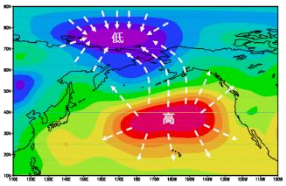
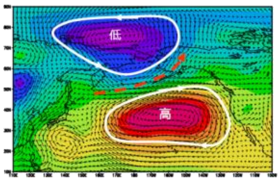
第六章 旋转流体动力学



没有自转



实际情况形成环流

章节引言 前述流体运动均在惯性坐标系下，未考虑地球旋转效应。地球以一定速度自转($\Omega = 7.292 \times 10^{-5} s^{-1}$)，而地球的旋转效应，将会对地球大气、海洋等流体的运动产生很显著的影响。本章将主要介绍考虑地球旋转效应下的流体运动，讨论旋转流体运动的控制方程，了解旋转效应所引起的流体流动特性变化，并通过方程的分析揭示在地球旋转效应影响下所出现的特殊的流体运动、现象及其物理描述。

6.1 旋转参考系中的流体运动方程

6.1.1 微分算子

旋转参考系 假设考虑流体运动的参考系，**本身**是以一定的**角速度绕轴转动**的，这种参考系称为**旋转参考系**。而相对于旋转参考系的流体运动则称之为**旋转流体运动**。大多数的地球物体流体力学所关心的大量问题均属于旋转流体动力学问题。

运动速度 **惯性坐标系**与**旋转坐标系**中的运动速度之间满足：$\vec{V}_{a绝对速度} = \vec{V}_{相对速度} + \vec{V}_{e牵连速度}$

例如，人在运动的火车上运动，地面为惯性坐标系(绝对坐标系)，火车为相对坐标系，$\vec{V_a}$为地面上看人的速度，$\vec{V}$为火车上观测到的人的速度，$\vec{V_e}$就是火车相对地面的速度，这个速度可直线可曲线。

由于引进旋转坐标系而产生的**牵连速度**：$\vec{V}_e = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ 其中$\vec{\Omega}$为由于旋转产生的转动角速度

回归矢径随时间的变化的形式：$\frac{d_a\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ （惯性坐标系建立于遥远太空中的某一点）

微分算子 $\frac{d_a}{dt}(\square) = \frac{d}{dt}(\square) + \vec{\Omega} \times (\square)$ ① **绝对变化项** ② **相对变化项** ③ **牵连变化项**

对于**任意矢量$\vec{A}$**，满足：$\frac{d_a}{dt}(\vec{A}) = \frac{d}{dt}(\vec{A}) + \vec{\Omega} \times (\vec{A})$ 该算子是联系惯性坐标系与旋转坐标系的普遍关系

对于标量而言，无需引入关系式，其在不同坐标系中相同

证明 对任意矢量$\boldsymbol{A}$，可写在不同的坐标系中，用不同i, j, k表达：

绝对坐标系 惯性静止坐标系，有 $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$ 单位坐标矢量为**常矢量**

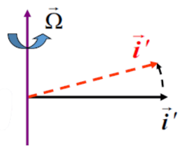
旋转坐标系 相对坐标系，有$\vec{A} = A'_x\vec{\imath}' + A'_y\vec{\jmath}' + A'_z\vec{k}'$ 单位坐标矢量**可变**(x, y轴会随着地球旋转改变)

求该矢量对时间t的导数：

绝对：$\frac{d_a\vec{A}}{dt} = \frac{d_aA_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{d_aA_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d_aA_z}{dt}\vec{k}$ $\frac{d_r\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA'_x}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dA'_y}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dA'_z}{dt}\vec{k}'$ （省略下标r）

$\frac{d_a\vec{A}}{dt} = \frac{d_a(A'_x\vec{\imath}' + A'_y\vec{\jmath}' + A'_z\vec{k}')}{dt} \xrightarrow{全微分\ 展开} \frac{d_a\vec{A}}{dt} = \frac{d_aA'_x}{dt}\vec{\imath}' + \frac{d_aA'_y}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{d_aA'_z}{dt}\vec{k}' + A'_x\frac{d_a\vec{\imath}'}{dt} + A'_y\frac{d_a\vec{\jmath}'}{dt} + A'_z\frac{d_a\vec{k}'}{dt}$ 坐标的变化

$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA'_x}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dA'_y}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dA'_z}{dt}\vec{k}'$ A'_x, A'_y, A'_z为**标量**在绝对坐标系和相对坐标系中的**时间微商相同**



由于$\vec{\imath}'$是旋转系中的单位矢量，所以$\frac{d_a\vec{\imath}'}{dt}$**表示$\vec{\imath}'$的转动速度**，有：(根据方向和大小可得)

$\frac{d_a\vec{\imath}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\imath}'$ $\frac{d_a\vec{\jmath}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\jmath}'$ $\frac{d_a\vec{k}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{k}'$ 上式变为：$\frac{d_a\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + A'_x\vec{\Omega} \times \vec{\imath}' + A'_y\vec{\Omega} \times \vec{\jmath}' + A'_z\vec{\Omega} \times \vec{k}'$

故有 $\frac{d_a\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$

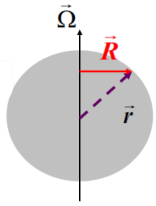
关于标量的说明：**上述算子只适用于矢量的情形**，而标量的绝对变化与相对变化没有差别。

6.1.2 运动方程

牛二定理 流体运动方程反映了流体运动状态的变化与所受合力的关系，但是，牛顿第二定理是建立在惯性坐标系的基础上的，即：$\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\sum_i F_i$ 考虑地球的旋转效应，引进的旋转坐标系；前面给出旋转坐标系与惯性坐标系之间的基本关系，以下通过分析，得出适用于描述旋转流体的运动方程。

推导 对任意矢量$\boldsymbol{A}$取为任意流体质点对应的绝对速度矢量$\boldsymbol{V}_a$时，可以得到绝对加速度表达式：

$$\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}_a}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{V}_a \Rightarrow \frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d(\vec{V}+\vec{\Omega}\times\vec{r})}{dt}+\vec{\Omega}\times(\vec{V}+\vec{\Omega}\times\vec{r}) \Rightarrow \frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}+\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

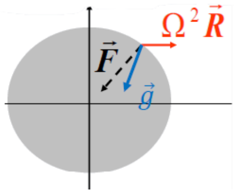


其中：$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})=\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{R})=-\Omega^2\vec{R}_{纬圈面半径}$ 故 $\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}-\Omega^2\vec{R}$

($|R|=|r|\cos\varphi_{纬度}$)（下方 NS 方程近似为不可压缩流体，去掉散度梯度项）

又有 N-S 方程 $\frac{d\vec{V}_a}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V}_a$ 则 $\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}-\Omega^2\vec{R}$ 代入$\frac{d\vec{V}_a}{dt}$

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V}-2\vec{\Omega}\times\vec{V}_{地转偏向力项}+\Omega^2\vec{R}_{惯性力项}$$



又有 $\vec{F}=-\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ 万有引力(地心引力)与惯性力项合成**重力项**

有$\vec{g}=\vec{F}+\Omega^2\vec{R}$ 代入后与惯性力项抵消

方程 $$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V}-2\vec{\Omega}\times\vec{V}_{科氏力项(地转偏向力)}$$ **旋转流体力学运动方程**

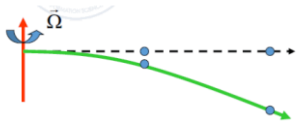
如果考虑旋转坐标系的自转角速度为0，方程中的科氏力与惯性离心力不存在，方程退化为 N-S 方程。

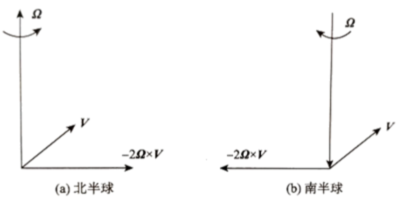
地转偏向力 ① 引进了旋转坐标系之后或者说考虑了地球的旋转效应之后，出现了**地转偏向力（或称柯氏力）**。从它的表达式不难看出，地转偏向力**与流速相垂直**，且它**只改变流速的方向**；并且沿着流向观测。对于地球流体运动而言，偏向力使流体**向右偏转（北半球）** $-2\vec{\Omega}\times\vec{V}$ $-2\Omega\vec{k}\times\vec{V}$

在赤道地区，会产生一个垂直运动。

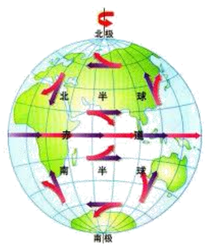
② 偏向力的出现，完全是由于旋转参考系下观测流体运动所产生的旋转效应，在流体的运动方程中，增加了偏向力项，从而成为旋转流体方程。所以，科氏力是一种视示力/虚假力。但由于我们在旋转的地球上观测，所以其对实际观测情况吻合的很好。

③ 在地球物理流体力学或大气动力学中，流体运动方程大多数是采用旋转流体运动方程的（除小尺度运动外）。但必须注意：旋转效应与流体运动的尺度密切相关。





地转偏向力的方向


科氏力示意图