第十一章 电流和恒磁场

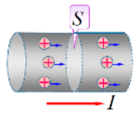
11.1 恒定电流条件和导电规律

11.1.1 电流强度和电流密度 electric current & density

截留子 金属导体中的带电粒子 **正截留子**流动方向为电流之方向

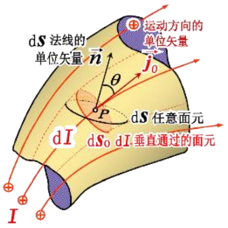
电流强度 $I = \frac{dQ}{dt}$ 单位时间通过导体截面的电量 其为**标量**,有正负之分 **单位**: $1A = 10^3 mA = 10^6 \mu A$

导体均匀情况 $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{nedV}{dt} = \frac{nev_d dtS}{dt} = nev_d S$ 其中v_d为**电子漂移速度**大小



n自由电子数密度 在时间间隔 dt 内，圆柱体内自由电子的通过量

电流密度 **定义式** $\vec{j} = \frac{dI}{dS_0}\vec{j_0}$ 即 P 点处的**电流密度矢量** **大小**: $j = \frac{dI}{dS_0} = \frac{dI}{dS\cos\theta}$ **方向**: $\vec{j_0}$方向



单位: $A \cdot m^{-2}$ **意义**: 描述**电流分布**的物理量

定义: 在导体中任意一点的**方向**与正载流子在该点流动方向相同

大小等于通过该点并垂直于电流的单位截面电流强度

电流强度与电流密度关系 $I = \iint_s dI = \iint_s j\cos\theta\, dS = \iint_s \vec{j} \cdot d\vec{S}$ 通过导体中任一曲面 S 的电流强度

电流场 由电流密度和电通量($\Phi_e = \iint_s \vec{E} \cdot d\vec{S}$)的关系式比较，可知$I$和$j$的关系也是通量和其矢量场的关系

则有电流的导体中，每一点都具有一定大小和方向的电流密度矢量，构成矢量场，称其为电流场

电流线 形象描述电流场中电流的分布，规定曲线切线方向为j的方向

电流管 由电流线围成的管状区域为电流管。恒定电流时，通过同一电流管任一横截面的电流相等。

11.1.2 电流的连续性方程和恒定电流条件

电流连续性方程 导体内任取一闭合曲面 S,根据**电荷守恒**,**单位时间**<u>**由 S 流出电量**</u>**必定等于同时** <u>**S 所包围电量减少**</u>

积分形式 $\oiint_s \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$ 以体电荷形式分布 $\oiint_s \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho d\tau$

微分形式 $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 在曲面 S 所包围的体积τ内积分$\iiint_\tau \nabla \cdot \vec{j} d\tau = -\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$

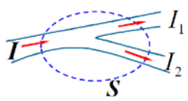
恒定电流 即电流场不随时间变化的电流，由分布不随时间变化的电荷所激发的电场叫恒定电场

积分形式: $\oiint_s \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ **微分形式**: $\nabla \cdot \vec{j} = 0$

恒定电流场中过任意闭合曲面的电流必定等于 0. 恒定电场的电流线必定是头尾相接的闭合曲线。

库仑电场 恒定电场是由**运动的而不随时间变化的电荷**所激发的，遵从高斯定理和环路定理，恒定电场与静电场具有相同的性质，通称为库仑电场

注意
1. 恒定电流的电路必须闭合
2. 由恒定电流条件可得结论 $-I + I_1 + I_2 = 0$
3. 导体表面的电流密度矢量无法向分量
4. 对一段无分支的稳恒电路，其各横截面的电流强度相等
5. 在电路的任一节点处，流入的电流强度之和等于流出节点的电流强度之和 **(节点电流定律 基尔霍夫第一定律)**



恒定电场
1. 在<u>恒定电流条件</u>下，**导体中的电荷分布不随时间变化**形成恒定电场
2. 恒定电场与静电场具有相似性质，恒定电场中可以引入电势概念
3. 恒定电场的存在伴随着能量的转换

比较 ① 静电场产生电场的电荷始终固定；恒定电场电荷分布不随时间改变但伴随电荷的定向移动
② 静电场静电平衡,导体内$E=0$,导体表面等势；恒定电场导体内$E\neq 0$,导体内任意两点不等势
③ 静电场电场有保守性，是保守场；恒定电场也是保守场
④ 维持静电场无需能量转换；维持稳恒电场需要能量转换

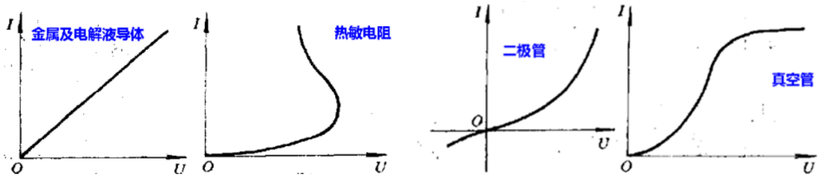
11.1.3 导体电阻 resistance of conductor

基本定义 两端电势差与电流之比 $\boldsymbol{R=\frac{U}{I}}$ **单位：欧姆Ω** $1\Omega=1V\cdot A^{-1}$

电导 电阻的倒数，用 G 表示 **单位：西门子 S** $1S=1\Omega^{-1}$

伏安特性曲线 电势差为横坐标，电流为纵坐标。**金属和电解液导体**的曲线是一条过原点的直线。
具备该性质的电阻为**线性电阻或欧姆电阻**，这种器件称为**线性器件**。

典型曲线



11.1.4 导体电阻率 resistivity of conductor

基本定义 电场强度 E 大小与同点电流密度 j 大小之比 $\boldsymbol{\rho=\frac{E}{j}}$ $\boldsymbol{R=\rho\frac{l}{S}}$

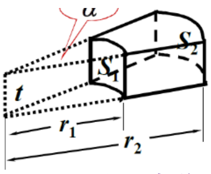
金属材料电阻率 具体电阻率取决于材料本身性质。有 $\rho=\rho_0(1+\alpha t)$，其中α为电阻温度系数
故有$R=R_0(1+\alpha t)$，可制成电阻温度计 （纯金属线膨胀系数很小，可忽略长度截面积变化）

单位 欧姆米$\mathbf{\Omega\cdot m}$

电导率 **电阻率的倒数，用$\boldsymbol{\sigma}$表示** $\boldsymbol{\sigma=1/\rho}$ **单位**：**西门子/米** $\mathrm{S\cdot m^{-1}}$

超导 某些材料电阻率在特定温度T_C以下减小到接近 0 的现象，处于超导状态的材料叫超导体
其中，T_C称超导转变温度，其随具体材料变化。

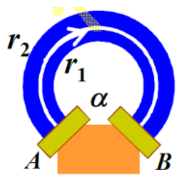
例题 1. 有扇形电极厚 t，电流从半径为r_1的端面S_1流向半径为r_2的端面S_2，扇形张角α，求S_1S_2之间的电阻



有$dR=\rho\frac{dl}{dS}=\rho\frac{dr}{\alpha rt}$ $R=\int_{r_1}^{r_2}\rho\frac{dr}{\alpha rt}$

则 $R=\frac{\rho}{\alpha t}\ln\frac{r_2}{r_1}$

2. 碳膜电位器：绝缘基片,厚为 t，内外半径为r_1,r_2的一层碳构成。A|B 为引出端，张角α，求 AB 间电阻



A、B 间电阻可视为由若干不同长度截面相同的电阻**并联**而成。**(电导率已知)**

电导为 $dG=\sigma\frac{dS}{l}=\sigma\frac{tdr}{\alpha\cdot r}$ 则 $G=\int_{r_1}^{r_2}\sigma\frac{tdr}{\alpha\cdot r}=\sigma\frac{t}{\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1}$

则 $R=\frac{1}{G}=\frac{\alpha}{\sigma t}\ln\frac{r_1}{t_2}$

11.1.5 欧姆定律 Ohm's law

定律内容 R 是与 U 和 I 无关的常量，即$\boldsymbol{I=U/R}$ 其反映了金属导体导电的基本特性
电阻是常量，电流和电势差成正比（适用于金属导体、电解液和熔融盐）

微分形式 取长为dl，截面积为dS的细电流管。设两端电势差为dU

则 $dI=\frac{dU}{R}$ $R=\frac{\rho dl}{dS}$ $dI=\frac{1}{\rho}\frac{dU}{dl}dS$ $\frac{dI}{dS}=\frac{1}{\rho}\frac{dU}{dl}=\frac{1}{\rho}E=\sigma E$

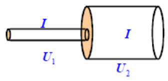
则 $\boldsymbol{\vec{j}=\frac{1}{\rho}\vec{E}=\sigma\vec{E}}$ **其反映了金属导体中任意一点上$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{E}$的关系，适用于恒定电流和变化电流**

注意 对于**一般金属或电解液**，欧姆定律在相当大电压范围内成立。但对于**许多导体和半导体**欧姆定律不成立

典型模型

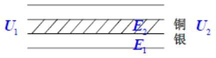
① 电流是电荷流动，在 j=0 的地方，电荷体密度不一定为零（在静电场中，j=0，ρ≠0）

② 两截面不同的铜棒接在一起，两端加有电压，探讨 j、E 的情况。



$j=\frac{I}{S}$ I相同，$S_1\neq S_2$ 所以$j_j>j_2$ 又$j=\sigma E$,所以$E_1\neq E_2$

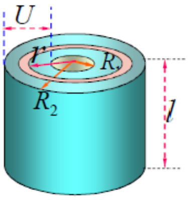
③ 铜棒外围裹有银圈，问铜棒中和银棒中的 j、E 情况。



由于$U_1-U_2=E\Delta l$ 所以$E_1=E_2$ 又$j=\sigma E,\sigma_1\neq\sigma_2$ 所以$j_1\neq j_2$

例题

1. 有金属圆筒（R_1,R_2），长度l 电阻率ρ，若已知筒内外电势差 U，且内缘电势高，求径向电流强度。



法一 $dR=\rho\frac{dr}{S}=\rho\frac{dr}{2\pi rl}$ $R=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho dr}{2\pi rl}=\frac{\rho}{2\pi l}\ln\frac{R_2}{R_1}$ $I=\frac{U}{R}=\frac{2\pi lU}{\rho\ln\frac{R_2}{R_1}}$

法二 $I=\int\vec{j}\cdot d\vec{S}=j2\pi rl\ \Rightarrow\ j=\frac{I}{2\pi rl}=\frac{E}{\rho}\Rightarrow E=\frac{I\rho}{2\pi rl}$

$$U=\int\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{I\rho}{2\pi rl}dr=\frac{I\rho}{2\pi l}\ln\frac{R_2}{R_1}\quad 则I=\frac{U}{R}=\frac{2\pi lU}{\rho\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

2. 上下两层电导率为$\sigma_1.\sigma_2$的均匀导电介质，厚度为d_1,d_2，截面积 S，通过电流强度为I，求分别场强与电势差。

由$I=\iint\vec{j}\cdot d\vec{S}$ $\vec{j}=\sigma\vec{E}$得：$I=j\cdot\Delta S$ $j_1=\sigma_1E_1$ $j_2=\sigma_2E_2$ $j=\frac{I}{\Delta S}$

11.1.6 电功率和焦耳定律 electric power & Joule's law

电功 在电路中电场力所作的功称为电流的功 $dA=dqU=IUdt$（U 从 A 到 B 点电势降落）

电功率 $\boldsymbol{P=\frac{dA}{dt}=UI}$

焦耳定律 如果电势能的降低全部转化为热能

数学表达式 $Q=\boldsymbol{A=I^2Rt}$ $\boldsymbol{P=I^2R}$ 可应用于纯电阻与非纯电阻

热功率密度 在点流场中一根细电流管运用焦耳定律，得到$\Delta P=I^2R=(j\Delta S)^2\left(\frac{\rho\Delta l}{\Delta S}\right)=j^2\rho(\Delta l\Delta S)=j^2\rho\Delta\tau_{体积}$

单位导体体积的热功率即为**热功率密度** $\boldsymbol{p=\sigma E^2}$ **焦耳定律微分形式**

11.1.7 电动势 electromotive force

电源 在导体中有稳恒电流流动不能单独依靠静电场，必须有**非静电力**把正电荷从负极移动到正极，才能在导体两端维持稳恒电势差。**这种提供非静电力的装置就是电源。**电源是把能量转换为电能的装置，静电力使正电荷从高电位到低电位。非静电力使正电荷从低电位到高电位。

内电路 电源内部电流从负极→正极

非静电性电场电场强度 使用K表示，即**单位正电荷所受的非静电力**

在电源内部，内电路电荷同时受到恒定电厂和非静电性电场的作用，而在外电路中仅受到恒定电场作用因此，在电荷 q 沿电路运行一周的过程中，各种电场所作的总功为

$$A=\int_+^- q\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_-^+ q(\vec{E}+\vec{K})\cdot d\vec{l}=\oint q\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_-^+ q(\vec{K})\cdot d\vec{l}$$ 遵从环路定律，化为$A=q\int_-^+ q(\vec{K})\cdot d\vec{l}$

电源电动势 记为ε，定义为**单位正电荷**沿闭合电路运行一周**非静电力所作的功**

表征电源将其他形式能量转化为电能的本领

$\boldsymbol{\varepsilon=\frac{A}{q}=\int_-^+\vec{K}\cdot d\vec{l}}$ ε是标量，可取正、反两个方向。**规定从负极经电源到正极的方向为电动势方向**

注意 非静电性电场只存在于电源内部，其方向沿着电源内部从负极指向正极。考虑一般情形，非静电性电场可能存在于整个电路，于是有$\varepsilon=\oint\vec{K}\cdot d\vec{l}$

11.2 磁场和磁感应强度

11.2.1 磁现象

磁极　磁铁磁性最强区域，磁铁**指向北方**的磁极为**磁北极**（N 极），**指向南方**为**磁南极**（S 极）
磁石同极相斥，异极相吸

磁现象　有天然磁体周围磁场、载流导线磁场、电子束周围磁场
载流导线能偏转磁针、磁场给导线力的作用、导线之间有力的作用、载流线圈之间有力的作用

分子电流　电荷的运动是一切磁现象的根源，运动电荷产生磁场，磁场对运动电荷有磁力作用

11.2.2 磁感应强度 magnetic induction

磁场对外重要表现　1. 磁场对处于场中的运动电荷（载流导体）有磁力作用【力的角度】
2. 载流导体在磁场中移动时，磁力将对载流导体作功，表明磁场具有能量【能量角度】

零力线　带电粒子所受力与其运动方向有关。实验**发现带电粒子在磁场中沿某一特定直线方向运动时不受力**，此直线方向与电荷无关

磁感应强度　带电粒子在磁场中沿其他方向运动时，$\vec{F}$垂直于$\vec{v}$与零力线组成的平面。

当带电粒子在磁场中垂直于此零力线运动时，受力最大。$F_{max} \propto qv$

定义　当正电荷垂直于零力线运动时，受力$\vec{F}_{max}$，将$\vec{F}_{max} \times \vec{v}$方向定义为该点磁感强度$\vec{B}$的方向(零力线方向)

大小　$\boldsymbol{B = \frac{F_{max}}{q_0 v_\perp}}$　　**运动电荷磁场中受力（洛伦兹力）**　$\boldsymbol{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$

单位　特斯拉 $1T = 1N/A \cdot m$　　高斯$1T = 10^4 G$

方向　$\vec{F}_m \times \vec{v}_{正电荷运动方向}$ 满足右手螺旋：**食指磁场 B、中指电荷速度、拇指正电荷受力方向**

量纲　$[B] = \frac{[F_m]}{[q][v]} = \frac{N}{C \cdot m/s} = T$

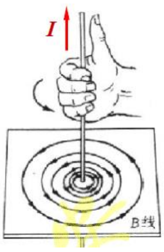
例子
1. B 方向垂直纸面向里，F 水平向右，正电荷：则向下
2. B 方向垂直纸面向外，V 水平向右，负电荷：则向上
3. F 方向向上，v 方向向左，负电荷，则垂直纸面向里

11.2.3 磁感应线和磁通量 magnetic induction line & magnetic flux

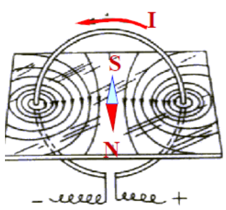
磁力线　磁感应线形象表示磁场分布状况，曲线上切线方向与 B 方向一致；在与磁场垂直的单位面积上穿过曲线的条数，与该处 B 的大小成正比，即疏密程度反应 B 的大小。

磁感应管　一簇磁感应线围成的管状区域

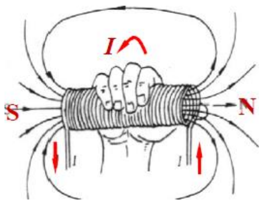
典型模型



直线电流



圆电流



通电螺线管

注意
1. 每条磁力线是环绕电流的闭合曲线,都与闭合电路互相套合。**磁场是涡旋场**。**磁线是无头无尾闭合回线**
2. 任意两条磁力线在空间不相交。
3. 磁力线环绕方向与电流方向之间可用**右手定则**表示

磁通量　通过某一曲面的磁感线数. 由于磁力线是闭合线，如果是环积分则为零 $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$。

公式　$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$　　**单位**：韦伯 $1Wb = 1T \times 1m^2$

推导　$\phi = BS\cos\theta = BS_{\perp}$　　$\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \vec{B}\cdot\vec{e}_n S$　　$d\phi = \vec{B}\cdot d\vec{S}$　$d\phi = Bds\cos\theta$

11.2.4 磁场中的高斯定理

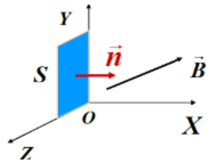
定理公式　$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$　　**物理意义**：通过任意闭合曲面的磁通量必定等于零（故磁场无源）

微分形式　$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_v div\vec{B}dV = 0$　故有 $div\vec{B} = \nabla\cdot\vec{B}$ $\Rightarrow div\vec{B} = 0\ or\ \nabla\cdot\vec{B} = 0$

典例　1. 求均匀磁场中半球面的磁通量　$\phi_{S1} = B\pi R^2$

2. 在均匀磁场$\vec{B} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$中，过 YOZ 平面内面积为 S 的磁通量

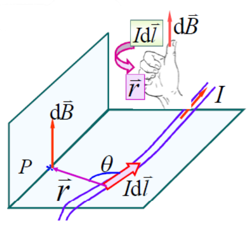
$\phi_m = \vec{B}\cdot\vec{S} = (3\vec{i} + 2\vec{j})\cdot S\,\vec{i} = 3S$



11.3 比奥-萨法尔定律

11.3.1 稳恒电流磁场

磁场微元　$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$　　其中**真空磁导率** $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}N\cdot A^{-2}$

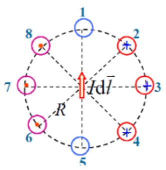


方向判断　$d\vec{B}$方向垂直于**电流元**$\boldsymbol{Id\vec{l}}$与$\vec{r}$组成的平面，$d\vec{B}$和$Id\vec{l}$及$\vec{r}$三矢量满足矢量叉乘关系

磁场强度　$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$（磁感强度叠加原理）　**拇指电流方向，四指自然弯曲**

比奥萨伐尔定律　$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$

例题　1. 判断下列各点磁感应强度的方向和大小

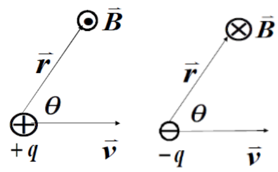


点 1、5：$dB = 0$

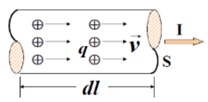
点 3、7：$dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2}$

点 2、4、6、8：$dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2}\sin 45°$

11.3.2 运动电荷（电流）的磁场



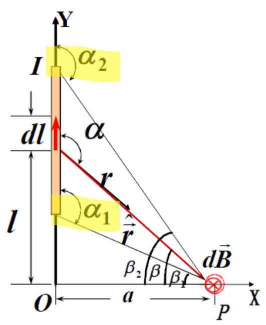
磁场强度　$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$　　有电流元$Id\vec{l}$，已知$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$



其中$I = q_{电荷}n_{密度}v_{速率}S_{截面积}$，载流子总数$dN = nSdl$　$B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin(\vec{v},\hat{r})}{r^2}$

11.3.3 典型模型

1. 载流直导线磁场



已知有真空中I, α_1, α_2, a，建立有坐标系OXY

任取电流元$Id\vec{l}$，大小$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$，方向$Id\vec{l}\times\hat{\vec{r}}$，则$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$

统一积分变量：$l = actg(\pi-\alpha) = -actg\alpha$　$dl = a\csc^2\alpha\,d\alpha$　$r = a/\sin\alpha$

则$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Idl\sin\alpha}{r^2} = \int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sin^2\alpha}{a^2}\ I\sin\alpha\frac{ad\alpha}{\sin^2\alpha} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu_0}{4\pi a}\ I\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$

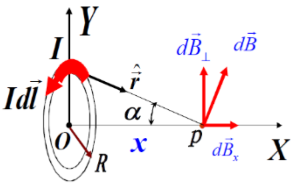
$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$

① **无限长载流直导线** $\alpha_1=0,\alpha_2=\pi$ $\boldsymbol{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$ **非匀强场**

② **半无限长载流直导线** $\alpha_1=\pi/2,\ \alpha_2=\pi$ $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$ 注意场点位置，据题调整α

③ **直导线延长线上一点** $\alpha=0\ \ ,a=0,\ dB=0$ $\boldsymbol{B=0}$

2. 圆形电流轴线上磁场



已知有R,I，求轴线上 P 点的磁感应强度。建立有坐标系 OXY

任取电流元$Id\vec{l}$，大小$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$，方向$Id\vec{l}\times\hat{\vec{r}}$，则分析对称性，可写出分量式

$\vec{B}_\perp=\int d\vec{B}_\perp=0\quad B_x=\int dB_x=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$ 统一积分变量$\sin\alpha=R/r$

$$B_x=\int dB_x=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}=\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int dl=\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}2\pi R=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

大小：$\boldsymbol{B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$ **方向**：右手螺旋法则

① $\boldsymbol{x\gg R}$ $B=\boldsymbol{\frac{\mu_0 IR^2}{2x^3}}$

② $\boldsymbol{x=0}$ **载流圆环** 圆心角$\theta=2\pi$ $\boldsymbol{B=\frac{\mu_0 I}{2R}}$ **圆心处磁场**

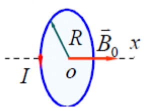
载流圆弧 圆心角θ $B=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{\theta}{2\pi}$

③ **多匝** **单匝**：$B_{1\,匝}=\boldsymbol{\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$ **N 匝：**$B_{N匝}=N\boldsymbol{\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$

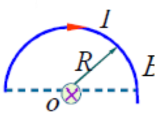
④ $B=\boldsymbol{\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}}=\boldsymbol{\frac{\mu_0 IR^2\,\pi}{2\pi(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}}=\boldsymbol{\frac{\mu_0 IS}{2\pi(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$

一匝磁矩：$\vec{m}=I\cdot\vec{S}=I\cdot S\cdot\hat{s}$ $B_{1\,匝}=\boldsymbol{\frac{\mu_0\vec{m}}{2\pi(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$ **N 匝磁矩**：$\vec{m}=NI\cdot\vec{S}=\mathrm{N}I\cdot S\cdot\hat{s}$ $B_{\mathrm{N}\,匝}=\boldsymbol{\frac{\mu_0\vec{m}}{2\pi(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$

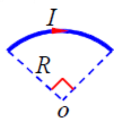
3 典型模型总结



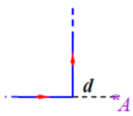
$\boldsymbol{B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}}$



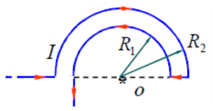
$\boldsymbol{B_0=\frac{\mu_0 I}{4R}}$



$\boldsymbol{B_0=\frac{\mu_0 I}{8R}}$

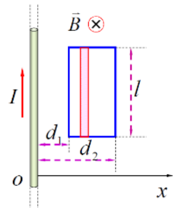


$B_A=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}$



$B_0=\frac{\mu_0 I}{4R_2}-\frac{\mu_0 I}{4R_1}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$

例题 1. 如图载流长直导线电流为I，试求通过矩形面积的磁通量。



先求出$\vec{B}$，对磁场给出$d\Phi$后积分求ϕ. **选择小窄条为面元**

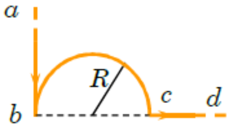
有$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ $d\Phi=BdS=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}ldx$ $\phi=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_{d_1}^{d_2}\frac{1}{x}dx=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}$

2. 两平行长直导线相距 d，每根导线I，方向相反，求 ①两条线所在平面内与两导线等距得一点 P 处的$\vec{B}$ ② 通过图中矩形面积（线框长r_2，宽L，距离导线为r_1）的磁通量ϕ_m

① 场是叠加的。$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi\frac{d}{2}}=\frac{\mu_0 I}{\pi d}\otimes$ $B_2=\frac{\mu_0 I}{\pi d}\otimes$ 则$B=\frac{2\mu_0 I}{\pi d}\otimes$

② 取竖直dS，$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi(x)}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}$有$d\Phi=BdS=\iint\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_{r_1}^{r_1+r_2}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(x)}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(2r_1+r_2-x)}\right)Ldx$

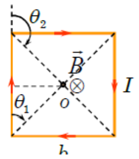
3. 计算组合载流导体在o点的 B



可见 o 点 B 由三段载流导体产生：$\vec{B}_0=\vec{B}_{ab}+\vec{B}_{bc}+\vec{C}_{cd}$ 规定垂直纸面向里为正向

$$B_0=-B_{ab}+B_{bc}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4R}=\frac{\mu_0 I}{4R}(1-\frac{1}{\pi})$$

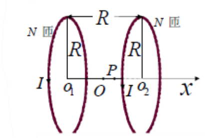
4. 有正方形载流线圈边长为 b，通有电流 I，求中心 B



$$B=B_1+B_2+B_3+B_4=4B_1 \qquad 有\theta_1=\frac{\pi}{4},\theta_2=\frac{3\pi}{4}$$

$$B=4\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{b}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi b}$$

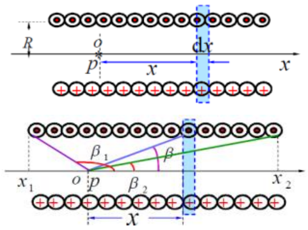
5. **亥姆霍兹线圈**：两个完全相同的 N 匝共轴密绕短线圈，其中心间距与线圈半径 R 相等，通有同向平行等大电流 I。求轴线上$o_1\cdot o_2$之间任一点 P 的磁场。



$$B_P=\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{2}+x\right)^2\right]^{3/2}}+\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{2}-x\right)^2\right]^{3/2}} \qquad 可以发现B_o=0.72\frac{\mu_0 NI}{R} \qquad B_{o1}=B_{o2}=0.68\frac{\mu_0 NI}{R}$$

因此，其在**实验室中用作近似均匀磁场**。

6. **载流直螺线管磁场**：一长为 l，半径为 R 的载流密绕直螺线管，总匝数 N，通有电流 I。将螺线管置于真空中，求管内轴线上任意一点的磁感强度。



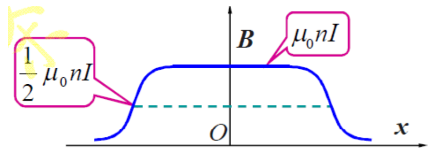
由圆形电流磁场公式$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$，取竖直的**某一匝**为微元

则$dB=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2(I\times n\times dx)}{(x^2+R^2)^{3/2}}$ $\quad x=R\cot\beta$，$dx=-R\csc^2\beta d\beta$，$R^2+x^2=R^2\csc^2\beta$

$B=\int dB=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{R^3\csc^2\beta\, d\beta}{R^3\csc^3\beta}=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\, d\beta$ 则 $B=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$

讨论 **① P 点位于管内轴线中点** 则$\beta_1=\pi-\beta_2$ $\quad\cos\beta_1=-\cos\beta_2$ $\quad\cos\beta_2=\frac{l/2}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+R^2}}$

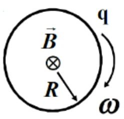
$B=\mu_0 nI\cos\beta_2=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{l}{(l^2/4+R^2)^{1/2}}$ $\qquad$ 若$l\gg R$，则$B=\mu_0 nI$



② 无限长螺线管 $\qquad B=\mu_0 nI$

③ 半无限长螺线管 $\qquad$ 则$\beta_1=\frac{\pi}{2}$，$\beta_2=0$，$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI$

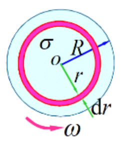
7. **旋转均匀带电圆环**：已知q,R,ω，求圆心处$\vec{B}$



带电体转动，形成运流电流。

$$I=\frac{q}{T}=\frac{q}{2\pi/\omega}=\frac{q\omega}{2\pi} \qquad B=\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{\mu_0 q\omega}{4\pi R}$$

8. **均匀带电圆盘旋转**：已知σ,R,ω，求圆心处 B



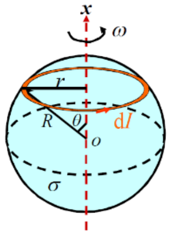
法一：如图取半径为 r，宽为 dr 环带。则微元$dI=\frac{dq}{T}=\frac{\omega}{2\pi}dq$ $\qquad dq=\sigma ds=2\pi\sigma rdr$

$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2r}=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}dr \qquad 方向\begin{cases}\sigma>0,向外\\ \sigma<0,向内\end{cases} \quad 则B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R dr=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

法二：运动电荷磁场有$dB_0=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dq\,v}{r^2}$ $\quad dq=\sigma ds=2\pi\sigma rdr$ $\quad dB=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}dr$

$$v=\omega r \qquad B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R dr=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

9.**旋转均匀带电球面**:已知R,σ,ω，求球心 B

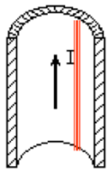


旋转带点球面等效于多个环形电流叠加。取半径为 r 的环带：$dq=\sigma ds=\sigma\ 2\pi r\ Rd\theta$

等效圆电流：$dI=\frac{\omega dq}{2\pi}=\sigma R^2\omega\sin\theta d\theta\quad dB=\frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0\sigma R^2\omega\sin\theta d\theta\, R^2\sin^2\theta}{2R^3}=\frac{R}{2}\mu_0\sigma\omega\sin^3\theta\, d\theta$

$B=\int dB=\frac{R}{2}\mu_0\sigma\omega\int_0^\pi\sin^3\theta\, d\theta=\frac{2}{3}\mu_0R\sigma\omega$　　矢量式：$\vec{B}=\frac{2}{3}\mu_0R\sigma\vec{\omega}$

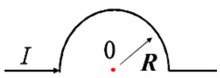
10. 半圆柱型金属片：半径 R=1cm 无限长，电流 I=5A 从下而上通过。求轴线上磁感强度



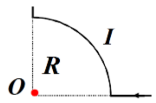
将金属片划分为多个细长条：$dI=\frac{I}{\pi R}Rd\theta\qquad dB=\frac{\mu_0 dI}{2\pi R}=\frac{\mu_0 Id\theta}{2\pi^2R}$

根据对称性 $B_y=0\qquad B_x=\int_0^\pi dB\sin\theta=\frac{\mu_0 I}{2\pi^2R}\int_0^\pi\sin\theta\, d\theta=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}=6.3\times10^{-5}\,T$

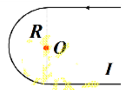
11. 一些导线模型



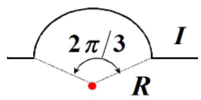
$B=\frac{\mu_0 I}{4R}\ \otimes$



$B=\frac{\mu_0 I}{8R}\ \odot$

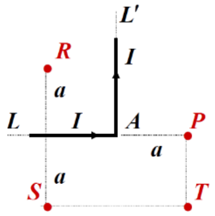


$B=\frac{\mu_0 I}{4R}+\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\ \odot$



$B=\frac{\mu_0 I}{6R}+\frac{\mu_0 I}{\pi R}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \otimes$

12. 有无限长载流直导线弯成如图形状。$I=20A,a=4cm$，求 P\R\S\T 四点的 B



P 点：$B_P=B_{LA}+B_{L'A}=0+\frac{\mu_0 I}{4\pi a}=5\times10^{-5}\,T\quad\otimes$

R 点：$B_R=B_{LA}+B_{L'A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos0-\cos\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\frac{1}{4}\pi-\cos\pi\right)=1.71\times10^{-5}\,T\quad\odot$

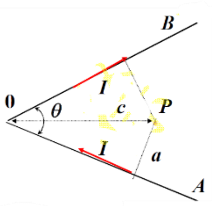
S 点：$B_{LA}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos0-\cos\frac{3}{4}\pi\right)\ \otimes\qquad B_{L'A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\frac{3}{4}\pi-\cos\pi\right)\odot$

$B_S=B_{LA}-B_{L'A}=7.07\times10^{-5}\,T\quad\otimes$

T 点：$B_{LA}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos0-\cos\frac{3}{4}\pi\right)\ \otimes\qquad B_{L'A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\frac{3}{4}\pi-\cos\pi\right)\ \odot$

$B_T=B_{LA}+B_{L'A}=2.94\times10^{-5}\,T\quad\otimes$

13. 如图，求角平分线上的$\vec{B}_p$，已知有I,c

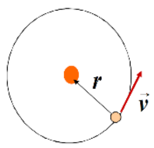


$B_{AO}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\cos0-\cos(\pi-\frac{\theta}{2})\right]=\frac{\mu_0 I}{4\pi c\sin\frac{\theta}{2}}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)\quad\otimes$

同理 $B_{OB}=\frac{\mu_0 I}{4\pi c\sin\frac{\theta}{2}}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)\ \otimes$

因此 $B_P=B_{AO}+B_{OB}=\frac{\mu_0 I}{2\pi c\sin\frac{\theta}{2}}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)\ \otimes$

14. 氢原子中电子绕核作圆周运动。已知$v=0.2\times\frac{10^6 m}{s}\quad r=0.53\times10^{-10}m$，求轨道中心 B 和电子磁矩$\vec{P}_m$



因为$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{\vec{r}}}{r^2}$，又$\vec{v}\perp\hat{\vec{r}}$　所以$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ev}{r^2}\approx13\,T\ \otimes$

又有$\vec{p}_m=IS\vec{n}\qquad S=\pi r^2\qquad I=\frac{v}{2\pi r}e\qquad$所以$p_m=IS=\frac{1}{2}vre=0.93\times10^{-23}\,Am^2\ \otimes$

11.4 磁场中的高斯定理和安培环路定理

11.4.1 磁场的高斯定理

定理 $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ 表示不存在磁单极子

微分形式 $\nabla\cdot\vec{B}=0$

注意 ① $\oint\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ 对**任意闭合曲面**而言 ② $\int\vec{B}\cdot d\vec{S}$ 不一定为零

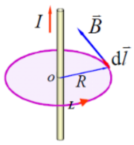
11.4.2 安培环路定理

表述 恒电流磁场中，磁感应强度沿任意闭合环路的积分等于此环路所包围的电流**代数和**的μ_0倍。

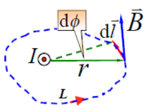
表达式 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\Sigma_i I_i$

符号规定 穿过回路 L 的电流方向与 **L 的环绕方向服从右手关系**的，**I 为正值**。否则为负值。
不穿过回路边界所围面积的电流不计在其内。

证明 假设有**无限长直电流的磁场**：载流长直导线磁感应$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ 则$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\cdot d\vec{l}$

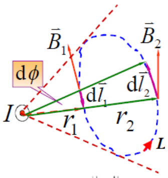


$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\oint_L dl=\mu_0 I$ 设闭合回路 L 为圆形回路，L 与 I 成右螺旋。



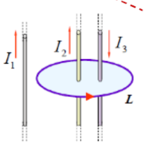
若**回路绕向为逆时针**，则$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi=-\mu_0 I$

对**任意形状回路**：$\vec{B}\cdot d\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}rd\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}d\varphi$ $\int d\varphi=2\pi$ $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$



电流在回路之外：$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$ $B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$ $\vec{B_1}\cdot d\vec{l_1}=-\vec{B_2}\cdot d\vec{l_2}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}d\phi$ $\vec{B_1}\cdot d\vec{l_1}+\vec{B_2}\cdot d\vec{l_2}=0$

则$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=0$



多电流情况：$\vec{B}=\vec{B_1}+\vec{B_2}+\vec{B_3}$ $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0(I_2-I_3)$

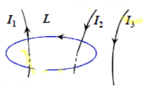
以上结果对**任意形状**的闭合电流均成立

注意 ① $\vec{B}$ 与空间的所有电流均有关系 ② $\vec{B}$的环流只与穿过环路的电流代数和有关

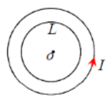
③ 穿过L的电流对$\vec{B}$和$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$ 均有贡献 ④ 不穿过L的电流对L上各点B有贡献，对$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$无贡献

⑤ 安培环路定理揭示了磁场是非保守场（无势场、涡旋场）

例题 1. 如图所示环路积分为$\mu_0(I_1-I_2)$



2. 如图，圆形电流 I 的平面内选取一个同心圆形闭合回路 L，其环路积分为零，环路上任意一点 B≠0



3. 如果在安培环路上各点的 B 处处为零，一定有 $\sum_{L内} I_i=0$

对比分析 **静电场：** **电力线起于正电荷，终止于负电荷，有源。** **电场保守，有势场。**
稳恒磁场： **磁力线闭合，无磁单极子，无源。** **磁场非保守，无势场，涡旋场。**

11.4.3 安培环路定理的应用

描述　可以用来处理电流分布等具有**一定对称性**的恒磁场问题。

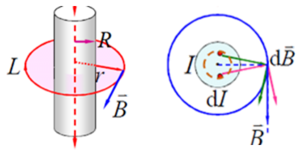
适用　恒稳电流的磁场

求解条件　电流或磁场分布具有某些对称性，可以找到恰当的安培环路 L，使得积分能够计算为 B 与路径长度的乘积形式。利用安排环路定理求解磁感强度要求磁场具有高度对称性。

环路原则　① 环路要经过所研究的场点　② 环路长度简单　③ 环路上各点$\vec{B}$大小相同,方向与环路一致或垂直

典型模型

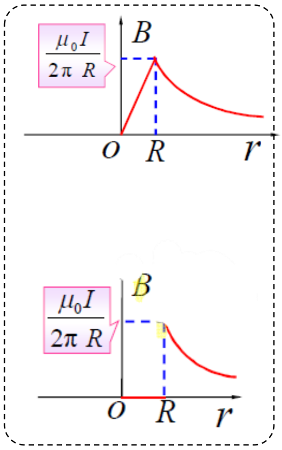
1. 无限长均匀载流圆柱体



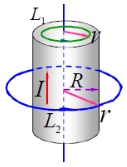
$r > R$时　$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$　$2\pi rB = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$0 < r < R$时　$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I$　$2\pi rB = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I \ \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

$\vec{B}$的方向与 I 成右螺旋



2. 无限长均匀载流圆柱面



$0 < r < R$时　$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$　$B = 0$

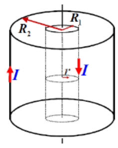
$r > R$时　$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$　$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

电场磁场对比分析

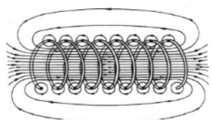
长直导线		$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$					
圆柱面	内部	$E = 0$	$B = 0$	圆柱体	内部	$E = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$	$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$
	外部	$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$		外部	$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

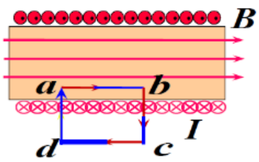
练习：同轴两筒状导线通有等值反向的电流 I，求 B 的分布

① $r > R_2$　$B = 0$　② $R_1 < r < R_2$　$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$　③ $r < R_1$　$B = 0$



3. 长直载流螺线管 已知有I, n(单位长度导线匝数)





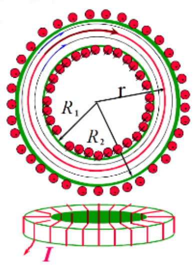
分析对称性：管内磁力线平行于管轴，管外靠近管壁处磁场为 0

计算环流：$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b Bdl\cos 0 + \int_b^c Bdl\cos\frac{\pi}{2} + \int_c^d Bdl\cos\pi + \int_d^a Bdl\cos\frac{\pi}{2} = B\cdot\overline{ab}$

则有$B\cdot\overline{ab} = \mu_0\, n\, \overline{ab} I$　可得：$\boldsymbol{B = \mu_0 nI}$ （内）　$\boldsymbol{B = 0}$（外）

无限长载流螺线管内磁场处处相等，外部磁场忽略不计

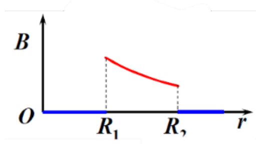
4. 环形载流螺线管 已知有I, N, R_1, R_2, N



分析对称性：磁力线分布如图，做积分环路如图　方向右手螺旋

计算环流：$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint Bdl = 2\pi rB$ 则有$2\pi rB = \mu_0 NI$ 则$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$(内)

若$\frac{R_1}{R_2} \gg R_1 - R_2$　$n = \frac{N}{2\pi R_1}$　则可近似为均匀场$B \approx \mu_0 nI$



练习:

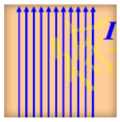
1. 螺旋环截面为矩形$I = 1.7A$,导线总匝数$N = 1000$ 匝，外半径和内半径之比为$R_2/R_1 = 1.6$，高$h = 5.0cm$,求通过截面的磁通量。

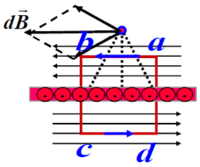
$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}hdr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} = 8\times 10^{-6}\ wb$$

2. 截面为长方形的环式螺线管，共 N 匝，h 为螺绕环高，a为内径，b为外径，有I，求管内磁通量

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_a^b\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}hdr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

5. 无限大载流导体薄板　　导线中电流强度I,单位长度导线匝数为n

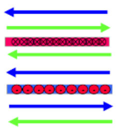




分析对称性：磁力线如图，作积分环路如图，ab、cd与导体版平行

计算环流：$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b Bdl\cos\theta + \int_b^c Bdl\cos\frac{\pi}{2} + \int_c^d Bdl\cos 0 + \int_d^a Bdl\cos\frac{\pi}{2} = B\cdot\overline{ab} + B\cdot\overline{cd}$

$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2B\cdot\overline{ab} = \mu_0 n\cdot\overline{ab}\cdot I \Rightarrow B = \frac{1}{2}\mu_0 nI$ 板上下两侧为均匀磁场



讨论：如图，两块无限大载流导体薄板平行放置，通有相反方向电流。求磁场分布。

已知导线中电流强度I，单位长度导线匝数 n，单个平板$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI$，则$B = \begin{cases} 0 & \textit{两版外侧} \\ \mu_0 nI & \textit{两板之间} \end{cases}$

11.5 磁场对电流的作用 安培定律

11.5.1 安培定律

安培力　　**电流元**在磁场中受到的**磁力**，它是洛伦兹力的宏观表现

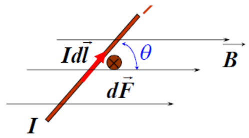
安培定律　一个电流元在磁场中所受安培力为电流元与磁感应强度的矢量积

$d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$　　大小：$dF=IdlB\sin\theta \quad \theta=\arcsin(Id\vec{l},\vec{B})$

方向：**右手螺旋** 食指磁感强度、中指电荷运动方向，拇指正电荷受力方向

载流导线受到的磁力：$\vec{F}=\int d\vec{F}=\int_L Id\vec{l}\times\vec{B}$

匀强磁场中载流直导线所受安培力

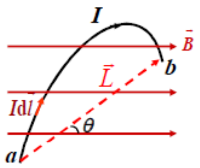


一般情况　取电流元，受力：$dF=BIdl\sin\theta$ ⊗　　积分：$F=\int_L BIdl\sin\theta=\boldsymbol{BIL\sin\theta}$ ⊗

I 与 B 平行　则$\theta=0\ or\ \pi$　　　　受力$F=0$

I 与 B 垂直　则$\theta=\pi/2\ \ or\ \ 3\pi/2$　　**受力$F_{max}=BIL$**

匀强磁场中载流弯曲导线所受安培力



取电流元，受力$d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$　则$\vec{F}=\int d\vec{F}=\int Id\vec{l}\times\vec{B}=I\left(\int d\vec{l}\right)\times\vec{B}=I\vec{L}\times\vec{B}$（由于$\int d\vec{l}=\vec{L}$）

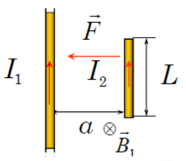
故$F=BIL\sin\theta$　**均匀磁场**中，弯曲载流导线所受磁场力与起终点相同的**直导线**相同。

推论：**在均匀磁场中任意形状闭合载流线圈受到的合力为零**。

这种就$F\neq 0$

例题

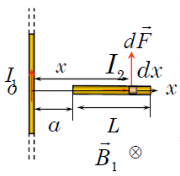
1. 在无限长载流直导线I_1旁，平行有长为L的载流直导线I_2，相距 a，求I_2所受力



由于距离相同，故 B 相同。则有$F=I_2LB_1\sin\theta$ 其中$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$ ，$\theta=\frac{\pi}{2}$

则$F=I_2L\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi a}$ 方向向左　（同理，1 也受到 2 的拉力）

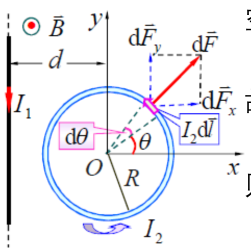
2. 在无限长载流直导线I_1旁，垂直有长为L的载流直导线I_2，左端距离为 a，求I_2所受力



如图建系，选取微元，有$dF=I_2dx\,B_1\sin\theta$　其中$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$ ，$\theta=\frac{\pi}{2}$

则$F=\int dF=\int_a^{a+L} I_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}dx=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{a+L}{a}$　方向向上

3. 半径为 R 载有电流I_2的导体圆环与电流为I_1的长直导线如图放置。相距 d,两者间绝缘,求作用在圆电流上的磁场力



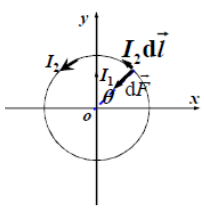
空间一点$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\frac{1}{d+R\cos\theta}$ 则有$dF=BI_2dl=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dl}{d+R\cos\theta}$ 又有$dl=Rd\theta$

故$dF=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{Rd\theta}{d+R\cos\theta}$　分量$dF_x=dF\cos\theta=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{R\cos\theta d\theta}{d+R\cos\theta}$ $dF_y=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{R\sin\theta d\theta}{d+R\cos\theta}$

则$F_x=\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta d\theta}{d+R\cos\theta}=\mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2-R^2}}\right)$　　$F_y=\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{d+R\cos\theta}=0$

注：$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta d\theta}{d+R\cos\theta}=\frac{2\pi\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2-R^2}}\right)}{R}$　则$\vec{F}=F_x\vec{\imath}=\mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2-R^2}}\right)\vec{\imath}$

4. 无限长直导线I_1，半径 R 的圆线圈I_2，长直导线通过圆心，与线圈在同一平面（彼此绝缘），求圆线圈磁场力

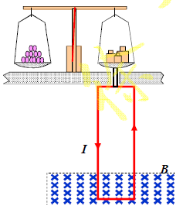


空间一点 $B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$　　$d\vec{F}=I_2d\vec{l}\times\vec{B}$　　$r=R\cos\theta$

$F=F_x=\oint_L dF_x=\oint_L -dF\cos\theta=\oint_L -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}dl\cos\theta=\int_0^{2\pi}-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R\cos\theta}dl\cos\theta=-\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}d\theta$

$F=-\mu_0 I_1 I_2$　方向沿 x 负方向

5. 磁秤：一臂下挂有矩形线圈（宽 b 长 l 有 N 匝）。当线圈通有I，线圈向上受力，调节砝码m使两端平衡。据此，求待测磁场的磁感应强度。

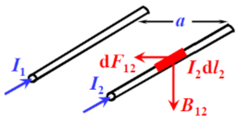


线圈底边上受到安培力$\vec{F}$,方向向上，大小为$F = NBIb$

作用在两侧边的力大小相等方向相反，互相抵消。因此$NBIb = mg$

则$B = \frac{mg}{NIb}$

11.5.2 两平行长直电流之间的相互作用



模型设置 两根相距为a的平行直导线，分别通以**同方向**的电流I_1和I_2

推导 根据安培定律$d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}$ 大小为$dF_{12} = I_2 B_{12} dl_2$ $B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$

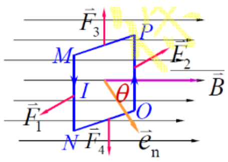
单位长度受力为$f_{12} = \frac{dF_{12}}{dl_2} = I_2 B_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1 I_2}{a}$ 同理可得$\boldsymbol{f_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1 I_2}{a}}$

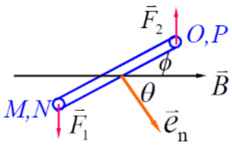
规律 **方向相同的两平行直导线相互吸引。方向相反的相互排斥**

电流单位定义 令$a = 1m, I_1 = I_2$，调节电流大小，当$f_{12} = 2 \times 10^{-7}\ N \cdot m^{-1}$时导线上的电流就是 1A

11.5.3 磁场对载流线圈的作用

模型分析 如图**均匀磁场**中有**矩形载流线圈**$MNOP$（$MN = l_2, NO = l_1$）则$F_1 = BIl_2$，$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$





$F_3 = BIl_1 \sin(\pi - \phi)$,$\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$ 无力矩产生 所以总和 $\vec{F} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = 0$

$MN = l_2, NO = l_1$ $M_{力矩} = F_1 l_1 \sin\theta = BIl_2 l_1 \sin\theta$

$M = BIS\sin\theta$ $\vec{M} = IS\,\vec{e}_n \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$

线圈有 N 匝时：$\vec{M} = NIS\,\vec{e}_n \times \vec{B}$

磁矩 $\boldsymbol{\vec{m} = NIS\vec{e}_n}$ 方向：$\vec{e}_n$与I成右螺旋

结论 均匀磁场中，任意形状刚性闭合平面通电线圈所受的**力和力矩为零**

$\boldsymbol{\vec{F} = 0}$，$\boldsymbol{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$

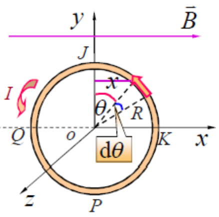
结论具有普遍意义。适用于带电粒子沿任意闭合回路的运动或自旋磁矩在磁场中受的力矩

讨论情况 ① $\vec{e}_n$方向与 B 相同：稳定平衡 $\theta = 0, M = 0$

② $\vec{e}_n$方向与 B 相反：不稳定平衡 $\theta = \pi, M = 0$

③ $\vec{e}_n$方向与 B 垂直：力矩最大 $\theta = \pi/2, M = M_{max}$

例题 1. 半径 0.2m,电流 20A 的可绕轴旋转的圆形载流线圈,均匀磁场 0.08T,方向沿 x 轴正向,问线圈受力与磁力矩



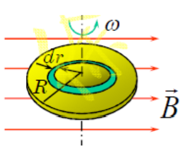
把线圈分为JQP和PKJ两部分

$\vec{F}_{JQP} = BI(2R)\vec{k} = 0.64\vec{k}N$ $\vec{F}_{PKJ} = -BI(2R)\vec{k} = -0.64\vec{k}N$

以Oy为轴，$Id\vec{l}$所受磁力矩大小为$dM = xdF = IdlBx\sin\theta$ $x = R\sin\theta$ $dl = Rd\theta$

故$dM = IBR^2 \sin^2\theta\, d\theta$ $M = IBR^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = IB\pi R^2$

2. 半径 R,面密度σ的薄圆盘，匀强 B。圆盘以ω绕其轴线转动，求作用在圆盘上的磁力矩。



取半径为 r，宽为 dr 的圆环。其带电$dq = \sigma 2\pi r dr$ 转动电流$dI = \frac{dq}{T} = \omega\sigma r dr$

磁矩：$dP_m = \pi r^2 dI = \pi\sigma\omega r^3 dr$ 方向沿轴线向上

所受磁力矩：$dM = dP_m B \sin\frac{\pi}{2} = dP_m B = \pi\sigma\omega B r^3 dr$ $M = \int dM = \int_0^R \pi\sigma\omega B r^3 dr = \frac{\pi\sigma\omega B R^4}{4}$ ⊗