第四章 非线性方程求根

章节概述 **解数值问题**：直接法 逐次逼近法（$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to \cdots$ 精确解）A 可为数字,向量,矩阵或其他
两种形式：**搜索法（利用递推公式）、迭代法（利用法则（二分法等））**
直接法：小型问题或特殊解 **逐次逼近法**：大型问题及非线性问题

4.1 根的搜索

根 设有非线性方程$f(x)=0$，若有α使得$f(\alpha)=0$，则称α为方程的根或零点
注意：代数方程 5 次及以上无解析公式，超越方程求根更难
单根区间：$f(x)=0$在区间$[a,b]$上仅有一根 **多根区间**：$f(x)=0$在区间$[a,b]$上有多个根，统称为有根区间

逐步搜索法 假定$f(a)<0, f(b)>0$，从$x_0=a$出发，取**预定步长h**（譬如$h=(b-a)/N$）一步一步向右跨，检查节点$x_k=a+kh$上的函数值$f(x_k)$的符号，**一旦异号**，则有$[x_{k-1},x_k]$为**缩小区间**，其宽度为预定步长h
步长h的选择是个关键. 只要$h<\varepsilon$，可取得任意精度的根。但**计算量大，不适用于高精度计算**。

二分法 考察有根$[a,b]$，取**中点**$x_0=(a+b)/2$，检查$f(x_0)$与$f(a)$**是否同号**。
若**相同**，根在**右侧**，令$a_1=x_0, b_1=b$ 否则$a_1=a, b_1=x_0$

如此反复二分，可得区间$[a_k,b_k]$，且$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^{k+1}}$，其必收敛于某点$\alpha$，$\alpha$即为根

取根近似值$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$，有$|\alpha-x_k|\le\frac{b_k-a_k}{2}=\frac{b-a}{2^{k+1}}$ 即$|\alpha-x_k|\le\varepsilon$ ε即为精度 **此法无法求重根**

4.2 简单迭代法

4.2.1 基本定义

定义 设方程$x=\varphi(x)$与$f(x)=0$同解，任取初值x_0 令$x_1=\varphi(x_0)$，$x_2=\varphi(x_1),\ldots,x_{k+1}=\varphi(x_k)$,$k=0,1,2,\ldots$
若$x_k\to\alpha$,则$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\varphi(\alpha)}$,从而$f(\alpha)=0$。$x_k$称为第$k$步迭代值。若$\{x_k\}$收敛，则迭代法收敛，否则发散

示例 求方程$x^3-x-1=0$在$x=1.5$附近的根。则方程可等价为$x=\sqrt[3]{x+1}$. 取初值$x_0=1.5$，则$x_1=\sqrt[3]{1.5+1}$
$x_1=1.35721$ $x_2=\sqrt[3]{1.35721+1}$ 以此类推直到$x_7=\sqrt[3]{1.32473+1}=1.32472$，$x_8=1.32472$
$x_7=x_8$，则认为x_7为方程的根，$\alpha\approx x_7=1.32472$

4.2.2 收敛性

收敛性 迭代法不适用于全部情况。例如，如果上式示例转为另一种等价形式$x=x^3-1$，初值取$x_0=1.5$发现$x_1=2.375, x_2=12.39, x_3=1904\ldots$，结果不趋于某个极限。这种**不收敛的迭代称为发散**。

定理 2-1 假定迭代函数$\varphi(x)$满足条件：
① 对任意$x\in[a,b]$有$a\le\varphi(x)\le b$ 保证迭代序列一直在定义域内
② 存在正数$L<1$，使对任意$x\in[a,b]$有$|\boldsymbol{\varphi'(x)}|\le\boldsymbol{L}<\boldsymbol{1}$ 保证残差趋于 0
则迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$对于任意初值$x_0\in[a, b]$均收敛于方程$x=\varphi(x)$的根α。

证明 由**微分中值定理**：$x_{k+1}-\alpha=\varphi(x_k)-\varphi(\alpha)\overset{\text{同除}}{=}\varphi'(\xi)(x_k-\alpha)$ ξ是α与x_k之间的某一点
当$x_k\in[a,b]$时，$\xi\in[a,b]$，则可利用条件断定$|x_{k+1}-\alpha|_{这一次的距离}\le L|x_k-\alpha|_{上一次的距离}$
如果 L 小于 1，则上一次距离比这一次大，所以最终会趋向于 0
反复递推有$|x_k-\alpha|\le L^k|x_0-\alpha|_{初始误差限}$，故当$k\to\infty$时，迭代值将收敛到所求根$\alpha$

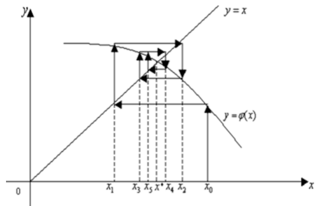
检验 对于$\varphi(x_k)=\sqrt[3]{x+1}$，$\left[\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3}\right]\in[1,2]$，$\varphi'(x)=\frac{1}{3(x+1)^{2/3}}<1$，所以迭代法收敛

说明 ① 条件是**充分的**而非必要的. 例如$x^3-2x=0$，取$\varphi(x_k)=\frac{1}{2}x^3,\varphi'(x)=\frac{3}{2}x^2$，在$[-1,1]$上不满足$|\varphi'(x)|<1$。但区间可缩小，实际上$\alpha=0$，如果取初值在零附近，可能收敛。

② 通常可先用定理判断，若不满足，则改变迭代公式使之满足，然后迭代

③ 如果$|\varphi'(x)|\ge 1$，则$|x_{k+1}-x_k|=|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})|=|\varphi'(\xi)|_{L\text{大于等于}1}|x_{k+1}-x_k|\ge |x_{k+1}-x_k|\ge\cdots\ge|x_1-x_0|$ 距离不断变大，故迭代法必发散

推论 **误差估计**：$|x_k-\alpha|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$　　　$|x_k-\alpha|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$



到准确值的距离不断收敛

说明 ① 左式用于控制迭代过程：$|x_k-\alpha|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon$

② 右式用于估计迭代次数：$|x_k-\alpha|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|<\varepsilon$ 求出k值

③ 由于L值并不知道（可理解为$\varphi'(\xi)$），工程实际上只看$x_k-x_{k-1}<\varepsilon$

④ 该定理以$[a,b]$中任意一点作初值，迭代都收敛，称为**全局收敛**。

由于该要求很难满足，故考虑**在α的某一邻域的收敛**，即**局部收敛性**。

定理 2-1′ 若方程有根α，$|\varphi'(\alpha)|<1$，且φ'在α的某邻域$U(\alpha)$内连续，则存在$\delta>0$，只要$x_0\in[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$则迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛　（假设有根且根的导数<1，则存在一个邻域，其中任一点收敛）

（实际应用中不知道根在何处，所以该定理不用于正向求根）

证明 详见 PPT

说明 只要x_0充分接近α，且$|\varphi'(x_0)|$明显小于 1，则$\{x_k\}$收敛于α

示例 求方程$x=e^{-x}$在$x=0.5$附近的一个根，要求精度$\delta<10^{-3}$

记$f(x)=x-e^{-x}$，则$f(0.5)<0,f(1)>0$，即根在$[0.5,1]$之间，要验证第一定理很难，可以验证第二定理。因为$\varphi(x)=e^{-x},\varphi'(x)=-e^{-x}$，$|\varphi'(x)|<1$，所以取$x_0=0.5$，迭代法必然收敛。可逐项计算。

4.2.3 收敛阶

定义 2-1 用于**衡量收敛速度**. 设由某方法确定的序列$\{x_k\}$收敛于方程的根α，如果存在正实数p，

使得$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\alpha-x_{k+1}|_{k+1\text{ 次绝对误差}}}{|\alpha-x_k|^p_{k\text{ 次绝对误差}}}=C$，则称$\{x_k\}$收敛于$\alpha$的速度是**$p$阶的**，或称该方法具有**$p$阶敛速**。

特别的，当$p=1$，称为**线性收敛（一次收敛）**；$p=2$，称为**平方收敛**，$p>1$时，称为**超线性收敛**

说明 一个方法的收敛速度实际就是绝对误差的收缩率。敛速的阶 p 越大，绝对误差缩减得越快

若$\varphi'(x)$连续，且$\varphi'(\alpha)\ne 0$，则迭代格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$必然为线性收敛

因为$|\alpha-x_{k+1}|=|\varphi(\alpha)-\varphi(x_k)|=|\varphi'(\xi)||\alpha-x_k|$　　　$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\alpha-x_{k+1}|}{|\alpha-x_k|}=\lim\limits_{k\to\infty}|\varphi'(\xi)|=|\varphi'(\alpha)|\ne 0$

如果$\varphi'(\alpha)=0$，则收敛速度就不只是线性的了

定理 2-2 设方程$x=\varphi(x)$，正整数$p\ge 2$，若$\varphi^{(p)}$在根α的某个邻域内连续，且满足$\begin{cases}\boldsymbol{\varphi^{(k)}(\alpha)=0}\\ \boldsymbol{\varphi^{(p)}(\alpha)\ne 0}\end{cases}$

其中$(k=1,2,\ldots,p-1)$，则$\{x_k\}$ p阶局部收敛

证明 详见 PPT

示例 设$f\in C^2[a,b]_{\text{二阶连续}}$ $\varphi(x)=x-r_1(x)f(x)-r_2(x)f^2(x)$，$\alpha$为$f$的单重零点。试确定未知函数$r_1(x),r_2(x)$使得迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$至少是三阶局部收敛的。

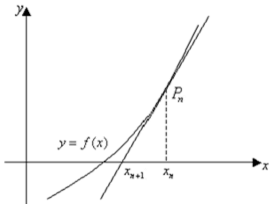
由定理 2-2，应当有$\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=0$，因为$\varphi'(x)=1-r_1'(x)f(x)-r_1(x)f'(x)-r_2'(x)f^2(x)-2r_2(x)f(x)f'(x)$

而$f(\alpha)=0,f'(\alpha)\ne 0$，令$\varphi'(\alpha)=0$ 有$1-r_1'(\alpha)f'(\alpha)\ =0$　取$r_1(x)=\frac{1}{f'(x)}$则有$\varphi'(\alpha)=0$

此时有$\varphi'(x)=-r_1'(x)f(x)-r_2'(x)f^2(x)-2r_2(x)f(x)f'(x)\Rightarrow\varphi''(x)=-r_1''(x)f(x)-r_1'(x)f'(x)-r_2''(x)f^2(x)$

同理求解得：$r_2(x)=\frac{f''(x)}{2[f'(x)]^3}$　详见 PPT

4.3 牛顿迭代法及其变形



牛顿迭代法几何意义

4.3.1 牛顿迭代法的基本概念

方法概念　希望是**平方收敛**的，**因此$\varphi'(\alpha)=0$**　取$\varphi(x)=x+k(x)f(x)$，则$x=\varphi(x)$与$f(x)=0$同解。

希望构造一个$k(x)$使得$\varphi'(\alpha)=0$　则求导有$\varphi'(x)=1+k'(x)f(x)+k(x)f'(x)$

令$\varphi'(\alpha)=0 \Rightarrow k(\alpha)f'(\alpha)=-1$　若$f'(\alpha)\neq 0$，则有$k(\alpha)=-\frac{1}{f'(\alpha)}$ 即$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

称迭代法：$x_{k+1}=x-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ **为牛顿迭代法**

几何意义　给定非线性方程$f(x)=0$的解α的近似值x_n，用过点$P_n(x_n,f(x_n))$的**切线**：$y=f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n)$

近似表示曲线$y=f(x)$，并将**该切线与x轴的交点横坐标**x_{n+1}作为α的新的近似值

一般计算器计算根号等内容均使用该方法

例题　1. 用牛顿法计算方程$x^3-x-1=0$在$x=1.5$附近的根

$f(x)=x^3-x-1$ $f'(x)=3x^2-1$ 在 1.5 附近不为零。则有$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1}$　$k=0,1,2,\dots$

如此迭代 3 次，即有六位有效数字

2. 用 Newton 法求非线性方程$f(x)=xe^x-1=0$在$(0,1)$内的根，取$x(0)=0.5$

$f'(x)=(1+x)e^x \Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{x_ke^{x_k}-1}{(1+x_k)e^{x_k}}$　$k=0,1,2,\dots$　可迭代计算

4.3.2 牛顿迭代法的收敛性

若α是$f(x)$的单重根　$f(\alpha)=0, f'(\alpha)\neq 0$　因为$\varphi'(\alpha)=\frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2}=0, \varphi''(\alpha)=\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ 一般不为零。

所以在$f'(\alpha)\neq 0, f''(x)$连续的条件下，牛顿迭代法**至少是**平方收敛的。

若α是$f(x)$的重根　则有$f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$，其中$g(\alpha)\neq 0, m\geq 2$

因为$f'(x)=m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m g'(x)$ 记$x=\alpha+h$

则 $\varphi(\alpha+h)=(\alpha+h)-\frac{h^m g(\alpha+h)}{mh^{m-1}g(\alpha+h)+h^m g'(\alpha+h)}=\varphi(\alpha)+h-\frac{hg(\alpha+h)}{mg(\alpha+h)+hg'(\alpha+h)}$

$\Rightarrow \varphi'(\alpha)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\varphi(\alpha+h)-\varphi(\alpha)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(1-\frac{g(\alpha+h)}{mg(\alpha+h)+hg'(\alpha+h)})=1-\frac{1}{m}$

当$m\geq 2$时，$\varphi'(\alpha)\neq 0$，由$|\varphi'(\alpha)|<1$，得**牛顿迭代法一阶收敛**。

改进形式　① 取$\varphi(x)=x-m\frac{f(x)}{f'(x)}$, 易得$\varphi'(\alpha)=0$, 所以**如果事前知道$\alpha$的重数**, 就可以改造迭代公式:

$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x)}{f'(x)}$ 此时，**迭代序列是二阶收敛的**

② 事前不知道重数，或者令 $u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(x-\alpha)^m g(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m g'(x)}=\frac{(x-\alpha)g(x)}{mg(x)+(x-\alpha)g'(x)}$

则α是$u(x)$的单重零点(把原有重根转化为单根)，对$u(x)$应用牛顿法：

有$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{u(x^{(k)})}{u'(x^{(k)})}=x^{(k)}-\frac{f(x^{(k)})f'(x^{(k)})}{[f'(x^{(k)})]^2-f(x^{(k)})f''(x^{(k)})}$ 迭代序列也是二阶收敛的

例题　1. $\sqrt{2}$是方程$x^4-4x^2+4=0$的二重根，求解它

① 牛顿法：$\varphi(x)=x-\frac{x^4-4x^2+4}{4x^3-8x}=x-\frac{x^2-2}{4x}$

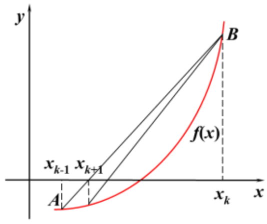
② 采用$\varphi(x)=x-m\frac{f(x)}{f'(x)}$：$x_{k+1}=x_k-2\frac{(x_k)^2-2}{4x_k}=x_k-\frac{(x_k)^2-2}{2x_k}$

③ 采用$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{x^2-x}{4x}$　$u'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)$　$\frac{u(x)}{u'(x)}=\frac{x(x^2-2)}{x^2+2}$　即$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k[(x_k)^2-2]}{[x_k]^2+2}$

2. 计算$\sqrt[3]{7}$的近似值

$\sqrt[3]{7}$是方程$x^3-7=0$的根，使用牛顿迭代公式：$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-7}{3x_k^2}$ 可递推

4.3.3 弦截法



弦截法/割线法示意图

推导 牛顿迭代法**计算导数不方便** 使用差分代替 $f'(x_k)\approx\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$

如果其收敛，则最终值必然相等，则代入$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x)}{f'(x)}$ 可得

$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$ 称该方法为弦截法

几何意义 由于$\Delta Ax_{k-1}x_{k+1}\sim\Delta Bx_kx_{k+1}$ 所以$\frac{f(x_k)}{x_k-x_{k-1}}=\frac{-f(x_{k-1})}{x_{k+1}-x_{k-1}}\Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$

注意 ① 当 Newton 法与弦截法都收敛时，弦截法的收敛阶为1.681，低于 Newton 法
② 弦截法虽无需求导，但需**前两步**的值.（**有两个起始点**）

例题 1. 用迭代方法求方程$f(x)=x-2^{-x}=0$在$[0,1]$内实根的近似值，精度10^{-4}，初值取$x_0=0.5$

简单迭代公式：$x_{k+1}=2^{-x_k}$ 很慢

牛顿迭代公式：$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-2^{-x_k}}{1+2^{-x_k}\ln 2}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ 4 次收敛

弦截法迭代公式：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$ $(k=1,2,\ldots)$ 5 次收敛

4.3.4 牛顿下山法

概述 为**防止牛顿法发散**，加入条件有$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$，即**要求单减**

引入 为此，引入$0<\lambda<1$，令$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 称λ为**下山因子**

后一个点是前一个点加一个矫正项，如果后一项$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$过大，可能会脱离定义域，要增加λ保证更新后的值仍在定义域内。$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$代表值不断趋向准确值。

如果知道x_k后，为了求x_{k+1}可以先用$\lambda=1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3}\ldots$进行试算，若求不到使得$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$的$x_{k+1}$，则**称为下山失败**，应当另取初始值$x_0$

例题 1. 用牛顿下山法计算 $f(x)=\frac{x^3}{3}-x=0$

4.4 迭代法的加速

4.4.1 Aitken 加速

推导 设$x_k\to\alpha$为线性收敛，则当k充分大时，$\frac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha}\approx C$，从而 $\frac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha}\approx\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}$

$\Rightarrow\alpha\approx\frac{x_{k-1}x_{k+1}-x_k^2}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}=x_{k+1}-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}$ **当前结果与前面 2 次结果**结合，得到矫正项，使之加速

公式 令 $\bar{x}_{k+1}=x_{k+1}-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}$ 可以证明$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\bar{x}_k-\alpha}{x_k-\alpha}=0$ 则**速度比原始方法快**，称此法为 Aitken 加速法

注意 有时甚至可能将发散的迭代格式变为收敛