

# 第七章 基于发射的辐射传输方程

## 7.1 施瓦兹希尔德方程

### 7.1.1 施瓦兹希尔德方程

#### 7.1.1.1 施瓦兹方程基本形式

**方程概述** 施瓦兹方程同时考虑了辐射传输的**吸收和发射**。由于热红外波长远大于大气分子半径，散射不考虑同时，云接近于黑体，其散射同样可以忽略（然而，有文献表明，薄云的多次散射仍然较强）

**推导** 对于 $\omega = 0$ （不散射）的情况，沿任意路径的**无限微元的辐射净改变**：

① 在纯吸收介质中，经过微元路径 $ds$  **吸收引起的辐射衰减**  $dI_{abs} = -\beta_a ds$

② 在**局地热平衡条件下**，经过微元路径 $ds$  **发射引起的辐射增强**  $dI_{emit} = \beta_a B ds$

吸收率=发射率，且吸收率为  $dI_{abs}/I = \beta_a ds$ ，上式中 $B$ 为黑体发射辐射  $B_\lambda(T)$

**方程**  $\frac{dI}{ds} = \beta_a(B - I)$  施瓦兹希尔德方程 **（无散射介质辐射传输方程）**

**完整形式**：  $dI(s) = -I(s)\beta_a(s)ds + B_\lambda(T)\beta_a(s)ds$

#### 7.1.1.2 施瓦兹方程的求解

**基本定义** 定义任意点 $s$ 和探测器 $S$ 之间的**光学厚度** $\tau(s) = \int_s^S \beta_a(s')ds'$ ，因此**光学厚度微分**  $d\tau = -\beta_a ds$

**方程求解** 将上式代入施瓦兹希尔德方程可得  $\frac{dI}{d\tau} = I - B \Rightarrow \frac{dI}{d\tau} - I = -B$ ，将该式两边同时乘以积分因子 $e^{-\tau}$

$\frac{d}{d\tau}[Ie^{-\tau}] = -Be^{-\tau}$  在探测器**位置** $\tau = 0$ （下限）和**某些任意点** $\tau'$ （上限）的 $\tau$ 区间上对上式进行积分：

**方程形式** **大气红外辐射传输方程**：

$$I(0) = I(\tau')e^{-\tau'} + \int_0^{\tau'} Be^{-\tau} d\tau$$

几乎所有有关大气发射和吸收的常规辐射传输问题都可以通过该大气红外辐射传输方程来理解。

**物理含义**

① 左边 $I(0)$ 表示位于 $\tau = 0$  探测器观测到的辐射强度

② 右边第一项表示**路径远端** $\tau'$ 的任意辐射源的**直射辐射强度贡献**。

③ 右边第二项表示由来自视线方向，探测器与 $\tau'$ 之间**各位置** $\tau$ 的**热发射** $Bd\tau$ 的**直射辐射强度贡献**。

### 7.1.2 不同形式的红外大气辐射传输方程

**光学厚度** 基于**光学厚度** $\tau$ 的大气红外辐射传输方程  $I(0) = I(\tau')e^{-\tau'} + \int_0^{\tau'} Be^{-\tau} d\tau$

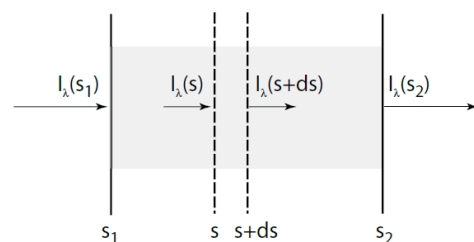
**透过率** 基于**透过率** $t$ 的大气红外辐射传输方程  $I(0) = I(\tau')t(\tau') + \int_{t(\tau')}^1 B(t)\tau dt$

**路径距离** 基于**路径距离** $s$ 的大气红外辐射传输方程  $I(S) = I(s_0)t(s_0) + \int_{s_0}^S B(s)W(s)ds$

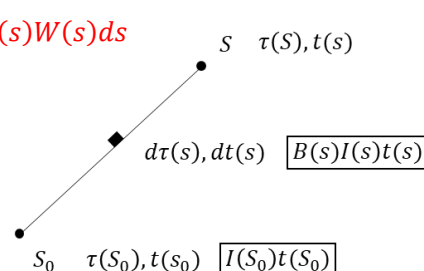
其中**发射权重函数**  $W(s) = \frac{dt(s)}{ds} = e^{-\tau} \frac{d\tau}{ds} = \beta_a(s)e^{-\tau} = \beta_a(s)t(s)$

表示该段路径 $ds$ 发射的辐射在 $S$ 接收到的辐射中占的**比重**

由此，探测器测得的 $I$ ，反求的温度则代表该权重大处的温度。



该介质中不考虑散射 $\beta_a = \beta_e$



### 7.1.3 狄拉克δ函数

**狄拉克函数**  $\delta(x)$  是一个除了  $x = 0$  外所有位置均为零的概率密度函数，而在  $x = 0$  处它是一个无限高和无限窄的

峰值 
$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

**特性**

① 曲线包洛的面积有限，且等于一 
$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x') dx' = \begin{cases} 1 & x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

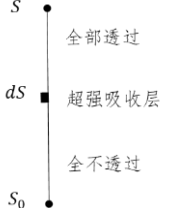
②  $\delta(x - x')$  与  $f(x')$  乘积的积分具有如下特性 
$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x') f(x') dx' = \begin{cases} f(x) & x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

### 7.1.4 发射权重函数

**模型假设**

考虑位于  $s'$  的介质，它的表面不透明且完全吸收，以至于外部点与任意  $s$  之间透过率

为一个跳跃函数：即透过率  $t(s) = \begin{cases} 1 & s > s' \\ 0 & s < s' \end{cases}$  在任意  $s \neq s'$  时， $\frac{dt(s)}{ds} \equiv W(s) = \begin{cases} 0 & s \neq s' \\ \infty & s = s' \end{cases}$  即  $W(s) = \delta(s - s')$



**方程**

大气红外辐射传输方程可以写成  $I(S) = I(s_0)t(s_0) + \int_{s_0}^S B(s)\delta(s - s')ds$ ,

设  $s_0$  为  $s'$  表面之下的任意一点，也就是说  $s_0 < s' < S$ ，透过率  $t(s_0) = 0$ ，所以可得  $I(S) = B(s')$   
求解温度廓线，可以选择稳定的二氧化碳吸收带（水汽时空异质性  $W(s)$  不可知）

## 7.2 平面平行大气辐射传输

### 7.2.1 基本内容

**向下发射**

设探测器位于地表 ( $z = 0$ )，观测大气向下发射的辐射： $I^\downarrow(0) = I^\downarrow(\infty)t^* + \int_0^\infty B(z)W^\downarrow(z)dz$

其中权重函数  $W^\downarrow(z) = -\frac{dt(0,z)}{dz} = \frac{\beta_a(z)}{\mu} t(0,z)$  远端：大气层顶  $\infty$ ，透过率  $t^* = t(0, \infty, \mu)$

**向下观测**

考虑探测器位于大气顶之上，观测地表向上发射的辐射： $I^\uparrow(\infty) = I^\uparrow(0)t^* + \int_0^\infty B(z)W^\uparrow(z)dz$

其中权重函数  $W^\uparrow(z) = \frac{dt(z,\infty)}{dz} = \frac{\beta_a(z)}{\mu} t(z,\infty)$

**物理意义**

两者都表明从大气底或顶出射的辐射强度等于两部分贡献之和：

- ① 由另外一端进入大气的透射辐射 ② 大气各层  $z$  发射辐射贡献的权重之和

### 7.2.2 大气发射率

**辐射强度**

对于同温大气层， $B[T(z)] = B(T_a) = \text{常数}$ ，总的辐射强度恰好等于

(a) 远端任意辐射源的透射辐射强度与 (b) 普朗克函数乘以整个大气的发射率  $1 - t^*$  之和

$$I^\downarrow(0) = I^\downarrow(\infty)t^* + B(T_a)[1 - t^*] \quad I^\uparrow(\infty) = I^\uparrow(0)t^* + B(T_a)[1 - t^*]$$

**真实大气**

对于真实大气，观测辐射强度的大气贡献依然可以进行类似地描述

$$I^\downarrow(0) = I^\downarrow(\infty)t^* + \bar{B}^\downarrow[1 - t^*] \quad I^\uparrow(\infty) = I^\uparrow(0)t^* + \bar{B}^\uparrow[1 - t^*]$$

其中  $\bar{B}^\downarrow = \frac{1}{1-t^*} \int_0^\infty B(z)W^\downarrow(z)dz$   $\bar{B}^\uparrow = \frac{1}{1-t^*} \int_0^\infty B(z)W^\uparrow(z)dz$

表示整层大气的加权平均普朗克函数值。

## 7.2.3 地表对向上辐射强度的贡献

**镜面下垫面** 假设**镜面下垫面**的发射率 $\varepsilon$ , 反射率 $r = 1 - \varepsilon$ , 则发射辐射  $I^\uparrow(0) = \varepsilon B(T_s)_{\text{发射}} + (1 - \varepsilon)I^\downarrow(0)_{\text{反射}}$

假设在感兴趣方向上大气顶没有向下的外部辐射源(3k 背景辐射)  $I^\downarrow(0) = \int_0^\infty B(z)W^\downarrow(z)dz$

卫星向下观测的辐射强度表达式  $I^\uparrow(\infty) = [\varepsilon B(T_s) + (1 - \varepsilon) \int_0^\infty B(z)W^\downarrow(z)dz]t^* + \int_0^\infty B(z)W^\uparrow(z)dz$

假设大气温度等于常数(平均), **发射辐射亮度等于 $\bar{B}$** , 那么上式可以写为

$$I^\uparrow(\infty) = [\varepsilon B(T_s) + (1 - \varepsilon)\bar{B}^\downarrow[1 - t^*]]t^* + \bar{B}^\uparrow[1 - t^*]$$

**完全透明** 大气完全透明的情况( $t^* = 1$ ): 地表发射辐射  $I^\uparrow(\infty) = \varepsilon B(T_s)$

**完全不透明** 大气完全不透明的情况(特定波长吸收带)( $t^* = 0$ ): 大气发射辐射  $I^\uparrow(\infty) = \bar{B}^\uparrow = \int_0^\infty B(z)W^\uparrow(z)dz$

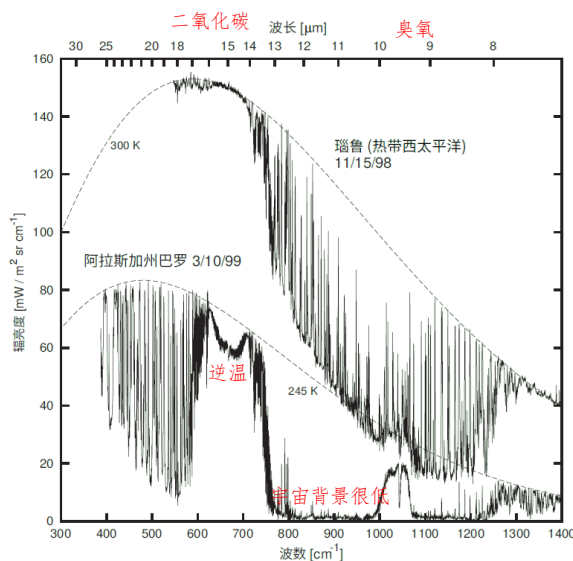
**地表无反射** 地表没有反射的情况( $\varepsilon = 1$ ): 地表和大气发射辐射的权重之和  $I^\uparrow(\infty) = B(T_s)t^* + \bar{B}^\uparrow[1 - t^*]$

当**大气变得越来越浑浊**,  $\bar{B}^\uparrow$ 代表更靠近探测器的大气层的发射辐射所贡献。

## 7.3 大气发射光谱

**案例分析** 基于图 8.2 描绘的观测光谱, 回答下述问题:

- 地面冰盖的近似温度是多少? (b) 近地面空气的近似温度是多少?
- 在飞机飞行高度 20 km 上空气的近似温度是多少?
- 识别出在这两个光谱中 9 至 10  $\mu\text{m}$  之间能看到的特征。
- 在图 8.1 中, 我们看到了近地表大气温度廓线存在强逆温现象的证据。相似的证据能在图 9.2 看到吗? 请解释。
- (a) 268 K, 10-13  $\mu\text{m}$  向下观测可以得到地表贴近的普朗克函数曲线代表的温度。
- (b) 267 K, 15  $\mu\text{m}$  向上观测
- (c) 225 K, 15  $\mu\text{m}$  向下观测 靠近的位置
- (d) 中心位于 9.6  $\mu\text{m}$  的臭氧吸收
- (e) 看不到。向上观测, 观察到低于地面普朗克曲线的情况 (15 $\mu\text{m}$ )



由地面向上观测大气发射光谱的两个实例。同时叠加了近  
似对应地表温度的普朗克函数曲线(虚线)

