第四章 非线性方程求根

章节概述 **解数值问题**：直接法 逐次逼近法（$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to \cdots$ 精确解）A 可为数字,向量,矩阵或其他

两种形式：**搜索法（利用递推公式）、迭代法（利用法则（二分法等））**

直接法：小型问题或特殊解 **逐次逼近法**：大型问题及非线性问题

4.1 非线性方程的迭代法

根 设有非线性方程$f(x) = 0$，若有α使得$f(\alpha) = 0$,则称α为方程的根或零点

注意：代数方程 5 次及以上无解析公式，超越方程求根更难

单根区间： $f(x) = 0$在区间$[a, b]$上仅有一根 **多根区间**：$f(x) = 0$在区间$[a, b]$上有多个根，统称为有根区间

4.1.1 根的搜索

逐步搜索法 假定$f(a) < 0, f(b) > 0$，从$x_0 = a$出发，取预定步长h（譬如$h = (b - a)/N$)一步一步向右跨，检查节点$x_k = a + kh$上的函数值$f(x_k)$的符号，一旦异号，则有$[x_{k-1}, x_k]$为缩小区间，其宽度为预定步长h

步长h的选择是个关键. 只要$h < \varepsilon$，可取得任意精度的根。但计算量大，不适用于高精度计算。

二分法 考察有根$[a, b]$，取中点$x_0 = (a + b)/2$，检查$f(x_0)$与$f(a)$是否同号。

若相同，根在右侧，令$a_1 = x_0, b_1 = b$ 否则$a_1 = a, b_1 = x_0$

如此反复二分，可得区间$[a_k, b_k]$，且$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^{k+1}}$，其必收敛于某点$\alpha$，$\alpha$即为根

取根近似值$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$，有$|\alpha - x_k| \le \frac{b_k-a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$ 即$|\alpha - x_k| \le \varepsilon$ ε即为精度 **此法无法求重根**

4.1.2 简单迭代法

定义 设方程$x = \varphi(x)$与$f(x) = 0$同解，任取初值x_0 令$x_1 = \varphi(x_0)$，$x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_{k+1} = \varphi(x_k)$,$k = 0,1,2, \dots$

若$x_k \to \alpha$,则$\alpha = \varphi(\alpha)$,从而$f(\alpha) = 0$。x_k称为第 k 步迭代值。若$\{x_k\}$收敛，则迭代法收敛，否则发散