第一章 绪论

1.1 数值问题与数值方法

数值问题 输入与输出之间函数关系的一个确定而无歧义的描述

离散化 将数学模型离散为数值问题

数值方法 可执行的系列计算公式（如四则、逻辑和标准函数）

讨论内容 本课程讨论计算机上串行确定型的数值算法

1.2 误差基本理论

来源 观测误差→模型误差→截断误差→舍入误差 （主要讨论后两者）

绝对误差 $E(x^*) = x^* - x$ **x为精确值，x^*为近似值** 绝对误差可正可负

绝对误差限 $\varepsilon(x^*) = |x^* - x| \le E(x^*)$ 知道$\varepsilon(x^*)$就可以了解 x 的范围 ε的值不唯一，但越小越好。

相对误差 $E_r = \frac{E(x^*)}{x} = \frac{x^*-x}{x} \approx E_r^* = \frac{E(x^*)}{x^*}$

相对误差限 $|E_r^*| \le \varepsilon_r(x^*)$ 相对误差没有量纲，常用百分数表示

有效数字(位) 若x^*的绝对误差值小于等于某一位数的半个单位，而该位数字到x^*的第一位非零数字共有 n 位，则x^*有 n 位有效数字

关系 ① 若x^*有 n 位有效数字，则$|E_r^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{1-n}$

② 若有$|E_r^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{-n}$，则$x^*$至少有 n 位有效数字

1.3 数值运算的误差

函数运算 当 x 有误差时，$f(x)$也会有误差，其误差限可用泰勒展开式估计

1. 有$y - y^* = f(x) - f(x^*)$ $E(y^*) \approx f'(x^*)E(x^*)$
2. $E(y^*) \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)}{\partial x_k}\right)E(x_k^*)$ $E_r^*(y^*) \approx \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^*}{y^*}\left(\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)}{\partial x_k}\right)E_r^*(x_k^*)$

四则运算 $E(y^*) \approx f_1'(x_1^*,x_2^*)E(x_1^*) + f_2'(x_1^*,x_2^*)E(x_2^*)$ $E_r^*(y^*) \approx f_1'(x_1^*,x_2^*)\frac{x_1^*}{y^*}E_r^*(x_1^*) + f_2'(x_1^*,x_2^*)\frac{x_2^*}{y^*}E_r^*(x_2^*)$

加法 $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ $f_1' = 1$ $f_2' = \pm 1$ $E(y^*) = E(x_1^*) \pm E(x_2^*)$ $E_r^*(y^*) \approx \frac{x_1^*E_r^*(x_1^*) \pm x_2^*E_r^*(x_2^*)}{(x_1^* \pm x_2^*)}$

乘法 $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ $f_1' = x_2^*$ $f_2' = x_1^*$ $E(y^*) = x_2^*E(x_1^*) + x_1^*E(x_2^*)$ $E_r^*(y^*) \approx E_r^*(x_1^*) + E_r^*(x_2^*)$

除法 $f(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ $f_1' = \frac{1}{x_2^*}$ $f_2' = \frac{-x_1^*}{(x_2^*)^2}$ $E(y^*) = \frac{x_2^*E(x_1^*) - x_1^*E(x_2^*)}{(x_2^*)^2}$ $E_r^*(y^*) \approx E_r^*(x_1^*) - E_r^*(x_2^*)$