第四章 流体涡旋动力学基础

章节引言 流体的**涡旋运动**大量存在于自然界中，如大气中的**气旋、反气旋、龙卷、台风**等，大气中的涡旋运动对天气系统的形成和发展有密切的关系。实际流体的运动速度可以表示为$\vec{V}=\vec{V}_{r涡旋运动}+\vec{V}_{\phi无旋运动}$

4.1 速度势函数和流函数

4.1.1 速度势函数φ

定义 **存在条件：无旋**

如果在流体域内**涡度为零**，即 $\nabla\times\vec{V}=0$，则为**无旋运动**，否则称之为涡旋运动 $\nabla\times\vec{V}\neq 0$

任意一个流动可以分解为无旋流动和有旋流动。

据**矢量分析**知识，任意一函数的梯度，取旋度恒等于零 $\nabla\times\boldsymbol{\nabla\varphi}\equiv 0$ $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}=0$

对于无旋流动，必定存在一个函数$\boldsymbol{\varphi(x,y,z,t)}$满足如 $\boldsymbol{\vec{V}=-\nabla\varphi}$ 或 $\vec{V}=-grad\varphi$ （负号代表高值指向低值）

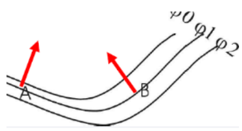
无旋流动的**速度矢**总可以用**函数$\boldsymbol{\varphi}$的梯度**来表示，把函数$\varphi(x,y,z,t)$ 叫做**速度的（位）势函数**，可以用这个函数来**表示无旋流动的流场**。通常将无旋流动称为**有势流动或势流**。

特性 原有的流速矢量描述流体运动需要三个变量，现在引进势函数之后：$\vec{V}=u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$

$\boldsymbol{u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}}$ ，$\boldsymbol{v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$，$\boldsymbol{w=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$ 只要**一个变量（势函数）**就可以来描述流体运动，大幅简化问题。

等势面 用势函数描述运动，对于某一固定时刻 $\boldsymbol{\varphi(x,y,z,t)=C}$常数，为一空间曲面，称为**等位势面**。
上式取不同常数，可以得到不同的等位势面，得到**等位势面族**。

由流速场与势函数的关系可知：$\vec{V}=-\nabla\varphi$ **无旋流速矢**与等位势面**相垂直**，由**高位势流向低位势**，等位势面紧密处，**位势梯度大**，相应的**流速大**；等位势面稀疏处，**位势梯度小**，相应的**流速小**。



例如，图中所示$\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2$，则$A,B$两处流速$V_A>V_B$

散度 假如流体的散度为：$D=\nabla\cdot\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ 又有$\vec{V}=-\nabla\varphi$

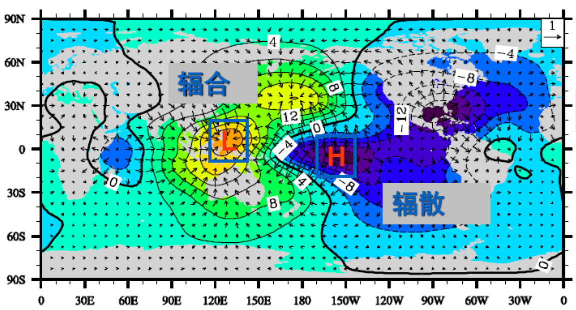
根据势函数的定义有：$\boldsymbol{D=-\nabla^2\varphi}$ **(泊松方程)** 其中$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为三维拉普拉斯算子

如果$\boldsymbol{\nabla^2\varphi=0}$，则称其为**拉普拉斯方程**

求解 可以看出，如果给定D，通过求解泊松方程，即可求得势函数。实际应用常用此法。

① 如**已知$\boldsymbol{D}$**，直接**求解泊松方程**，可得势函数

② 如**已知速度场**，可以先**求出$\boldsymbol{D}$**，然后再**求解泊松方程**，最终得到势函数



速度势函数与对应的无旋风场（图中势函数乘以负号）
蓝色高，红色低，紧密处速度大，从高值指向低值

4.1.2 速度流函数ψ

定义　**存在条件：无辐散**。引入流体**散度**后，可将流体运动分为：**无辐散流($\nabla\cdot\vec{V}=0$)、辐散流(($\nabla\cdot\vec{V}\neq 0$)**

考虑二维无辐散流动，即满足 $\begin{cases} w=0 \\ u=u(x,y,t),\quad v=v(x,y,t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$

根据**格林积分公式**（平面曲线积分与路径无关的条件）可知，满足无辐散条件下：

闭区域D由分段光滑的曲线L围成：$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L P\,dx+Q dy$　令$Q=u,P=-v$

由于无辐散，则面积分为零，故 $vdx-udy=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{d\psi(x,y,t)}=v(x,y,t)dx-u(x,y,t)dy=\boldsymbol{0}$

流速与该函数满足：$\boldsymbol{u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\ v=\frac{\partial\psi}{\partial x}}$　　矢量形式：$\boldsymbol{\vec{V}=\vec{k}\times\nabla\psi}$

积分$\boldsymbol{d\psi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t})=\boldsymbol{0}$，可以得到**流函数 $\psi(x,y,t)=C$**常数　　**速度相切于等流函数线**

又有该二维运动的流线方程为：$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$　或 $vdx-udy=0$　**等流函数线ψ所描述的曲线其实就是流线**

只有当二维无辐散运动时，流线才正好是等流函数线。此外，**等势线和流函数等值线相互正交，构成流网**

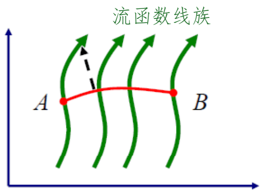
特点　① **能够减少表征流动的变量**　　② **表征流体通量**

在流体中任取一条有向曲线$A\to B$，顺着该有向曲线流体自右侧向左侧的通量Q：

$$\int_A^B d\psi=\int_A^B\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right)=\int_A^B vdx-udy=\int_A^B(u\vec{\imath}+v\vec{\jmath})\cdot(-dy\vec{\imath}+dx\vec{\jmath})$$

$$-dy\vec{\imath}+dx\vec{\jmath}=\vec{k}\times(dx\vec{\imath}+dy\vec{\jmath})\qquad\vec{k}\times\vec{\imath}=\vec{\jmath}\quad\vec{k}\times\vec{\jmath}=-\vec{\imath}$$

上式$=\int_A^B[(u\vec{\imath}+v\vec{\jmath})\cdot[\vec{k}\times(dx\vec{\imath}+dy\vec{\jmath})]]=\int_A^B\vec{V}\cdot(\vec{k}\times d\vec{l})=\int_A^B\vec{V}\cdot\vec{n}\,dl$



$Q=\int_A^B(\vec{V}\cdot\vec{n})dl=\int_A^B V_{n\text{流速在曲线法向方向上的分量}}dl$

曲线法向方向的单位矢量定义为:$\vec{n}=\vec{k}\times\frac{d\vec{l}}{dl}$，$d\vec{l}=\vec{\imath}dx+\vec{\jmath}dy$

引用流函数：$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$v=\frac{\partial\psi}{\partial x}$ 并考虑$\vec{n}=\vec{k}\times\frac{d\vec{l}}{dl}=(-dy\vec{\imath}+dx\vec{\jmath})/dl$

$$\Rightarrow Q=\int_A^B(\vec{V}\cdot\vec{n})dl=\int_A^B Vdl=\int_A^B\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{\imath}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{\jmath}\right)\cdot\frac{-\vec{\imath}dy+\vec{\jmath}dx}{dl}dl=\int_A^B\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial x}dx\right)=\psi(B)-\psi(A)$$

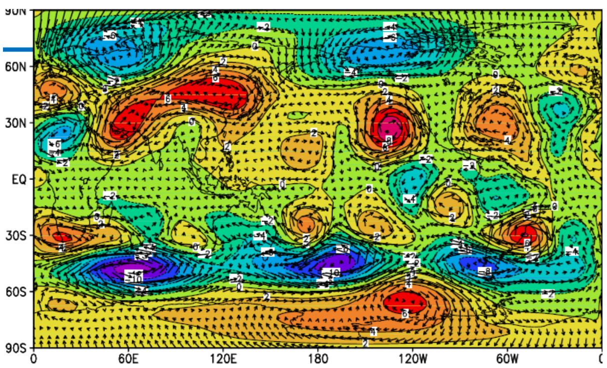
说明：**经过两点为端点的任何曲线的流体通量，决定于该两点的流函数差**，而与曲线的长度和形状无关。
所以用流函数可以来方便地表征无辐散场的流体通量。
对于某固定时刻，等流函数线是一种特殊的流线，但不是所有的流线都是等流函数线。

涡度　由**涡度**的定义$\zeta=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$，可以得到用流函数来表示的涡度表达式：$\boldsymbol{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nabla^2\psi=\zeta}$

可见，对流函数取**拉普拉斯运算**即可得到流体的涡度。

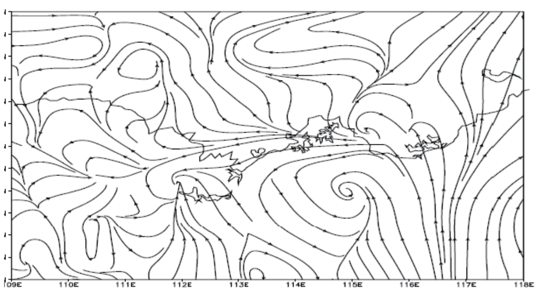
求解　① 已知**涡度**，直接**求解泊松方程**

② 已知**速度场**，先求出**涡度**，然后**求解泊松方程**



等流函数线与对应的无辐散风场

$\vec{V}=\vec{k}\times\nabla\psi$



对于某固定时刻，等流函数线是一种特殊的流线！

但不是所有的流线都是等流函数线！

4.1.3 二维流动的表示

一般流动 一般二维流动是**有旋有辐散**的。此时，**其涡度和散度均不为零**

即：$\begin{cases}\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \neq 0 \\ D = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \neq 0\end{cases}$ **但可以分解** $\vec{V} = \vec{V}_{\psi\text{无辐散涡旋流}} + \vec{V}_{\varphi\text{无旋辐散流}}$ 然后用**势函数和流函数**表达

势函数与流函数能够完全代替原始的速度，这一结论可以被证明。

推导分量 令 $\begin{cases}\nabla \times \vec{V}_\phi = 0 \\ \nabla \cdot \vec{V}_\psi = 0\end{cases}$ 则 $\begin{matrix}\nabla \times \vec{V} = \nabla \times (\vec{V}_\psi + \vec{V}_\phi) = \nabla \times \vec{V}_\psi = \zeta \\ \nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot (\vec{V}_\psi + \vec{V}_\phi) = \nabla \cdot \vec{V}_\phi = D\end{matrix}$ 所以 $\begin{cases}\vec{V}_\psi = \vec{k} \times \nabla\psi \\ \vec{V}_\varphi = -\nabla\varphi\end{cases} \rightarrow \vec{V} = \vec{k} \times \nabla\psi - \nabla\varphi$

分量形式：$\begin{cases}u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\end{cases}$ 为大气动力学中广泛采用的形式

例题 1. 已知二维流速场 ① $\begin{cases}u = ax + by \\ v = cx + dy\end{cases}$ ② $\begin{cases}u = (2a + x)y \\ v = b(x^2 + y^2)\end{cases}$ 分别求势函数和流函数存在的条件

① 势函数：要求无旋，涡度为零 $\nabla \times \vec{V} = c - b = 0$ 流函数：要求 $\nabla \cdot \vec{V} = a + d = 0$

② 势函数：$\nabla \times \vec{V} = 2bx - 2a - x = 0$ 流函数：$\nabla \cdot \vec{V} = y(2b + 1) = 0$

2. 请问是否存在既满足无辐散条件又满足无旋条件的流动？如存在，请举例说明。

当然存在。只要散度为零，涡度为零就行。例如 $\begin{cases}u = at \\ v = 0 \\ w = 0\end{cases}$ $\begin{cases}u = x + y \\ v = x - y\end{cases}$

3. 请证明无辐散的平面无旋流动：（1）流函数和势函数都是调和函数（满足二维拉普拉斯方程）（2）等势函数线和等流函数线正交

调和函数：指满足二维拉普拉斯方程的函数 $\nabla^2\varphi = 0$ 由于无旋、无辐散：则 $\nabla \times \vec{V} = 0$，$\nabla \cdot \vec{V} = 0$

4. 平面流动的流线方程为：$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ 由流函数全微分 $d\psi = vdx - udy$ 当取 ψ 常值时，也可以得到 $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$，试问两式是否等价？请说明理由？

两者不等价。只有当为二维无辐散情况才成立，前者任意情况均成立。