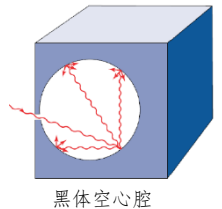


第四章 黑体辐射定律

4.1 黑体辐射

4.1.1 黑体性质

黑体	黑体是一个理想的物体,它能够吸收入射的所有的电磁辐射
黑体辐射	处于热平衡状态的黑体发射的辐射称之为黑体辐射,并具有如下特性: ① 辐射具有特定的谱分布和强度,且这些特性只随物体的温度变化 斯特藩-玻尔兹曼定律 ② 黑体是理想的发射体,即在任何频率,在相同温度下,它发射的辐射能都能达到(或超过)任何其他物体(灰体)发射的辐射能 ③ 黑体发射辐射是各向同性的,与方向无关
白体	对入射辐射不吸收
灰体	以定常吸收率吸收不同波长的入射辐射 也是理想物体
实体	对入射辐射部分吸收,且吸收率随波长变化 实际物体



4.1.2 四大定律

普朗克定律	$F_B(\lambda, T)$ 一个温度 T 的物体会在所有可能波长上发射辐射,而在任意给定的波长上,发射辐射存在一个严格的上限(即黑体辐射),该上限由普朗克函数描述。 ① 要求处于局地热平衡条件,例如激光笔辐射可以轻易超过黑体辐射。 ② 要求物体尺度要远大于波长,该定律对微观粒子也不成立,需通过量子力学修正。
斯蒂芬-玻尔兹曼定律	$F_B(T)$ 在所有可能的波长上对普朗克函数进行积分,可以得到史蒂芬-玻尔兹曼定律。该定律表明黑体发射的最大总辐射能量与绝对温度四次方成正比。
维恩位移定律	$\lambda_m(T)$ 对于任意给定温度,出现普朗克函数最大值的波长与该温度成反比。
基尔霍夫定律	$\varepsilon(\lambda, T)$ 在给定谱带中,好的吸收体也是好的发射体。该事实由基尔霍夫定律描述。

4.2 普朗克函数

公式 一个温度为 T ,且处于热平衡状态下的黑体发射辐射的各向同性单色辐射强度:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5(e^{hc/k_B\lambda T} - 1)}$$

物理解释	普朗克常数 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, 玻尔兹曼常数 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
量纲	$B_\lambda(T)d\lambda$ 是由 $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ 波长区间贡献的总发射辐射强度 物理量纲是每单位波长的辐射强度 $\text{Wm}^{-2}\mu\text{m}^{-1}\text{Sr}^{-1}$
例题	有些时候普朗克函数 $B(T)$ 不但可以表示成波长 λ 的函数,而且还可以表示成频率 ν 或波数 $\tilde{\nu}$ 的函数。考虑到在 $d\nu$ 和 $d\lambda$ 对应相同窄的光谱区间时, $B_\lambda(T)d\lambda$ 必须等于 $B_\nu(T)d\nu$,由此推导出只随 ν 函数变化的 B_ν 正确表达式。

直接将 $\lambda = \frac{c}{\nu}$ 代入是错误的。由相同波谱区间能量守恒的要求可得 $B_\nu(T) = B_\lambda(T) \frac{d\lambda}{d\nu}$

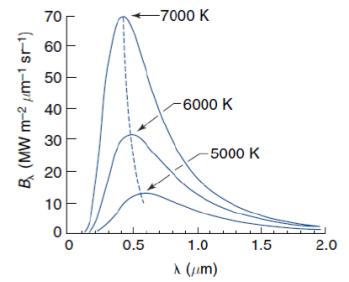
根据波长和频率关系可知 $\lambda = \frac{c}{\nu} \rightarrow d\lambda = \left| \frac{-c}{\nu^2} d\nu \right|$ 注意采用绝对值是因为普朗克函数必须是正值。将其

$$\text{代入上式可得: } B_\lambda d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5(e^{hc/k_B\lambda T} - 1)} \frac{c}{\nu^2} d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2(e^{h\nu/k_B T} - 1)} d\nu \quad \text{因此 } B_\nu d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2(e^{h\nu/k_B T} - 1)} d\nu$$

基本特征

- ① 对于任意给定的波长，黑体发射随温度升高而**单调增大**
- ② 发射辐射不以它的最大值为中心呈现出对称分布
- ③ 在光谱末端的**短波区域**，发射**快速锐减**
- ④ 在接近**长波末端**时，发射则像尾巴一样非常**缓慢减小**

地球长波辐射各方向都有，太阳短波辐射仅有单一方向，所以可以忽略，然而太阳辐射的长波辐射仍然大于地球长波辐射，因此考虑镜面反射等辐射时，必须考虑太阳长波辐射。



具有所示绝对温度的黑体的发射光谱，以线性标度绘制为波长的函数。由这些光谱的集合形成的三维表面是普朗克函数。

4.3 维恩位移定律

定律

黑体辐射**最大通量密度的波长与温度成反比**

$$\lambda_m(T) = \frac{a}{T} = \frac{2897.8 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{T}$$

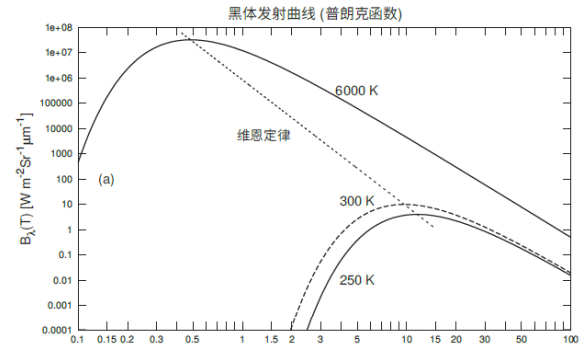
黑体温度 $T = 6000\text{K}$, $\lambda_m = 0.42 \mu\text{m}$, 为可见光

黑体温度 $T = 290\text{K}$, $\lambda_m = 10 \mu\text{m}$, 为红外线

由**维恩位移定律**确定的温度称为**色温**

推导

根据普朗克定律对波长求导可得。



4.4 史蒂芬—玻尔兹曼定律

4.4.1 史蒂芬-玻尔兹曼定律

定律

普朗克函数描述黑体发射单色辐射强度，而史蒂芬玻尔兹曼定律描述黑体发射的**宽带辐射通量密度**

$$F_{\text{BB}}(T) = \pi \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \sigma T^4 \quad \text{其中 } \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \approx 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad \text{乘以 } \pi \text{ 是对半球立体角积分}$$

推导提示：利用替换关系 $x = \frac{hc}{k_B \lambda T}$ 同时注意已知积分 $\int_0^\infty [x^3 / (e^x - 1)] dx = \frac{\pi^4}{15}$

由玻尔兹曼定律确定的温度叫做**相当黑体温度**

例题

1. 给定以下信息，利用史蒂芬-玻尔兹曼关系计算太阳的有效发射温度：已知地球大气顶的太阳常数 $S_0 = 1370 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ；地球轨道的平均半径 $1.496 \times 10^8 \text{ km}$ ；太阳的色球半径 $6.96 \times 10^5 \text{ km}$ 。

由能量守恒可知太阳表面发射的辐射通量密度为：

$$F_{\text{sfc}} = S_0 \left(\frac{D_E}{R_S} \right)^2 = 1370 \text{ Wm}^{-2} \left(\frac{1.496 \times 10^8 \text{ km}}{6.96 \times 10^5 \text{ km}} \right)^2 = 6.3 \times 10^7 \text{ W/m}^2$$

$$\text{根据史蒂芬-玻尔兹曼定律可知太阳有效发射温度为 } T_{\text{eff}} = \sqrt[4]{\frac{F_{\text{sfc}}}{\sigma}} = \left(\frac{6.3 \times 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}} \right)^{1/4} = 5780.2 \text{ K}$$

该数值与颜色温度有所区别的原因是太阳不是一个完美的黑体

4.4.2 大气顶的全球辐射平衡

入射短波辐射

$$\Phi_{\text{SW}} = (1 - A_p) S_0 \pi R_E^2 \quad \text{其中 } A_p = 0.3 \text{ 为行星反照率}$$

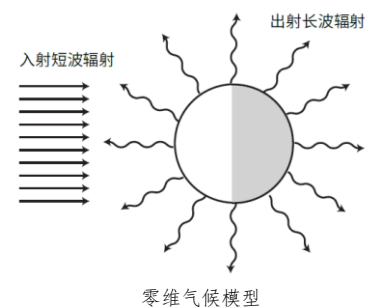
出射长波辐射

$$\Phi_{\text{LW}} = \varepsilon \sigma T^4 4\pi R_E^2 \quad \text{其中假设发射率 } \varepsilon = 1$$

有效发射温度

$$T_{\text{eff}} = \sqrt[4]{\frac{S_0(1-A_p)}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1367(1-0.3)}{4 \times 5.67 \times 10^{-8}}} = 255 \text{ K}$$

可见比观测的全球平均地表温度 288K 低了 33K ，这是因为没有考虑大气的平均温度 242K ，这个温度是大气层顶的。



4.5 基尔霍夫定律

4.5.1 瑞利-金斯近似

引入 对于大气微波遥感，人们感兴趣的波长都非常地长，比 $\lambda = 1\text{ mm}$ 甚至更长。

公式 在这种极限长的波长情况下 $B_\lambda(T) \approx \frac{2ck_B}{\lambda^4} T$ 即所谓的**瑞利-金斯近似**。

分析 由此可知，在这种情况下**黑体发射辐射与绝对温度成正比**。
该定律显著地简化一些类型的微波谱带辐射传输计算和探测器标定工作，可以用**温度代替辐射强度**。

4.5.2 发射率

发射率 **给定物体表面发射辐射与同温黑体表面发射辐射的比值**。

单色发射率 给定物体表面在给定波长 λ 和温度 T 条件下发射的**实际辐射强度 I_λ** 与普朗克函数 $B_\lambda(T)$ 的比值，

$$\varepsilon_\lambda = \frac{I_\lambda(T)}{B_\lambda(T)} \quad \text{通常, } 0 \leq \varepsilon_\lambda \leq 1. \text{ 当 } \varepsilon_\lambda = 1, \text{ 物体在此波段上为有效黑体。}$$

灰体发射率 给定物体表面发射的**宽带辐射通量密度**与**史蒂芬-玻尔兹曼关系预测的辐射通量密度**比值，

$$\varepsilon = \frac{F}{\sigma T^4} \quad \text{有些时候, 引入有限波长范围} [\lambda_1, \lambda_2] \text{ 的灰体发射率概念会更加地有用。}$$

例如: $\varepsilon = \frac{\int_{0.1}^4 F_\lambda(T) d\lambda}{\int_{0.1}^4 \pi B_\lambda(T) d\lambda}$ 为太阳短波波段的灰体发射率。

典型发射率

水体 92–96	新的干雪 82–99.5	冰 96	干的沙子 84–90	湿的土壤 95–98
沙漠 90–91	森林和灌木 90	人的皮肤 95	水泥地 71–88	抛光铝 1–5

人几乎为黑体；航空飞机常使用铝，吸收率极小，反射率极高，故很难隐身

4.5.3 基尔霍夫定律

定律 基尔霍夫定律以简洁的方式定量阐述了吸收率 a 和发射率 ε 之间的关系: $\varepsilon_\lambda(\theta, \phi) = a_\lambda(\theta, \phi)$

可以使用反证法: 如果不相等, 假设 $\varepsilon > a$, 则物体不断降温, 外界不断升温, 违背热力学第二定律。

注意 ① 注意该等式只有在**针对给定波长 λ 和固定观测方向 θ 和 ϕ 的单色辐射**时才严格有效。除非 a (因此和 ε) 在一定范围内与这些参数无关。实际中各向同性的辐射较少, 上述定律很少满足。

② 在此需要指出基尔霍夫定律仅仅适用于**局地热平衡 (LTE)** 系统。即只有物质分子之间的能量交换相比分子与辐射场或其他能量源之间的能量交换更加地快速, 该条件才能成立。

激光笔、LED 灯、南北两极的极光等光源都不是局地热平衡的。

4.8 简化大气辐射模式

假设条件 大气温度均匀的半透明薄片, 地表不透明 地表温度 T_s , 大气温度 T_a
地表长波发射率 $\varepsilon = 1$ 和短波反照率 A **大气长波吸收率 a_{lw} 和短波吸收率 a_{sw}**
大气只吸收, 不散射或反射短波/长波辐射 (不合理因素)

全球平均入射的太阳短波辐射通量 $S = S_0/4$

辐射内容 F_1 来自太阳的入射短波通量

$$F_1 = S$$

F_2 F_1 的透射部分

$$F_2 = (1 - a_{sw})F_1 = (1 - a_{sw})S$$

F_3 F_4 的透射部分

$$F_3 = (1 - a_{sw})F_4 = A(1 - a_{sw})^2 S$$

F_4 地表反射的短波通量

$$F_4 = AF_1 = A(1 - a_{sw})S$$

F_5 大气向上的长波发射

$$F_5 = a_{lw}\sigma T_a^4$$

F_6 大气向下的长波发射

$$F_6 = F_5 = a_{lw}\sigma T_a^4$$

F_7 F_8 的透射部分

$$F_7 = (1 - a_{lw})F_6 = (1 - a_{lw})\sigma T_a^4$$

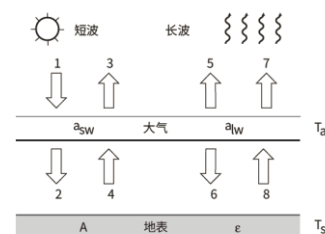
F_8 地表的长波发射

$$F_8 = (1 - \varepsilon)F_6 + \varepsilon\sigma T_s^4 = \sigma T_s^4$$

除了透射就是吸收

反射率为 A

大气温度一致, 上下一致



辐射平衡

大气顶及地表与大气之间的净辐射通量（短波和长波的总和）都为零。

$$F_{\text{net,top}} = F_3 + F_5 + F_7 - F_1 = 0 \quad \text{真空只有辐射}$$

$$F_{\text{net,sfc}} = F_4 + F_8 - F_2 - F_6 = 0 \quad \text{未考虑潜热、感热}$$

温度求解

代入之前给出的各个辐射通量项可得：

$$A(1 - a_{\text{sw}})^2 S + a_{\text{lw}} \sigma T_a^4 + (1 - a_{\text{lw}}) \sigma T_s^4 - S = 0$$

$$A(1 - a_{\text{sw}}) S + \sigma T_s^4 - (1 - a_{\text{sw}}) S - a_{\text{lw}} \sigma T_a^4 = 0$$

对其进行整理可得：

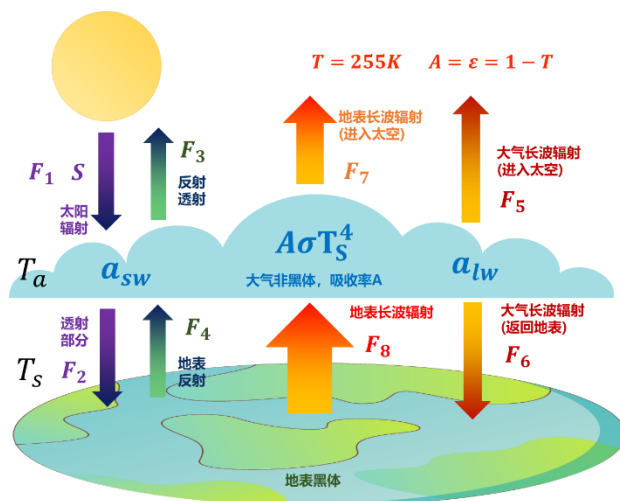
$$(1 - a_{\text{lw}}) \sigma T_s^4 + a_{\text{lw}} \sigma T_a^4 = S[1 - A(1 - a_{\text{sw}})^2]$$

$$\sigma T_s^4 - a_{\text{lw}} \sigma T_a^4 = (1 - A)(1 - a_{\text{sw}}) S$$

求解耦合的线性方程组可得：

$$T_s = \left\{ \frac{S}{\sigma} [1 - (1 - a_{\text{sw}})A] \left(\frac{2 - a_{\text{sw}}}{2 - a_{\text{lw}}} \right) \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$T_a = \left\{ \frac{S}{\sigma} \left[\frac{(1 - A)(1 - a_{\text{sw}})a_{\text{lw}} + [1 + (1 - a_{\text{sw}})A]a_{\text{sw}}}{(2 - a_{\text{lw}})a_{\text{lw}}} \right] \right\}^{\frac{1}{4}}$$



分类讨论

① 当 $a_{\text{lw}}, a_{\text{sw}} = 0$ 时，相当于大气根本不存在，此时 $T_s = \sqrt[4]{\frac{S_0(1-A)}{4\sigma}}$ 与零级气候模型几乎一致

② 当 $A = 0$ 时，即地表完全黑的情况，但是 a_{lw} 和 a_{sw} 可以各自不为零，此时 $T_s = \left[\frac{S_0}{4\sigma} \left(\frac{2 - a_{\text{sw}}}{2 - a_{\text{lw}}} \right) \right]^{\frac{1}{4}}$

短波吸收率越小，长波吸收率越大，地表温度越高。

温室效应

考虑到假设条件的不合理，令 $a_{\text{sw}} = 0.1$ （即大气对太阳的短波辐射相对透明）和 $a_{\text{lw}} = 0.8$ （即大气对热红外波长则相对吸收），同时将 $S(1 - A_p)$ 替换 S 来补偿因云层等反射而造成的辐射损失，其中 $A_p = 0.30$ 是观测到的行星反照率，由此可以得到了一个新的地表平衡温度 286 K 。由于大气的存在而导致的这种变暖效应通常称为温室效应（Greenhouse effect）。

4.9 夜间辐射冷却

问题引入

晴空晚上比多云晚上更容易发生露珠或者霜冻现象，即降温速度更快。

问题推导

假设长波地表发射率 $\varepsilon \approx 1$ ，地表净辐射通量： $F^{\text{net}} = F^{\uparrow} - F^{\downarrow} = \sigma T_s^4 - a_{\text{lw}} \sigma T_a^4$

① 中纬度晴空晚上情况，地表温度 $T_s = 275 \text{ K}$ ，长波大气吸收率 $a_{\text{lw}} = 0.8$ 和有效大气温度 $T_a = 260 \text{ K}$ ，因此正的向上净通量 $F^{\text{net}} = 117 \text{ W m}^{-2}$ 。

② 中纬度有云晚上情况，地表温度 $T_s = 275 \text{ K}$ ，长波大气吸收率 $a_{\text{lw}} = 1.0$ 和有效大气温度 $T_a = 270 \text{ K}$ ，因此正的向上净通量 $F^{\text{net}} = 22 \text{ W m}^{-2}$ 。云在长波可以视作黑体。

③ 假设冷却的土壤平均有效厚度为 $\Delta Z = 5 \text{ cm}$ ，采用典型的土壤热容量（每立方体积）

$$C \approx 2 \times 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}，因此地面冷却速率可以表示为 \frac{dT}{dt} \approx \frac{-F^{\text{net}}}{C \Delta Z} \quad \text{单位面积}$$

辐射冷却

因此晴空晚上情况，地面冷却速率约为 -4.2 K/hr ，而有云晚上情况，地面冷却速率约为 -0.8 K/hr

层的冷却

对于 Δz 的一个空气层，有层加热率： $\frac{dT}{dt} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-\Delta F^{\text{net}}}{c_p \rho \Delta z} = -\frac{1}{c_p \rho} \frac{dF^{\text{net}}(z)}{dz}$ 可以解释云层的辐射冷却现象

云顶的辐射冷却：云层的冷却主要来自于云顶的净辐射冷却。

4.10 亮度温度

亮度温度

普朗克函数描述了给定波长条件下黑体发射辐射强度与黑体温度之间的一对一映射关系。因此，无论什么辐射源，总能将任意的单色辐射强度转换为等价的黑体温度，即亮度温度。

$$T_B = B_{\lambda}^{-1}(I_{\lambda}) \quad \text{其中 } B_{\lambda}^{-1} \text{ 是以观测辐射强度为自变量的逆普朗克函数。}$$

温度关系

$T_B \leq T_{\text{实际温度}}$ 等价于证明： $B_{\lambda}(T_B) \leq B_{\lambda}(T) \Rightarrow I_{\lambda}(T) \leq B_{\lambda}(T) \Rightarrow \varepsilon_{\lambda} B_{\lambda}(T) \leq B_{\lambda}(T)$ 得证

注意

① 对于热红外波长，大多数的陆地和水体以及厚云层的表面发射率 $\varepsilon \approx 1$ 。因此，穿过透明大气观测到的地表亮度温度非常地接近于实际物理温度。

② 对于微波波长，水体和冰川的表面发射率显著低于一，亮度温度可能明显低于物理温度。

典例

1. 某卫星在无云条件下观测某位置地表的波长 $12\text{ }\mu\text{m}$ 辐亮度为 $6.2\text{ Wm}^{-2}\text{ }\mu\text{m}^{-1}\text{ sr}^{-1}$ 。

(a) 计算亮度温度 T_B (b) 假设大气完全透明，且已知问题的地表发射率在该波长上为0.9，计算地表的实际温度 (c) 亮度温度相对实际温度的比值等于发射率吗？

求逆普朗克函数即可得到随观测波长变化的亮度温度 $T_B(I, \lambda) = \frac{hc}{k_B \lambda \ln\left(\frac{2hc^2}{I\lambda^5} + 1\right)}$

(a) 代入上式 $T_B(I, \lambda) = T_B(6.2\text{ Wm}^{-2}\text{ }\mu\text{m}^{-1}\text{ sr}^{-1}, 12\text{ }\mu\text{m}) = 275\text{ K}$

(b) 利用 $I_\lambda(T) = \varepsilon_\lambda B_\lambda(T) \Rightarrow T(I, \lambda) = T_B(I/\varepsilon, \lambda) = 281.7\text{ K}$

(c) 亮度温度与实际温度的比值 $\frac{T_B(I, \lambda)}{T(I, \lambda)} = 0.976$ ，可见不完全等于发射率，但是采用亮度温度估计真实的物理温度只有 2% 误差，即使非黑体的发射率只有 0.9。然而，实际情况大气并不完全透明，云在该波段基本不透明。

2. 重复上述问题，除了波长 1 cm 和辐射强度 $2.103 \times 10^{-10}\text{ Wm}^{-2}\text{ }\mu\text{m}^{-2}\text{ sr}^{-1}$ 。请问如何修改小题(c)？

经过计算得到：亮温为 254.7K，实际温度为 282.9K，可见 $\frac{T_B(I, \lambda)}{T(I, \lambda)} = 0.9$ 因此，遥感选择 $12\text{ }\mu\text{m}$ 。

然而，云在该波段基本透明，遥感有时也用该波段。

此外，可见波长较长时，温度与普朗克函数成正比关系： $\frac{T_B}{T} = \varepsilon_\lambda \Rightarrow \frac{B_\lambda(T_B)}{B_\lambda(T)} = \varepsilon_\lambda \Rightarrow \frac{I_\lambda(T)}{B_\lambda(T)} = \varepsilon_\lambda$ ，该处比值为发射率是必然现象。

3. 根据下方右图 (a) 估计波长 $11\text{ }\mu\text{m}$ 的亮度温度。 (b) 估计波长 $15\text{ }\mu\text{m}$ 的亮度温度。

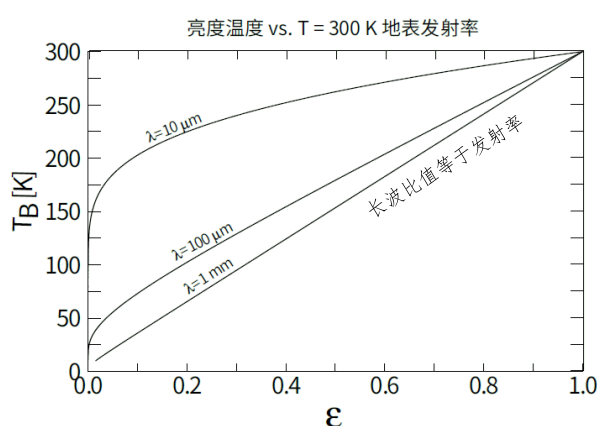
(c) 推断一下在上述哪个波长上看到的辐射主要来源于地表发射？

(d) 基于不能看到地表的波长，粗略估算一下对应观测亮度温度的近似大气高度，假设标准递减率为 6.5 K/km 。

(a) 295 K (b) 可见有跳跃尖峰，约 215 K 至 230 K

(c) $11\text{ }\mu\text{m}$ 可以根据温度直接判断，地面温度较高。

(d) 地面与大气温度之差，除以温度递减率可得： $\frac{295 - 215}{6.5} \approx 12\text{ km}$



对于物理温度 300 K 的地表，在三个不同波长上，发射率 ε 与亮度温度 T_B 之间的关系

