = Ae^{kz} + Be^{-kz}$

代入边界条件：$\begin{cases} z = 0, \quad W = 0 \Rightarrow A + B = 0 \rightarrow A = -B \\ z = H, \quad \left(\frac{\bar{u}k-\omega}{k}\right)^2 \frac{dW}{dz} - gW = 0 \end{cases}$ 则上边界 $\rightarrow \left(\frac{\bar{u}k-\omega}{k}\right)^2 (Ake^{kH} - Bke^{-kH}) - g(Ae^{kH} + Be^{-kH}) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\bar{u}k-\omega}{k}\right)^2 (Ake^{kH} + Ake^{-kH}) - g(Ae^{kH} - Ae^{-kH}) = 0 \rightarrow \left(\frac{\bar{u}k-\omega}{k}\right)^2 = g\left(\frac{e^{kH}-e^{-kH}}{ke^{kH}+ke^{-kH}}\right) = \frac{g}{k}\mathrm{th}(kH)$

波速公式 $c = \bar{u} \pm \left[\frac{g}{k}\,\mathrm{th}(kH)\right]^{1/2}$ 双曲正切函数

① 当$kH = \frac{2\pi}{L}H \gg 1$时，**波长远小于深度**，$\mathrm{th}(kH) \approx 1$，$c = \bar{u} \pm (g/k)^{1/2}$ 称为斯托克斯**深水**重力波。

② 当$kH \ll 1$时，**波长远大于深度** $\mathrm{th}(kH) \approx kH$，$c = \bar{u} \pm \sqrt{gH}$，变为拉格朗日**浅水**重力波。

浅水重力波波速与静力平衡条件下重力波波速是相同的，因此，当波长远大于流体深度，即扰动的水平尺度远大于其垂直尺度时，非静力平衡的其他扰动对水平运动影响可忽略，因此有 $L \gg H$ 是静力平衡成立的**充分条件**。

6.5.1.4 讨论

讨论要点 ① 重力外波**线性叠加**在基本气流上。
② 重力外波是**双向传播**的（速度可正可负）。

③ 浅水重力波 $H = 10km$时，$\sqrt{gH} \approx 300m/s$，是快波，高频波。 与声波差不多，但我们略去声波，却不略去重力外波，这是为何？

④ 拉格朗日浅水重力波：**非频散波**。斯托克斯深水重力波：**频散波**。
重力外波水平辐合辐散强（非大尺度的），对应着很强的垂直上升运动，产生暴雨等中小尺度天气系统，但不是日常天气。

6.5.1.5 滤波的条件

具体条件 ① **水平无辐合辐散**或准地转近似（f为常数的情况下，水平散度为零）。
② **没有自由表面**（两种情况：要么流体充满整个空间，要么具有刚性上边界）
③ 大气**作水平运动**，没有垂直速度（上表面没有变化）。

6.5.2 惯性波

惯性波 质点受扰动后，在**科氏力作用**下，产生**惯性振荡**，惯性振荡传播出去，形成**惯性波**。
分为**惯性内波**、**惯性外波**。与中尺度天气相联系。惯性波可以在水平方向和垂直方向传播。

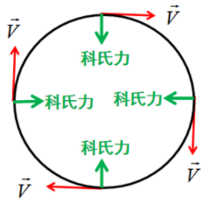
惯性振荡 由于地球自转，产生最主要的惯性力是**科氏力**。质点受扰动后，**只在科氏力作用下**，产生振荡。

科氏力 $\vec{A} = -2\vec{\Omega} \times \vec{V} = 2\Omega(v\sin\varphi - w\cos\varphi)\vec{i} - 2\Omega u\sin\varphi\,\vec{j} + 2\Omega u\cos\varphi\,\vec{k}$

运动方程 仅在科氏力作用下的大气运动方程 $\begin{cases} \frac{du}{dt} = fv - \tilde{f}w \\ \frac{dv}{dt} = -fu \\ \frac{dw}{dt} = \tilde{f}u \end{cases}$，$\begin{aligned} f &= 2\Omega\sin\phi \\ \tilde{f} &= 2\Omega\cos\phi \end{aligned}$

实际大气厚度远小于水平尺度（薄层），采用**薄层近似**后的运动方程中，大气中惯性振荡以**水平惯性振荡**为主，因此可以去除 $\tilde{f}$ 的项（去除w的项同时静力平衡）。

6.5.2.1 水平惯性振荡



惯性振荡示意图

震荡解　$u = A\sin ft + B\cos ft$　或　$v = C\sin ft + D\cos ft$

f为简谐振荡的圆频率，周期：$T = \frac{2\pi}{f}$

在北纬 45 度附近，周期$T \approx 17$小时，属于高频波。

求解

只考虑科氏力，$\begin{cases} \frac{du}{dt} = fv & ① \\ \frac{dv}{dt} = -fu & ② \end{cases}$　消去u：$\frac{d}{dt}② \Rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + f^2v = 0$ 或消去v：$\frac{d}{dt}① \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + f^2u = 0$

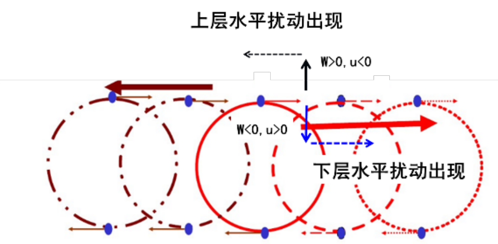
运动轨迹　运动轨迹是个**圆**，半径为$\sqrt{u^2+v^2}/f$。

轨迹求解

很容易可以得到：$\frac{d}{dt}(u^2+v^2) = 0$　科氏力不作功，动能不变。若对① ② 式进行时间t积分，可得：

$\begin{cases} u - u_0 = f(y - y_0) \\ v - v_0 = -f(x - x_0) \end{cases}$，因此，有 $u^2 + v^2 = u_0^2 + v_0^2 = f^2\left[\left(x - x_0 - \frac{v_0}{f}\right)^2 + \left(y - y_0 + \frac{u_0}{f}\right)^2\right]$。

传播机制　若有传播机制，惯性振荡会传播出去形成惯性波。
机制是**水平辐合辐散**和垂直运动（根据①+②式也可以推导出传播，垂直运动并不必要。但这种传播方式还不清楚）
在科氏力作用下形成的惯性振荡通过水平辐合辐散及垂直运动的交替变化，在水平方向和垂直方向传播，形成惯性波。



形成条件　外部条件：地球旋转
内部条件：垂直运动及其加速度（非静力平衡），　水平散度的交替变化。.

注意　实际上，大气中纯惯性波并不常见，因为科氏力和重力是同时起作用的。纯惯性振荡在大气中不常见，但**在海洋中可见**。$R = v/f$，R为半径，f增加，v变化不大，R减小

重力惯性波　**惯性波与重力波形成混合波**，称为**重力惯性波**。若发生在**自由表面**上，称为**重力惯性外波**；若发生在**层结大气**中，称为**重力惯性内波**。

案例分析

以作旋转运动的一个水槽内的水为例：

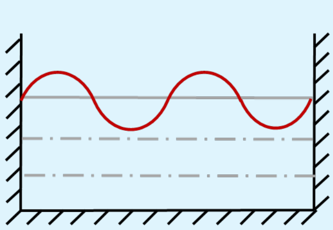
① 没有旋转运动，则没有惯性力，是纯重力的作用下，产生的垂直方向的振动、水平方向的波动。

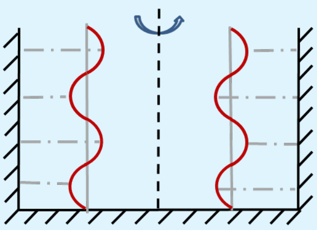
没有扰动时，自由面水平；若给自由面以垂直方向的扰动，会在自由面上产生水平波动，为重力外波。

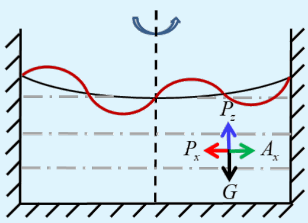
② 旋转运动很强，Ω很大，相比来看，重力可以不计，即在纯惯性力作用下，产生水平面上的振荡、垂直方向的波动。没有扰动时，自由面垂直；若给自由面以水平方向的扰动，会在自由面上产生垂直波动，为惯性外波。

③ 重力、惯性力共存下：没有扰动时，自由表面呈抛物线型时才稳定。

受力分析：在垂直方向上，垂直气压梯度力与重力平衡；在水平方向上，水平气压梯度力与科氏力/惯性离心力平衡。若给自由面以扰动，会在自由面上产生波动（可以理解为水平波动受惯性力作用而倾斜），为重力惯性外波。


重力外波


惯性外波



重力惯性外波

6.5.3 重力惯性外波

6.5.3.1 重力惯性外波物理模型

假设　① **静力平衡**（非静力平衡能够产生深水波和浅水波，如果要让科氏力产生作用，水平尺度必须很大，就相当于浅水波，而浅水波解就满足静力平衡），**均质不可压**（ρ 是常量）。

② **有自由面**。

③ 运动发生在**旋转地球**上，即 $f \neq 0,\ f = Const = f_0$。

波动情况　滤去了声波、内波、大气长波；含有**重力外波**（2 个解）、**由于科氏力引起的惯性波**（2 个解）的解。

如果为**四个解**，则重力外波和惯性波分开

如果为**两个解**，则说明重力外波与惯性波混合成为了重力惯性外波。

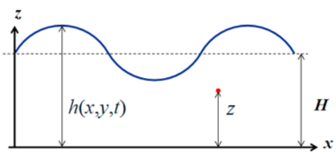
6.5.3.2 数学模型

原始方程　考虑**科氏力**作用下的方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+f_0v\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}-f_0u\\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}-g=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0\end{cases}$$

它具有四个方程、四个未知量，是闭合方程组。注意方程中没有体现自由表面的性质（体现在边界条件中）。

重要条件　静力平衡 $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g=0$，由某一高度$z$积分至自由面，$p=p_h+\rho g(h-z)\Rightarrow$



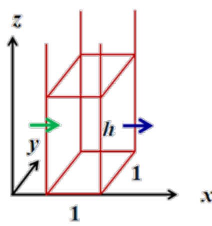
$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-g\frac{\partial h}{\partial x}$，$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=-g\frac{\partial h}{\partial y}$　因为h与z无关，那么，$-g\frac{\partial h}{\partial x}$ 和 $-g\frac{\partial h}{\partial y}$ 与z无关，即：趋动大气运动的力，**气压梯度力与z无关**。

方程简化　因为气压梯度力与z无关，所以 $\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ \frac{\partial v}{\partial z}=0$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+f_0v\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}-f_0u\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\boldsymbol{g}\dfrac{\boldsymbol{\partial h}}{\boldsymbol{\partial x}}+f_0v & ①\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\boldsymbol{g}\dfrac{\boldsymbol{\partial h}}{\boldsymbol{\partial y}}-f_0u & ②\end{cases}$$

边界条件　同时，辐合辐散会导致自由表面高度发生变化，由**连续方程**描述。

对连续方程整层积分：$\int_0^h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz=0$，因为 $\frac{\partial u}{\partial z}=0$，$\frac{\partial v}{\partial z}=0$　所以积分可写为：



$h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+w|_h-w|_0=0$　考虑**边界条件 $w|_0=0, w|_h=\frac{dh}{dt}$**，将其代入得到：

$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$ ③ $\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}+\frac{\partial hv}{\partial y}=0$ ④ $\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t}=-\nabla\cdot(h\vec{V})$

物理含义

$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}+\frac{\partial hv}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial h}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(h\vec{V}\right)$ 一式中，$h\times 1$ 表示面积，$h\times 1\times 1$ 表示体积，则 $\frac{\partial h}{\partial t}$ 表示单位截面积空间体体积的变化率，则 $u\times h\times 1\times 1$ 表示体积通量，即单位时间通过如图所示的空间体的东西侧面、由左向右的体积输送的体积。

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x}=\frac{\Delta uh}{\Delta x}=\frac{uh|_{东}--uh|_{西}}{1}$$

$\frac{\partial}{\partial x}(uh)\Rightarrow$ 单位时间，通过单位水平截面、高为h的空间体的东西侧面的体积净流出量。

同理可知：$\frac{\partial}{\partial t}(vh)$ 单位时间，通过单位水平截面、高为h的空间体的南北侧面的体积净流出量。

$\frac{\partial hu}{\partial x}+\frac{\partial hv}{\partial y}$ 为单位时间、通过单位水平截面，高为h的空间体体积的总流出量。

$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}+\frac{\partial hv}{\partial y}=0$ 就表示体积守恒：质量守恒＋均质不可压＝体积守恒

$\begin{cases}\text{净流入，}\nabla\cdot\left(h\vec{V}\right)<0,\frac{\partial h}{\partial t}>0,h\uparrow\\ \text{净流出，}\nabla\cdot\left(h\vec{V}\right)>0,\frac{\partial h}{\partial t}<0,h\downarrow\end{cases}$ 体现了辐合辐散对自由面高度的影响。

最终形式 原方程组变为**浅水方程组** $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial h}{\partial x}+f_0v\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial h}{\partial y}-f_0u\\ \frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}+\frac{\partial hv}{\partial y}=0\end{cases}$ 三个方程、三个未知量，是闭合方程组