第四章 流体涡旋动力学基础

章节引言　　流体的**涡旋运动**大量存在于自然界中，如大气中的**气旋、反气旋、龙卷、台风**等，大气中的涡旋运动对天气系统的形成和发展有密切的关系。实际流体的运动速度可以表示为$\vec{V}=\vec{V}_{r涡旋运动}+\vec{V}_{\phi无旋运动}$

4.1 速度势函数和流函数

4.1.1 速度势函数φ

定义　　**存在条件：无旋**

如果在流体域内**涡度为零**，即 $\nabla\times\vec{V}=0$，则为**无旋运动**，否则称之为涡旋运动 $\nabla\times\vec{V}\neq 0$

任意一个流动可以分解为无旋流动和有旋流动。

据**矢量分析**知识，任意一函数的梯度，取旋度恒等于零 $\nabla\times\nabla\varphi\equiv 0$　$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}=0$

对于无旋流动，必定存在一个函数$\varphi(x,y,z,t)$满足如 $\vec{V}=-\nabla\varphi$ 或 $\vec{V}=-grad\varphi$ （负号代表高值指向低值）

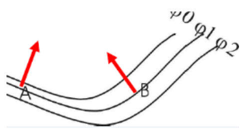
无旋流动的**速度矢**总可以用**函数φ的梯度**来表示，把函数$\varphi(x,y,z,t)$ 叫做**速度的（位）势函数**，可以用这个函数来**表示无旋流动的流场**。通常将无旋流动称为**有势流动或势流**。

特性　　原有的流速矢量描述流体运动需要三个变量，现在引进势函数之后：$\vec{V}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$

$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ，$v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}$，$w=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ 只要**一个变量（势函数）**就可以来描述流体运动，大幅简化问题。

等势面　　用势函数描述运动，对于某一固定时刻 $\varphi(x,y,z,t)=C$常数，为一空间曲面，称为**等位势面**。
上式取不同常数，可以得到不同的等位势面，得到**等位势面族**。

由流速场与势函数的关系可知：$\vec{V}=-\nabla\varphi$　**无旋流速矢**与等位势面**相垂直**，由**高位势流向低位势**，等位势面紧密处，**位势梯度大**，相应的**流速大**；等位势面稀疏处，**位势梯度小**，相应的**流速小**。
例如，图中所示$\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2$，则$A,B$两处流速$V_A>V_B$

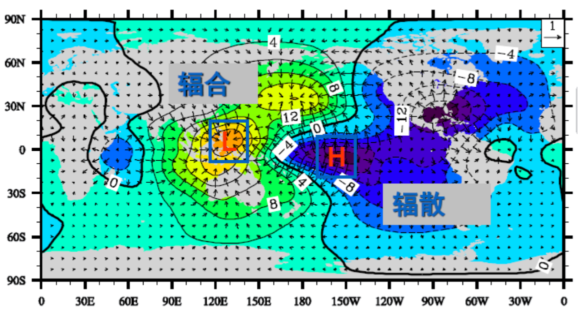


散度　　假如流体的散度为：$D=\nabla\cdot\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$　又有$\vec{V}=-\nabla\varphi$

根据势函数的定义有：$D=-\nabla^2\varphi$ (泊松方程)　　其中$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为三维拉普拉斯算子

如果$\nabla^2\varphi=0$，则称其为**拉普拉斯方程**

求解　　可以看出，如果给定D，通过求解泊松方程，即可求得势函数。实际应用常用此法。
① 如已知D，直接**求解泊松方程**，可得势函数
② 如已知**速度场**，可以先**求出D**，然后再**求解泊松方程**，最终得到势函数



速度势函数与对应的无旋风场（图中势函数乘以负号）
蓝色高，红色低，紧密处速度大，从高值指向低值

4.1.2 速度流函数ψ

定义 **存在条件：无辐散**。引入流体**散度**后，可将流体运动分为：**无辐散流($\nabla\cdot\vec{V}=0$)、辐散流(($\nabla\cdot\vec{V}\neq 0$)**

考虑二维无辐散流动，即满足 $\begin{cases} w=0 \\ u=u(x,y,t), \quad v=v(x,y,t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$

根据**格林积分公式**（平面曲线积分与路径无关的条件）可知，满足无辐散条件下：

闭区域D由分段光滑的曲线L围成：$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L P\,dx+Qdy$ 令$Q=u,P=-v$

由于无辐散，则面积分为零，故 $vdx-udy=0 \Rightarrow \boldsymbol{d\psi(x,y,t)}=v(x,y,t)dx-u(x,y,t)dy=\boldsymbol{0}$

流速与该函数满足：$\boldsymbol{u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}}$，$\boldsymbol{v=\frac{\partial\psi}{\partial x}}$ 矢量形式：$\boldsymbol{\vec{V}=\vec{k}\times\nabla\psi}$

积分$\boldsymbol{d\psi(x,y,t)=0}$，可以得到**流函数 $\boldsymbol{\psi(x,y,t)=C}$**常数 **速度相切于等流函数线**

又有该二维运动的流线方程为：$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$ 或 $vdx-udy=0$ **等流函数线ψ所描述的曲线其实就是流线**

只有当二维无辐散运动时，流线才正好是等流函数线。此外，**等势线和流函数等值线相互正交，构成流网**

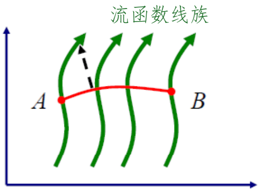
特点 ① **能够减少表征流动的变量** ② **表征流体通量**

在流体中任取一条有向曲线$A\to B$，顺着该有向曲线流体自右侧向左侧的通量Q：

$$\int_A^B d\psi=\int_A^B\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right)=\int_A^B vdx-udy=\int_A^B(u\vec{\imath}+v\vec{\jmath})\cdot(-dy\vec{\imath}+dx\vec{\jmath})$$

$$-dy\vec{\imath}+dx\vec{\jmath}=\vec{k}\times(dx\vec{\imath}+dy\vec{\jmath}) \qquad \vec{k}\times\vec{\imath}=\vec{\jmath} \quad \vec{k}\times\vec{\jmath}=-\vec{\imath}$$

上式$=\int_A^B[(u\vec{\imath}+v\vec{\jmath})\cdot[\vec{k}\times(dx\vec{\imath}+dy\vec{\jmath})]]=\int_A^B\vec{V}\cdot(\vec{k}\times d\vec{l})=\int_A^B\vec{V}\cdot\vec{n}\,dl$



$Q=\int_A^B(\vec{V}\cdot\vec{n})dl=\int_A^B V_{n\text{流速在曲线法向方向上的分量}}dl$

曲线法向方向的单位矢量定义为:$\vec{n}=\vec{k}\times\frac{d\vec{l}}{dl}$，$d\vec{l}=\vec{\imath}dx+\vec{\jmath}dy$

引用流函数：$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$v=\frac{\partial\psi}{\partial x}$ 并考虑$\vec{n}=\vec{k}\times\frac{d\vec{l}}{dl}=(-dy\vec{\imath}+dx\vec{\jmath})/dl$

$$\Rightarrow Q=\int_A^B(\vec{V}\cdot\vec{n})dl=\int_A^B Vdl=\int_A^B\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{\imath}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{\jmath}\right)\cdot\frac{-\vec{\imath}dy+\vec{\jmath}dx}{dl}dl=\int_A^B\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial x}dx\right)=\psi(B)-\psi(A)$$

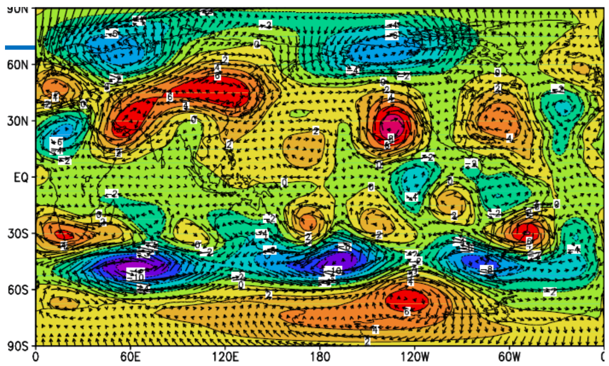
说明：**经过两点为端点的任何曲线的流体通量，决定于该两点的流函数差**，而与曲线的长度和形状无关。
所以用流函数可以来方便地表征无辐散场的流体通量。
对于某固定时刻，等流函数线是一种特殊的流线，但不是所有的流线都是等流函数线。

涡度 由**涡度**的定义$\zeta=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$，可以得到用流函数来表示的涡度表达式：$\boldsymbol{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nabla^2\psi=\zeta}$

可见，对流函数取**拉普拉斯运算**即可得到流体的涡度。

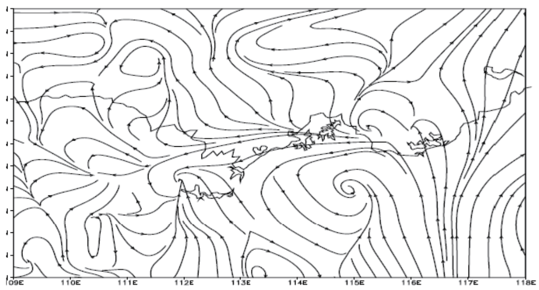
求解 ① 已知**涡度**，直接**求解泊松方程**

② 已知**速度场**，先求出**涡度**，然后**求解泊松方程**



等流函数线与对应的无辐散风场

$\vec{V}=\vec{k}\times\nabla\psi$



对于某固定时刻，等流函数线是一种特殊的流线！

但不是所有的流线都是等流函数线！

4.1.3 二维流动的表示

一般流动　一般二维流动是**有旋有辐散**的。此时，**其涡度和散度均不为零**

即：$\begin{cases}\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \neq 0 \\ D = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \neq 0\end{cases}$　**但可以分解 $\vec{V} = \vec{V}_{\psi\text{无辐散涡旋流}} + \vec{V}_{\varphi\text{无旋辐散流}}$** 然后用**势函数和流函数**表达

势函数与流函数能够完全代替原始的速度，这一结论可以被证明。

推导分量　令 $\begin{cases}\nabla \times \vec{V}_\phi = 0 \\ \nabla \cdot \vec{V}_\psi = 0\end{cases}$　则 $\begin{matrix}\nabla \times \vec{V} = \nabla \times (\vec{V}_\psi + \vec{V}_\phi) = \nabla \times \vec{V}_\psi = \zeta \\ \nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot (\vec{V}_\psi + \vec{V}_\phi) = \nabla \cdot \vec{V}_\phi = D\end{matrix}$　所以 $\begin{cases}\vec{V}_\psi = \vec{k} \times \nabla\psi \\ \vec{V}_\varphi = -\nabla\varphi\end{cases} \rightarrow \vec{V} = \vec{k} \times \nabla\psi - \nabla\varphi$

分量形式：$\begin{cases}\boldsymbol{u} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \boldsymbol{v} = \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{cases}$ 为大气动力学中广泛采用的形式

例题　1. 已知二维流速场 ① $\begin{cases}u = ax + by \\ v = cx + dy\end{cases}$　② $\begin{cases}u = (2a + x)y \\ v = b(x^2 + y^2)\end{cases}$ 分别求势函数和流函数存在的条件

① 势函数：要求无旋，涡度为零 $\nabla \times \vec{V} = c - b = 0$　流函数：要求$\nabla \cdot \vec{V} = a + d = 0$

② 势函数：$\nabla \times \vec{V} = 2bx - 2a - x = 0$　流函数：$\nabla \cdot \vec{V} = y(2b + 1) = 0$

2. 请问是否存在既满足无辐散条件又满足无旋条件的流动？如存在，请举例说明。

当然存在。只要散度为零，涡度为零就行。例如$\begin{cases}u = at \\ v = 0 \\ w = 0\end{cases}$　$\begin{cases}u = x + y \\ v = x - y\end{cases}$

3. 请证明无辐散的平面无旋流动：(1) 流函数和势函数都是调和函数（满足二维拉普拉斯方程）(2) 等势函数线和等流函数线正交

调和函数：指满足二维拉普拉斯方程的函数$\nabla^2\varphi = 0$　由于无旋、无辐散：则$\nabla \times \vec{V} = 0$，$\nabla \cdot \vec{V} = 0$

4. 平面流动的流线方程为：$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ 由流函数全微分$d\psi = vdx - udy$　当取ψ常值时，也可以得到 $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$，试问两式是否等价？请说明理由？

两者不等价。只有当为二维无辐散情况才成立，前者任意情况均成立。

4.2 环流定理

引入 环流普遍存在于自然界中，如台风气旋、反气旋、海洋表层环流等，其涡度不为零 $\nabla\times\vec{V}\neq 0$

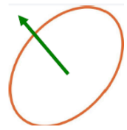
一般情况：流体运动可以表示为：$\vec{V}=\vec{V}_{r涡旋运动}+\vec{V}_{\varphi无旋运动}$，本节重点讨论$\vec{V_r}$的**变化特征及其产生原因**。

需要知道：针对流体的涡旋运动进行分析，介绍涡旋运动的描述方法、认识涡旋运动的变化规律及其物理原因是十分必要的（为何生成、状态如何演变）

涡度 反映**流体旋转特征**或者**旋转强度**的一个重要物理量。其从**微观角度**反映了流体的旋转特征

涡度为零时，流体运动为无旋的；涡度不等于零时，则对应流体的涡旋运动

速度环流 在流场中任取一个封闭的物质环线$\vec{l}$，速度环流为 $\boldsymbol{\Gamma\equiv\oint_l \vec{V}\cdot d\vec{l}}$ **速度投影到环线再相加**



右手定则

它反映了流体沿曲线$\vec{l}$运动的趋势，**宏观表现，是标量，**但具有一定的方向性：

取定曲线方向的情况下： $\Gamma>0$，则流体有顺着 $\vec{l}$ 运动的趋势，**对应气旋(北半球)**

$\Gamma<0$，则流体有逆着 $\vec{l}$ 运动的趋势，对应反气旋

南半球气旋 Γ 则小于零，正好相反。

其宏观上反映了流体旋转特征

涡度表达式 根据环流的定义，应用斯托克斯公式

可得 **Kelvin 关系式**：$\boldsymbol{\zeta_n=\frac{d\Gamma}{d\sigma}}$ 反映了**流体涡度与速度环流**之间的联系

例如龙卷风直径为 100m，围绕环线特征风速为 70m/s，其涡度为$\zeta=\frac{\Gamma}{\sigma_{不严格地使用}}=\frac{70\cdot100\cdot2\pi}{\pi\cdot100^2}=2.8$

角速度有 $2\omega=\zeta$，则角速度为$1.4\,rad/s$

4.2.1 凯尔文定理（速度环流的守恒定律）

环流变化推导 即**环流加速度**，讨论沿闭合的物质曲线l的积分：$\boldsymbol{\delta}$**表示空间微分，**$\boldsymbol{d}$**表示时间微分**

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\oint_l\vec{V}\cdot\delta\vec{l}=\underbrace{\oint_l\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\delta\vec{l}}_{加速度环流}+\underbrace{\oint_l\vec{V}\cdot\frac{d(\delta\vec{l})}{dt}}_{空间微元变化}$$

由于非定常性，$\vec{V},\vec{l}$ 均随时间变化

交换积分次序：$\frac{d(\delta\vec{l})}{dt}=\delta\left(\frac{d\vec{l}}{dt}\right)=\delta(\vec{V})_{速度沿空间的变化}$ 如果$\vec{V}$为单值函数，有

$$\oint_l\vec{V}\cdot\frac{d(\delta\vec{l})}{dt}=\oint_l\vec{V}\cdot\delta\vec{V}=\oint_l\delta\left(\frac{V^2}{2}\right)=0$$

单值函数绕一圈回原点值不变，积分为零

该项并**不引起速度环流的变化**（全微分沿闭合曲线的积分为零）

基本关系式 即 $\boldsymbol{\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\oint_l\vec{V}\cdot\delta\vec{l}=\oint_l\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\delta\vec{l}}$ **环流加速度=加速度的环流**（无约束条件）

理想流体 融入 **N-S 方程**(欧拉方程$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p$)并认为**质量力仅为有势力**$F=-\nabla\Phi \quad \Phi=gz$

欧拉方程 $\rightarrow\oint_l\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\delta\vec{l}=\oint_l\vec{F}\cdot d\vec{l}-\oint_l\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\vec{l}$ 环流变化方程为：

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_l\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\delta\vec{l}=-\oint_l\nabla\Phi\cdot\delta\vec{l}-\oint_l\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\vec{l}=-\oint_l\cdot\delta\Phi-\oint_l\frac{1}{\rho}\cdot\delta p$$

右端项的处理主要涉及到P,ρ

$$\left(-\oint_l\nabla\Phi\cdot\delta\vec{l}=-\oint_l\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i}dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz\right)=-\oint_l\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz\right)=-\oint_l\delta\Phi\right)$$

正压流体 $\rho=f(p)$ **密度仅仅是压力的函数**。其**等压面、等密度面、等温面是重合**的

斜压流体 $\rho=f(p,T,\dots)$ 等压面、等密度面斜交

正压流体 上式改为 $-\oint_l\frac{1}{\rho}\cdot\delta p=-\oint_l\frac{1}{f(p)}\cdot\delta p=-\oint_l\delta F(p)=0$ $\frac{d\Gamma}{dt}=-\oint_l\cdot\delta\Phi-\oint_l\cdot\delta F(p)=0$

$\boldsymbol{\frac{d\Gamma}{dt}=0}$ **理想正压流体，在有势力的作用下，则速度环流不随时间变化**

例如，夜间的高空流体（静稳情况，无加热，只受重力作用），其环流不变。

说明 ① **理想正压流体**，在**有势力**的作用下，流体运动**涡度不随时间变化**，无旋流动中的流点**不可能获得涡度**；反之，涡旋流动中的流点也**不可能失去涡度**

② 以上讨论了特定条件下速度环流的守恒定理或者约束关系。而实际上，流体运动中必定存在环流不守恒(变化)现象，也即环流的产生和起源，这才是更普遍条件下的环流变化情况。

4.2.2 环流的起源与涡度的产生

推导 对于粘性可压缩流体，有 **N-S 方程** $\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V}+\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\vec{V})$

对**粘性扩散项**进行处理（矢量运算法则），将其表示为：

$\nabla^2\vec{V}=(\nabla\cdot\nabla)\vec{V}=\nabla(\nabla\cdot\vec{V})-\nabla\times(\nabla\times\vec{V})=\nabla D-\nabla\times\vec{\zeta}$ 将其代入运动方程，整理后可得到：

$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}--\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\left(\frac{4}{3}\nabla D-\nabla\times\vec{\zeta}\right)$ 对上式沿闭合曲线积分，即可得到反映环流变化的方程：

方程 $\boldsymbol{\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_l\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\delta\vec{l}=\oint\vec{F}\cdot\delta\vec{l}_{①}-\oint\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\vec{l}_{②}-\nu\oint\nabla\times\vec{\zeta}\cdot\delta\vec{l}_{③}+\frac{4\nu}{3}\oint\nabla D\cdot\delta\vec{l}_{④}}$

① 非有势力的作用：对**有势力则为零**，例如：柯氏力（大气运动中尤其重要）

② 压力-密度项：流体的**斜压性**所引起，取决于**等密度面**或**等比容面**与**等压面**是否**斜交**

③ 粘性涡度扩散：与**涡度的不均匀分布**有关

④ **化为全微分= 0** **梯度的散度为零**

皮耶克尼斯定理

推导 对**环流方程**进一步讨论：对于**正压流体**，$\oint\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\vec{l}=0$

对于**斜压流体**，则有：$-\oint\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\delta\vec{l}=-\iint_\sigma\nabla\times\left(\frac{\nabla p}{\rho}\right)\cdot\delta\vec{\sigma}=-\iint_\sigma\left[\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p+\frac{1}{\rho}\nabla\times(\nabla p)\right]\cdot\delta\vec{\sigma}$

由于**梯度取旋度为零**（$\nabla\times(\varphi\vec{f})=\nabla\varphi\times\vec{f}+\varphi\nabla\times\vec{f}$）：$=-\iint_\sigma\left[\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p\right]\cdot\delta\vec{\sigma}$

条件 若**作理想流体假设，且外力有势**，则环流定理变为：

公式 $\boldsymbol{\frac{d\Gamma}{dt}=-\iint_\sigma\left[\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p\right]\cdot\delta\vec{\sigma}}$ $\boldsymbol{\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{1}{\rho^2}\iint_\sigma(\nabla\rho\times\nabla p)\delta\vec{\sigma}}$

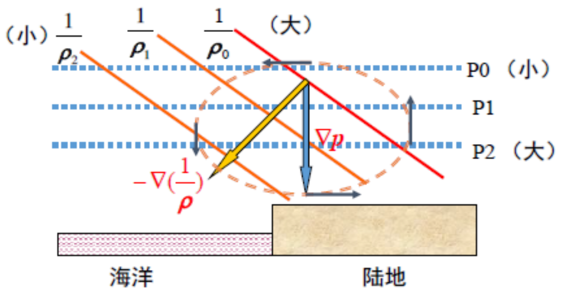
说明 反映了**压力-密度项（斜压性）**引起环流的变化：取决于等密度面或者等比容面与等压面是否斜交

进一步作正压流体假设，则皮叶克尼斯定理退化为了 Kelvin 环流定理：$\frac{d\Gamma}{dt}=0$

应用 海陆风、信风、山谷风的简单解释

海陆风： $\frac{d\Gamma}{dt}=-\iint_\sigma\left[\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p\right]\cdot\delta\vec{\sigma}$ 先看等压线情况：等压线基本与地表面平行

白日受太阳辐射，陆地升温更快，引起等密度线(红色直线)斜交，温度高，体积膨胀大，由此陆地密度更小。压力梯度向下，比容负值由大向小。涡度值垂直纸面向外。



假设陆地上B点，海洋上A点。$AB=100km$

$T_B-T_A=5℃$ 有$\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)=\nabla\left(\frac{RT}{p}\right)=\frac{R}{p}\nabla T=\frac{RT}{p^2}\nabla p$

则 $\frac{d\Gamma}{dt}=-\iint_\sigma\left(\frac{R}{p}\nabla T\times\nabla p\right)d\vec{\sigma}$ 准水平静力平衡：$\nabla p=-\rho g$

$\nabla T=\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial T}{\partial y}\vec{j}=\frac{\delta T}{\delta l}$ 面积为$100km^2$(垂直 1km)

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-\frac{R}{p}\nabla T\times\nabla p\approx\frac{R}{p}\frac{\delta T}{\delta l}\cdot-\rho g=-\frac{287}{10^5}\frac{5}{10^5}\cdot-1.3\cdot10=1.8\times10^{-6}\ s^{-2}$$

$$\zeta_n=\frac{d\Gamma}{d\sigma}\qquad\frac{d\zeta_n}{dt}=\frac{d\Gamma/dt}{d\sigma}=\frac{2V_h\cdot L_x/A}{T}=\frac{2V_h^2}{A}\qquad 则V_h=\sqrt{\frac{d\zeta_n}{dt}\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{1.8\times10^{-6}\cdot10^5}{2}}=0.3m/s$$

4.3 涡度方程

引入

速度环流是描述涡旋的**间接物理量**，涡度则是一种直接物理量。4.2 节从宏观角度揭示了流体旋转的原因，本节从**涡度变化角度**研究涡旋运动。

推导

对于粘性流体运动，NS 方程为 $\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=\vec{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V}+\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\vec{V})$

对平流项做变换：$(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})$

则方程转换为：$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\vec{V}\times\vec{\zeta}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\vec{g}+\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\vec{V})+\upsilon\nabla^2\vec{V}$　　对方程的**每一项取旋度**

① $\nabla\times\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{V})=\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}$

② ⑥ 由于任意物理量的梯度再取旋度为零($\nabla\times\nabla A\equiv 0$)，所以$\nabla\times\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)=0$，$\nabla\times\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\vec{V})=0$

③ $\vec{V}\times\vec{\zeta}\rightarrow\nabla\times(\vec{V}\times\vec{\zeta})$　　由于 $\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}-(\nabla\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}+(\nabla\cdot\vec{b})\vec{a}$

所以 $\nabla\times(\vec{V}\times\vec{\zeta})=(\vec{\zeta}\cdot\nabla)\vec{V}-(\nabla\cdot\vec{V})_{\text{散度}}\vec{\zeta}-(\vec{V}\cdot\nabla)_{\text{平流算子}}\vec{\zeta}+(\nabla\cdot\vec{\xi})\vec{V}$

其中 $(\vec{\zeta}\cdot\nabla)\vec{V}=\xi_x\frac{\partial}{\partial x}\vec{V}+\xi_y\frac{\partial}{\partial y}\vec{V}+\xi_z\frac{\partial}{\partial z}\vec{V}$　　$(\nabla\cdot\vec{\xi})\vec{V}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\xi_x+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\xi_y+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\xi_z=0$

④ $\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p=-\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p$　　$(\nabla\times(\varphi\vec{f})=\nabla\varphi\times\vec{f}+\varphi\nabla\times\vec{f})$

⑤ $\vec{g}=-\nabla(gz)=-\nabla(\Phi)$　取涡度为零　　⑦ $\nabla\times\upsilon\nabla^2\vec{V}=\upsilon\nabla^2\vec{\zeta}$

$$\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{\zeta}-(\vec{\zeta}\cdot\nabla)\vec{V}+\vec{\zeta}(\nabla\cdot\vec{V})=\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p+\upsilon\nabla^2\vec{\zeta}$$

方程

$$\frac{d\vec{\zeta}}{dt}=\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p_{①}-\vec{\zeta}(\nabla\cdot\vec{V})_{②}+(\vec{\zeta}\cdot\nabla)\vec{V}_{③}+\nu\nabla^2\vec{\zeta}_{④}$$

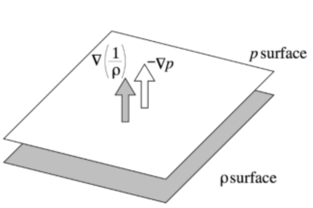
弗里德曼—海姆霍兹方程

① 力管项或斜压项　表明**压力密度变化**可以引起流体涡度矢的变化，其物理实质是**流体的斜压性**
两相邻等密度面和相邻等压面为周界，可以构成一条管道，称为**力管**。

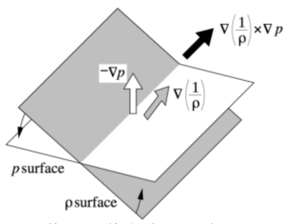
② 散度项　表明流体在运动过程中**体积的收缩或膨胀**，将会引起流体涡度矢的变化
体积收缩，涡度增加，旋转加快（角动量守恒）

③ 扭曲项　**流场的非均匀性**，引起涡度的重新分布。**不改变涡旋强度，在三个方向重分配**

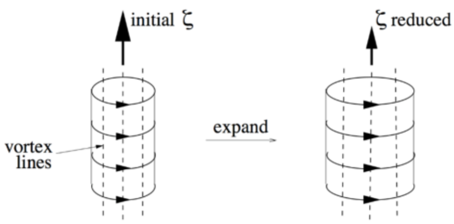
④ 粘性扩散项　**涡度分布的非均匀性**引起的。涡旋强的地方向涡旋弱的地方输送涡旋。
使涡旋矢**分布趋于均匀化**。



平行



等压面等密度面斜交



涡管：若干个涡旋组成的管状结构
涡管增大，散度大于零，体积扩张，涡度减少

$(\vec{\zeta}\cdot\nabla)\vec{V}=\xi_x\frac{\partial}{\partial x}\vec{V}+\xi_y\frac{\partial}{\partial y}\vec{V}+\xi_z\frac{\partial}{\partial z}\vec{V}=\vec{i}\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial x}+\xi_y\frac{\partial u}{\partial y}+\xi_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\xi_x\frac{\partial v}{\partial x}+\cdots\right)+\cdots$

假设ξ只有z方向分量，则 $\begin{bmatrix}\zeta_z\frac{\partial u}{\partial z}\\ \zeta_z\frac{\partial v}{\partial z}\\ \zeta_z\frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}$ 改变涡管形状。　**需要注意：涡度方程未考虑非有势力**