第三章 实验流体力学

章节引言　前两章讲授**理论流体力学**（基础概念+基本方程），本章介绍**实验流体力学，**包括基本概念（设计实验的基本要求）与基本方法（处理数据时简化方程）。实验有普通实验与数值实验两类。

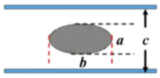
3.1 流体力学的模型试验和相似概念

实验定义　流体力学实验通常是在实验室条件下对实际流动和原型流动进行**模拟**，即把原型流动模拟成实验室的模型流动。要求原型和模型中的**物理过程本质一致**，才能使模型流动代表原型流动。

相似定义　**满足**原型和模型中物理过程的**本质完全一致**所进行**的模拟**，称之为相似。

分类　① **几何相似**　② **运动相似**　③ **动力相似**

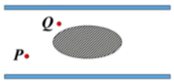
几何相似　要求模型流场与原型流场的**边界几何形状相似**。包括各对应部分夹角相等，尺寸大小成常数比例。

例如，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}=\frac{\text{模型}}{\text{原型}}=\boldsymbol{c_l}$ 

面积、体积讨论

在几何相似的**基础**上，枚举模型和原型流场之间的**对应点**才有意义。

运动相似　也称**流场相似**，要求模型流场和原型流场在任意选取的**对应点**上，流速分量满足有：

$\frac{u(P_2)}{u(P_1)}=\frac{v(P_2)}{v(P_1)}=\frac{w(P_2)}{w(P_1)}=\frac{u(Q_2)}{u(Q_1)}=\frac{v(Q_2)}{v(Q_1)}=\frac{w(Q_2)}{w(Q_1)}=\boldsymbol{c_v}$ 

时间、加速度项讨论

流场相似也就是在两流场对应点的速度方向相同，速度大小成常数比例

动力相似　要求两流场相应点上各**动力学变量**成同一常数比例。

其不像上两个相似有清晰的关系表达式，需要使用**相似判据**。

首先要求所有时空对应点上所受**同名力**方向相同，大小成一常数比（力：惯性力、重力、粘性力、压力等）；力学变量成一常数比，还包括密度、粘性系数、重力加速度等。

最重要：这些动力学变量的所满足的**物理方程形式必须相似**。

模拟的基本要求　只有在满足上述三个相似后，模型流动才能真实模拟出原型流动，模拟才具有实际价值和意义。**相似现象**必须**以几何相似为前提**的，对应点上**同类量**保持各自**固定的比例**关系，**相似现象**的**物理方程**在**形式上必为同一形式**。

两个现象的单值条件相似，而且所有同名相似判据的数值相同，则这两个现象相似。

3.2 动力相似判据

问题　满足什么关系时满足动力相似

方法　① **方程分析法**：运动方程→反映动力过程，反应各物理量之间的一种**相互制约关系**。从方程出发，抓住原型流动和模型流动的**物理本质一致**。（数学上，反应原型流动和模型流动的**方程同时成立**），从而得到必须满足的关系式，即相似判据。

② **π定理方法**：是以量纲分析为基础的一种方法。

前提条件　假定原型和模型**已满足几何相似与运动相似**，并考虑不可压缩粘性流体。$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\,\nabla^2\vec{V}\right)$

3.2.1 相似常数

相似常数　定义相似常数$=\frac{\text{模型物理量}}{\text{原型物理量}}$　下式要求所有**对应点**均成立（场的观点）

长度相似常数：$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}=\frac{l_2}{l_1}=c_l$　　**速度相似常数**：$\frac{u_2}{u_1}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{w_2}{w_1}=\frac{V_2}{V_1}=c_v$

如果**模型流体和原型流体是同一种流体**（保证流体本身的性质不变），且质量力仅仅为重力，通常有：

$\frac{\rho_2}{\rho_1}=c_\rho=1$，$\frac{\mu_2}{\mu_1}=c_\mu=1$，$\frac{g_2}{g_1}=c_g=1$ 需要说明，这是特例，一般不为 1（不同流体，也可以相似）

时间相似　模型流动中的时间变化过程并不要求与原型流动以相同的时间变化率进行（过程加速或延缓），但要求两流场的所有对应点上**均按同一常数值的时间变化加速和延缓**，即要求满足 $\frac{t_2}{t_1}=c_t$

注意：$t=\frac{l}{v}$，通常**c_t不是独立的，取决于c_l和c_v**　　$c_t=\frac{c_l}{c_v}$

压强相似　流体运动时的**流场与压力场**的关系是很密切的，且通常可以用 $\frac{\rho V^2}{2}$ 来度量流体压力（源于流速测压原理）。考虑到运动相似及流体密度相似，不难得到：$\frac{p_2}{p_1}=c_p$

注意：上式说明通常**c_p不是独立的，取决于c_ρ和c_v**　　$c_p=c_\rho c_v^2$

3.2.2 相似判据

流体相似　几何相似+物理相似

除几何相似之外，两流场中所有物理量，诸如流速、时间、温度和压力等彼此间均各自成常数比例

判据推导　对于**原型流动**，考虑运动方程在**z方向**的分量方程($\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V}\quad \nu=\frac{\mu}{\rho}$)

$$\rho_1\frac{\partial w_1}{\partial t_1}+\rho_1\left(u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial w_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)=-\rho_1 g_1-\frac{\partial p_1}{\partial z_1}+\mu_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2}\right)$$ **实际流场**动力性质

对于**模型流场**，同样遵循牛顿运动定律，同样有：

$$\rho_2\frac{\partial w_2}{\partial t_2}+\rho_2\left(u_2\frac{\partial w_2}{\partial x_2}+v_2\frac{\partial w_2}{\partial y_2}+w_2\frac{\partial w_2}{\partial z_2}\right)=-\rho_2 g_2-\frac{\partial p_2}{\partial z_2}+\mu_2\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2 t}+\frac{\partial^2 w_2}{\partial z_2^2}\right)$$ **实验流场**的动力性质

将以上**相似系数**($c_\rho=\frac{\rho_2}{\rho_1}$，$t_2=c_t t_1$等)全部代入**模型方程**，则变为：

$$\frac{c_\rho c_v}{c_t}\rho_1\frac{\partial w_1}{\partial t_1}+\frac{c_\rho c_v^2}{c_l}\rho_1\left(u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial w_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)=-c_\rho c_g\rho_1 g_1-\frac{c_p}{c_l}\frac{\partial p_1}{\partial z_1}+\frac{c_\mu c_v}{c_l^2}\mu_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2}\right)$$

相似判据　考虑到**实际流场**所遵循的运动方程，只有满足下式时，以上方程才能成立

$$\frac{c_\rho c_v}{c_t}=\frac{c_\rho c_v^2}{c_l}=c_\rho c_g=\frac{c_p}{c_l}=\frac{c_\mu c_v}{c_l^2}$$

模型流场中其运动方程的各项（各动力学变量）跟原型流场相比较**必须成相同的常数比例**，它是动力相似的**充分必要条件。要满足动力相似，以上等式必须成立。**

进步变换　对上式稍作变换，各项同除以 $\frac{c_\rho c_v^2}{c_l}$，最后可得：

$$\boldsymbol{\frac{c_l}{c_v c_t}=\frac{c_l c_g}{c_v^2}=\frac{c_p}{c_\rho c_v^2}=\frac{c_\mu}{c_v c_l c_\rho}=1}$$　这是两流场相似时，各相似常数必须满足的关系式。

进一步可以得到：$\frac{l_1}{u_1 t_1}=\frac{l_2}{u_2 t_2}$　　$\frac{u_1^2}{g_1 l_1}=\frac{u_2^2}{g_2 l_2}$　　$\frac{p_1}{\rho_1 u_1^2}=\frac{p_2}{\rho_2 u_2^2}$　　$\frac{u_1 l_1\rho_1}{\mu_1}=\frac{u_2 l_2\rho_2}{\mu_2}$

无量纲数　上面得到的是没有量纲（单位）的数，称为无量纲数。

斯特劳哈尔数：$St\equiv\frac{l}{tu}$　　**雷诺数：$Re\equiv\frac{lu}{\nu}=\frac{lu\rho}{\mu}$**

欧拉数：$Eu=\frac{\Delta p}{\rho u^2}$　　**弗雷德数：$Fr=\frac{u^2}{gl}$**

对于所考虑的问题，只要以上四个无量纲数在两种流场中是**相同的**，那么**原型和模型流场相似**，则两方程应反映同一事实。可见，利用**无量纲数作为动力相似判据**，比方程分析法要简单的多。另外，对特定的流动，作为动力相似判据的无量纲数可能会更少。

例题：1. 假定满足几何、运动相似，试求质量力仅为重力的理想流体运动的相似判据。(无粘性力)

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p=\vec{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p\quad \rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}\qquad St\equiv\frac{l}{tu}\quad Fr\equiv\frac{u^2}{gl}\quad Eu=\frac{\Delta p}{\rho u^2}$$

2. 给出连续方程在两个流场都满足的相似判据：

$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0$　有$\frac{c_\rho}{c_t}=\frac{c_\rho c_v}{c_l}$

3.3 无量纲方程

小节概述　相似判据→判断两流场是否相似必须对**所有对应点**进行比较，过于严格，不适合实际应用

引进**特征量与无量纲量**→无量纲方程　特征无量纲数具有实用性。

3.3.1 量纲分析

物理量　具有**物理属性**（种类）、**度量标准**（数量大小）。其中**度量标准具有单位**（基本单位、导出单位）

基本单位是给定的；**导出单位**则是根据物理定义或定律由基本单位所得到的

例子　普通力学中，通常选取米、千克、秒作为基本单位。压强、密度等单位则由基本单位导出。

密度 $\rho=\mathrm{kg/m^3}$　压强 $\mathrm{pa}=\mathrm{N/m^2}=(\mathrm{kg\cdot m/s^2})/\mathrm{m^2}=\mathrm{kg/(s^2\cdot m)}$

量纲　是测量单位抽象化的表示式，是**物理量的度量**，表示了**物理量的种类**

基本量纲　通常规定的，**彼此独立不能相互表达**，**能导出一切量纲**（不考虑质能转换等高级情况）

以特定的符号表示，不考虑其具体的测量单位。例如：长度$[L]$、质量$[M]$、时间$[T]$

导出量纲　以基本量纲的**幂次乘积**来表达。例如：密度$[M][L]^{-3}$、压强$[M][L]^{-1}[T]^{-2}$

注意：　物理量分为**量纲独立的量（基本量）**和**量纲非独立的量（导出量）**

但它们是可以人为选取，并不是一成不变的（相对性）

例如：v,t,l 可以选其中的**任意两个量**作为量纲独立的量（基本量），但通常按照一定习惯选定

$v,t\Rightarrow l\longrightarrow[l]=[v][t]=[V][T]$　　$l,t\Rightarrow v\longrightarrow[v]=[l]/[t]=[L][T]^{-1}$

因此，量纲独立的判断必须根据各物理量之间的相互关系作具体分析

量纲齐次性原理

内容　**物理方程中各项的量纲必须相同**

说明　① 不同量纲的量，不能作为单项同列于物理方程中

② 如果以物理方程中的任意一项除其他各项，则方程即化为**无量纲形式**，即得到**无量纲方程**。原方程与无量纲方程具有相同的物理实质

示例　以量纲分析方法说明方程$p+\frac{1}{2}\rho V^2+\rho gh=H(const)$是密度为$\rho$的流体沿流线无摩擦运动(伯努利方程)，物理量$p,\rho,h$之间的一个可能的关系式，并确定常数$H$的量纲。

解：要解决此问题，关键在于“量纲齐次性原理”。该关系式要成立，至少必须保证各项的量纲相同，且 H 也具有相同的量纲。

分析量纲：　$[p]=[M][L]^{-1}[T]^{-2}$　$[h]=[L]$　$[V]=[L][T]^{-1}$　$[\rho]=[M][L]^{-3}$

$[g]=[L][T]^{-2}$　显然，方程各项的量纲式相同的：当$[H]=[M][L]^{-1}[T]^{-2}$时满足量纲齐次性原理，说明它可能是此问题的关系式（必要条件）。

3.3.2 特征值和无量纲数

特征值　在特定的物理现象和物理过程中，物理量的数值总是在一定的范围内变化，是有限的、有界的。

对特定的物理过程，引入最具代表性、最能反映该物理现象的**某种物理特征的数值**，称为**特征值**

特征值一般用含有量纲 10 的幂次来表示

物理量的表示　**物理量 = 特征值$_A$ × 无量纲数$_B$**　　无量纲量总在10^0左右，与单位制的选择无关

A用**大写字母**表示,含有量纲,反映**一般大小**　　B用带 ′的**小写字母**表示,反映**具体大小**

例如：流速$u=3\mathrm{m/s}$　特征流速$U=10\mathrm{m/s}$　则$u=Uu'$　$u'=0.3$

特别说明　① 无量纲量不因单位制的改变而变化,**单位制所引起的物理量数值大小变化应包含在特征值中**

例如：　流速 $u=0.006\ \mathrm{km/s}$　特征流速 $U=10^{-2}\ \mathrm{km/s}$

流速 $u=6\ \mathrm{m/s}$　特征流速 $U=10\ \mathrm{m/s}$　　$u=Uu'$，其$u'=0.6$ 不变

流速 $u=600\ \mathrm{cm/s}$　特征流速 $U=1000\ \mathrm{cm/s}$

② 物理量时空变化，而在**同一过程中**，特征值通常是取定的，**时空变化必须由无量纲数决定**

例如：

有特征流速$U = 10\ \mathrm{m/s}$

则$\Delta u = 5\ \mathrm{m/s} = U\Delta u' = 10\ \mathrm{m/s} * (1.0 - 0.5)$

3.3.3 无量纲方程

引入　　在粘性流体中引入**无量纲量**：（被除的是特征值）（特征时间和特征压力非独立，含有欧拉数、St 数）

$u' = u/U \quad v' = v/U \quad w' = w/U \quad \rho' = \rho/\rho_0 \quad p' = p/\rho_0 U^2 \quad t' = t/\frac{L}{U}$

$x' = x/L \quad y' = y/L \quad z' = z/L \quad \Delta u' = \Delta u/U \quad \Delta x' = \Delta x/L \quad \Delta p' = \Delta p/\rho_0 U^2$

（需要注意：大气运动中水平方向运动速度比垂直方向大几个量级，故一定情况下，水平、垂直可用不同特征值）

方程求解　　以**垂直方向的运动方程**为例：$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$

将**各物理量**表示为**特征量与无量纲量的乘积**：

$$\frac{U}{L/U}\frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{UU}{L}u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{UU}{L}v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{UU}{L}w'\frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\rho_0 U^2}{L}\left(-\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial z'}\right) + \frac{\nu V}{L^2}\nabla'^2 w' - g \qquad \nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

整理（每一项除以$\frac{U}{L/U}$）后得：$\frac{\partial w'}{\partial t'} + u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + w'\frac{\partial w'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{\nu}{UL}\nabla'^2 w' - \frac{gL}{U^2}$

定义特征无量纲数 $Re \equiv \frac{UL}{\nu} \quad Fr \equiv \frac{U^2}{gL}$

得到**无量纲方程**：$\frac{\partial w'}{\partial t'} + u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + w'\frac{\partial w'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{1}{Re}\nabla'^2 w' - \frac{1}{Fr}$

方程优点　　① 方程**与单位制无关**

② 可以比较**相对大小或相对重要性**　（无量纲数量级基本一致，如果 Re 很大，则粘性力很重要）

③ **流场相似判据：对应的无量纲数相等即可**

判据比较　　**相似判据：**

1. 通过分析方程得到
2. 由**具体的实际的物理量**组成的无量纲的数，但因为具体物理量在场内各点不同，这些无量纲数也逐点不同，需要逐一检验。
3. 由它们判断的相似是严格的相似。

特征无量纲数：

1. 方程无量纲化得到的
2. 由**特征物理量组成无量纲数**，反应物理量一般大小，同一问题中不变，处处相同
3. 由它判断的相似是特征相似，不是严格相似

3.4 特征无量纲数

概述 无量纲数可以作为两流场特征相似的相似判据。实际应用中，按照不同需要，引入了不同的特征无量纲数。本节重点介绍**雷诺数（Re）、弗雷德数（Fr）、罗斯贝数（Ro）**的物理含义和应用

3.4.1 雷诺数Re

历史发展 雷诺（*O. Reynolds*）在研究<u>流体不稳定和湍流问题</u>时，最早引进了Re数。Re数是判断**两粘性**流体运动是否相似的重要判据之一

雷诺数可判断层流湍流的转变位置

定义 **特征雷诺数**：$\mathbf{Re} \equiv \frac{UL}{\nu} = \frac{\text{特征惯性力}}{\text{特征粘性力}} = \frac{\text{特征速度×特征长度}}{\text{粘性系数}}$

推导 在垂直运动方程中：$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w - g$

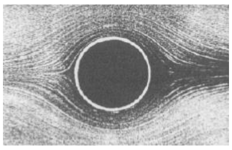
平流/惯性项：$(\vec{V}\cdot\nabla)w = \frac{U^2}{L}(\vec{V}'\cdot\nabla')w'$　　**粘性力项**：$\nu\nabla^2 w = \frac{\nu U}{L^2}\nabla'^2 w'$

可得：$O[(\vec{V}\cdot\nabla)w]/O[\nu\nabla^2 w] = \frac{U^2}{L}/\frac{\nu U}{L^2} = \frac{UL}{\nu} = \mathrm{Re}$　　（$O[\ \ ]$指的是该方程中的量级大小）

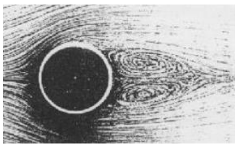
（实质上是平流/惯性项与粘性力的相对大小）

讨论
① $\mathrm{Re} \gg 1$，粘性力相对小（可忽略），**大Re数流体，弱粘性流**　（速度快，尺度大，粘性系数小）
② $\mathrm{Re} \ll 1$，惯性力相对小（可忽略），**小Re数流体，强粘性流**　（速度小，尺度小，粘性系数大）
③ $\mathrm{Re} = 1$，二者同等重要，一般粘性流

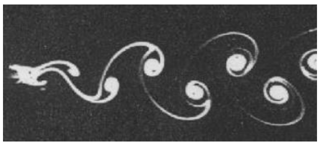
Re可以作为相似性判据，它表示了**流体粘性在流动中的相对重要性**。同时，它也表示可以用来反映流体的宏观和微观特性，它又是讨论**流体不稳定和湍流运动的一个重要参数**



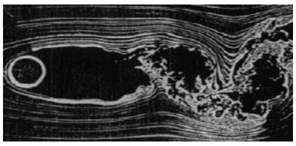
$\mathrm{Re} \ll 1$



$\mathrm{Re} = 26$ 临界



$\mathrm{Re} = 105$ 卡门涡街



$\mathrm{Re} \approx 10^4$ 完全无规则

3.4.2 弗雷德数 Fr

定义 **特征弗雷德数**：$\mathbf{Fr} \equiv \frac{U^2}{gL} = \frac{\text{特征惯性力}}{\text{特征重力}}$

量级 $O[(\vec{V}\cdot\nabla)w]/O[g] = \frac{U^2}{L}/g = \mathrm{Fr}$

意义 反映了**重力项在流体运动中相对于惯性力项的重要性**。
尤其是在**自由表面流的情况下，重力、惯性力同等重要**，Fr数是此类问题的重要相似判据

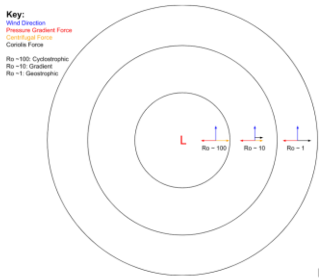
讨论
① **$\mathrm{Fr} \gg 1$，重力作用小**（可以不考虑）。大Fr数流体为轻流体　（速度大，尺度小）
② **$\mathrm{Fr} \ll 1$，重力作用对流体运动的影响大**。小Fr数流体（地球物理流体力学，大气动力学中）

3.4.3 罗斯贝数 Ro

定义 $\mathbf{Ro} \equiv \frac{U^2/L}{fU} = \frac{U}{fL} = \frac{\text{特征惯性力}}{\text{特征偏向力(科里奥利力)}}$　　**其中$f = 2\omega\, sin\varphi$　ω为行星自转速度，φ为纬度**

意义 旋转流体力学和大气动力学的重要特征无量纲数，考虑地球的旋转效应

讨论
① L大（大尺度运动），**Ro小，偏向力、旋转效应重要**　　龙卷风
② L小（小尺度运动），**Ro大，偏向力、旋转效应可不考虑**　　低压



低压中的罗斯贝数

中心约 100，边缘约 1

3.5 量纲分析π定理

π定量 对于复杂的流体运动，有时可以通过试验或观测得到相关物理量，但**不能给出这些物理量之间的函数关系式**。此时，可以使用**量纲分析法**，得到各个物理量之间的正确结构形式或经验方程。

量纲分析法是依据方程的**齐次性原理**的基础上发展起来的，经常使用的有瑞利法和$\boldsymbol{\pi}$定理

3.5.1 瑞利法

例题 已知压力波在流体中的**传播速度v与流体的弹性**（用弹性模系数K表示，$[K]=[M][L]^{-1}[T]^{-2}$）及其**密度ρ**有关，请用量纲分析法导出三者之间**可能的关系式$v=f(K,\rho)$**

不知道具体满足什么关系，但知道各个量之间一定存在某种关系

假设满足有：$v=cK^a\rho^b$，根据分析：$[v]=[L][T]^{-1}$ $[K]=[M][L]^{-1}[T]^{-2}$ $[\rho]=[M][L]^{-3}$

则有$\begin{cases} a+b=0 \\ -a-3b=1 \\ -2a=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 则可能的关系式为$v=c\sqrt{\frac{K}{\rho}}$ c 的大小可以用实验拟合

3.5.2 π定理

内容 假设某一个物理过程包含有**n个物理量**，**m个基本量**，当n个物理量用m个基本量来表达时，该物理过程就有**$n-m$个无量纲量**关系式来表达，由于无量纲量用$\pi_i(i=1,2,\dots,n-m)$来表示，故称π定理

核心思想 利用量纲分析原理，将**关系表达式化为无量纲形式**，减少函数中自变量的数目，从而来简化问题

操作步骤

条件 特定物理过程中出现多个物理量，且必须服从一定的规律，因而各变量之间存在相互制约的关系，假设物理量满足：待定量(因变量)$\boldsymbol{a=f(a_1,a_2,\dots,a_n)}_{\text{主定量(自变量)}}$

推导 设在n各主定量中最多有m个**基本量：$a_1,a_2,\dots,a_m$**，其余均为导出量，其量纲可以用基本量的量纲分别表示为：

$$\begin{array}{l} [a_{m+1}]=[a_1]^{r_{11}}[a_2]^{r_{12}}\dots[a_m]^{r_{1m}} \\ [a_{m+2}]=[a_1]^{r_{21}}[a_2]^{r_{22}}\dots[a_m]^{r_{2m}} \\ \dots \\ [a_n]=[a_1]^{r_{(n-m)1}}[a_2]^{r_{(n-m)2}}\dots[a_m]^{r_{(n-m)m}} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a_{m+1}=\pi_1 a_1^{r_{11}}a_2^{r_{12}}\dots a_m^{r_{1m}} \\ a_{m+2}=\pi_2 a_1^{r_{21}}a_2^{r_{22}}\dots a_m^{r_{2m}} \\ \dots\dots\dots \\ a_n=\pi_{n-m}a_1^{r_{(n-m)1}}a_2^{r_{(n-m)2}}\dots a_m^{r_{(n-m)m}} \end{cases}$$

有$a=\pi a_1^{r_1}a_2^{r_2}\dots a_m^{r_m}$

根据量纲齐次性原理，可以得到$a_{m+1}=\pi_1 a_1^{r_{11}}a_2^{r_{12}}\dots a_m^{r_{1m}} \Rightarrow \boldsymbol{\pi_1=\frac{a_{m+1}}{a_1^{r_{11}}a_2^{r_{12}}\dots a_m^{r_{1m}}}}$

同理，其他联系基本量与导出量的无量纲数为：

$$\pi_2=\frac{a_{m+2}}{a_1^{r_{21}}a_2^{r_{22}}\dots a_m^{r_{2m}}} \quad \dots \quad \pi_{n-m}=\frac{a_n}{a_1^{r_{(n-m)1}}a_2^{r_{(n-m)2}}\dots a_m^{r_{(n-m)m}}}$$

待定量/因变量的量纲，同样可以有无量纲数：$\boldsymbol{\pi=\frac{a}{a_1^{r_1}a_2^{r_2}\dots a_m^{r_m}}}$

转换 原函数关系式$a=f(a_1,a_2,\dots,a_n)$转变为$\pi a_1^{r_1}a_2^{r_2}\dots a_m^{r_m}=f(a_1,a_2,\dots,a_m,\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_{n-m})$

进一步有：$\pi=\frac{f(a_1,a_2,\dots,a_n)}{a_1^{r_1}a_2^{r_2}\dots a_m^{r_m}}=f_1(a_1,a_2,\dots,a_m,\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_{n-m})$

无量纲数 $\pi=\varphi(\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_{n-m})$ 不含有量纲，最终有 $a=a_1^{r_1}a_2^{r_2}\dots a_m^{r_m}\varphi(\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_{n-m})$

函数的自变量由n减少为$n-m$，简化了问题

主要应用 简化方程求分析解、简化实验数据的处理、量纲分析的应用、相似判据的确定

例题 1. 有长度l物体，以速度u在密度为ρ，粘性系数为μ的流体中运动，导出阻力 D 的无量纲数表达式

共涉及到五个物理量：l,u,ρ,μ,D 进行**量纲分析**：$[l]=[L],[u]=[L][T]^{-1},[\rho]=[M][L]^{-3}$

$[D]=[M][L][T]^{-2}[L]^{-2}=[M][L]^{-1}[T]^{-2}$（单位面积上的）

μ的量纲确定根据$\tau_{zx}=\mu\frac{du}{dz}$有：$[\mu]=\left[\tau_{zx}/\frac{du}{dz}\right]=\frac{[M][L]^{-1}[T]^{-2}}{[L]^{-1}}\cdot\frac{[T]}{[L]}=[M][L]^{-1}[T]^{-1}$

待定量为D，**选定ρ,u,l为基本量**。根据定理：$\pi=\frac{D}{\rho^\alpha u^\beta l^\gamma}=\frac{[M][L][T]^{-2}[L]^{-2}}{[M]^\alpha[L]^{-3\alpha}[L]^\beta[T]^{-\beta}[L]^\gamma}$

则有：$\begin{cases}\alpha = 1 \\ -3\alpha + \beta + \gamma = 1 - 2 \\ -\beta = -2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 0\end{cases}$　　故$\pi = \frac{D}{\rho u^2}$

同理：对于μ，有$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho^a u^b l^c} = \frac{[M][L]^{-1}[T]^{-1}}{[M]^a[L]^{-3a}[L]^b[T]^{-b}[L]^c}$　　可得$a = 1, b = 1, c = 1$，　故$\pi_1 = \frac{\nu}{ul}$

根据$\pi = \varphi(\pi_1)$，可以得到D的无量纲数表达式为 $\frac{D}{\rho u^2} = \varphi\left(\frac{\nu}{ul}\right) = \varphi\left(\frac{1}{Re}\right)$

.　**基本量的选取决定了π定理能否成功应用（包含所有必要物理量）**。

3.5.3 π定理在确定相似判据中的应用

相似　同一类物理过程发生在不同的时间和空间场时，对应点上**各同名特性量成常数比**

量纲分析　同一物理过程发生在一定的时间和空间场，以不同测量单位系来测量，则各时、空点上同名特性量取不同数值，**且成常数倍**

联系　相似和量纲分析有一定的联系，实际上可以利用量纲分析方法来讨论相似问题。

内容　假设现有反映同一类物理过程的两个现象：①和②

对于现象①，各特性量满足关系：$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$

对于现象②，各特性量满足关系：$a' = f(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$

角度一　由于两个现象是同一个物理过程，遵从同一自然规律，故函数f是相同的。

角度二　可以将以上二式，看作发生在一定时间、空间场的同一物理现象用两种不同的测量单位测得的各特性量数据之间的关系式。根据π定理，以上二式均可以化为无量纲形式：

$\pi = \varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m})$　　π_i 为无量纲数，与单位无关，不随测量单位的变化而变化

所以现象①和现象②对应的π数应当相同。

说明　根据π定理求相似判据，不需要知道方程的具体表示形式（简单），但前提是必须知道物理过程所包含的全部特性量