

第十一章 电流和恒磁场

11.1 恒定电流条件和导电规律

11.1.1 电流强度和电流密度 electric current & density

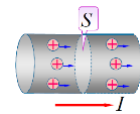
截留子 金属导体中的带电粒子

正截留子 流动方向为电流之方向

电流强度 $I = \frac{dQ}{dt}$ 单位时间通过导体截面的电量 其为标量,有正负之分 **单位:** $1A = 10^3mA = 10^6\mu A$

导体均匀情况 $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{nev_dV}{dt} = \frac{nev_d dS}{dt} = nev_d S$ 其中 v_d 为电子漂移速度大小

n 自由电子数密度 在时间间隔 dt 内, 圆柱体内自由电子的通过量

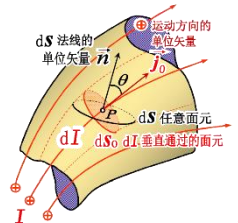


电流密度 **定义式** $\vec{j} = \frac{dI}{dS_0} \vec{j}_0$ 即 P 点处的电流密度矢量 **大小:** $j = \frac{dI}{dS_0} = \frac{dI}{dS \cos \theta}$ **方向:** \vec{j}_0 方向

单位: $A \cdot m^{-2}$ **意义:** 描述电流分布的物理量

定义: 在导体中任意一点的方向与**正截流子**在该点流动方向相同

大小等于通过该点并**垂直**于电流的**单位截面**电流强度



电流强度与电流密度关系 $I = \iint_S dI = \iint_S j \cos \theta dS = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ 通过导体中任一曲面 S 的电流强度

电流场 由电流密度和电通量($\Phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$)的关系式比较, 可知 I 和 j 的关系也是通量和其矢量场的关系

则有电流的导体中, 每一点都具有一定大小和方向的电流密度矢量, 构成矢量场, 称其为**电流场**

电流线 形象描述电流场中电流的分布, 规定曲线切线方向为 j 的方向

电流管 由电流线围成的管状区域为电流管。恒定电流时, 通过同一电流管任一横截面的电流相等。

11.1.2 电流的连续性方程和恒定电流条件

电流连续性方程 导体内任取一闭合曲面 S, 根据**电荷守恒**, 单位时间由 S 流出电量必定等于同时 S 所包围电量减少

积分形式 $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$ 以体电荷形式分布 $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_\tau \rho d\tau$

微分形式 $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 在曲面 S 所包围的体积 τ 内积分 $\iiint_\tau \nabla \cdot \vec{j} d\tau = -\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$

恒定电流 即电流场不随时间变化的电流, 由分布不随时间变化的电荷所激发的电场叫恒定电场

积分形式: $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ **微分形式:** $\nabla \cdot \vec{j} = 0$

恒定电流场中过任意闭合曲面的电流必定等于 0. 恒定电场的电流线必定是头尾相接的闭合曲线。

库仑电场 恒定电场是由运动的而不随时间变化的电荷所激发的, 遵从高斯定理和环路定理, 恒定电场与静电场具有相同的性质, 通称为库仑电场

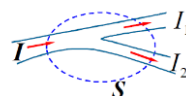
注意 1. 恒定电流的电路必须闭合

2. 由恒定电流条件可得结论 $-I + I_1 + I_2 = 0$

3. 导体表面的电流密度矢量无法向分量

4. 对一段无分支的稳恒电路, 其各横截面的电流强度相等

5. 在电路的任一节点处, 流入的电流强度之和等于流出节点的电流强度之和 (**节点电流定律 基尔霍夫第一定律**)



恒定电场 1. 在恒定电流条件下, 导体中的电荷分布不随时间变化形成恒定电场

2. 恒定电场与静电场**具有相似性质**, 恒定电场中可以**引入电势概念**

3. 恒定电场的存在**伴随着能量的转换**

- 比较**
- ① 静电场产生电场的电荷始终固定；恒定电场电荷分布不随时间改变但伴随电荷的定向移动
 - ② 静电场静电平衡,导体内 $E = 0$,导体表面等势；恒定电场导体内 $E \neq 0$,导体内任意两点不等势
 - ③ 静电场电场有保守性,是保守场；恒定电场也是保守场
 - ④ 维持静电场无需能量转换；维持稳恒电场需要能量转换

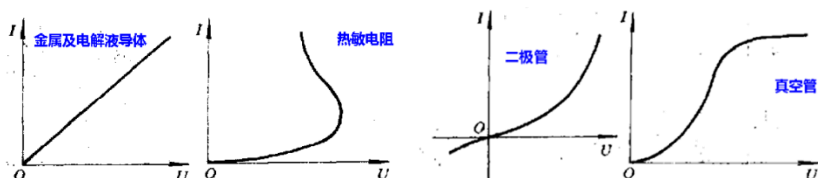
11.1.3 导体电阻 resistance of conductor

基本定义 两端电势差与电流之比 $R = \frac{U}{I}$ 单位: 欧姆 Ω $1\Omega = 1V \cdot A^{-1}$

电导 电阻的倒数,用G表示 单位: 西门子S $1S = 1\Omega^{-1}$

伏安特性曲线 电势差为横坐标,电流为纵坐标。金属和电解液导体的曲线是一条过原点的直线。具备该性质的电阻为线性电阻或欧姆电阻,这种器件称为线性器件。

典型曲线



11.1.4 导体电阻率 resistivity of conductor

基本定义 电场强度E大小与同点电流密度j大小之比 $\rho = \frac{E}{j}$ $R = \rho \frac{l}{S}$

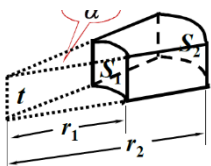
金属材料电阻率 具体电阻率取决于材料本身性质。有 $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$, 其中 α 为电阻温度系数
故有 $R = R_0(1 + \alpha t)$, 可制成电阻温度计 (纯金属线膨胀系数很小, 可忽略长度截面变化)

单位 欧姆米 $\Omega \cdot m$

电导率 电阻率的倒数,用 σ 表示 $\sigma = 1/\rho$ 单位: 西门子/米 $S \cdot m^{-1}$

超导 某些材料电阻率在特定温度 T_c 以下减小到接近0的现象,处于超导状态的材料叫超导体
其中, T_c 称超导转变温度,其随具体材料变化。

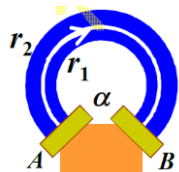
例题 1. 有扇形电极厚t, 电流从半径为 r_1 的端面 S_1 流向半径为 r_2 的端面 S_2 , 扇形张角 α , 求 S_1S_2 之间的电阻



$$有 dR = \rho \frac{dl}{dS} = \rho \frac{dr}{\alpha r t} \quad R = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dr}{\alpha r t}$$

$$则 R = \frac{\rho}{\alpha t} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

2. 碳膜电位器: 绝缘基片,厚为t, 内外半径为 r_1, r_2 的一层碳构成。A/B为引出端, 张角 α , 求AB间电阻
A、B间电阻可视为由若干不同长度截面相同的电阻并联而成。(电导率已知)



$$电导为 dG = \sigma \frac{dS}{l} = \sigma \frac{t dr}{\alpha \cdot r} \quad 则 G = \int_{r_1}^{r_2} \sigma \frac{t dr}{\alpha \cdot r} = \sigma \frac{t}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$则 R = \frac{1}{G} = \frac{\alpha}{\sigma t} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

11.1.5 欧姆定律 Ohm's law

定律内容 R是与U和I无关的常量,即 $I = U/R$ 其反映了金属导体导电的基本特性
电阻是常量,电流和电势差成正比(适用于金属导体、电解液和熔融盐)

微分形式 取长为 dl , 截面积为 dS 的细电流管。设两端电势差为 dU

$$则 dI = \frac{dU}{R} \quad R = \frac{\rho dl}{dS} \quad dI = \frac{1}{\rho} \frac{dU}{dl} dS \quad \frac{dI}{dS} = \frac{1}{\rho} \frac{dU}{dl} = \frac{1}{\rho} E = \sigma E$$

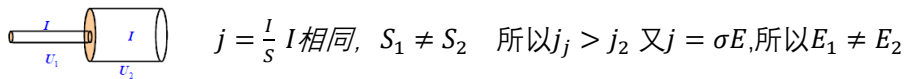
则 $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}$ 其反映了金属导体中任意一点上j和E的关系,适用于恒定电流和变化电流

注意 对于一般金属或电解液,欧姆定律在相当大电压范围内成立。但对于许多导体和半导体欧姆定律不成立

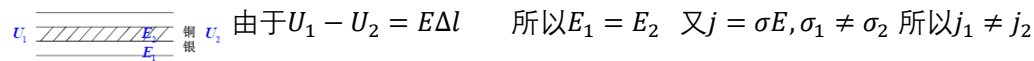
典型模型

① 电流是电荷流动，在 $j=0$ 的地方，电荷体密度不一定为零（在静电场中， $j=0$ ， $\rho \neq 0$ ）

② 两截面不同的铜棒接在一起，两端加有电压，探讨 j 、 E 的情况。

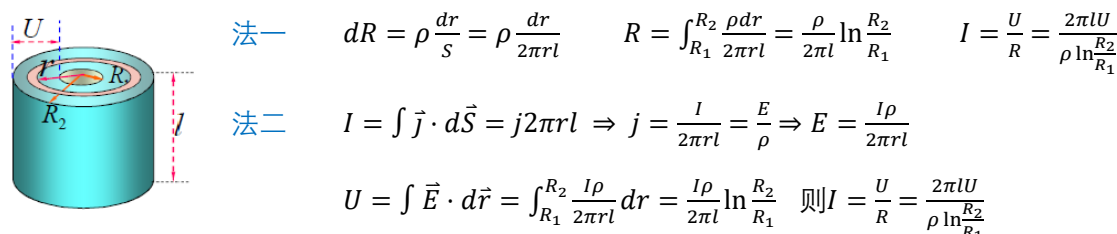


③ 铜棒外围裹有银圈，问铜棒中和银棒中的 j 、 E 情况。



例题

1. 有金属圆筒 (R_1, R_2)，长度 l 电阻率 ρ ，若已知筒内外电势差 U ，且内缘电势高，求径向电流强度。



2. 上下两层电导率为 σ_1, σ_2 的均匀导电介质，厚度为 d_1, d_2 ，截面积 S ，通过电流强度为 I ，求分别场强与电势差。

$$\text{由 } I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \text{ 得: } I = j \cdot \Delta S \quad j_1 = \sigma_1 E_1 \quad j_2 = \sigma_2 E_2 \quad j = \frac{I}{\Delta S}$$

11.1.6 电功率和焦耳定律 electric power & Joule's law

电功 在电路中电场力所作的功称为电流的功 $dA = dqU = IUdt$ (U 从 A 到 B 点电势降落)

电功率 $P = \frac{dA}{dt} = UI$

焦耳定律 如果电势能的降低全部转化为热能

数学表达式 $Q = A = I^2 R t$ $P = I^2 R$ 可应用于纯电阻与非纯电阻

热功率密度 在点流场中一根细电流管运用焦耳定律，得到 $\Delta P = I^2 R = (j \Delta S)^2 \left(\frac{\rho \Delta l}{\Delta S} \right) = j^2 \rho (\Delta l \Delta S) = j^2 \rho \Delta \tau_{\text{体积}}$

单位导体体积的热功率即为 **热功率密度** $p = \sigma E^2$ **焦耳定律微分形式**

11.1.7 电动势 electromotive force

电源 在导体中有稳恒电流流动不能单独依靠静电场，必须有 **非静电力** 把正电荷从负极移动到正极，才能在导体两端维持稳恒电势差。**这种提供非静电力的装置就是电源**。电源是把能量转换为电能的装置，静电力使正电荷从高电位到低电位。非静电力使正电荷从低电位到高电位。

内电路 电源内部电流从负极→正极

非静电性电场电场强度 使用 K 表示，即 **单位正电荷所受的非静电力**

在电源内部，内电路电荷同时受到恒定电厂和非静电性电场的作用，而在外电路中仅受到恒定电场作用因此，在电荷 q 沿电路运行一周的过程中，各种电场所作的总功为

$$A = \int_+^- q \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_-^+ q (\vec{E} + \vec{K}) \cdot d\vec{l} = \oint q \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_-^+ q (\vec{K}) \cdot d\vec{l} \text{ 遵从环路定律，化为 } A = q \int_-^+ q (\vec{K}) \cdot d\vec{l}$$

电源电动势 记为 ε ，定义为 **单位正电荷** 沿闭合电路运行一周 **非静电力** 所作的功

表征电源将其他形式能量转化为电能的本领

$$\varepsilon = \frac{A}{q} = \int_-^+ \vec{K} \cdot d\vec{l} \quad \varepsilon \text{ 是标量，可取正、反两个方向。规定从负极经电源到正极的方向为电动势方向}$$

注意 非静电性电场只存在于电源内部，其方向沿着电源内部从负极指向正极。考虑一般情形，非静电性

电场可能存在于整个电路，于是有 $\varepsilon = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l}$

11.2 磁场和磁感应强度

11.2.1 磁现象

磁极 磁铁磁性最强区域, 磁铁指向北方的磁极为**磁北极** (N 极), 指向南方为**磁南极** (S 极)
磁石同极相斥, 异极相吸

磁现象 有天然磁体周围磁场、载流导线磁场、电子束周围磁场
载流导线能偏转磁针、磁场给导线力的作用、导线之间有力的作用、载流线圈之间有力的作用

分子电流 电荷的运动是一切磁现象的根源, 运动电荷产生磁场, 磁场对运动电荷有磁力作用

11.2.2 磁感应强度 magnetic induction

磁场对外重要表现 1. 磁场对处于场中的运动电荷(载流导体)有磁力作用【力的角度】
2. 载流导体在磁场中移动时, 磁力将对载流导体做功, 表明磁场具有能量【能量角度】

零力线 带电粒子所受力与其运动方向有关。**实验发现带电粒子在磁场中沿某一特定直线方向运动时不受力**, 此直线方向与电荷无关

磁感应强度 带电粒子在磁场中沿其他方向运动时, \vec{F} 垂直于 \vec{v} 与零力线组成的平面。

当带电粒子在磁场中垂直于此零力线运动时, 受力最大。 $F_{max} \propto qv$

定义 当正电荷垂直于零力线运动时, 受力 \vec{F}_{max} , 将 $\vec{F}_{max} \times \vec{v}$ 方向定义为该点磁感强度 \vec{B} 的方向(零力线方向)

大小 $B = \frac{F_{max}}{q_0 v_{\perp}}$ 运动电荷磁场中受力(洛伦兹力) $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

单位 特斯拉 $1T = 1N/A \cdot m$ 高斯 $1T = 10^4 G$

方向 $\vec{F}_m \times \vec{v}$ 正电荷运动方向 满足右手螺旋: **食指磁场 B、中指电荷速度、拇指正电荷受力方向**

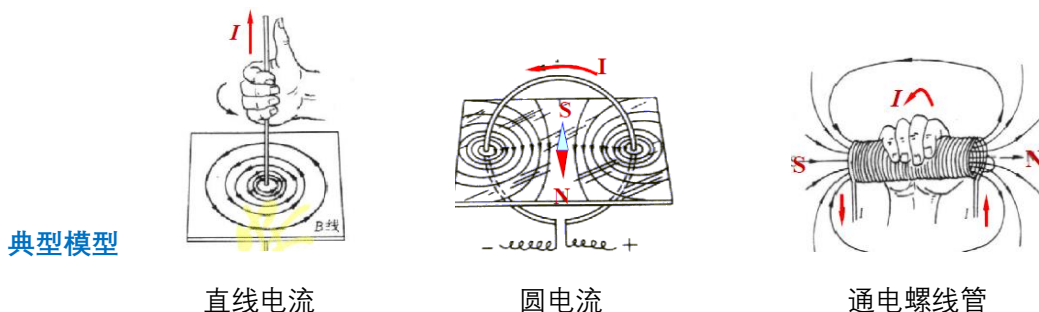
量纲 $[B] = \frac{[F_m]}{[q][v]} = \frac{N}{C \cdot m/s} = T$

例子 1. B 方向垂直纸面向里, F 水平向右, 正电荷: 则向下
2. B 方向垂直纸面向外, V 水平向右, 负电荷: 则向上
3. F 方向向上, v 方向向左, 负电荷, 则垂直纸面向里

11.2.3 磁感应线和磁通量 magnetic induction line & magnetic flux

磁力线 **磁感应线形象表示磁场分布状况**, 曲线上切线方向与 B 方向一致; 在与磁场垂直的单位面积上穿过曲线的条数, 与该处 B 的大小成正比, 即**疏密程度反应 B 的大小**。

磁感应管 一簇磁感应线围成的管状区域



典型模型

直线电流

圆电流

通电螺线管

注意 1. 每条磁力线是环绕电流的闭合曲线, 都与闭合电路互相套合。**磁场是涡旋场。磁线是无头无尾闭合回线**
2. 任意两条磁力线在空间不相交。
3. 磁力线环绕方向与电流方向之间可用**右手定则**表示

磁通量 通过某一曲面的磁感线数. 由于磁力线是闭合线, 如果是环积分则为零 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 。

公式 $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ **单位:** 韦伯 $1Wb = 1T \times 1m^2$

推导 $\phi = BS \cos \theta = BS_{\perp}$ $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{e}_n S$ $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ $d\phi = B ds \cos \theta$

11.2.4 磁场中的高斯定理

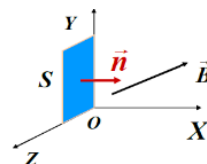
定理公式 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 物理意义: 通过任意闭合曲面的磁通量必定等于零 (故磁场无源)

微分形式 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0$ 故有 $\text{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} \Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0$ or $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

典例 1. 求均匀磁场中半球面的磁通量 $\phi_{S1} = B\pi R^2$

2. 在均匀磁场 $\vec{B} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ 中, 过 YOZ 平面内面积为 S 的磁通量

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot S\vec{i} = 3S$$



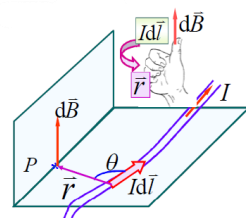
11.3 比奥-萨法尔定律

11.3.1 稳恒电流磁场

磁场微元 $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$ 其中真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$

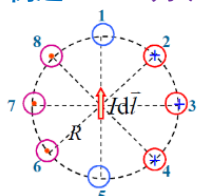
方向判断 $d\vec{B}$ 方向垂直于电流元 $I d\vec{l}$ 与 \vec{r} 组成的平面, $d\vec{B}$ 和 $I d\vec{l}$ 及 \vec{r} 三矢量满足矢量叉乘关系

磁场强度 $\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$ (磁感强度叠加原理) 拇指电流方向, 四指自然弯曲



比奥萨伐尔定律 $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2}$

例题 1. 判断下列各点磁感应强度的方向和大小



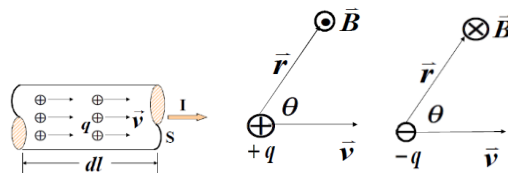
点 1、5: $dB = 0$

点 3、7: $dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}$

点 2、4、6、8: $dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2} \sin 45^\circ$

11.3.2 运动电荷 (电流) 的磁场

磁场强度 $\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$ 有电流元 $I d\vec{l}$, 已知 $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$



其中 $I = q \text{ 电荷 } n \text{ 密度 } v \text{ 速率 } S \text{ 截面积}$, 载流子总数 $dN = n S dl$ $B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0 q v \sin(\vec{v}, \vec{r})}{4\pi r^2}$

11.3.3 典型模型

1. 载流直导线磁场

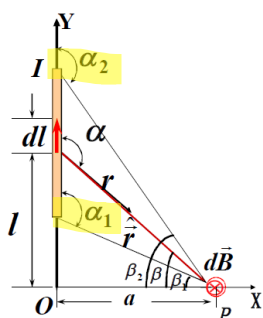
已知有真空中 I, α_1, α_2, a , 建立有坐标系 OXY

任取电流元 $I d\vec{l}$, 大小 $dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$, 方向 $I d\vec{l} \times \hat{r}$, 则 $\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$

统一积分变量: $l = a \tan(\pi - \alpha) = -a \cot \alpha$ $dl = a \csc^2 \alpha d\alpha$ $r = a / \sin \alpha$

则 $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I dl \sin \alpha}{r^2} = \int \frac{\mu_0 \sin^2 \alpha}{4\pi a^2} I \sin \alpha \frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0}{4\pi a} I \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$



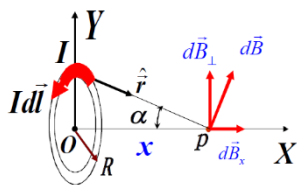
① 无限长载流直导线 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$ $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ 非匀强场

② 半无限长载流直导线 $\alpha_1 = \pi/2, \alpha_2 = \pi$ $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$ 注意场点位置, 据题调整 α

③ 直导线延长线上一点 $\alpha = 0, a = 0, dB = 0$ $B = 0$

2. 圆形电流轴线上磁场

已知有 R, I , 求轴线上 P 点的磁感应强度。建立有坐标系 OXY



任取电流元 $Id\vec{l}$, 大小 $d\vec{B} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}$, 方向 $Id\vec{l} \times \hat{r}$, 则分析对称性, 可写出分量式

$$\vec{B}_{\perp} = \int d\vec{B}_{\perp} = 0 \quad B_x = \int dB_x = \int \frac{\mu_0 Idl \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad \text{统一积分变量} \sin \alpha = R/r$$

$$B_x = \int dB_x = \int \frac{\mu_0 Idl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \int dl = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

大小: $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$ 方向: 右手螺旋法则

① $x \gg R$ $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2x^3}$

② $x = 0$ 载流圆环 圆心角 $\theta = 2\pi$ $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ 圆心处磁场

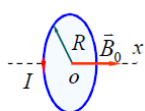
载流圆弧 圆心角 θ $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{\theta}{2\pi}$

③ 多匝 单匝: $B_{1\text{匝}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$ N 匝: $B_{N\text{匝}} = N \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$

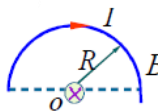
④ 面积表示 $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2 \pi}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}$

一匝磁矩: $\vec{m} = I \cdot \vec{S} = I \cdot S \cdot \hat{s}$ $B_{1\text{匝}} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}$ N 匝磁矩: $\vec{m} = NI \cdot \vec{S} = NI \cdot S \cdot \hat{s}$ $B_{N\text{匝}} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}$

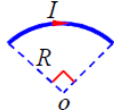
3 典型模型总结



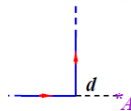
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$



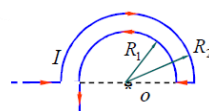
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

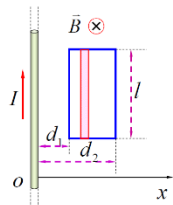


$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$$

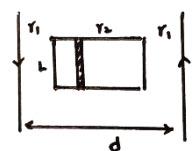
例题 1. 如图载流长直导线电流为 I , 试求通过矩形面积的磁通量。



先求出 \vec{B} , 对磁场给出 $d\Phi$ 后积分求 Φ . 选择小窄条为面元

$$\text{有 } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad d\Phi = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} L dx \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{x} dx = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}$$

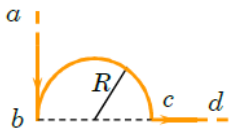
2. 两平行长直导线相距 d , 每根导线 I , 方向相反, 求 ① 两条线所在平面内与两导线等距的一点 P 处的 \vec{B} ② 通过图中矩形面积 (线框长 r_2 , 宽 L , 距离导线为 r_1) 的磁通量 Φ_m



① 场是叠加的。 $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \otimes$ $B_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \otimes$ 则 $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi d} \otimes$

② 取竖直 dS , $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}$ 有 $d\Phi = B dS = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r_1}^{r_1+r_2} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(2r_1+r_2-x)} \right) L dx$

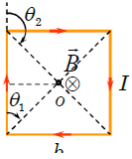
3. 计算组合载流导体在o点的B



可见 o 点 B 由三段载流导体产生: $\vec{B}_0 = \vec{B}_{ab} + \vec{B}_{bc} + \vec{C}_{cd}$ 规定垂直纸面向里为正向

$$B_0 = -B_{ab} + B_{bc} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R} = \frac{\mu_0 I}{4R} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$$

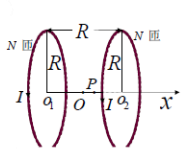
4. 有正方形载流线圈边长为b, 通有电流I, 求中心B



$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 4B_1 \quad \text{有 } \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$B = 4 \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi b}$$

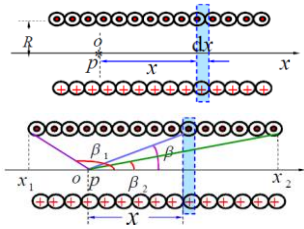
5. 亥姆霍兹线圈: 两个完全相同的N匝共轴密绕短线圈, 其中心间距与线圈半径R相等, 通有同向平行等大电流I. 求轴线上o₁·o₂之间任一点P的磁场。



$$B_P = \frac{\mu_0 N I R^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{R}{2} + x \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 N I R^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{R}{2} - x \right)^2 \right]^{3/2}} \quad \text{可以发现 } B_o = 0.72 \frac{\mu_0 N I}{R} \quad B_{o1} = B_{o2} = 0.68 \frac{\mu_0 N I}{R}$$

因此, 其在实验室中用作近似均匀磁场。

6. 载流直螺线管磁场: 一长为l, 半径为R的载流密绕直螺线管, 总匝数N, 通有电流I. 将螺线管置于真空中, 求管内轴线上任意一点的磁感强度。



由圆形电流磁场公式 $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$, 取竖直的某一匝为微元

$$\text{则 } dB = \frac{\mu_0 R^2 (I \times n \times dx)}{2 (x^2 + R^2)^{3/2}} \quad x = R \cot \beta, \quad dx = -R \csc^2 \beta d\beta, \quad R^2 + x^2 = R^2 \csc^2 \beta$$

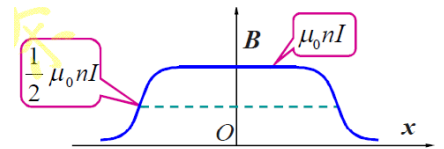
$$B = \int dB = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{R^3 \csc^2 \beta d\beta}{R^3 \csc^3 \beta} = -\frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta \quad \text{则 } B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

讨论 ① P 点位于管内轴线中点 则 $\beta_1 = \pi - \beta_2$ $\cos \beta_1 = -\cos \beta_2$ $\cos \beta_2 = \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + R^2}}$

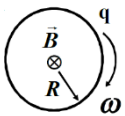
$$B = \mu_0 n I \cos \beta_2 = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{l}{(l^2/4 + R^2)^{1/2}} \quad \text{若 } l \gg R, \text{ 则 } B = \mu_0 n I$$

② 无限长螺线管 $B = \mu_0 n I$

③ 半无限长螺线管 则 $\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_2 = 0, B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$



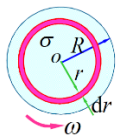
7. 旋转均匀带电圆环: 已知q, R, omega, 求圆心处B



带电体转动, 形成运流电流。

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q}{2\pi/\omega} = \frac{q\omega}{2\pi} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 q\omega}{4\pi R}$$

8. 均匀带电圆盘旋转: 已知sigma, R, omega, 求圆心处B



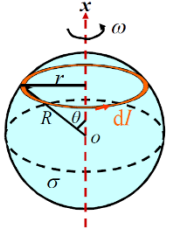
法一: 如图取半径为r, 宽为dr环带。则微元 $dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} dq$ $dq = \sigma ds = 2\pi\sigma r dr$

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr \quad \text{方向} \begin{cases} \sigma > 0, \text{向外} \\ \sigma < 0, \text{向内} \end{cases} \quad \text{则 } B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$$

法二: 运动电荷磁场有 $dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq v}{r^2} dq = \sigma ds = 2\pi\sigma r dr$ $dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr$

$$v = \omega r \quad B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$$

9. 旋转均匀带电球面: 已知 R, σ, ω , 求球心 B

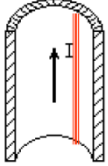


旋转带电球面等效于多个环形电流叠加。取半径为 r 的环带: $dq = \sigma ds = \sigma 2\pi r R d\theta$

等效圆电流: $dI = \frac{\omega dq}{2\pi} = \sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta$ $dB = \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma R^2 \omega \sin \theta d\theta R^2 \sin^2 \theta}{2R^3} = \frac{R}{2} \mu_0 \sigma \omega \sin^3 \theta d\theta$

$B = \int dB = \frac{R}{2} \mu_0 \sigma \omega \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \mu_0 R \sigma \omega$ 矢量式: $\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 R \sigma \vec{\omega}$

10. 半圆柱型金属片: 半径 $R=1\text{cm}$ 无限长, 电流 $I=5\text{A}$ 从下而上通过。求轴线上磁感强度



将金属片划分为多个细长条: $dI = \frac{I}{\pi R} R d\theta$ $dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I d\theta}{2\pi^2 R}$

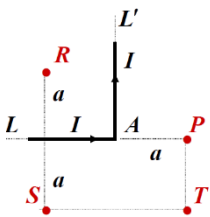
根据对称性 $B_y = 0$ $B_x = \int_0^\pi dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 6.3 \times 10^{-5} \text{ T}$

11. 一些导线模型

I $B = \frac{\mu_0 I}{4R} \otimes$ I $B = \frac{\mu_0 I}{8R} \odot$ I $B = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \odot$

$2\pi/3$ I $B = \frac{\mu_0 I}{6R} + \frac{\mu_0 I}{\pi R} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \otimes$

12. 有无限长载流直导线弯成如图形状。 $I = 20\text{A}$, $a = 4\text{cm}$, 求 P, R, S, T 四点的 B



P 点: $B_P = B_{LA} + B_{L'A} = 0 + \frac{\mu_0 I}{4\pi a} = 5 \times 10^{-5} \text{ T} \otimes$

R 点: $B_R = B_{LA} + B_{L'A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos 0 - \cos \frac{3}{4}\pi) + \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \frac{1}{4}\pi - \cos \pi) = 1.71 \times 10^{-5} \text{ T} \odot$

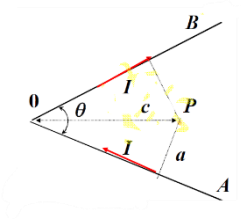
S 点: $B_{LA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos 0 - \cos \frac{3}{4}\pi) \otimes$ $B_{L'A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \frac{3}{4}\pi - \cos \pi) \odot$

$B_S = B_{LA} - B_{L'A} = 7.07 \times 10^{-5} \text{ T} \otimes$

T 点: $B_{LA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos 0 - \cos \frac{3}{4}\pi) \otimes$ $B_{L'A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \frac{3}{4}\pi - \cos \pi) \odot$

$B_T = B_{LA} + B_{L'A} = 2.94 \times 10^{-5} \text{ T} \otimes$

13. 如图, 求角平分线上的 \vec{B}_P , 已知有 I, c

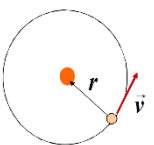


$B_{AO} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\cos 0 - \cos(\pi - \frac{\theta}{2})] = \frac{\mu_0 I}{4\pi c \sin \frac{\theta}{2}} (1 + \cos \frac{\theta}{2}) \otimes$

同理 $B_{OB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi c \sin \frac{\theta}{2}} (1 + \cos \frac{\theta}{2}) \otimes$

因此 $B_P = B_{AO} + B_{OB} = \frac{\mu_0 I}{2\pi c \sin \frac{\theta}{2}} (1 + \cos \frac{\theta}{2}) \otimes$

14. 氢原子中电子绕核作圆周运动。已知 $v = 0.2 \times \frac{10^6 \text{ m}}{\text{s}}$ $r = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$, 求轨道中心 B 和电子磁矩 \vec{p}_m



因为 $\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$, 又 $\vec{v} \perp \hat{r}$ 所以 $B = \frac{\mu_0 e v}{4\pi r^2} \approx 13 \text{ T} \otimes$

又有 $\vec{p}_m = I S \vec{n}$ $S = \pi r^2$ $I = \frac{v}{2\pi r} e$ 所以 $p_m = I S = \frac{1}{2} v r e = 0.93 \times 10^{-23} \text{ Am}^2 \otimes$

11.4 磁场中的高斯定理和安培环路定理

11.4.1 磁场的高斯定理

定理 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 表示不存在磁单极子

微分形式 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

注意 ① $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 对任意闭合曲面而言 ② $\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ 不一定为零

11.4.2 安培环路定理

表述 恒电流磁场中，磁感应强度沿任意闭合环路的积分等于此环路所包围的电流代数和的 μ_0 倍。

表达式 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$

符号规定 穿过回路L的电流方向与L的环绕方向服从右手关系的，I为正值。否则为负值。
不穿过回路边界所围面积的电流不计在其内。

证明 假设有无限长直电流的磁场：载流长直导线磁感应 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ 则 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot d\vec{l}$

$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint_L dl = \mu_0 I$ 设闭合回路L为圆形回路，L与I成右螺旋。

若回路绕向为逆时针，则 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = -\mu_0 I$

对任意形状回路： $\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$ $\int d\varphi = 2\pi$ $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

电流在回路之外： $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$ $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$ $\vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = -\vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$ $\vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = 0$
则 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

多电流情况： $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$ $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_2 - I_3)$

以上结果对任意形状的闭合电流均成立

注意 ① \vec{B} 与空间的所有电流均有关系

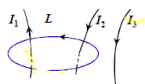
② \vec{B} 的环流只与穿过环路的电流代数和有关

③ 穿过L的电流对 \vec{B} 和 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ 均有贡献

④ 不穿过L的电流对L上各点B有贡献，对 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ 无贡献

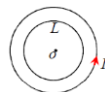
⑤ 安培环路定理揭示了磁场是非保守场（无势场、涡旋场）

例题 1. 如图所示环路积分为 $\mu_0 (I_1 - I_2)$



2. 如图，圆形电流I的平面内选取一个同心圆形闭合回路L，其环路积分为零，环路上任意一点 $B \neq 0$

3. 如果在安培环路上各点的B处处为零，一定有 $\sum_{L \text{ 内}} I_i = 0$



对比分析

静电场：

电力线起于正电荷，终止于负电荷，有源。

电场保守，有势场。

稳恒磁场：

磁力线闭合，无磁单极子，无源。

磁场非保守，无势场，涡旋场。

11.4.3 安培环路定理的应用

描述 可以用来处理电流分布等具有一定对称性的恒磁场问题。

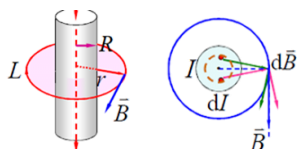
适用 **恒稳电流**的磁场

求解条件 电流或磁场分布具有某些对称性，可以找到恰当的安培环路 L ，使得积分能够计算为 B 与路径长度的乘积形式。利用安培环路定理求解磁感强度要求磁场具有高度对称性。

环路原则 ① 环路要经过所研究的场点 ② 环路长度简单 ③ 环路上各点 \vec{B} 大小相同,方向与环路一致或垂直

典型模型

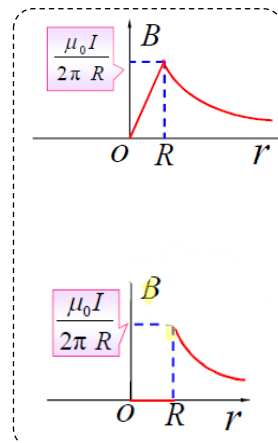
1. 无限长均匀载流圆柱体



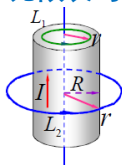
$$r > R \text{ 时 } \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad 2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$0 < r < R \text{ 时 } \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I \quad 2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

\vec{B} 的方向与 I 成右螺旋



2. 无限长均匀载流圆柱面



$$0 < r < R \text{ 时 } \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad B = 0$$

$$r > R \text{ 时 } \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

电场磁场对比分析

长直导线

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

圆柱面 内部

$$E = 0 \quad B = 0$$

圆柱体 内部

$$E = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2} \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

外部

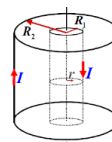
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

外部

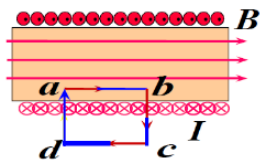
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

练习： 同轴两筒状导线通有等值反向的电流 I ，求 B 的分布

$$\textcircled{1} r > R_2 \quad B = 0 \quad \textcircled{2} R_1 < r < R_2 \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \textcircled{3} r < R_1 \quad B = 0$$



3. 长直载流螺线管 已知有 I, n (单位长度导线匝数)

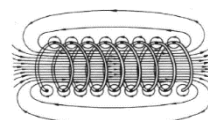


分析对称性：管内磁力线平行于管轴，管外靠近管壁处磁场为 0

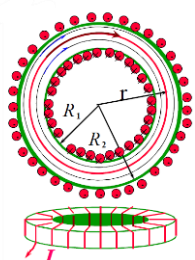
$$\text{计算环流：} \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b B dl \cos 0 + \int_b^c B dl \cos \frac{\pi}{2} + \int_c^d B dl \cos \pi + \int_d^a B dl \cos \frac{\pi}{2} = B \cdot ab$$

$$\text{则有 } B \cdot ab = \mu_0 n ab I \quad \text{可得：} B = \mu_0 n I \quad (\text{内}) \quad B = 0 \quad (\text{外})$$

无限长载流螺线管内磁场处处相等，外部磁场忽略不计



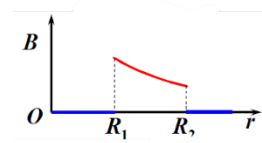
4. 环形载流螺线管 已知有 I, N, R_1, R_2, n



分析对称性：磁力线分布如图，做积分环路如图 方向右手螺旋

$$\text{计算环流：} \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = 2\pi r B \quad \text{则有 } 2\pi r B = \mu_0 N I \quad \text{则 } B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (\text{内})$$

$$\text{若 } \frac{R_1}{R_2} \gg R_1 - R_2 \quad n = \frac{N}{2\pi R_1} \quad \text{则可近似为均匀场 } B \approx \mu_0 n I$$



练习:

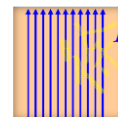
1. 螺旋环截面为矩形 $I = 1.7A$, 导线总匝数 $N = 1000$ 匝, 外半径和内半径之比为 $R_2/R_1 = 1.6$, 高 $h = 5.0cm$, 求通过截面的磁通量。

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 8 \times 10^{-6} \text{ wb}$$

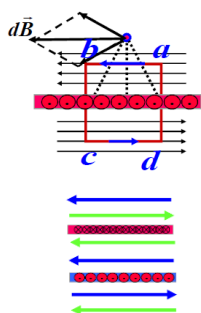
2. 截面为长方形的环式螺线管, 共 N 匝, h 为螺绕环高, a 为内径, b 为外径, 有 I , 求管内磁通量

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

5. 无限大载流导体薄板 导线中电流强度 I , 单位长度导线匝数为 n



分析对称性: 磁力线如图, 作积分环路如图, ab 、 cd 与导体版平行



计算环流: $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b B dl \cos \theta + \int_b^c B dl \cos \frac{\pi}{2} + \int_c^d B dl \cos 0 + \int_d^a B dl \cos \frac{\pi}{2} = B \cdot \overline{ab} + B \cdot \overline{cd}$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2B \cdot \overline{ab} = \mu_0 n \cdot \overline{ab} \cdot I \Rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 n I \text{ 板上下两侧为均匀磁场}$$

讨论: 如图, 两块无限大载流导体薄板平行放置, 通有相反方向电流。求磁场分布。

已知导线中电流强度 I , 单位长度导线匝数 n , 单个平板 $B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$, 则 $B = \begin{cases} 0 & \text{两版外侧} \\ \mu_0 n I & \text{两板之间} \end{cases}$

11.5 磁场对电流的作用 安培定律

11.5.1 安培定律

安培力 电流元在磁场中受到的**磁力**，它是洛伦兹力的宏观表现

安培定律 一个电流元在磁场中所受安培力为电流元与磁感应强度的矢量积

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{大小: } dF = IdlB \sin \theta \quad \theta = \arcsin(I d\vec{l}, \vec{B})$$

方向: 右手螺旋 食指磁感强度、中指电荷运动方向, 拇指正电荷受力方向

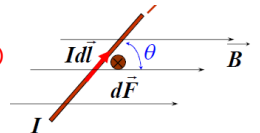
载流导线受到的磁力: $\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B}$

匀强磁场中载流直导线所受安培力

一般情况 取电流元, 受力: $dF = BIdl \sin \theta$ \otimes 积分: $F = \int_L BIdl \sin \theta = \mathbf{BIL} \sin \theta$ \otimes

I 与 B 平行 则 $\theta = 0$ or π 受力 $F = 0$

I 与 B 垂直 则 $\theta = \pi/2$ or $3\pi/2$ 受力 $F_{\max} = ILB$



匀强磁场中载流弯曲导线所受安培力

取电流元, 受力 $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ 则 $\vec{F} = \int d\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B} = I(\int d\vec{l}) \times \vec{B} = \vec{IL} \times \vec{B}$ (由于 $\int d\vec{l} = \vec{L}$)
故 $F = BIL \sin \theta$ **均匀磁场中**, 弯曲载流导线所受磁场力与起终点相同的直导线相同。
推论: 在均匀磁场中任意形状闭合载流线圈受到的合力为零。 这种就 $F \neq 0$

例题

1. 在无限长载流直导线 I_1 旁, 平行有长为 L 的载流直导线 I_2 , 相距 a , 求 I_2 所受力

由于距离相同, 故 B 相同。则有 $F = I_2 L B_1 \sin \theta$ 其中 $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$
则 $F = I_2 L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi a}$ 方向向左 (同理, 1 也受到 2 的拉力)

2. 在无限长载流直导线 I_1 旁, 垂直有长为 L 的载流直导线 I_2 , 左端距离为 a , 求 I_2 所受力

如图建系, 选取微元, 有 $dF = I_2 dx B_1 \sin \theta$ 其中 $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$
则 $F = \int dF = \int_a^{a+L} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+L}{a}$ 方向向上

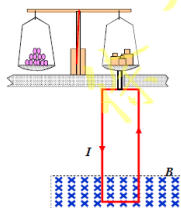
3. 半径为 R 载有电流 I_2 的导体圆环与电流为 I_1 的长直导线如图放置。相距 d , 两者间绝缘, 求作用在圆电流上的磁场力

空间一点 $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{1}{d+R \cos \theta}$ 则有 $dF = B I_2 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dl}{d+R \cos \theta}$ 又有 $dl = R d\theta$
故 $dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{R d\theta}{d+R \cos \theta}$ 分量 $dF_x = dF \cos \theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos \theta d\theta}{2\pi (d+R \cos \theta)}$ $dF_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \sin \theta d\theta}{2\pi (d+R \cos \theta)}$
则 $F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{d+R \cos \theta} = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}}\right)$ $F_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{d+R \cos \theta} = 0$
注: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{d+R \cos \theta} = \frac{2\pi(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}})}{R}$ 则 $\vec{F} = F_x \vec{i} = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}}\right) \vec{i}$

4. 无限长直导线 I_1 , 半径 R 的圆线圈 I_2 , 长直导线通过圆心, 与线圈在同一平面 (彼此绝缘), 求圆线圈磁场力

空间一点 $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ $d\vec{F} = I_2 d\vec{l} \times \vec{B}$ $r = R \cos \theta$
 $F = F_x = \oint_L dF_x = \oint_L -dF \cos \theta = \oint_L -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl \cos \theta = \int_0^{2\pi} -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R \cos \theta} dl \cos \theta = -\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} d\theta$
 $F = -\mu_0 I_1 I_2$ 方向沿 x 负方向

5. 磁秤：一臂下挂有矩形线圈（宽 b 长 l 有 N 匝）。当线圈通有 I ，线圈向上受力，调节砝码 m 使两端平衡。据此，求待测磁场的磁感应强度。



线圈底边上受到安培力 \vec{F} 方向向上，大小为 $F = NBIlb$

作用在两侧的力大小相等方向相反，互相抵消。因此 $NBIlb = mg$

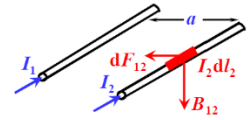
$$\text{则 } B = \frac{mg}{NIb}$$

11.5.2 两平行长直电流之间的相互作用

模型设置 两根相距为 a 的平行直导线，分别通以同方向的电流 I_1 和 I_2

推导 根据安培定律 $d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}$ 大小为 $dF_{12} = I_2 B_{12} dl_2$ $B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$

单位长度受力为 $f_{12} = \frac{dF_{12}}{dl_2} = I_2 B_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a}$ 同理可得 $f_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a}$



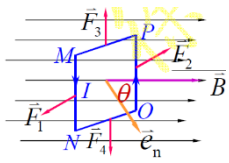
规律 方向相同的两平行直导线相互吸引。方向相反相互排斥

电流单位定义 令 $a = 1\text{m}$, $I_1 = I_2$ ，调节电流大小，当 $f_{12} = 2 \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ 时导线上的电流就是 1A

11.5.3 磁场对载流线圈的作用

模型分析

如图均匀磁场中有矩形载流线圈 $MNOP$ ($MN = l_2, NO = l_1$) 则 $F_1 = BIl_2, \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

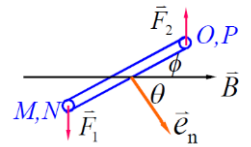


$F_3 = BIl_1 \sin(\pi - \phi), \vec{F}_3 = -\vec{F}_4$ 无力矩产生 所以总和 $\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = 0$

$MN = l_2, NO = l_1$ $M_{\text{力矩}} = F_1 l_1 \sin \theta = BIl_2 l_1 \sin \theta$

$M = BIS \sin \theta$ $\vec{M} = IS \vec{e}_n \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$

线圈有 N 匝时: $\vec{M} = NIS \vec{e}_n \times \vec{B}$



磁矩 $\vec{m} = NIS \vec{e}_n$ 方向: \vec{e}_n 与 I 成右螺旋

结论 均匀磁场中，任意形状刚性闭合平面通电线圈所受的力和力矩为零

$\vec{F} = 0, \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

结论具有普遍意义。适用于带电粒子沿任意闭合回路的运动或自旋磁矩在磁场中受的力矩

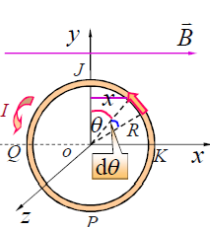
讨论情况

① \vec{e}_n 方向与 B 相同: 稳定平衡 $\theta = 0, M = 0$

② \vec{e}_n 方向与 B 相反: 不稳定平衡 $\theta = \pi, M = 0$

③ \vec{e}_n 方向与 B 垂直: 力矩最大 $\theta = \pi/2, M = M_{\text{max}}$

例题 1. 半径 0.2m, 电流 20A 的可绕轴旋转的圆形载流线圈, 均匀磁场 0.08T, 方向沿 x 轴正向, 问线圈受力与磁力矩



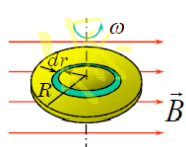
把线圈分为 JQP 和 PKJ 两部分

$$\vec{F}_{JQP} = BI(2R)\vec{k} = 0.64\vec{k}\text{N} \quad \vec{F}_{PKJ} = -BI(2R)\vec{k} = -0.64\vec{k}\text{N}$$

以 Oy 为轴, $Id\vec{l}$ 所受磁力矩大小为 $dM = x dF = IdlBx \sin \theta$ $x = R \sin \theta$ $dl = R d\theta$

$$\text{故 } dM = IBR^2 \sin^2 \theta d\theta \quad M = IBR^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = IB\pi R^2$$

2. 半径 R , 面密度 σ 的薄圆盘, 匀强 B . 圆盘以 ω 绕其轴线转动, 求作用在圆盘上的磁力矩。



取半径为 r , 宽为 dr 的圆环。其带电 $dq = \sigma 2\pi r dr$ 转动电流 $dI = \frac{dq}{T} = \omega \sigma r dr$

磁矩: $dP_m = \pi r^2 dI = \pi \sigma \omega r^3 dr$ 方向沿轴线向上

所受磁力矩: $dM = dP_m B \sin \frac{\pi}{2} = dP_m B = \pi \sigma \omega B r^3 dr$ $M = \int dM = \int_0^R \pi \sigma \omega B r^3 dr = \frac{\pi \sigma \omega B R^4}{4} \otimes$

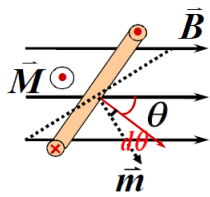
11.5.4 磁力的功

载流导线在磁场中运动时磁力做功

$$A = F\Delta x = BIl\Delta x = I\Delta\phi_m$$

载流线圈在磁场中转动时磁力矩所做功

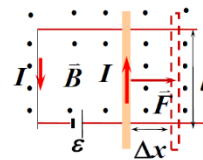
$$A = I(\phi_2 - \phi_1)$$



$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = mB \sin \theta = ISB \sin \theta \quad dA = -Md\theta = -BIS \sin \theta d\theta = Id(BS \cos \theta) = Id\Phi_m$$

$$A = \int dA = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} Id\Phi_m = I\Delta\Phi_m \quad A = -\int M d\theta = -\int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} mB \sin \theta d\theta = mB(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

$$\text{磁矩与磁场的相互作用能: } W_m = -mB \cos \theta = -\vec{m} \times \vec{B}$$



11.6 带电粒子在磁场的运动

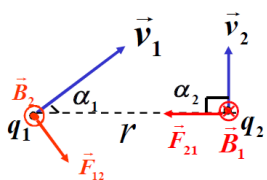
11.6.1 洛伦兹力和粒子的运动方程

$$\text{广义洛伦兹力} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} = q\vec{E}_{\text{电场力}} + q\vec{v} \times \vec{B}_{\text{磁场力}}$$

$$\text{磁场对运动电荷作用力} \quad \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{大小: } F = qvB \sin \theta \quad \text{方向: 右手定则}$$

特点: 不改变 \vec{v} 大小, 只改变 \vec{v} 方向, 不对 q 做功

例题 1. 求 q_1, q_2 相互作用洛伦兹力的大小和方向



$$\text{有 } \vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \quad \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{则 } B_1 = \frac{\mu_0 q_1 v_1 \sin \alpha_1}{4\pi r^2} \quad B_2 = \frac{\mu_0 q_2 v_2 \sin \alpha_2}{4\pi r^2} \quad F_{21} = q_2 v_2 B_1 \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2 \sin \alpha_1}{4\pi r^2}$$

$$F_{12} = q_1 v_1 B_2 \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v_1 v_2 \sin \alpha_2}{4\pi r^2} \quad \text{可见 } \vec{F}_{21} \neq \vec{F}_{12}$$

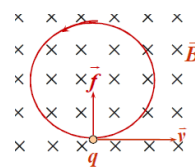
11.6.2 带电粒子在匀强磁场中的运动

$$\text{① } \vec{v} \text{ 与 } \vec{B} \text{ 平行或反平行} \quad \vec{f} = 0 \quad \vec{v} = \vec{c}$$

$$\text{② } \vec{v} \text{ 与 } \vec{B} \text{ 垂直} \quad f = qvB \quad \text{粒子做匀速圆周运动}$$

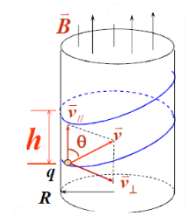
$$\text{回旋半径} \quad R = \frac{mv_{\perp}}{qB} \quad \text{推导: } qvB = m \frac{v^2}{R}$$

$$\text{回旋频率} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \quad \text{推导: } T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

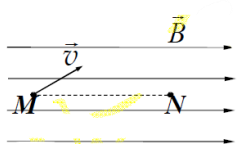


$$\text{③ } \vec{v} \text{ 与 } \vec{B} \text{ 成 } \theta \text{ 角} \quad v_{\parallel} = v \cos \theta \quad v_{\perp} = v \sin \theta \quad R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB} \quad T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$\text{螺距} \quad h = v_{\parallel} T = v \cos \theta T = \frac{2\pi mv \cos \theta}{qB} \quad \text{等距螺旋线运动}$$



例题 1. 在均匀磁场中, 当电子(m, e)位于 M 点具有与磁场方向成 α 角的速度 v , 它绕螺旋线一圈后到达 N 点。试求① MN 长度 ② 顺着磁场方向, 该电子旋转方向? 圆运动半径是多少?



$$\text{电子与磁场有一定角度时, 将沿着等距螺旋线运动, 圆运动周期为 } T = \frac{2\pi m}{eB}$$

$$\text{MN 即螺距 } h = v \cos \alpha T = \frac{2\pi mv \cos \alpha}{eB} \quad \text{由于洛伦兹力: } \vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}, \text{ 则运动半径为 } R = \frac{mv \sin \alpha}{eB}$$

其方向在图中 \odot , 故顺时针方向旋进。

2. 一个质子沿与磁场垂直方向运动, 某点 $v = 3.1 \times 10^6 \text{ m/s}$, 实验测得受洛伦兹力 $7.4 \times 10^{-14} \text{ N}$, 求 B

$$\text{则 } B = \frac{F}{qv} = \frac{7.4 \times 10^{-14}}{1.6 \times 10^{-19} \times 3.1 \times 10^6} = 0.15 \text{ T}$$

11.6.3 带电粒子比荷的测定

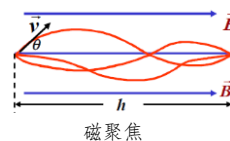
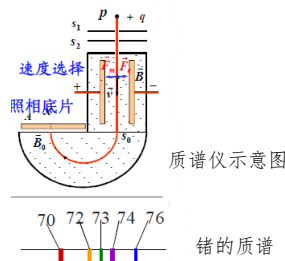
质谱仪

滤速器: $qE = qvB$ 筛选 $v = E/B$ 的粒子

质谱分析: $x = 2R = \frac{2mv}{qB_0}$ $m = \frac{qB_0 Bx}{2E}$

谱线位置: 表示不同的同位素

谱线黑度: 表示同位素的相对含量



磁聚焦

管长等于螺距 均匀磁场, 且 θ 很小: $v_{\perp} = v \sin \theta \approx v\theta$ $v_{//} = v \cos \theta \approx v$ $h = Tv_{//} = \frac{2\pi mv}{qB}$

带电粒子作不同半径的螺旋线运动, 螺距 h 近似相等, 带电粒子经过距离 h 又重新汇集, 这就是磁聚焦。具有轴对称性的磁场对电子束来说有透镜的作用。测量管长 \rightarrow 比荷

应用于电子显微镜, 可以直接观测原子 (光学极限 10^{-7} , 扫描透射电子显微镜 10^{-10})

磁约束

受控热核聚变

磁约束: 用磁场将高温等离子体约束在一定空间区域内

横向: $R = mv/qB$ $B \nearrow, R \searrow$

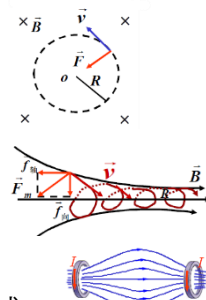
在强磁场中可以将离子约束到一个很小的范围内

纵向: 非均匀磁场。 $h = \frac{2\pi mv}{qB}$ $B \nearrow, h \searrow, h \rightarrow 0$

磁瓶: 离子在两磁镜之间震荡

范艾伦辐射带: 地磁场俘获宇宙线中的带电粒子形成

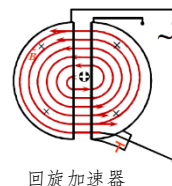
惯性约束: 应用于激光核聚变。依赖核燃料自身的惯性来约束, 用高能脉冲激光激发核燃料 (氘、氚丸), 在其飞散前完成热核反应 ($\sim 10^{-10}s$)



回旋加速器

用于产生高能粒子。结构为金属双 D 形盒, 其上加有磁场与交变电场。

例子初始于缝隙处, 在电场作用下, 能量不断增大, 随后被引出



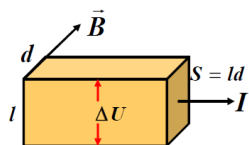
11.6.4 霍尔效应

现象

导体中通有电流 I , 磁场 B 垂直于 I 。在既垂直于 I , 又垂直于 B 的方向出现电势差 ΔU

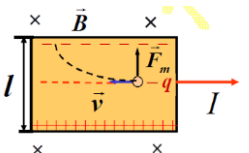
电子论解释

载流子为电子 $q = -e$ 漂移速率 \vec{v} 受力: $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ 方向向上, 形成 ΔU



受力: $F_e = qE = q \frac{\Delta U}{l} = F_m$ 平衡条件: $qvB = q \frac{\Delta U}{l} \Rightarrow \Delta U = Blv$

又有: $I = qvnS = qvnl d \Rightarrow v = \frac{I}{qndl}$ 故 $\Delta U = Blv = Bl \frac{I}{qndl} = \frac{1}{qn} \frac{BI}{d} = k_H \frac{BI}{d}$



霍尔电压: $\Delta U = k_H \frac{BI}{d}$ 霍尔系数: $k_H = \frac{1}{qn}$ (对于金属导体: $k_H = \frac{1}{en} < 0$)

正电荷, 分布相反。

应用

① 测载流子密度 $n = \frac{BI}{\Delta U q d}$

② 测量载流子电性与半导体类型

(n 型: 载流子为电子, p 型: 带正电的空穴)

③ 测磁场 \vec{B} (霍尔元件)

④ 磁流体发电