

第五章 流体波动

章节引言 波动是流体运动的一种重要形式，尤其是地球物理流体力学和大气动力学中的一种最重要的运动形式，例如有重力水面波等。

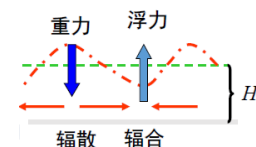
5.1 波动的基本概念

物理定义 波动是指扰动(各种物理量的扰动)在空间的传播，这种扰动传播具有在时间、空间上的双重周期性。例如弹簧振子的质量、温度、速度等物理量的传播。流体的波动，是流体微团由于受到力的作用，偏离平衡位置，并围绕某个平衡位置产生振动，震动在空间传播形成。

5.1.1 波动的数学模型

一维水面波 水面受到干扰后，水面发生起伏不平的变化。水面高度 h 与空间 x 、时间 t 的函数为：

$$h(x, t) = H + h'(x, t) \text{ 水面扰动高度 且为微扰动: } \frac{|h'(x, t)|}{H} = \frac{|h(x, t) - H|}{H} \ll 1$$



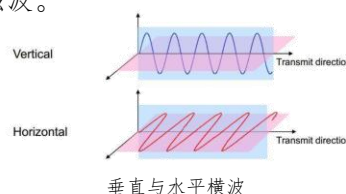
扰动高度是一个波动函数正弦波的形式：有简谐振动： $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \Rightarrow y = A \cos(\omega t - \varphi)$

一维简谐波： $y = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$ 任何物理量的扰动可以表示成波动的形式

则扰动可表示为： $h'(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi_1) = A \sin(kx - \omega t + \varphi_2)$ 此为 x 方向,可扩展高维实际上扰动是由许多不同频率及不同振幅的简谐波叠加形成

波动分类

- ① **纵波** 流体质点振动方向与传播方向一致，如声波。
- ② **横波** 振动方向与传播方向垂直，可进一步分为垂直和水平横波，如电磁波。
 - 垂直横波**：垂直方向振动，水平方向传播，如重力波
 - 水平横波**：水平方向振动，水平方向传播，如大气长波



5.1.2 波参数

一般形式 $y = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$

- ① **振幅 A** 质点偏离平衡位置的最大位移，或物理量距离平衡状态的最大距离。可用于衡量能量大小。
- ② **周期 T** 完成一次全震动所需要的时间，波传播一个波长距离需要的时间。
- ③ **频率 f** $f = 1/T$ 单位时间内完成全震动的次数。
- ④ **波长 L** 波动在一个周期中传播的距离，固定时刻相邻同位相质点间距。
- ⑤ **位相 θ** $\theta = kx - \omega t + \varphi$ φ 为初位相，位相相等的点构成等位相面(波阵面) $\theta = C$ 常数
波阵面是平面，称平面波；波阵面为球面，称球面波
- ⑥ **波数 k** $k = \frac{2\pi}{L}$ 以相角 2π 表示的单位距离内含有波长 L 的波的数目。单位： $[L]^{-1}$
- ⑦ **圆频率 ω** $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 以相角 2π 表示的单位时间内振动的次数。单位： $[T]^{-1}$
- ⑧ **相速 c** 波面传播的速度，就是波的传播速度。有 $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\theta=C} = \frac{\omega}{k} = c$

研究波动主要在于求解各种表征波动的参数及其形成机制

5.1.3 二维、三维波动

引入

上述波动局限于一维，然而，大多数波动为二维或三维的。

扩展形式

$$S_{\text{二维}} = A \cos(k_x x + k_y y) \quad S_{\text{三维}} = A \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$$

位相普遍形式

$$\theta = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \theta(x, y, z, t)$$

其中 $\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}$ 为圆频率 $k_x = \frac{\partial \theta}{\partial x}$ 为 x 方向波数，其余 y 、 z 方向同理

总波数矢量

$$\vec{K} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k} = \nabla \theta_{\text{梯度}} \quad \text{等位相面沿 } \vec{K} \text{ 方向单位时间内移动的距离，即为波动传播的方向}$$

有 $\vec{K} = \nabla \theta$ 波数矢量垂直于等位相面(沿位相梯度方向)，等位相面沿其法线方向在单位时间内移动的距离，称为三维平面波的相速 C

全波数

$$K = |\vec{K}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

空间位置矢量

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{代入位相普遍形式可得: } \theta = \vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t$$

等位相面

$$\theta = \vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{常数} \quad \text{令上式等于常数，即为三维平面波等位相面所满足的方程}$$

相速度

$$\text{上式对 } t \text{ 求导: } \frac{d\theta}{dt} = \vec{K} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\theta=\text{const}} - \omega = 0 \quad \text{若令 } \vec{C} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\theta=\text{const}}$$

$$\text{则 } \vec{K} \cdot \vec{C} = \omega \Rightarrow \vec{C} = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega}{K^2} \vec{K} \quad \vec{K}、\vec{C} \text{ 共线, 均为波移动的方向}$$

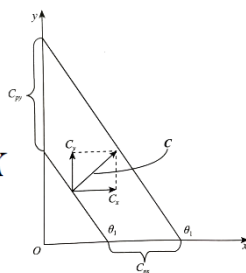
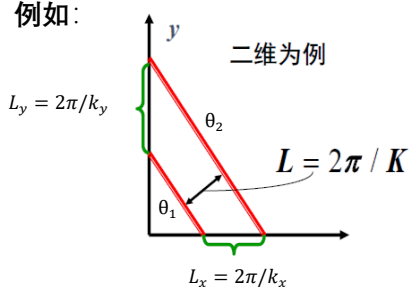
$$\text{相速度分量: } C_x = \frac{\omega}{K^2} k_x \quad C_y = \frac{\omega}{K^2} k_y \quad C_z = \frac{\omega}{K^2} k_z$$

$$\text{位相移速: } C_{px} = (dx/dt)_{y,z,\theta=\text{const}} = \frac{\omega}{k_x} \quad C_{py} = (dy/dt)_{x,z,\theta=\text{const}} = \frac{\omega}{k_y}$$

$$C_{pz} = (dz/dt)_{x,y,\theta=\text{const}} = \frac{\omega}{k_z} \quad \text{由此: } \vec{C} \neq C_{px}\vec{i} + C_{py}\vec{j} + C_{pz}\vec{k}$$

相速在三个坐标方向的分量不等于三个方向的相速，不具有运动速度矢量的特点。

例如：



沿着各坐标轴波传播速度与波速在各坐标轴上的分量是两个不同的物理含义

5.2 重力表面波和界面波

引入 表面波是日常生活中最形象且最直观的波动，如由于重力作用所产生的**水面波动（重力表面波）**以及发生于不同性质流体界面的**界面波**，下面详细地讨论此类波动，讨论波动方程建立和求解方法。

5.2.1 水面（表面）重力波

模型条件 考虑一维水面波（水渠波） 假设水面平静时水面高度为定值 H 一旦给水面一个小的扰动，水面不再平静，而起伏不平，水面高度 h 将随空间位置和时间而变化，即： $h(x, t) = H + h'(x, t)$ 即水面扰动高度

这种扰动十分微小： $\frac{|h'(x, t)|}{H} = \frac{|h(x, t) - H|}{H} \ll 1$

方程建立 不计粘性，不可压缩的一维波动方程为：
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} & \text{运动} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{连续} \end{cases} \quad (w \approx 0)$$

化简梯度力项为 h 的函数：垂直 z 方向近似满足**静力平衡**，流体压力可近似地表示为：

$p(x, z, t) = \rho g[h(x, t) - z] + p_0$ 对 x 求偏导则有： $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$ 可由水面坡度(自由表面高度梯度)表示

则代入，并展开个别变化为平流+局地：运动方程 $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$

最终方程为：
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

微扰动法

概念

波动研究的是物理变量的扰动部分，建立上式的扰动量满足的方程即为一维水面重力波方程。
方程是非线性的。我们使用适用于小振幅波的小扰动线性化方法(微扰动法)来将其线性化并求解。

方法

- ① 任何物理量可以表示为： $A = \bar{A}_{\text{基本量(平均量)}} + A'_{\text{扰动量}}$
- ② 基本量 \bar{A} 满足原来的方程 (最早用于行星研究：三体问题)
- ③ 扰动量 A' 为一小量，其二阶以上项为高阶小量可以略去

方程线性化 场变量： $u = \bar{u} + u' = u' \quad w = \bar{w} + w' = w' \quad h = H + h' \quad (\text{基本态 } \bar{u}, \bar{w} = 0)$

代入方程：
$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} = -g \frac{\partial (H_{\text{常量}} + h')}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h'}{\partial t} + u' \frac{\partial (H + h')}{\partial x} + (H + h') \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \end{cases}$$
 二次以上高阶小量近似略去

得到：
$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} = -g \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \frac{\partial h'}{\partial t} = -H \frac{\partial u'}{\partial x} \end{cases}$$
 即为描写水面重力波的闭合方程组，未知量为 u', h'

物理机制

① 小扰动 $\frac{\partial h'}{\partial x} \neq 0$ ，在重力作用下 \Rightarrow 压力梯度力 $-g \frac{\partial h'}{\partial x} \neq 0$ ，引起流体运动 $\frac{\partial u'}{\partial t} \neq 0$

② $\frac{\partial u'}{\partial x} \neq 0$ (辐合辐散) $\Rightarrow \frac{\partial h'}{\partial t} \neq 0$ 扰动随时间变化 **扰动 \Rightarrow 重力作用 \Rightarrow 辐合辐散 \Rightarrow 水面波**

求解

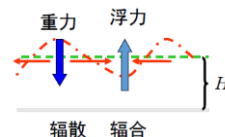
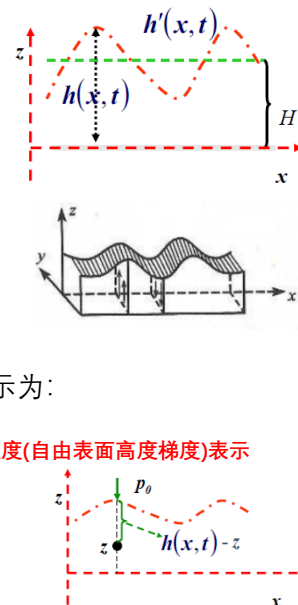
将方程合并为一个方程：先对第二个式子对 t 求偏微商，把第一式对 x 求偏微商与 H 相乘，再相加

$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}$ 不妨假设波动形式解为： $h'(x, t) = A \sin k(x - ct)$ 行波法

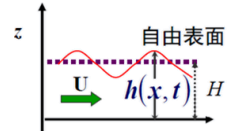
将形式解代入方程： $k^2 c^2 h' = gH k^2 h' \Rightarrow c = \pm \sqrt{gH}$ 水面重力波相速公式 (成波物理原因为重力)

同理，为求得 u' ，假设 $u' = B \sin k(x - ct)$ 代入得： $B = \pm A \sqrt{\frac{g}{H}}$

有流速场： $u' = B \sin k(x - ct) = \pm A \sqrt{\frac{g}{H}} \sin k(x - ct)$ 正负号表示扰动速度和扰动高度的位相关系



例题 如图所示：流速为 U (常数)的一维均匀水流，表面受到扰动而产生重力表面波：根据水平运动方程及不可压连续方程： $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ 采用线性化方法导出描写流体波动的方程组，并求重力表面波的相速度。



$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{采用线性化方法: } u = U + u' \quad w = \bar{w} + w' = w' \quad h = H + h'$$

$$\frac{\partial(U+u')}{\partial t} + (U+u') \frac{\partial(U+u')}{\partial x} + w' \frac{\partial(U+u')}{\partial z} = -g \frac{\partial(H+h')}{\partial x} \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial h'}{\partial t} + (U+u') \frac{\partial(H+h')}{\partial x} + (H+h') \frac{\partial(U+u')}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} = -g \frac{\partial h'}{\partial x} \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u' = -g \frac{\partial h'}{\partial x} \quad \text{消去参数 } u' \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 h' = gH \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial x} = -H \frac{\partial u'}{\partial x} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) h' = -H \frac{\partial u'}{\partial x}$$

相速度：假设波动的形式解为： $h'(x, t) = A \sin k(x - ct)$ 有：

$$\left(\frac{\partial^2(A \sin k(x-ct))}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial(A \sin k(x-ct))}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2(A \sin k(x-ct))}{\partial x^2} \right) = gH \frac{\partial^2(A \sin k(x-ct))}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$-A c^2 k^2 \sin[k(-ct + x)] + 2UA c k^2 \sin[k(-ct + x)] - AU^2 k^2 \sin[k(-ct + x)] = gH - A k^2 \sin[k(-ct + x)]$$

$$-k^2(U - c)^2 h' = -gH k^2 h' \Rightarrow c = U \pm \sqrt{gH} \quad \text{基本气流和波动的叠加}$$

5.2.2 上轻下重流体间的界面波

引入 5.2.1 的水面重力波，确切地说是空气和水之间的流体界面波，只是在讨论时通常不考虑空气。假如将以上讨论中的空气用油来代替，而把水表面当作油与水的界面，这样就构成了上轻下重的液体分布情况。此时，如果再来考虑其中的波动问题，就构成了本节讨论的上轻下重的流体间的界面波。

基本情况 上层流体 ρ_1 下层流体 ρ_2 研究对象为下层流体 扰动高度为 $h'(x, t)$

方程组 $\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$ 关键问题：上层流体的影响，即气压梯度项处理

气压梯度项 流体的静压力只与流体的深度有关。当下层流体表面未发生扰动时，水平压力梯度为零，且有：

$$p_A = p_B = p_{\text{任一深度 } z_1 \text{ 处的气压}} = p_0 \text{ 上层流体表面所受气压} + \rho_1 g z_1$$

$$\text{根据流体的静力平衡方程 } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{\text{垂直压力梯度}} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\text{水平压力梯度}} = 0$$

可见，对于下层流体，不可压流体的水平压力梯度力 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ 将不随高度 z 变化

$$\text{在下层流体中，气压梯度力为：} -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (p'_B - p'_A)_{\text{压强差}} = -\frac{1}{\rho_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (p'_B - p'_A)$$

$$\text{由于: } p'_A = p_A + \rho_1 g \left(\frac{\partial h'}{\partial x} \Delta x \right) = p + \left(\frac{\partial h'}{\partial x} \Delta x \right) \rho_1 g$$

$$p'_B = p_B + \rho_2 g \left(\frac{\partial h'}{\partial x} \Delta x \right) = p + \left(\frac{\partial h'}{\partial x} \Delta x \right) \rho_2 g$$

$$\text{最终可表示为: } -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} = -g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial h}{\partial x}$$

在这种情况下，仍然可以采用受扰后的界面坡度来表示流体压力的水平梯度

最终方程 $\begin{cases} \frac{du}{dt} = -g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$ 线性化 $\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} = -g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \frac{\partial h'}{\partial t} = -H \frac{\partial u'}{\partial x} \end{cases}$

$$\text{在方程中消去 } u', \text{ 可得界面波方程: } \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = gH \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}$$

相速公式 设波动的形式解 $h'(x, t) = A \sin k(x - ct)$

$$\text{可得: } c = \pm \sqrt{gH(1 - \rho_1/\rho_2)}$$

