

第七章 流体动力学稳定性概念

7.1 波动稳定性的概念

7.1.1 基本概念

流体力学

流体力学中，当**气流受到扰动**：

① **扰动发展**（基本气流由层流变为湍流），即基本气流是**不稳定**，叠加在其上的扰动是**不稳定**。

② **扰动减弱**（或始终很小），则基本气流是稳定的，扰动也是稳定的。

流体力学中，侧重的是基本气流是否稳定，纯粹是动力学问题。

气象学

气象上，侧重的是波动是否稳定，不仅涉及**动力问题**，还涉及**热力问题**。

如果**波动或扰动能发展**，这个波动就是**不稳定的**。

如果**波动或扰动不发展**，即波动始终很小或衰减，这个波动就是**稳定的**。

能量学角度

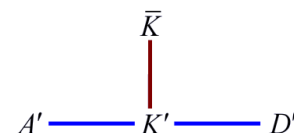
扰动发展需要**扰动动能 K'** 增加。

① **太阳辐射**：转化为有效位能后才能影响大气运动，短期变化过程可认为与外界无热量交换。

② **相变潜热**：较强对流系统。

③ **有效位能**：正压大气不能释放有效位能。

④ **基本气流平均动能**：正压、斜压大气扰动能量来源。



7.1.2 Rossby 波的能量来源

斜压不稳定

$A' \rightarrow K'$ 斜压大气才存在有效位能，风速存在垂直切变。

均匀基流为正压大气，无有效位能，波动是斜压稳定的。

正压不稳定

$\bar{K} \rightarrow K'$ 我们有 $\{K', \bar{K}\} = \int_M \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dM$ （能量转换取决于波和流的结构配置）

对于**均匀基流** $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0$ ，**波动是正压稳定的**，这是讨论波动传播问题时一直假设的条件。

由此，讨论波动发展问题时，要考虑**非均匀基流**。

正压稳定度

基本气流有**经向切变 $\bar{u}(y)$** ，取决于 \bar{u} 南北分布状况，能量来源于**基本气流的平均动能**。正压大气中，只有基本气流的平均动能提供扰动发展能量。

斜压稳定度

基本气流有**垂直切变 $\bar{u}(z)$** ，取决于 \bar{u} 垂直分布状况，能量来源于**扰动有效位能**。斜压大气中，扰动有效位能和基本气流的平均动能均能提供扰动发展能量。

7.2 波动稳定性的数学表达

简谐波解

在扰动发展**初始阶段**，一般的扰动相对于基本气流而言，可视为**甚小**，此时的不稳定是**线性不稳定**，通常是采用**标准波形方法**。我们假设简谐波解为：

$$\Psi' = Ae^{i(kx - \omega t)} = Ae^{ik(x - ct)} = Ae^{kC_i t} e^{ik(x - C_r t)}$$

此处， c, ω 为复数： $c = C_r + iC_i$ 。我们令 **$Ae^{kC_i t} = A^*(t)$** ，则：

$$\Psi' = A^*(t) e^{ik(x - C_r t)}$$

若 $\begin{cases} C_i = 0, \text{ 则 } A^* = A, \text{ 为常量, 扰动始终不变 } \Rightarrow \text{稳定} \\ C_i \neq 0, C_i < 0 \Rightarrow A^* \text{ 随时间衰减, 扰动减弱 } \Rightarrow \text{稳定} \\ C_i \neq 0, C_i > 0 \Rightarrow A^* \text{ 随时间增大, 扰动增强 } \Rightarrow \text{不稳定} \end{cases}$

共轭解

实际波动是有很多简谐波叠加而成，振荡解一般都是共轭出现的。

如简谐振荡方程， $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ 特征根： $r = \pm i\sqrt{k}$ ，振荡解为： $x = Ae^{i\sqrt{k}t} + Be^{-i\sqrt{k}t}$

波动的两个特征解成对共轭出现： $C_r \pm i\sqrt{\delta} = C_r \pm iC_i$

当有共轭特征解时，相应的波动解 $x = Ae^{kC_it}e^{i\theta} + Be^{-kC_it}e^{i\theta}$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时，只要 $C_i \neq 0$ ，波动都是发展的。此时，称 $k|C_i|$ 为不稳定波的增长率。

不稳定判据

研究 Rossby 波初始阶段的不稳定性问题时，通常从控制方程组出发→线性化控制方程组→设简谐波解→求解波速 c 或其他方法找到波速 c 为复数的条件，给出不稳定的出现同扰动波长 L 、基本气流分布以及其它因子之间的关系，这种关系称为不稳定判据。

必要条件

由 $C_i \neq 0$ 导出的条件，即波动不稳定必须满足的条件。若此条件不满足，则波动一定稳定；若此条件满足，波动不一定不稳定。

充分条件

由方程导出在 A 条件下，必有 $C_i \neq 0$ ，则 A 条件称为不稳定的充分条件。

气块法

气块是大气的一部分，在初始状态时，具有和同纬度（同高度）的其他大气一样的物理属性。

当受扰动离开原位置后看做一个独立的个别部分。

通常把未受扰动前气块所处位置称为平衡位置。气块受扰动离开平衡位置后仍回到它原有的平衡位置，那就是稳定的；反之，若趋向于达到一个新的位置，那就是不稳定的。