第七章 湍流

章节引言 前面的内容主要集中讨论了描述规则流体运动的基本方法和理论。
实际上，流体运动存在两种截然不同的运动状态：规则的流体运动（层流）和不规则的流体运动（湍流）本章重点讨论湍流。
由于湍流运动是实际问题中经常遇到的，尤其是在边界附近的流体运动，大多数均属于湍流运动。特别，在大气科学的研究中，边界层的湍流运动对地-气系统之间的动量、能量和水汽的交换具有重要的作用。本章介绍湍流的基本概念、描述湍流的基本方法和基本理论。

7.1 湍流概述

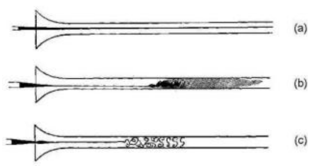
7.1.1 层流和湍流

层流 流体运动具有**规则性**，流体运动时**层次分明**，**没有混合**现象。流体质点的轨迹是**光滑的曲线**，其对应的物理量场如速度、压强等随时间、空间作**平缓而连续**的变化。

湍流 流体**运动杂乱而无规律性**（运动具有**脉动性**），不同层次的流体质点发生**激烈的混合**现象，流体质点的**运动轨迹杂乱无章**，其对应的**物理量随空间激烈变化**

7.1.2 层流到湍流的过渡（临界雷诺数）

雷诺实验 1883 年，雷诺（Reynold）做了一系列经典实验，力求找到流体流动由层流过渡到湍流所需的条件。



① 雷诺用滴管在流体内注入有色颜料，发现流速不大时，管内呈现一条条与管壁平行并清晰可见的有色细丝即**脉线**，管内流体**分层流动**，互不混淆，说明管内流体处于层流运动状态。
② 若保持管径不变，增大流速，则**脉线变粗**，开始**出现波纹**，随流速的增加，波纹数目振幅逐渐加大
③ 当流速达到某数值时，脉线突然分裂成许多运动着的**小涡旋**，继而很快消失，使整个管内的流体带上了淡薄的颜料的颜色。这说明管内流体的不规则运动，使各部分颜料颗粒**相互剧烈掺混**，并混乱而均匀地分散到整个流体之中，导致**脉线消失**，此时流体处于湍流状态。

表明 **流动速度越大，湍流就更容易发生。层流和湍流的转换，主要取决于雷诺数**$R_e = \frac{V_{速度} d_{管径}}{\nu}$

① $\boldsymbol{R_{e0}}$: **临界** $\boldsymbol{R_e}$**数下界**， $R_e < R_{e0}$层流
② $R_{e0} < R_e < R_{ec}$不稳定过渡流　　　　大概从 2~2000，实际问题非常复杂
③ $\boldsymbol{R_{ec}}$:**临界** $\boldsymbol{R_e}$**数上界**， $R_e > R_{ec}$湍流

7.1.3 平均值运算法则

引入 湍流运动的**极不规则性和不稳定性**，并且每一点的物理量随时间、空间激烈变化，显然，很难用传统的方法来对湍流运动加以研究。但湍流的杂乱无章及随机性可以用**概率论及数理统计**的方法加以研究。也就是说，湍流一方面具有**随机性**，而另一方面其统计平均值却符合一定的**统计规律**。

时间平均值 考虑一维流体运动，对于**物理量**$\boldsymbol{A(x,t)}$，对于任意空间点x, **以某一瞬时** $\boldsymbol{t}$ **为中心**，在时间间隔T内求平均，即：$\bar{A}_{时}(x,t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A(x,t')dt'$

其中，T为平均周期，它的选取一般要求**大于脉动周期**，而**小于流体的特征时间尺度**。

空间平均值 对于任意时间 t ，以**某一空间点** $\boldsymbol{x}$ **为中心**，对一定的空间尺度求平均，即：

$\bar{A}_{空}(x,t) = \frac{1}{X}\int_{x-\frac{X}{2}}^{x+\frac{X}{2}} A(x',t)dx'$

系统平均值 通常用**概率密度**函数来表示，又称统计概率平均。

概率密度函数通常记为$f(A)$ 它表示了A 值在区间 $A \sim A+dA$ 的概率为 $f(A)dA$

显然，概率密度函数满足：$\int_{-\infty}^{\infty} f(A)dA = 1$ 系统平均值表示为：$\bar{A}_{系}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} Af(A)dA$

而由于物理量量的值通常总是发生一定的有限范围之内的，故通常采用下式来计算有限范围$-A_1 \sim A_1$

$\bar{A}_{系}(x,t) = \int_{-A_1}^{A_1} Af(A)dA$

以上就是处理湍流运动将经常用到的平均值的定义，尤其是**时间平均**用得最多。

湍流运动 定义平均值后，可以将湍流运动表示为：**湍流运动 = 平均运动 + 脉动运动**

而把任意实际物理量表示为：$\boldsymbol{A = \bar{A} + A'}$

$\bar{A}$ 表示有规律的流体运动，反映物理量变化的主要趋势

A' 为叠加于平均值之上的脉动或涨落，它体现了无规则的湍流运动

也就是说，可以把实际物理量分解为两部分：有规则的平均运动和极不规则的脉动部分，这就是研究湍流运动的基本方法。

法则

① $\bar{A} = \overline{\bar{A} + A'} = \bar{A}$ ② $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ 平均值再求平均仍然为平均值

③ $\bar{A'} = 0$ 脉动值求平均为零 ④ $\boldsymbol{\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B} + \overline{A'B'}}$

⑤ $\overline{A \pm B} = \bar{A} \pm \bar{B}$ ⑥ $\overline{\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)} = \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)$ $\overline{\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)} = \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial s}\right)$

⑦ $\overline{\int A ds} = \int \bar{A} ds$

7.2 湍流平均运动方程和雷诺应力

引入 湍流运动同样满足连续方程及 NS 方程，但由于湍流运动随时间、空间的剧变性（脉动性），考虑细致地其真实的运动几乎是不可能的，也是没有意义的。通常采用**平均运动方程组**来描述湍流运动。

7.2.1 连续方程

基本方程 不可压缩流体的连续方程：$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$

推导 根据前面的讨论，将速度分量表示为：$u = \bar{u} + u'; v = \bar{v} + v'; w = \bar{w} + w'$

于是，流体的连续方程可以变为：$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$

方程 对上式求平均，不难得到：$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$

这就是不可压缩流体**平均速度**和**脉动速度**所满足的**连续方程**，它表明**不可压缩流体作湍流运动时，平均速度和脉动速度的散度均为零**，即：$div\overline{\vec{V}'} = 0,\quad div\vec{V}' = 0$

7.2.2 平均运动方程—雷诺方程

基本方程 **均匀不可压缩流体，不受质量力作用**，流体运动方程为：$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{V}$

以x方向的运动方程为例：$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u$

推导 为了平均化运算得方便，进行适当变换，可得：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u$$

将任意物理量表示为：$A = \bar{A} + A'$

速度分量为：$u = \bar{u} + u'; v = \bar{v} + v'; w = \bar{w} + w'; p = \bar{p} + p'$

将其代入方程，并对等式求平均，可以得到：

$$\frac{\partial\overline{(\bar{u}+u')}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{(\bar{u}+u')(\bar{u}+u')}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\bar{u}+u')(\bar{w}+w')}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{(\bar{p}+p')}}{\partial x}+\nu\nabla^2\overline{(\bar{u}+u')}$$

根据平均化运算法则有：$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{uu}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{uv}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{uw}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\nu\nabla^2\bar{u}$

将上式展开，利用平均化的连续方程，进行简化，可以得到：

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\nu\nabla^2\bar{u}-\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial x}-\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}-\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}$$

$\bar{u}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)=0$　这就是 x 方向的平均运动方程（雷诺方程）

方程

同理，可以得到 y，z 方向的平均运动方程，最终得到形式如下的平均运动（雷诺）方程：

$$\begin{cases}\rho\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial}+u\frac{-\partial\bar{u}}{\partial x}+v\frac{-\partial\bar{u}}{\partial y}+w\frac{-\partial\bar{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\mu\nabla^2\bar{u}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{u'u'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{u'v'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{u'w'}\right)}{\partial z}\\ \rho\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial}+u\frac{-\partial\bar{v}}{\partial x}+v\frac{-\partial\bar{v}}{\partial y}+w\frac{-\partial\bar{v}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\mu\nabla^2\bar{v}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{v'u'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{v'v'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{v'w'}\right)}{\partial z}\\ \rho\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+u\frac{-\partial\bar{w}}{\partial x}+v\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}+w\frac{-\partial\bar{w}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}+\mu\nabla^2\bar{w}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{w'u'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{w'v'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(-\rho\overline{w'w'}\right)}{\partial z}\end{cases}$$

① **平均压力梯度力**
② **平均运动的粘性力**
③ **由于流体中存在脉动的附加应力，类似于粘性应力。称为湍流（雷诺）应力，它是一个二阶张量**

雷诺应力

$$p'=\begin{pmatrix}p'_{xx} & p'_{xy} & p'_{xz}\\ p'_{yx} & p'_{yy} & p'_{yz}\\ p'_{zx} & p'_{zy} & p'_{zz}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-\rho\overline{u'u'} & -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{u'w'}\\ -\rho\overline{v'u'} & -\rho\overline{v'v'} & -\rho\overline{v'w'}\\ -\rho\overline{w'u'} & -\rho\overline{w'v'} & -\rho\overline{w'w'}\end{vmatrix}$$

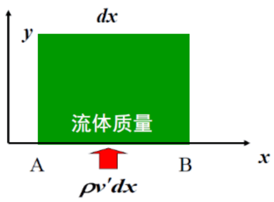
对于湍流平均运动而言，**应力包括三部分：正压力、分子粘性力和湍流应力**，即：

$\boxed{\bar{\sigma}_{i,j}=-\bar{p}I+2\mu\bar{e}_{i,j}-p'_{i,j}}$　其中：$\bar{e}_{i,j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right),(i,j=1,3)$ 为平均运动的形变率分量。

物理意义

由于脉动（速度扰动），单位时间内通过 AB 的流体质量为$\rho v'dx$，它所带入的 x 方向的动量流为：

$\rho v'u'dx$，其时间平均值为：$\rho\overline{v'u'}dx$ 相当于 AB 下部（负方向）的流体通过 AB 面元对 AB 上部（正方向）的流体的作用力。于是，单位面积上的作用力为：$\rho\overline{v'u'}$



实际上，单位时间通过单位面积的动量流，可以看作该面积元上所受的应力。

雷诺应力的实质是湍流脉动所引起的单位时间单位面积上的动量的统计平均值，也就是脉动运动产生的附加力。

注意

需要指出：以上讨论所得到的四个方程，包含了四个平均运动变量和六个湍流应力分量，并不闭合，要使方程闭合进而求解，通常有两种方法：半经验理论(建立平均运动与湍流应力的关系，使方程闭合，进而求解)、统计理论