第一章 流体力学基础概念

1.3 速度与加速度

1.3.1 拉格朗日方法

内容 1. 流体中充满了流点 2. 需要一个确定的参考系$\vec{r}=r(x_0,y_0,z_0,t)$ 此处x_0,y_0,z_0不是变量，用来区分不同的流点

分量式 $\begin{cases} x=x(x_0,y_0,z_0,t) \\ y=y(x_0,y_0,z_0,t) \\ z=z(x_0,y_0,z_0,t) \end{cases}$ **速度** $\vec{V}(x_0,y_0,z_0,t)=\frac{d\vec{r}(x_0,y_0,z_0,t)}{dt}$ 三变量 u、v、w

加速度 $\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{V}(x_0,y_0,z_0,t)$

1.3.2 欧拉方法

内容 着眼于空间点，有个别空间点运动特征得到整个流体运动的特征（如速度场）

速度 $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z,t)$ （x,y,z不随t变化，表示流速在空间的分布，称为流场）

均匀流场 流场不随空间变化（V 在各方向梯度为 0）

定常流场 流场不随时间变化

分量式 $\begin{cases} u=u(x,y,z,t) \\ v=v(x,y,z,t) \\ w=w(x,y,z,t) \end{cases}$ 变量u,v,w即为欧拉变量

加速度 $a=\frac{d}{dt}\vec{V}(x,y,z,t)$，其中$V=V[x(t),y(t),z(t),t]$

展开式 $\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$，其中$\vec{V}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$

哈密顿算符 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ 故$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$ $\vec{V}\cdot\nabla=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$

微商算符 $\frac{d(\square)}{dt}=\frac{\partial(\square)}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla(\square)$

① **个别变化** 流体在运动过程中**具有的物理量**随时间的变化

拉格朗与欧拉加速度之差为平流加速度

② **局地变化** 某一**固定空间点**上物理量随时间的变化

③ **平流变化** 物理量**场的非均匀性**引起的变化

微商算符常用形式

1. 若流点具有的**物理量不随时间变化**，则$\frac{d(\ )}{dt}=0\Rightarrow\frac{\partial(\ )}{\partial t}=-\vec{V}\cdot\nabla$

2. 若**流体具有的物理量分布均匀**，则$\vec{V}\cdot\nabla=0,\frac{\partial(\square)}{\partial t}=\frac{d(\square)}{dt}$

3. 若是**定常流场**，则 $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=0$

1.3.3 变量转换

拉格→欧拉 ① 利用拉格朗日变量，**对 t 求偏导**，求得各流点流速 ② 在表达式中**消去(x_0,y_0,z_0)**得欧拉变量

$$\begin{cases} u(x_0,y_0,z_0,t)=\frac{\partial}{\partial t}x(x_0,y_0,z_0,t) \\ v(x_0,y_0,z_0,t)=\frac{\partial}{\partial t}y(x_0,y_0,z_0,t) \\ w(x_0,y_0,z_0,t)=\frac{\partial}{\partial t}z(x_0,y_0,z_0,t) \end{cases} \to \begin{cases} u=u(x,y,z,t) \\ v=v(x,y,z,t) \\ w=w(x,y,z,t) \end{cases}$$

左：某一时刻 t 各流点的速度
右：某一时刻 t 速度在空间点上的分布
在某一时刻，它们的意义一致

例题 已知有$\begin{cases} x=ae^t \\ y=be^{-t} \\ z=c \end{cases}$ 有$\begin{cases} u=\frac{\partial x}{\partial t}=ae^t \\ v=\frac{\partial y}{\partial t}=-be^{-t} \\ w=0 \end{cases} \Rightarrow$ 消去参数 a, b, c 得$\begin{cases} u=x \\ v=-y \\ w=0 \end{cases}$

拉格→欧拉 ① **联立方程组积分求解** ② 消去参数

$$\begin{cases} u=u(x,y,z,t) \\ v=v(x,y,z,t) \\ w=w(x,y,z,t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=u(x(t),y(t),z(t),t) \\ v=v(x(t),y(t),z(t),t) \\ w=w(x(t),y(t),z(t),t) \end{cases} \to \begin{cases} dx/dt=u \\ dy/dt=v \\ dz/dt=w \end{cases} \to \begin{cases} x=x(c_1,c_2,c_3,t) \\ y=y(c_1,c_2,c_3,t) \\ z=z(c_1,c_2,c_3,t) \end{cases}$$

若右端有与左端不同的参数时，不可直接积分，需要变换后求解

例题 已知有$\begin{cases} u=x \\ v=-y \\ w=0 \end{cases}$ 根据$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=u \\ \frac{dy}{dt}=v \\ \frac{dz}{dt}=w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=ae^t \\ y=be^{-t} \\ z=c \end{cases}$ 由$t=t_0 \Rightarrow (x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)=(a,b,c)$

1.4 迹线和流线

1.4.1 迹线

定义 流体质点的运动轨迹线

方程 拉格朗日变量$\vec{r}=\vec{r}(x_0,y_0,z_0,t)$**消去参数$t$**可得

1.4.2 流线

定义 某一固定时刻，曲线上任意一点的流速方向与该点切线方向吻合

方程 $\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$

例题

1. 已知流体速度场：$u=\frac{-cy}{x^2+y^2}\quad v=\frac{cx}{x^2+y^2}$ 求流线方程，且经过（1，1）。

$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}\ \rightarrow\ \frac{dx}{\frac{-cy}{x^2+y^2}}=\frac{dy}{\frac{cx}{x^2+y^2}}\ \rightarrow\ xdx+ydy=0\ \rightarrow\ x^2+y^2=c$ —般流线方程

有$x^2+y^2=2$

2. 已知流体运动的速度场：(1) $u=kx\quad v=ky$ (2)$u=kxt\quad v=kyt$ 求$t=0$时过点（1，1）的迹线和流线。

① 先将欧拉变量→拉格朗日变量$\frac{dx}{dt}=u=kx\quad \frac{dy}{dt}=v=ky\Rightarrow\begin{cases}x=c_1e^{kt}\\y=c_2e^{kt}\end{cases}$ 代入$(1,1)$，得$c_1=1,c_2=1$

则$\begin{cases}x=e^{kt}\\y=e^{kt}\end{cases}$ 消去 t，可得$y=x$，此即迹线方程。

$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}\rightarrow\frac{dx}{kx}=\frac{dy}{ky}\rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\rightarrow\ln x=\ln y+C\ \rightarrow y=c_3x$，代入$(1,1)$得$c_3=1$，则$y=x$为流线方程。

根据 k 是否大于 0，可判断流线方向（若大于 0，则原点发散）

② $\frac{dx}{dt}=kxt\quad\frac{dy}{dt}=kyt\ \Rightarrow\frac{dx}{kx}=tdt\quad\frac{dy}{ky}=tdt\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{k}\ln x=\frac{1}{2}t^2+c_1\\\frac{1}{k}\ln y=\frac{1}{2}t^2+c_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=c_1e^{\frac{kt^2}{2}}\\y=c_2e^{\frac{kt^2}{2}}\end{cases}$ 得到$y=x$迹线方程

流线同理可消去 k\t，则流线同样为$y=x$

由此例题，可表明，迹线流线重合，不能说明速度场是一个定常流场。

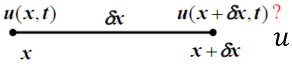
此外，流线不随时间变化不能说明定常流场（$u=aty,v=atx,w=0$）

1.5 速度分解

经典力学中，有$\overrightarrow{V_{刚}} = \overrightarrow{V_{平动}} + \overrightarrow{V_{转动}}$ 但流体运动有位置平动、形状大小、流点自身滚动旋转等运动。

方法论　　微元分析法：从流场中任意小的流体微团出发（由大量流点构成的有线性尺度效应的微小流体块）

泰勒展开



$u(x+\Delta x,t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{3!}$(高阶忽略)$= u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x$

考虑流体空间∀一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$与临近一点$M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$，有距离$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

同理可得：$u(M) = u(M_0) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$　　随后通过加项减项可以得到下述式子：

x 方向

$$u(M) = u(M_0) + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{A_{11}}\Delta x + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]}_{A_{12}}\Delta y + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right]}_{A_{13}}\Delta z + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right]}_{\omega_y}\Delta z - \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]}_{\omega_z}\Delta y$$

$$u(M) = u(M_0) + A_{11}\Delta x + A_{12}\Delta y + A_{13}\Delta z + \omega_y\Delta z - \omega_z\Delta y$$

y 方向

$$v(M) = v(M_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right]}_{A_{21}}\Delta x + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{A_{22}}\Delta y + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right]}_{A_{23}}\Delta z + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]}_{\omega_z}\Delta x - \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right]}_{\omega_x}\Delta z$$

$$v(M) = v(M_0) + A_{21}\Delta x + A_{22}\Delta y + A_{23}\Delta z + \omega_z\Delta x - \omega_x\Delta z$$

z 方向

$$w(M) = w(M_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right]}_{A_{31}}\Delta x + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right]}_{A_{32}}\Delta y + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{A_{33}}\Delta z + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right]}_{\omega_x}\Delta y - \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right]}_{\omega_y}\Delta x$$

$$w(M) = w(M_0) + A_{31}\Delta x + A_{32}\Delta y + A_{33}\Delta z + \omega_x\Delta y - \omega_y\Delta x$$

亥姆霍兹速度分解定理　　流体微团的运动可分解为**平动速度**、**转动线速度**和变形运动引起的**变形线速度**三部分

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(M_0) + \vec{V}_D + \vec{V}_R$$

上式中，$\vec{V}(M_0)$为平动、$\vec{V}_D = A|_{M_0} \cdot \delta\vec{r}$为形变、$\vec{V}_R = \vec{\omega}|_{M_0} \times \delta\vec{r}$ 为转动　**只适用于非常微小的流体微团，是局地量**

形变率

$$A_{23} = A_{32} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right] \qquad A_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

1	2	3
x	y	z
u	v	w

$$A_{31} = A_{13} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right] \qquad A_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \vec{V}_D$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] \qquad A_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

流体旋转角速度

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right] \\ \omega_y = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right] \\ \omega_z = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] \end{cases} \qquad \vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V} \qquad \vec{\omega} \times \delta\vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix}$$

1.6 涡度、散度和形变率

由于流点运动复杂性，仅仅使用速度很难刻画其全部特征，有必要引进其他物理量来表征流体特征。

1.6.1 涡度 ζ

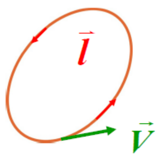
数学定义　　定义涡度矢为矢量微商符∇ 和速度矢 $\vec{V}$ 的矢性积，即**涡度矢** $=\nabla\times\vec{V}$

符号　　$Curl\,\vec{V}$　　$rot\,\vec{V}$　　ξ

公式　　$\nabla\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix}$

物理意义 速度环流　　定义：在流体中任取一闭合有向曲线l，沿着沿闭合曲线对该闭合曲线上的流速分量求和：

$$\Gamma=\int \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$$

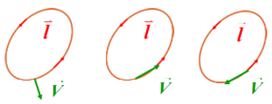


意义：其表示**流体沿闭合曲线流动趋势**的程度

① 当 L 为流体的流线且闭合时，处处的速度矢 V 与线元矢量的方向一致，因此速度环流表示流体完全按 L 流动

② 当 L 闭合，若速度环流Γ为 0，则流体沿着闭合曲线的分量的代数和为零

③ 当 L 闭合，但 L 不是流体的流线时，速度环流表示流体沿闭合曲线 L 的速度分量与相应线段的乘积的总和



转化：使用斯托克斯公式，将线积分→面积分：$\Gamma=\int_l \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_\sigma \nabla\times\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$　σ为围绕面积

如果闭合曲线 l 无限向内收缩，则有$\lim\limits_{\sigma\to 0}[\frac{\iint_\sigma \nabla\times\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\iint_\sigma d\sigma}]=\nabla\times\vec{V}\cdot\vec{n}\Rightarrow\ \nabla\times\vec{V}\cdot\vec{n}=\lim\limits_{\sigma\to 0}\Gamma/\sigma$

意义　流体某点的涡度矢在单位面元的法向分量 = 单位面积速度环流的极限值，它是**度量流体旋转程度的物理量**

其绝对值越大，表示旋转程度越强。一般逆时针方向为正方向。这是一个局地量

涡度三维分量　　$\nabla\times\vec{V}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$，则$z$方向涡度分量值为$\nabla\times\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

同理，x方向：$\nabla\times\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{i}=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}$　　y方向：$\nabla\times\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{j}=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}$

涡度与流体旋转角速度的关系

关系式　　$2\vec{\omega}=\nabla\times\vec{V}$

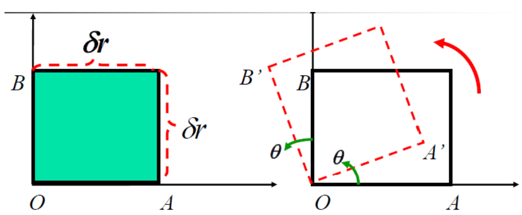
分量式　　$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)$　$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)$　$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

推导　　对于一个二维水平运动：$\left(\nabla\times\vec{V}\right)_z=\nabla\times\vec{V}\cdot\vec{k}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 考虑如下条件流体运动：

① $w=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$ 没有法形变

② $\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$　　没有切形变

③ $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}>0$　　流体旋转



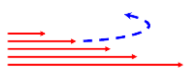
由图可知：$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\to\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\delta r=\theta\cdot\delta r\to\frac{\partial v}{\partial x}=\theta$　　$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\theta\to\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\theta\to\ 2\omega=\nabla\times V$

有$\omega=\frac{\delta\theta}{\delta t},\delta\theta=\frac{AA'}{OA}$，当$\delta t\to 0,\delta\theta\to 0,AA'=AA'',AA''=(V_A-V_O)\delta t,\delta\theta=\frac{(V_A-V_O)\delta t}{\delta x}=\frac{\delta v\delta t}{\delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}\ \delta t,\omega=\frac{\partial v}{\partial x}$

注意　　涡度是一个局地概念，不能理解为刚体那样的旋转运动。流体涡度表示其自转而非公转，如图所示。

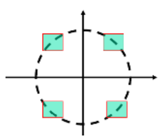
$\frac{\partial u}{\partial y}\neq 0$

直线有旋运动：



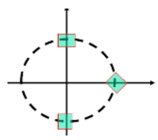
$u=-\frac{ky}{x^2+y^2},u=\frac{kx}{x^2+y^2}$

无旋圆周运动：



$u=-ky,v=kx$

有旋圆周运动：



1.6.2 散度

数学定义　定义散度为矢量微商符∇和速度矢$\vec{V}$的数性积，即**散度** $= \nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$

物理意义　**流体通量**　定义：$F=\oiint_{\sigma}\vec{V}\cdot d\vec{\sigma}=\oiint_{\sigma}\vec{V}\cdot\vec{n}d\sigma$　σ为流体中任一封闭曲面

转化：应用奥-高公式，将以上曲面积分转化为体积分：$\oiint_{\sigma}\vec{V}\cdot d\vec{\sigma}=\iiint_{\tau}\nabla\cdot\vec{V}\mathrm{d}\tau$

当曲面面元向内无限收缩时：$\lim_{\tau\to 0}\left[\frac{\iiint_{\tau}\nabla\cdot\vec{V}\mathrm{d}\tau}{\iiint_{\tau}d\tau}\right]=\nabla\cdot\vec{V}=\lim_{\tau\to 0}(F/\tau)$

意义：1. 欧拉观点看，**流体散度即为单位体积的流体通量**

任一封闭曲面σ为**几何面**时：

场的观点：$\nabla\cdot\vec{V}>0$　流体净流出（辐散（源））　$\nabla\cdot\vec{V}<0$　流体净流入（辐合（汇））

2. 散度也是度量**流点体积膨胀或收缩**的一个量，反映单位体积的**流点体胀速度**

体胀速度: 取体积$\delta x\delta y\delta z$的小正方体，其体积变率为$\frac{1}{\delta x\delta y\delta z}\frac{d}{dt}(\delta x\delta y\delta z)=\nabla\cdot\vec{V}$

任一封闭曲面σ为流点组成的**物质面**：

体积变化观点：$\nabla\cdot\vec{V}>0$　封闭曲面向外膨胀　　$\nabla\cdot\vec{V}<0$　封闭曲面向内收缩

总结

散度	流体宏观性质	场	运动
$\nabla\cdot\vec{V}>0$	膨胀	源	辐散
$\nabla\cdot\vec{V}<0$	收缩	汇	辐合
$\nabla\cdot\vec{V}=0$	不可压	无源汇	无辐散

1.6.3 形变率

概念　流点可以看作既大又小的流体微团，它不但会转动和发生体积的膨胀、收缩，而且还会发生形变。流体的形变包括：法形变（轴形变）和切形变（剪形变）

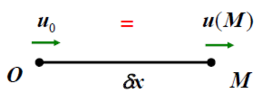
散度其实就是一种形变（体形变）。散度的三个部分分别表示了沿三个坐标轴伸长和缩短的形变率

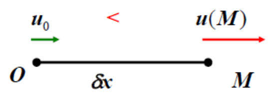
（1）法形变/轴形变

法形变率　即单位长度的流体**速度**变化率（单位长度单位时间内的伸长和缩短率）

定义　$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}$　　$e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}$　　$e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}$

推导　以一维运动$u=u(x), v=y=0$





与散度关系　流体散度是三个方向法形变率的和，又称散度是体形变率，分别表示了沿三个坐标轴伸长和缩短的形变率，称为轴形变或法形变。

$$\nabla\cdot V=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

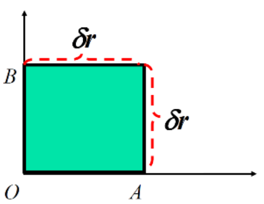
二维平面流动　$D=\nabla_h\cdot\vec{V}=\nabla_2\cdot\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$

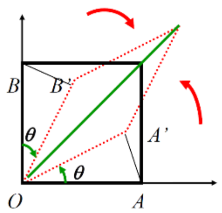
（2）切形变/剪形变

定义　如果流点考虑成微团或立方体素，当该小体素既无体积大小变化又无转动时所发生的形状变化，就称为切形变。即流体质点线之间**夹角的相向改变率**

表示　$A_{23}=A_{32}=\frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z})$　　$A_{31}=A_{13}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})$　　$A_{12}=A_{21}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y})$

图示





方程描述 ① $w=0,\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$ 不存在法形变 ② $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}>0$ 存在切形变但不存在旋转

推导 根据上图，考虑$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}>0$，则有$\begin{cases} u_A=u_0 \\ v_A=v_0+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\delta r \end{cases}$ 和 $\begin{cases} u_B=u_0+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\delta r \\ v_B=v_0 \end{cases}$

进一步分析可得$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\delta r=\theta\cdot\delta r\rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=\theta$ $\quad\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\delta r=\theta\cdot\delta r\rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=\theta$

最终有：$e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\theta$

（3）形变张量

描述 实际上，速度的三个分量分别对三个坐标变量求微商，可以写成矩阵的形式

形式 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ 形变张量与对称矩阵 （$A_{11}+A_{22}+A_{33}$为散度，A_{12},A_{13},A_{23}表示切形变）

对角线：法形变

推导

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \Omega_{xy} & -\Omega_{xz} \\ -\Omega_{yx} & 0 & \Omega_{yz} \\ \Omega_{zx} & -\Omega_{zy} & 0 \end{bmatrix},$$

$$其中\begin{cases} \Omega_{xy}=\Omega_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(\nabla\times V)_z \\ \Omega_{yz}=\Omega_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}(\nabla\times V)_x \\ \Omega_{zx}=\Omega_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}(\nabla\times V)_y \end{cases}$$

补充例题

1. 有流场 $u = at, v = 0, w = 0$ (a 为常数)，求流线和迹线。

① $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = 0$，则不可使用该形式。应说：流动是一维的，流线方程仅沿x方向，$dy = 0, dz = 0$

所以流线方程为$y = c_1, z = c_2$ （平行于 x 轴，若绘图注意方向）

② 由$\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0$，积分得$x = \frac{1}{2}at^2 + c_1'$,$y = c_2'$,$z = c_3'$，此即为迹线方程形式。表示沿着平行于 x 轴的一条直线

2. 已知流场$u = xt, v = \frac{y}{t}$ 求流线方程，并作图表示。

有$\frac{dx}{xt} = \frac{dy}{y/t} \Rightarrow \frac{1}{t}\ln x = t\ln y + C \Rightarrow x = Cy^{t^2}$ 因为流线随 t 变化，所以在不同时刻，有不同的形式。

因此，取几个时刻表示。例如$t = 0, t = 1$,$t = \sqrt{2}$,$t = \infty$