第十一章 电流和恒磁场

11.1 恒定电流条件和导电规律

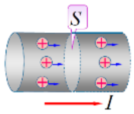
11.1.1 电流强度和电流密度 electric current & density

截留子 金属导体中的带电粒子 **正截留子**流动方向为电流之方向

电流强度 $I=\frac{dQ}{dt}$ 单位时间通过导体截面的电量 其为**标量**,有正负之分 **单位**: $1A=10^3 mA=10^6 \mu A$

导体均匀情况 $I=\frac{dQ}{dt}=\frac{nedV}{dt}=\frac{nev_d dtS}{dt}=nev_d S$ 其中v_d为**电子漂移速度**大小

n自由电子数密度 在时间间隔 dt 内，圆柱体内自由电子的通过量

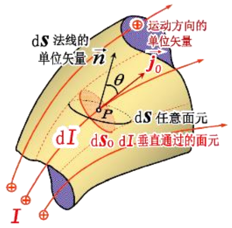


电流密度 **定义式** $\vec{j}=\frac{dI}{dS_0}\vec{j_0}$ 即 P 点处的**电流密度矢量** **大小**: $j=\frac{dI}{dS_0}=\frac{dI}{dS\cos\theta}$ **方向**: $\vec{j_0}$方向

单位: $A\cdot m^{-2}$ **意义**: 描述**电流分布**的物理量

定义: 在导体中任意一点的**方向**与正载流子在该点流动方向相同

大小等于通过该点并垂直于电流的单位截面电流强度



电流强度与电流密度关系 $I=\iint_S dI=\iint_S j\cos\theta\, dS=\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$ 通过导体中任一曲面 S 的电流强度

电流场 由电流密度和电通量($\Phi_e=\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$)的关系式比较，可知$I$和$j$的关系也是通量和其矢量场的关系

则有电流的导体中，每一点都具有一定大小和方向的电流密度矢量，构成矢量场，称其为电流场

电流线 形象描述电流场中电流的分布，规定曲线切线方向为j的方向

电流管 由电流线围成的管状区域为电流管。恒定电流时，通过同一电流管任一横截面的电流相等。

11.1.2 电流的连续性方程和恒定电流条件

电流连续性方程 导体内任取一闭合曲面 S,根据**电荷守恒**,**单位时间由 S 流出电量必定等于同时 S 所包围电量减少**

积分形式 $\oint\!\!\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\frac{dq}{dt}$ 以体电荷形式分布 $\oint\!\!\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho d\tau$

微分形式 $\nabla\cdot\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ 在曲面 S 所包围的体积τ内积分$\iiint_\tau \nabla\cdot\vec{j}d\tau=-\iiint_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau$

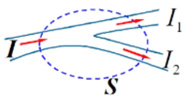
恒定电流 即电流场不随时间变化的电流，由分布不随时间变化的电荷所激发的电场叫恒定电场

积分形式: $\oint\!\!\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$ **微分形式**: $\nabla\cdot\vec{j}=0$

恒定电流场中过任意闭合曲面的电流必定等于 0. 恒定电场的电流线必定是头尾相接的闭合曲线。

库仑电场 恒定电场是由**运动的而不随时间变化的电荷**所激发的，遵从高斯定理和环路定理，恒定电场与静电场具有相同的性质，通称为库仑电场

注意
1. 恒定电流的电路必须闭合
2. 由恒定电流条件可得结论 $-I+I_1+I_2=0$
3. 导体表面的电流密度矢量无法向分量
4. 对一段无分支的稳恒电路，其各横截面的电流强度相等
5. 在电路的任一节点处，流入的电流强度之和等于流出节点的电流强度之和 **（节点电流定律 基尔霍夫第一定律）**



恒定电场
1. 在恒定电流条件下，**导体中的电荷分布不随时间变化**形成恒定电场
2. 恒定电场与静电场具有相似性质，恒定电场中可以引入电势概念
3. 恒定电场的存在伴随着能量的转换

比较 ① 静电场产生电场的电荷始终固定；恒定电场电荷分布不随时间改变但伴随电荷的定向移动
② 静电场静电平衡,导体内$E=0$,导体表面等势；恒定电场导体内$E\neq 0$,导体内任意两点不等势
③ 静电场电场有保守性，是保守场；恒定电场也是保守场
④ 维持静电场无需能量转换；维持稳恒电场需要能量转换

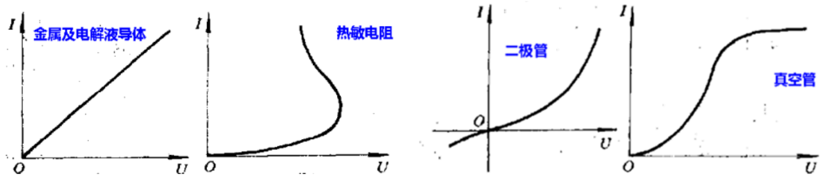
11.1.3 导体电阻 resistance of conductor

基本定义 两端电势差与电流之比 $\boldsymbol{R=\frac{U}{I}}$ **单位：欧姆Ω** $1\Omega=1V\cdot A^{-1}$

电导 电阻的倒数，用 G 表示 **单位：西门子 S** $1S=1\Omega^{-1}$

伏安特性曲线 电势差为横坐标，电流为纵坐标。**金属和电解液导体**的曲线是一条过原点的直线。
具备该性质的电阻为**线性电阻或欧姆电阻**，这种器件称为**线性器件**。

典型曲线



11.1.4 导体电阻率 resistivity of conductor

基本定义 电场强度 E 大小与同点电流密度 j 大小之比 $\boldsymbol{\rho=\frac{E}{j}}$ $\boldsymbol{R=\rho\frac{l}{S}}$

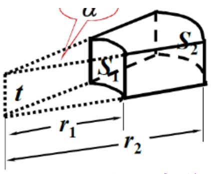
金属材料电阻率 具体电阻率取决于材料本身性质。有 $\rho=\rho_0(1+\alpha t)$，其中α为电阻温度系数
故有$R=R_0(1+\alpha t)$，可制成电阻温度计 （纯金属线膨胀系数很小，可忽略长度截面积变化）

单位 欧姆米$\mathbf{\Omega\cdot m}$

电导率 **电阻率的倒数，用σ表示** $\boldsymbol{\sigma=1/\rho}$ **单位**: **西门子/米** $\mathrm{S\cdot m^{-1}}$

超导 某些材料电阻率在特定温度T_C以下减小到接近 0 的现象，处于超导状态的材料叫超导体
其中，T_C称超导转变温度，其随具体材料变化。

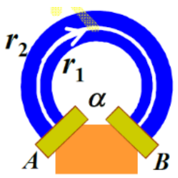
例题 1. 有扇形电极厚 t，电流从半径为r_1的端面S_1流向半径为r_2的端面S_2，扇形张角α，求S_1S_2之间的电阻



有$dR=\rho\frac{dl}{dS}=\rho\frac{dr}{\alpha rt}$ $R=\int_{r_1}^{r_2}\rho\frac{dr}{\alpha rt}$

则 $R=\frac{\rho}{\alpha t}\ln\frac{r_2}{r_1}$

2. 碳膜电位器：绝缘基片,厚为 t，内外半径为r_1,r_2的一层碳构成。A|B 为引出端，张角α，求 AB 间电阻



A、B 间电阻可视为由若干不同长度截面相同的电阻**并联**而成。**(电导率已知)**

电导为 $dG=\sigma\frac{dS}{l}=\sigma\frac{tdr}{\alpha\cdot r}$ 则 $G=\int_{r_1}^{r_2}\sigma\frac{tdr}{\alpha\cdot r}=\sigma\frac{t}{\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1}$

则 $R=\frac{1}{G}=\frac{\alpha}{\sigma t}\ln\frac{r_1}{t_2}$

11.1.5 欧姆定律 Ohm’s law

定律内容 R 是与 U 和 I 无关的常量，即$\boldsymbol{I=U/R}$ 其反映了金属导体导电的基本特性
电阻是常量，电流和电势差成正比（适用于金属导体、电解液和熔融盐）

微分形式 取长为dl，截面积为dS的细电流管。设两端电势差为dU

则 $dI=\frac{dU}{R}$ $R=\frac{\rho dl}{dS}$ $dI=\frac{1}{\rho}\frac{dU}{dl}dS$ $\frac{dI}{dS}=\frac{1}{\rho}\frac{dU}{dl}=\frac{1}{\rho}E=\sigma E$

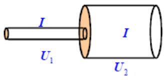
则 $\boldsymbol{\vec{j}=\frac{1}{\rho}\vec{E}=\sigma\vec{E}}$ **其反映了金属导体中任意一点上$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{E}$的关系，适用于恒定电流和变化电流**

注意 对于**一般金属或电解液**，欧姆定律在相当大电压范围内成立。但对于**许多导体和半导体**，欧姆定律不成立

典型模型

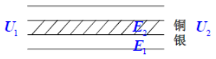
① 电流是电荷流动，在 j=0 的地方，电荷体密度不一定为零（在静电场中，j=0，ρ≠0）

② 两截面不同的铜棒接在一起，两端加有电压，探讨 j、E 的情况。



$j = \frac{I}{S}$ I相同，$S_1 \neq S_2$　所以$j_j > j_2$　又$j = \sigma E$,所以$E_1 \neq E_2$

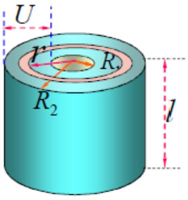
③ 铜棒外围裹有银圈，问铜棒中和银棒中的 j、E 情况。



由于$U_1 - U_2 = E\Delta l$　所以$E_1 = E_2$　又$j = \sigma E, \sigma_1 \neq \sigma_2$　所以$j_1 \neq j_2$

例题

1. 有金属圆筒（R_1, R_2），长度l 电阻率ρ，若已知筒内外电势差 U，且内缘电势高，求径向电流强度。



法一　$dR = \rho \frac{dr}{S} = \rho \frac{dr}{2\pi r l}$　$R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho dr}{2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{R_2}{R_1}$　$I = \frac{U}{R} = \frac{2\pi l U}{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}}$

法二　$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = j 2\pi r l \Rightarrow j = \frac{I}{2\pi r l} = \frac{E}{\rho} \Rightarrow E = \frac{I\rho}{2\pi r l}$

$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I\rho}{2\pi r l} dr = \frac{I\rho}{2\pi l} \ln \frac{R_2}{R_1}$　则$I = \frac{U}{R} = \frac{2\pi l U}{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}}$

2. 上下两层电导率为$\sigma_1 . \sigma_2$的均匀导电介质，厚度为d_1, d_2，截面积 S，通过电流强度为I，求分别场强与电势差。

由$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$　$\vec{j} = \sigma \vec{E}$得：$I = j \cdot \Delta S$　$j_1 = \sigma_1 E_1$　$j_2 = \sigma_2 E_2$　$j = \frac{I}{\Delta S}$

11.1.6 电功率和焦耳定律 electric power & Joule’s law

电功　在电路中电场力所作的功称为电流的功 $dA = dqU = IUdt$　(U 从 A 到 B 点电势降落)

电功率　$P = \frac{dA}{dt} = UI$

焦耳定律　如果电势能的降低全部转化为热能

数学表达式　$Q = A = I^2 Rt$　$P = I^2 R$　可应用于纯电阻与非纯电阻

热功率密度　在点流场中一根细电流管运用焦耳定律，得到$\Delta P = I^2 R = (j\Delta S)^2 \left(\frac{\rho \Delta l}{\Delta S}\right) = j^2 \rho (\Delta l \Delta S) = j^2 \rho \Delta \tau_{体积}$

单位导体体积的热功率即为**热功率密度** $p = \sigma E^2$　**焦耳定律微分形式**

11.1.7 电动势 electromotive force

电源　在导体中有稳恒电流流动不能单独依靠静电场，必须有**非静电力**把正电荷从负极移动到正极，才能在导体两端维持稳恒电势差。**这种提供非静电力的装置就是电源。**电源是把能量转换为电能的装置，静电力使正电荷从高电位到低电位。非静电力使正电荷从低电位到高电位。

内电路　电源内部电流从负极→正极

非静电性电场电场强度　使用K表示，即**单位正电荷所受的非静电力**

在电源内部，内电路电荷同时受到恒定电厂和非静电性电场的作用，而在外电路中仅受到恒定电场作用因此，在电荷 q 沿电路运行一周的过程中，各种电场所作的总功为

$A = \int_+^- q\vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_-^+ q(\vec{E} + \vec{K}) \cdot d\vec{l} = \oint q\vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_-^+ q(\vec{K}) \cdot d\vec{l}$ 遵从环路定律，化为$A = q\int_-^+ q(\vec{K}) \cdot d\vec{l}$

电源电动势　记为ε，定义为**单位正电荷**沿闭合电路运行一周**非静电力所作的功**

表征电源将其他形式能量转化为电能的本领

$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{A}{q} = \int_-^+ \vec{K} \cdot d\vec{l}}$　ε是标量，可取正、反两个方向。**规定从负极经电源到正极的方向为电动势方向**

注意　非静电性电场只存在于电源内部，其方向沿着电源内部从负极指向正极。考虑一般情形，非静电性电场可能存在于整个电路，于是有$\varepsilon = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l}$

11.2 磁场和磁感应强度

11.2.1 磁现象

磁极 磁铁磁性最强区域，磁铁**指向北方**的磁极为**磁北极**（N 极），**指向南方**为**磁南极**（S 极）
磁石同极相斥，异极相吸

磁现象 有天然磁体周围磁场、载流导线磁场、电子束周围磁场
载流导线能偏转磁针、磁场给导线力的作用、导线之间有力的作用、载流线圈之间有力的作用

分子电流 电荷的运动是一切磁现象的根源，运动电荷产生磁场，磁场对运动电荷有磁力作用

11.2.2 磁感应强度 magnetic induction

磁场对外重要表现
1. 磁场对处于场中的运动电荷（载流导体）有磁力作用【力的角度】
2. 载流导体在磁场中移动时，磁力将对载流导体作功，表明磁场具有能量【能量角度】

零力线 带电粒子所受力与其运动方向有关。**实验发现带电粒子在磁场中沿某一特定直线方向运动时不受力**，此直线方向与电荷无关

磁感应强度 带电粒子在磁场中沿其他方向运动时，$\vec{F}$垂直于$\vec{v}$与零力线组成的平面。

当带电粒子在磁场中**垂直于**此零力线运动时，受力最大。$F_{max} \propto qv$

定义 当正电荷垂直于零力线运动时，受力$\vec{F}_{max}$，将$\vec{F}_{max} \times \vec{v}$方向定义为该点磁感强度$\vec{B}$的方向(零力线方向)

大小 $\boldsymbol{B = \frac{F_{max}}{q_0 v_\perp}}$ **运动电荷磁场中受力（洛伦兹力）** $\boldsymbol{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$

单位 特斯拉 $1T = 1N/A \cdot m$ 高斯$1T = 10^4 G$

方向 $\vec{F}_m \times \vec{v}_{正电荷运动方向}$ 满足右手螺旋

量纲 $[B] = \frac{[F_m]}{[q][v]} = \frac{N}{C \cdot m/s} = T$

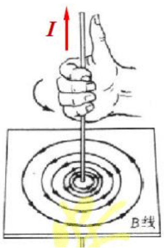
例子
1. B 方向垂直纸面向里，F 水平向右，正电荷：则向下
2. B 方向垂直纸面向外，V 水平向右，负电荷：则向上
3. F 方向向上，v 方向向左，负电荷，则垂直纸面向里

11.2.3 磁感应线和磁通量 magnetic induction line & magnetic flux

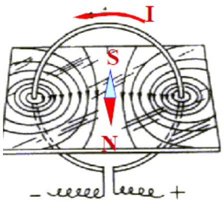
磁力线 磁感应线形象表示磁场分布状况，曲线上切线方向与 B 方向一致；在与磁场垂直的单位面积上穿过曲线的条数，与该处 B 的大小成正比，即疏密程度反应 B 的大小。

磁感应管 一簇磁感应线围成的管状区域

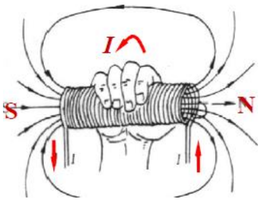
典型模型



直线电流



圆电流



通电螺线管

注意
1. 每条磁力线是环绕电流的闭合曲线,都与闭合电路互相套合。**磁场是涡旋场**。**磁线是无头无尾闭合回线**
2. 任意两条磁力线在空间不相交。
3. 磁力线环绕方向与电流方向之间可用**右手定则**表示

磁通量 通过某一曲面的磁感线数．由于磁力线是闭合线，如果环积分则为零$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$。

公式 $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ **单位**：韦伯 $1Wb = 1T \times 1m^2$

推导　$\phi = BS\cos\theta = BS_{\perp}$　　$\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \vec{B}\cdot\vec{e}_n S$　　$d\phi = \vec{B}\cdot d\vec{S}$　$d\phi = Bds\cos\theta$

11.2.4 磁场中的高斯定理

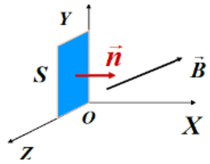
定理公式　$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$　　**物理意义**：通过任意闭合曲面的磁通量必定等于零（故磁场无源）

微分形式　$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_v div\vec{B}dV = 0$　故有 $div\vec{B} = \nabla\cdot\vec{B} \Rightarrow div\vec{B} = 0\ or\ \nabla\cdot\vec{B} = 0$

典例　1. 求均匀磁场中半球面的磁通量　$\phi_{S1} = B\pi R^2$

2. 在均匀磁场$\vec{B} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$中，过 YOZ 平面内面积为 S 的磁通量

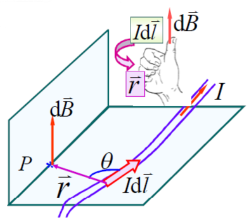
$\phi_m = \vec{B}\cdot\vec{S} = (3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})\cdot S\,\vec{\imath} = 3S$



11.3 比奥-萨法尔定律

11.3.1 稳恒电流磁场

磁场微元　$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$　　其中**真空磁导率** $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}N\cdot A^{-2}$

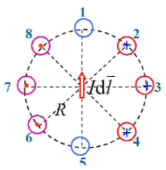


方向判断　$d\vec{B}$方向垂直于**电流元$Id\vec{l}$**与$\vec{r}$组成的平面，$d\vec{B}$和$Id\vec{l}$及$\vec{r}$三矢量满足矢量叉乘关系

磁场强度　$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$　（磁感强度叠加原理）

比奥萨伐尔定律　$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$

例题　1. 判断下列各点磁感应强度的方向和大小



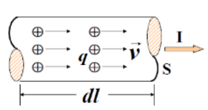
点 1、5：$dB = 0$

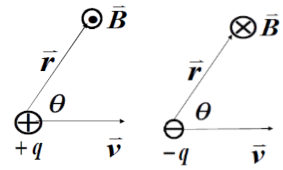
点 3、7：$dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2}$

点 2、4、6、8：$dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2}\sin 45°$

11.3.2 运动电荷（电流）的磁场

磁场强度　$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$　　有电流元$Id\vec{l}$，已知$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

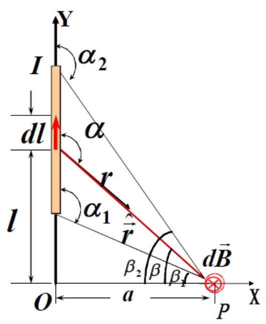




其中$I = q_{电荷}n_{密度}v_{速率}S_{截面积}$，载流子总数$dN = nSdl$　$B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin(\vec{v},\hat{r})}{r^2}$

11.3.3 典型模型

1. 载流直导线磁场



已知有真空中I,α_1,α_2,a，建立有坐标系OXY

任取电流元$Id\vec{l}$，大小$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$，方向$Id\vec{l}\times\hat{r}$，则$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$

统一积分变量：$l = actg(\pi-\alpha) = -actg\alpha$　$dl = a\csc^2\alpha\,d\alpha$　$r = a/\sin\alpha$

则$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Idl\sin\alpha}{r^2} = \int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sin^2\alpha}{a^2}\,I\sin\alpha\frac{ad\alpha}{\sin^2\alpha} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu_0}{4\pi a}\,I\sin\alpha\,d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$

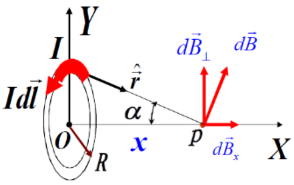
$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$

① **无限长载流直导线**　$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$　　$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ **非匀强场**

② **半无限长载流直导线** $\alpha_1=\pi/2,\ \alpha_2=\pi$ $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$ 注意场点位置

③ **直导线延长线上一点** $\alpha=0\ ,a=0,\ dB=0\ B=0$

2. 圆形电流轴线上磁场 已知有R,I，求轴线上 P 点的磁感应强度。建立有坐标系 OXY



任取电流元$Id\vec{l}$，大小$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$，方向$Id\vec{l}\times\hat{\vec{r}}$，则分析对称性，可写出分量式

$\vec{B}_\perp=\int d\vec{B}_\perp=0$ $B_x=\int dB_x=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$ 统一积分变量$\sin\alpha=R/r$

$$B_x=\int dB_x=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}=\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int dl=\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}2\pi R=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

大小：$\boldsymbol{B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$ 方向：右手螺旋法则

① $x\gg R$ $B=\frac{\mu_0 IR^2}{2x^3}$

② $x=0$ 载流圆环 圆心角$\theta=2\pi$ $B=\frac{\mu_0 I}{2R}$

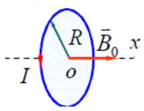
载流圆弧 圆心角θ $B=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{\theta}{2\pi}$

③ 多匝 单匝：$B_{1匝}=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ **N 匝：**$B_{N匝}=N\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

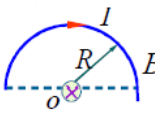
④ $B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0 IR^2\pi}{2\pi(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0 IS}{2\pi(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

一匝磁矩：$\vec{m}=I\cdot\vec{S}=I\cdot S\cdot\hat{s}$ $B_{1匝}=\frac{\mu_0\vec{m}}{2\pi(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ N 匝磁矩：$\vec{m}=NI\cdot\vec{S}=\mathrm{N}I\cdot S\cdot\hat{s}$ $B_{\mathrm{N}匝}=\frac{\mu_0\vec{m}}{2\pi(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

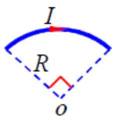
3 典型模型总结



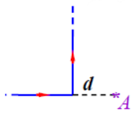
$B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}$



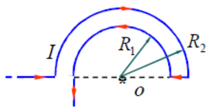
$B_0=\frac{\mu_0 I}{4R}$



$B_0=\frac{\mu_0 I}{8R}$

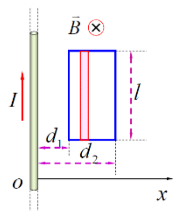


$B_A=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}$



$B_0=\frac{\mu_0 I}{4R_2}-\frac{\mu_0 I}{4R_1}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$

例题 1. 如图载流长直导线电流为I，试求通过矩形面积的磁通量。

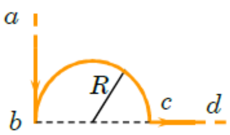


先求出$\vec{B}$，对磁场给出$d\Phi$后积分求ϕ. **选择小窄条为面元**

有$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ $d\Phi=BdS=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}ldx$ $\phi=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_{d_1}^{d_2}\frac{1}{x}dx=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}$

2. 两平行长直导线相距 d，每根导线 I，方向相反，求 ①两道现所在平面内与两导线等距得一点 P 处的$\vec{B}$ ② 通过图中矩形面积的磁通量ϕ_m

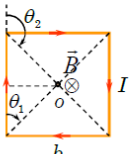
3. 计算组合载流导体在 o 点的 B



可见 o 点 B 由三段载流导体产生：$\vec{B}_0=\vec{B}_{ab}+\vec{B}_{bc}+\vec{C}_{cd}$ 规定垂直纸面向里为正向

$B_0=-B_{ab}+B_{bc}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4R}=\frac{\mu_0 I}{4R}(1-\frac{1}{\pi})$

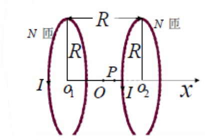
4. 有正方形载流线圈边长为 b，通有电流 I，求中心 B



$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 4B_1$　　　有$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{3\pi}{4}$

$B = 4\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{b}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi b}$

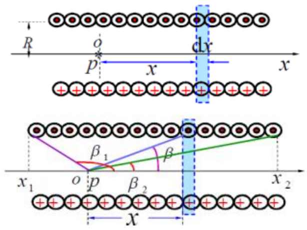
5. 亥姆霍兹线圈：两个完全相同的 N 匝共轴密绕短线圈，其中心间距与线圈半径 R 相等，通有同向平行等大电流 I。求轴线上$o_1 \cdot o_2$之间任一点 P 的磁场。



$B_P = \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{2}+x\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{R}{2}-x\right)^2\right]^{3/2}}$　　可以发现$B_o = 0.72\frac{\mu_0 NI}{R}$　　$B_{o1} = B_{o2} = 0.68\frac{\mu_0 NI}{R}$

因此，其在**实验室中用作近似均匀磁场**。

6. 载流直螺线管磁场：一长为 l，半径为 R 的载流密绕直螺线管，总匝数 N，通有电流 I。将螺线管置于真空中，求管内轴线上任意一点的磁感强度。



由圆形电流磁场公式$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$，取竖直的某一匝为微元

则$dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2(I\times n\times dx)}{(x^2+R^2)^{3/2}}$　　$x = R\cot\beta$，$dx = -R\csc^2\beta d\beta$，$R^2 + x^2 = R^2\csc^2\beta$

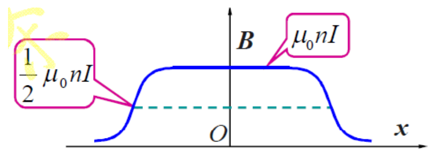
$B = \int dB = \frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{R^3\csc^2\beta\, d\beta}{R^3\csc^3\beta} = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\, d\beta$ 则 $B = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$

讨论　① **P 点位于管内轴线中点**　则$\beta_1 = \pi - \beta_2$　$\cos\beta_1 = -\cos\beta_2$　$\cos\beta_2 = \frac{l/2}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+R^2}}$

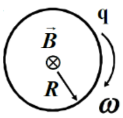
$B = \mu_0 nI\cos\beta_2 = \frac{\mu_0 nI}{2}\frac{l}{(l^2/4+R^2)^{1/2}}$　　　若$l \gg R$，则$B = \mu_0 nI$

② **无限长螺线管**　　$B = \mu_0 nI$

③ **半无限长螺线管**　　则$\beta_1 = \frac{\pi}{2}$，$\beta_2 = 0$，$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI$



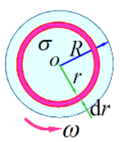
7. 旋转均匀带电圆环：已知q, R, ω，求圆心处$\vec{B}$



带电体转动，形成运流电流。

$I = \frac{q}{T} = \frac{q}{2\pi/\omega} = \frac{q\omega}{2\pi}$　　$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 q\omega}{4\pi R}$

8. 均匀带电圆盘旋转：已知q, R, ω，求圆心处 B



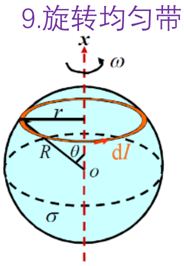
法一：如图取半径为 r，宽为 dr 环带。则微元$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi}dq$　　$dq = \sigma ds = 2\pi\sigma r dr$

$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}dr$　方向$\begin{cases}\sigma > 0, 向外\\ \sigma < 0, 向内\end{cases}$　则$B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R dr = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$

法二：运动电荷磁场有$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dq\, v}{r^2}$　$dq = \sigma ds = 2\pi\sigma r dr$　$dB = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}dr$

$v = \omega r$　　$B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R dr = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$

9.旋转均匀带电球面:已知R, σ, ω，求球心 B

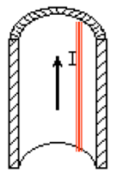


旋转带点球面等效于多个环形电流叠加。取半径为 r 的环带：$dq = \sigma ds = \sigma\, 2\pi r\, R d\theta$

等效圆电流：$dI = \frac{\omega dq}{2\pi} = \sigma R^2\omega\sin\theta d\theta$　$dB = \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\sigma R^2\omega\sin\theta d\theta\, R^2\sin^2\theta}{2R^3} = \frac{R}{2}\mu_0\sigma\omega\sin^3\theta\, d\theta$

$B = \int dB = \frac{R}{2}\mu_0\sigma\omega\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{2}{3}\mu_0 R\sigma\omega$　　矢量式：$\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0 R\sigma\vec{\omega}$

10. 半圆柱型金属片：半径 R=1cm 无限长，电流 I=5A 从下而上通过。求轴线上磁感强度

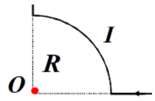


将金属片划分为多个细长条：$dI = \frac{I}{\pi R} R d\theta \qquad dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I d\theta}{2\pi^2 R}$

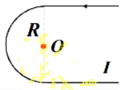
根据对称性 $B_y = 0 \qquad B_x = \int_0^\pi dB \sin\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 6.3\times10^{-5}\, T$

11. 一些导线模型

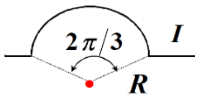
$B = \frac{\mu_0 I}{4R}$ ⊗



$B = \frac{\mu_0 I}{8R}$ ⊙

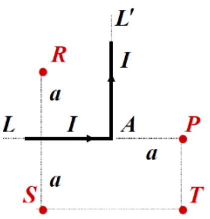


$B = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ ⊙



$B = \frac{\mu_0 I}{6R} + \frac{\mu_0 I}{\pi R}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ⊗

12. 有无限长载流直导线弯成如图形状。$I = 20A, a = 4cm$，求 P\R\S\T 四点的 B



P 点：$B_P = B_{LA} + B_{L'A} = 0 + \frac{\mu_0 I}{4\pi a} = 5\times10^{-5}\, T$ ⊗

R 点：$B_R = B_{LA} + B_{L'A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos 0 - \cos\frac{3}{4}\pi\right) + \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\frac{1}{4}\pi - \cos\pi\right) = 1.71\times10^{-5}\, T$ ⊙

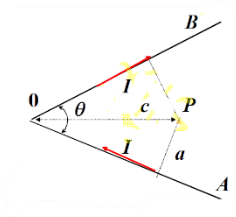
S 点：$B_{LA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos 0 - \cos\frac{3}{4}\pi\right)$ ⊗ $\qquad B_{L'A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\frac{3}{4}\pi - \cos\pi\right)$ ⊙

$B_S = B_{LA} - B_{L'A} = 7.07\times10^{-5}\, T$ ⊗

T 点：$B_{LA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos 0 - \cos\frac{3}{4}\pi\right)$ ⊗ $\qquad B_{L'A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\frac{3}{4}\pi - \cos\pi\right)$ ⊙

$B_T = B_{LA} + B_{L'A} = 2.94\times10^{-5}\, T$ ⊗

13. 如图，求角平分线上的$\vec{B}_p$，已知有I, c

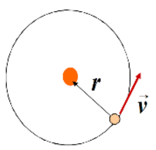


$B_{AO} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\cos 0 - \cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi c \sin\frac{\theta}{2}}\left(1 + \cos\frac{\theta}{2}\right)$ ⊗

同理 $B_{OB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi c \sin\frac{\theta}{2}}\left(1 + \cos\frac{\theta}{2}\right)$ ⊗

因此 $B_P = B_{AO} + B_{OB} = \frac{\mu_0 I}{2\pi c \sin\frac{\theta}{2}}\left(1 + \cos\frac{\theta}{2}\right)$ ⊗

14. 氢原子中电子绕核作圆周运动。已知$v = 0.2\times\frac{10^6 m}{s}$ $r = 0.53\times10^{-10} m$，求轨道中心 B 和电子磁矩$\vec{P}_m$



因为$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{\vec{r}}}{r^2}$，又$\vec{v}\perp\hat{\vec{r}}$ 所以$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ev}{r^2} \approx 13\, T$ ⊗

又有$\vec{p}_m = IS\vec{n} \qquad S = \pi r^2 \qquad I = \frac{v}{2\pi r}e \qquad$ 所以$p_m = IS = \frac{1}{2}vre = 0.93\times10^{-23}\, Am^2$ ⊗