

# 第一章 大气运动的基本方程组

## 章节目录

依据基本物理定律（牛二定律、质量守恒等），结合地球大气的特点，建立描写大气运动的基本方程组。

## 1.0 背景知识

### 1.0.1 地球特征

公转周期	365.25 天	自转周期	太阳日 24 小时，恒星日 23 小时 56 分 4 秒
自转角速度	$\vec{\Omega} = \frac{2\pi}{86164s} = 7.292 \times 10^{-5} s^{-1}$		
地球半径	平均半径 $a \approx 6.371 \times 10^6 m$	地球质量	$M \approx 5.976 \times 10^{24} kg$

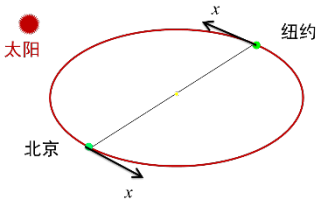
### 1.0.2 大气特征

总质量	$M_a \approx 5.136 \times 10^{18} kg$	比地球的总质量少六个量级
标准大气压	$p_0 = 1013.25 hPa \approx 1000 hPa$	大气密度值 $\rho_0 \approx 1.29 kg/m^3$

### 1.0.3 运动的描述

**运动的性质** 运动本质是位置随时间的改变，任何运动都是相对于确定的参考系的运动。运动本身不受参考系的影响，但其是对运动的描述却随着参考系的不同而不同。

在地球外某一固定点（惯性参考系）观测地球上大气运动，是绝对运动，可以看到大气和地球一起转动；在地球上观测大气运动，是相对运动，观测者和地球一起转动，感觉不到地球自转。如右图，发现北京与纽约风的方向明显不同，但地球上都是西风。



- 大气运动**
- ① 建立坐标系（随地球旋转的非惯性参考系）
  - ② 分析单位质量空气块的受力情况（拉格朗日观点）
  - ③ 建立单位质量空气块的运动方程（牛顿第二定律）
  - ④ 化为局地大气运动方程（观测数据为局地物理量场，转换为欧拉观点）
  - ⑤ 描写大气运动的其他方程：质量守恒、热力学第一定律、理想气体状态方程等。
  - ⑥ 运动矢量方程化为三维标量运动方程（坐标系的选择：球坐标还是直角坐标）
  - ⑦ 求解局地大气运动方程组

- 主要问题**
- ① 参考系的转变：如何将惯性参考系转换为旋转参考系？
  - ② 分析方法的转变：如何将拉格朗日观点转换为欧拉观点？
  - ③ 坐标系的选择：选择球坐标（尺度很大的运动）还是局地直角坐标（运动相对小）？

## 1.1 空气质点所受的力及运动方程

### 1.1.1 参考系的转变

## 引言

牛顿第二定律在惯性坐标系中成立，在非惯性坐标系中不成立，我们需要进行参考系的改变来适应定律。

### 1.1.1.1 惯性坐标系与旋转坐标系中矢量全导数的关系

微分算子  $\frac{d_a}{dt}(\quad) = \frac{d}{dt}(\quad) + \vec{\Omega} \times (\quad)$  ① 绝对变化项 ② 相对变化项 ③ 牵连变化项

对于任意矢量 $\vec{A}$ , 满足:  $\frac{d_a}{dt}(\vec{A}) = \frac{d}{dt}(\vec{A}) + \vec{\Omega} \times (\vec{A})$  该算子是联系惯性坐标系与旋转坐标系的普遍关系

上述算子只适用于矢量的情形, 而标量的绝对变化与相对变化没有差别。

证明 → 《流体力学 第六章 旋转流体动力学》

对任意矢量 $\vec{A}$ , 可写在不同的坐标系中, 用不同 $i, j, k$ 表达:

绝对坐标系 惯性静止坐标系, 有  $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$  单位坐标矢量为常矢量

旋转坐标系 相对坐标系, 有  $\vec{A} = A'_x \vec{i}' + A'_y \vec{j}' + A'_z \vec{k}'$  单位坐标矢量可变( $x, y$ 轴会随着地球旋转改变)

求该矢量对时间 $t$ 的导数:

$$\text{绝对: } \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d_a A_x}{dt} \vec{i} + \frac{d_a A_y}{dt} \vec{j} + \frac{d_a A_z}{dt} \vec{k} \quad \frac{d_r \vec{A}}{dt} = \frac{d \vec{A}}{dt} = \frac{d A'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{d A'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{d A'_z}{dt} \vec{k}' \quad (\text{省略下标 } r)$$

$$\frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d_a (A'_x \vec{i}' + A'_y \vec{j}' + A'_z \vec{k}')}{dt} \xrightarrow{\text{全微分展开}} \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d_a A'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{d_a A'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{d_a A'_z}{dt} \vec{k}' + A'_x \frac{d_a \vec{i}'}{dt} + A'_y \frac{d_a \vec{j}'}{dt} + A'_z \frac{d_a \vec{k}'}{dt} \quad \text{坐标的变化}$$

$$\frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d A'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{d A'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{d A'_z}{dt} \vec{k}' \quad A'_x, A'_y, A'_z \text{ 为标量在绝对坐标系和相对坐标系中的时间微商相同}$$

由于 $\vec{i}'$ 是旋转系中的单位矢量, 所以 $\frac{d_a \vec{i}'}{dt}$ 表示 $\vec{i}'$ 的转动速度, 有: (根据方向和大小可得)

$$\frac{d_a \vec{i}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{i}' \quad \frac{d_a \vec{j}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{j}' \quad \frac{d_a \vec{k}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{k}' \quad \text{上式变为: } \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d \vec{A}}{dt} + A'_x \vec{\Omega} \times \vec{i}' + A'_y \vec{\Omega} \times \vec{j}' + A'_z \vec{\Omega} \times \vec{k}'$$

$$\text{故有 } \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d \vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

### 1.1.1.2 绝对速度与相对速度之间的关系式

模型设置 将微分算子作用于位置矢量:  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ , 有 $(\frac{d_a}{dt} = \frac{d}{dt} + \vec{\Omega} \times) \vec{r}$

绝对速度  $\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} + x \frac{d \hat{i}}{dt} + y \frac{d \hat{j}}{dt} + z \frac{d \hat{k}}{dt}$  利用  $\frac{d \hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}$ ,  $\frac{d \hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}$ ,  $\frac{d \hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}$

$$\boxed{\vec{V}_a = \frac{d \vec{r}}{dt} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{R}} \quad \text{绝对速度等于相对速度和牵连速度的矢量和}$$

相对速度  $\vec{V}_3 = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$  牵连速度  $\vec{\omega} \times \vec{r}$

### 1.1.1.3 绝对加速度与相对加速度之间的关系

模型设置 将微分算子作用于绝对速度, 可以得到绝对加速度。

绝对加速度  $\vec{a} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d \vec{v}'}{dt} + \frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d \vec{r}}{dt}$  其中  $\frac{d \vec{v}'}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{k} + \frac{dx}{dt} \frac{d \hat{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d \hat{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d \hat{k}}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$

其中  $\vec{\omega} \times \frac{d \vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r})$  绝对加速度等于相对加速度、牵连加速度与科氏加速度的矢量和。

$$\text{得到表达式: } \vec{a} = \vec{a}' + \frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

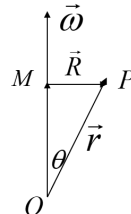
相对加速度  $\vec{a}' = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{k}$  质点 $P$ 相对 $S'$ 系的加速度

牵连加速度  $\vec{a}_t = \frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  其中  $\frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$  由 $\vec{\omega}$ 的大小发生改变所产生的, 如参照系 $S'$ 以恒定角速度转动, 则此项为零;  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  由于 $S'$ 系以角速度 $\vec{\omega}$ 转动所产生的

**科氏加速度**  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  由于质点P对转动的S'系有一相对速度 $\vec{v}'$ ，从而与 $\vec{\omega}$ 相互影响所产生的。

**地球加速度** 如果S'系以匀角速转动， $\vec{\omega}$ 是一恒矢量(量值和方向都不变)以OB表示之，故 $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$

则： $\vec{a}_t = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{R}$  在此情况下，加速度简化为： $\vec{a} = \vec{a}' - \omega^2 \vec{R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$



## 1.1.2 大气运动方程的建立

### 1.1.2.1 总体受力情况

**牛二定律**  $\frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F}_\gamma$  真实力 又考虑到  $\frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \Omega^2 \vec{R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}$

**最终形式** 得到旋转坐标系下的相对加速度为： $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F}_\gamma + \Omega^2 \vec{R} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}$

**真实力** 真实力包括质量力：万有引力和表面力：气压梯度力（表面压力的合力）、分子粘性力

### 1.1.2.2 万有引力

**地心引力**  $\vec{g}^* = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \approx -\frac{GM}{a^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ ,  $r = a + z$  单位质量块受到的引力， $a$ 为地球平均半径， $z$ 为海拔高度。

**方向** 指向地心，只与空气微团位置有关。

### 1.1.2.3 惯性离心力

**概念** 在作曲线运动的物体，时刻受到一个离开曲率半径向外的作用力，是物体为保持作曲线运动而产生的，即惯性离心力，它是视示力。

**公式**  $\vec{C} = \Omega^2 \vec{R}$  其由于位于非惯性坐标系内观测运动并运用牛二解释的结果，是向心力的反号。

**地球情况**  $\Omega = 1.29 \times 10^{-5} s^{-1}$  位于地球上观察时，地表上每一静止的物体都受到该力作用。

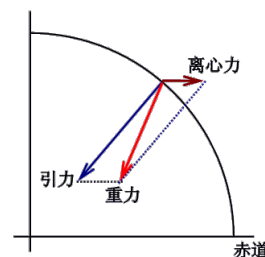
**方向** 惯性离心力与地轴垂直，在纬圈平面内，指向地球外侧，只与空气微团位置有关。  
地球自转角速度是常数，惯性离心力的大小随纬度变化，赤道上最大，极地最小，在极地为0。

### 1.1.2.4 重力

**概念** 单位质量大气所受到的地心引力与惯性离心力的合力。

**公式**  $\vec{g} = \vec{g}^* + \vec{C} = \Omega^2 \vec{R} - \frac{GM}{a^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$

- 特点**
- ① 重力不指向地心，但重力垂直于地面，垂直于水平面。
  - ② 对正球体，重力可分解为指向球心和沿着经圈的切线方向指向赤道的两个分量，在后者的作用下地球变为一个椭球体，极半径短，赤道半径长（是一个等位势面/水平面/等几何高度面）极半径与赤道半径相差20km左右。
  - ③ 重力随着纬度的增加而增加，在赤道最小，极地最大。重力随着高度 $z$ 的增加而减小。
  - ④ 实际中重力和地心引力的夹角很小，一般在地球的旋转坐标系中就认为重力指向球心。



### 1.1.2.5 气压梯度力

**气压** 空气介质对空气微团的作用力，当气压梯度存在时，作用于单位质量空气上的力，称为气压梯度力。

**定义** 作用于单位质量气块上的净压力，由于气压分布不均匀而产生  $\vec{P}_G = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$

### 梯度力的推导

取质量  $m = \rho \delta x \delta y \delta z$  空气块，对立两面泰勒展开  $F_{Ax} = -\left(p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z$   $F_{Bx} = +\left(p_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z$

则两面合力为： $F_x = F_{Ax} + F_{Bx} = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$  因此，单位质量的空气微团， $x$ 方向的气压梯度力为：

$P_x: \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x \delta y \delta z}{\rho \delta x \delta y \delta z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  同理， $P_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$   $P_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$  则得到  $\vec{P}_G = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$

**风的形成** 水平气压梯度力使空气从高压区流向低压区，产生了风。气压梯度力是大气水平运动的原动力。

### 1.1.2.6 科氏力

**概念** 当气块相对地球运动时使气块运动方向发生改变的一种惯性力  
由于坐标系的旋转导致物体没有受力却出现加速度违反牛顿运动定律而引入的视示力

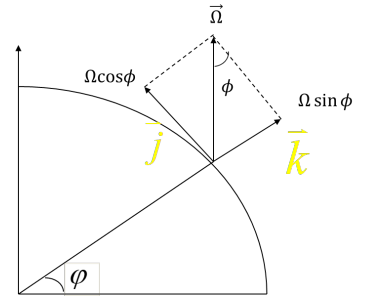
**公式** 
$$\vec{A} = -2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \Omega \cos \phi & \Omega \sin \phi \\ u & v & w \end{vmatrix} = (2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi)\vec{i} - 2\Omega u \sin \phi \vec{j} + 2\Omega u \cos \phi \vec{k}$$

**分量** 若令地转参数(科里奥利参数)  $f = 2\Omega \sin \phi$ ,  $\tilde{f} = 2\Omega \cos \phi$

$$A_x = \frac{du}{dt} = 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi = f v - \tilde{f} w$$

则各个方向有:  $A_y = \frac{dv}{dt} = -2\Omega u \sin \phi = -f u$

$$A_z = \frac{dw}{dt} = 2\Omega u \cos \phi = \tilde{f} u$$



- 特点**
- ① 地转偏向力 $\vec{A}$ 与 $\vec{\Omega}$ 相垂直，在纬圈平面内。
  - ② 地转偏向力 $\vec{A}$ 与风速 $\vec{V}$ 垂直，只改变气块运动方向，不改变速度大小。
  - ③ 对水平运动，在北半球使得运动右偏；在南半球使得运动左偏。
  - ④ 地转偏向力 $\vec{A}$ 与相对速度 $\vec{V}$ 成比例， $\vec{V} = 0$ 时 $\vec{A}$ 立即消失；水平地转偏向力与纬度的正弦成比例
  - ⑤ 科氏力包含水平与垂直科氏力，在赤道上空 $\phi = 0^\circ$ ：地转偏向力仍然存在，只有不考虑含w的项才为零；北极点上空 $\phi = 90^\circ$ ：仅存在水平地转偏向力。

### 1.1.2.7 摩擦力

**来源** 从分子运动论观点来看，摩擦力是不同速度两层空气的分子动量交换的结果。

**公式** 依广义牛顿粘性假设，有  $\vec{F}_r = \frac{1}{3} \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}$

- 性质**
- ① 以近地面边界层最显著，随高度增加而迅速减弱，一般到1~2km以上分子粘性力作用甚小，可以忽略，此高度以上气层称为自由大气。实质上边界层最重要的耗散力是湍流。
  - ② 摩擦力方向与风向相反，使风速减小，导致地转偏向力也相应减弱，陆地摩擦力总是大于海洋。

**最终方程** 
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{g} + \vec{F}_r$$
 物体绝对加速度表达式

### 补充内容：热寂与非线性动力学

在宇宙学中，热寂描述了系统熵增导致的终极无序，而非线性动力学表明，大气作为典型耗散系统，在远离平衡态时可通过能量交换形成有序结构，如气旋与行星波，体现了局部熵减与整体熵增的统一。

### 1.1.3 分析方法的转变

**分析方法** 大气作为流体，满足研究流体运动的两种方法：拉格朗日方法与欧拉方法

#### 1.1.3.1 全导数与局地导数

**关系** 
$$\frac{\partial(\quad)}{\partial t} = \frac{d(\quad)}{dt} - \vec{V} \cdot \nabla_h(\quad) - w \frac{\partial(\quad)}{\partial z}$$
 其中 $-\vec{V} \cdot \nabla_h(\quad)$ 称为平流变化， $-w \frac{\partial(\quad)}{\partial z}$ 称为对流变化

其中  $\vec{V}_h \equiv u\vec{i} + v\vec{j}$ ,  $\nabla_h \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$  它们是由于物理量分布不均和运动引起的。

### 推导与证明

→《天气学原理 第一章》

以温度场 $T = T(x, y, z, t)$ 为例，有空气微团轨迹与速度分量：

假设初始情况： $(x_0, y_0, z_0, t)$ ，经过 $\delta t$ 气块到达 $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$ ，且温度变化 $\delta T$

根据泰勒展开： $\delta T = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) \delta t + \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta x + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta y + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta z + \text{高阶项}$  除以 $\delta t$ ，并取 $\delta t \rightarrow 0$ ，有：

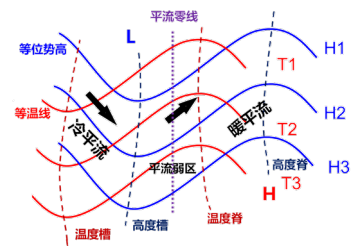
$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\delta x}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\delta y}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\frac{\delta z}{dt} \text{ 则得到 } \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T$$

### 1.1.3.2 平流变化的物理意义

**假设条件** 为讨论平流变化的意义，设： $\frac{dT}{dt} = 0, w = 0$ ，得到温度平流：

**温度平流**  $\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{V}_h \cdot \nabla_h T$  其依赖于**风速、物理要素梯度和两者的夹角**。

**物理含义** 即使空气微团在运动过程中**自身温度**保持不变，**平流变化**也会引起**某一固定空间点**上温度的变化。



冷暖平流和平流零线示意图

### 1.1.3.3 相对运动方程的矢量形式

**方程转化**  $\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \vec{F}_\gamma - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}$  可以转化为  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \vec{F}_\gamma - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}$

**物理情况** 目前方程只考虑了速度变化，气压梯度力是**驱动**大气运动的主要因子，而气压的变化与**热力与动力过程**相关联，因此描写大气过程必须考虑**热力过程**。

**数学情况** **运动方程**：1个矢量或3个分量方程。

**未知量**：**速度、气压、密度**，必须寻找描写气压、密度变化的方程，使得方程闭合。

## 1.2 质量守恒定律

**守恒定律** 物质体积元在运动中尽管体积和形状都会发生变化，但质量保持不变。  
连续方程描写了**速度场与密度场**之间的相互制约关系。

### 1.2.1 拉格朗日型

**方程**  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$

**速度散度**  $\nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt}$  单位时间内**体积的变化率**

$\nabla \cdot \vec{V} > 0$  **体积增大 辐散，其密度要减小**； $\nabla \cdot \vec{V} < 0$  体积缩小 辐合，其密度要增大

**水平散度**  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\delta\sigma} \frac{d\delta\sigma}{dt}$  流体在单位时间内**水平面积的相对膨胀率** 只考虑前两项

**不可压流体** 当流体不可压，**密度为常数**时： $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$  不可压缩流体的速度散度为零

### 1.2.2 欧拉型

**方程**  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$   $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$

**质量散度**  $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  是单位时间单位空间体积内**流体质量的流出量**

$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) > 0$  **质量净流出，密度要减小**  $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) < 0$  质量净流入，密度要增大

质量散度为0时，密度变化定常，是**准不可压流体**；速度散度为0时，密度为常数，是不可压流体。

$(\ ) \cdot \vec{V}$  表示通量（单位时间通过**x**方向单位表面的质量为  $\rho u$ ，三个方向则为  $(\ ) \cdot \vec{V}$ ）

### 大气和海洋辐合辐散运动结果的区别？

① 大气可压，低层辐合，理论引起密度变化。然而，实际情况下质量堆积后上升至高层辐散，整层净辐合辐散很小，所以局地密度变化很小；但若上升过程中绝热膨胀，密度变化会比较大，即热力过程中密度变化大。

② 海洋则是不可压流体，辐合海面会上升。



## 1.3 状态方程、热力学方程与水汽方程

### 1.3.1 状态方程

**引入** 大气动力学过程与热力学过程是相互联系相互制约的，热力学定律也是应用于大气运动的基本定律。表征大气热力状态的参数有**气压、温度、密度**。状态方程给出了**三者之间的关系**，而热力学第一定律则给出了**系统状态改变与热量交换之间的关系**。

**干空气**  $p = \rho RT$   $p\alpha = RT$

**湿空气**  $p = \rho RT_v$  其中虚温  $T_v = (1 + 0.61q)T$

**微观解释**  $p$ 由分子撞击表面形成， $\rho$ 与分子个数有关， $T$ 与分子平均动能有关。

### 1.3.2 热力学能量方程

**方程形式**  $c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dt}$  其中定容比热  $c_v = 718 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ，定压比热  $c_p = 1005 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$

**内能变化+气团膨胀反抗压力作功率=外部加热率**  $\alpha = 1/\rho$  为单位质量块的体积

**核心思想** **热力学第一定律**：空气块的热力学能量的变化率等于加热率与外力做功率之和。

**能量守恒** 外界加热→内能增加→温度增加→根据气体状态方程可知：气压增加→气体快速膨胀对外作功→密度减小→气压减小→最终温度的增加导致密度和气压减小

**气压气温**  $c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{Q}$  **空气从外界吸收的热量**和**空气块垂直运动**导致绝热变化对空气块温度的影响。

**位温形式**  $\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{c_p T} \dot{Q}$  单位质量空气从**外界吸收的热量**使得**位温**发生变化

**熵形式**  $\frac{ds}{dt} = \frac{\dot{Q}}{T}$  单位质量空气从**外界吸收的热量**使得**熵**发生变化

**加热项计算** 非绝热加热项来自于**太阳辐射、相变潜热释放、地面长波辐射**(感热)。其很难观测(辐射相对容易观测，但潜热很难确定)，再分析资料中一般采用**倒算法**(根据探空温度、垂直速度倒推)计算。

为什么热带大量潜热释放，而温度却没有一直升高，热量哪里去了？

在热带地区，温度随时间变化非常小，近似有 $-\alpha\omega \approx \dot{Q}$ ，对流绝热冷却与辐射加热平衡。

### 1.3.3 水汽方程

**方程形式**  $\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla q = \frac{S}{\rho}$  其中  $q$ 为比湿； $S$ 为水汽源 ( $S > 0$  水汽凝结， $S < 0$  水汽蒸发)。

一般把空气视为干空气，水汽凝结释放的潜热视为非绝热加热，故大气运动方程组中**不包含**水汽方程。对于热带地区，由于对流强烈，该方程不能忽略。

### 基本方程组

由上述几节，可以初步得到描写大气运动的基本方程组：

$$\begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \vec{F}_\gamma - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{Q} \\ p = \rho RT \end{cases}$$

## 1.4 球坐标系中的基本方程组

### 1.4.1 球坐标系及其推导

坐标  $\lambda$ (经度)  $\varphi$ (纬度)  $r$ (地心距) 单位矢量  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

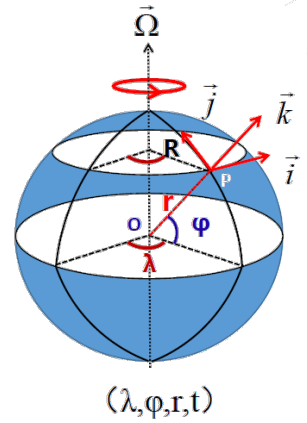
距离  $\begin{cases} \delta x \equiv r \cos \varphi \delta \lambda \\ u = dx/dt = \dot{x} \end{cases}$  考虑到  $\delta x \equiv R \delta \lambda, R = r \cos \varphi$

$\begin{cases} \delta y \equiv r \delta \varphi \\ v = dy/dt = \dot{y} \end{cases}$   $\begin{cases} \delta z \equiv \delta r \\ w = dr/dt = \dot{r} \end{cases}$

矢量速度  $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

标量速度  $u \equiv r \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}$   $v \equiv r \frac{d\varphi}{dt}$   $w \equiv \frac{dr}{dt}$

全导数展开  $\frac{df(\lambda, \varphi, r, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + w \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}$



球坐标系示意图

### 球坐标系下大气运动方程组的推导

① 对于方程左边，将矢量速度带入全导数展开： $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k})}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} + \frac{dw}{dt}\vec{k} + u\frac{d\vec{i}}{dt} + v\frac{d\vec{j}}{dt} + w\frac{d\vec{k}}{dt}$

由于单位矢量随着点的位置而改变，其中我们先求  $\frac{d\vec{i}}{dt}$ 。将其带入全导数展开： $\frac{\partial \vec{i}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{i}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{i}}{\partial z}$

同时我们知道  $\frac{\partial \vec{i}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{i}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{i}}{\partial z} = 0$ ，则  $\frac{d\vec{i}}{dt} = u \frac{\partial \vec{i}}{\partial x}$ 。同时： $\frac{\partial \vec{i}}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\delta \vec{i}}{\delta x} \right| = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta \lambda}{\delta \lambda R} = \frac{1}{R} = \frac{1}{r \cos \varphi}$  方向指向地轴

该地轴方向上单位矢量为： $\vec{j} \sin \varphi - \vec{k} \cos \varphi$ ，得到  $\frac{\partial \vec{i}}{\partial x} = \frac{u}{r \cos \varphi} (\vec{j} \sin \varphi - \vec{k} \cos \varphi)$

对于  $\frac{d\vec{j}}{dt}$ ，发现  $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{j}}{\partial z} = 0$ ， $\frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = -\frac{\tan \varphi}{r} \vec{i}$ ， $\frac{\partial \vec{j}}{\partial y} = -\frac{1}{r} \vec{k}$ ，得到  $\frac{d\vec{j}}{dt} = -\frac{u \tan \varphi}{r} \vec{i} - \frac{v}{r} \vec{k}$

对于  $\frac{d\vec{k}}{dt}$ ，利用叉乘的性质： $\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{d\vec{i}}{dt} \times \vec{j} = \frac{u}{r} \vec{i} + \frac{v}{r} \vec{j}$  至此， $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  均已得到，回代  $\frac{d\vec{V}}{dt}$ ：

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \left( \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{r} + \frac{uw}{r} \right) \vec{i} + \left( \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{r} + \frac{vw}{r} \right) \vec{j} + \left( \frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} \right) \vec{k}$$

② 对于右边的气压梯度力： $-\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \vec{i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \vec{k}$

③ 对于有变动科氏力：注意  $\vec{\Omega}$  在  $\vec{i}$  上没有分量，即  $\vec{\Omega} = \Omega (\vec{j} \sin \varphi - \vec{k} \cos \varphi)$ ，则有  $-2\vec{\Omega} \times \vec{V} = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \Omega_j & \Omega_k \\ u & v & w \end{vmatrix}$

$$= (fv - \tilde{f}w)\vec{i} - fu\vec{j} - \tilde{f}u\vec{k}, \quad \text{其中: } f = 2\Omega \sin \varphi \quad \tilde{f} = 2\Omega \cos \varphi$$

④ 对于重力和摩擦力，有  $\vec{g} = -g\vec{k}$  指向地心， $\vec{F} = F_\lambda \vec{i} + F_\varphi \vec{j} + F_r \vec{k}$  直接分量，并最终归纳到运动方程中。

原始方程组 ①  $\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{r} + \frac{uw}{r} = -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + fv - \tilde{f}w + F_\lambda$  该项为曲率项

$$\text{② } \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{r} + \frac{vw}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - fu + F_\varphi$$

$$\text{③ } \frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \tilde{f}u + F_r$$

$$\text{④ } \frac{dp}{dt} + \rho \left( \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2w}{r} - \frac{v}{r} \tan \varphi \right) = 0$$

$$\text{⑤ } c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

$$\text{⑥ } p = \rho RT$$

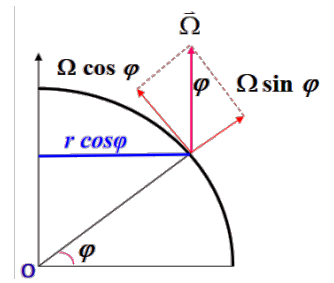
## 1.4.2 绝对角动量守恒原理

**原理** 绝对角动量随时间的变化等于物体所受的合外力矩。

**角动量方程** 绝对纬向速度对地轴的绝对角动量方程：

$$\frac{d}{dt}[r \cos \varphi (u + \Omega r \cos \varphi)] = r \cos \varphi \text{力臂} \left( -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda \right)_{\text{合力}}$$

**物理含义** 绝对纬向速度对地轴的绝对角动量随时间的变化等于作用在单位质量大气x方向上合外力矩



### 方程推导

在x方向上的绝对速度(即相对于惯性坐标系)分量为： $u_a = u + \Omega r \cos \varphi$ ，且距离地轴  $R = r \cos \varphi$ ，所以绝对角动量为： $M = u_a \cdot R = r \cos \varphi (u + \Omega r \cos \varphi)$ ，将其对t求导 ( $M$ 为标量，各参考系中 $\dot{M}$ 相同)，

$$\frac{dM}{dt} = r \cos \varphi \left[ \frac{du}{dt} + \frac{u}{r} (w - v \tan \varphi) + 2\Omega (w \cos \varphi - v \sin \varphi) \right] \quad (u, r, \varphi \text{ 对时间的导数不为零})$$

$$\text{因为 } \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{r} + \frac{uw}{r} = -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + fv - \tilde{f}w + F_\lambda = -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\Omega \sin \varphi v - 2\Omega \cos \varphi w + F_\lambda$$

$$\text{所以 } \frac{d}{dt}[r \cos \varphi (u + \Omega r \cos \varphi)] = r \cos \varphi \left( -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda \right)$$

## 1.4.3 机械能守恒原理

**原理** 微团的机械能随时间的变化率等于合外力所作的功率。

**守恒方程** 将三个动量方程分别乘以u、v、w再相加，得机械能守恒方程：

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + gz \right) = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + w \frac{\partial p}{\partial r} \right) + uF_\lambda + vF_\varphi + wF_r$$

## 1.4.4 薄层近似

**基本问题** 大气特性：90%大气位于地表数十公里的薄层中，厚度远小于地球半径  $z \ll a \Rightarrow r = a + z \approx a$

**薄层近似**  $\delta x \approx a \cos \varphi \delta \lambda$        $\delta y \approx a \delta \varphi$        $\delta z \approx \delta r$

$$u \approx a \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \quad v \approx a \frac{d\varphi}{dt} \quad w \equiv \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d(\quad)}{dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + u \frac{\partial(\quad)}{\partial a \cos \varphi} + v \frac{\partial(\quad)}{\partial a} + w \frac{\partial(\quad)}{\partial z} \quad \text{但不能直接替换到原始方程中}$$

### 1.4.4.1 绝对角动量守恒约束

**运动方程** 如果直接将运动方程中的  $r \rightarrow a$ ，得到： $\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + fv - \tilde{f}w + F_\lambda$

**角动量守恒** 将该方程中的  $r \rightarrow a$ ，得到： $\frac{d}{dt}[a \cos \varphi (u + \Omega a \cos \varphi)] = a \cos \varphi \left( -\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda \right)$

上式展开： $\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{a} = -\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + fv + F_\lambda$  与运动方程对比，少了橙色项

**结论 1** 纬向运动方程中与w有关的项必须略去，以保证角动量守恒。

### 1.4.4.2 机械能守恒约束

**运动方程** ①  $u \cdot \left( \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{a} = -\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + fv + F_\lambda \right)$       展开可能得到：

$$\text{② } v \cdot \left( \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - fu + F_\varphi \right)$$

$$\text{③ } w \cdot \left( \frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \tilde{f}u + F_r \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + gz \right) + \frac{v^2 w}{a} - \frac{u^2 + v^2}{a} w = -\frac{1}{\rho} \left( u \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + uF_\lambda + vF_\varphi + wF_r + \tilde{f}uw$$

**机械能方程**  $\frac{d}{dt} \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + gz \right) = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + uF_\lambda + vF_\varphi + wF_r$       与上式对比



**最终形式**

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{a} &= -\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + f\nu + F_\lambda \\ \textcircled{2} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{a} &= -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - fu + F_\varphi \\ \textcircled{3} \quad \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + F_r \end{aligned}$$

**结论 2** ① 经向方程：必须略去与  $w$  有关的项

② 垂直方程：必须略去  $\frac{u^2+v^2}{a}$  和  $\tilde{f}u$

### 1.4.4.3 质量守恒约束

**方程改写**  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2w}{a} - \frac{v}{a} \tan \varphi \right) = 0$

**薄层近似** 薄层近似体积元：  $\delta\tau = a^2 \cos \varphi \delta\lambda \delta\varphi \delta z \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\delta\tau} \frac{d(\delta\tau)}{dt} \right) = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{a} \tan \varphi$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{a} \tan \varphi \right) = 0$$

**结论 3** 连续方程中必须略去  $\frac{2w}{a}$

### 1.4.4.4 总结

**目的意义** 取近似后得到的简化方程组便于数学处理，能更好突出问题的物理本质。

**基本原则** 取近似后所得到的简化方程 **不能违背原方程所满足的基本物理定律**。

**范围和条件** 任何近似都是在一定的前提条件下才成立，取近似后得到的简化方程组只适用于一定范围。

### 简化方程组

薄层近似后，球坐标系大气运动方程组为：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{a} &= -\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + f\nu + F_\lambda \\ \textcircled{2} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{a} &= -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - fu + F_\varphi \\ \textcircled{3} \quad \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + F_r \quad \text{其中 } f \approx 10^{-4}/s \\ \textcircled{4} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{a} \tan \varphi \right) &= 0 \\ \textcircled{5} \quad c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} &= \frac{dQ}{dt} \\ \textcircled{6} \quad p &= \rho RT \end{aligned}$$

## 1.5 局地直角坐标系中基本方程组

### 1.5.1 方程组推导

**坐标**  $(x, y, z)$  **单位矢量**  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

**矢量速度**  $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

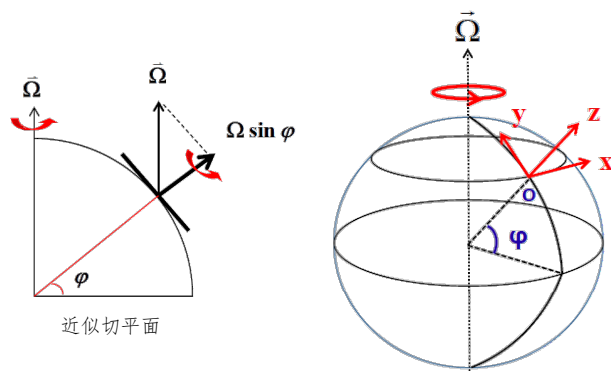
在地球上可随意移动，在地球上的不同地点  $(x, y, z)$  的方向是变化的，在一个不大的范围内，可以将  $(x, y, z)$  的方向看成不变

**标量速度**  $u = \frac{dx}{dt} \quad v = \frac{dy}{dt} \quad w = \frac{dz}{dt}$

**全导数展开**  $\frac{d(\quad)}{dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + u \frac{\partial(\quad)}{\partial x} + v \frac{\partial(\quad)}{\partial y} + w \frac{\partial(\quad)}{\partial z}$

**切平面近似** 在**局地范围内**，可以把球面视为平面，不考虑单位矢量  $\vec{i}, \vec{j}$  的空间变化，即：  $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$

**方程组导出** 直接将 1.4.1 节球坐标系原始方程忽略曲率项，并回代  $\delta x \equiv r \cos \varphi \delta \lambda$ ,  $\delta y \equiv r \delta \varphi$ ,  $\delta z \equiv \delta r$  即可：



局地直角坐标系示意图

原始方程组

$$\begin{aligned} ① \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv - \tilde{f}w + F_x \\ ② \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_y \\ ③ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \tilde{f}u + F_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ④ \frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0 \\ ⑤ c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} &= \frac{dQ}{dt} \\ ⑥ p &= \rho RT \end{aligned}$$

这是拉格朗日形式

薄层近似去除这些项

展开方程组 应用大气运动方程组时，要将个别变化项展开为欧拉形式： $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$

$$\begin{aligned} ① \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + F_x \\ ② \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_y \\ ③ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \\ ④ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0 \\ ⑤ c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} &= \frac{dQ}{dt} \quad \text{更严格地说，该项也需要展开} \\ ⑥ p &= \rho RT \end{aligned}$$

## 1.5.2 坐标系特点

方向 局地直角坐标：坐标轴的方向随地点不同而异（保留了球坐标系的标架，但忽略了球面曲率的影响）。

笛卡儿坐标：坐标轴的方向不变，是一个惯性坐标系。

独立性 笛卡儿坐标：坐标变量严格独立 局地直角坐标：坐标变量近似独立，只适用于中低纬度地区。

### 独立性情况的讨论

先 $x$ 后 $y$ :  $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial^2 A}{\partial \lambda \partial \varphi}$  先 $y$ 后 $x$ :  $\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial A}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial^2 A}{\partial \lambda \partial \varphi} + \frac{\tan \varphi}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial A}{\partial \lambda}$

两者之差为:  $\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\tan \varphi}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial A}{\partial \lambda}$  中低纬度地区误差小， $x$ 和 $y$ 可视为独立自变量，极低误差大

（求导时需要代回原有的球坐标系形式：）

重力分量 局地直角坐标：仅在 $\vec{k}$ 方向存在分量

笛卡儿坐标：除切点外，在 $x, y$ 方向也存在分量

### 等压面坐标系

$z$ 坐标与 $p$ 坐标的联系： $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0$ （静力平衡），这是坐标转换的物理基础；气压是高度的单值单调递减函数，

这是转换的数学基础；其一般适用于大尺度。

坐标  $(x, y, p, t)$  垂直坐标方向：垂直向下

垂直速度  $\omega = \frac{dp}{dt}$  上升  $\omega < 0$

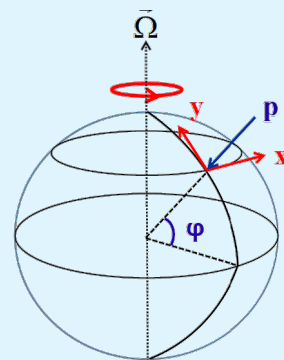
全导数展开  $\frac{d(\quad)}{dt} = \left( \frac{\partial(\quad)}{\partial t} \right)_p + u \left( \frac{\partial(\quad)}{\partial x} \right)_p + v \left( \frac{\partial(\quad)}{\partial y} \right)_p + \omega \frac{\partial(\quad)}{\partial p}$

方程组

$$\begin{aligned} ① \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} + fv & ④ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0 \\ ② \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} - fu & ⑤ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \left( \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{RT}{c_p p} \right) \omega &= \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt} \\ ③ \frac{\partial \phi}{\partial p} &= -\frac{RT}{p} & ⑥ p &= \rho RT \end{aligned}$$

注意 ① 大气下边界不是坐标面， $p$ 随时间和空间而变化，在地形起伏区，不仅与地形相截形成许多“空间”，而且这些空间范围随时间变化，很难正确地给出边界条件。

② 相对于一些中小尺度运动，不满足静力平衡关系，不能使用 $p$ 坐标系。如果使用常带来较大误差。



等压面坐标系示意图

## 1.6 基本方程组的定解问题

### 1.6.1 方程分析

**未知量** 共有六个  $u, v, w, p, \rho, T$

**物理过程** 使用辐射、对流、边界层、扩散、降水、凝结、蒸发、重力波拖曳等物理过程进行**参数化**，来表示成这些未知量的函数。

它们共同决定了  $\dot{Q}, \frac{dq}{dt}, \frac{dT}{dt}, \frac{du(v)}{dt}, p_r$

**干过程** 6 个方程，6 个未知数，方程闭合，可以求解。仍然需求**初边值条件**

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + F_x \\ \textcircled{2} \quad \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_y \\ \textcircled{3} \quad \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \\ \textcircled{4} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0 \\ \textcircled{5} \quad c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} &= \frac{dQ}{dt} \\ \textcircled{6} \quad p &= \rho RT \end{aligned}$$

### 1.6.2 初值条件

**初值条件** 时间一阶，给出一个**初值条件**即可。垂直速度和密度不是观测值，需通过诊断分析获得。

$t = 0$  时的状态分布  $\{u|_{t=0} = u_0, v|_{t=0} = v_0, w|_{t=0} = w_0, p|_{t=0} = p_0, \rho|_{t=0} = \rho_0, T|_{t=0} = T_0, q|_{t=0} = q_0\}$

### 1.6.3 边值条件

**概述** 对于**全球大气运动**，一般只需给出**上、下边界条件**；对于区域大气，侧边界条件也需要给出。

#### 1.6.3.1 下边界条件

**运动学**

- ① **刚壁、有粘性**  $w|_{z=0} = 0, u|_{z=0} = 0, v|_{z=0} = 0$  有粘性则水平速度为零
- ② **刚壁、无粘性**  $w|_{z=0} = 0$  垂直速度为零，大气不会离开边界
- ③ **地形边界**  $z = h_s(x, y), w|_{z=h_s(x, y)} = \frac{dh_s}{dt} = u_s \frac{\partial h_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial h_s}{\partial y} = \vec{V}_s \cdot \nabla h_s$

气团做水平运动时，如果有粘性且为刚壁， $u, v$  是水平面，但地形存在起伏，地平面(粘性使得平行于地平面速度为零)和水平面不平行，因此存在有  $u, v$  分量

**热力学** **感热**:  $-\rho_g c_g k_g \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = R - A - C$   $R$  长波辐射;  $A$  短波辐射;  $C$  凝结、蒸发 地面热量平衡

#### 1.6.3.2 上边界条件

**大气上界** **连续介质假设成立极限高度** 可视为大气上界

假设有界:  $z \rightarrow \infty \Rightarrow u, v, w, \rho, p, T, q \rightarrow 0$  气压衰减快:  $p|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad \lim_{z \rightarrow \infty} zp = 0$

温度是否趋近于零: 理论上界因密度定义，与散逸层高温(分子动能高但密度极低)不冲突; 数值模式通过设定模式顶高并采用辐射边界条件与海绵层，使波动能量有效逸出而非反射，从而近似该理论条件。

**其他条件** 也有倡导这两种上边界条件:

**无质量交换**:  $\lim_{z \rightarrow \infty} \rho w = 0$  **无动能交换**:  $\lim_{z \rightarrow \infty} \rho w^2 = 0$

内边界与侧边界暂时省略。从数学观点来看，要注意边界条件与方程解的**适定问题**。

**适定问题** 指给定初始边界条件下，闭合方程组是否有解，解是否唯一，稳定，即解的适定。即方程与条件需要匹配。