# 第四章 非线性方程求根

**章节概述** **解数值问题**：直接法 逐次逼近法（$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to \cdots$ 精确解）A 可为数字,向量,矩阵或其他

**两种形式**：**搜索法（利用递推公式）、迭代法（利用法则（二分法等））**

**直接法**：小型问题或特殊解 **逐次逼近法**：大型问题及非线性问题

## 4.1 根的搜索

**根** 设有非线性方程$f(x) = 0$，若有$\alpha$使得$f(\alpha) = 0$，则称$\alpha$为方程的根或零点

**注意**：代数方程 5 次及以上无解析公式，超越方程求根更难

**单根区间**：$f(x) = 0$在区间$[a, b]$上仅有一根 **多根区间**：$f(x) = 0$在区间$[a, b]$上有多个根，统称为有根区间

**逐步搜索法** 假定$f(a) < 0, f(b) > 0$，从$x_0 = a$出发，取**预定步长$h$** (譬如$h = (b - a)/N$)一步一步向右跨，检查节点$x_k = a + kh$上的函数值$f(x_k)$的符号，**一旦异号**，则有$[x_{k-1}, x_k]$为**缩小区间**，其宽度为预定步长$h$

步长$h$的选择是个关键. 只要$h < \varepsilon$，可取得任意精度的根。但**计算量大，不适用于高精度计算**。

**二分法** 考察有根$[a, b]$，取**中点**$x_0 = (a + b)/2$，检查$f(x_0)$与$f(a)$**是否同号**。

若**相同**，根在**右侧**，令$a_1 = x_0, b_1 = b$ 否则$a_1 = a, b_1 = x_0$

如此反复二分，可得区间$[a_k, b_k]$，且$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^{k+1}}$，其必收敛于某点$\alpha$，$\alpha$即为根

取根近似值$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$，有$|\alpha - x_k| \le \frac{b_k-a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$ 即$|\alpha - x_k| \le \varepsilon$ $\varepsilon$即为精度 **此法无法求重根**

## 4.2 简单迭代法

### 4.2.1 基本定义

**定义** 设方程$x = \varphi(x)$与$f(x) = 0$同解，任取初值$x_0$ 令$x_1 = \varphi(x_0)$，$x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ，$k = 0,1,2,\ldots$

若$x_k \to \alpha$,则$\boldsymbol{\alpha = \varphi(\alpha)}$,从而$f(\alpha) = 0$。$x_k$称为第$k$步迭代值。若$\{x_k\}$收敛，则迭代法收敛，否则发散

**示例** 求方程$x^3 - x - 1 = 0$在$x = 1.5$附近的根。则方程可等价为$x = \sqrt[3]{x+1}$. 取初值$x_0 = 1.5$，则$x_1 = \sqrt[3]{1.5+1}$

$x_1 = 1.35721$ $x_2 = \sqrt[3]{1.35721+1}$ 以此类推直到$x_7 = \sqrt[3]{1.32473+1} = 1.32472$，$x_8 = 1.32472$

$x_7 = x_8$，则认为$x_7$为方程的根，$\alpha \approx x_7 = 1.32472$

### 4.2.2 收敛性

**收敛性** 迭代法不适用于全部情况。例如，如果上式示例转为另一种等价形式$x = x^3 - 1$，初值取$x_0 = 1.5$发现$x_1 = 2.375, x_2 = 12.39, x_3 = 1904 \ldots$，结果不趋于某个极限。这种**不收敛的迭代称为发散**。

**定理 2-1** 假定迭代函数$\varphi(x)$满足条件：

① 对任意$x \in [a, b]$有$a \le \varphi(x) \le b$ 保证迭代序列一直在定义域内

② 存在正数$L < 1$，使对任意$x \in [a, b]$有$\boldsymbol{|\varphi'(x)| \le L < 1}$ 保证残差趋于 0

则迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$对于任意初值$x_0 \in [a,\ b]$均收敛于方程$x = \varphi(x)$的根$\alpha$。

**证明** 由**微分中值定理**：$x_{k+1} - \alpha = \varphi(x_k) - \varphi(\alpha) \overset{同除}{=} \varphi'(\xi)(x_k - \alpha)$ $\xi$是$\alpha$与$x_k$之间的某一点

当$x_k \in [a, b]$时，$\xi \in [a, b]$，则可利用条件断定$|x_{k+1} - \alpha|_{这一次的距离} \le L|x_k - \alpha|_{上一次的距离}$

如果 L 小于 1，则上一次距离比这一次大，所以最终会趋向于 0

反复递推有$|x_k - \alpha| \le L^k|x_0 - \alpha|_{初始误差限}$，故当$k \to \infty$时，迭代值将收敛到所求根$\alpha$

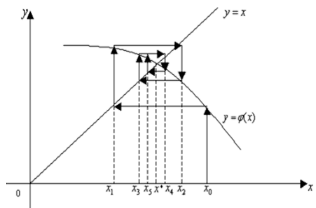
**检验** 对于$\varphi(x_k) = \sqrt[3]{x+1}$，$\left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}\right] \in [1,2]$，$\varphi'(x) = \frac{1}{3(x+1)^{2/3}} < 1$，所以迭代法收敛

**说明** ① 条件是**充分的**而非必要的. 例如$x^3-2x=0$，取$\varphi(x_k)=\frac{1}{2}x^3,\varphi'(x)=\frac{3}{2}x^2$，在$[-1,1]$上不满足$|\varphi'(x)|<1$。但区间可缩小，实际上$\alpha=0$，如果取初值在零附近，可能收敛。

② 通常可先用定理判断，若不满足，则改变迭代公式使之满足，然后迭代

③ 如果$|\varphi'(x)|\geq 1$，则$|x_{k+1}-x_k|=|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})|=|\varphi'(\xi)|_{L大于等于1}|x_{k+1}-x_k|\geq|x_{k+1}-x_k|\geq\cdots\geq|x_1-x_0|$ 距离不断变大，故迭代法必发散

**推论** 误差估计：$|x_k-\alpha|\leq\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$ $|x_k-\alpha|\leq\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$



到准确值的距离不断收敛

**说明** ① 左式用于控制迭代过程：$|x_k-\alpha|\leq\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon$

② 右式用于估计迭代次数：$|x_k-\alpha|\leq\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|<\varepsilon$ 求出$k$值

③ 由于$L$值并不知道（可理解为$\varphi'(\xi)$），工程实际上只看$x_k-x_{k-1}<\varepsilon$

④ 该定理以$[a,b]$中任意一点作初值，迭代都收敛，称为**全局收敛**。

由于该要求很难满足，故考虑**在$\alpha$的某一邻域的收敛**，即**局部收敛性**。

**定理 2-1′** 若方程有根$\alpha$，$|\varphi'(\alpha)|<1$，且$\varphi'$在$\alpha$的某邻域$U(\alpha)$内连续，则存在$\delta>0$，只要$x_0\in[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$则迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛 （假设有根且根的导数<1，则存在一个邻域，其中任一点收敛）

（实际应用中不知道根在何处，所以该定理不用于正向求根）

**证明** 详见 PPT

**说明** 只要$x_0$充分接近$\alpha$，且$|\varphi'(x_0)|$明显小于 1，则$\{x_k\}$收敛于$\alpha$

**示例** 求方程$x=e^{-x}$在$x=0.5$附近的一个根，要求精度$\delta<10^{-3}$

记$f(x)=x-e^{-x}$，则$f(0.5)<0,f(1)>0$，即根在$[0.5,1]$之间，要验证第一定理很难，可以验证第二定理。 因为$\varphi(x)=e^{-x},\varphi'(x)=-e^{-x}$，$|\varphi'(x)|<1$，所以取$x_0=0.5$，迭代法必然收敛。可逐项计算。

### 4.2.3 收敛阶

**定义 2-1** 用于**衡量收敛速度**. 设由某方法确定的序列$\{x_k\}$收敛于方程的根$\alpha$，如果存在正实数$p$，

使得$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\alpha-x_{k+1}|_{k+1\text{ 次绝对误差}}}{|\alpha-x_k|^p_{k\text{ 次绝对误差}}}=C$，则称$\{x_k\}$收敛于$\alpha$的速度是**$p$阶的**，或称该方法具有**$p$阶敛速**。

特别的，当$p=1$，称为**线性收敛（一次收敛）**；$p=2$，称为**平方收敛**，$p>1$时，称为**超线性收敛**

**说明** 一个方法的收敛速度实际就是绝对误差的收缩率。敛速的阶 p 越大，绝对误差缩减得越快

若$\varphi'(x)$连续，且$\varphi'(\alpha)\neq 0$，则迭代格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$必然为线性收敛

因为$|\alpha-x_{k+1}|=|\varphi(\alpha)-\varphi(x_k)|=|\varphi'(\xi)||\alpha-x_k|$ $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\alpha-x_{k+1}|}{|\alpha-x_k|}=\lim\limits_{k\to\infty}|\varphi'(\xi)|=|\varphi'(\alpha)|\neq 0$

如果$\varphi'(\alpha)=0$，则收敛速度就不只是线性的了

**定理 2-2** 设方程$x=\varphi(x)$，正整数$p\geq 2$，若$\varphi^{(p)}$在根$\alpha$的某个邻域内连续，且满足$\begin{cases}\varphi^{(k)}(\alpha)=0\\ \varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0\end{cases}$

**其中$(k=1,2,\ldots,p-1)$，则$\{x_k\}$ $p$阶局部收敛**

**证明** 详见 PPT

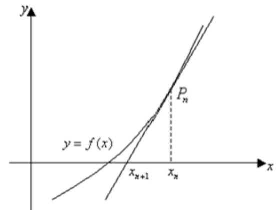
**示例** 设$f\in C^2[a,b]_{二阶连续}$ $\varphi(x)=x-r_1(x)f(x)-r_2(x)f^2(x)$，$\alpha$为$f$的单重零点。试确定未知函数$r_1(x),r_2(x)$使得迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$至少是三阶局部收敛的。

由定理 2-2，应当有$\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=0$，因为$\varphi'(x)=1-r_1'(x)f(x)-r_1(x)f'(x)-r_2'(x)f^2(x)-2r_2(x)f(x)f'(x)$

而$f(\alpha)=0,f'(\alpha)\neq 0$，令$\varphi'(\alpha)=0$ 有$1-r_1'(\alpha)f'(\alpha)=0$ 取$r_1(x)=\frac{1}{f'(x)}$则有$\varphi'(\alpha)=0$

此时有$\varphi'(x)=-r_1'(x)f(x)-r_2'(x)f^2(x)-2r_2(x)f(x)f'(x)\Rightarrow\varphi''(x)=-r_1''(x)f(x)-r_1'(x)f'(x)-r_2''(x)f^2(x)$

同理求解得：$r_2(x)=\frac{f''(x)}{2[f'(x)]^3}$ 详见 PPT



牛顿迭代法几何意义

# 4.3 牛顿迭代法及其变形

## 4.3.1 牛顿迭代法的基本概念

**方法概念**

希望是**平方收敛**的，**因此$\varphi'(\alpha)=0$**　取$\varphi(x)=x+k(x)f(x)$，则$x=\varphi(x)$与$f(x)=0$同解。

希望构造一个$k(x)$使得$\varphi'(\alpha)=0$　则求导有$\varphi'(x)=1+k'(x)f(x)+k(x)f'(x)$

令$\varphi'(\alpha)=0 \Rightarrow k(\alpha)f'(\alpha)=-1$　若$f'(\alpha)\neq 0$，则有$k(\alpha)=-\frac{1}{f'(\alpha)}$ 即$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

称迭代法：$x_{k+1}=x-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ **为牛顿迭代法**

**几何意义**

给定非线性方程$f(x)=0$的解$\alpha$的近似值$x_n$，用过点$P_n(x_n,f(x_n))$的**切线**：$y=f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n)$

近似表示曲线$y=f(x)$，并将**该切线与$x$轴的交点横坐标**$x_{n+1}$作为$\alpha$的新的近似值

一般计算器计算根号等内容均使用该方法

**例题**

1. 用牛顿法计算方程$x^3-x-1=0$在$x=1.5$附近的根

$f(x)=x^3-x-1$ $f'(x)=3x^2-1$ 在 1.5 附近不为零。则有$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1}$　$k=0,1,2,\ldots$

如此迭代 3 次，即有六位有效数字

2. 用 Newton 法求非线性方程$f(x)=xe^x-1=0$在$(0,1)$内的根，取$x(0)=0.5$

$f'(x)=(1+x)e^x \Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{x_ke^{x_k}-1}{(1+x_k)e^{x_k}}$　$k=0,1,2,\ldots$　可迭代计算

## 4.3.2 牛顿迭代法的收敛性

**若α是$f(x)$的单重根**

$f(\alpha)=0, f'(\alpha)\neq 0$　因为$\varphi'(\alpha)=\frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2}=0, \varphi''(\alpha)=\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ 一般不为零。

**所以在$f'(\alpha)\neq 0, f''(x)$连续的条件下**，牛顿迭代法**至少是**平方收敛的。

**若α是$f(x)$的重根**

则有$f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$，其中$g(\alpha)\neq 0, m\geq 2$

因为$f'(x)=m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m g'(x)$ 记$x=\alpha+h$

$$\text{则}\quad \varphi(\alpha+h)=(\alpha+h)-\frac{h^m g(\alpha+h)}{mh^{m-1}g(\alpha+h)+h^m g'(\alpha+h)}=\varphi(\alpha)+h-\frac{hg(\alpha+h)}{mg(\alpha+h)+hg'(\alpha+h)}$$

$$\Rightarrow \varphi'(\alpha)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(\alpha+h)-\varphi(\alpha)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(1-\frac{g(\alpha+h)}{mg(\alpha+h)+hg'(\alpha+h)}\right)=1-\frac{1}{m}$$

当$m\geq 2$时，$\varphi'(\alpha)\neq 0$，由$|\varphi'(\alpha)|<1$，得**牛顿迭代法一阶收敛**。

**改进形式**

① 取$\varphi(x)=x-m\frac{f(x)}{f'(x)}$，易得$\varphi'(\alpha=0)$，所以**如果事前知道$\alpha$的重数**，就可以改造迭代公式：

$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x)}{f'(x)}$ 此时，**迭代序列是二阶收敛的**

② 事前不知道重数，或者令 $u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(x-\alpha)^m g(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m g'(x)}=\frac{(x-\alpha)g(x)}{mg(x)+(x-\alpha)g'(x)}$

**则$\alpha$是$u(x)$的单重零点(把原有重根转化为单根)**，对$u(x)$应用牛顿法：

有$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{u(x^{(k)})}{u'(x^{(k)})}=x^{(k)}-\frac{f(x^{(k)})f'(x^{(k)})}{[f'(x^{(k)})]^2-f(x^{(k)})f''(x^{(k)})}$ 迭代序列也是二阶收敛的

**例题**

1. $\sqrt{2}$是方程$x^4-4x^2+4=0$的二重根，求解它

① 牛顿法：$\varphi(x)=x-\frac{x^4-4x^2+4}{4x^3-8x}=x-\frac{x^2-2}{4x}$

② 采用$\varphi(x)=x-m\frac{f(x)}{f'(x)}$：$x_{k+1}=x_k-2\frac{(x_k)^2-2}{4x_k}=x_k-\frac{(x_k)^2-2}{2x_k}$

③ 采用$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{x^2-x}{4x}$　$u'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)$　$\frac{u(x)}{u'(x)}=\frac{x(x^2-2)}{x^2+2}$　即$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k[(x_k)^2-2]}{[x_k]^2+2}$