第十四章 光的衍射

14.1 惠更斯-菲涅尔原理和衍射现象分类

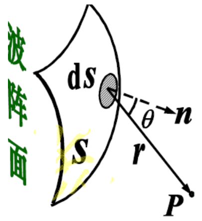
14.1.1 惠更斯-菲涅尔原理

衍射现象 光传播中，如果遇到障碍物，传播方向会发生变化，**能绕过障碍物边缘继续前进进而发生衍射现象**

惠更斯原理 一入射波传播到带有小孔的屏时，不论入射波阵面如何，通过小孔时，在小孔另一侧都产生以小孔**作为点波源的前进波**，可抽象为从小孔发出的一种子波，其频率与入射波频率相同。

媒质中波动传到的各点，都可以看做**能够发射子波的新波源**，在这之后的任意时刻，这些子波的**包络面就是该时刻的波面**。 其适用于机械波、电磁波等所有波动。

惠更斯-菲涅尔原理 波阵面上任意一点均可视为能向外发射子波的子波源。波面前方空间某一点P的振动就是到达该点的**所有子波**的相干叠加



dS在P点引起的振动为$dy = c\frac{K(\theta)}{r}\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{r}{\lambda}\right)ds$ $K(\theta)$为方向函数，θ增加,$K(\theta)$慢减

S上各面元在P点的合振动：$y = \int_S dy = \int_S c\frac{K(\theta)}{r}\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{r}{\lambda}\right)ds$

根据该原理，理论上可计算任意形状孔径的衍射问题，但本章不介绍解算该积分，而是运用该原理有关子波干涉的思想分析和处理一些典型的衍射问题。

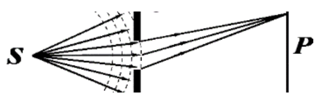
14.1.2 衍射现象分类

分类原理 按照**光源-障碍物-观察屏相对距离**来区分

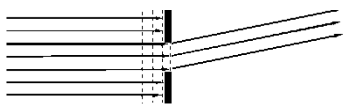
菲涅尔衍射 光源和观察屏距离障碍物**不都是**无限远

近场衍射，二者之一可以无限远

夫琅禾费衍射 光屏及观察屏均距离障碍物无限远，**远场衍射**



菲涅尔



夫琅禾费

14.2 单缝和圆孔的夫琅禾费衍射

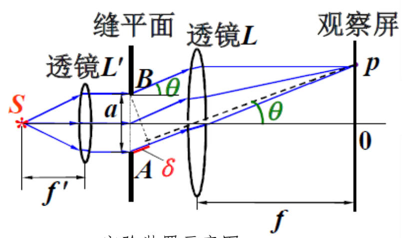
14.2.1 单缝的夫琅禾夫衍射

装置图解 光源位于L_1 的焦点上，屏在L_2的焦平面上 **缝宽$\overline{AB} = a$**

衍射角θ **光程差 $\delta = a\sin\theta$**

研究问题 明暗条纹**位置分布**、条纹**强度分布**

衍射情况 单缝衍射图样的明暗分布规律，是单缝处的入射波阵面上**无数个**子波波源在不同方向上的光干涉结果。

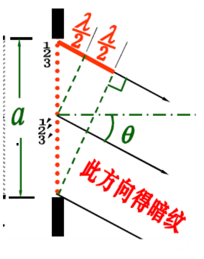


实验装置示意图

解算方法 ① 严格的积分法 ② 简易的半波带法

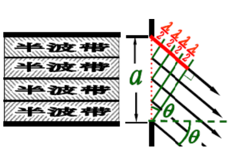
Ⅰ 半波带法

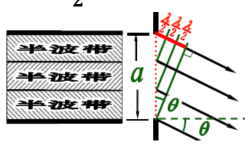
引例 若某θ方向,a 两端的**子波光程差 $\delta_{端}$ 恰为 λ**，单缝恰被分为两个半波带（菲涅尔半波带）则上下两半对应的$11', 22', 33', 44'$ ...**各对子波光程差均为$\lambda/2$**，全部产生**相消干涉**。



两个半波带

推论：若$\delta_{端} = a\sin\theta = m\frac{\lambda}{2}$ m为偶数时，得到暗纹；m为奇数时，得到明纹

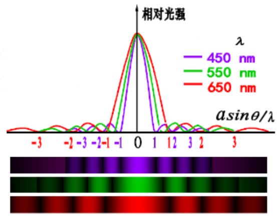




需要注意，如果不能被分为整数个半波带的方向，得到非明非暗的条纹

单缝衍射暗纹公式　$a\sin\theta=\pm 2k\frac{\lambda}{2}=\pm k\lambda\ \ (k=1,2,3,\dots)$ k为暗纹级数

单缝衍射明纹估算式　$a\sin\theta=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}\ \ (k=1,2,3,\dots)$ k为明纹级数



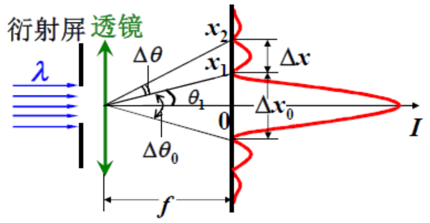
无论明纹暗纹，其角分布均取决于比值 $\frac{\lambda}{a}$

波长一定,缝宽越窄,衍射现象越显著

缝宽一定,波长越长,各级衍射角越大,中央明纹越宽

条纹宽度

中央明纹宽度　$a\gg\lambda$时，$\sin\theta_1\approx\theta_1$



角宽度　$\Delta\theta_0=2\theta_1\approx 2\frac{\lambda}{a}$

线宽度　$\Delta x_0=2f\cdot\mathrm{tg}\theta_1=2f\theta_1=2f\frac{\lambda}{a}\propto\frac{\lambda}{a}$　衍射反比定律

其他明纹宽度（次极大）

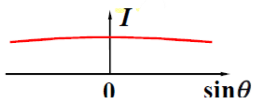
角宽度　**各次极大角宽度等于中央亮纹的半角宽度 $\Delta\theta=\lambda/\alpha$**

线宽度　在 $tg\theta\approx\sin\theta\approx\theta$时, $x_k\approx f\sin\theta_k=f\frac{k\lambda}{a}$ $\Delta x\approx f\frac{\lambda}{a}=\frac{1}{2}\Delta x_0$ 单缝衍射明纹宽度的特征

波长对条纹影响　$\Delta x\propto\lambda$　波长越长，条纹间隔越宽

缝宽对条纹影响　$\Delta x=f\frac{\lambda}{a}$ 缝宽越小，条纹间隔越宽

特别地：① 当$a>\lambda$且$\frac{\lambda}{a}\to 1$时，$\theta_1\to\frac{\pi}{2}$，**只存在中央明纹**，屏幕一片亮

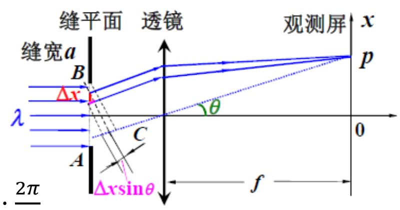


② 当$a\uparrow$且$\frac{\lambda}{a}\to 0$时，$\Delta x\to 0,\theta_k\to 0$，只显出**单一明条纹**：单缝的几何光学像

由此，**几何光学是波动光学在$a\gg\lambda$时的极限情形**。

II 振幅矢量叠加法

方法描述　将单缝**等分为N个窄带**,每个窄带宽为$\Delta x=\frac{a}{N}$, 相邻光程差$\Delta=\frac{a}{N}\sin\theta$



各窄带所发出的子波在P点振幅近似相等，设为A,

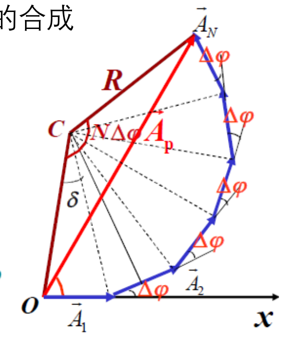
相邻窄带发出的子波到达P点的相位差为：$\Delta\phi=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta x\sin\theta=\frac{a\cdot\sin\theta}{N}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}$

***P*点的合振幅A_θ就是各子波的振幅矢量和的模**

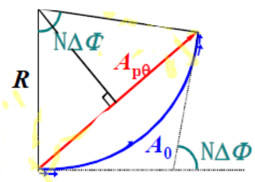
求解　P点处时多个同方向、同频率、同振幅、初相依次差一个恒量$\Delta\varphi$的简谐振动的合成

合成的结果仍为简谐振动。可以用**多边形法则**进行叠加。

当$N\to\infty$时，N个相接的折现将变为一个圆弧



$A_1=2R\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$　　$A_P=2R\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}$



$A_P=A_1\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\approx A_1\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}=NA_1\frac{\sin\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)}{\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)}$

令$\alpha=\frac{N\Delta\varphi}{2}=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$, $A_p=NA_1\frac{\sin\alpha}{\alpha}$

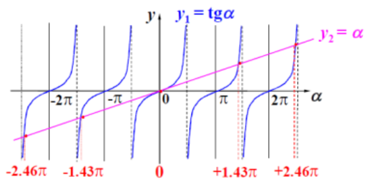
$\theta=0,\alpha=0,\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1, A_0=NA_1$ 即中央明纹中心处的振幅　　$A_p=\frac{A_0\sin\alpha}{\alpha}$

又有 $I\propto A_p^2, I_0\propto A_0^2$　　　**P 点光强**：$I_P=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$　　$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$

由于：$\alpha=\frac{\delta}{2}=\frac{N\Delta\varphi}{2}=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$ $A_p=OB=2R\cdot\sin(\alpha)$　　$\widehat{OB}=A_0=R\bullet 2\alpha$

$$A_p = \widehat{OB}\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = A_0\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \qquad I_p = A_p^2, I_0 = A_0^2$$

条纹位置　　由$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$**可得：**



主极大位置（中央明纹中心）　$\theta = 0, \alpha = 0 \to \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \to I = I_0 = I_{max}$

极小位置（暗纹）：　$\alpha = \pm k\pi$, $k = 1,2,3\ldots$时，$\sin\alpha = 0 \to I = 0$

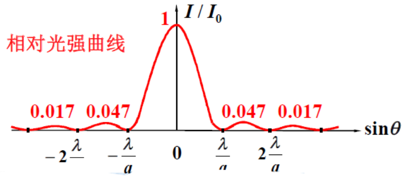
$$\left.\begin{aligned}&由\ \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = \pm k\pi \to a\sin\theta = \pm k\lambda\\&由\quad N\Delta\varphi = \pm 2k\pi \to a\sin\theta = \pm k\lambda\end{aligned}\right\}一致$$

正是缝宽分为偶数个半波带的情形

次极大位置：　满足$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \to \mathrm{tg}\alpha = \alpha$ 解得：$\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots$

光强：　将各个次极大位置代入光强公式 $I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$得到

从中央往外各次极大的光强依次如图，且$I_{次极大} \ll I_{主极大}$



例题

1. 一束波长为$\lambda = 5000\text{Å}$的平行光垂直照射在一个单缝上。
(1)已知单缝衍射的第一暗纹的衍射角$\varphi_1 = 30°$,求该单缝的宽度a
(2)如果所用的单缝的宽度$a = 0.5\text{mm}$,缝后紧挨着的薄透镜焦距 $f = 1\text{m}$,求(a)中央明条纹的角宽度;(b)中央亮纹的线宽度;(c)第一级与第二级暗纹的距离。

① 有$a\sin\varphi = \pm k\lambda(k = 1,2,3\ldots)$　则有第一级暗纹$k = 1, \varphi_1 = 30°$，$a = \frac{\lambda}{\sin\varphi_1} = 0.5 \times 2 = 1.0\mu m$

② 1. $-\frac{\lambda}{a} < \sin\ \varphi < \frac{\lambda}{a}\Delta\varphi_0 \approx \frac{2\lambda}{a} = 2 \times \frac{0.5\mu m}{0.5\times 10^3\mu m} = 2 \times 10^{-3}rad$

2. $\Delta x_0 \approx f\Delta\varphi_0 = 2 \times 10^{-3}m = 2mm$

3. $\Delta x_{21} \approx f\left(\frac{2\lambda}{a} - \frac{\lambda}{a}\right) = 1 \times (2 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-3})m = 1mm$

2. 在单缝夫琅禾费衍射实验中,用单色光垂直照射单缝,已知入射光的波长为630nm,测出第五级暗条纹对应的衍射角为1.8°。(sin1.8°=0.0315)　1、求出缝宽 a 等于多少?　2、在焦距f等于1m的凸透镜焦平面上观察衍射条纹,则中央明条纹宽度是多少?　3、第一级明条纹的宽度是多少?

① 单缝衍射各级次暗纹：$a\sin\ \theta_k = \pm k\lambda(k = 1,2,3,\cdots)$　　当$k = 5$ 时

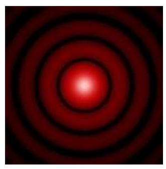
$$a = \frac{5\lambda}{\sin\theta_s} = \frac{5\times 6.30\times 10^{-7}}{\sin 1.8°} = 10^{-4}\text{m} = 0.1\text{mm}$$

② 第一级暗纹所对应的衍射角 $\theta_1 \approx \sin\ \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$　　所以中央明条纹线宽度 $\Delta x \approx f \cdot 2\theta_1 \approx f \cdot \frac{2\lambda}{a} = 12.6mm$

③ 第二、一级暗纹所对应的衍射角分别为 $\theta_2 \approx \sin\ \theta_2 = 2\frac{\lambda}{a}\theta_1 \approx \sin\ \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$

所以第一级明条纹宽度 $\Delta x_1 \approx f \cdot (\theta_2 - \theta_1) = f(\frac{2\lambda}{a} - \frac{\lambda}{a}) = f\frac{\lambda}{a} = 6.3mm$

14.2.2 圆孔夫琅禾费衍射



条纹　明暗相间同心圆环，**中心为亮斑**(艾里斑)

中央亮纹集中大部分能量，角宽度为其余亮纹两倍。半角宽度：$1.22\frac{\lambda}{D}$

艾里斑半径$r = f\varphi_0 = 1.22\frac{\lambda f}{D}$　D为圆孔直径

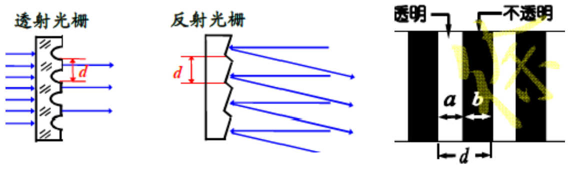
14.3 衍射光栅

光栅　大量等宽等间距的平行狭缝或反射面构成的光学元件

其具有**透射光栅**和**反射光栅**两种。

光栅常数 $\boldsymbol{d=a+b}$，通常为$10^{-6}m$的数量级。

透光：$\boldsymbol{a}$　　刻痕：$\boldsymbol{b}$　　$\boldsymbol{d}$越小，性能越好。

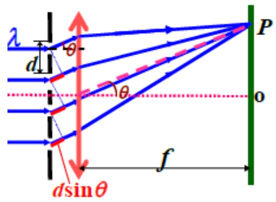


光栅衍射同时包含单缝衍射和缝间子波相互干涉两种因素。

缝数很多，缝间干涉形成一系很细的干涉明纹，各明纹的极值受到单缝衍射因素的调制。

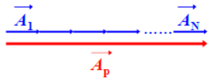
光栅光强分布公式（矢量法）

模型　设光栅有N条缝，每相邻两缝相同位置处向P_θ点发出的衍射线的光程差相同



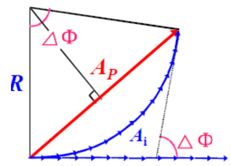
光程差为：$\delta = d\sin\,\theta \longrightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$　　$\beta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$

推导　P_θ处是N个同方向、同频率、同振幅、位相差依次差一个恒量$\Delta\varphi$的简谐振动的合成,合成的结果仍为简谐振动——N个矢量相加。

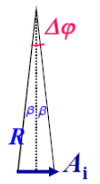


对于O点：$\theta=0, \Delta\varphi=0$　$A_\text{p} = NA_\text{i} \longrightarrow I_\text{p} = N^2 I_0$

对于其他 P 点：$\Delta\varphi \neq 0$　$\vec{A}_p = N\sum_i \vec{A}$　　当$N\to\infty$时，变为一个圆弧



有 $\Delta\Phi = N\Delta\varphi$　　$\Delta\varphi = \frac{d\sin\,\theta}{\lambda}2\pi$　　$A_\text{p} = 2R\sin\frac{\Delta\Phi}{2}$　　$\begin{cases} A_\text{i} = A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha} \\ \beta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d\sin\,\theta}{\lambda} \end{cases}$



有$R = \frac{\frac{A_i}{2}}{\sin\frac{\Delta\Phi}{2}}$　　则$A_p = 2\frac{\frac{A_i}{2}}{\sin\frac{\Delta\phi}{2}}\sin\frac{N\Delta\phi}{2} = A_i\frac{\sin N\beta}{\sin\beta} = A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$

光强情况　$\boldsymbol{I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$ 单缝衍射因子 $\boldsymbol{\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2}$ 多缝干涉因子　　$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$　a狭缝宽度　$\beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$

① 明纹(主极大)　当$\beta = \pm k\pi \to \frac{\sin N\beta}{\sin\beta} = N$时，干涉取极大值。又有$\beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$

光栅方程：$\boldsymbol{d\sin\theta = k\lambda, k = 0, \pm1, \pm2 \ldots\ldots}$

主极大时，$\Delta\varphi = 2\beta = \pm 2k\pi$　**光强为：$\boldsymbol{I = N^2 I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$**

② 暗纹(干涉极小)　$\sin\beta \neq 0$　$\sin N\beta = 0$　$N\beta = \pm k'\pi$　$k' = 1,2,\cdots$　$\beta = \pm\frac{k'}{N}\pi$　$k' \neq N, 2N, 3N, \cdots$

方程：$d\sin\,\theta = \pm\frac{k'}{N}\lambda = \pm\left(k + \frac{m}{N}\right)\lambda$　　$\begin{matrix} k = 0,1,2\ldots \\ m = 1,2\ldots N-1 \end{matrix}$

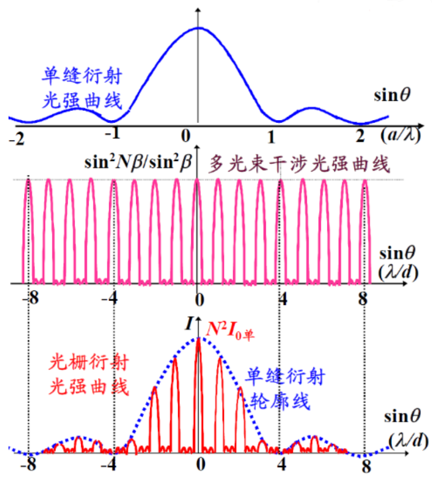
相邻主极大之间有$\boldsymbol{N-1}$个暗纹

③ 次极大　**相邻两个极小之间应该有一个次极大（光强太弱，无法观察）**

$\boldsymbol{N-1}$个极小之间应该有$\boldsymbol{N-2}$个次极大

缺级现象　$d\sin\,\varphi = \pm k'\lambda$　$k' = 0, \pm1, \pm2 \ldots$
$a\sin\,\varphi = \pm k\lambda$　$k = \pm1, \pm2, \ldots$　$\rightarrow$ $\boldsymbol{k' = k\frac{d}{a} =}$ **整数**　$\boldsymbol{k'}$**为缺级**

$\boldsymbol{d}$一定时，缝数越多，条纹越尖细、明亮



衍射光谱　白光照射光栅时，中央亮条纹仍呈现白色

中央亮条纹两侧形成光栅光谱。由于λ不同，按波长分开形成光谱。

例题

1. 已知$\lambda = 546nm$，$a = 0.437mm, f = 40cm$，求中央明纹宽d以及 2 级暗纹至三级暗纹的间距Δx

   对 1、2、3 级暗纹有：$sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$　$sin\theta_2 = 2\frac{\lambda}{a}$　$sin\theta_3 = 3\frac{\lambda}{a}$　　又有$\theta \approx \sin\theta \approx tg\theta$

   $d = 2f\ tg\theta_1 \approx 2f\theta_1 = 2f\frac{\lambda}{a} = 1mm$　　$\Delta x = ftg\theta_3 - ftg\theta_2 \approx f(\theta_3 - \theta_2) = f\frac{\lambda}{a}(3-2) = f\frac{\lambda}{a} = d/2 = 0.5mm$

2. 一束波长为$\lambda = 5000\mathring{A}$的平行光垂直照射在一个单缝上。$a = 0.5mm, f = 1m$,如果在屏幕上离中央亮纹 中 心 为$x = 3.5mm$处的$P$点为一亮纹，试求该$P$处亮纹的级数

   $a\sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$亮纹　　$\sin\varphi \approx tg\varphi \approx \varphi = \frac{x}{f}$　　$k = \frac{ax}{\lambda f} - \frac{1}{2} = 3$

3. 用波长为589.3 nm的平行钠黄光垂直照射光栅,已知光栅上**每毫米中有 500 条刻痕**,且刻痕的宽度与其间距相等。求最多能观察到几条亮条纹?并指出哪些主极大缺级。并求第一级谱线和第三级谱线的衍射角

   则光栅常数为：$d = \frac{1.00\times10^{-3}}{500}\mathrm{m} = 2.00\times10^{-6}\mathrm{m}$　　由于刻痕宽度与其间距相等，则有$d = 2a$

   由光栅方程：$d\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = k_{max}\lambda$ 得到$k_{max} = \pm3.4$　（$\sin\theta$极值为 1）取整数为 ±3

   表明在无限大接收屏上可以出现的k值为$0, \pm1, \pm2, \pm3$一共七条谱线

   同时考虑**缺级情况**：缺级的主极大级次为：$k = \frac{d}{a}k' = 2k'\ (k' = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$

   则k等于±2级缺级。所以一共可以出现$0, \pm1, \pm3$共5条谱线。

   同时，有 $d\sin\theta = k\lambda \Rightarrow \sin\theta = \frac{k\lambda}{d}$　代入则可。

4. 波长 6000 单色平行光垂直入射一光栅，测得第二级主极大衍射角为 30°，且第三级缺级。求① 光栅常数 d 和透光缝可能的最小宽度a ② 在屏幕上可能呈现的主极大级次。

   有$d\sin\theta = k\lambda$　　$k = \frac{d}{a}k'$ 由于第三级缺级，所以$\frac{d}{a} = 3$　又有$d\sin30° = 2\times6000\times10^{-10}$

   则可能有$d = 2.4\times10^{-6}$，$a_{min} = \frac{d}{3} = 8\times10^{-7}$　　主极大：$k_{max} = \frac{d}{\lambda} = \pm4$ 则为$0, \pm1, \pm2, (\pm4)_{实际不可见}$

5. 用一束具有两种波长的平行光垂直入射在光栅上，$\lambda_1 = 600\mathrm{nm}\lambda_2 = 400\mathrm{nm}$, 发现距中央明纹 5cm 处 λ_1 光的第k级主极大和λ_2 光的第$(k+1)$级主极大相重合，放置在光栅与屏之间的透镜的焦距$f = 50$ cm,试问:
   1. 上述k　　2. 光栅常数d

   则有 $d\sin\varphi = k\lambda_1 = (k+1)\lambda_2 \Rightarrow k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 2$　　因为 λ_1光的第 2 级主极大位于$x = 5$cm 处

   则 $\mathbf{tg}\varphi_2 = \frac{x_2}{f} = \frac{0.05}{0.5} = 0.1 \approx \sin\varphi_2$　　即$d\sin\varphi_3 = 2\lambda_1 \to d = \frac{2\lambda_1}{\sin\varphi_3} \approx \frac{2\lambda_1}{\log\varphi_3} = \frac{2\times6\times10^{-7}}{0.1} = 1.2\times10^{-5}\mathrm{m}$

6. 一衍射光栅, 每厘米 200 条透光缝, 每条透光缝宽为 $2\times10^{-3}cm$, 在光栅后放一焦距$f = 1m$的凸透镜, 现以$\lambda = 600nm$的单色平行光垂直照射光栅, 求: (1)透光缝a的单缝衍射中央明条纹宽度为多少? (2)在该宽度内, 有几个光栅衍射的主极大?

   ① 由$a\sin\varphi_{1暗} = 1\lambda$　得到单缝衍射第一级暗纹：$\varphi_{1暗} \approx \mathrm{tg}\varphi_{1暗} \approx \sin\varphi_{1暗} = \frac{\lambda}{a} = \frac{6\times10^{-7}}{2\times10^{-5}} = 0.03$

   所以中央明纹线宽度：$\Delta x_{中央} = 2f\cdot\mathbf{tg}\varphi_{1暗} \approx 2f\frac{\lambda}{a} = 2\times1\times0.03 = 0.06(\mathbf{m}) = 6(\mathbf{cm})$

   ② 光栅常数$d = \frac{1}{200}(\mathrm{cm}) = 5\times10^{-5}(\mathrm{m})$　由光栅方程 $d\sin\varphi = k\lambda$,得 $k = \frac{d\sin\varphi}{\lambda}$

   所以在单缝中央明纹区域内,光栅衍射主极大　$k \le \frac{d\sin\varphi_{1暗}}{\lambda} = \frac{5\times10^{-5}\times0.03}{6\times10^{-7}} = 2.5$

   所以一共有五条