

第四章 分离变量法

4.1 预备知识

4.1.1 函数内积

在区间 $[a, b]$ 上定义二个函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 则它们的内积定义为 $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$

4.1.2 正交函数

二个函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是正交的, 则它们的内积为 0, 即 $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0$

例如: $f(x) = x^2, f(x) = x^3$ 在 $[-1, 1]$ 上是正交的。

4.1.3 正交函数系

设有一族 $[a, b]$ 上的函数, 满足 $\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx \begin{cases} = 0 & m \neq n \\ \neq 0 & m = n \end{cases} \quad m, n = 0, 1, \dots$

则称该函数系为定义域上的正交函数系, 简称正交系, 记为 $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ 或 $\{\varphi_n\}$

重要性质: 线性无关 例如: 函数系 $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$ 为 $[-l, l]$ 上的正交函数系。

4.1.4 范数

一个函数 $f(x)$, 若积分 $\int_a^b f^2(x)dx$ 存在, 则称 f 平方可积

将 $\|\varphi\|_2 = \left[\int_a^b \varphi^2(x)dx \right]^{\frac{1}{2}}$ 称为 φ 在 $L^2([a, b])$ 中的范数。范数便是函数的度量。

4.1.5 正交函数集的标准正交化

假设有正交函数系: $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$ 为 $[-l, l]$ 上的正交函数系

令 $l = \pi$, 然后 $\frac{(\quad)}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\quad)^2 dx}}$, 可得 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$ 为上的 $[-\pi, \pi]$ 标准正交系

正交系的一个重要性质就是线性无关, 两两正交

4.1.6 函数的傅里叶级数展开

设 $f(x)$ 是 $2l$ 为周期的函数, 在 $[-l, l]$ 上满足 ①连续或只有有限个第一类间断点 ②至多有有限个极值点

则有 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$ 其中 $\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$

且当 x 是 $f(x)$ 连续点时, 级数收敛于 $f(x)$ (或 $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ 不连续时)

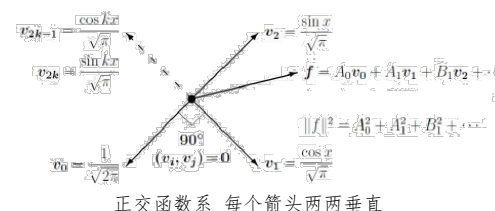
4.1.7 二阶线性齐次常微分方程的求解问题

问题 $y'' + py' + qy = 0$ 令 $y(x) = e^{rx}$, 有 $r^2 + pr + q = 0$, 两个根为 r_1, r_2

通解 ① 相异实根 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

② 相等实根 $y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$ 根据参数变易法所求

③ 共轭复根 $\alpha \pm \beta i$ $y = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$



4.2 波动方程初边值问题分离变量法求解

4.2.1 Fourier 方法

条件 物理上, 机械振动或电磁振动可以看成是多个简谐振动 (驻波) $e^{i\omega(t+cx)} = e^{i\omega t} e^{ikx}$, $k = c\omega$ 的叠加
数学上, 驻波是只含变量 x 的函数与只含 t 的函数的乘积, 即具有变量分离的形式

求解 由此受到启发, 求解线性方程定解问题时, 可尝试先求出齐次方程和齐次边界条件的具有变量分离形式的解, $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, 然后把它们叠加起来, 即 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)T_n(t)$, 最后利用初始条件确定各项中的系数, 使其成为定解问题的解

4.2.1.1 分离变量法求解波动方程定解问题

问题
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$
 两端固定

分离变量 设问题有非零(非平凡)的变量分离解 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 将它回代到原式中:

$$\text{由 } u_{tt} = a^2 u_{xx} \text{ 得: } X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \xrightarrow{\text{变量整理}} \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{特征值问题}$$

其边界由 $u(0, t) = u(l, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0$ 得 $X(0) = X(l) = 0$,

特征值问题 问题: $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \lambda < 0 \text{ 时 } \begin{cases} X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{smallmatrix} \right| \neq 0} C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$$

不符合非零解的要求, 因此, $\lambda < 0$ 不是特征值

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \lambda = 0 \text{ 时 } \begin{cases} X(x) = C_1 x + C_2 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) \equiv 0 \quad \text{因此, } \lambda = 0 \text{ 不是特征值}$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } \lambda > 0 \text{ 时 } \begin{cases} X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x \\ X(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(x) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}x \\ X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}l)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}l = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 > 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad C_2 \text{ 可视为 } 1$$
$$X_n(x) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其他方程 求解其他常微分方程, 得到特解 $u_n(x, t)$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \xrightarrow{\lambda = \lambda_n} T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \quad (n = 1, 2, \dots) \xrightarrow{u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)}$$

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{其中, } a_n = C_2 A_n, \quad b_n = C_2 B_n$$

特解叠加
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

将 n 从结果中去除 且要确保该级数收敛于 $u(x, t)$, 结果与 n 无关

系数确定 确定 a_n, b_n 的值. 利用初始条件 $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, 得到:

$$\begin{cases} \phi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\ \psi(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \end{cases} \xrightarrow{\text{傅里叶正弦级数展开}} \begin{cases} a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

4.2.1.2 解的物理意义

驻波

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots$$

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos \left(\frac{n\pi a}{l} t + \alpha_n \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$u_n(x, t) = N_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$$

其中, 强度/振幅 $N_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, 圆频率 $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, 初相 $\sin \alpha_n = -\frac{b_n}{N_n}$, $\cos \alpha_n = \frac{a_n}{N_n}$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \underbrace{u_1(x, t)}_{n=1} + \underbrace{u_2(x, t)}_{n=2} + \underbrace{u_3(x, t)}_{n=3} + \dots$$

基频 $\frac{\pi a}{l}$ 最低频率, 其他频率是它的整数倍。解的级数可以看作一系列频率成倍增长, 相位不同, 振幅不同的驻波的线性叠加而成。因此分离变量法也叫做驻波法。

4.2.2 自由边界条件下波动方程问题的求解

问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \end{cases}$$

两端自由

分离变量

设问题有非零(不平凡)的变量分离解 $u(x, t) = X(x)T(t)$

特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases} \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, t > 0$$

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \geq 0 \\ X_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{l}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad T_n(t) = \begin{cases} C_0 + D_0 t, & n = 0 \\ C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

特解

$$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = \begin{cases} (C_0 + D_0 t)A_0, & n = 0 \\ \left(C_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) A_n \cos \frac{n\pi x}{l}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

通解

$$u(x, t) = a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

系数确定

确定 a_n, b_n 的值。利用初始条件 $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ 和特征函数的正交性得到:

$$\begin{cases} \phi(x) = u(x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \\ \psi(x) = u_t(x, 0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \end{cases} \xrightarrow{\text{特征函数正交性}} \begin{cases} a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \phi(x) dx \\ b_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) dx \end{cases}$$

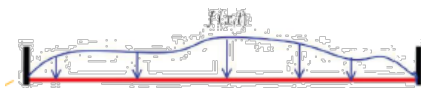
$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

4.3 非齐次问题的求解

4.3.1 非齐次方程+齐次边界条件

问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{固定} \end{cases}$$



引例

求解 $Ax = b$, $A_{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

1. $Ax = \lambda x \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{matrix}$ 满足 $Ak_i = \lambda k_i$ 这些特征值对应的特征向量两两正交。
2. 将 x, b 写为 k_i 的线性组合形式 (例如 $x = \alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n$, $b = \langle b, k_1 \rangle + \dots + \langle b, k_n \rangle$)
3. 将它们代入 $Ax = b$, 得 $\alpha_1 \lambda_1 k_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n k_n = \langle b, k_1 \rangle k_1 + \dots + \langle b, k_n \rangle k_n$
4. 比对系数相同: $\alpha_i = \frac{\langle b, k_i \rangle}{\lambda_i}$

第一步

求正交基 (特征函数系)

设问题有非零(非平凡)的变量分离解 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 则代入齐次问题有 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$

由此解得特征函数为: $X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

第二步

把定解问题中的未知函数和已知函数写成特征函数展开的形式

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad T_n(t) \text{ 为待定系数} \quad f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\text{每个方向的投影系数: } f_n(t) = \frac{(f(x, t), \sin \frac{n\pi x}{l})}{(\sin \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l})} \rightarrow f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$\text{初始条件: } \phi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \psi(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

第三步

关于 $T_n(t)$ 的定解问题: 将上述函数的级数展开形式代入原方程, 求展开系数:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[T''_n(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ \begin{cases} T''_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx := a_n \\ T'_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx := b_n \end{cases} \end{aligned}$$

该方程通解为其齐次方程的通解+其自身的一个特解

第四步

用参数变易法解关于 $T_n(t)$ 的定解问题

$$T''_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = 0 \xrightarrow{\text{通解}} T_n(t) = C_1 \cos \frac{n\pi a t}{l} + C_2 \sin \frac{n\pi a t}{l} \xrightarrow{\text{参数变易}} T_n(t) = C_1(t) \cos \frac{n\pi a t}{l} + C_2(t) \sin \frac{n\pi a t}{l}$$

第五步

确定系数 $C_1(t), C_2(t)$, 求解 $T''_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t)$ 的一个特解。

$$T_n(t) \xrightarrow{\text{两边求导}} T'_n(t) = \cancel{C'_1(t) \cos \frac{n\pi a}{l} t} - \frac{n\pi a}{l} C_1(t) \sin \frac{n\pi a}{l} t + \cancel{C'_2(t) \sin \frac{n\pi a}{l} t} + \frac{n\pi a}{l} C_2(t) \cos \frac{n\pi a}{l} t$$

为简化方程, 令 $C'_1(t) \cos \frac{n\pi a}{l} t + C'_2(t) \sin \frac{n\pi a}{l} t = 0$, 则有:

$$T''_n(t) = -\frac{n\pi a}{l} C'_1(t) \sin \frac{n\pi a}{l} t - \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 C_1(t) \cos \frac{n\pi a}{l} t + \frac{n\pi a}{l} C'_2(t) \cos \frac{n\pi a}{l} t - \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 C_2(t) \sin \frac{n\pi a}{l} t$$

$$\text{回代方程 } T''_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t) \text{ 得: } -C'_1(t) \sin \frac{n\pi a}{l} t + C'_2(t) \cos \frac{n\pi a}{l} t = \frac{l}{n\pi a} f_n(t)$$

可使用克莱姆法则求解 $C'_1(t), C'_2(t)$

$$C_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin \frac{n\pi at}{l} \\ \frac{l}{n\pi a} f_n(t) & \cos \frac{n\pi at}{l} \\ \cos \frac{n\pi at}{l} & \sin \frac{n\pi at}{l} \\ -\sin \frac{n\pi at}{l} & \cos \frac{n\pi at}{l} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \frac{n\pi at}{l} & \sin \frac{n\pi at}{l} \\ -\sin \frac{n\pi at}{l} & \cos \frac{n\pi at}{l} \end{vmatrix}} = -\frac{l}{n\pi a} f_n(t) \sin \frac{n\pi at}{l} \Rightarrow C_1(t) = -\frac{l}{n\pi a} \int_0^t \sin \frac{n\pi a\tau}{l} f_n(\tau) d\tau + c_1 (= 0)$$

$$C_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos \frac{n\pi at}{l} & 0 \\ -\sin \frac{n\pi at}{l} & \frac{l}{n\pi a} f_n(t) \\ \cos \frac{n\pi at}{l} & \sin \frac{n\pi at}{l} \\ -\sin \frac{n\pi at}{l} & \cos \frac{n\pi at}{l} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \frac{n\pi at}{l} & \sin \frac{n\pi at}{l} \\ -\sin \frac{n\pi at}{l} & \cos \frac{n\pi at}{l} \end{vmatrix}} = \frac{l}{n\pi a} f_n(t) \cos \frac{n\pi at}{l} \Rightarrow C_2(t) = \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \cos \frac{n\pi a\tau}{l} f_n(\tau) d\tau + c_2 (= 0)$$

第六步 确定 $T_n(t)$ 方程 $T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0$

解: $T_n(t) = C_1 \cos \frac{n\pi at}{l} + C_2 \sin \frac{n\pi at}{l} + C_1(t) \cos \frac{n\pi at}{l} + C_2(t) \sin \frac{n\pi at}{l}$

特解

其中 $\begin{cases} C_1(t) = -\frac{l}{n\pi a} \int_0^t \sin \frac{n\pi a\tau}{l} f_n(\tau) d\tau \\ C_2(t) = \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \cos \frac{n\pi a\tau}{l} f_n(\tau) d\tau \end{cases}$ 代入方程并化简可得:

通解表达 $T_n(t) = C_1 \cos \frac{n\pi at}{l} + C_2 \sin \frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l} d\tau$

边界代入又有: $\begin{cases} T_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx := a_n \\ T'_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx := b_n \end{cases}$ 故: $T_n(0) = C_1 = a_n, T'_n(0) = C_2 = \frac{l}{n\pi a} b_n$

最终得到: $T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + \frac{lb_n}{n\pi a} \sin \frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l} d\tau$

第七步 给出原问题的解 由于有: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$, 所以:

$$u(x,t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + \frac{b_n l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}}_{\text{齐次方程部分}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \left[\int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l} d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{l}}_{\text{非齐次方程部分}}$$

典型模型-共振现象

方程
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin wt \sin 2x & 0 < x < \pi \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

解
$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^x \sin wt \sin 2x \sin nx dx = \begin{cases} \sin wt & n = 2 \\ 0 & n \neq 2. \end{cases}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a}{l} (t - \tau) d\tau \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{2} \int_0^t \sin w\tau \sin 2(t - \tau) d\tau \sin 2x$$

$$u(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t \right) \sin 2x, & w = 2 \\ -\frac{2 \sin wt - w \sin 2t}{2(w^2 - 4)} \sin 2x, & w \neq 2 \end{cases} \quad (\text{固有频率 } \frac{2\pi a}{l})$$

物理 这表明, 当 $w = 2$ 时, 位移随时间增加线性增长, 不断增大, 实际应用中为避免共振的发生, 常常要控制自由项的振动频率, 让它 $w \neq 2$

4.3.2 非齐次方程+非齐次边界条件 [必考]

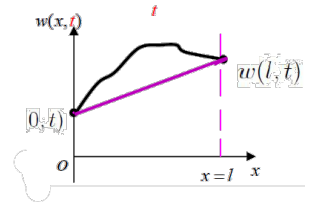
4.3.2.1 非齐次项与时间有关

问题
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = p(t), & u(l, t) = q(t) \end{cases}$$

求解 引入边界齐次化函数 $\omega(x, t) \leftarrow \begin{cases} \omega(0, t) = p(t) \\ \omega(l, t) = q(t) \end{cases}$

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t)$$

其中: $\omega(x, t) = \frac{1}{l}[q(t) - p(t)]x + p(t)$ 直线方程



其中:
$$v(x, t) = \begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x, t) - \omega_{tt} & 0 < x < l, t > 0 \\ v(x, 0) = \phi(x) - \omega(x, 0), & v_t(x, 0) = \psi(x) - \omega_t(x, 0) & 0 \leq x \leq l \\ v(0, t) = v(l, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

4.3.2.2 非齐次项与时间无关

问题
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x) \\ u(x, 0) = \phi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = A, & u(l, t) = B \end{cases}$$

求解 $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$ 引入边界齐次化函数 $w(x)$

$$\begin{cases} a^2 w_{xx} + f(x) = 0 \\ w(0) = A & w(l) = B \end{cases} \quad \begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} + f(x) \\ v(x, 0) = u(x, 0) - w(x) = \phi(x) - w(x), & v_t(x, 0) = u_t(x, 0) = \psi(x), \\ v(0, t) = u(0, t) - w(0) = A - w(0) = 0 \\ v(l, t) = u(l, t) - w(l) = B - w(l) = 0 \end{cases}$$

即取 $w(x) = A + \frac{(B-A)x}{l} + \frac{x}{a^2 l} \int_0^l \left[\int_0^\eta f(\xi) d\xi \right] d\eta - \frac{1}{a^2} \int_0^\pi \left[\int_0^\eta f(\xi) d\xi \right] d\eta$

4.3.2.3 其他类型边界条件

① $u(0, t) = p(t), u_x(l, t) = q(t)$ $w(x, t) = q(t)x + p(t)$
 ② $u_x(0, t) = p(t), u(l, t) = q(t)$ $w(x, t) = p(t)(x - l) + q(t)$
 ③ $u_x(0, t) = p(t), u_x(l, t) = q(t)$ $w(x, t) = p(t)x + \frac{q(t) - p(t)}{2l} x^2$