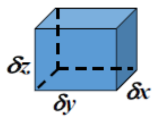
第二章 流体运动的控制方程

章节引言 欧拉方法研究确定的空间体积范围内流体物理量的变化规律，由已知的适用于系统的基本定律表达式导出对控制体积适用的形式。本节根据质量守恒定律、牛顿第二定律和能量守恒定律导出描述流体运动的连续性方程、运动方程和能量方程。

2.1 流体的连续性方程

对应经典力学 质量守恒定律，反应流体运动和流体质量分布间的关系

2.1.1 拉格朗日观点的流体连续性方程



观点 流体块在运动过程中，尽管体积形状可以发生变化，但其质量是守恒不变的。

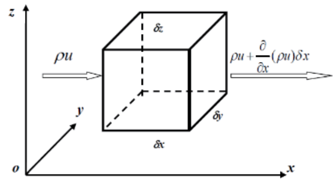
推导 体积 $\delta\tau = \delta x\delta y\delta z$ 质量 $\delta m = \rho\delta\tau$

质量不随时间变化$\frac{d(\delta m)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d(\rho\delta\tau)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \underbrace{\frac{1}{\delta\tau}\frac{d(\delta\tau)}{dt}}_{\text{单位体积体积变化率=散度}} = 0$

方程 $\boldsymbol{\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\nabla\cdot\vec{V} = 0}$ 散度>0，体积增大，则密度减小

观点 流体密度变化由于流体体积的增大减小造成的。
这个约束条件保证了流体的连续介质假设。

2.1.2 欧拉观点的流体连续性方程



观点 控制体内质量的变化，取一个空间上位置体积不变的控制体。

推导 左侧面流入流量：*流入质量* $= \rho u_{面密度}\,\delta y\delta z_{左侧面面积}$

右侧面流出流量：*流出质量* $= \rho u\delta y\delta z + \frac{\partial(\rho u\delta y\delta z)}{\partial x}\delta x$ 经过左侧面的质量沿着 x 方向做一阶泰勒展开

$$\left.\frac{d(\delta m)}{dt}\right|_{空间体} = m_{in} - m_{out}$$

x 方向净流出质量：$\rho u\,\delta y\delta z + \frac{\partial(\rho u\,\delta y\delta z)}{\partial x}\delta x - \rho u\,\delta y\delta z = \frac{\partial(\rho u\,\delta y\delta z)}{\partial x}\delta x$

y 方向净流出质量：$\rho v\,\delta x\delta z + \frac{\partial(\rho v\,\delta x\delta z)}{\partial y}\delta y - \rho v\,\delta x\delta z = \frac{\partial(\rho v\,\delta x\delta z)}{\partial y}\delta y$

z 方向净流出质量：$\rho w\,\delta x\delta y + \frac{\partial(\rho w\,\delta x\delta y)}{\partial z}\delta z - \rho w\,\delta x\delta y = \frac{\partial(\rho w\,\delta x\delta y)}{\partial z}\delta z$

控制体内质量减少量：$-\frac{\partial(\rho\delta x\delta y\delta z)}{dt}$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

方程 $\boldsymbol{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0}$ $\nabla\cdot(\rho\vec{V})$：单位体积的**质量通量**

质量通量大于零，则有流体流出，则流体局地密度减小。
质量通量小于零，则有流体流入，则流体局地密度增大。

体积通量 $\lim_{\tau\to 0}\left[\iiint_\tau \nabla\cdot\vec{V}\,d\tau \Big/ \iiint_\tau d\tau\right] = \nabla\cdot\vec{V}$

质量通量 $\lim_{\tau\to 0}\left[\iiint_\tau \nabla\cdot(\rho\vec{V})\,d\tau \Big/ \iiint_\tau d\tau\right] = \nabla\cdot(\rho\vec{V})$

方程转换 $\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\vec{V}=0\Rightarrow\frac{\partial p}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)=0$ $\frac{d\rho}{dt}$可以加上平流变化变为个体变化

2.1.3 讨论不可压缩流体的数学表示(补充)

定义 质点的密度在运动过程中不变的流体称为**不可压缩流体**

表示 $\nabla\cdot\vec{V}=0$ $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ $\frac{d}{dt}()=\frac{\partial}{\partial t}()+\vec{V}\cdot\nabla()$

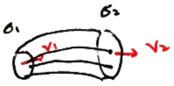
表示每一个质点的密度在运动的全过程中不变。但是这个质点的密度和那个质点的密度可以不同，因此不可压缩流体的密度并不一定处处都是常数。

不可压缩流体 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

均质流体 $\nabla\rho=0$ 流体密度处处是常数（密度梯度为零）

均质不可压缩流体 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\ and\ \rho=const$

流管中的连续方程 流入流管质量=流出流管质量（由于定常，质量不变）



$\rho_1v_1\sigma_1=\rho_2v_2\sigma_2$，若密度相同，则$v_1\sigma_1=v_2\sigma_2$ ，则$v\sigma=Const$为常数

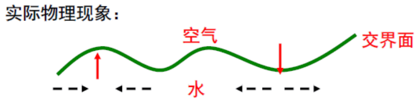
如果截面积减小，则流速增大。

2.1.4 具有自由表面的流体连续性方程

自由表面 通常把自然界中水与空气的交界面称为水面或水表面。

这种因流动而伴随出现的可以升降的水面，在流体力学中称之为自由表面。

典例:



（交界面**无法承受任何扰动**，并且两个介质间密度相差很大）

当水面向某处汇集时，该处水面将被拥挤而升高；反之，当该处有水向四周流散开时，将使得那里的水面降低。

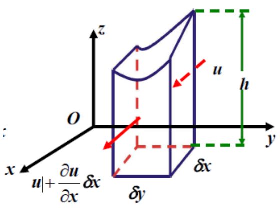
方程推导 假设流团密度为$\rho=\rho(x,y,z,t)$

考虑流体运动为**二维的**，即满足$w\approx0,\partial/\partial z=0$$_{速度u、v不随高度变化}$，取流向方向为 x 轴。

设流体自由表面**高度**为$h=h(x,y,z,t)$，即 h 在各处高低不同且可以随时间变化

在流体中选取一个以$\delta x\delta y$为底的方形柱体，该柱体是<u>一固定不动的空间区域</u>，称为**控制区** (欧拉观点)

流体可以通过控制区的**侧面**，流出流入该柱体:



1 考虑柱体内流体的质量为：$\delta m=\int_0^h(\rho\delta x\delta y_{底面积})\delta z$

2 经流体柱**后侧流入**的流体质量应为：流入质量 $=\int_0^h\left(\rho u\delta y_{后侧面面积}\right)_{面质量}\delta z_{\ 高度}$

3 同时，经流体柱**前侧流出**的质量为：流出质量 $=\int_0^h(\rho u\delta y)\delta z+\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^h(\rho u\delta y)\delta z\right]\delta x_{前后侧面的距离}$

4 **左侧流入**的流体质量应为：流入质量 $=\int_0^h(\rho v\delta x)\delta z$

5 **右侧流出**的质量为：流出质量 $=\int_0^h(\rho v\delta x)\delta z+\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^h(\rho v\delta x)\delta z\right]\delta y$

流出质量减去流入质量 → 柱体内的**净流出量**=柱体内质量的减少

流入质量减去流出质量 → 柱体内的净流入量=柱体内质量的增加

有$-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^h(\rho\delta x\delta y)\delta z=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^h(\rho u\delta y)\delta z\right]\delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^h(\rho v\delta x)\delta z\right]\delta y$

积分上限 h 为 x, y, t 的函数，可应用可变上限积分的求导规则:

$$\frac{d}{dt}\int_{b(t)}^{a(t)}f(x,t)dx=\int_{b(t)}^{a(t)}f_t'(x,t)dx+f[a(t),t]\frac{da(t)}{dt}-f[b(t),t]\frac{db(t)}{dt}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^h(\rho\delta x\delta y)\delta z=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^h(\rho u\delta y)\delta z\right]\delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^h(\rho v\delta x)\delta z\right]\delta y$$ 上式

对上式两端各项展开，**左端项**和**右端项**分别为:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^h(\rho\delta x\delta y)\delta z=-\int_0^h\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\delta z\delta x\delta y-\rho_h\delta x\delta y\frac{\partial h}{\partial t}+\rho_0\delta x\delta y\frac{\partial 0}{\partial t}=-\int_0^h\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\delta z\delta x\delta y-\rho_h\delta x\delta y\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^h(\rho u\delta y)\delta z\right]\delta x=\left[\int_0^h\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\delta y\right)\delta z\right]\delta x+\rho_h u_h\delta y\frac{\partial h}{\partial x}\delta x+\rho_0 u_0\delta y\frac{\partial 0}{\partial x}\delta x=\delta x\delta y\left[\int_0^h\rho\frac{\partial u}{\partial x}\delta z+\int_0^h u\frac{\partial\rho}{\partial x}\delta z+\frac{\partial h}{\partial x}\rho_h u_h\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^h(\rho v\delta x)\delta z\right]\delta y=\left[\int_0^h\left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\delta x\right)\delta z\right]\delta y+\rho_h v_h\delta x\frac{\partial h}{\partial y}\delta y+\rho_0 v_0\delta x\frac{\partial 0}{\partial y}\delta y=\delta x\delta y\left[\int_0^h\rho\frac{\partial v}{\partial y}\delta z+\int_0^h v\frac{\partial\rho}{\partial y}\delta z+\frac{\partial h}{\partial y}\rho_h v_h\right]$$

故有 $-\int_0^h\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\delta z\delta x\delta y-\rho_h\delta x\delta y\frac{\partial h}{\partial t}=\delta x\delta y\left[\int_0^h\rho\frac{\partial u}{\partial x}\delta z+\int_0^h u\frac{\partial\rho}{\partial x}\delta z+\frac{\partial h}{\partial x}\rho_h u_h\right]+\delta x\delta y\left[\int_0^h\rho\frac{\partial v}{\partial y}\delta z+\int_0^h v\frac{\partial\rho}{\partial y}\delta z+\frac{\partial h}{\partial y}\rho_h v_h\right]$

考虑到$u,v,\partial u/\partial x,\partial v/\partial y$与 z 无关，并<u>消掉等式两端公共项$\delta x\delta y$</u>得

$$\frac{\partial h}{\partial t}\rho_h+\int_0^h\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\delta z+\frac{\partial h}{\partial x}\rho_h u+\frac{\partial h}{\partial y}\rho_h v+\int_0^h u\frac{\partial\rho}{\partial x}\delta z+\int_0^h v\frac{\partial\rho}{\partial y}\delta z+\left(\int_0^h\rho\delta z\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\int_0^h\rho\delta z\right)\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

考虑**水为不可压缩**的，根据连续方程有：$\int_0^h\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\delta z$ $\quad\frac{d\rho}{dt}=0$

所以有$\frac{\partial h}{\partial t}\rho_h+\frac{\partial h}{\partial x}\rho_h u+\frac{\partial h}{\partial y}\rho_h v+\left(\int_0^h\rho\delta z\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\int_0^h\rho\delta z\right)\frac{\partial v}{\partial y}=0$

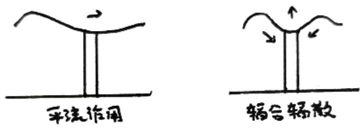
可以得到：$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}u+\frac{\partial h}{\partial y}v+\left(\frac{1}{\rho_h}\int_0^h\rho dz\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$ $\qquad\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}u+\frac{\partial h}{\partial y}v$ 相当于$\frac{dh}{dt}$

又有$\frac{1}{\rho_h}\int_0^h\rho dz=\begin{cases}h & \text{均匀流体}\\ \Rightarrow h & \text{自由表面附近流体（浅流体）}\end{cases}$ 假设流体为均匀流体，ρ 为常数

进一步有 $\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+h\frac{\partial u}{\partial x}+h\frac{\partial v}{\partial y}=0$ 局地+平流+h·散度

方程 $\boldsymbol{\frac{\partial h}{\partial t}+\nabla\cdot(h\vec{V})=0}$ $\quad\boldsymbol{\frac{\partial h}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla h+h\nabla\cdot\vec{V}=0}$ **表示流体高度在局地随着时间变化的原因**

$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0$（只考虑运动在 x 轴方向）



将密度变量转化为高度变量

$$\frac{dh}{dt}+h\nabla\cdot\vec{V}=0$$

2.2 作用于流体的力、应力张量

牛顿第二定律　物体宏观运动（运动的加速度）$\Leftrightarrow$ 作用力的关系 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$

2.2.1 作用于流体的力

分析对象　流体中以界面σ包围的体积为τ的流体块

流体作用力　质量力+表面力

质量力　定义　又称体力，是指作用于**所有流体质点的力**。如重力、万有引力等**场的分布**。

特性　① **质量力是长程力**：它随相互作用的元素之间的距离的增加而减小，对于一般流体的特征运动距离而言，均能显示出来。

② **它是一种分布力**，分布于流体块的**整个体积内**，流体块所受的质量力与其周围有无其他流体存在并无关系。 每个流体分子都会受到这个效果

③ 通常情况下，作用于流体的质量力通常就是指重力。

定义式　如果$\vec{F}$表示**单位质量**的流体的质量力，规定其为：$\vec{F} = \lim\limits_{\delta m \to 0} \frac{\delta \vec{F}'}{\delta m}$

其中$\delta\vec{F}'$是作用在质量为δm的流体块上的质量力。不难看出，$\vec{F}$可以看做**力的分布密度**。

例如：对处于重力作用的物体而言，质量力的分布密度或者说单位质量的流体的质量力就是重力加速度$\vec{g} = \vec{G}/m$

质量力　通过体积分，作用于体积为τ的流体块上的质量力：$\int_\tau \rho\vec{F}d\tau$　　$\rho\vec{F}$是单位体积的质量力

表面力　定义　是指**流体内部之间**或者**流体与其他物体之间**的**接触面**上所受到的相互作用力。

如流体内部的粘性应力和压力、流体与固体接触面上的摩擦力等

特性　① **表面力是一种短程力**：源于分子间的相互作用。表面力随相互作用元素之间的距离增加而迅速减弱，只有在相互作用元素间的距离与分子距离**同量级**时，表面力才显现出来。

相互作用的元素必须**相互接触**，表面力才存在。

② 流体块内各部分之间的表面力是相互作用而相互抵消的，只有处于界面上的流体质点所受的，由界面外侧流体所施加的表面力存在——作用于流体块表面上的表面力。如果是流体微团，流体内部的表面力会相互抵消（两两相反，成对出现），但外界面没有这一效果。该流体块所受表面力，只存在于外表面。

③ **表面力也是一种分布力**，分布在相互接触的界面上。

定义式　定义**单位面积**上的表面力为：$\vec{p} = \lim\limits_{\delta\sigma \to 0} \frac{\delta \vec{p}'}{\delta\sigma}$　其中$\delta\vec{p}'$是作用于某个流体面积上$\delta\sigma$的表面力。

质量力　通过面积分，不难得到某流体块与周围流体接触面σ上所受到的表面力：$\int_\sigma \vec{p}\delta\sigma$

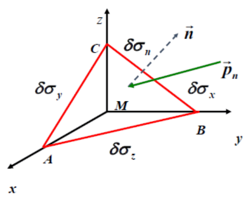
两力比较　质量力和表面力有着本质的差别：一个是长程力，一个必须接触。

矢量$\vec{F}$是质量力的分布密度，它是时间点和空间点的函数，因而构成了一个**矢量场**。

而矢量$\vec{p}$为流体的应力矢，它不但是时间点和空间点的函数，并且在空间每一点还**随着受力面元的取向不同而变化**。所以要确定应力矢$\vec{p}$，必须考虑点的矢径$\vec{r}$、该点受力面元的方向（面元的法向单位矢$\vec{n}$）以及时间t。确切地说应力矢是两个矢量$(\vec{r},\vec{n})$和一个标量的函数t，即$\vec{p}(\vec{n},\vec{r},t)$。

2.2.2 应力张量

推导　取如图所示流体四面体元（界面σ包围的体积为τ），分析其受力。其质量为δm

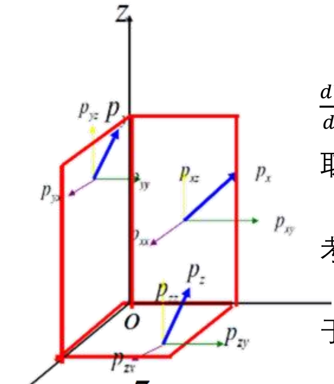


说明：应力矢的下标取其作用面元的**外法向**，并且规定为外法向流体对另一部分流体的作用应力。

例如，MAB外法线方向受到外界流体施加的表面力：$\overrightarrow{p_{-z}}$，同理$MAC \to \overrightarrow{p_{-y}}$，$MBC \to \overrightarrow{p_{-x}}$

按照牛顿第二定律$ma = F_{和}$，可得 $\frac{d\vec{V}}{dt}\delta m = \vec{F}\delta m + \overrightarrow{p_n}\delta\sigma_n + \overrightarrow{p_{-x}}\delta\sigma_x + \overrightarrow{p_{-y}}\delta\sigma_y + \overrightarrow{p_{-z}}\delta\sigma_z$

根据作用力与反作用力原理，方程可以写成如下形式：



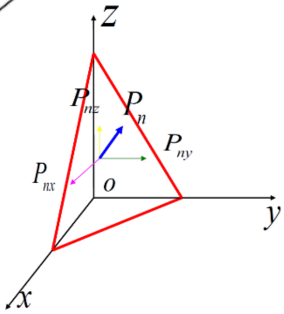
$\frac{d\vec{V}}{dt}\delta m = \vec{F}\delta m + \overrightarrow{p_n}\delta\sigma_n - \overrightarrow{p_x}\delta\sigma_x - \overrightarrow{p_y}\delta\sigma_y - \overrightarrow{p_z}\delta\sigma_z \qquad \delta\tau = \frac{1}{6}\delta d_x \delta d_y \delta d_z$

取极限时：$\overrightarrow{p_n}\delta\sigma_n = \overrightarrow{p_x}\delta\sigma_x + \overrightarrow{p_y}\delta\sigma_y + \overrightarrow{p_z}\delta\sigma_z$ 作用于小流体元的应力矢之间的相互关系。

考虑面元间的关系$\begin{cases} \delta\sigma_x = \delta\sigma_n\cos(n,x) = n_x\delta\sigma_n & \text{MBC 面积} \\ \delta\sigma_y = \delta\sigma_n\cos(n,y) = n_y\delta\sigma_n & \text{MAC 面积} \\ \delta\sigma_z = \delta\sigma_n\cos(n,z) = n_z\delta\sigma_n & \text{MAB 面积} \end{cases}$

于是，上式可以改写为：$\boldsymbol{\overrightarrow{p_n} = n_x\overrightarrow{p_x} + n_y\overrightarrow{p_y} + n_z\overrightarrow{p_z}}$ 【第一种表示形式】

n 面的表面力为三个坐标面的加权求和



另外，应力矢量也可以表示为：$\boldsymbol{\overrightarrow{p_n} = \vec{i}p_{nx} + \vec{j}p_{ny} + \vec{k}p_{nz}}$ 【第二种表示形式简单的矢量分解】

直接在三个方向上的分解

说明：对于以$\vec{n}$为外法向面元上的应力矢 $\overrightarrow{p_n}$：

① 可以用通过同一点与**三个坐标面平行的面元**上的应力矢线性地表示出来（**第一种表示形式**）

② 也可以将其表示为**沿三个坐标轴**的分量形式（对应**第二种表示形式**）

将$\overrightarrow{p_n} = n_x\overrightarrow{p_x} + n_y\overrightarrow{p_y} + n_z\overrightarrow{p_z}$ 中的$\overrightarrow{p_x}, \overrightarrow{p_y}, \overrightarrow{p_z}$ 分别按照**第二种形式**展开，则（它们也是矢量，也可以分解）

$\begin{cases} \overrightarrow{p_x} = \vec{i}p_{xx} + \vec{j}p_{xy} + \vec{k}p_{xz} \\ \overrightarrow{p_y} = \vec{i}p_{yx} + \vec{j}p_{yy} + \vec{k}p_{yz} \\ \overrightarrow{p_z} = \vec{i}p_{zx} + \vec{j}p_{zy} + \vec{k}p_{zz} \end{cases}$ 三个方向上分别合并，得：$\begin{cases} p_{nx} = n_xp_{xx} + n_yp_{yx} + n_zp_{zx} \\ p_{ny} = n_xp_{xy} + n_yp_{yy} + n_zp_{zy} \\ p_{nz} = n_xp_{xz} + n_yp_{yz} + n_zp_{zz} \end{cases}$

该式可以理解为$\boldsymbol{\overrightarrow{p_n}}$ **在直角坐标系中展开**。

应力张量 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{p_x} \\ \overrightarrow{p_y} \\ \overrightarrow{p_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{p_n} = \vec{n}\cdot\boldsymbol{P} = (n_x, n_y, n_z)\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$

物理含义 对应力分量的下标作如下规定：

① 第一个下标表示**受力面积元的外法向**（且规定应力为外法向流体对另一部分流体的作用）；

② 第二个下标表示**应力所投影的方向**

例如，$\boldsymbol{p_{xy} > 0}$**表示面元外法线方向为 x 轴正方向的流体收到的应力矢量沿 y 轴方向的分量投影为正值**。

法应力和切应力 应力矢量也可以表示为$\boldsymbol{\overrightarrow{p_n} = p_{nn}\vec{n}}_{\text{法应力}} + \boldsymbol{p_{n\tau}\vec{\tau}}_{\text{切应力}}$

则法应力为$\boldsymbol{p_{nn} = \overrightarrow{p_n}\cdot\vec{n}}$，且有切应力$|\overrightarrow{p_n}|^2 = p_{nn}^2 + \boldsymbol{p_{n\tau}^2}$ 垂直于面的表面力

$p_{nx} = \vec{\imath}\cdot(n\cdot P) \quad p_{xx} = \vec{\imath}\cdot(\vec{\imath}\cdot P)$

例题 1. 已知某点应力状态为$\begin{bmatrix} 0 & a & 2a \\ a & 2a & 0 \\ 2a & 0 & a \end{bmatrix}$，求通过此点，方程为$x + 3y + z = 1$的平面上的法应力和切应力大小。

由$\overrightarrow{p_n} = \vec{n}\cdot\boldsymbol{P}$得 其中 n：$n_x = \frac{1}{\sqrt{1+3^2+1}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$，$n_y = \frac{3\sqrt{11}}{11}, n_z = \frac{\sqrt{11}}{11}$

则$p_{nx} = n_xp_{xx} + n_yp_{yx} + n_zp_{zx} = \frac{\sqrt{11}}{11} * 0 + \frac{3\sqrt{11}}{11} * a + \frac{\sqrt{11}}{11} * 2a = \frac{5\sqrt{11}}{11}a$

同理：$p_{ny} = \frac{7\sqrt{11}}{11}a, p_{nz} = \frac{3\sqrt{11}}{11}a$

故所求法应力$p_{nn} = p_n\cdot n = \frac{5\sqrt{11}}{11}a * \frac{\sqrt{11}}{11} + \frac{7\sqrt{11}}{11}a * \frac{3\sqrt{11}}{11} + \frac{3\sqrt{11}}{11}a * \frac{\sqrt{11}}{11} = \frac{29}{11}a$

切应力为$p_{n\tau} = \sqrt{|p_n^2| - p_{nn}^2} = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2 - p_{nn}^2} = \frac{\sqrt{72}}{11}a = \frac{6\sqrt{2}}{11}a$

2. 试从理想流体定义出发，证明理想流体中任意一点上各个不同方向的法应力相等。

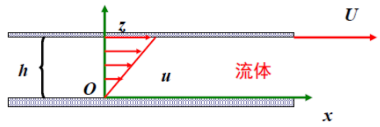
根据定义，理想流体点对于切向形变没有任何反抗能力。所以，在任一点的点领域内，法方向为 n 的面元 ds 上的应力p_n上只能由法向分量，而切向的分量等于零。换句话说，p_n方向与 n 重合，于是，不难得出在直角坐标系的三个做表面上的应力应有p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}不为零，而$p_{xy} = p_{xz} = p_{yz} = 0$

又因为$\begin{cases} p_{nx} = n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx} \\ p_{ny} = n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy} \\ p_{nz} = n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz} \end{cases}$ 所以$\begin{cases} p_{nx} = n_x p_{xx} \\ p_{ny} = n_y p_{yy} \\ p_{nz} = n_z p_{zz} \end{cases}$ 考虑到$\begin{cases} p_{nx} = p_{nn} n_x \\ p_{ny} = p_{nn} n_y \\ p_{nz} = p_{nn} n_z \end{cases}$ 因此$p_{nn} = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}$

2.2.3 应力张量与流体运动状态间的关系

应力张量的确定 流体的应力与流体的运动状态（主要是**形变率**）之间有着非常密切的关系

① 平板实验 反映了**粘性应力与流速分布**之间的**线性关系**



上边界速度 U 匀速运动，拽动下方流体，逐层运动

实验结果：$\boldsymbol{\tau_{zx} \propto \frac{U}{h}}$ 粘性应力(下标含义和应力的相同)

外法线方向为 z 的应力在 x 方向的投影值正比于上界速度 U，反比于距离上界距离 h

粘性力正比于速度的空间分布

② 牛顿粘性假设 牛顿粘性定律建立了**粘性应力与流速分布之间的关系**

$$\tau_{zx} = \mu \frac{du}{dz}$$

其中μ为反映流体粘性的**粘性系数或内摩擦系数**；而流体与其他物体的粘性系数则称为外摩擦系数。单位：$N \cdot s/m^2$

③ 广义牛顿粘性假设

牛顿粘性定律建立了粘性应力与流速分布之间的关系，但它的不足在于**仅仅适用于流体直线运动**。

牛顿将以上的粘性应力与形变率的关系推广到任意粘性流体运动，即**广义牛顿粘性假设**：

$$\boldsymbol{P = 2\mu A - \left(p + \frac{2}{3}\mu\, div\vec{V}\right) I} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中，P 为应力张量，A 为形变张量，$p = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$ （注意：$\nabla \cdot \vec{V} = div\,\vec{V}$）

由于$\left(p + \frac{2}{3}\mu\, div\vec{V}\right)$是标量，所以乘上一个 I 矩阵。

④ 特殊情形

不可压流体 $P = 2\mu A - pI$ 散度为零

不可压无粘性(理想)流体 $P = -pI \;\rightarrow\; \overrightarrow{p_n} = -p\vec{n}$ 其中p为流体压力，它表明在不考虑流体粘性时，**流体间相互作用的表面力只有流体的压力**，它是正法向方向的流体对另一侧流体的作用力。应力张量只剩下静压力部分。

如果是球形流体微团，只受到外界流体微团对它向内的力

说明 根据广义牛顿粘性假设的应力张量计算得到的应力包含了 **流体压力** 和 **流体粘性力** 两部分：

分解情况（分为 p 和τ两项） $\overrightarrow{p_n} = -p\vec{n} + \overrightarrow{\tau_n}$

外法线方向为 n 的面所受黏性应力 $\vec{\tau}_n = 2\mu A \cdot \vec{n} - \frac{2}{3}\mu\, div\vec{V} I \cdot \vec{n}$

如果是**不可压流体** $\vec{\tau}_n = 2\mu A \cdot \vec{n}$

总结 给定流体的粘性系数和流体运动流速场，根据牛顿粘性假设，就可以计算得到流体的粘性应力

牛顿粘性流体 满足牛顿广义粘性假设的流体（线性分布关系） 例如水、空气都是典型牛顿流体

非牛顿流体 黏性应力和速度空间分布不存在线性关系。例如洗发膏、石油、血液等粘性较大的、分子较大的流体。

2.3 运动方程

章节概述 已经了解流体的受力，表达加速度，现在建立 F=ma 的方程。流体的运动方程（普遍形式）、**纳维-斯托可斯（Navier-Stokes）方程**（具体形式）、欧拉方程（理想流体运动方程）、静力方程 （最简单情形的运动方程）

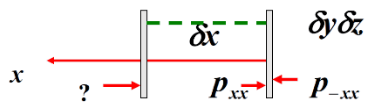
2.3.1 流体的运动方程（普遍形式）

研究对象 在运动流体中选取一**小六面体体元**，边长为$\delta x,\delta y,\delta z$

总体思想 牛顿第二定律 $\rho\delta x\delta y\delta z\frac{d\vec{V}}{dt}=$ 质量力 $+$ 表面力 $\Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}=\vec{F}_{质}+\vec{F}_{表}$ （单位质量）

表面力分析 周围流体对小体元的**六个表面**有表面力，而通过六个侧面作用于小体元沿 x 方向的表面力分别为：

前后侧面：$\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\delta x_{\text{—阶泰勒展开}}\right)\delta y\delta z \quad p_{-xx}\delta y\delta z_{\text{后侧面}}$



小体元**前后侧面**所受**表面力在 x 方向**的分量：$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$

右左侧面：$\left(p_{yx}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}\delta y\right)\delta x\delta z \quad p_{-yx}\delta x\delta z$ **右左侧面 x 方向**：$\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$

上下侧面：$\left(p_{zx}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\delta z\right)\delta x\delta y \quad p_{-zx}\delta x\delta y$ **上下侧面 x 方向**：$\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$

因此，周围流体通过**六个侧面**作用于小体元沿 x 方向的**表面力**合力为$\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z$

质量力分析 小体元还受**质量力**的作用，x 方向质量力$=F_x\rho\delta x\delta y\delta z$

综合分析 据牛顿运动定律：$F=ma \Rightarrow \frac{du}{dt}\rho\delta x\delta y\delta z=F_x\rho\delta x\delta y\delta z+\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z$ 化简可得

单位质量流体在 x方向的运动方程 $\frac{du}{dt}=F_x+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)$

单位质量流体在 y方向的运动方程 $\frac{dv}{dt}=F_y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right)$

单位质量流体在 z方向的运动方程 $\frac{dw}{dt}=F_z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)$

矢量形式 $\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\vec{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{p}_z}{\partial z}\right)$ or $\boldsymbol{\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot P}$ $which\ \nabla\cdot P=\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}p_{xx}&p_{xy}&p_{xz}\\p_{yx}&p_{yy}&p_{yz}\\p_{zx}&p_{zy}&p_{zz}\end{pmatrix}$

2.3.2 纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程

总体思想 流体运动方程的普遍形式→**广义牛顿粘性假设+应力张量代入**→N-S 方程

N-S 方程 $\boldsymbol{\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p_{静压强}+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\,grad\,div\vec{V}+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{V}}$

推导 有 $\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot P \quad and\ P=2\mu A-\left(p+\frac{2}{3}\mu\,div\vec{V}\right)I \qquad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$\nabla\cdot P=\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}p_{xx}&p_{xy}&p_{xz}\\p_{yx}&p_{yy}&p_{yz}\\p_{zx}&p_{zy}&p_{zz}\end{pmatrix}=\frac{\mu}{3}grad\,div\vec{V}+\mu\nabla^2\vec{V}-\nabla p$$ 具体过程：

$$\nabla\cdot P=\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\begin{bmatrix}\frac{2\mu\partial u}{\partial x}-p-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) & 2\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ 2\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{2\mu\partial v}{\partial y}-p-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) & 2\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\ 2\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) & 2\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{2\mu\partial w}{\partial z}-p-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\end{bmatrix}$$

拉普拉斯算符　　$\nabla^2=\Delta=\nabla\cdot\nabla$ 称为拉普拉斯项，整体效果是二阶运算 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

对标量　　$\nabla^2\varphi=\nabla\cdot\nabla\varphi$

对矢量　　$\nabla^2\vec{V}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\vec{\imath}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\vec{\jmath}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$

流体运动学粘性系数　记作ν \nu，$\nu=\frac{\mu}{\rho}$　　单位：$\frac{m^2}{s}$

不可压流体　（$div\vec{V}=0$）$\Rightarrow$ $\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V}$　**(大气运动常见方程)**（不考虑可压）

直角坐标系形式

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 v\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 w\end{cases}$$

（左侧展开为局地变化+平流变化）

牛顿第二定律在流体力学中的表示式，表明了作用力与流体运动参量之间的关系

物理意义讨论　$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V}$　$\frac{d\vec{V}}{dt}$ 是单位质量流体的**加速度**　$\vec{F}$ 为单位质量流体所受的**质量力**

① $-\frac{1}{\rho}\nabla p$ **压力梯度力**　$\iint_\sigma p\vec{n}_{流体微团向外的静压强}\cdot d\sigma_{乘以面积}=\iiint_\tau\nabla p\delta\tau$

$$\frac{\iint_\sigma p\vec{n}\cdot d\sigma}{\rho\iiint_\tau\delta\tau}=\frac{\iiint_\tau\nabla p\delta\tau}{\rho\iiint_\tau\delta\tau}\Rightarrow\lim_{\tau\to0}\frac{\iiint_\tau\nabla p\delta\tau}{\rho\iiint_\tau\delta\tau}=\frac{1}{\rho}\nabla p$$

即为**周围流体通过单位质量流点的表面**，对其所产生的**压力的合力矢量**，是**由于正压力引起**的

② $\nu\nabla^2\vec{V}$ **粘性(粘滞\扩散)力**　周围流体对单位质量流点的**粘性力的合力矢**

1. 粘性力的存在，不但与流体的粘性有关，而且取决于流速的分布。

2. 当流体做整体运动时，$\nabla^2\vec{V}=0$，流点就不受粘性力的作用。

3. 通常，**粘性力可以是曳力，也可以是阻力**，这由流速的拉普拉斯所决定。从物理意义上来看，如果周围流体的运动比所考虑的流点的运动快，该流点所受的粘性力为曳力，反之，则为阻力。**趋于均匀**

假设只考虑$\frac{du}{dt}=\nu\nabla^2 u$　$\iiint_\tau\nabla^2 u d\tau=\iint_\sigma\nabla u\cdot\vec{n}d\sigma$　上表面$\nabla u\cdot\vec{n}<0$　其余各个面均小于零，则$\frac{du}{dt}<0$

2.3.3 欧拉方程

方程形式　$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p$　理想流体运动方程

推导过程　理想流体（**不考虑流体粘性$\mu=0$**），相当于**去掉方程中含有粘性的项**

表明意义　压力梯度力可以引起运动状态的变化，反之流动结果又会使原来的压力分布状况发生变化

压力梯度力与速度间的相互转化

注意　欧拉方程**适用于不可压缩和可压缩理想流体**

2.3.4 静力方程

方程表达　$0=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p$

推导过程　**流体静止时**，即流体的速度和加速度的**个体变化均为零**，作用于流体的力应该达到平衡

表明意义　表明了**流体的粘性只与流体的运动状态**有关，或者说流体的**粘性只有在相对运动时才体现**出来。也就是说，当流体静止时，理想流体和粘性流体均满足以上平衡方程

应用举例　①假设**流体所受的质量力就是重力**，静力方程可以变化为：$-g\vec{k}_{垂直地面向上}=\frac{1}{\rho}\nabla p$ 或 $\delta p=-\rho g\delta z$

表明：当流体静止时，作用于单位截面积流体柱的顶面、底面上的**压力差**，正好**等于流体柱的重力**；流体静止时的压力，可以用流体柱的质量来表示

② 流体密度只与 z 有关的流体 积分不难得到：$p = -g\int \rho(z)\sigma z + C$

③ 均匀流体 $p = -\rho gz + C$ 流体静止时单位面积上压力（压强）只与流体深度有关

阿基米德定律 静力方程的变形：当体积为τ的物体浸于流体中时，四周液体对物体表面存在静压力的作用，且压力合矢量为：$\vec{p} = \iint -p\vec{n} \cdot d\sigma$ 应用体积分变换，可以得到：$\vec{p} = \iiint -\nabla p d\tau = \iiint \rho g\vec{k} d\tau = \rho g\vec{k}$

上式表明，物体浸于液体时，将受到来自液体的向上的浮力，其大小等于物体所排开的同体积的液重。 以上结论**只有在流体处于静止时才适用**

2.4 能量方程

小节概述 能量守恒定律是自然界的普遍规律，流体在运动过程中也遵循该定律。

概念 **孤立系统**：（与外界没有质量、能量的交换）流体可伴随各种形式能量之间相互转换，但**总能量是不变**的

非孤立系统：总能量的**变化**等于外力（包括质量力和系统外部的表面力）对系统所做的功和所吸收的热量

单位物质参量 **内能**：$c_v T$ **动能**：$\frac{1}{2}V^2$ **外力做功**：$\vec{F}_{总}\cdot S$ **单位时间做功**：$\vec{F}_{总}\cdot S/t$

2.4.1 能量方程的普遍形式

研究对象 流体中以界面σ包围的体积为τ的体积块

总公式 **(内能+动能)的变化率=外界对系统的做功率+热流量的变化率** (理解：$P=FV$)

$$\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho\left(c_vT+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau=\iiint_\tau \rho(F\cdot\vec{V})\delta\tau_{质量力功率}+\iint_\sigma(\vec{p}_n\cdot\vec{V})\delta\sigma_{表面力功率}+\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho q\delta\tau_{热流量变化率}$$

方程变换 **思想**：把变化率写到积分号内，这样可以总和全部积分项，取积分内部式子即可

总能量变化项：$\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho\left(c_vT+\frac{V^2}{2}\right)\delta\tau=\iiint_\tau \frac{d}{dt}\left(c_vT+\frac{V^2}{2}\right)\rho\delta\tau$

热流量变化项：$\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho q\delta\tau=\iiint_\tau \rho\frac{dq}{dt}\delta\tau\ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho A\delta\tau=\iiint_\tau \rho\frac{dA}{dt}\delta\tau$

$$\iiint_\tau \frac{d\rho A}{dt}\delta\tau=\cancel{\iiint_\tau \frac{d\rho}{dt}A\delta\tau}+\iiint_\tau \frac{dA}{dt}\rho\delta\tau$$ 由于质量守恒 $\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho\delta\tau=0\Rightarrow\iiint_\tau \frac{d\rho}{dt}\delta\tau=0$

表面力功率项：$\iint_\sigma(\vec{p}_n\cdot\vec{V})\delta\sigma=\iint_\sigma(\vec{n}\cdot P\cdot\vec{V})\delta\sigma=\iiint_\tau div(P\cdot\vec{V})\delta\tau$ (由于$\iint_\sigma\vec{V}d\vec{\sigma}=\iiint_\tau\nabla\cdot\vec{V}d\tau$)

根据前述所学：$\vec{p}_n\cdot\vec{V}=\vec{n}(P\cdot\vec{V})=\vec{n}\cdot(P\vec{V})=p_{nx}u+p_{ny}v+p_{nz}w=(n_x,n_y,n_z)\begin{pmatrix}p_{xx}&p_{xy}&p_{xz}\\p_{yx}&p_{yy}&p_{yz}\\p_{zx}&p_{zy}&p_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$

$$\vec{n}\cdot(P\cdot\vec{V})=(n_x,n_y,n_z)\begin{pmatrix}up_{xx}+vp_{xy}+wp_{xz}\\up_{yx}+vp_{yy}+wp_{yz}\\up_{zx}+vp_{zy}+wp_{zz}\end{pmatrix}=p_{nx}u+p_{ny}v+p_{nz}w$$

能够验证可以调换求点乘的顺序，同时有方向 $d\vec{\sigma}=\vec{n}d\sigma$

$$div(P\cdot\vec{V})=\frac{\partial(up_{xx}+vp_{xy}+wp_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(up_{yx}+vp_{yy}+wp_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(up_{zx}+vp_{zy}+wp_{zz})}{\partial z}$$

变换形式 $\iiint_\tau\left[\frac{d}{dt}\left(c_vT+\frac{V^2}{2}\right)-F\cdot\vec{V}-\frac{1}{\rho}div(P\cdot\vec{V})-\frac{dq}{dt}\right]\rho\delta\tau=0$ 由于$\delta\tau$任取，所以该式始终满足，则内式一定为零

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(c_vT+\frac{V^2}{2}\right)_{内能+动能}=F\cdot\vec{V}_{质量力功率}+\frac{1}{\rho}div(P\cdot\vec{V})_{表面力功率}+\frac{dq}{dt}_{热输送项}}$$

展开式 $\frac{d}{dt}\left(c_vT+\frac{V^2}{2}\right)=F\cdot\vec{V}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(up_{xx}+vp_{xy}+wp_{xz})}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(up_{yx}+vp_{yy}+wp_{yz})}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(up_{zx}+vp_{zy}+wp_{zz})}{\partial z}+\frac{dq}{dt}$

2.4.2 动能方程

推导 **基础**：**流体运动方程** $\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot P$

两端**同乘以速度矢量**：$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot\vec{V}+\frac{1}{\rho}(\nabla\cdot P)\cdot\vec{V}$

右端第二项展开：$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot\vec{V}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(P\cdot\vec{V})_{表面力功率项}-\frac{1}{\rho}(P\cdot\nabla)\cdot\vec{V}_{多的一项：与其他能量转化、粘性力做功有关}$

利用**广义牛顿粘性假设**：$P=2\mu A-\left(p+\frac{2}{3}\mu\, div\vec{V}\right)I$

其中**最后一项**: $-\frac{1}{\rho}(P\cdot\nabla)\cdot\vec{V}=\frac{1}{\rho}(pI\cdot\nabla)\cdot\vec{V}-\frac{\mu}{\rho}\left[\left(2A-\frac{2}{3}div\vec{V}I\right)\cdot\nabla\right]\cdot\vec{V}_{\text{粘性力做功率项}}$

其中: $\frac{1}{\rho}(pI\cdot\nabla)\cdot\vec{V}=\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix}p&0&0\\0&p&0\\0&0&p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial/\partial x\\\partial/\partial y\\\partial/\partial z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u&v&w\end{bmatrix}=\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{p}{\rho}\,div\vec{V}$

$$-\frac{\mu}{\rho}(2A\cdot\nabla)\cdot\vec{V}=-\frac{\mu}{\rho}\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$-\frac{\mu}{\rho}\left[\left(-\frac{2}{3}div\vec{V}I\right)\cdot\nabla\right]\cdot\vec{V}=\frac{2\mu}{3\rho}\left(div\vec{V}\right)^2$$

令$\boldsymbol{E}=\frac{\mu}{\rho}\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2\mu}{3\rho}\left(div\vec{V}\right)^2$ 其**恒为正值**

与粘性有关的功率项恒为正值，由于公式中为减去，所以总是消耗动能

动能方程 $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot\vec{V}_{\text{①}}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(P\cdot\vec{V}\right)_{\text{②}}+\frac{p}{\rho}div\vec{V}_{\text{③}}-E_{\text{④}}}$

物理意义 ① 质量力功率 ② 表面力功率

③ 膨胀收缩在压力作用下引起的**能量转换项** **流体压缩性**（膨胀动能↗内能↘,压缩动能↘内能↗）

④ **粘性耗散项** 流体粘性（动能↘ 内能↗）

理想化简 $\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=F\cdot\vec{V}+\frac{1}{\rho}div\left(P\cdot\vec{V}\right)+\cancel{\frac{p}{\rho}div\vec{V}}$ 由于$\boldsymbol{\mu=0}\Rightarrow P=-pI$

则代入P，得到$div\left(-pI\cdot\vec{V}\right)=div\left(-\begin{bmatrix}p&0&0\\0&p&0\\0&0&p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}\right)=-\left[\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}+\frac{\partial(pw)}{\partial z}\right]=-\vec{V}\cdot\nabla p-\cancel{p\,div\vec{V}}$

简化方程 所以**理想流体的动能方程**: $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot\vec{V}-\frac{\vec{V}}{\rho}\cdot\nabla p}$

理想流体**动能的变化**仅仅是由**质量力**和**压力梯度力**的做功造成的，而与热能不发生任何转换。

场的观点 假设质量力是有势力，且**质量力位势为$\boldsymbol{\Phi}$**，则满足$\vec{F}=-\nabla\Phi$

如考虑Φ为**一定常场** $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0\right)$，则有: $\vec{F}\cdot\vec{V}=-\vec{V}\cdot\nabla\Phi=-\frac{d\Phi}{dt}$

最终简化形式: $\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}+\Phi\right)=-\frac{\vec{V}}{\rho}\cdot\nabla p$

理想流体运动过程中，**动能与位能的变化率等于压力梯度力的做功率**。如果流体微团在运行方向上压力的分布是均匀的（**压力梯度力为零**），则流体微团的**动能与位能之和守恒**。

2.4.3 热流量方程

思想 描述$\frac{dq}{dt}$，用**能量方程减去动能方程**，得到反映**内能变化率**的热流量方程

推导 能量方程: $\frac{d}{dt}\left(c_vT+\cancel{\frac{V^2}{2}}\right)=\cancel{F\cdot\vec{V}}+\cancel{\frac{1}{\rho}div\left(P\cdot\vec{V}\right)}+\frac{dq}{dt}$

动能方程: $\frac{d}{dt}\left(\cancel{\frac{V^2}{2}}\right)=\cancel{F\cdot\vec{V}}+\cancel{\frac{1}{\rho}div\left(P\cdot\vec{V}\right)}+\frac{p}{\rho}div\vec{V}-E$ （已考虑牛顿流体形式）

得到: $\frac{d}{dt}(c_vT)=-\frac{p}{\rho}div\vec{V}+E+\frac{dq}{dt}$ 或者 $\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}(c_vT)+\frac{p}{\rho}div\vec{V}-E$

简化 对于理想流体，即考虑无粘性（$E=0$），**热流量方程**简化为:

$$\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}(c_vT)+\frac{p}{\rho}div\vec{V}\quad or\quad \frac{dq}{dt}=\frac{d\left(c_pT\right)}{dt}-\alpha\frac{dp}{dt}\quad\left(\alpha=\frac{1}{\rho}\right)$$

这就是通常在大气科学中所用的“热力学第一定律”的形式。

2.4.4 伯努利方程

思想 基于动能方程，考虑理想流体，且**质量力为定常有势力**

推导 理想流体微团在定常有势力作用下的动能方程：

根据 $\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}+\Phi\right)=-\frac{\vec{V}}{\rho}\cdot\nabla p$ 有$-\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial t}-\vec{V}\cdot\nabla p=-\vec{V}\cdot\nabla p$ （定常场：$\frac{\partial p}{\partial t}=0$）

定常：$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}+\Phi\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}$ 不可压缩：$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}+\Phi\right)=-\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right)\rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}+\Phi+\frac{p}{\rho}\right)=0$

等式右端括号内部分的个体变化为零，也即：

$$\frac{V^2}{2}+\Phi+\frac{p}{\rho}=const$$

流线与迹线 定常运动迹线和流线重合，于是沿流体运动的流线有：

$\underbrace{\frac{V^2}{2}}_{动能}+\Phi_{位能}+\underbrace{\frac{p}{\rho}}_{压力能}=const$ $\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=const$ 流速减小，压力能增大

流体力学的机械能守恒形式（条件：定常场、不可压缩、质量力为有势力、理想流体）

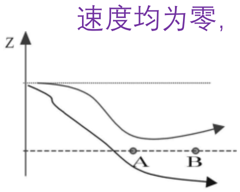
实际应用 可用于测压求速

① 皮托管：通过压力测量转化为求流速的仪器。

② 文丘里流量计

③ 翼面升力 ④ 香蕉球 ⑤ 溪流中的急流

例题 1. 理想不可压流体，所受质量力仅为重力的情况下作定常运动时，其中一流管如图所示，已知O点压力和速度均为零，讨论此时图中 A、B 两点的流速V_A、V_B及压力P_A、P_B间的所满足的关系



A 点横截面积比 B 点小，则$V_A>V_B,P_A<P_B$

2. 已知密度ρ，体积为τ的流体微团，A为流体所具有的任一物理量，证明：$\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho A\delta\tau=\iiint_\tau\frac{dA}{dt}\rho\delta\tau$

3. 证明：充满整个静止的闭合容器的不可压粘性流体，初始时刻流体是运动的，则流体最终必将静止

$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot\vec{V}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(P\cdot\vec{V}\right)+\frac{p}{\rho}div\vec{V}-E$

$\frac{p}{\rho}div\vec{V}-E<0$ 则能量最终不断耗散

2.5 简单情况下的 N-S 方程的准确解

流体力学基本方程组

$$\begin{cases} \textbf{连续方程} & \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0 \\ \textbf{运动方程} & \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu\,\nabla^2\vec{V} \end{cases}$$

有参数$\rho, u, v, w, p, \mu_{粘性系数}$ **六个变量**

$$\begin{cases} \text{连续方程} & \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + w\dfrac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \\ & \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \text{运动方程} & \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ & \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

共**四个方程**不闭合

如果考虑流体为均匀不可压缩流体（$\rho = const$），且粘性系数为常数（$\mu = const$），则方程**闭合**。

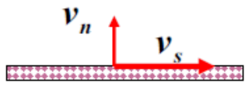
流体力学一般方法 求解这样的闭合的方程组并使之适合应当的初始条件和边界条件

问题在于：由于流体运动方程含有如平流加速度的**非线性项**，它是一个非线性方程组，在数学上要求解这样一个非线性方程组是难以做到的，一般使用理论、计算、实验法求解

所以我们仅仅通过简单问题的求解来了解下基本方法

2.5.1 边界条件

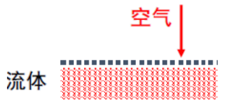
① 固体壁边界条件 当流体流经固体壁时，必须满足**不可穿透条件和无滑脱条件**



当固体壁静止时，流体满足：$\vec{V} = 0 \quad v_n = v_s = 0$ 附着在固体壁上的流体微团静止

当固体壁以速度$\vec{V}_T$运动时：$\vec{V} = \vec{V}_T \quad v_n = v_{nT}\,,\ v_s = v_{sT}$ 不能穿透固体壁，也不能有滑动

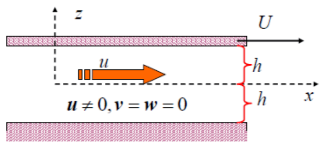
② 自由表面边界条件 在自由表面上，两种流体质点在边界面上的**法向分速相等**：$v_{nI} = v_{nII}$



另外，如果不考虑表面张力，两种流体质点在边界面上的**法向应力相等**：

$(p_{nn})_I = (p_{nn})_{II} \quad p_{nn} = -p_0$

2.5.2 平面库托流动



条件 如图简单流动：流体在两相距为$2h$的无界平行平板间(下板静止，上板为 U)

沿x轴作**定常直线平面运动**，满足有$u \neq 0, v = w = 0$

推导 作用于流点上的质量力只有重力，即：$F_x = F_y = 0 \quad F_z = -g$

考虑xOz平面运动，则$\partial v/\partial y = 0$.

假设**流体不可压缩**：$\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \xrightarrow{\text{连续方程}} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\quad u = u(z)$ 可见u仅仅是z的函数

假设**运动是定常的**：$\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$，进而有 $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dw}{dt} = 0$

则 NS 方程可简化为：

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = -g - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \xrightarrow{\text{积分}} p = -\rho g z + p_1(x) \end{cases}$$

方程**第一式**可得到：$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ 进一步考虑到左端项：$\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{dp_1(x)}{dx}$ 它仅仅是x的函数，而其右端项仅仅为z的函数。所以如果上式成立，则左右两端应等于同一常数 $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = C$。

积分该式可得：$u=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{z^2}{2}+Az+B$

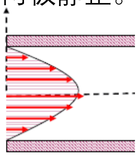
再考虑简单情况：设在x方向的**压力分布是均匀的**，即$\frac{\partial p}{\partial x}=0$ 则$u=Az+B$

且上板均速U运动，考虑如下边界条件$\begin{cases} z=h, u=U \\ z=-h, u=0 \end{cases}$ 代入得到 A,B 值$\begin{cases} A=\frac{U}{2h} \\ B=\frac{U}{2} \end{cases}$

最终可得$u=\frac{U}{2}\left(1+\frac{z}{h}\right)$ 该式给出了**平面库托流动的流速分布**，它表明流速沿z轴呈线性分布

2.5.3 平面泊稷叶流动

条件 平面库托流动的基础。固体边界条件相同。但是**沿x方向的压力分布不均匀**，且上下两板静止。



推导 由基本方程 $u=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{z^2}{2}+Az+B$，边界条件为$\begin{cases} z=h, u=0 \\ z=-h, u=0 \end{cases}$ $\frac{\partial p}{\partial x}\neq 0$

代入方程可得：$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(h^2-z^2)$ 它表明流速沿 z轴方向**呈抛物线分布**。