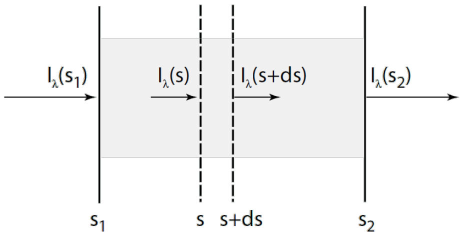
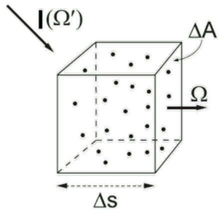
第九章 基于散射的辐射传输方程

9.1 辐射传输方程





散射增强项

9.1.1 基于散射的辐射传输方程

9.1.1.1 完整微分形式的辐射传输方程

模型构建 对于**包含散射**的情况，经过微元路径ds的**辐射净改变**

① 由吸收和散射共同引起的**直射辐射衰减** $dI_{\text{ext}} = -(\beta_a + \beta_s)Ids = \boldsymbol{-\beta_{e\text{体积消光系数}}Ids}$

② 在局地热平衡条件下，由**发射**引起的**辐射增强** $dI_{\text{emit}} = \beta_a B ds$ 太阳短波可不考虑发射

③ 由**多次散射**引起的**辐射增强**：一个微小立体角$d\omega'$中的**辐射能量**：$I(\Omega')d\omega'$，其经过散射之后**总的散射辐射**为 $\beta_s ds_{\text{总散射截面}} \cdot I(\Omega')d\omega'$，该辐射方向为四面八方，再**乘上往Ω方向的概率密度**可得：

$$dI_{\text{scat}} = \frac{\beta_s}{4\pi}\int_{4\pi} p(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}) I(\hat{\Omega}')d\omega'\, ds$$

其中**散射相函数$p(\hat{\Omega}', \hat{\Omega})$**有归一化条件：$\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} p(\hat{\Omega}', \hat{\Omega})d\omega' = 1$ **散射概率密度函数**为：$\frac{p(\hat{\Omega}', \hat{\Omega})}{4\pi}$

微分表达式 经过微元路径ds 的净辐射微分表达式 $\boldsymbol{dI = dI_{\text{ext}} + dI_{\text{emit}} + dI_{\text{scat}}}$

完整方程 $dI = -\beta_e Ids + \beta_a Bds + \frac{\beta_s}{4\pi}\int_{4\pi} p(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}) I(\hat{\Omega}')d\omega' ds$

9.1.1.2 完整通用形式的辐射传输方程

光学厚度 定义光学厚度：$\boldsymbol{d\tau = -\beta_e ds}$ 前面的负号表明s数值越大，光学厚度越小

通用形式 两边同时除上$d\tau$，得到总的辐射源是热发射和来自其他方向散射的加权之和，**单次散射反照率**控制着各自权重。如果$\tilde{\omega} = 0$，散射项消失；如果$\tilde{\omega} = 1$，则热发射成分消失。

$$\boldsymbol{\frac{dI(\hat{\Omega})}{d\tau} = I(\hat{\Omega}) - (1-\tilde{\omega})B - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_{4\pi} p(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}) I(\hat{\Omega}')d\omega'}$$

有趣性质 散射占比增大，则吸收占比减小，也就意味着发射减小，两者是此消彼长的关系。

9.1.1.3 相应简写形式的辐射传输方程

简化形式 $\boldsymbol{\frac{dI(\hat{\Omega})}{d\tau} = I(\hat{\Omega}) - J(\hat{\Omega})}$ 其中**源函数**为 $\boldsymbol{J(\hat{\Omega}) = (1-\tilde{\omega})B + \frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_{4\pi} p(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}) I(\hat{\Omega}')d\omega'}$

性质 $dI = Id\tau - Jds = -\beta_e Ids + \beta_e Jds$ 发现消光截面越大，源贡献的辐射增强也越大。

9.1.2 平面平行大气辐射传输方程

平行假设 为什么大多数辐射传输解析和近似解都基于平面平行大气假设？

① 平面平行几何确实是**唯一**适合直接分析和/或数值求解的半真实情况（例如气候和天气预报模式）。

② 确实存在一些问题（例如无云晴空大气、大范围水平均匀的层状云盖）平面平行假设作为一种真实的近似**显得非常合理**。 ③ 甚至在一些不合理的情况中，科学家们对最优的三维非均质处理方式都存在明显迟疑，特别是当计算效率非常重要时。

传输方程 $\boldsymbol{\mu\frac{dI(\tau,\mu,\phi)}{d\tau} = I(\tau,\mu,\phi) - J(\tau,\mu,\phi)}$

① 使用天顶角θ+方位角ϕ表示$\hat{\Omega}$，$\mu = \cos\theta$，$d\omega = \sin\theta\, d\theta d\phi = d\cos\theta\, d\phi$

则其中源函数为 $J(\tau,\mu,\phi) = (1-\tilde{\omega})B + \frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} p(\mu,\phi,\mu',\phi')I(\mu',\phi')d\mu'\, d\phi'$

② 使用τ代替位置$\vec{r}$：因为平面平行大气与x, y分量无关，同时$z \to \tau(z)$逐个对应，$\tau = \int_z^{\infty} \beta_e(z)dz$。

③ 光学厚度的转化：上文定义的光学厚度为$d\tau(s) = -\beta_e ds$，此处为$d\tau(z) = -\beta_e dz$，又有$ds = \frac{dz}{\cos\theta}$

则有$d\tau(s) = \frac{d\tau(z)}{\cos\theta} = \frac{d\tau(z)}{\mu}$，将其全部代回原式，则左边变为$\mu\frac{dI}{d\tau}$。

输入条件　光学厚度(散射系数、吸收系数、$\widetilde{\omega}$)、相函数(μ, ϕ)、发射B(温度、波长)、太阳辐射强度、观测位置

9.2 散射相函数

9.2.1 散射相函数

9.2.1.1 基本概念与方程

概率密度　散射相函数可以理解为**概率密度**：设光子**从方向$\widehat{\Omega}'$出发**并发生散射，那么光子方向**位于中心方向$\widehat{\Omega}$**的立体角微元$d\omega$ 内的**概率为 $\frac{1}{4\pi}p(\widehat{\Omega}', \widehat{\Omega})d\omega$**。 散射相函数对$\widehat{\Omega}', \widehat{\Omega}$的依赖关系可以**非常复杂**（四维函数：总格点至少$(180 \times 360)^2$），这与负责散射的**粒子尺度和形状**有关。

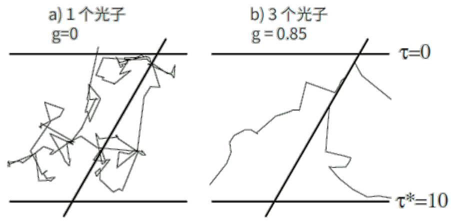
球形情况　如果悬浮在大气中的粒子是**球形**或者**随机取向**，那么散射相函数只与**初始方向$\widehat{\Omega}$**和**散射方向$\widehat{\Omega}'$**的**夹角(散射角)Θ有关**（一维函数）。因此完整描述p的方向独立变量$\widehat{\Omega}', \widehat{\Omega}$减至**唯一的 $\cos\Theta = \widehat{\Omega}' \cdot \widehat{\Omega}$**

归一化条件　引入坐标系，其z轴指向入射方向，有 $d\omega' = \sin\Theta\, d\Theta d\phi$

散射相函数的归一化条件简化为 $\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} p(\cos\Theta)\sin\Theta\, d\Theta d\phi = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(\cos\Theta) d\cos\Theta = 1}$

9.2.1.2 各向同性散射

各向同性　一个光子经过散射后在**所有方向$\widehat{\Omega}$**上**出现的概率都相同**，即散射相函数等于常数的情况：$p(\cos\Theta) = 1$ （满足归一化条件）　因此，光子新的传输方向无法从散射之前的传输方向进行预测，换句话来说，光子“忘记”了它过去的一切。



从大气顶发射

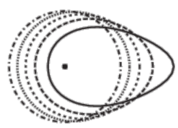
9.2.2 非对称因子

9.2.2.1 基本情况

非对称因子　**大量散射光子的$\cos\Theta$ 平均值**，即 $g \equiv \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} p(\cos\Theta)\cos\Theta\, d\omega$

$\frac{p(\cos\theta)}{4\pi}d\omega_{概率} \times \cos\theta_{该方向}$　由此可知，$-1 \le g \le 1$

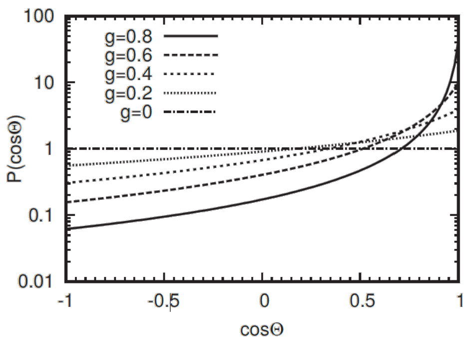
情况讨论
① $\boldsymbol{g > 0}$：　光子倾向于散射至前半球，即**前向散射**占主导【除瑞利散射外大部分粒子】。
② $\boldsymbol{g < 0}$：　光子倾向于散射至后半球，即**后向散射**占主导。
③ $g = 1$：　光子散射至与其初始传输方向完全相同的方向（$\Theta = 0°$）。
④ $g = -1$：　光子散射至与其初始传输方向完全相反的方向（$\Theta = 180°$）。
⑤ $\boldsymbol{g = 0}$：　光子散射至前后半球的概率相等，如**各向同性散射【瑞利散射】**。



9.2.2.2 Henyey-Greenstein 相函数

数学形式　$p_{\text{HG}}(\cos\Theta) = \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g\cos\Theta)^{3/2}}$

物理图像　其并非针对特定粒子的相函数，其是一个经验性的拟合相函数。右图为对数标度的概率图。



9.3 单次散射的求解

9.3.1 基于单次散射的辐射传输方程

9.3.1.1 单次散射辐射传输方程的基本形式

单次散射　只考虑大气对太阳辐射的单次散射，需要满足条件：

① **多次散射可以忽略**（$\tilde{\omega} \ll 1$ **和/或** $\tau^* \ll 1$）　② $\tilde{\omega}$和$p(\cos\Theta)$ 都是常数

③ 唯一外部照明是**平行光束辐射源**，例如太阳

基本方程　不考虑热发射，散射辐射传输方程表达式：

$$\mu\frac{dI(\tau,\mu,\phi)}{d\tau} = I(\tau,\mu,\phi)_{\text{衰减项}} - \frac{\tilde{\omega}(\tau)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} p(\mu,\phi;\mu',\phi')I(\mu',\phi')d\mu'd\phi'_{\text{多次散射增强项}}$$

模型假设　假设只有**太阳辐射源**的**直接透射辐射强度**对散射辐射强度 $I(\mu',\phi')$ 有贡献：

$I(\mu',\phi') = F_0\,\delta(\mu'-\mu_0)\delta(\phi'-\phi_0)e^{\tau/\mu_0}$　　其中有狄拉克δ函数

然而，单方向μ',ϕ'可以用太阳的方向μ_0,ϕ_0代替，所以可以把$p(\mu,\phi;\mu',\phi')$提出来，只剩下辐射强度对立体角积分：$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} I(\mu',\phi')d\mu'd\phi' = F_0\exp(-\tau/\cos\theta_0)$ 则无需直到辐射强度的分布。

方程简化　那么**基于单次散射**的辐射传输方程表示为 $\boldsymbol{\mu\frac{dI}{d\tau} = I - \frac{F_0\tilde{\omega}}{4\pi}p(\cos\Theta)e^{\tau/\mu_0}}$

上式可以进一步简写成以下形式 $\mu\frac{dI}{d\tau} = I - J$　　$J = \frac{F_0\tilde{\omega}}{4\pi}p(\cos\Theta)e^{\frac{\tau}{\mu_0}}$

9.3.1.2 向上与向下的散射辐射

向下观测　探测器位于大气顶，向下观测的上行散射辐射

$$I(0) = I(\tau^*)e^{-\tau^*/\mu}_{\text{远端贡献}} + \int_0^{\tau^*}\frac{F_0\tilde{\omega}}{4\pi}p(\cos\Theta)e^{\frac{\tau}{\mu_0}}\ e^{-\frac{\tau}{\mu}}\ d[\tau/\mu]_{\text{微分光学厚度}}$$

$$= I(\tau^*)e^{-\tau^*/\mu} + \frac{F_0\tilde{\omega}}{4\pi\mu\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)}p(\cos\Theta)\left[e^{\tau^*\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)} - 1\right]$$

如果假设$\tilde{\omega}$和$p(\cos\Theta)$ 都是常数，则可以积分出最终的表达式。

向上观测　探测器位于地表，向上观测的下行散射辐射

$$I(\tau^*) = I(0)e^{\tau^*/\mu} + \int_0^{\tau^*}\frac{F_0\tilde{\omega}}{4\pi}p(\cos\Theta)e^{\frac{\tau}{\mu_0}}\ e^{\frac{\tau^*-\tau}{\mu}}d[-\tau/\mu] = I(0)e^{\frac{\tau^*}{\mu}} - \frac{F_0\tilde{\omega}}{4\pi\mu\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)}p(\cos\Theta)\left[e^{\frac{\tau^*}{\mu_0}} - e^{\frac{\tau^*}{\mu}}\right]$$

9.3.1.3 大气顶部和底部的散射辐亮度

进步简化　$\left.\begin{array}{l}\text{对于 } \mu>0, I(0)\\ \text{对于 } \mu<0, I(\tau^*)\end{array}\right\} = \frac{F_0\tilde{\omega}\tau^*}{4\pi|\mu|}p(\cos\Theta)$　　该解只有在以下条件满足时成立：

① **仅考虑散射大气**辐射贡献，**忽略直射透射辐射项**

② 假设忽略多次散射的原因是 $\tau^* \ll 1$

③ 假设 μ_0 和 μ 不是特别小于一，不能过于倾斜，否则光学厚度增大，泰勒展开近似不成立。

推导　$\frac{F_0\tilde{\omega}}{4\pi\mu\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)}p(\cos\Theta)\left[e^{\tau^*\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)} - 1\right] \xRightarrow{\text{泰勒}} \frac{F_0\tilde{\omega}}{4\pi\mu\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)}p(\cos\Theta)\left[1+\tau^*\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)-1\right] = \frac{F_0\tilde{\omega}\tau^*}{4\pi\mu}p(\cos\Theta)$

泰勒展开：对于小的x，$e^x \approx 1 + x$

物理模型　$\boxed{\frac{F_{0\,\text{忽略消光的太阳辐射}}\ \tilde{\omega}_{\text{有多少散射的辐射}}\ \tau^*_{\text{有多少辐射被消光}}}{|\mu|_{\text{倾斜的入射辐射情况}}}\ \frac{p(\cos\Theta)}{4\pi}\ \text{往探测器方向的辐射}}$