

第四章 流体涡旋动力学基础

章节引言 流体的**涡旋运动**大量存在于自然界中，如大气中的**气旋、反气旋、龙卷、台风**等，大气中的涡旋运动对天气系统的形成和发展有密切的关系。实际流体的运动速度可以表示为 $\vec{V} = \vec{V}_r$ **涡旋运动** + \vec{V}_ϕ **无旋运动**

4.1 速度势函数和流函数

4.1.1 速度势函数 φ

定义 存在条件：无旋

如果在流体域内**涡度为零**，即 $\nabla \times \vec{V} = 0$ ，则为**无旋运动**，否则称之为**涡旋运动** $\nabla \times \vec{V} \neq 0$

任意一个流动可以分解为无旋流动和有旋流动。

据**矢量分析**知识，**任意一函数的梯度，取旋度恒等于零** $\nabla \times \nabla\varphi \equiv 0$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

对于无旋流动，必定**存在一个函数** $\varphi(x, y, z, t)$ 满足如 $\vec{V} = -\nabla\varphi$ 或 $\vec{V} = -grad\varphi$ （负号代表高值指向低值）

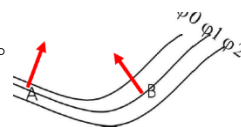
无旋流动的**速度矢**总可以用**函数** φ 的**梯度**来表示，把函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 叫做**速度的（位）势函数**，可以用这个函数来表示无旋流动的流场。通常将**无旋流动称为有势流动或势流**。

特性 原有的流速矢量描述流体运动需要三个变量，现在引进势函数之后： $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ 只要一个变量（**势函数**）就可以来描述流体运动，大幅简化问题。

等势面 用势函数描述运动，对于某一固定时刻 $\varphi(x, y, z, t) = C$ 常数，为一空间曲面，称为**等位势面**。上式取不同常数，可以得到不同的等位势面，得到**等位势面族**。

由流速场与势函数的关系可知： $\vec{V} = -\nabla\varphi$ **无旋流速矢与等位势面相垂直**，由**高位势流向低位势**，等位势面**紧密处，位势梯度大，相应的流速大**；等位势面**稀疏处，位势梯度小，相应的流速小**。
例如，图中所示 $\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2$ ，则A,B两处流速 $V_A > V_B$



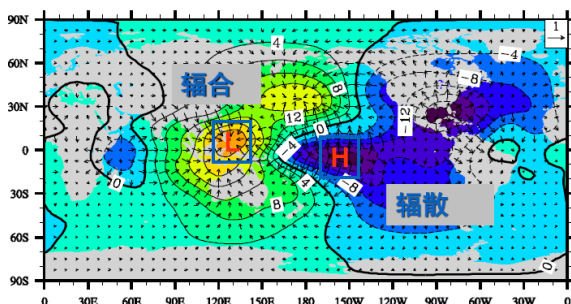
散度 假如流体的散度为： $D = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ 又有 $\vec{V} = -\nabla\varphi$

根据势函数的定义有： $D = -\nabla^2\varphi$ (**泊松方程**) 其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为**三维拉普拉斯算子**

如果 $\nabla^2\varphi = 0$ ，则称其为**拉普拉斯方程**

求解 可以看出，如果给定D，通过求解泊松方程，即可求得势函数。实际应用常用此法。

- ① 如已知D，直接求解泊松方程，可得势函数
- ② 如已知速度场，可以先求出D，然后再求解泊松方程，最终得到势函数



速度势函数与对应的无旋风场（图中势函数乘以负号）
蓝色高，红色低，紧密处速度大，从高值指向低值

4.1.2 速度流函数ψ

定义 存在条件：无辐散。引入流体散度后，可将流体运动分为：无辐散流($\nabla \cdot \vec{V} = 0$)、辐散流($\nabla \cdot \vec{V} \neq 0$)

考虑二维无辐散流动，即满足
$$\begin{cases} w = 0 \\ u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

根据格林积分公式（平面曲线积分与路径无关的条件）可知，满足无辐散条件下：

$$\text{闭区域} D \text{ 由分段光滑的曲线} L \text{ 围成：} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy \quad \text{令} Q = u, P = -v$$

由于无辐散，则面积分为零，故 $v dx - u dy = 0 \Rightarrow d\psi(x, y, t) = v(x, y, t) dx - u(x, y, t) dy = 0$

流速与该函数满足： $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ 矢量形式： $\vec{V} = \vec{k} \times \nabla \psi$

积分 $d\psi(x, y, t) = 0$ ，可以得到流函数 $\psi(x, y, t) = C$ 常数 速度相切于等流函数线

又有该二维运动的流线方程为： $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ 或 $v dx - u dy = 0$ 等流函数线 ψ 所描述的曲线其实就是流线

只有当二维无辐散运动时，流线才正好是等流函数线。此外，等势线和流函数等值线相互正交，构成流网

特点 ① 能够减少表征流动的变量 ② 表征流体通量

在流体中任取一条有向曲线 $A \rightarrow B$ ，顺着该有向曲线流体自右侧向左侧的通量 Q ：

$$\int_A^B d\psi = \int_A^B \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \int_A^B v dx - u dy = \int_A^B (u\vec{i} + v\vec{j}) \cdot (-dy\vec{i} + dx\vec{j})$$

$$-dy\vec{i} + dx\vec{j} = \vec{k} \times (dx\vec{i} + dy\vec{j}) \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\text{上式} = \int_A^B [(u\vec{i} + v\vec{j}) \cdot [\vec{k} \times (dx\vec{i} + dy\vec{j})]] = \int_A^B \vec{V} \cdot (\vec{k} \times d\vec{l}) = \int_A^B \vec{V} \cdot \vec{n} dl$$

$$Q = \int_A^B (\vec{V} \cdot \vec{n}) dl = \int_A^B V_n \text{ 流速在曲线法向方向上的分量} dl$$

曲线法向方向的单位矢量定义为： $\vec{n} = \vec{k} \times \frac{d\vec{l}}{dl}$, $d\vec{l} = \vec{i} dx + \vec{j} dy$

引用流函数： $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ 并考虑 $\vec{n} = \vec{k} \times \frac{d\vec{l}}{dl} = (-dy\vec{i} + dx\vec{j})/dl$

$$\Rightarrow Q = \int_A^B (\vec{V} \cdot \vec{n}) dl = \int_A^B V dl = \int_A^B \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{j} \right) \cdot \frac{-dy\vec{i} + dx\vec{j}}{dl} dl = \int_A^B \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \psi(B) - \psi(A)$$

说明：经过两点为端点的任何曲线的流体通量，决定于该两点的流函数差，而与曲线的长度和形状无关。

所以用流函数可以方便地表征无辐散场的流体通量。

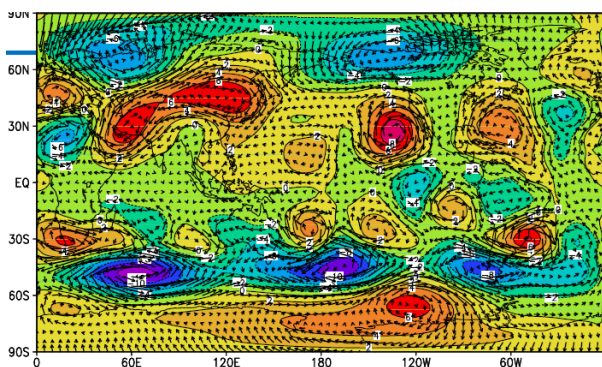
对于某固定时刻，等流函数线是一种特殊的流线，但不是所有的流线都是等流函数线。

涡度 由涡度的定义 $\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ ，可以得到用流函数来表示的涡度表达式： $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi = \zeta$

可见，对流函数取拉普拉斯运算即可得到流体的涡度。

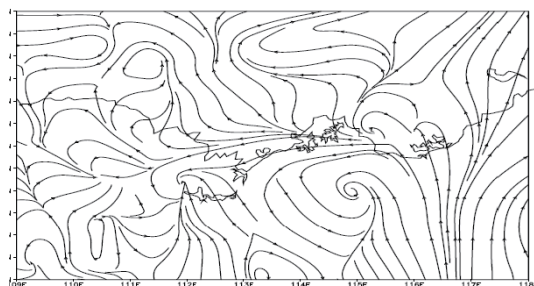
求解 ① 已知涡度，直接求解泊松方程

② 已知速度场，先求出涡度，然后求解泊松方程



等流函数线与对应的无辐散风场

$$\vec{V} = \vec{k} \times \nabla \psi$$



对于某固定时刻，等流函数线是一种特殊的流线！

但不是所有的流线都是等流函数线！

4.1.3 二维流动的表达

一般流动 一般二维流动是有旋有辐散的。此时，其涡度和散度均不为零

$$\text{即: } \begin{cases} \zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \neq 0 \\ D = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \neq 0 \end{cases} \quad \text{但可以分解 } \vec{V} = \vec{V}_{\psi} \text{无辐散涡旋流} + \vec{V}_{\varphi} \text{无旋辐散流} \quad \text{然后用势函数和流函数表达}$$

势函数与流函数能够完全代替原始的速度，这一结论可以被证明。

推导分量

$$\text{令 } \begin{cases} \nabla \times \vec{V}_{\phi} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{V}_{\psi} = 0 \end{cases} \quad \text{则 } \begin{cases} \nabla \times \vec{V} = \nabla \times (\vec{V}_{\psi} + \vec{V}_{\phi}) = \nabla \times \vec{V}_{\psi} = \zeta \\ \nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot (\vec{V}_{\psi} + \vec{V}_{\phi}) = \nabla \cdot \vec{V}_{\phi} = D \end{cases} \quad \text{所以 } \begin{cases} \vec{V}_{\psi} = \vec{k} \times \nabla \psi \\ \vec{V}_{\phi} = -\nabla \varphi \end{cases} \rightarrow \vec{V} = \vec{k} \times \nabla \psi - \nabla \varphi$$

$$\text{分量形式: } \begin{cases} u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \quad \text{为大气动力学中广泛采用的形式}$$

例题 1. 已知二维流速场 ① $\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}$ ② $\begin{cases} u = (2a + x)y \\ v = b(x^2 + y^2) \end{cases}$ 分别求势函数和流函数存在的条件

① 势函数：要求无旋，涡度为零 $\nabla \times \vec{V} = c - b = 0$ 流函数：要求 $\nabla \cdot \vec{V} = a + d = 0$

② 势函数： $\nabla \times \vec{V} = 2bx - 2a - x = 0$ 流函数： $\nabla \cdot \vec{V} = y(2b + 1) = 0$

2. 请问是否存在既满足无辐散条件又满足无旋条件的流动？如存在，请举例说明。

当然存在。只要散度为零，涡度为零就行。例如 $\begin{cases} u = at \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

3. 请证明无辐散的平面无旋流动：(1) 流函数和势函数都是调和函数（满足二维拉普拉斯方程）(2) 等势函数线和等流函数线正交

调和函数：指满足二维拉普拉斯方程的函数 $\nabla^2 \varphi = 0$ 由于无旋、无辐散：则 $\nabla \times \vec{V} = 0, \nabla \cdot \vec{V} = 0$

4. 平面流动的流线方程为： $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ 由流函数全微分 $d\psi = vdx - udy$ 当取 ψ 常值时，也可以得到

$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ ，试问两式是否等价？请说明理由？

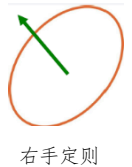
两者不等价。只有当为二维无辐散情况才成立，前者任意情况均成立。

4.2 环流定理

引入 环流普遍存在于自然界中，如台风气旋、反气旋、海洋表层环流等，其涡度不为零 $\nabla \times \vec{V} \neq 0$
一般情况：流体运动可以表示为： $\vec{V} = \vec{V}_r$ 涡旋运动 + \vec{V}_ϕ 无旋运动，本节重点讨论 \vec{V}_r 的变化特征及其产生原因。
 需要知道：针对流体的涡旋运动进行分析，介绍涡旋运动的描述方法、认识涡旋运动的变化规律及其物理原因是十分必要的（为何生成、状态如何演变）

涡度 反映流体旋转特征或者旋转强度的一个重要物理量。其从微观角度反映了流体的旋转特征
 涡度为零时，流体运动为无旋的；涡度不等于零时，则对应流体的涡旋运动

速度环流 在流场中任取一个封闭的物质环线 \vec{l} ，速度环流为 $\Gamma \equiv \oint \vec{V} \cdot d\vec{l}$ 速度投影到环线再相加
 它反映了流体沿曲线 \vec{l} 运动的趋势，宏观表现，是标量，但具有一定的方向性：
 取定曲线方向的情况下： $\Gamma > 0$ ，则流体有顺着 \vec{l} 运动的趋势，对应气旋(北半球)
 $\Gamma < 0$ ，则流体有逆着 \vec{l} 运动的趋势，对应反气旋
 南半球气旋 Γ 则小于零，正好相反。



其宏观上反映了流体旋转特征
涡度表达式 根据环流的定义，应用斯托克斯公式

可得 **Kelvin 关系式**： $\zeta_n = \frac{d\Gamma}{d\sigma}$ 反映了流体涡度与速度环流之间的联系

例如龙卷风直径为 100m，围绕环线特征风速为 70m/s，其涡度为 $\zeta = \frac{\Gamma}{\sigma} \text{ 不严格地使用} = \frac{70 \cdot 100 \cdot 2\pi}{\pi \cdot 100^2} = 2.8$

角速度有 $2\omega = \zeta$ ，则角速度为 1.4 rad/s

4.2.1 凯尔文定理（速度环流的守恒定律）

环流变化推导 即环流加速度，讨论沿闭合的物质曲线 l 的积分： δ 表示空间微分， d 表示时间微分

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} + \oint \vec{V} \cdot \frac{d(d\vec{l})}{dt}$$
 由于非定常性， \vec{V}, \vec{l} 均随时间变化
 交换积分次序： $\frac{d(\delta \vec{l})}{dt} = \delta \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \right) = \delta(\vec{V})$ 速度沿空间的变化 如果 \vec{V} 为单值函数，有

$$\oint \vec{V} \cdot \frac{d(\delta \vec{l})}{dt} = \oint \vec{V} \cdot \delta \vec{V} = \oint \delta \left(\frac{V^2}{2} \right) = 0$$
 单值函数绕一圈回原点值不变，积分为零
 该项并不引起速度环流的变化（全微分沿闭合曲线的积分为零）

基本关系式 即 $\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l}$ 环流加速度 = 加速度的环流（无约束条件）

理想流体 融入 N-S 方程(欧拉方程 $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p$) 并认为质量力仅为有势力 $\vec{F} = -\nabla \Phi$ $\Phi = gz$

欧拉方程 $\rightarrow \oint \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} - \oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{l}$ 环流变化方程为：

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} = - \oint \nabla \Phi \cdot d\vec{l} - \oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{l} = - \oint \delta \Phi - \oint \frac{1}{\rho} \delta p$$
 右端项的处理主要涉及到 P, ρ

$$(- \oint \nabla \Phi \cdot d\vec{l} = - \oint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (\vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz) = - \oint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) = - \oint \delta \Phi)$$

正压流体 $\rho = f(p)$ 密度仅仅是压力的函数。其等压面、等密度面、等温面是重合的
斜压流体 $\rho = f(p, T, \dots)$ 等压面、等密度面斜交

正压流体 上式改为 $- \oint \frac{1}{\rho} \delta p = - \oint \frac{1}{f(p)} \delta p = - \oint \delta F(p) = 0$ $\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint \delta \Phi - \oint \delta F(p) = 0$

$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ **理想正压流体**，在有势力的作用下，则速度环流不随时间变化

例如，夜间的高空流体（静稳情况，无加热，只受重力作用），其环流不变。

- 说明**
- ① **理想正压流体**，在**有势力**的作用下，流体运动**涡度不随时间变化**，无旋流动中的流点**不可能获得涡度**；反之，涡旋流动中的流点也**不可能失去涡度**
 - ② 以上讨论了特定条件下速度环流的守恒定理或者约束关系。而实际上，流体运动中必定存在环流不守恒(变化)现象，也即环流的产生和起源，这才是更普遍条件下的环流变化情况。

4.2.2 环流的起源与涡度的产生

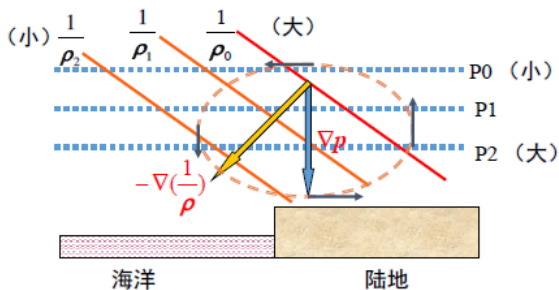
- 推导** 对于粘性可压缩流体，有 **N-S 方程** $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \vec{v})$
- 对**粘性扩散项**进行处理（矢量运算法则），将其表示为：
- $$\nabla^2 \vec{v} = (\nabla \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla D - \nabla \times \vec{\zeta}$$
- 将其代入运动方程，整理后可得到：
- $$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left(\frac{4}{3} \nabla D - \nabla \times \vec{\zeta} \right)$$
- 对上式沿闭合曲线积分，即可得到反映环流变化的方程：
- $$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \delta \vec{l} = \oint \vec{F} \cdot \delta \vec{l} \textcircled{1} - \oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \delta \vec{l} \textcircled{2} - \nu \oint \nabla \times \vec{\zeta} \cdot \delta \vec{l} \textcircled{3} + \frac{4\nu}{3} \oint \nabla D \cdot \delta \vec{l} \textcircled{4}$$
- ① **非有势力的作用**：对**有势力**则为**零**，例如：柯氏力（大气运动中尤其重要）
 - ② **压力-密度项**：流体的斜压性所引起，取决于等密度面或等比容面与等压面是否斜交
 - ③ **粘性涡度扩散**：与涡度的不均匀分布有关
 - ④ **化为全微分=0** 梯度的散度为零

皮耶克尼斯定理

- 推导** 对环流方程进一步讨论：对于正压流体， $\oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \delta \vec{l} = 0$
- 对于斜压流体，则有： $-\oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \delta \vec{l} = -\iint_{\sigma} \nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \cdot \delta \vec{\sigma} = -\iint_{\sigma} \left[\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla p) \right] \cdot \delta \vec{\sigma}$
- 由于**梯度取旋度为零** $(\nabla \times (\nabla f)) = \nabla \varphi \times \vec{f} + \varphi \nabla \times \vec{f}$ ： $= -\iint_{\sigma} \left[\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p \right] \cdot \delta \vec{\sigma}$
- 条件** 若**作理想流体假设**，且**外力有势**，则环流定理变为：
- 公式** $\frac{d\Gamma}{dt} = -\iint_{\sigma} \left[\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p \right] \cdot \delta \vec{\sigma}$ $\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{\rho^2} \iint_{\sigma} (\nabla \rho \times \nabla p) \delta \vec{\sigma}$
- 说明** 反映了**压力-密度项（斜压性）**引起环流的变化：**取决于等密度面或者等比容面与等压面是否斜交**
- 进一步作正压流体假设，则皮叶克尼斯定理退化为了 Kelvin 环流定理： $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$
- 应用** 海陆风、信风、山谷风的简单解释

海陆风： $\frac{d\Gamma}{dt} = -\iint_{\sigma} \left[\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p \right] \cdot \delta \vec{\sigma}$ 先看等压线情况：等压线基本与地表面平行

白日受太阳辐射，陆地升温更快，引起等密度线(红色直线)斜交，温度高，体积膨胀大，由此陆地密度更小。压力梯度向下，比容负值由大向小。涡度值垂直纸面向外。



假设陆地上B点，海洋上A点。AB = 100km

$$T_B - T_A = 5^\circ\text{C} \quad \text{有} \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) = \nabla \left(\frac{RT}{p} \right) = \frac{R}{p} \nabla T = \frac{RT}{p^2} \nabla p$$

$$\text{则} \frac{d\Gamma}{dt} = -\iint_{\sigma} \left(\frac{R}{p} \nabla T \times \nabla p \right) d\vec{\sigma} \quad \text{准水平静力平衡: } \nabla p = -\rho g$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} = \frac{\delta T}{\delta l} \quad \text{面积为} 100\text{km}^2 (\text{垂直 } 1\text{km})$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{R}{p} \nabla T \times \nabla p \approx \frac{R}{p} \frac{\delta T}{\delta l} \cdot -\rho g = -\frac{287}{10^5} \cdot \frac{5}{10^5} \cdot -1.3 \cdot 10 = 1.8 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$$

$$\zeta_n = \frac{d\Gamma}{d\sigma} \quad \frac{d\zeta_n}{dt} = \frac{d\Gamma/dt}{d\sigma} = \frac{2V_h \cdot L_x / A}{T} = \frac{2V_h^2}{A} \quad \text{则} V_h = \sqrt{\frac{d\zeta_n}{dt} \frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{1.8 \times 10^{-6} \cdot 10^5}{2}} = 0.3 \text{ m/s}$$