第十二章 电磁感应

12.1 电磁感应及其基本规律

12.1.1 电磁感应现象 Electromagnetic Induction Phenomenon

法拉第电磁感应现象 $I \propto \frac{d}{dt}(\vec{B}\cdot\vec{S}) = \frac{d}{dt}(\vec{\Phi})$

1. 磁场相对于线圈或导体回路 改变大小和方向（导体不动，磁场动） $I \propto \frac{d}{dt}\vec{B}$

条形磁体插入拔出时，弯曲磁感线被切割，电路中有电流。电流大小和方向与磁铁运动速度方向有关。

2. 线圈或导体回路相对于磁场改变面积或取向（磁场不动，导体动） $I \propto \frac{d}{dt}\vec{S}$

导体棒划过线框或发电机

总结 ① 无论用何方法，只要穿过闭合电路**磁通量**发生变化，**闭合电路**中就有电流产生。

感应电流 由磁通量的变化所引起的回路电流

感应电动势 由磁通量的变化所产生的电动势

电磁感应现象 由于磁通量变化产生感应电动势的现象

② **感应电流产生条件**：电路必须闭合、磁通量发生变化

感应电动势产生条件：导线或线圈在磁场中运动、线圈内磁场发生变化（不要求闭合）

注意 ① 电磁感应的**本质**不是感应电流，而是**感应电动势**

② 感应电流随着回路中电阻变化而变化，而感应电动势与电阻无关，唯一决定于磁通量变化率

③ 当$\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$时，就产生感应电动势。当回路为闭合导体回路时，在电动势作用下产生感应电流。

④ **感应电流与原电流本身无关，是与原电流的变化有关**。

12.1.2 电磁感应定律 Electromagnetic Induction Law

法拉第电磁感应定律

内容 当穿过闭合回路所围面积的磁通量发生变化时，回路中产生感应电动势，其**正比于磁通量对时间变化率的负值**。该定律为**实验定律**。

公式 $\boldsymbol{\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}}$ **单位**：伏特

方向 由于公式中量均为标量，故规定两个标定方向满足右螺旋关系

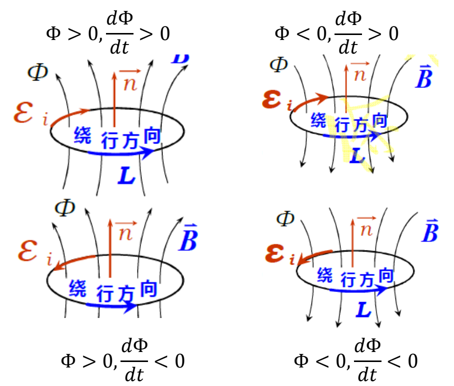
任意确定回路绕行方向，规定**电动势方向与绕行方向一致时为正**。当磁力线方向与回路绕行方向成右螺旋时，**规定磁通量为正（$\vec{B}$与$\vec{e}_n$同向）**

① $\Phi > 0, \frac{d\Phi}{dt} > 0 \Rightarrow \varepsilon_i < 0$ ε_i与 L 方向相反

② $\Phi > 0, \frac{d\Phi}{dt} < 0 \Rightarrow \varepsilon_i > 0$ ε_i与 L 方向相同

③ $\Phi < 0, \frac{d\Phi}{dt} > 0 \Rightarrow \varepsilon_i < 0$ ε_i与 L 方向相反

④ $\Phi < 0, \frac{d\Phi}{dt} < 0 \Rightarrow \varepsilon_i > 0$ ε_i与 L 方向相同



N 匝情况　　若回路有n匝线圈，各匝$\Phi = \varphi_1, \varphi_2, \dots$，总$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$。如果每匝磁通量相等，则

$\boldsymbol{\Phi = n\varphi}$（**磁通链数**）　有$\boldsymbol{\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -n\frac{d\varphi}{dt}}$　**使用总磁通运算**

感应电流　　若闭合回路电阻为R：$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$

感应电量　　在$t_1 - t_2$时间间隔内通过导线任一截面的感应电量 $dq = I_i dt$

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

楞次定律 Lenz law

内容　　闭合回路中的感应电流方向，总是使得它自己所激发的磁场**阻碍**引起感应电流的磁通量的变化

感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因。（反抗相对运动、磁场变化或线圈变形）

感应电流产生的磁通反抗回路原磁通的增大（可以用楞次定律判断电流方向）

这种阻碍或反抗是**能量守恒定律**在电磁感应现象中的具体体现。

（磁棒插入线圈中，线圈中感应电流产生的磁场阻碍磁棒插入，若继续插入则需要克服磁场力做功，感应电流释放出焦耳热，这是插入的机械能转化而来的）

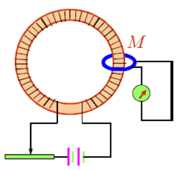
应用　　用法拉第电磁感应定律求解感应电动势

① 任意选定回路 L 正方向　　② 用右手螺旋法则确定此回路为边界的曲面的正向

③ 计算任意时刻通过 L 的磁通量　　④ 用$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -n\frac{d\varphi}{dt}$ 计算Φ_m

例题

1. 螺绕环，截面积$S = 2 \times 10^{-3}\ m^2$，单位长$n = 5000$ *匝*，环上有一匝数$N = 5$的线圈 M，电阻 R=2Ω。调节可变电阻使得通过螺绕环的电流每秒降低 20A，求 ① M 中产生的感应电动势和感应电流 ② 2s 内通过 M 的感应电量q_i

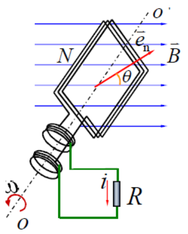


① 有安培环路定理$B = \mu_0 nI$，通过 M 的全部磁通：$\Phi = N\varphi = NBS = N\mu_0 nIS$

$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = -N\mu_0 nS\frac{dI}{dt} = 1.26 \times 10^{-3}V$　　$I_i = \frac{U}{R} = 6.3 \times 10^{-4}A$

② 2s 内通过电量为 $q_i = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = I_i\Delta t = 1.26 \times 10^{-3}C$

2. 匀强磁场中，有面积为 S 的绕轴转动的 N 匝线圈以角速度ω匀速转动，求线圈中的感应电动势



已知 S, N, ω，求ε。设$t = 0$时，$\vec{e}_n$与$\vec{B}$同向，则$\theta = \omega t$，$\psi = N\phi = NBS\cos\omega t$

$\varepsilon = -\frac{d\psi}{dt} = NBS\omega\sin\omega t$　　如果令最大值为$\varepsilon_m = NBS\omega$，则$\varepsilon = \varepsilon_m \sin\omega t$

$i = \frac{\varepsilon_m \sin\omega t}{R} = I_m \sin\omega t$　$\left(I_m = \frac{\varepsilon_m}{R}\right)$　　由此可见，**这种感应电流为交流电**

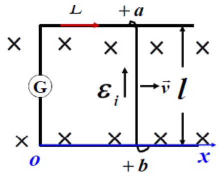
12.2 感应电动势

概述 有两种途径产生磁通量的变化

① **动生电动势**：磁场不变（稳恒磁场），导体运动；回路面积变化；取向变化

② **感生电动势**：导体不动，磁场随时间变化

12.2.1 动生电动势

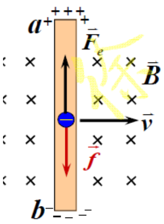


描述公式 如图建立坐标系，$\phi = Blx(t)$，$\boldsymbol{\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$

负号说明电动势方向与所设方向相反。

形成原因 导线内每个**自由电子**受到的洛伦兹力为 $\vec{f}_{非静电力} = -e(\vec{v}\times\vec{B})$

其驱使电子沿导线由a向b移动，由于洛伦兹力作用使b端出现**过剩的负电荷**，a端出现**过剩正电荷**



由此，导线**内部形成静电场$\vec{E}$**，使电子受到静电力 $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ 平衡时：$\vec{F}_e = \vec{f}$

此时电荷积累停止，ab两端**形成稳定的电势差**。**洛伦兹力是产生动生电动势的根本原因**。

平衡时 $qvB = -qE = -q\frac{\Delta U}{l} \Rightarrow \Delta U = -Blv$ ab等效电源，反抗$\vec{F}_e$做功，将$+q$由负极→正极，维持

ΔU的非静电力，即洛伦兹力$\vec{f}$。 动生电动势只存在于**运动导体内**

产生$\varepsilon_动$的非静电力$\vec{F}_K = \vec{f} = q\vec{v}\times\vec{B}$ 非静电场强 $\vec{E}_K = \frac{\vec{f}}{q} = \vec{v}\times\vec{B}$ $\varepsilon_动 = \oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

一般情况 导线为**曲线**，磁场为**非均匀场**。选取导线上**微元dl**，其各自具有$\vec{v},\vec{B}$。则dl上$d\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

则整个导线l上的动生电动势为 $\boldsymbol{\varepsilon_{i动} = \int d\varepsilon_i = \int_l(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}}$

方向：运动导线中的**正电荷受力方向**（即$\vec{v}\times\vec{B}$在运动导线上的投影方向）

电动势计算 ① 由定义求解 $\varepsilon_动 = \oint_L \vec{E}_K\cdot d\vec{l} = \oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int_-^+(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$ 适用于**切割磁力线导体**

可以理解为$\int_l\left(\boldsymbol{vB\sin(\widehat{\vec{v},\vec{B}})\,dl\cos\,(\widehat{\vec{v}\times\vec{B},d\vec{l}})}\right)$

典型结论：对于一根在磁场中运动的直棒，棒与磁场成一定角度，有$\varepsilon = Bvl\sin\alpha$

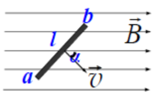
由此：闭合线圈平动，磁通量不变，感生电动势为零。

② 由法拉第定律求解 $\boldsymbol{\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}}$ 适用于**一切产生电动势的回路**

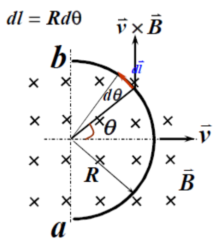
如果回路不闭合，需要添加辅助线使其闭合。大小和方向可以分别确定。

例题：

1. 如图所示直导线 ab 的电动势为 0



2. 有一个半圆形金属导线在匀强磁场中切割磁力线运动，已知$\vec{v},\vec{B},R$，求动生电动势



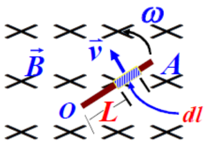
法一： 做辅助线形成闭合回路，则整体电动势为零。又有 ab 电动势为$2RvB$

故半圆电动势为$2RBv$，方向$a\to b$

法二： 取微元 $d\varepsilon = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = vB\sin 90°\,dl\cos\theta$

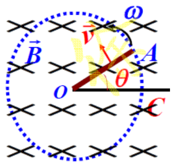
$\varepsilon = vBR\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = vB2R$ 方向$a\to b$

3. 长为 L 的导棒在 B 匀强场中以角速度ω绕 O 轴转动，求两端动生电动势大小与方向



法一： 取棒上微元$d\vec{l}$，有$v=\omega l$ $(\vec{v}\times\vec{B})$与$d\vec{l}$同向。

$d\varepsilon_i=Bvdl=Bl\omega dl$ $\varepsilon_i=\int d\varepsilon_i=\int_0^L Bl\omega dl=\frac{1}{2}B\omega L^2$ 方向$A\to O$

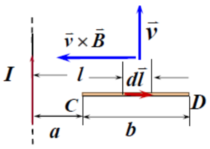


法二： 作辅助线形成闭合回路$OACO$

$\Phi_m=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_S BdS=BS_{OACO}=\frac{1}{2}B\theta L^2$

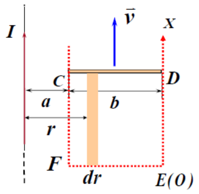
$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{1}{2}BL^2\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{2}B\omega L^2$ 方向沿$AOCA$

4. 一直导线 CD 在一个无限长的直电流磁场中切割磁场线运动，求动生电动势。



法一： $d\varepsilon_i=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=v\frac{\mu_0 I}{2\pi l}\sin 90^\circ dl\cos 180^\circ=-\frac{\mu_0 vI}{2\pi l}dl$

$\varepsilon_i=-\frac{\mu_0 vI}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{1}{l}dl=-\frac{\mu_0 vI}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$ C 端高电势

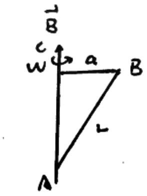


法二： 作辅助线，形成闭合回路 CDEF

则$\Phi=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}xdr=\frac{\mu_0 Ix}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$

$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi}{dt}=-\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\right)\frac{dx}{dt}=-\frac{\mu_0 vI}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$

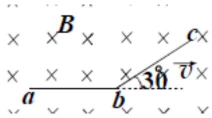
5. 如图，回路 ABC 在匀强磁场中以角速度ω绕 AC 边旋转，BC=a，AB=L，求电动势



CB：$-\frac{1}{2}B\omega a^2$ BA：$\frac{1}{2}B\omega a^2$

总通量变化为零，总电动势为 0

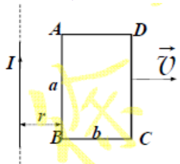
6. 弯折导棒 abc 在均匀磁场中以速度 v 运动，求动生电动势



则 ab 段不产生动生电动势

有 bc 端产生动生电动势：$Blv\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}Blv$

7. 无限长直导线电流 I，旁边有矩形线圈 ABCD，AB 长为 a，BC 长为 b，线圈向右运动$\vec{v}$，当 B 点与导线距离$r=d$时，求线圈内的感应电动势大小和感应电动势的方向。



设任意时刻 B 与长直导线间距为 r。则任意时刻 ABCD 磁通量为$\Phi=\int_r^{r+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}adx=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{r+b}{r}$

所以，感应电动势为$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d\Phi}{dr}\frac{dr}{dt}\Big|_{r=d}=\frac{\mu_0 Iavb}{2\pi d(d+b)}$ 方向为顺时针

12.2.2 感生电动势

描述 导体回路不动，由于**磁场变化**产生的感应电动势叫做感生电动势

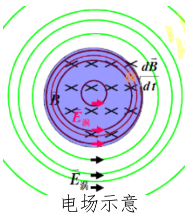
电荷受力 存在一种不同于静电场的新类型的电场（**感生电场、涡旋电场**）。它**来源于磁场的变化**，提供产生感生电动势的非静电力。电荷受力有$\vec{F}=q\vec{E}_{静}+q\vec{E}_{感}+q\vec{v}\times\vec{B}$

麦克斯韦假设 **变化的磁场在其周围空间激发一种涡旋状的电场**，称为涡旋电场或感生电场。记为$\vec{E}_{感}$

根据定义：$\varepsilon_i=\oint_L\vec{E}_{涡}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\left(\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}\right)=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

公式描述 $\boldsymbol{\oint_L\vec{E}_{涡}\cdot d\vec{l}=-N\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$

注意 ① 该式反应变化磁场和感生电场的相互关系。**感生电场由变化磁场产生**。

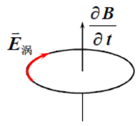


电场示意

② S 是以 L 为边界的任一曲面。$\vec{S}$的法线方向应与曲线 L 的积分方向成右手螺旋关系。

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$是曲面上任一面元处磁感应强度的变化率，不是积分回路线元上的磁感应强度变化率

③ $\vec{E}_{涡}$与$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$构成左旋关系。



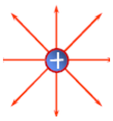
左旋关系

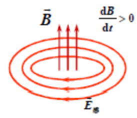
性质 ① 感生电场对处在其中的电荷有力的作用。

② 在感生电场中引进导体，**导体内会产生感应电动势，导体不是等势体**

③ 在静电场中引进导体，产生静电平衡，导体是个等势体

电场比较 | **静电场** | **感生电场**





	静电场	感生电场
起源	由**静止**电荷激发	由**变化**着的磁场激发
电场线	**非闭合**曲线	**闭合**环路
性质	**有源**：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q_{内}$	**无源**：$\oint_S \vec{E}_{涡}\cdot d\vec{S}=0$
	保守：$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$	**涡旋**：$\oint_L \vec{E}_{涡}\cdot d\vec{l}=-N\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$
特点	**不能**脱离源电荷存在	**可以**脱离源在空间传播
对电荷作用	$\vec{F}_{静}=q\vec{E}_{静}$	$\vec{F}_{感}=q\vec{E}_{感}$

相互联系 $\vec{F}_{感}$作为产生感应电动势的非静电力，可以引起导体中电荷的堆积，从而建立起静电场

感应电动势比较	**动生电动势**	**感生电动势**
公式	$\varepsilon_i=\int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$	$\varepsilon_i=\oint \vec{E}_{涡}\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$
原因	由于 S 变化引起通量变化	由于 B 变化引起通量变化
非静电力来源	**洛伦兹力**	**感生电场力**

电势计算 ① 计算电动势：$\varepsilon_i=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$ 闭合回路：$\varepsilon_i=\oint \vec{E}_{涡}\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

② 感生电场分布：$\oint \vec{E}_{涡}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi}{dt}\rightarrow \vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$

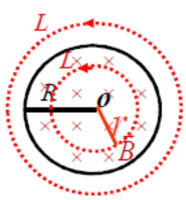
适用条件 具有轴对称性的感生电场分布求解

① 任意选定回路 L 正方向 ② 用右手螺旋确定此回路为边界的曲面的正向

③ 用楞次定律判定$E_{涡}$方向 ④ 代入积分式计算

例题

1. 已知半径 R 长直螺线管中电流随时间线性变化，使得管内 B 随时间增大，求感生电场分布。



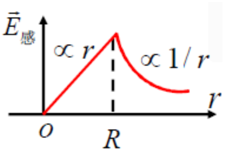
则有$\frac{dB}{dt}=C>0$，对称性分析：$\vec{E}_{感径向}=0$ $\vec{E}_{感轴向}=0$

$\vec{E}_{感}$只有以螺线管轴线为中心的圆周切向分量，感生电场线是垂直于轴线平面的一系列同心圆

做环路 L：$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=E_{感}\cdot 2\pi r=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=-\int_S \frac{dB}{dt}\,dS\cos\pi=\int_S \frac{dB}{dt}dS$

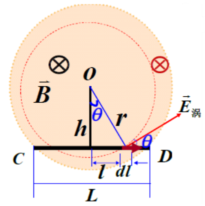
$r\le R$时：$\int_S \frac{dB}{dt}dS=\frac{dB}{dt}\pi r^2\Rightarrow E_{感}=\frac{\frac{dB}{dt}\pi r^2}{2\pi r}=\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\propto r$

$r>R$时：$\int_S \frac{dB}{dt}dS=\frac{dB}{dt}\pi R^2\Rightarrow E_{感}=\frac{\frac{dB}{dt}\pi R^2}{2\pi r}=\frac{R^3}{2r}\frac{dB}{dt}\propto\frac{1}{r}$



注意：只要有变化磁场，整个空间就存在感生电场（光速传播）；求感生电场分布非常复杂，只考这类简单情况。

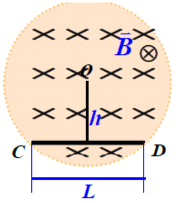
2. 有一匀强磁场分布在一圆柱形区域内。已知：$h, L, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} > 0$，求$\varepsilon_{CD}$



法一：　利用$\varepsilon_i = \int_a^b \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l}$　　有$E_{涡} = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$　$d\varepsilon = \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\, dl \cos\theta = \frac{h}{2}\frac{dB}{dt} dl$

(有$r\cos\theta = h$)　　故 $\varepsilon_{CD} = \frac{h}{2}\frac{dB}{dt}\int_L dl = \frac{1}{2} hL \frac{dB}{dt}$　方向$C \to D$

法二：　利用$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$　选择绕行方向 OCDO

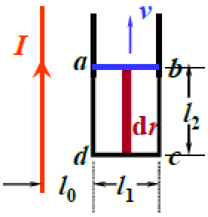


$\varepsilon_i = \oint_{OCDO} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_O^C \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} + \int_D^O \vec{E}_{涡} \cdot d\vec{l} = 0 + \varepsilon_{CD} + 0$

$DCDO$所围面积为：$S = \frac{1}{2} hL$　　磁通量$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = -\frac{1}{2} hLB$

$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{1}{2} hL \frac{dB}{dt}$　　方向$C \to D$

3. 电流为$I = I_0 \cos \omega t$的长直导线附近有一与其共面的矩形线框，其 ab 边可以速度 v 无摩擦匀速平动。设$t = 0$时刻 ab 与 dc 重合，求线框总的感应电动势。



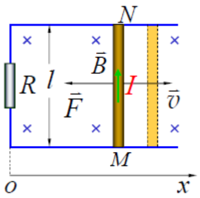
设 t 时刻$I > 0$，空间磁场为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 方向指向纸面，cb 边长为$l_2 = vt$

穿过线框的磁通量为：$\Phi_m = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{l_0}^{l_0+l_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l_2 dr = \frac{\mu_0 I_0 \cos\omega t}{2\pi} vt \ln\left(\frac{l_0+l_1}{l_0}\right)$

t 时刻感应电动势为：$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi} \ln\left(\frac{l_0+l_1}{l_0}\right)(\omega t \sin\omega t - \cos\omega t)$

本题既有感生电动势，也有动生电动势。

4. 均匀磁场 B，有一质量为 m，长为 l 的可移动细导线棒 MN，矩形框还接有电阻 R。开始时细导体棒以速度$\vec{v}_0$沿如图所示的矩形框运动，求棒的速率随时间变化的函数关系。



如图建系。动生电动势$\varepsilon_i = Blv$,方向$M \to N$　直棒所受安培力 $F = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$ 沿负方向

则有 $m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2 v}{R}$　　则 $\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_0^r \frac{B^2 l^2}{mR} dt$　　计算可得：$v = v_0 e^{-\left(\frac{B^2 l^2}{mR}\right)t}$

12.3 互感和自感

12.3.1 自感现象 Self-induction phenomenon

自感现象 由于线圈中的电流变化时，激发的变化磁场引起了**线圈自身的磁通量变化**，从而在线圈回路**自身**产生感生电动势的现象叫自感现象。记为**自感电动势ε_L**

自感系数 通过线圈的**磁通量**与线圈自身的电流成正比，即$\boldsymbol{\Phi = LI}$，其中L即为自感系数，简称自感

L由线圈形状、大小、匝数、周围介质分布等因素决定。当线圈大小形状保持不变，附近不存在铁磁质时，自感系数L为常量。

单位：**亨利H** 毫亨mH $1\mathrm{H} = 10^3\mathrm{mH}$ $1\mathrm{H} = 1\mathrm{Wb}\cdot\mathrm{A}^{-1} = 1\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{A}^{-1}$

自感电动势 线圈中电流I发生变化，自身磁通量也相应变化，在线圈中将产生自感电动势。

有$\varepsilon_{iL} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt}$

物理意义 若L为常数，则$\frac{dL}{dt} = 0$，$\varepsilon_{iL} = -L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \quad L = -\frac{\varepsilon_{iL}}{dI/dt}$

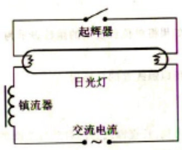
意义为当线圈中电流变化率为一个单位时，线圈中自感电动势的大小

负号表示ε_{iL}总是阻碍I的变化。 当dI/dt一定时，$L\nearrow$ $|\varepsilon_{iL}|\nearrow$，线圈阻碍$I$变化的能力越强

所以 L 用于**描述线圈电磁惯性的大小**

自感计算 ① 设I ② 求$\vec{B}$分布 ③ 求$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ ④ 计算$L = \frac{\Phi}{I}$

若线圈有N匝，磁通匝数为$\psi = N\Phi = N\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$，则自感为$\boldsymbol{L = \frac{\psi}{I}}$



日光灯镇流器

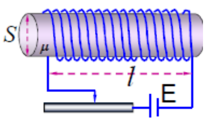
自感应用 日光灯镇流器、高频扼流圈、自感线圈与电容器组合构成震荡电路或滤波电路

日光灯镇流器 通电后，**启辉器**辉光放电，金属片受热形变互相接触，形成闭合回路，电流流过，日光灯灯丝加热释放电子。同时，启辉器接通辉光熄灭，金属皮冷却断开，电路切断，镇流器线圈中产生比电源电压高得多的自感电动势，使管内气体电离发光。

自感危害 电路断开时，产生自感电弧

例题

1. 长直绕螺线管，已知l, S, N, μ，求其自感L（忽略边缘效应）



思路：先设电流 I，根据环路定理求得 B，求得磁通量与ψ，计算 L

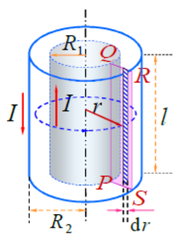
有$n = \frac{N}{l}$，$\boldsymbol{B = \mu n I}$，$\psi = N\Phi = NBS = N\mu\frac{N}{l}IS \quad L = \frac{\psi}{I} = \mu\frac{N^2}{l}S$

又有$n = \frac{N}{l}, V = lS \Rightarrow \boldsymbol{L = \mu n^2 V}$

由此可见，**自感与线圈体积成正比，与单位长度上匝数平方成正比，与磁导率成正比**

因此，可以通过增大 V、提高 n、放入磁导率高的介质三种方式增大 L

2. 两个同轴圆筒形导体，半径分别为R_1, R_2，通过电流I，电流流向相反。筒间有μ均匀磁介质，求自感 L



可得圆筒之间$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$ 如图取长为l的面$PQRS$，将其分为许多小面元

则$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = Bldr \qquad \Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}ldr = \frac{\mu I l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

则$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$ 单位长度的自感为：$\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

3. 横截面为正方形的木制圆环，内径外径已知，木环上密绕导线，求自感系数

12.3.2 互感现象 Mutual Induction Phenomenon

互感现象 一个线圈中**电流发生变化**会在周围空间产生**变化的磁场**，使处于此空间的**另一个线圈**中**磁通量变化**，产生**感应电动势**

互感系数 I_1在I_2电流回路中所产生的磁通量 $\boldsymbol{\Phi_{12} = M_{12}I_1}$　I_2在I_1电流回路中所产生的磁通量$\Phi_{21} = M_{21}I_2$

$\boldsymbol{M_{12}}$**是线圈 1 对线圈 2 的互感系数**，简称互感

定义式 线圈 2 中产生的感应电动势：$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt}(M_{12}I_1)$

在线圈形状、大小、相对位置不变、周围不存在铁磁质情况下，互感M_{12}为常量，上式可化为

$\varepsilon_2 = -M_{12}\frac{dI_1}{dt}$　同理，线圈 1 中产生的$\varepsilon_1 = -M_{21}\frac{dI_2}{dt}$（方向可由楞次定律判定）

故有$\boldsymbol{M_{21} = M_{12} = M = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}}$　**（$\boldsymbol{\Phi_{21}}$为 2 对 1 产生的磁通量）**

单位 与自感系数一致，为**亨利**

影响因素 两个线圈的**几何形状、大小、匝数、相对位置、周围的磁介质**

若存在非铁磁质，还与磁介质的磁导率有关，但与线圈中的电流无关。

若存在铁磁质，则互感还决定于线圈中的电流。

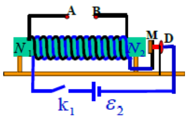
物理意义 $\varepsilon_2 = -M_{12}\frac{dI_1}{dt}$　$\varepsilon_1 = -M_{21}\frac{dI_2}{dt}$　$M = -\frac{\varepsilon_2}{dI_1/dt} = -\frac{\varepsilon_1}{dI_2/dt}$

M 为当一个回路中的电流变化率为**一个单位**时，在相邻另一回路中引起的**互感电动势**

计算步骤 ① 设I_1　② 求I_1磁场分布$\overrightarrow{B_1}$　③ 计算穿过回路 2 的Φ_{12}　④ 得到$M = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$

互感应用 无线电和电磁测量、电源变压器、电压互感器、电流互感器

感应圈



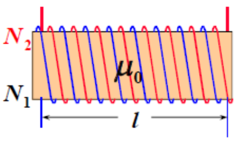
在实际应用中常用**两个同轴长直螺线管之间的互感来获得高压。**

如图所示，硅钢铁芯上绕有N_1, N_2的两个线圈，且$N_2 \gg N_1$，由断续器（MD）将N_1与低压电源连接，接通电源后，断续器使N_1中的电流反复通断，通过互感获得感应电动势，从而在次级线圈N_2中获得几万伏的电压。常用于汽车点火器、煤气灶点火器、电警棍等。

互感危害 电路之间的互感干扰

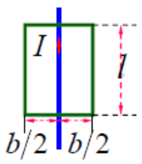
例题

1. 两个同轴长直绕螺线管：已知μ_0, N_1, N_2, l, S，求互感系数



设通过**线圈 1** 的电流为I_1，则$B_1 = \mu_0\frac{N_1}{l}I_1 = \mu_0 n_1 I_1$　$\Phi_{12} = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = B_1 S = \mu_0\frac{N_1}{l}I_1 S$

则有$M = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} = \mu_0\frac{N_1N_2}{l^2}lS = \mu_0 n_1 n_2 V$



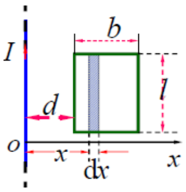
下题补充图

进一步地，$L_1 = \mu_0 n_1^2 V$，$L_2 = \mu_0 n_2^2 V$，可得$M = \sqrt{L_1L_2}$

在该例题中，**线圈 1 的磁通全部通过线圈 2**，称为**无磁漏**。一般情况下，$M = K\sqrt{L_1L_2}$

K为耦合系数，取值$0 \le K \le 1$，反应两个回路磁场耦合松紧的程度。

2. 磁导率为μ的均匀无限大磁介质中，有一无限长直导线和宽长为b, l的矩形线圈共面，直导线与矩形线圈一侧平行，相距为d，求二者的互感系数。



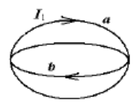
设长直导线电流为I，则$B = \frac{\mu I}{2\pi x}$　$d\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \frac{\mu I}{2\pi x}ldx$　$\Phi = \int_d^{b+d}\frac{\mu I}{2\pi x}ldx = \frac{\mu Il}{2\pi x}\ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$

故$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi x}\ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$

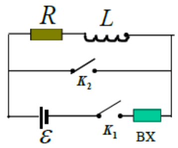
若导线如右图放置，则根据对称性有$\Phi = 0 \rightarrow M = 0$

3. 如图所示，两个环形导体 a，b 相互垂直放置，各自电流同时发生变化时，

则两环形导体只产生自感电流，不产生互感电流。（各自磁通无影响）



12.4 磁场的能量



推导 从螺绕环磁场能量特例中导出磁场能量一般表达式。

在$0-t_0$这段时间内有$\varepsilon+\varepsilon_L=iR$，其中自感电动势为$\varepsilon_L=-nlS\frac{dB}{dt}$，则$\varepsilon=nlS\frac{dB}{dt}+iR$，同乘$idt$得到

$\varepsilon idt_{电源做功}=inlSdB_{电源反抗自感电动势做功}+i^2Rdt_{回路电阻所放出的焦耳热}$

dt时间内电源提供给螺绕环磁场能量为$inlSdB$，供给单位体积磁场能量为$indB$，根据安培环路定理，**环内磁场强度为$H=ni$**，则**磁场能量密度**为：$w_m=\int_0^B\vec{H}\cdot d\vec{B}$（一般表达式，适用于真空和任何各向同性磁介质）

对于各向同性的顺磁质和抗磁质，有$B=\mu_0\mu_r H$

密度 故：$\boldsymbol{w_m=\int_0^H H\,d(\mu_0\mu_r H)=\frac{1}{2}\mu_0\mu_r H^2=\frac{1}{2}BH}$ 整个磁场能量为：$\boldsymbol{W_m=\iiint_\tau w_m d\tau=\iiint_\tau\frac{1}{2}BHd\tau}$

对于磁芯是各向同性的顺磁质和抗磁质，当电流达到稳定值I时，能量为：

能量 $W_m=w_mlS=\frac{1}{2}\mu H^2lS=\frac{1}{2}\mu n^2I^2lS$ 由于$L=\mu n^2V$，故$\boldsymbol{W_m=\frac{1}{2}LI^2}$

这种磁场能量与电路自感相联系称为**自感磁能**。

无磁介质时：$\boldsymbol{w_m=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}}$

电磁场能量密度 $w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})$

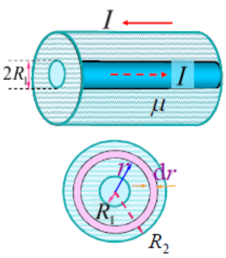
电磁场总能量 $W=\iiint_V\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})\cdot dV$

能量对比

电场能量	**磁场能量**
电容器储能：$\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU=\frac{Q^2}{2C}$	自感线圈储能：$\frac{1}{2}LI^2$
电场能量密度：$w_e=\frac{1}{2}ED=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$	磁场能量密度：$w_m=\frac{1}{2}BH=\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}=\boldsymbol{\frac{B^2}{2\mu_0}}$
电场能：$W_e=\int_V w_e dV$	磁场能：$W_m=\int_V w_m dV$
能量法可求电容 C	能量法可求自感 L

例题

1. 同轴电缆，中间有磁介质，芯线与圆筒上电流大小相等，方向相反，已知R_1,R_2,I,μ，求单位长度同轴电缆的磁能与自感（金属芯线内部磁场可忽略）



由安培环路定理求$H\begin{cases}H=0 & r<R_1\\ H=\frac{I}{2\pi r} & R_1<r<R_2\\ H=0 & r>R_2\end{cases}$ 则$R_1<r<R_2$时，$w_m=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2$

$w_m=\frac{\mu I^2}{8\pi^2r^2}$ 则有$W_m=\int_V\frac{\mu I^2}{8\pi^2r^2}dV$ 其中 dV 表示单位长度壳层体积：$dV=2\pi rdr\cdot 1$

则$W_m=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I^2}{4\pi r}dr=\frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

又有$W_m=\frac{1}{2}LI^2\Rightarrow L=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$