

第十一章 基于多次散射的辐射传输方程

11.1 基于多次散射的辐射传输

11.1.1 基于多次散射的辐射传输方程

方程形式 $\mu \frac{dI(\mu, \phi)}{d\tau} = I(\mu, \phi) - \frac{\bar{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \phi; \mu', \phi') I(\mu', \phi') d\mu' d\phi'$

方程内涵 如果需要特定方向 τ 的 $I(\mu, \phi)$ ，就必须确定所有 μ' 和 ϕ' 方向和 τ 的 $I(\mu', \phi')$ 。

所以辐射传输方程不能准确进行解析求解，除非做非常苛刻的假设。

数值方法 辐射学者为获得合理精度的真实问题的解开发了各种数值计算方法：

① **离散纵标方法（二流近似）** 思想：只在两个方向上有辐射流动，可以转化积分为求和。

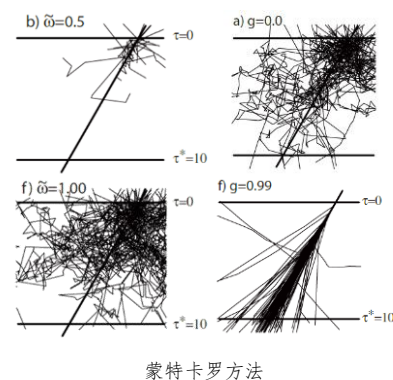
② **逐阶散射方法**（单次散射近似基础上改造）

③ **累加方法（倍加方法）** 知道两个单一薄层的特性，合并后即可得到多次散射。

④ **球谐函数方法** 数学十分复杂

⑤ **蒙特卡罗方法** 我们追踪每一个光子的路径，可能被吸收、反射、投射。

我们假设好**单次散射反照率**、**非对称因子**、**光学厚度**后就可以大量模拟。



蒙特卡罗方法

11.1.2 方位平均辐射传输方程

辐射强度 对辐射传输方程两边对方位角做积分平均，得到**方位平均辐射强度**： $I(\mu) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\mu, \phi) d\phi$

散射相函数 **方位平均散射相函数**： $p(\mu, \mu') \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\mu, \mu', \Delta\phi) d(\Delta\phi)$

传输方程 **方位平均辐射传输方程**： $\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\bar{\omega}}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\mu') d\mu'$

主要用于气候研究，便于求解辐射通量密度： $F' = \int_0^1 \int_0^{2\pi} I(\mu, \phi) d\mu d\phi = \int_0^1 2\pi I(\mu) \mu d\mu$

11.2 二流近似解的推导

11.2.1 二流近似与二流方程

11.2.1.1 二流近似

近似情况 假设**辐射强度在各自半球内近似常数** $I(\mu) = \begin{cases} I^\uparrow & \mu > 0 \\ I^\downarrow & \mu < 0 \end{cases}$ 其中 I^\uparrow 和 I^\downarrow 都为常数。

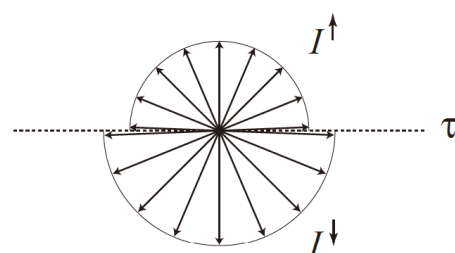
合理性 高空观测时，向上各方向（除太阳方向），向下各方向辐射基本差不多，假设可以接受。

11.2.1.2 二流方程

方程改写 首先考虑向上的辐射流，并将 $I(\mu)$ 替换成常量 I^\uparrow 和 I^\downarrow ：0~1为上半球，-1~0为下半球。

$$\mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \frac{\bar{\omega}}{2} \int_0^1 p(\mu, \mu') I^\uparrow d\mu' - \frac{\bar{\omega}}{2} \int_{-1}^0 p(\mu, \mu') I^\downarrow d\mu' \Rightarrow \text{由于为常量，可以把 } I^\uparrow \text{ 和 } I^\downarrow \text{ 提取出来}$$

$$\mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \frac{\bar{\omega}}{2} \left[\int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu' \right]_{\text{前向散射比重}} I^\uparrow - \frac{\bar{\omega}}{2} \left[\int_{-1}^0 p(\mu, \mu') d\mu' \right]_{\text{后向散射比重}} I^\downarrow$$



在二流近似中假设的辐射强度角度分布

定义**后向散射比重** b 来表示被散射至相反半球内 μ 方向上的辐射比重：

$$b(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^0 p(\mu, \mu') d\mu' = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu', & \mu > 0 \\ \frac{1}{2} \int_0^1 p(\mu, \mu') d\mu' = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 p(\mu, \mu') d\mu', & \mu < 0 \end{cases} \quad \text{前向散射} = 1 - \text{后向散射}$$

描述向上辐射流的辐射传输方程可进一步改写为： $\mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \tilde{\omega}[1 - b(\mu)]I^\uparrow - \tilde{\omega}b(\mu)I^\downarrow$

在整个半球上对天顶角做积分做平均来消除 μ ： $\int_0^1 \left[\mu \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \tilde{\omega}[1 - b(\mu)]I^\uparrow - \tilde{\omega}b(\mu)I^\downarrow \right] d\mu$

传输方程 基于**向上辐射流**的辐射传输方程：

$$\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = I^\uparrow - \tilde{\omega}(1 - \bar{b})I^\uparrow - \tilde{\omega}\bar{b}I^\downarrow \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega})I^\uparrow + \tilde{\omega}\bar{b}(I^\uparrow - I^\downarrow)} \quad \text{其中 } \bar{b} \equiv \int_0^1 b(\mu) d\mu$$

基于**向下辐射流**的辐射传输方程：

$$-\frac{1}{2} \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = I^\downarrow - \tilde{\omega}(1 - \bar{b})I^\downarrow - \tilde{\omega}\bar{b}I^\uparrow \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega})I^\downarrow - \tilde{\omega}\bar{b}(I^\uparrow - I^\downarrow)}$$

二流解释 方程中1/2的位置原来是 μ ，可以发现 $\cos \theta = 1/2 \Rightarrow \theta = 60^\circ$ ，则光只在两个方向上有流动：向上 $\theta = 60^\circ$ 和向下的 $\theta = 120^\circ$ 。

11.2.2 后向散射比重和 g

观察现象 已知的 g 与 \bar{b} 之间的映射关系： $g = -1 \rightarrow \bar{b} = 1$ $g = 0 \rightarrow \bar{b} = \frac{1}{2}$ $g = 1 \rightarrow \bar{b} = 0$

假设情况 假设 g 与 \bar{b} 之间**满足线性关系**： $\bar{b} = \frac{1-g}{2}$

传输方程 将 g 代入原式的 \bar{b} ，方程变为： $\frac{1}{2} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega})I^\uparrow + \frac{\tilde{\omega}(1-g)}{2}(I^\uparrow - I^\downarrow)$ $-\frac{1}{2} \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega})I^\downarrow - \frac{\tilde{\omega}(1-g)}{2}(I^\uparrow - I^\downarrow)$

$$\text{则 } \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau}(I^\uparrow - I^\downarrow) = (1 - \tilde{\omega})(I^\uparrow + I^\downarrow) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau}(I^\uparrow + I^\downarrow) = (1 - \tilde{\omega}g)(I^\uparrow - I^\downarrow)$$

11.2.3 二流解

二流解 将基于向上和向下辐射流的辐射传输方程进行相加和相减后，然后对二者进行求导，再将二者右侧导数项用二流方程表达式进行替换：

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(I^\uparrow + I^\downarrow) = 4(1 - \tilde{\omega}g)(1 - \tilde{\omega})(I^\uparrow + I^\downarrow) \quad \frac{d^2}{d\tau^2}(I^\uparrow - I^\downarrow) = 4(1 - \tilde{\omega}g)(1 - \tilde{\omega})(I^\uparrow - I^\downarrow)$$

根据二阶常微分方程解可知 $\left(\frac{d^2 y}{dx^2} = \Gamma^2 y \Rightarrow e^{\Gamma x} \text{ 或 } e^{-\Gamma x}\right)$ ，**二流通解**可以表示为其线性组合：

$$I^\uparrow(\tau) = Ae^{\Gamma\tau} + r_\infty De^{-\Gamma\tau} \quad I^\downarrow(\tau) = r_\infty Ae^{\Gamma\tau} + De^{-\Gamma\tau}$$

其中： $\Gamma \equiv 2\sqrt{1 - \tilde{\omega}}\sqrt{1 - \tilde{\omega}g}$ $r_\infty \equiv \frac{\sqrt{1 - \tilde{\omega}g} - \sqrt{1 - \tilde{\omega}}}{\sqrt{1 - \tilde{\omega}g} + \sqrt{1 - \tilde{\omega}}}$ 具有一定物理含义

边界条件 为确定通解系数，假设下边界为黑体(不反射)，大气顶有已知半球平均辐射强度 I_0 的辐射入射

$$I^\uparrow(\tau^*) = Ae^{\Gamma\tau^*} + r_\infty De^{-\Gamma\tau^*} = 0 \quad I^\downarrow(0) = r_\infty A + D = I_0$$

$$\text{最终解} \quad \boxed{I^\uparrow(\tau) = \frac{r_\infty I_0}{e^{\Gamma\tau^*} - r_\infty^2 e^{-\Gamma\tau^*}} [e^{\Gamma(\tau^* - \tau)} - e^{-\Gamma(\tau^* - \tau)}]} \quad \boxed{I^\downarrow(\tau) = \frac{I_0}{e^{\Gamma\tau^*} - r_\infty^2 e^{-\Gamma\tau^*}} [e^{\Gamma(\tau^* - \tau)} - r_\infty^2 e^{-\Gamma(\tau^* - \tau)}]}$$

合理性 地表不反射并不合理，但后续可以通过其他技术手段补充；大气顶也只有太阳的一个方向的辐射，不应该假设为平均辐射强度入射。这是这个版本的二流近似的硬伤，该公式也不在气候中使用。但是在求解比较厚的云层时，该假设也具有一定的合理性。

11.3 二流近似解的实例

11.3.1 半无限大云

半无限大云 在大气层顶：光学厚度 $\tau = 0$ ，在地面 $\tau = \tau^* \rightarrow \infty$ ，上面固定，下面相当于深不见底的情况。事实情况不要求地面光学厚度趋于无限大， $\tau \rightarrow 100$ 即可近似。因此，**透过率 $t = 0$ ， $r + a = 1$**

辐射传输解 半无限大云的二流辐射传输解： $I^\uparrow(\tau) = I_0 r_\infty e^{-\Gamma\tau}$ $I^\downarrow(\tau) = I_0 e^{-\Gamma\tau}$ (代入 $\tau^* \rightarrow \infty$ 即可)

反照率 半无限大云顶的**反照率** (因为各向同性，辐射强度乘以 π 则得到辐射通量密度的比值)

$$\text{反照率} = \frac{\pi I^\uparrow(0)_{\text{大气层顶向上}}}{\pi I^\downarrow(0)_{\text{大气层顶向下}}} = \frac{I_0 r_\infty e^{-\Gamma\tau}}{I_0 e^{-\Gamma\tau}} = \boxed{r_\infty = \frac{\sqrt{1-\tilde{\omega}g} - \sqrt{1-\tilde{\omega}}}{\sqrt{1-\tilde{\omega}g} + \sqrt{1-\tilde{\omega}}}}$$
 只和单次散射反照率和非对称因子有关

性质 ① 非对称因子越大，反照率越小 ② 单次散射反照率只要稍微变小一点，总体吸收效果被放大。

例题 1. 假设 $r_\infty = \tilde{\omega}^{\bar{n}}$ ，其中 \bar{n} 是从半无限大云层顶部入射的光子在从云顶离开之前在云体内部经历的有效散射平均数目。

(a) 对于 $\tilde{\omega} = 0.9999$ 和 $g = 0.85$ 的情况，计算 r_∞ 和 \bar{n} 。

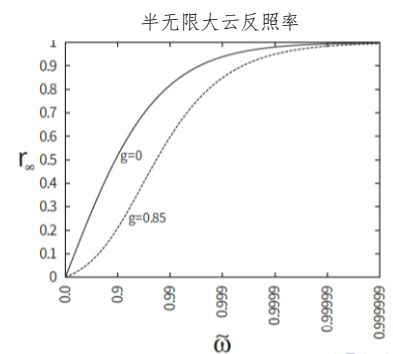
(b) 重复前面的计算，除了 $\tilde{\omega} = 0.9$ 所有其他条件与(a)相同。

(c) 解释上述两种情况的 \bar{n} 为什么明显不同。

① $r_\infty(0.9999, 0.85) = 0.950$, $\bar{n} = \ln 0.950 / \ln 0.9999 = 513$ 放大效应强

② $r_\infty(0.9, 0.85) = 0.210$, $\bar{n} = \ln 0.210 / \ln 0.9 = 15$ 相对放大效应弱

③ 对于第二种情况，只有那些进入云体且很快通过后向散射逃离出云体的光子才能有很大的机会不被吸收而存活下来。



11.3.2 无吸收云

无吸收云 守恒散射 $\tilde{\omega} = 1 \Rightarrow \Gamma = 0$ ，无吸收云的二流辐射传输解出现 $0/0$ 不定解。**吸收率 $a = 0$ ， $r + t = 1$**

求解方程 为了得到这种情况下的二流近似解，可以将 $\tilde{\omega} = 1$ 代入如下最初的二流辐射传输方程：

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (I^\uparrow - I^\downarrow) = (1 - \tilde{\omega})(I^\uparrow + I^\downarrow) = 0 \quad \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (I^\uparrow + I^\downarrow) = (1 - \tilde{\omega}g)(I^\uparrow - I^\downarrow)$$

由此可得：① $\frac{d}{d\tau} (I^\uparrow - I^\downarrow) = 0$ ② $\pi(I^\uparrow - I^\downarrow) = F_{\text{净辐射}}^{\text{net}} = \text{常数}$ 云层不会加热或冷却，即不吸收

$$\text{③ } \frac{d}{d\tau} (I^\uparrow + I^\downarrow) = 2(1 - g)(I^\uparrow - I^\downarrow) \quad \text{积分可得 } \pi(I^\uparrow + I^\downarrow) = 2F_{\text{net}}^{\text{net}}\tau(1 - g) + \pi K$$

将边界条件 $I^\uparrow(\tau^*) = 0$ 和 $I^\downarrow(0) = I_0$ 代入即可得到二流近似解。

辐射传输解 无吸收云的二流辐射传输解： $\hat{I}^\uparrow(\tau) = \frac{I_0(1-g)(\tau^* - \tau)}{1 + (1-g)\tau^*}$ $I^\downarrow(\tau) = \frac{I_0[1 + (1-g)(\tau^* - \tau)]}{1 + (1-g)\tau^*}$

透过率 无吸收云顶的反照率 $r = \frac{\pi I^\uparrow(0)}{\pi I^\downarrow(0)} = \frac{(1-g)\tau^*}{1 + (1-g)\tau^*}$, $\tilde{\omega} = 1$ 云底的透过率： $t = \frac{\pi I^\downarrow(\tau^*)}{\pi I^\downarrow(0)} = \frac{1}{1 + (1-g)\tau^*}$, $\tilde{\omega} = 1$

性质 对于透过率，非对称因子越大，透过率越大；光学厚度越大，透过率越小

例题 1. 某典型的厚层积云在可见光谱带具有光学厚度 $\tau^* = 50$ ， $\tilde{\omega} = 1$ 和 $g = 0.85$ 。

(a) 计算云层反照率和总的透过率。(b) 如果云层是完全吸收而非散射的介质，那么多大的光学厚度可以产生与(a)相同的透过率？假设 $\bar{\mu} = 0.5$ 。

① $r(0.85, 50) = 0.88$, $t(0.85, 50) = 0.12$ 对于 $\tau^* = 50$ ，透过率偏大了，因为多次散射的缘故

② 对于完全吸收而不散射的介质，透过率由比尔定律确定 $t = e^{-\tau/\bar{\mu}}$ ，因此所需的光学厚度 $\tau = -\bar{\mu} \ln(t) = -0.5 \ln(0.12) = 1.1$ 。这部分增强的光称为漫射光。

11.3.3 一般情况

反照率 $r = \frac{r_\infty[e^{\Gamma\tau^*} - e^{-\Gamma\tau^*}]}{e^{\Gamma\tau^*} - r_\infty^2 e^{-\Gamma\tau^*}}$, $\tilde{\omega} < 1$ **总透过率** $t = \frac{1 - r_\infty^2}{e^{\Gamma\tau^*} - r_\infty^2 e^{-\Gamma\tau^*}}$, $\tilde{\omega} < 1$ **吸收率** $a = 1 - r - t$

性质 ① 非对称因子 $\tilde{\omega}$ 越大，透过越多；光学厚度 τ 越大，透射越小，反射越大，吸收越多。符合物理直觉

② 单次散射反照率越小，吸收越强，散射越小，反射率越小，透过率也越小。

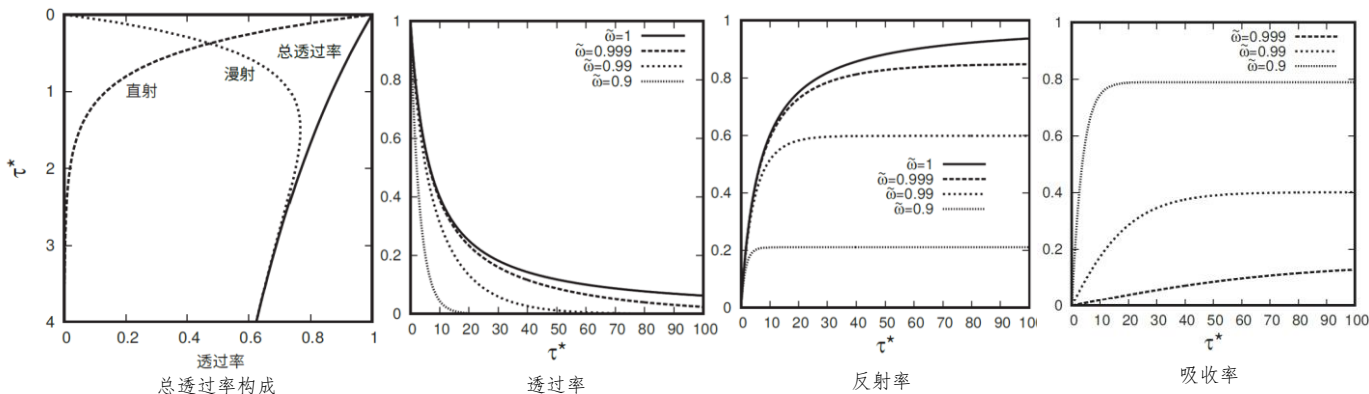
11.3.4 直射和漫射透过率

$$\text{直射透过率 } t_{\text{dir}} = e^{-\tau^*/\bar{\mu}} \quad \text{漫射透过率 } t_{\text{diff}} = \begin{cases} 0 & \tilde{\omega} = 0, \\ \frac{1-r_\infty^2}{e^{\Gamma\tau^*} - r_\infty^2 e^{-\Gamma\tau^*}} - e^{-\tau^*/\bar{\mu}} & 0 < \tilde{\omega} < 1, \\ \frac{1}{1+(1-g)\tau^*} - e^{-\tau^*/\bar{\mu}} & \tilde{\omega} = 1. \end{cases}$$

总透过率 总透过率 t 等于直射透过率 t_{dir} 和漫射透过率 t_{diff} 之和

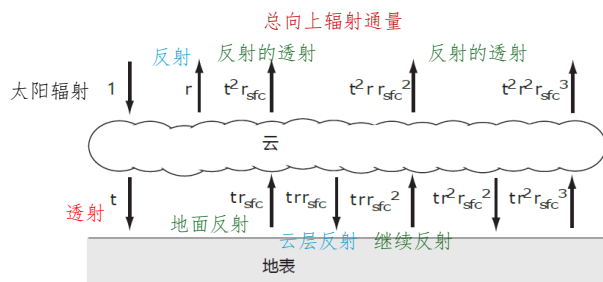
- 性质**
- ① 直射透过率随着光学厚度增大迅速衰减为 0
 - ② 漫射(多次散射)随着光学厚度增大先增大, 后缓慢减小, 到后期几乎其提供全部总透过率。

案例 暖锋前逐渐变厚的云层。如果没有漫射光, 则世界一片漆黑。



11.4 累加方法

基本思想 知道各个单一层的情况, 累加即可得到总的情况。
如果每层相同, 则称为**倍加法**。



11.4.1 非黑体地表之上的云

辐射通量 总的向上辐射通量等于云层反射成分与逐阶被地表反射 sfc 的透射贡献之和:

$$F^\uparrow(0) = F_0(r + r_{sfc}t^2 + r_{sfc}^2rt^2 + r_{sfc}^3r^2t^2 + r_{sfc}^4r^3t^2 + \dots) \quad \text{多了一次地表反射和云层反射}$$

联合反照率 非黑体地表与云层的**联合反照率**表达式可以表示为

$$\tilde{r} \equiv \frac{F^\uparrow(0)}{F_0} = r + r_{sfc}t^2[1 + r_{sfc}r + (r_{sfc}r)^2 + (r_{sfc}r)^3 + \dots] \quad \tilde{r} \equiv \frac{F^\uparrow(0)}{F_0} = r + \frac{r_{sfc}t^2}{1-r_{sfc}r}$$

联合透过率 $\tilde{t} \equiv \frac{F^\downarrow(\tau^*)}{F_0} = \frac{t}{1-r_{sfc}r}$ 这里 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$

注意 $\tilde{r} + \tilde{t} + \tilde{\alpha} \neq 1$ 因为 t 重复了很多回(能量重复使用), 三者之和为一仅适用于最开始的情况。

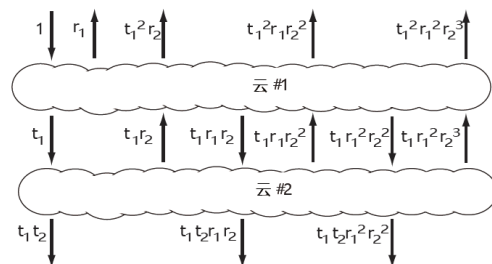
- 性质**
- ① 如果地表不存在 $r_{sfc} = 0$, 则联合反照率就等于原有云层的反照率, 具有相容性。
 - ② 假设没有云层, 则 $r = 0$, $\tilde{r} = r_{sfc}$, 同样相容合理。
 - ③ 相较于只有云层的情况, 如果加上了地表反射, 则联合反照率必然增加, 联合透过率也在增加。

11.4.2 多个云层

总反射率 两个云层联合的**总反射率**: $\tilde{r} = r_1 + \frac{r_2t_1^2}{1-r_2r_1}$

总透过率 两个云层联合的**总透过率**: $\tilde{t} = \frac{t_1t_2}{1-r_2r_1}$

指透过第二个云层的透过率, 而 11.4.1 不考虑透过地表的情况。



例题

三个非吸收云层具有透过率 $t_1 = 0.2$ 、 $t_2 = 0.3$ 和 $t_3 = 0.4$ 。

(a) 计算它们的联合反射率和透过率。

(b) 将计算得到的透过率与比尔定律预测多个非散射层合并的透过率比较, 解释两者存在差别的原因。

(c) 在什么条件下多个云层的总透过率与比尔定律结果吻合? 为什么

① 已知 $t_1 = 0.2$ 、 $t_2 = 0.3$ 、 $t_3 = 0.4$ 、 $r_1 = 0.8$ 、 $r_2 = 0.7$ 、 $r_3 = 0.6$ 。 因为不吸收

云层 1 和 2 的联合反照率和透过率 $r_{12} = r_1 + \frac{t_1^2 r_2}{1 - r_1 r_2} = 0.864$ $t_{12} = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} = 0.136$

递归可得云层 12 和 3 的联合反照率和透过率 $r_{123} = r_{12} + \frac{t_{12}^2 r_3}{1 - r_{12} r_3} = 0.887$ $t_{123} = \frac{t_{12} t_3}{1 - r_{12} r_3} = 0.113$

最终的反射率比任何一个单独云层的反照率大, 因为云层厚度增大, 反射必然增大;

最终的透过率则小于任何一个单独云层, 但和比尔定律相比大很多。

② $t_{\text{比尔}} = t_1 t_2 t_3 = 0.024$, 因此计算得到的透过率与比尔透过率的比值 $t_{123}/t_{\text{比尔}} = 4.7$ 。

有在云层之间来回反射的漫射光, 促进往下的透射率增大。因此漫射光相当重要。

③ 当云层反照率为零时, 公式 $\tilde{t} = \frac{t_1 t_2}{1 - r_2 r_1}$ 与比尔定律一致。因为云层之间没有反射, 所以辐射没有第二次机会能够穿过第二个云层。