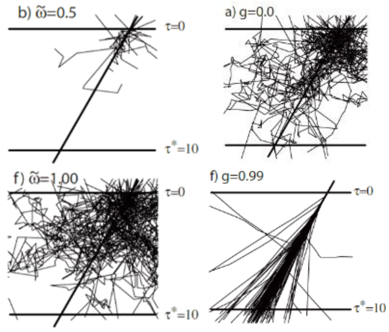
第十一章 基于多次散射的辐射传输方程



蒙特卡罗方法

11.1 基于多次散射的辐射传输

11.1.1 基于多次散射的辐射传输方程

方程形式 $\mu\frac{dI(\mu,\phi)}{d\tau}=I(\mu,\phi)-\frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}p(\mu,\phi;\mu',\phi')I(\mu',\phi')d\mu'd\phi'$

方程内涵 如果需要特定方向τ的$I(\mu,\phi)$，就必须确定所有μ'和ϕ'方向和τ 的$I(\mu',\phi')$。

所以辐射传输方程**不能准确进行解析求解**，除非做非常苛刻的假设。

数值方法 辐射学者为获得合理精度的真实问题的解开发了各种**数值计算方法**：

① **离散纵标方法（二流近似）** 思想：只在两个方向上有辐射流动，可以转化积分为求和。

② **逐阶散射方法**（单次散射近似基础上改造）

③ 累加方法（倍加方法） 知道两个单一薄层的特性，合并后即可得到多次散射。

④ 球谐函数方法 数学十分复杂

⑤ **蒙特卡罗方法** 我们追踪每一个光子的路径，可能被吸收、反射、投射。

我们假设好单次散射反照率、非对称因子、光学厚度后就可以大量模拟。

11.1.2 方位平均辐射传输方程

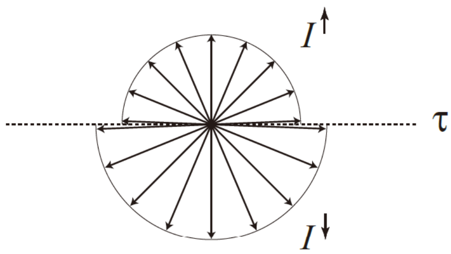
辐射强度 对辐射传输方程**两边对方位角做积分平均**，得到**方位平均辐射强度**：$I(\mu)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}I(\mu,\phi)d\phi$

散射相函数 **方位平均散射相函数**：$p(\mu,\mu')\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(\mu,\mu',\Delta\phi)d(\Delta\phi)$

传输方程 **方位平均辐射传输方程**：$\boldsymbol{\mu\frac{dI(\mu)}{d\tau}=I(\mu)-\frac{\tilde{\omega}}{2}\int_{-1}^{1}p(\mu,\mu')I(\mu')d\mu'}$

主要用于气候研究，便于求解辐射通量密度：$F'=\int_0^1\int_0^{2\pi}I(\mu,\phi)d\mu d\phi=\int_0^1 2\pi I(\mu)\mu d\mu$

11.2 二流近似解的推导



在二流近似中假设的辐射强度角度分布

11.2.1 二流近似与二流方程

11.2.1.1 二流近似

近似情况 假设**辐射强度在各自半球内近似常数** $I(\mu)=\begin{cases}I^{\uparrow} & \mu>0\\ I^{\downarrow} & \mu<0\end{cases}$ 其中$I^{\uparrow}$和$I^{\downarrow}$都为常数。

合理性 高空观测时，向上各方向(除太阳方向)，向下各方向辐射基本差不多，假设可以接受。

11.2.1.2 二流方程

方程改写 首先考虑向上的辐射流，并**将$I(\mu)$替换成常量$I^{\uparrow}$和$I^{\downarrow}$**： 0~1为上半球，−1~0为下半球。

$\mu\frac{dI^{\uparrow}}{d\tau}=I^{\uparrow}-\frac{\tilde{\omega}}{2}\int_0^1 p(\mu,\mu')I^{\uparrow}d\mu'-\frac{\tilde{\omega}}{2}\int_{-1}^0 p(\mu,\mu')I^{\downarrow}d\mu'\Rightarrow$ 由于为常量，可以把$I^{\uparrow}$和$I^{\downarrow}$提取出来

$$\mu\frac{dI^{\uparrow}}{d\tau}=I^{\uparrow}-\frac{\tilde{\omega}}{2}\left[\int_0^1 p(\mu,\mu')d\mu'\right]_{\text{前向散射比重}}I^{\uparrow}-\frac{\tilde{\omega}}{2}\left[\int_{-1}^0 p(\mu,\mu')d\mu'\right]_{\text{后向散射比重}}I^{\downarrow}$$

定义**后向散射比重b** 来表示被散射至**相反半球内μ方向**上的辐射比重：

$$b(\mu)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}p(\mu,\mu')d\mu'=1-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}p(\mu,\mu')d\mu', & \mu>0\\ \frac{1}{2}\int_{0}^{1}p(\mu,\mu')d\mu'=1-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}p(\mu,\mu')d\mu', & \mu<0\end{cases}$$ 前向散射 = 1 − 后向散射

描述**向上辐射流**的辐射传输方程**可进一步改写为**：$\mu\frac{dI^{\uparrow}}{d\tau}=I^{\uparrow}-\tilde{\omega}[1-b(\mu)]I^{\uparrow}-\tilde{\omega}b(\mu)I^{\downarrow}$

在整个半球上**对天顶角做积分**做平均来消除μ：$\int_0^1\left[\mu\frac{dI^{\uparrow}}{d\tau}=I^{\uparrow}-\tilde{\omega}[1-b(\mu)]I^{\uparrow}-\tilde{\omega}b(\mu)I^{\downarrow}\right]d\mu$

传输方程 基于**向上辐射流**的辐射传输方程：

$$\frac{1}{2}\frac{dI^{\uparrow}}{d\tau}=I^{\uparrow}-\tilde{\omega}(1-\bar{b})I^{\uparrow}-\tilde{\omega}\bar{b}I^{\downarrow}\Rightarrow\boxed{\frac{1}{2}\frac{dI^{\uparrow}}{d\tau}=(1-\tilde{\omega})I^{\uparrow}+\tilde{\omega}\bar{b}(I^{\uparrow}-I^{\downarrow})}$$ **其中 $\bar{b}\equiv\int_0^1 b(\mu)d\mu$**

基于**向下辐射流**的辐射传输方程：

$$-\frac{1}{2}\frac{dI^{\downarrow}}{d\tau}=I^{\downarrow}-\tilde{\omega}(1-\bar{b})I^{\downarrow}-\tilde{\omega}\bar{b}I^{\uparrow}\Rightarrow\boxed{-\frac{1}{2}\frac{dI^{\downarrow}}{d\tau}=(1-\tilde{\omega})I^{\downarrow}-\tilde{\omega}\bar{b}(I^{\uparrow}-I^{\downarrow})}$$

二流解释 方程中1/2的位置原来是μ，可以发现 $\cos\theta=1/2\Rightarrow\theta=60°$，则光只在两个方向上有流动：向上$\theta=60°$和向下的$\theta=120°$。

11.2.2 后向散射比重和g

观察现象 已知的 g 与 $\bar{b}$ 之间的映射关系：$g=-1\to\bar{b}=1$ $g=0\to\bar{b}=\frac{1}{2}$ $g=1\to\bar{b}=0$

假设情况 假设 g 与 $\bar{b}$ 之间**满足线性关系**：$\bar{b}=\frac{1-g}{2}$

传输方程 将g代入原式的$\bar{b}$，方程变为：$\frac{1}{2}\frac{dI^{\uparrow}}{d\tau}=(1-\tilde{\omega})I^{\uparrow}+\frac{\tilde{\omega}(1-g)}{2}(I^{\uparrow}-I^{\downarrow})$ $-\frac{1}{2}\frac{dI^{\downarrow}}{d\tau}=(1-\tilde{\omega})I^{\downarrow}-\frac{\tilde{\omega}(1-g)}{2}(I^{\uparrow}-I^{\downarrow})$

则 $\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(I^{\uparrow}-I^{\downarrow})=(1-\tilde{\omega})(I^{\uparrow}+I^{\downarrow})$ $\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(I^{\uparrow}+I^{\downarrow})=(1-\tilde{\omega}g)(I^{\uparrow}-I^{\downarrow})$

11.2.3 二流解

二流解 将基于向上和向下辐射流的辐射传输方程**进行相加和相减后**，然后**对二者进行求导**，再将**二者右侧导数项用二流方程表达式进行替换**：

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(I^{\uparrow}+I^{\downarrow})=4(1-\tilde{\omega}g)(1-\tilde{\omega})(I^{\uparrow}+I^{\downarrow})\quad\frac{d^2}{d\tau^2}(I^{\uparrow}-I^{\downarrow})=4(1-\tilde{\omega}g)(1-\tilde{\omega})(I^{\uparrow}-I^{\downarrow})$$

根据**二阶常微分方程解**可知$\left(\frac{d^2y}{dx^2}=\Gamma^2y\Rightarrow e^{\Gamma x}\text{ 或 }e^{-\Gamma x}\right)$，**二流通解**可以表示为其线性组合：

$$\boldsymbol{I^{\uparrow}(\tau)=Ae^{\Gamma\tau}+r_{\infty}De^{-\Gamma\tau}}\qquad\boldsymbol{I^{\downarrow}(\tau)=r_{\infty}Ae^{\Gamma\tau}+De^{-\Gamma\tau}}$$

其中：$\Gamma\equiv2\sqrt{1-\tilde{\omega}}\sqrt{1-\tilde{\omega}g}$ $r_{\infty}\equiv\frac{\sqrt{1-\tilde{\omega}g}-\sqrt{1-\tilde{\omega}}}{\sqrt{1-\tilde{\omega}g}+\sqrt{1-\tilde{\omega}}}$ 具有一定物理含义

边界条件 为确定通解系数，**假设下边界为黑体**(不反射)，大气顶有已知**半球平均辐射强度I_0的辐射入射**

$I^{\uparrow}(\tau^*)=Ae^{\Gamma\tau^*}+r_{\infty}De^{-\Gamma\tau^*}=0$ $I^{\downarrow}(0)=r_{\infty}A+D=I_0$

最终解 $\boxed{I^{\uparrow}(\tau)=\frac{r_{\infty}I_0}{e^{\Gamma\tau^*}-r_{\infty}^2e^{-\Gamma\tau^*}}\left[e^{\Gamma(\tau^*-\tau)}-e^{-\Gamma(\tau^*-\tau)}\right]}$ $\boxed{I^{\downarrow}(\tau)=\frac{I_0}{e^{\Gamma\tau^*}-r_{\infty}^2e^{-\Gamma\tau^*}}\left[e^{\Gamma(\tau^*-\tau)}-r_{\infty}^2e^{-\Gamma(\tau^*-\tau)}\right]}$

合理性 地表不反射并不合理，但后续可以通过其他技术手段补充；大气顶也只有太阳的一个方向的辐射，不应该假设为平均辐射强度入射。这是这个版本的二流近似的硬伤，该公式也不在气候中使用。但是在**求解比较厚的云层时**，该假设也具有一定的合理性。