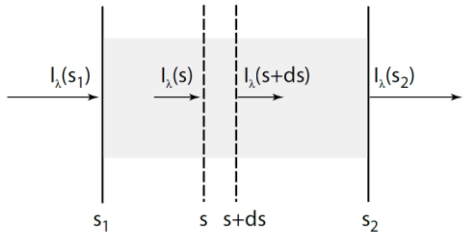
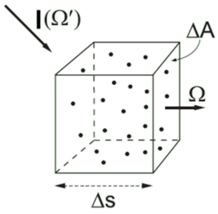
# 第九章 基于散射的辐射传输方程

## 9.1 辐射传输方程




散射增强项

### 9.1.1 基于散射的辐射传输方程

#### 9.1.1.1 完整微分形式的辐射传输方程

**模型构建** 对于**包含散射**的情况，经过微元路径$ds$的**辐射净改变**

① 由吸收和散射共同引起的**直射辐射衰减** $dI_{\text{ext}} = -(\beta_a + \beta_s)Ids = -\boldsymbol{\beta}_{\text{e体积消光系数}}\boldsymbol{Ids}$

② 在局地热平衡条件下，由**发射**引起的**辐射增强** $dI_{\text{emit}} = \beta_a Bds$ 太阳短波可不考虑发射

③ 由**多次散射**引起的**辐射增强**：一个微小立体角$d\omega'$中的**辐射能量**：$I(\Omega')d\omega'$，其经过散射之后**总的散射辐射**为 $\beta_s ds_{\text{总散射截面}} \cdot I(\Omega')d\omega'$，该辐射方向为四面八方，再**乘上往Ω方向的概率密度**可得：

$$dI_{\text{scat}} = \frac{\beta_s}{4\pi}\int_{4\pi} p(\hat{\Omega}',\hat{\Omega})I(\hat{\Omega}')d\omega'\ ds$$

其中**散射相函数$\boldsymbol{p(\hat{\Omega}',\hat{\Omega})}$**有归一化条件：$\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} p(\hat{\Omega}',\hat{\Omega})d\omega' = 1$ **散射概率密度函数**为：$\frac{p(\hat{\Omega}',\hat{\Omega})}{4\pi}$

**微分表达式** 经过微元路径$ds$ 的净辐射微分表达式 $\boldsymbol{dI = dI_{\text{ext}} + dI_{\text{emit}} + dI_{\text{scat}}}$

**完整方程** $dI = -\beta_e Ids + \beta_a Bds + \frac{\beta_s}{4\pi}\int_{4\pi} p(\hat{\Omega}',\hat{\Omega})I(\hat{\Omega}')d\omega' ds$

#### 9.1.1.2 完整通用形式的辐射传输方程

**光学厚度** 定义光学厚度：$\boldsymbol{d\tau = -\beta_e ds}$ 前面的负号表明$s$数值越大，光学厚度越小

**通用形式** 两边同时除上$d\tau$，得到总的辐射源是热发射和来自其他方向散射的加权之和，**单次散射反照率**控制着各自权重。如果$\tilde{\omega} = 0$，散射项消失；如果$\tilde{\omega} = 1$，则热发射成分消失。

$$\boldsymbol{\frac{dI(\hat{\Omega})}{d\tau} = I(\hat{\Omega}) - (1-\tilde{\omega})B - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_{4\pi} p(\hat{\Omega}',\hat{\Omega})I(\hat{\Omega}')d\omega'}$$

**有趣性质** 散射占比增大，则吸收占比减小，也就意味着发射减小，两者是此消彼长的关系。

#### 9.1.1.3 相应简写形式的辐射传输方程

**简化形式** $\boldsymbol{\frac{dI(\hat{\Omega})}{d\tau} = I(\hat{\Omega}) - J(\hat{\Omega})}$ 其中**源函数**为 $\boldsymbol{J(\hat{\Omega}) = (1-\tilde{\omega})B + \frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_{4\pi} p(\hat{\Omega}',\hat{\Omega})I(\hat{\Omega}')d\omega'}$

**性质** $dI = Id\tau - Jds = -\beta_e Ids + \beta_e Jds$ 发现消光截面越大，源贡献的辐射增强也越大。

### 9.1.2 平面平行大气辐射传输方程

**平行假设** 为什么大多数辐射传输解析和近似解都基于平面平行大气假设？

① 平面平行几何确实是**唯一**适合直接分析和/或数值求解的半真实情况（例如气候和天气预报模式）。

② 确实存在一些问题（例如无云晴空大气、大范围水平均匀的层状云盖）平面平行假设作为一种真实的近似**显得非常合理**。 ③ 甚至在一些不合理的情况中，科学家们对最优的三维非均质处理方式都存在明显迟疑，特别是当计算效率非常重要时。

**传输方程** $\boldsymbol{\mu\frac{dI(\tau,\mu,\phi)}{d\tau} = I(\tau,\mu,\phi) - J(\tau,\mu,\phi)}$

① 使用天顶角$\theta$+方位角$\phi$表示$\hat{\Omega}$，$\mu = \cos\theta$，$d\omega = \sin\theta\, d\theta d\phi = d\cos\theta\, d\phi$

则其中源函数为 $J(\tau,\mu,\phi) = (1-\tilde{\omega})B + \frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} p(\mu,\phi,\mu',\phi')I(\mu',\phi')d\mu'\ d\phi'$

② 使用$\tau$代替位置$\vec{r}$：因为平面平行大气与$x,y$分量无关，同时$z \to \tau(z)$逐个对应，$\tau = \int_z^{\infty} \beta_e(z)dz$。

③ 光学厚度的转化：上文定义的光学厚度为$d\tau(s) = -\beta_e ds$，此处为$d\tau(z) = -\beta_e dz$，又有$ds = \frac{dz}{\cos\theta}$

则有$d\tau(s) = \frac{d\tau(z)}{\cos\theta} = \frac{d\tau(z)}{\mu}$，将其全部代回原式，则左边变为$\mu\frac{dI}{d\tau}$。

**输入条件**　光学厚度(散射系数、吸收系数、$\tilde{\omega}$)、相函数$(\mu,\phi)$、发射$B$(温度、波长)、太阳辐射强度、观测位置

# 9.2 散射相函数

## 9.2.1 散射相函数

### 9.2.1.1 基本概念与方程

**概率密度**　散射相函数可以理解为**概率密度**：设光子**从方向$\hat{\Omega}'$出发**并发生散射，那么光子方向**位于中心方向$\hat{\Omega}$**的立体角微元$d\omega$ 内的**概率为 $\frac{1}{4\pi}p(\hat{\Omega}',\hat{\Omega})d\omega$**。 散射相函数对$\hat{\Omega}',\hat{\Omega}$的依赖关系可以**非常复杂**（四维函数：总格点至少$(180\times360)^2$），这与负责散射的**粒子尺度和形状**有关。

**球形情况**　如果悬浮在大气中的粒子是**球形**或者**随机取向**，那么散射相函数只与**初始方向$\hat{\Omega}$**和**散射方向$\hat{\Omega}'$**的**夹角(散射角)$\Theta$有关**（一维函数）。因此完整描述$p$的方向独立变量$\hat{\Omega}',\hat{\Omega}$减至**唯一的 $\cos\Theta = \hat{\Omega}'\cdot\hat{\Omega}$**

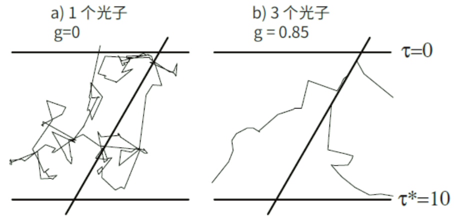
**归一化条件**　引入坐标系，其$z$轴指向入射方向，有 $d\omega' = \sin\Theta\, d\Theta d\phi$

散射相函数的归一化条件简化为 $\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} p(\cos\Theta)\sin\Theta\, d\Theta d\phi = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(\cos\Theta)d\cos\Theta = 1}$

### 9.2.1.2 各向同性散射

**各向同性**　一个光子经过散射后在**所有方向$\hat{\Omega}$上出现的概率都相同**，即散射相函数等于常数的情况：$p(\cos\Theta) = 1$ （满足归一化条件）　因此，光子新的传输方向无法从散射之前的传输方向进行预测，换句话来说，光子“忘记”了它过去的一切。

## 9.2.2 非对称因子



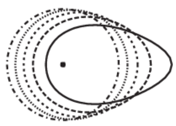
从大气顶发射

### 9.2.2.1 基本情况

**非对称因子**　**大量散射光子的$\cos\Theta$ 平均值**，即 $g \equiv \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} p(\cos\Theta)\cos\Theta\, d\omega$

$\frac{p(\cos\theta)}{4\pi}d\omega_{概率}\times\cos\theta_{该方向}$　由此可知，$-1 \le g \le 1$

**情况讨论**　① $\boldsymbol{g > 0}$：　光子倾向于散射至前半球，即**前向散射**占主导【除瑞利散射外大部分粒子】。
② $\boldsymbol{g < 0}$：　光子倾向于散射至后半球，即**后向散射**占主导。
③ $g = 1$：　光子散射至与其初始传输方向完全相同的方向（$\Theta = 0°$）。
④ $g = -1$：　光子散射至与其初始传输方向完全相反的方向（$\Theta = 180°$）。
⑤ $\boldsymbol{g = 0}$：　光子散射至前后半球的概率相等，如**各向同性散射【瑞利散射】**。



### 9.2.2.2 Henyey-Greenstein 相函数

**数学形式**　$p_{\mathrm{HG}}(\cos\Theta) = \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g\cos\Theta)^{3/2}}$

**物理图像**　其并非针对特定粒子的相函数，其是一个经验性的拟合相函数。右图为对数标度的概率图。