

第二章 流体运动的控制方程

章节引言 欧拉方法研究确定的空间体积范围内流体物理量的变化规律，由已知的适用于系统的基本定律表达式导出对控制体积适用的形式。本节根据质量守恒定律、牛顿第二定律和能量守恒定律导出描述流体运动的连续性方程、运动方程和能量方程。

2.1 流体的连续性方程

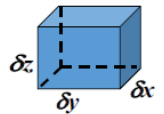
对应经典力学 质量守恒定律，反应流体运动和流体质量分布间的关系

2.1.1 拉格朗日观点的流体连续性方程

观点 流体块在运动过程中，尽管体积形状可以发生变化，但其质量是守恒不变的。

推导 体积 $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$ 质量 $\delta m = \rho \delta\tau$

质量不随时间变化 $\frac{d(\delta m)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d(\rho \delta\tau)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\delta\tau} \frac{d(\delta\tau)}{dt} = 0$ 单位体积体积变化率=散度



方程 $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$ 散度 >0 ，体积增大，则密度减小

观点 流体密度变化由于流体体积的增大减小造成的。
这个约束条件保证了流体的连续介质假设。

2.1.2 欧拉观点的流体连续性方程

观点 控制体内质量的变化，取一个空间上位置体积不变的控制体。

推导 左侧面流入流量：流入质量 = ρu 面密度 $\delta y \delta z$ 左侧面面积

右侧面流出流量：流出质量 = $\rho u \delta y \delta z + \frac{\partial(\rho u \delta y \delta z)}{\partial x} \delta x$ 经过左侧面的质量沿着 x 方向做一阶泰勒展开

$$\frac{d(\delta m)}{dt} \text{ 空间体} = m_{in} - m_{out}$$

$$x \text{ 方向净流出质量: } \rho u \delta y \delta z + \frac{\partial(\rho u \delta y \delta z)}{\partial x} \delta x - \rho u \delta y \delta z = \frac{\partial(\rho u \delta y \delta z)}{\partial x} \delta x$$

$$y \text{ 方向净流出质量: } \rho v \delta x \delta z + \frac{\partial(\rho v \delta x \delta z)}{\partial y} \delta y - \rho v \delta x \delta z = \frac{\partial(\rho v \delta x \delta z)}{\partial y} \delta y$$

$$z \text{ 方向净流出质量: } \rho w \delta x \delta y + \frac{\partial(\rho w \delta x \delta y)}{\partial z} \delta z - \rho w \delta x \delta y = \frac{\partial(\rho w \delta x \delta y)}{\partial z} \delta z$$

$$\text{控制体内质量减少量: } -\frac{\partial(\rho \delta x \delta y \delta z)}{dt}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

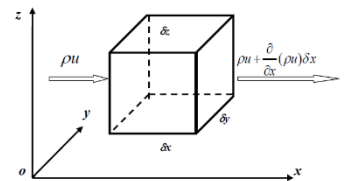
方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$ $\nabla \cdot (\rho \vec{V})$: 单位体积的**质量通量**

质量通量大于零，则有流体流出，则流体局地密度减小。

质量通量小于零，则有流体流入，则流体局地密度增大。

体积通量 $\lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{V} d\tau / \iiint_{\tau} d\tau \right] = \nabla \cdot \vec{V}$

质量通量 $\lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\iiint_{\tau} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) d\tau / \iiint_{\tau} d\tau \right] = \nabla \cdot (\rho \vec{V})$



方程转换

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{V}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad \frac{d\rho}{dt} \text{ 可以加上平流变化变为个体变化}$$

2.1.3 讨论不可压缩流体的数学表示(补充)

定义

质点的密度在运动过程中不变的流体称为**不可压缩流体**

表示

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{d}{dt}(\rho) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \vec{V} \cdot \nabla(\rho)$$

表示**每一个**质点的密度在运动的全过程中不变。但是这个质点的密度和那个质点的密度可以不同，因此**不可压缩流体的密度并不一定处处都是常数**。

不可压缩流体

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

均质流体

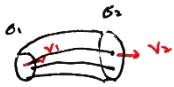
$\nabla \rho = 0$ 流体密度处处是常数（密度梯度为零）

均质不可压缩流体

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ and } \rho = \text{const}$$

流管中的连续方程

流入流管质量=流出流管质量（由于定常，质量不变）



$\rho_1 v_1 \sigma_1 = \rho_2 v_2 \sigma_2$ ，若密度相同，则 $v_1 \sigma_1 = v_2 \sigma_2$ ，则 $v\sigma = \text{Const}$ 为常数
如果截面积减小，则流速增大。

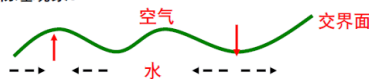
2.1.4 具有自由表面的流体连续性方程

自由表面

通常把自然界中水与空气的交界面称为水面或水表面。

这种因流动而伴随出现的可以升降的水面，在流体力学中称之为自由表面。

实际物理现象：



典例：

（交界面**无法承受任何扰动**，并且两个介质间密度相差很大）

当水面向某处汇集时，该处水面将被拥挤而升高；反之，当该处有水向四周流散开时，将使得那里的水面降低。

方程推导

假设流团密度为 $\rho = \rho(x, y, z, t)$

考虑流体运动为**二维的**，即满足 $w \approx 0, \partial/\partial z = 0$ 速度 u, v 不随高度变化，取流向方向为 x 轴。

设流体自由表面高度为 $h = h(x, y, z, t)$ ，即 h 在各处高低不同且可以随时间变化

在流体中选取一个以 $\delta x \delta y$ 为底的方形柱体，该柱体是**一固定不动的空间区域**，称为**控制区**（欧拉观点）
流体可以通过控制区的**侧面**，流出流入该柱体：

1 考虑柱体内流体的质量为： $\delta m = \int_0^h (\rho \delta x \delta y_{\text{底面积}}) \delta z$

2 经流体柱**后侧流入**的流体质量应为：流入质量 = $\int_0^h (\rho u \delta y_{\text{后侧面面积}})_{\text{面质量}} \delta z_{\text{高度}}$

3 同时，经流体柱**前侧流出**的质量为：流出质量 = $\int_0^h (\rho u \delta y) \delta z + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^h (\rho u \delta y) \delta z \right] \delta x_{\text{前后侧面的距离}}$

4 **左侧流入**的流体质量应为：流入质量 = $\int_0^h (\rho v \delta x) \delta z$

5 **右侧流出**的质量为：流出质量 = $\int_0^h (\rho v \delta x) \delta z + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^h (\rho v \delta x) \delta z \right] \delta y$

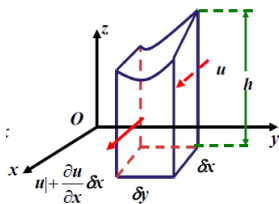
流出质量减去流入质量 → 柱体内的**净流出量** = 柱体内**质量的减少**

流入质量减去流出质量 → 柱体内的**净流入量** = 柱体内**质量的增加**

有 $-\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h (\rho \delta x \delta y) \delta z = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^h (\rho u \delta y) \delta z \right] \delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^h (\rho v \delta x) \delta z \right] \delta y$

积分上限 h 为 x, y, t 的函数，可应用**可变上限积分的求导规则**：

$$\frac{d}{dt} \int_{b(t)}^{a(t)} f(x, t) dx = \int_{b(t)}^{a(t)} f'_t(x, t) dx + f[a(t), t] \frac{da(t)}{dt} - f[b(t), t] \frac{db(t)}{dt}$$



$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h (\rho \delta x \delta y) \delta z = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^h (\rho u \delta y) \delta z \right] \delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^h (\rho v \delta x) \delta z \right] \delta y \quad \text{上式}$$

对上式两端各项展开，左端项和右端项分别为：

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h (\rho \delta x \delta y) \delta z = - \int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta z \delta x \delta y - \rho_h \delta x \delta y \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_0 \delta x \delta y \frac{\partial 0}{\partial t} = - \int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta z \delta x \delta y - \rho_h \delta x \delta y \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^h (\rho u \delta y) \delta z \right] \delta x = \left[\int_0^h \left(\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \delta y \right) \delta z \right] \delta x + \rho_h u_h \delta y \frac{\partial h}{\partial x} \delta x + \rho_0 u_0 \delta y \frac{\partial 0}{\partial x} \delta x = \delta x \delta y \left[\int_0^h \rho \frac{\partial u}{\partial x} \delta z + \int_0^h u \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta z + \frac{\partial h}{\partial x} \rho_h u_h \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^h (\rho v \delta x) \delta z \right] \delta y = \left[\int_0^h \left(\frac{\partial (\rho v)}{\partial y} \delta x \right) \delta z \right] \delta y + \rho_h v_h \delta x \frac{\partial h}{\partial y} \delta y + \rho_0 v_0 \delta x \frac{\partial 0}{\partial y} \delta y = \delta x \delta y \left[\int_0^h \rho \frac{\partial v}{\partial y} \delta z + \int_0^h v \frac{\partial \rho}{\partial y} \delta z + \frac{\partial h}{\partial y} \rho_h v_h \right]$$

$$\text{故有} - \int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta z \delta x \delta y - \rho_h \delta x \delta y \frac{\partial h}{\partial t} = \delta x \delta y \left[\int_0^h \rho \frac{\partial u}{\partial x} \delta z + \int_0^h u \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta z + \frac{\partial h}{\partial x} \rho_h u_h \right] + \delta x \delta y \left[\int_0^h \rho \frac{\partial v}{\partial y} \delta z + \int_0^h v \frac{\partial \rho}{\partial y} \delta z + \frac{\partial h}{\partial y} \rho_h v_h \right]$$

考虑到 $u, v, \partial u / \partial x, \partial v / \partial y$ 与 z 无关，并消掉等式两端公共项 $\delta x \delta y$ 得

$$\frac{\partial h}{\partial t} \rho_h + \int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta z + \frac{\partial h}{\partial x} \rho_h u + \frac{\partial h}{\partial y} \rho_h v + \int_0^h u \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta z + \int_0^h v \frac{\partial \rho}{\partial y} \delta z + \left(\int_0^h \rho \delta z \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\int_0^h \rho \delta z \right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

考虑水为不可压缩的，根据连续方程有： $\int_0^h \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \delta z \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$

$$\text{所以有} \frac{\partial h}{\partial t} \rho_h + \frac{\partial h}{\partial x} \rho_h u + \frac{\partial h}{\partial y} \rho_h v + \left(\int_0^h \rho \delta z \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\int_0^h \rho \delta z \right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{可以得到: } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v + \left(\frac{1}{\rho_h} \int_0^h \rho dz \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v \text{ 相当于 } \frac{dh}{dt}$$

又有 $\frac{1}{\rho_h} \int_0^h \rho dz = \begin{cases} h & \text{均匀流体} \\ \Rightarrow h & \text{自由表面附近流体 (浅流体)} \end{cases}$ 假设流体为均匀流体， ρ 为常数

$$\text{进一步有 } \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{局地+平流+h·散度}$$

$$\text{方程} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \vec{V}) = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla h + h \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{表示流体高度在局地随着时间变化的原因}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{只考虑运动在 } x \text{ 轴方向})$$

将密度变量转化为高度变量

$$\frac{dh}{dt} + h \nabla \cdot \vec{V} = 0$$



2.2 作用于流体的力、应力张量

牛顿第二定律 物体宏观运动（运动的加速度） \Leftrightarrow 作用力的关系 $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$

2.2.1 作用于流体的力

分析对象 流体中以界面 σ 包围的体积为 τ 的流体块

流体作用力 质量力+表面力

质量力 定义 又称体力，是指作用于所有流体质点的力。如重力、万有引力等场的分布。

特性 ① **质量力是长程力**：它随相互作用的元素之间的距离的增加而减小，对于一般流体的特征运动距离而言，均能显示出来。

② **它是一种分布力**，分布于流体块的整个体积内，流体块所受的质量力与其周围有无其他流体存在并无关系。每个流体分子都会受到这个效果

③ 通常情况下，作用于流体的质量力通常就是指重力。

定义式 如果 \vec{F} 表示单位质量的质量力，规定其为： $\vec{F} = \lim_{\delta m \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}'}{\delta m}$

其中 $\delta \vec{F}'$ 是作用在质量为 δm 的流体块上的质量力。不难看出， \vec{F} 可以看做力的分布密度。

例如：对处于重力作用的物体而言，质量力的分布密度或者说单位质量的质量力就是重力加速度 $\vec{g} = \vec{G}/m$

质量力 通过体积分，作用于体积为 τ 的流体块上的质量力： $\int_{\tau} \rho \vec{F} d\tau$ $\rho \vec{F}$ 是单位体积的质量力

表面力 定义 是指流体内部之间或者流体与其他物体之间的接触面上所受到的相互作用力。

如流体内部的粘性应力和压力、流体与固体接触面上的摩擦力等

特性 ① **表面力是一种短程力**：源于分子间的相互作用。表面力随相互作用元素之间的距离增加而迅速减弱，只有在相互作用元素间的距离与分子距离同量级时，表面力才显现出来。

相互作用的元素必须相互接触，表面力才存在。

② 流体块内各部分之间的表面力是相互作用而相互抵消的，只有处于界面上的流体质点所受的，由界面外侧流体所施加的表面力存在——作用于流体块表面上的表面力。如果是流体微团，流体内部的表面力会相互抵消（两两相反，成对出现），但外表面没有这一效果。该流体块所受表面力，只存在于外表面。

③ **表面力也是一种分布力**，分布在相互接触的界面上。

定义式 定义单位面积上的表面力为： $\vec{p} = \lim_{\delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{p}'}{\delta \sigma}$ 其中 $\delta \vec{p}'$ 是作用于某个流体面积上 $\delta \sigma$ 的表面力。

质量力 通过面积分，不难得到某流体块与周围流体接触面 σ 上所受到的表面力： $\int_{\sigma} \vec{p} \delta \sigma$

两力比较

质量力和表面力有着本质的差别：一个是长程力，一个必须接触。

矢量 \vec{F} 是质量力的分布密度，它是时间点和空间点的函数，因而构成了一个矢量场。

而矢量 \vec{p} 为流体的应力矢，它不但是时间点和空间点的函数，并且在空间每一点还随着受力面元的取向不同而变化。所以要确定应力矢 \vec{p} ，必须考虑点的矢径 \vec{r} 、该点受力面元的方向（面元的法向单位矢 \vec{n} ）以及时间 t 。确切地说应力矢是两个矢量 (\vec{r}, \vec{n}) 和一个标量的函数 t ，即 $\vec{p}(\vec{n}, \vec{r}, t)$ 。

2.2.2 应力张量

推导

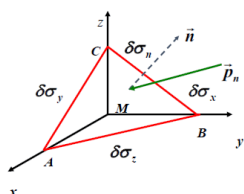
取如图所示流体四面体元（界面 σ 包围的体积为 τ ），分析其受力。其质量为 δm

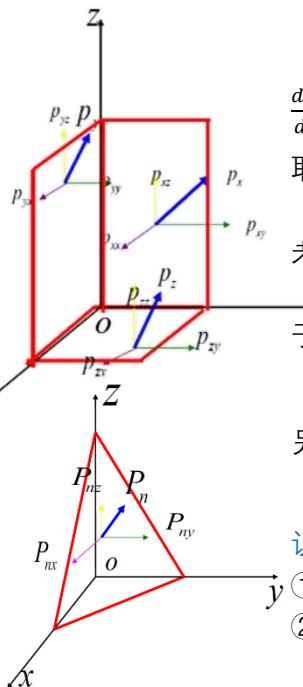
说明：应力矢的下标取其作用面元的外法向，并且规定为外法向流体对另一部分流体的作用应力。

例如， MAB 外法线方向受到外界流体施加的表面力： \vec{p}_{-z} ，同理 $MAC \rightarrow \vec{p}_{-y}$ ， $MBC \rightarrow \vec{p}_{-x}$

按照牛顿第二定律 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{和}}$ ，可得 $\frac{d\vec{v}}{dt} \delta m = \vec{F} \delta m + \vec{p}_n \delta \sigma_n + \vec{p}_{-x} \delta \sigma_x + \vec{p}_{-y} \delta \sigma_y + \vec{p}_{-z} \delta \sigma_z$

根据作用力与反作用力原理，方程可以写成如下形式：





$$\frac{d\vec{v}}{dt} \delta m = \vec{F} \delta m + \vec{p}_n \delta \sigma_n - \vec{p}_x \delta \sigma_x - \vec{p}_y \delta \sigma_y - \vec{p}_z \delta \sigma_z \quad \delta \tau = \frac{1}{6} \delta d_x \delta d_y \delta d_z$$

取极限时: $\vec{p}_n \delta \sigma_n = \vec{p}_x \delta \sigma_x + \vec{p}_y \delta \sigma_y + \vec{p}_z \delta \sigma_z$ 作用于小流体的应力矢之间的相互关系。

$$\text{考虑面元间的关系} \begin{cases} \delta \sigma_x = \delta \sigma_n \cos(n, x) = n_x \delta \sigma_n & \text{MBC 面积} \\ \delta \sigma_y = \delta \sigma_n \cos(n, y) = n_y \delta \sigma_n & \text{MAC 面积} \\ \delta \sigma_z = \delta \sigma_n \cos(n, z) = n_z \delta \sigma_n & \text{MAB 面积} \end{cases}$$

于是, 上式可以改写为: $\vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z$ 【第一种表示形式】

n 面的表面力为三个坐标面的加权求和

另外, 应力矢量也可以表示为: $\vec{p}_n = \vec{i} p_{nx} + \vec{j} p_{ny} + \vec{k} p_{nz}$ 【第二种表示形式简单的矢量分解】

直接在三个方向上的分解

说明: 对于以 \vec{n} 为外法向面元上的应力矢 \vec{p}_n :

① 可以用通过同一点与三个坐标面平行的面元上的应力矢线性地表示出来 (第一种表示形式)

② 也可以将其表示为沿三个坐标轴的分量形式 (对应第二种表示形式)

将 $\vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z$ 中的 $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ 分别按照第二种形式展开, 则 (它们也是矢量, 也可以分解)

$$\begin{cases} \vec{p}_x = \vec{i} p_{xx} + \vec{j} p_{xy} + \vec{k} p_{xz} \\ \vec{p}_y = \vec{i} p_{yx} + \vec{j} p_{yy} + \vec{k} p_{yz} \\ \vec{p}_z = \vec{i} p_{zx} + \vec{j} p_{zy} + \vec{k} p_{zz} \end{cases} \quad \text{三个方向上分别合并, 得:} \quad \begin{cases} p_{nx} = n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx} \\ p_{ny} = n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy} \\ p_{nz} = n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz} \end{cases}$$

该式可以理解为 \vec{p}_n 在直角坐标系中展开。

应力张量

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \vec{p}_x \\ \vec{p}_y \\ \vec{p}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \quad \vec{p}_n = \vec{n} \cdot \mathbf{P} = (n_x, n_y, n_z) \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

物理含义

对应应力分量的下标作如下规定:

① 第一个下标表示受力面积元的外法向 (且规定应力为外法向流体对另一部分流体的作用);

② 第二个下标表示应力所投影的方向

例如, $p_{xy} > 0$ 表示面元外法线方向为 x 轴正方向的流体收到的应力矢量沿 y 轴方向的分量投影为正值。

法应力和切应力

应力矢量也可以表示为 $\vec{p}_n = p_{nn} \vec{n} + p_{n\tau} \vec{\tau}$ 法应力 + 切应力

则法应力为 $p_{nn} = \vec{p}_n \cdot \vec{n}$, 且有切应力 $|\vec{p}_n|^2 = p_{nn}^2 + p_{n\tau}^2$ 垂直于面的表面力

$$p_{nx} = \vec{i} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{P}) \quad p_{xx} = \vec{i} \cdot (\vec{i} \cdot \mathbf{P})$$

例题 1. 已知某点应力状态为 $\begin{bmatrix} 0 & a & 2a \\ a & 2a & 0 \\ 2a & 0 & a \end{bmatrix}$, 求通过此点, 方程为 $x + 3y + z = 1$ 的平面上的法应力和切应力大小。

$$\text{由 } \vec{p}_n = \vec{n} \cdot \mathbf{P} \text{ 得 其中 } n: n_x = \frac{1}{\sqrt{1+3^2+1}} = \frac{\sqrt{11}}{11}, n_y = \frac{3\sqrt{11}}{11}, n_z = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

$$\text{则 } p_{nx} = n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx} = \frac{\sqrt{11}}{11} * 0 + \frac{3\sqrt{11}}{11} * a + \frac{\sqrt{11}}{11} * 2a = \frac{5\sqrt{11}}{11} a$$

$$\text{同理: } p_{ny} = \frac{7\sqrt{11}}{11} a, p_{nz} = \frac{3\sqrt{11}}{11} a$$

$$\text{故所求法应力 } p_{nn} = \vec{p}_n \cdot \vec{n} = \frac{5\sqrt{11}}{11} a * \frac{\sqrt{11}}{11} + \frac{7\sqrt{11}}{11} a * \frac{3\sqrt{11}}{11} + \frac{3\sqrt{11}}{11} a * \frac{\sqrt{11}}{11} = \frac{29}{11} a$$

$$\text{切应力为 } p_{n\tau} = \sqrt{|\vec{p}_n|^2 - p_{nn}^2} = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2 - p_{nn}^2} = \frac{\sqrt{72}}{11} a = \frac{6\sqrt{2}}{11} a$$

2. 试从理想流体定义出发, 证明理想流体中任意一点上各个不同方向的法应力相等。

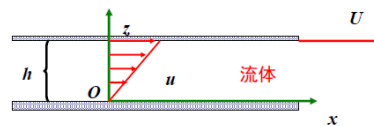
根据定义, 理想流体点对于切向形变没有任何反抗能力。所以, 在任一点的点领域内, 法方向为 n 的面元 ds 上的应力 \vec{p}_n 上只能由法向分量, 而切向的分量等于零。换句话说, \vec{p}_n 方向与 n 重合, 于是, 不难得出在直角坐标系的三个做表面上的应力应有 p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} 不为零, 而 $p_{xy} = p_{xz} = p_{yz} = 0$

$$\text{又因为} \begin{cases} p_{nx} = n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx} \\ p_{ny} = n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy} \\ p_{nz} = n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz} \end{cases} \text{所以} \begin{cases} p_{nx} = n_x p_{xx} \\ p_{ny} = n_y p_{yy} \\ p_{nz} = n_z p_{zz} \end{cases} \text{考虑到} \begin{cases} p_{nx} = p_{nn} n_x \\ p_{ny} = p_{nn} n_y \\ p_{nz} = p_{nn} n_z \end{cases} \text{因此} p_{nn} = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}$$

2.2.3 应力张量与流体运动状态间的关系

应力张量的确定 流体的应力与流体的运动状态（主要是形变率）之间有着非常密切的关系

① 平板实验 反映了粘性应力与流速分布之间的线性关系
上边界速度 U 匀速运动，拽动下方流体，逐层运动



实验结果: $\tau_{zx} \propto \frac{U}{h}$ 粘性应力(下标含义和应力的相同)

外法线方向为 z 的应力在 x 方向的投影值正比于上界速度 U ，反比于距离上界距离 h
粘性力正比于速度的空间分布

② 牛顿粘性假设 牛顿粘性定律建立了粘性应力与流速分布之间的关系

$$\tau_{zx} = \mu \frac{du}{dz}$$

其中 μ 为反映流体粘性的粘性系数或内摩擦系数；而流体与其他物体的粘性系数则称为外摩擦系数。单位: $N \cdot s/m^2$

③ 广义牛顿粘性假设

牛顿粘性定律建立了粘性应力与流速分布之间的关系，但它的不足在于仅仅适用于流体直线运动。

牛顿将以上的粘性应力与形变率的关系推广到任意粘性流体运动，即广义牛顿粘性假设：

$$\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{A} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{V}\right)\mathbf{I} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中， \mathbf{P} 为应力张量， \mathbf{A} 为形变张量， $p = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$ （注意: $\nabla \cdot \vec{V} = \operatorname{div}\vec{V}$ ）

由于 $\left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{V}\right)$ 是标量，所以乘上一个 \mathbf{I} 矩阵。

④ 特殊情形

不可压流体 $\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{A} - p\mathbf{I}$ 散度为零

不可压无粘性(理想)流体 $\mathbf{P} = -p\mathbf{I} \rightarrow \vec{p}_n = -p\vec{n}$ 其中 p 为流体压力，它表明在不考虑流体粘性时，流体间相互作用的表面力只有流体的压力，它是正法向方向的流体对另一侧流体的作用力。应力张量只剩下静压力部分。
如果是球形流体微团，只受到外界流体微团对它向内的力

说明 根据广义牛顿粘性假设的应力张量计算得到的应力包含了 流体压力 和 流体粘性力 两部分：

分解情况（分为 p 和 τ 两项） $\vec{p}_n = -p\vec{n} + \vec{\tau}_n$

外法线方向为 n 的面所受粘性应力 $\vec{\tau}_n = 2\mu\mathbf{A} \cdot \vec{n} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{V}\mathbf{I} \cdot \vec{n}$

如果是不可压流体 $\vec{\tau}_n = 2\mu\mathbf{A} \cdot \vec{n}$

总结 给定流体的粘性系数和流体运动流速场，根据牛顿粘性假设，就可以计算得到流体的粘性应力

牛顿粘性流体 满足牛顿广义粘性假设的流体（线性分布关系） 例如水、空气都是典型牛顿流体

非牛顿流体 黏性应力和速度空间分布不存在线性关系。例如洗发膏、石油、血液等粘性较大的、分子较大的流体。

2.3 运动方程

章节概述

已经了解流体的受力，表达加速度，现在建立 $F=ma$ 的方程。流体的运动方程（普遍形式）、纳维-斯托可斯（Navier-Stokes）方程（具体形式）、欧拉方程（理想流体运动方程）、静力方程（最简单情形的运动方程）

2.3.1 流体的运动方程（普遍形式）

研究对象

在运动流体中选取一小六面体体元，边长为 $\delta x, \delta y, \delta z$

总体思想

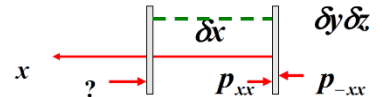
牛顿第二定律 $\rho \delta x \delta y \delta z \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{质量力} + \text{表面力} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = \vec{F}_{\text{质}} + \vec{F}_{\text{表}}$ （单位质量）

表面力分析

周围流体对小体元的六个表面有表面力，而通过六个侧面作用于小体元沿 x 方向的表面力分别为：

前后侧面： $\left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \delta x - \text{阶泰勒展开}\right) \delta y \delta z$ $p_{-xx} \delta y \delta z$ 后侧面

小体元前后侧面所受表面力在 x 方向的分量： $\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$



右左侧面： $\left(p_{yx} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} \delta y\right) \delta x \delta z$ $p_{-yx} \delta x \delta z$

右左侧面 x 方向： $\frac{\partial p_{yx}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$

上下侧面： $\left(p_{zx} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \delta z\right) \delta x \delta y$ $p_{-zx} \delta x \delta y$

上下侧面 x 方向： $\frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$

因此，周围流体通过六个侧面作用于小体元沿 x 方向的表面力合力为 $\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z$

质量力分析

小体元还受质量力的作用， x 方向质量力 = $F_x \rho \delta x \delta y \delta z$

综合分析

据牛顿运动定律： $F = ma \Rightarrow \frac{du}{dt} \rho \delta x \delta y \delta z = F_x \rho \delta x \delta y \delta z + \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z$ 化简可得

单位质量流体在 x 方向的运动方程

$$\frac{du}{dt} = F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right)$$

单位质量流体在 y 方向的运动方程

$$\frac{dv}{dt} = F_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right)$$

单位质量流体在 z 方向的运动方程

$$\frac{dw}{dt} = F_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right)$$

矢量形式

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \text{ or } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P} \text{ which } \nabla \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

2.3.2 纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程

总体思想

流体运动方程的普遍形式 \rightarrow 广义牛顿粘性假设 + 应力张量代入 \rightarrow N-S 方程

N-S 方程

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \text{grad div} \vec{v} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v}$$

推导

$$\text{有 } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P} \text{ and } \mathbf{P} = 2\mu \mathbf{A} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \text{div} \vec{v}\right) \mathbf{I} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} = \frac{\mu}{3} \text{grad div} \vec{v} + \mu \nabla^2 \vec{v} - \nabla p \text{ 具体过程:}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2\mu \partial u}{\partial x} - p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) & 2\frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ 2\frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{2\mu \partial v}{\partial y} - p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) & 2\frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ 2\frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & 2\frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{2\mu \partial w}{\partial z} - p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{bmatrix}$$

拉普拉斯算符

$\nabla^2 = \Delta = \nabla \cdot \nabla$ 称为拉普拉斯项, 整体效果是二阶运算 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

对标量

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi$$

对矢量

$$\nabla^2 \vec{V} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \vec{i} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

流体运动学粘性系数

记作 ν 或 η , $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 单位: $\frac{m^2}{s}$

不可压流体

$$(\text{div} \vec{V} = 0) \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{大气运动常见方程}) \quad (\text{不考虑可压})$$

直角坐标系形式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \end{cases} \quad (\text{左侧展开为局地变化+平流变化})$$

牛顿第二定律在流体力学中的表示式, 表明了作用力与流体运动参量之间的关系

物理意义讨论

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad \frac{d\vec{V}}{dt} \text{ 是单位质量流体的加速度} \quad \vec{F} \text{ 为单位质量流体所受的质量力}$$

① $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ 压力梯度力

$$\iint_{\sigma} p \vec{n} \text{ 流体微团向外的静压强} \cdot d\sigma \text{ 乘以面积} = \iiint_{\tau} \nabla p d\tau$$

$$\frac{\iint_{\sigma} p \vec{n} \cdot d\sigma}{\rho \iiint_{\tau} d\tau} = \frac{\iiint_{\tau} \nabla p d\tau}{\rho \iiint_{\tau} d\tau} \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\tau} \nabla p d\tau}{\rho \iiint_{\tau} d\tau} = \frac{1}{\rho} \nabla p$$

即为周围流体通过单位质量流点的表面, 对其所产生的压力的合力矢量, 是由于正压力引起的

② $\nu \nabla^2 \vec{V}$ 粘性(粘滞+扩散)力 周围流体对单位质量流点的粘性力的合力矢

1. 粘性力的存在, 不但与流体的粘性有关, 而且取决于流速的分布。

2. 当流体做整体运动时, $\nabla^2 \vec{V} = 0$, 流点就不受粘性力的作用。

3. 通常, 粘性力可以是曳力, 也可以是阻力, 这由流速的拉普拉斯所决定。从物理意义上来看, 如果周围流体的运动比所考虑的流点的运动快, 该流点所受的粘性力为曳力, 反之, 则为阻力。趋于均匀

假设只考虑 $\frac{du}{dt} = \nu \nabla^2 u$ $\iiint_{\tau} \nabla^2 u d\tau = \iint_{\sigma} \nabla u \cdot \vec{n} d\sigma$ 上表面 $\nabla u \cdot \vec{n} < 0$ 其余各个面均小于零, 则 $\frac{du}{dt} < 0$

2.3.3 欧拉方程

方程形式

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad \text{理想流体运动方程}$$

推导过程

理想流体 (不考虑流体粘性), 相当于去掉方程中含有粘性的项

表明意义

压力梯度力可以引起运动状态的变化, 反之流动结果又会使原来的压力分布状况发生变化
压力梯度力与速度间的相互转化

注意

欧拉方程适用于不可压缩和可压缩理想流体

2.3.4 静力方程

方程表达

$$0 = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

推导过程

流体静止时, 即流体的速度和加速度的个体变化均为零, 作用于流体的力应该达到平衡

表明意义

表明了流体的粘性只与流体的运动状态有关, 或者说流体的粘性只有在相对运动时才体现出来。
也就是说, 当流体静止时, 理想流体和粘性流体均满足以上平衡方程

应用举例

①假设流体所受的质量力就是重力, 静力方程可以变化为: $-g \vec{k}_{\text{垂直地面向上}} = \frac{1}{\rho} \nabla p$ 或 $\delta p = -\rho g \delta z$

表明: 当流体静止时, 作用于单位面积流体柱的顶面、底面上的压力差, 正好等于流体柱的重力;
流体静止时的压力, 可以用流体柱的质量来表示

② 流体密度只与 z 有关的流体 积分不难得到: $p = -g \int \rho(z) \sigma z + C$

③ 均匀流体 $p = -\rho g z + C$ 流体静止时单位面积上压力 (压强) 只与流体深度有关

阿基米德定律

静力方程的变形: 当体积为 τ 的物体浸于流体中时, 四周液体对物体表面存在静压力的作用, 且压

力合矢量为: $\vec{p} = \iint -p \vec{n} \cdot d\sigma$ 应用体积分变换, 可以得到: $\vec{p} = \iiint -\nabla p d\tau = \iiint \rho g \vec{k} d\tau = \rho g \vec{k}$

上式表明, 物体浸于液体时, 将受到来自液体的向上的浮力, 其大小等于物体所排开的同体积的液重。 以上结论只有在流体处于静止时才适用