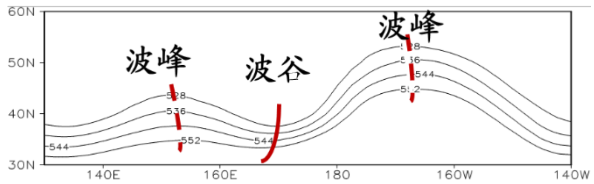
第六章 大气中的基本波动



大气长波

章节引入

天气图上可见：高度场、温度场基本呈波状分布。因此，可用物理学中研究波动现象的方法来讨论大气运动。注意，在高空天气图上直接看到的是气流的流型，并非是波动，但这种西风气流大幅度的弯曲流动的确折射出大气长波的存在。上章我们已经得到：大气运动＝纬向平均运动＋涡旋运动＝大气环流＋天气系统。

波动学 以**直观的天气学**（槽脊结构）和**物理学图像**（水波等）作为基础，在气象学中引入**波动**概念，并用**数学方式**进行理论探讨和完善，形成**大气波动理论**和**大气波动学**。目前波动学是**主流理论**。

波动学优点
① 可以利用成熟的波动学理论对天气系统形成机理、发生发展和移动进行研究。
② 由于槽脊的移动是等位相线的运动，即波的移动，所以槽脊的移速 = 相速 = 波速。
③ 波动学把气旋（低压）、反气旋（高压）系统联系起来，能够判断涡旋系统的发展和演变。

案例分析

① 气旋增强：漩涡动力学角度是涡度增加；能量学角度是K'增加；波动学角度则是槽的加深。

② 系统移动：波动学角度是槽脊东移；涡旋动力学角度是 $\left.\begin{array}{l}\text{气旋前：}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}>0,\text{即}\ \zeta\uparrow\\ \text{气旋后：}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}<0,\text{即}\ \zeta\downarrow\end{array}\right\}\Rightarrow$ 气旋东移

波动学目的 通过**大气运动方程组**，利用**波动学理论**讨论**天气系统**（大尺度）的形成、发生发展及移动的机理。

存在问题 大气基本方程中除了大尺度的天气波动外，还存在其他波动的干扰。

基本波动 大气中四类基本波动：**大气长波，声波，重力波**（水波就是一种重力波），**惯性波**。因为没有电磁学方程，不包含电磁波/光波（不考虑雷电现象）

波动

各种波动的形成机制、性质及对天气产生的影响有所不同，因此在进行大气波动学分析时，不可能把所有波动类型都考虑进去。最早的天气预报使用的是原始方程，因其包含各种波动，次要波动的噪声会将误差放大，导致几小时变压数百百帕的错误结果。

声波	弹性振动（大气的可压缩性）	快波
惯性波	惯性振荡（旋转性）+辐合辐散	高频波
重力内波	浮力振荡（层结性）+辐合辐散	高频波
重力外波	辐合辐散	快波
Rossby 波	β效应	慢波

滤波 可以把波动分类：$\left\{\begin{array}{l}\textbf{重要}\text{：大气长波}\Rightarrow\text{称为}\textbf{谐音}\text{：需要保留}\\ \textbf{次要}\text{：如声波等}\Rightarrow\text{称为}\textbf{噪音}\text{：需要去掉}\end{array}\right.\Rightarrow$ **滤波**

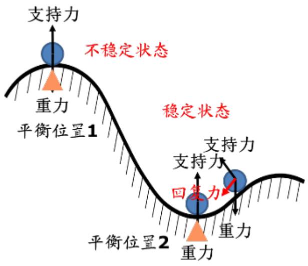
滤波目的 去除次要波动的干扰，讨论主要波动，在数值预报中滤波非常重要。
例如声波是由于大气可压缩性引起的，假设大气是不可压的就可以滤去声波，但对天气波动影响不大。
因此，有必要研究包括次要波动在内所有波动的机制和性质，以实现滤波的目的。

误差的增长

如果取时间步长 Δt 为 10 分钟，对于时间尺度为 10^5s 的天气尺度波动来说，误差就较小。而对于像声波等快波来说，误差就很大（随机的），且是累积的，最终导致整体系统的不稳定性，此时就需要滤去快波。然而由于计算机资源限制，Δt 也不能取太小。

然而，考虑到大气系统的混沌性（初值敏感），一旦有误差，其放大的效应会十分显著且迅速。因此，一定时段内的天气预报是合理的，一旦超出一定时段，预报就会因为混沌性而失效。

6.1 波动的基本概念



回复机制与稳定性

6.1.1 波动的定义

波动定义　质点**受力的作用**围绕**某平衡位置**振动，振动**在空间的传播**形成波动。

基本条件　① **振动**（回复力）　　② **能够传播**（质点与质点之间建立联系）

例如单个单摆摆动，不能引起其它单摆摆动；但用一根线把它们连起来，一个摆动可以传播出去。

波动机制　波动的机制包括**振荡机制**和**传播机制**，二者缺一不可。学习每种波动都需要清楚这两种机制。

震荡机制　亦称**回复机制**，在机械学中的观点就是**回复力**。如右上图，稳定位置如果有偏移，就存在回复力。

大气层结中也具有类似的情况 $\begin{cases}\text{稳定：净浮力与位移方向相反，可以产生振荡}\\\text{不稳定：净浮力与位移方向相同}\end{cases}$

传播机制　质点与质点之间的联系。波动传播的是**振荡的状态**，波动是**能量传播**的一种基本形式。

最大特点　波动的最大特点是**周期性**：**时间上**周期变化、**空间上**周期分布、有规律、重复发生、**可预测**。

6.1.2 波动的数学模型与波参数

6.1.2.1 简谐振动

简谐振动　回复力大小与位移成正比，方向与位移相反。设质量为M，回复力大小为$-ky$（k为比例系数）。

根据牛顿第二定律：$M\frac{d^2y}{dt^2}=-ky \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{M}y$　令 $\frac{k}{M}=\omega^2$，则：$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0}$ **简谐振动方程**

简谐振动方程的解：$y=c_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t=A\cos(\omega t-\alpha)$　仅仅是时间的函数

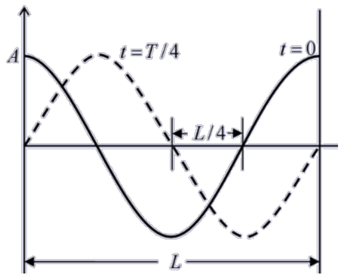
振动是**单个质点**的运动，是仅以时间为自变量的运动，多属于常微分方程问题。

简谐波　简谐振动**稳定地传播**所形成的波动称为**简谐波**。一维简谐波解：$\boldsymbol{y=A\cos(kx-\omega t+\alpha)=A\cos\theta}$

波动是以**时间、空间**为变量的，属于偏微分方程问题。

6.1.2.2 波参数

振幅A	$A=A$	物体离开平衡位置的最大位移
周期T	$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{L}{C}$	空间固定位置上的点完成一次全振动所需时间
圆频率ω	$\boldsymbol{\omega=\frac{2\pi}{T}}$	2π时间内质点完成全振动的次数
波长L	$L=\frac{2\pi}{k}=CT$	相邻两个同位相点之间的距离
波数k	$\boldsymbol{k=\frac{2\pi}{L}}$	2π距离内包含了多少个波长
位相θ	$\boldsymbol{\theta=kx-\omega t+\alpha}$	波在x轴上各点各时刻的位置，**α为初位相**，**$\theta=const$ 的点构成的面**称**等位相面**
波速	$\boldsymbol{C=\frac{\omega}{k}=\frac{L}{T}}$	等位相线(面)的移速，即槽脊的移动速度。



等位相面与波速

波速推导

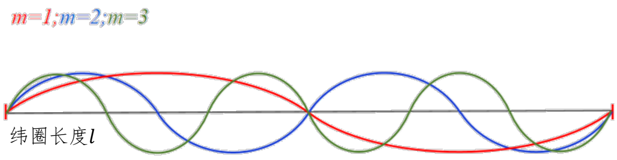
有速度 $C=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=常量}$，且等位相面 $\theta=kx-\omega t=常量 \Rightarrow k\frac{dx}{dt}-\omega=0 \Rightarrow C=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=常量}=\frac{\omega}{k}=\frac{L}{T}$

简谐波解　$\boldsymbol{S(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{L}x-\frac{2\pi}{T}t\right)=A\cos(kx-\omega t)=A\cos k(x-ct)}$　初位相为零

纬向波数目　$\boldsymbol{m=\frac{l}{L}=\frac{2\pi R}{L}=\frac{2\pi a\cos\phi}{L}}$　　整个纬圈长度为l，纬圈上m个谐波对应的波长为$L=l/m$。

纬向波数　$\boldsymbol{k_m=\frac{2\pi}{L}}=\frac{2\pi}{l/m}=\frac{2\pi m}{l}=\frac{m}{a\cos\phi}$

纬向波数目与纬向波数是两个不同的东西

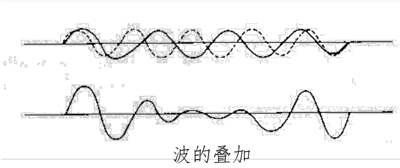


横波与纵波　按振动方向与波动传播方向的关系，可分为横波与纵波两大类：

① 若质点**振动方向与波的传播方向一致**，此种称为**纵波**，如水平声波。

② 若质点**振动方向与波的传播方向垂直**，此种称为**横波**，如重力水面波（上下振动，水平方向传播）

6.1.3 波动的数学表示



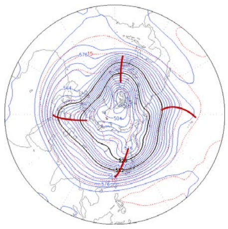
波的叠加

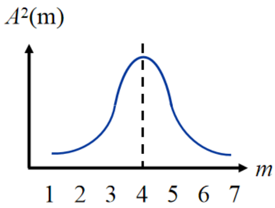
波的叠加　实际大气扰动不是单纯的简谐波，可以看成是各种不同波长、不同振幅的简谐波的**叠加**。各简谐波之间位相会有差异，因而出现振幅相抵消或叠加的现象。

分析方法　数学上任一函数都可以用**傅立叶级数**展开来表达。我们将某物理量的波在纬圈上展开成傅立叶级数：$\boldsymbol{S(x,t)=\sum_m S_m}$（$m$纬向波数目 = 1,2,3 ...）　其中 $\boldsymbol{S_m}=B_m\cos k_m(x-c_m t)+D_m\sin k_m(x-c_m t)$ $=\boldsymbol{A_m\cos[k_m(x-c_m t)+\alpha_m]}$ 表示第m个谐波。 理论上已知$S(x,t)$，可以得到各B_m,D_m,A_m。

实际扰动虽然是许多简谐波组成，但往往只有几个谐波分量是主要的，其频率、振幅虽然不同，但动力学性质往往一样。因此如果想得到定性的结果，分析一个典型的谐波分量就足够了。

$$S(x,t)=\sum_i S_i\approx S_m$$





实际案例

例如右图，天气图上存在四个大脊大槽。我们只要研究纬向四个波其中一个的性质，就能得到整体的结果。

形式解　如果考虑**线性波动的传播问题**，可以近似把波动考虑为**简谐波形式解**。

线性波动

线性波动指发生在线性系统中的波动。线性系统指对它的输入和它产生的输出之间，满足比例关系和可加性。比如一根绷紧的琴弦，输出与输入成正比；且两个人同时在不同位置拨动这根弦，那么弦最终的振动形态就等于两个形态之和。大气中，当波动幅度很小，对背景场的扰动很微弱时，我们常常可以把它近似为线性波动来处理。

线性算子指满足上述比例性和可加性的算子，满足性质：$L(af+bg)=aL(f)+bL(g)$。

如果是线性波动，波动方程为 $\boldsymbol{LS(x,t)=0}$，L为线性算子，则有：

$$L\sum_m S_m=0\Rightarrow\sum_m LS_m=0\Rightarrow \boldsymbol{LS_m=0}$$

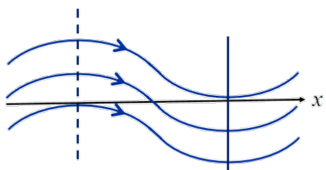
总和为零，且每个LS_m是独立的，那么自然每一项LS_m都等于零。取这种波动形式解为**简谐波解**：

① **某个简谐波最具有代表性**　　② **每个简谐波都满足原方程，都具有相同性质解。**

复数形式　对于 $S=A\cos(kx-\omega t)$，有 $\boldsymbol{S=\mathrm{Re}\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]}$。其中 $\boldsymbol{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$　求导方便

传播问题　讨论**线性波动**的传播问题：振幅 A 为常量，不随时空变化，没有办法讨论波的强度变化，同样无法讨论频率、波数的时空变化。对于非线性波动：波-波相互作用的讨论需要使用别的方法。

6.1.4 二维与三维平面波



一维波动　位相只随x变化，波动在x方向上传播。例如渠道波

$S(x,t)=Ae^{i\theta}=Ae^{i(kx-\omega t)}$　　　$\theta=kx-\omega t=k(x-ct)$

等位相面垂直于x轴，只在x方向移动。

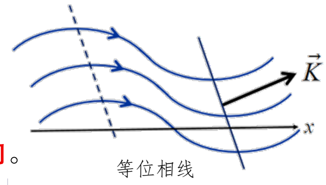
注意

一维波动≠一维运动，一维运动：$u\neq 0, v=w=0, \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0$，一维波动：$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0$，$v,w$可以不等于0。就是说，$v,w$在$y,z$方向上不存在梯度，始终共同运动，流体均匀。

二维波动　在x和y方向均有传播，我们把函数加上 ly 扩展到二维。 例如水面波

$S(x,y,t)=Ae^{i\theta}$　　　$\boldsymbol{\theta=kx+ly-\omega t}$　　　$k=\frac{2\pi}{L_x}$ 和 $l=\frac{2\pi}{L_y}$ 分别为x方向和y方向的波数

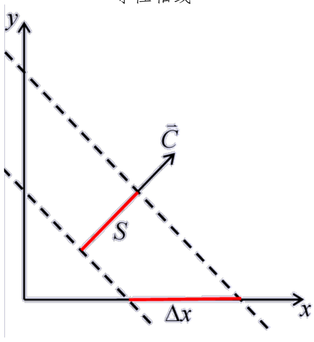
则两个方向的**相速度**为：$c_{px}=\frac{\omega}{k}, c_{py}=\frac{\omega}{l}$。



大气长波的斜槽结构可用二维波动表达，等位相面是倾斜的。例如 PNA 波列

定义波矢：$\vec{K}=k\vec{i}+l\vec{j}=\nabla\theta$　　$\vec{K}$垂直于等位相面，表示**等位相面传播的方向**。

整体相速度　**波动整体相速度** $\vec{C}=\frac{\omega}{K}\frac{\vec{K}}{|K|}=\frac{\omega}{K^2}\vec{K}=\frac{\omega}{k^2+l^2}(k\vec{i}+l\vec{j})$ 其中 $K^2=k^2+l^2$



而各自方向 $c_{px}=\frac{\omega}{k}, c_{py}=\frac{\omega}{l}$，明显 $\vec{C}\neq c_{px}\vec{i}+c_{py}\vec{j}$ 不满足矢量合成法则

相速在三个坐标方向的分量不等于三个方向的相速。

三维波动　$S(x,y,z,t)=Ae^{i\theta}=Ae^{i(kx+ly+nz-\omega t)}$ 把函数加上 nz 扩展到三维。

$\vec{K}=k\vec{i}+l\vec{j}+n\vec{k}=\nabla\theta$　　$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$　例如声波、电磁球面波

相速度与方向上的相速

沿着各坐标轴波传播速度（相速），与波速在各坐标轴上的分量是两个不同的物理含义。

$C=\frac{S}{\Delta t}$，$c_{px}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$，由几何关系可得：$S<\Delta x$，所以$C<c_{px}$。同理，各个方向上$c_{py}, c_{pz}\geq C$，由此

$\vec{C}\neq c_{px}\vec{i}+c_{py}\vec{j}+c_{pz}\vec{k}$。

6.2 波群与群速度

波群　振幅表示了波动强度（能量$E\propto A^2$）。如果 $S\approx S_{m0}\Rightarrow$单个简谐波，振幅$A$是常量。
如果 $S=\sum_m S_m\Rightarrow$多个简谐波叠加可以表达实际的波动⇒那么振幅是时空的函数。考虑线性波动传播时，使用单个简谐波解；考虑波动强度变化时，应该用多个简谐波叠加，称**波群或波列**。

两个简谐波　考察两个振幅相同，频率与波数相近的简谐波迭加的结果：$S=2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)e^{i(kx-\omega t)}$

由上式可见，波群中包含两个波动的乘积：我们认为 $e^{i(kx-\omega t)}$ 代表原来两个波的性质，是**高频载波**，

$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 代表波包（其波长很长，变化缓慢），是**低频包络**。

令波包为：$A^*(x,t)=2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 则上式可简化为：$S=A^*(x,t)e^{i(kx-\omega t)}$

表示波数为k，圆频率为ω，振幅为 $A^*(x,t)$ 的波动。

具体推导

给定简谐波：$S_1=Ae^{i(k_1x-\omega_1t)}, S_2=Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$，给定条件：

① $|k_2-k_1|\ll|k_1|\&|k_2|\Rightarrow$波数相近　　② $|\omega_2-\omega_1|\ll|\omega_1|\&|\omega_2|\Rightarrow$频率相近。则有：

$$S=S_1+S_2=Ae^{i(k_1x-\omega_1t)}+Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}=Ae^{i\left(\frac{k_1+k_2}{2}x-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)}\cdot\left[e^{i\left(\frac{k_1-k_2}{2}x-\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}+e^{i\left(\frac{k_2-k_1}{2}x-\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)}\right]$$

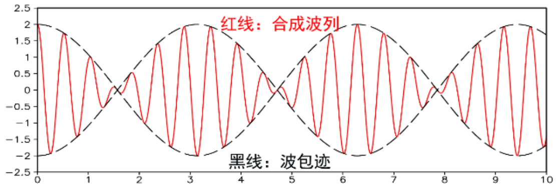
因为 $e^{-i\alpha}+e^{i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha+\cos\alpha+i\sin\alpha=2\cos\alpha$，令 $k=\frac{k_1+k_2}{2}$，$\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$；$\Delta k=k_2-k_1, \Delta\omega=\omega_2-\omega_1$，则有 $S=2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)e^{i(kx-\omega t)}$。

高频载波　其中 $e^{i(kx-\omega t)}$ 称为**高频载波（合成波列）**。

载波的波数k和圆频率ω都分别接近各个单波的波数和圆频率。即：$k=\frac{k_1+k_2}{2}\cong k_1\cong k_2$，

$\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cong\omega_1\cong\omega_2$ 载波的波速也接近于各个单波的波速，即：$c=\frac{\omega}{k}\approx\frac{\omega_1}{k_1}\approx\frac{\omega_2}{k_2}$

低频包络　其中 $A^*(x,t)=2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ 称为**低频包络**，它是载波的包络线，是**载波最大振幅点的连线**，又称**波包迹**。波包迹随时空是周期变化的，且传播的。



慢变波包　由于$\Delta k \ll k,\Delta\omega \ll \omega$，因而波包迹（振幅）的波长和周期远大于单波的波长和周期，即波包迹（振幅）相对于载波随时空变化是相当缓慢的。所以经常称之为**慢变波包**。

注意　振幅A没有负的，出现负振幅代表着改变π个位相：$-A=Ae^{i\pi}$。

群速　**波包迹的传播速度**：$C_g=\frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2}=\frac{\Delta\omega}{\Delta k}\Rightarrow\frac{d\omega}{dk}$ **波的振幅(能量)的传播速度**称为**群速**：$c_g=\frac{d\omega}{dk}=c+k\frac{dc}{dk}$

综上分析，波群有两种速度：**相速度**与**群速度**

① **相速度**是**位相的传播速度**（如槽脊的移速），载波的移动速度。

② **群速度**是**振幅/能量的移动速度**，波包迹的移动速度。

一维波动　若频散关系式 $\omega=\omega(k)$ 已知 则相速度为 $c=\frac{\omega}{k}$　群速度为 $c_g=\frac{d\omega}{dk}$

三维波动　若频散关系 $\omega=\omega(k,l,n)=\omega(\vec{K})$已知　则相速度为$\vec{C}=\frac{\omega}{K^2}\vec{K}$　群速度为 $\vec{C}_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}\vec{i}+\frac{\partial\omega}{\partial l}\vec{j}+\frac{\partial\omega}{\partial n}\vec{k}$

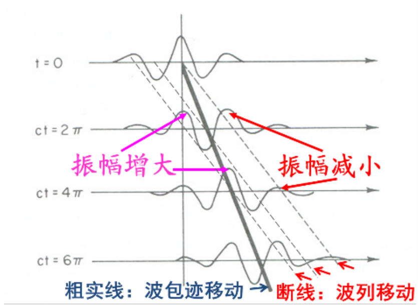
频散现象　若相速度大于群速度，则**波能量相对于合成波列有传输现象**，称为**频散现象**(如下图)。其原因在于各谐波分量相速c不同（c与k有关）。

相速度和群速度是否会不同？什么情况下相同？什么情况下不同？

有关系式：$\omega=kc\Rightarrow c_g=\frac{d\omega}{dk}=c+k\frac{dc}{dk}$ 讨论了相速度与群速度的关系。

① 若c与k无关 $\frac{dc}{dk}=0,c_g=c$ 该波动的波速与波长无关，波动的能量随波动的传播而传播⇒非频散波，非频散波的波形不发生变化。

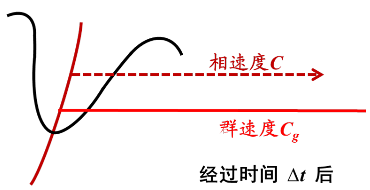
② 若c与k有关 $\frac{dc}{dk}\neq 0,c_g\neq c$ 该波动的波速与波长有关，波动的能量不随波动的传播而传播⇒频散波，频散波的波形会发生变化（右图）。



波包迹移动慢于波列移动

上游效应　→ 叶笃正，1949，能量频散理论

波动在传播过程中，会通过能量频散作用，上游波动的能量先于波动本身到达下游（即群速度大于相速度的情况），在下游激发新的波动或加强下游原有波动，称为上游效应。



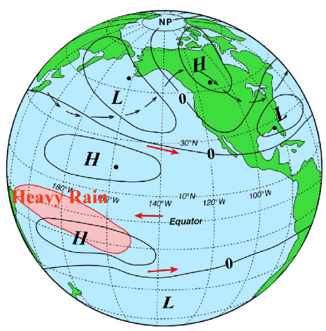
气候遥相关现象

① 直接环流的遥相关，如沃克环流。和群速度没有关系。

② 定常波列遥相关：PNA 遥相关，能量源在西太平洋赤道区域，往北形成正-负波列，相速为零，群速不为零，导致能量频散传输，形成波列。

这个形势维持时间较长，是气候问题，故这是一个驻波，或称“定常波”。

Pacific-North American (PNA) Pattern



6.3 微扰动线性化方法

小节引入

本节是本章最重要的方法，后续的所有波动都采用该方法讨论。

总体方法论 **物理模型建立**(波动的机制)→**数学模型**(原始方程在物理约束基础上的简化)→利用**微扰法**对数学模型**线性化**→求解模型(标准波形法)得到**频散关系式**→求解**波速**和**群速度**→根据解分析**波动性质**

求解波动 求解波动从基本方程组入手，例如运动方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv$ 中存在未知量的二次及二次以上乘积项，即**非线性项**。它使得求解困难，我们希望做**线性化处理**或者**求数值解**。大气中存在非线性现象，如：多平衡态、突变现象，但讨论波动时可以线性化。

求解方法 非线性方程→**作适当假设或近似**(物理模型)**+微扰动法→线性化+标准波形法**→近似解

基本思想 ① 任一气象要素，由**已知基本量**叠加上**未知扰动量**组成，即 $s=\bar{s}+s'$，且 $|s'|\ll|\bar{s}|$，是**微扰动**。例如基本气流的取法：依据研究的问题决定。可以取静止基流 $\bar{u}=\bar{v}=\bar{w}=0$ 或者沿纬圈的平均速度场$\bar{u}=const,\bar{v}=\bar{w}=0$，又或者考虑大气的斜压性 $\bar{u}=\bar{u}(y,z),\bar{v}=\bar{w}=0$。

② **基本量**满足**原方程和边界条件**。

③ **扰动量及其改变量**都是小量，其**二次及二次以上乘积项**（非线性项）可作为高阶小量**忽略**，从而得到线性方程。扰动量充分小：热力学变量：指扰动量远小于基本场变量；运动学变量：是扰动量本身充分小，因为静止大气可作为基本态。

基本步骤 ① 将描写大气运动和状态的物理量分解为**基本量**与**扰动量**，将变量分解带入方程及边界条件

② 将所得方程减去基本量所满足的方程

③ 略去上述方程中扰动量的高阶项

运动方程 $\boldsymbol{\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+fv'}$ $\boldsymbol{\frac{\partial v'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial y}-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}f\bar{u}-fu'}$

x方向运动方程的线性化

① $\bar{u}=const,\ \bar{v}=\bar{\omega}=0$。变量分解 $u=\bar{u}+u'$，$v=v'$，$\omega=\omega'$，$\varphi=\bar{\varphi}+\varphi'$。代入方程：

$$\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}+(v')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial y}+(\omega')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial p}=-\frac{\partial(\bar{\varphi}+\varphi')}{\partial x}+fv'$$

② 写出基本量的方程：$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=-\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}=0$。两式相减（注意到$\bar{u}$不随空间变化）：

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+u'\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial y}+\omega'\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial p}=-\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+fv'$$

③ 略去上述方程中扰动量的高阶项，得到线性化后的方程：$\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+fv'$

y方向运动方程的线性化

① 变量分解：$u=\bar{u}+u'$，$v=v',w=w',p=\bar{p}(y,z)+p',\rho=\bar{\rho}(y,z)+\rho'$。代入方程：$\frac{\partial v'}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial y}+w'\frac{\partial v'}{\partial z}=-\frac{1}{(\bar{\rho}+\rho')}\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial y}-f(\bar{u}+u')$，需要将气压梯度力项拆分：$\frac{1}{\bar{\rho}+\rho'}=\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{1}{1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}}\sim\frac{1}{\bar{\rho}}\left(1-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)$，故得到：

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial y}+w'\frac{\partial v'}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}-\frac{1}{\bar{\rho}}\left(1-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)\frac{\partial p'}{\partial y}-f\bar{u}-fu'$$

② 写出基本量的方程：$0=-\frac{1}{\bar{\rho}(y,z)}\frac{\partial\bar{p}(y,z)}{\partial y}-f\bar{u}$。两式相减（注意到其中$\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}=-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}f\bar{u}$）：

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial y}+w'\frac{\partial v'}{\partial z}=-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}f\bar{u}-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial y}+\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2}\frac{\partial p'}{\partial y}-fu'$$

③ 略去上述方程中扰动量的高阶项，得到线性化后的方程：$\frac{\partial v'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial y}-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}f\bar{u}-fu'$。

适用范围 小扰动法只适用与**小振幅波**的讨论 $|q'| \ll |\bar{q}|$，对于**有限振幅波**此法失效

只适用于天气系统发展的**初始阶段**，在发展旺盛期和后期锢囚阶段都不能使用(槽脊波动很大)

① 小振幅扰动可以略去 $\vec{V}' \cdot \nabla\vec{V}'$，这表示 $\begin{cases}\text{数学上：扰动量二次乘积项，数值很小} \\ \text{物理上：非线性作用不重要}\end{cases}$ 以小振幅扰动为主时，可近似为线性现象。

② 对于有限振幅的扰动，这时不满足$|A'| \ll |\bar{A}|$扰动量的二次以上乘积项不能作为高阶小量忽略。此时非线性项重要。**有限(大)振幅扰动**为非线性现象。例如：阻塞形势是大振幅扰动，非线性过程，用线性过程就不能解释阻塞高压形成的机制和特征。

标准波形法 ***normal modes method***，假设变量具有波形式解：$\boldsymbol{\phi = Ae^{i(kx+ly-\omega t)}}$ 这里实际上取实部，暂时忽略

对时间t求偏导：$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -i\omega\phi,\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = (-i\omega)^2\phi \dots\dots \frac{\partial^n\phi}{\partial t^n} = (-i\omega)^n\phi$

对空间x求偏导：$\frac{\partial\phi}{\partial x} = ik\phi,\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = (ik)^2\phi \dots\dots \frac{\partial^n\phi}{\partial x^n} = (ik)^n\phi$ 同理对y求偏导：$\frac{\partial\phi}{\partial y} = il\phi, \dots$

得到如下符号关系式：$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega$ $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \leftrightarrow (-i\omega)^2 \dots\dots \frac{\partial^n}{\partial t^n} \leftrightarrow (-i\omega)^n$ 微分项转变为代数项

$\frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow ik$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \leftrightarrow (ik)^2 \dots\dots \frac{\partial^n}{\partial x^n} \leftrightarrow (ik)^n$ $\frac{\partial}{\partial y} \leftrightarrow il, \dots\dots$

示例

地转风：$\begin{cases}\bar{\rho}\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \bar{\rho}fv' \\ \bar{\rho}\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y} - \bar{\rho}fu'\end{cases}$ 设 $\begin{pmatrix}u' \\ v' \\ p'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}U \\ V \\ P\end{pmatrix} e^{i(kx+ly-\omega t)} \Rightarrow \begin{cases}-i\omega\bar{\rho}U - \bar{\rho}fV + ikP = 0 \\ -i\omega\bar{\rho}V + \bar{\rho}fU + ilP = 0\end{cases}$

则微分方程组化为代数方程组。

频散关系式与案例分析

对于波动方程 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$ 设波动解：$\varphi = Ae^{i(kx-\omega t)}$，代入方程中：$(-i\omega)^2 - a^2(ik)^2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm ak$。

表示频率和波数之间关系的式子：**频散关系式** $\boldsymbol{\omega = \Omega(k)}$。由频散关系式容易求出相速、群速：

$$c = \frac{\omega}{k} = \pm a, c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \pm a。$$

可见这是个非频散波。然而，对于$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + b^2\phi = 0$，求解后发现：$\omega = \pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}$，有$c = \frac{\omega}{k} = \pm\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{k^2}}$，

不难发现，如果原始方程中多了 $b^2\phi$ 这一项可能的耗散项，非频散波就变为了频散波。

6.4 声波和兰姆波

6.4.1 声波

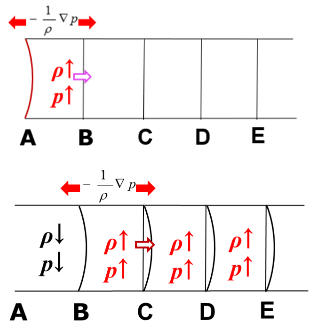
6.4.1.1 基础概念

声波起源 ***Sound wave***，大气是**可压缩**流体，局地空气被压缩或膨胀时，周围空气会依次被压缩或膨胀，声音就是由于这种绝热膨胀或压缩形成的

模型假设 绝热过程，压缩膨胀过程很快，忽略与外界热交换。

物理分析 ① AB间空气块受压缩，产生水平辐合→根据连续方程：密度增大→根据状态方程：气压增大→产生向左/向右的压力梯度力→AB区空气块向右加速运动，B处有加速度：水平运动→使得AB区水平辐散，密度/气压减小；同时，BC区空气受到压缩，密度/气压增大→在BC区域产生了向左和向右的压力梯度力→使得BC区域的右侧又产生了新的压缩区。

可见，A位置空气的运动引起其他空气质点也运动起来。**【传播机制】**



② BC区域产生向左的压力梯度力，对向右运动的AB区空气块施加了回复力→B处空气向右运动速度减小，最终使其向左运动→AB区空气再次受到压缩，空气辐合，气压增大，产生水平气压梯度力……这样循环往复，管子中出现了**压缩-膨胀-压缩**的声波。 **【振荡机制】**

内在条件 **大气可压缩性**是声波产生的内在条件。

传播机制 **辐合辐散交替变化**是声波的传播机制。

性质 ① 声波的振动，与传播方向一致，属于**典型纵波**。 ② 声波是多向传播的（球面波）。

③ 与天气系统（振荡周期为几天，传播速度为 10m/s～与风速相当）相比，声波是**高频波、快波**，如果不滤去，会引起不稳定。

6.4.1.2 声波的物理模型

中心思想 ① 物理模型首先要**突出研究对象的产生机制**：声波产生的机制、过程、物理条件要保留和突出。

② **去掉次要的波动**，即**滤波**：给出的条件要能去掉其它波动，保留声波。

③ 尽量**使问题简化**，声波可以是三维传播的，但为简单起见，可简化为一维问题，机制没发生变化。

物理假设 ① 大气是可压缩的。

② 大气运动仅仅局限在x轴上，$v \equiv 0, w \equiv 0$。由于声波是纵波，则声波只在x向传播，简化问题的同时可滤掉横波（如重力波、大气长波等）。

③ 不计科氏力$f=0$：科氏力不是引起声波的主要作用，滤去由科氏力产生波：惯性波、大气长波等。

④ 膨胀和压缩是**绝热过程**。

6.4.1.3 声波的数学模型

原始方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} & \text{运动方程} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 & \text{连续方程} \\ \dfrac{d\ln\theta}{dt}=0 \quad \left(\theta=\dfrac{p}{R\rho}\left(\dfrac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}\right) & \text{绝热方程} \end{cases}$$

三个方程、三个未知量，是一个闭合方程组

绝热方程 $\dfrac{dp}{dt}-\dfrac{\kappa p}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt}=0$，其中$\kappa=\dfrac{c_p}{c_v}\approx 1.4$。 将方程改为明确含有$p,\rho$的方程

绝热方程的推导

改写热力学能量方程：$\dfrac{d\ln\theta}{dt}=0$。由于膨胀和压缩是绝热过程：$\theta=\dfrac{p}{R\rho}\left(\dfrac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}=p^{1-\frac{R}{c_p}}\cdot\dfrac{1}{R\rho}\cdot p_0^{\frac{R}{c_p}}$

$\dfrac{d\ln\theta}{dt}=\left(1-\dfrac{R}{c_p}\right)\dfrac{d\ln p}{dt}-\dfrac{d\ln\rho}{dt}\Rightarrow\dfrac{1}{\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=\left(1-\dfrac{R}{c_p}\right)\dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dt}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt}\Rightarrow 0=\dfrac{c_v}{c_p}\dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dt}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt}$，令$\kappa=\dfrac{c_p}{c_v}\approx 1.4$，则得上式。

数学模型

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \\ \dfrac{dP}{dt}-\dfrac{\kappa P}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt}=0 \end{cases}$$

下面两式联立消去$\dfrac{d\rho}{dt}$得：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t}+u\dfrac{\partial P}{\partial x}+\kappa P\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}=0 \end{cases}$$

具体过程

$\dfrac{dP}{dt}=\dfrac{\partial P}{\partial t}+u\dfrac{\partial P}{\partial x}$（不考虑$y,z$方向），$\dfrac{d\rho}{dt}=\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$，故将②代入③，可得$\dfrac{\partial P}{\partial t}+u\dfrac{\partial P}{\partial x}-\dfrac{\kappa P}{\rho}\left(-\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0$。

① 连续方程：$\dfrac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\vec{V}=0$ ② 大气的可压缩性$\dfrac{d\rho}{dt}\neq 0$

③ 水平辐合辐散$\dfrac{\partial u}{\partial x}\neq 0$ ④ 绝热方程将p与ρ的变化联系起来，气压梯度力驱动大气运动。

线性化 ① 设：$\begin{matrix} P=\bar{P}+P' \\ u=\bar{u}+u' \\ \rho=\bar{\rho}+\rho' \end{matrix}$ 且 $\begin{matrix} \bar{P}=Const \\ \bar{u}=Const \\ \bar{\rho}=Const \end{matrix}$ 表示某纬度某高度

② 注意：$\frac{1}{\rho}\approx\frac{1}{\bar\rho}-\frac{\rho'}{\bar\rho^2}$ $\begin{cases}\frac{\partial P'}{\partial t}+\bar u\frac{\partial P'}{\partial x}+u'\frac{\partial P'}{\partial x}+\kappa\bar P\frac{\partial u'}{\partial x}+\kappa P'\frac{\partial u'}{\partial x}=0\\ \frac{\partial u'}{\partial t}+\bar u\frac{\partial u'}{\partial x}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial P'}{\partial x}-\frac{\rho'}{\bar\rho^2}\frac{\partial P'}{\partial x}=0\end{cases}$

③ 略去扰动量的二次乘积项即非线性项：$\begin{cases}\frac{\partial P'}{\partial t}+\bar u\frac{\partial P'}{\partial x}+\kappa\bar P\frac{\partial u'}{\partial x}=0 & ①\\ \frac{\partial u'}{\partial t}+\bar u\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial P'}{\partial x}=0 & ②\end{cases}$

求波动解 可以使用**消元法**或**行列式方法**。

消元法

消去u',即$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar u\frac{\partial}{\partial x}\right)①-\kappa\bar P\frac{\partial}{\partial x}②$： $\Rightarrow\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar u\frac{\partial}{\partial x}\right)^2P'-\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P'=0$ 双曲型的波动方程，令形式解为

$P'=Ae^{ik(x-ct)}$ ，有 $\frac{\partial P'}{\partial t}=Ae^{ik(x-ct)}\cdot(-ikc)=-ikcP'\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\sim-ikc$，$\frac{\partial P'}{\partial x}=Ae^{ik(x-ct)}\cdot(ik)=ikP'\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\sim ik$

$\Rightarrow(-ikc+\bar uik)^2P'-\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}(ik)^2P'=0\Rightarrow\left[(c-\bar u)^2-\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}\right]P'=0$ P'具有零解，P'存在非零解即波动存在的条件为：

$(c-\bar u)^2-\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}=0\Rightarrow c=\bar u\pm\sqrt{\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}}\xrightarrow{\text{状态方程}}\boldsymbol{c=\bar u\pm\sqrt{\kappa R\bar T}}$ 令$c_s=\sqrt{\kappa R\bar T}$(绝热声速)，则：$c=\bar u\pm c_s$

表明大气声波的相速决定于基本气流和大气的热性质和热状态。

行列式方法

形式解：$P'=Ae^{ik(x-ct)},u'=Be^{ik(x-ct)}$，又有 $\frac{\partial}{\partial t}\sim-ikc,\frac{\partial}{\partial x}\sim ik$，可得$\begin{cases}(-ikc+ik\bar u)P'+(ik\kappa\bar P)u'=0 & ③\\ \left(i\frac{k}{\bar\rho}\right)P'+(-ikc+ik\bar u)u'=0 & ④\end{cases}$

如果有非平凡解，则行列式为零：$\begin{vmatrix}-c+\bar u & \kappa\bar P\\ 1/\bar\rho & -c+\bar u\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-c+\bar u)^2=\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}\Rightarrow c=\bar u\pm\sqrt{\frac{\kappa\bar P}{\bar\rho}}=\bar u\pm\sqrt{\kappa R\bar T}$

（若行列式为零，则矩阵为奇异 *singular* 且不可逆的，则不能通过求逆的方法来解方程，此时矩阵的行向量线性相关，则两个方程实际上只提供了一个约束条件，一个约束条件无法确定两个未知数，因此方程将有无穷多解，这些解构成一个解空间，即存在非平凡解）

6.4.1.4 声波的性质与滤波条件

声速方程 $\boldsymbol{c=\bar u\pm\sqrt{\kappa R\bar T}=\bar u\pm c_s}$ $c_g=c$

讨论 ① 声波是线性叠加在基本气流上的一维波动，是**双向传播**的。
② 波速c与k无关，是**非频散波**。
③ 声波的传播速度c，决定于基本气流和大气的**热性质**（物质常数κ）和**热状态**（平均温度），这表明声波的传播速度取决于介质。
④ 声波传播速度大小：$c\approx(10\pm330)\mathrm{ms^{-1}}$ 基本气流和大气长波移速为$10\mathrm{ms^{-1}}$左右，声波为**快波**。
⑤ 声波为**高频波**。除个别情况外，声波对天气变化无影响。

滤波条件 ① **大气不可压**。 注意滤波的方法不是唯一的。
② 水平无辐散或准地转近似，可以去掉水平向的声波。
③ 静力平衡，气压取决于气柱重量而不是压缩程度，可以去掉垂直向的声波。

6.4.2 兰姆波【略去？】

兰姆波 ***Lamb wave***，若考虑地球的旋转作用，在静力平衡大气中存在一种只沿水平方向传播的特殊声波，我们称其为兰姆波。

物理假设 ① 大气是**可压缩的**。
② **静力平衡**，且 $w\equiv0$ ，即大气运动为水平运动，滤掉重力波。
③ 考虑地球旋转，但地转参数f为常数，滤去了大气长波。
④ 膨胀和压缩是**绝热过程**。

数学模型

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+f_0 v\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-f_0 u\\ -\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g=0 \quad \text{静力平衡}\\ \frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0\\ \frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}=0 \quad \text{绝热，位温守恒}\end{cases}$$

线性化与求解过程

① 取静止大气作为基本大气状态。设$u=u',v=v',\bar{u}=\bar{v}=0 \quad p=\bar{p}+p',\rho=\bar{\rho}+\rho',\theta=\bar{\theta}+\theta'$，同时在某个高度上，$\bar{p}=const,\bar{\rho}=const,\bar{\theta}=const$。此外，基本态满足原方程：$\begin{cases}0=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x},0=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y},-\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-\bar{\rho}g=0\\ \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}=0,\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t}=0\end{cases}$

② 代入方程，注意 $\frac{1}{\rho}\approx\frac{1}{\bar{\rho}}-\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2}$ ，得到：$\begin{cases}\frac{\partial u'}{\partial t}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x}+f_0 v'\\ \frac{\partial v'}{\partial t}+u'\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial y}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial y}-f_0 u'\\ -\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-\bar{\rho}g-\frac{\partial p'}{\partial z}-\rho' g=0\\ \frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho'\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)+u'\frac{\partial\rho'}{\partial x}+v'\frac{\partial\rho'}{\partial y}+\bar{\rho}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0\\ \frac{\partial\theta'}{\partial t}+u'\frac{\partial\theta'}{\partial x}+v'\frac{\partial\theta'}{\partial y}=0\end{cases}$

其中 静止大气基本态：$\bar{u}=\bar{v}=0$基本量满足原方程：$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t}=0-\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-\bar{\rho}g=0$。

③ 略去高阶小量，并考虑基本方程组，可得到线性化方程组：$\frac{\partial u'}{\partial t}-f_0 v'+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x}=0,\frac{\partial v'}{\partial t}+f_0 u'+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial y}=0,\frac{\partial p'}{\partial z}=-\rho' g,\frac{\partial\theta'}{\partial t}=0,\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\bar{\rho}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0$ 此外 $\frac{\theta'}{\bar{\theta}}=\frac{1}{\kappa}\frac{p'}{\bar{p}}-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}$，若初始无位温扰动，则$\theta'\equiv 0$，所以 $\rho'=\frac{\bar{\rho}}{\kappa}\frac{p'}{\bar{p}}=\frac{p'}{\kappa R\bar{T}}=\frac{p'}{c_s^2}$，$\rho'=\frac{\bar{\rho}}{\kappa}\frac{p'}{\bar{p}}=\frac{p'}{\kappa R\bar{T}}=\frac{p'}{c_s^2}$。令$\pi'=\frac{p'}{\bar{\rho}}$，有：$\frac{\partial u'}{\partial t}-f_0 v'+\frac{\partial\pi'}{\partial x}=0,\frac{\partial v'}{\partial t}+f_0 u'+\frac{\partial\pi'}{\partial y}=0,\frac{\partial\pi'}{\partial t}+c_s^2\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=0$。

④ 消元：$\frac{\partial(1)}{\partial t}-\frac{\partial(3)}{\partial x}$：消去$\pi'$ $\quad \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}-f_0\frac{\partial v'}{\partial t}-c_s^2\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial x\partial y}\right)=0 \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u'-\left(f_0\frac{\partial}{\partial t}+c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)v'=0$

$\frac{\partial(2)}{\partial t}-\frac{\partial(3)}{\partial y}$：消去$\pi'$ $\quad \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}+f_0\frac{\partial u'}{\partial t}-c_s^2\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right)=0 \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v'+\left(f_0\frac{\partial}{\partial t}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\right)u'=0$

$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(4)+\left(f_0\frac{\partial}{\partial t}+c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)(5)$ 消去v' $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u'+\left(f_0\frac{\partial}{\partial t}+c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)\left(f_0\frac{\partial}{\partial t}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\right)u'=0 \qquad L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+f_0^2\right]$ 假设扰动与y无关：$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+f_0^2\right]$

⑤ 设波动解：$u'=Ue^{i(kx-\omega t)}$，代入（6）式 $\omega^2(\omega^2-c_s^2k^2-f_0^2)=0$，最终可解得 $\omega=\pm(c_s^2k^2+f_0^2)^{1/2}$。

波速 取$\omega>0$，$\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c_s^2}+\boldsymbol{f_0^2}/\boldsymbol{k^2})^{1/2}>c_s$ 快波 $\qquad \boldsymbol{c_g}=\boldsymbol{c_s^2}/(\boldsymbol{c_s^2}+\boldsymbol{f_0^2}/\boldsymbol{k^2})^{1/2}<c_s$ 频散波

垂直结构 $\frac{\partial p'}{\partial z}=-\frac{g}{c_s^2}p' \qquad p'=P(z)e^{i(kx-\omega t)} \qquad \frac{dP}{dz}=-\frac{g}{c_s^2}P(z) \qquad P(z)=P(0)e^{-gz/c_s^2}$

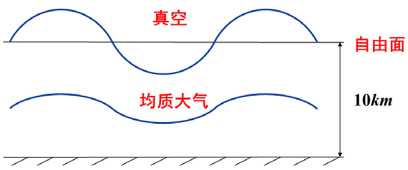
$p'=P(0)e^{-gz/c_s^2}e^{i(kx-\omega t)}$ 若地面无气压扰动，则 $p'=0$，此时无波动。

因此，兰姆波属于外波，扰动气压随高度按指数减小。但扰动速度随高度几乎不变。

6.5 重力外波和重力惯性外波

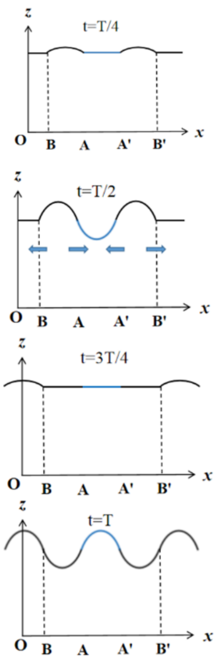
重力波　*gravity wave*，是大气在重力作用下产生的一种波动，它的产生和垂直运动联系在一起，要求 w 不等于零。分为重力内波、重力外波。

重力外波　平静水面(上下两层密度差异巨大)受到扰动后形成的水面波是典型的重力外波。但是，实际大气没有自由面（自由面是指密度不同流体的交界面），对流层顶可以认为一个界面。



假设　在讨论大气动力过程时（正压情况），可视大气为具有一定厚度的均质大气，具有了自由面。在大气边界面上的空气受到垂直扰动后，偏离平衡位置，在重力作用下可以产生类似于水面波的波动，称为重力外波。

6.5.1 重力外波



6.5.1.1 物理机制

物理机制　均质流体的自由表面上产生的波动，与水面波相同。我们以一维渠道波为例：

假设初始时刻，给 AA' 向上的扰动：AA' 间的压强（水柱高度）大于 BA 间和$A'B'$ 间的压强→A 线向左，A' 线向右的压力梯度力→A 线向左运动，A' 线向右运动。这产生两种作用：

① AA' 间产生辐散，自由面下降，压力减小，压力梯度力减小，但继续加速辐散→直到自由面水平，压力梯度力为零→由于惯性继续辐散→产生向内的压力梯度力→辐散减弱至 0，这时向内的压力梯度力最大→产生辐合，自由面上升→产生振荡。因此从力的角度讲，压力梯度力是回复机制（由气柱重量差产生）；从运动角度讲，水平的辐合辐散运动是回复机制。　　【振荡机制】

② AA' 间辐散→BA 间、$A'B'$ 间辐合→自由面上升→扰动向左右两边传播

传播的机制：水平辐合辐散　　【传播机制】

性质　① 双向传播　　② 上下振荡、水平传播，是垂直向横波

形成条件　① 自由表面的存在　　② 水平辐合辐散是其产生、传播的重要机制。

6.5.1.2 大气中重力外波物理模型

假设条件　① 均质不可压，且具有自由表面，可以滤去重力内波（没有内部的密度层结）、声波

② 不计科氏力作用 $f = 0$，可以滤去惯性波、大气长波

③ 波动是一维的，运动限制在xz平面内（$v = 0$），简化问题、滤去水平向横波：大气长波。

6.5.1.3 数学模型

原始方程

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\end{cases}$$

边界条件：$z=0, w=0$　　$z=H, \frac{dp}{dt}=0$ 上部流体压力不变

其中 λ为示踪系数，$\lambda=0$为静力平衡，$\lambda=1$为非静力平衡。　无扰动时，流体深度为H。

线性化　假设基本气流为均匀西风，$\bar{u}=const,\ \bar{w}=0$。

$u=\bar{u}+u', w=w', \rho=\bar{\rho}=\rho_0, \rho'=0, p=\bar{p}(y,z)+p'$ 代入原式：

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+w'\frac{\partial u'}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}\\ \lambda\left(\frac{\partial w'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial w'}{\partial x}+u'\frac{\partial w'}{\partial x}+w'\frac{\partial w'}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}-g\\ \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0\end{cases}$$

基本量满足原方程：$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-g=0$

并略去二次及以上乘积项，得到线性化方程组。