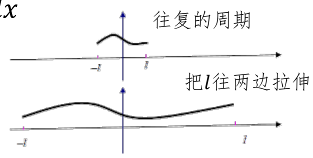
第五章 傅里叶积分变换

5.1 傅里叶积分变换定义

5.1.1 知识回顾



积分变换 把函数$f(x)$经过积分运算转为另一类函数$F(\alpha)$，即$F(\alpha)=\int_a^b f(x)K(\alpha,x)dx$

其中，α是一个**参变量**，$K(\alpha,x)$是确定的二元函数，称为**积分变换的核**。

傅里叶级数展开 (周期函数) 傅里叶**级数展开** $\xrightarrow{\text{极限 } l\to\infty}$ (非周期函数) 傅里叶**积分表达**

以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 $[-l,l]$上可表达：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

其中 $\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t, n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t, n=1,2,\cdots \end{cases}$ 考虑a_n,b_n的表达式，得到：

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\left(\cos\frac{n\pi t}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}+\sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left[\frac{n\pi}{l}(x-t)\right]\mathrm{d}t$$ 若令$\alpha_n=\frac{n\pi}{l},\Delta\alpha_n=\frac{\pi}{l}$

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left[\alpha_n(x-t)\right]\mathrm{d}t\right\}\Delta\alpha_n$$

假定 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上**绝对可积**，$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty$，则$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t=0$

$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos[\alpha(x-t)]\,\mathrm{d}t\}\,\mathrm{d}\alpha$ 为$f(x)$的**傅里叶积分公式**。

对积分表达进一步处理，利用欧拉公式:$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}=\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha(x-t)}dtd\alpha+\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha(x-t)}dtd\alpha$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha(x-t)}dtd\alpha$$ $f(x)$的傅里叶积分公式

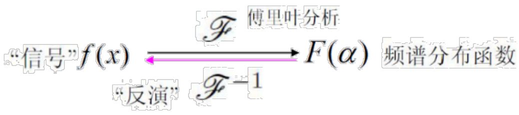
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt\right\}d\alpha$$ 记为$F(\alpha)$,**称为$f(x)$的傅里叶变换$\mathcal{F}[f(x)]$**

5.1.2 傅里叶积分变换的定义

基本条件 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任一有限区间上**满足 Dirichlet 条件**,在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积

傅里叶变换 广义积分：$\boldsymbol{F(\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f(x)e^{-i\alpha x}}dx$ 为$f(x)$的傅里叶变换,记为$F(\alpha)=\mathcal{F}[f(x)]$,称**像函数**

傅里叶逆变换 $\boldsymbol{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\boldsymbol{e^{i\alpha x}}d\alpha$ 为 $F(\alpha)$的傅里叶**逆变换**,记为 $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\alpha)]$

关系 

$e^{-i\alpha x}=\cos(\alpha x)-i\sin(\alpha x)$

注意 傅里叶积分变换来自于非周期傅里叶函数的积分表达，**两者成对出现**

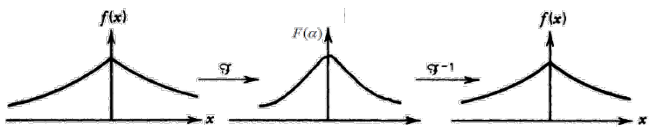
示例： 求函数的傅里叶变换，其中a为常数： $(1) f(x)=e^{-a|x|}$； $(2) f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant a,\\ 0, |x|>a.\end{cases}$

① $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}e^{-i\alpha x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x(a-\mathrm{i}\alpha)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{x(-a-\mathrm{i}\alpha)}\mathrm{d}x\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\alpha^2}$

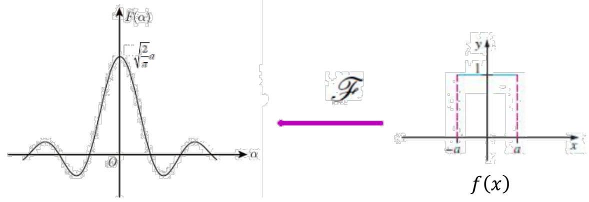
上式中：$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a-\mathrm{i}\alpha}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}e^{x(a-\mathrm{i}\alpha)}$ 可以继续积分

② 当$\alpha\neq 0$时 $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}x_{\text{可以写为正余弦形式}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\alpha)}{\alpha}$

当$\alpha=0$时 $\lim\limits_{\alpha\to 0}F(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin(a\alpha)}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}a=F(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} dx_{\text{验证极限值等于函数值，连续}}$



$f(x)$ 经过傅里叶变化 逆变换后可导



$f(x)$

5.2 傅里叶积分变换的性质

5.2.1 线性性质

内容 傅里叶变换和逆变换都是**线性变换**,即 （积分满足线性性质）

$$\mathcal{F}[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]=c_1\mathcal{F}[f_1(x)]+c_2\mathcal{F}[f_2(x)]=c_1F_1(\alpha)+c_2F_2(\alpha)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[c_1F_1(\alpha)+c_2F_2(\alpha)]=c_1\mathcal{F}^{-1}[F_1(\alpha)]+c_2\mathcal{F}^{-1}[F_2(\alpha)]=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$$

5.2.2 位移性质

内容 设 x_0 为任意实常数,则 $\boldsymbol{\mathcal{F}[f(x\pm x_0)]=e^{\pm i\alpha x_0}\mathcal{F}[f(x)]}$ 设：$f(x)\xrightarrow{\mathcal{F}}F(\alpha)$，则$f(x-c)\xrightarrow{\mathcal{F}}e^{-i\alpha c}F(\alpha)$

证明 $\mathcal{F}[f(x-\mathrm{c})]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-c)e^{-i\alpha x}dx\xrightarrow{令\xi=x-c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\alpha\xi}e^{-i\alpha c}d\xi$

5.2.3 相似性质（伸缩性质）

内容 设 c 为任意非零实常数，则$\boldsymbol{\mathcal{F}[f(cx)]=\frac{1}{|c|}F\left(\frac{\alpha}{c}\right)}$

证明 $\mathcal{F}[f(cx)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(cx)e^{-i\alpha x}dx\xrightarrow{令\xi=cx\ (c>0)}\frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\frac{\alpha}{c}\xi}d\xi=\frac{1}{c}F\left(\frac{\alpha}{c}\right)$

$\xrightarrow{令\xi=cx\ (c<0)}\frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{-\infty} f(\xi)e^{-i\frac{\alpha}{c}\xi}d\xi=\frac{1}{c}F\left(\frac{\alpha}{c}\right)=-\frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\frac{\alpha}{c}\xi}d\xi$ 合并后为绝对值

5.2.4 微分性质

内容 若当$|x|\to\infty$时,$f(x)\to 0$ （函数在无穷远处为零） $f^{(k)}(x)\to 0$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$，则

$$\mathcal{F}[f'(x)]=\mathrm{i}\alpha\mathcal{F}[f(x)],\quad \mathcal{F}[f''(x)]=(\mathrm{i}\alpha)^2\mathcal{F}[f(x)],\cdots,\boldsymbol{\mathcal{F}[f^{(n)}(x)]=(\mathrm{i}\alpha)^n\mathcal{F}[f(x)]}$$

变化前为求导，变化后为幂的形式

证明 $\mathcal{F}[f'(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,e^{-i\alpha x}dx\xrightarrow{分部积分}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-i\alpha x}\Big|_{-\infty}^{\infty}{}_{\text{此项为零}}-(-i\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx=\mathrm{i}\alpha\mathcal{F}[f(x)]$

在像原函数空间一阶求导，等价于在该处乘上一个$\mathrm{i}\alpha$

5.2.5 积分性质

$$\mathcal{F}\left[\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\alpha}\mathcal{F}[f(x)]$$

证明 $\left(\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)'=f(x)\xRightarrow{两边傅里叶}\mathcal{F}\left[\left(\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)'\right]=F(\alpha)$ $\mathcal{F}\left[\left(\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)'\right]=(i\alpha)\mathcal{F}\left[\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$

5.2.6 乘多项式性质

$$\mathcal{F}[xf(x)] = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}F(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}, \cdots, \mathcal{F}[x^n f(x)] = \mathrm{i}^n \frac{\mathrm{d}^n F(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^n}$$

证明 $\mathcal{F}[xf(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, e^{-i\alpha x}dx = -\frac{1}{i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\alpha}(f(x)e^{-i\alpha x})dx = \boldsymbol{i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\alpha}(f(x)e^{-i\alpha x})dx$

$= i\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)e^{-i\alpha x})dx\right) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}F(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$

5.2.7 卷积定理

卷积运算 定义 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积运算为 $f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$

性质 $\mathcal{F}[(f * g)(x)] = F(\alpha)G(\alpha)$ $\boldsymbol{\mathcal{F}^{-1}[F(\alpha)G(\alpha)] = (f * g)(x)}$ **后者常用（频谱域→物理空间）**

示例 1. 计算下列二个函数的卷积：$\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = e^{-x^2} \end{cases}$

$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\xi)e^{-\xi^2}d\xi = \frac{x}{\sqrt{2}}$ （已知结论 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi = \sqrt{\pi}$）

2. 计算卷积。定义$g_n(x)$：$g_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & |x| \le \frac{1}{n} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ $f(x)$在 $(-\alpha, \alpha)$上连续有界,并由它定义

一个新的函数 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.试计算$f(x) * g_n(x)$

有：$f(x) * g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g_n(t)dt = \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x-t)dt = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$

$f(x) * g_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt = \frac{F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$ 引申为：$\lim_{n\to\infty} f(x) * g_n(x) = F'(x) = f(x)$

3. 计算函数 $f(x) = e^{-\frac{a}{2}x^2}$ 的傅里叶变换

根据定义有 $F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-i\alpha x}dx$（直接计算复杂） 进而得到$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}$

又有：$f(x) = e^{-\frac{a}{2}x^2} \to f'(x) + axf(x) = 0 \xRightarrow{\text{两边傅里叶变换}} i\alpha F(\alpha) + ai\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = 0 \xrightarrow{\text{微分方程}} F(\alpha) = Ce^{-\frac{\alpha^2}{2a}}$

可得：$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}$ 即有：$e^{-\frac{a}{2}x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}$ 可用公式$(a \to 2a)$：$\boldsymbol{e^{-ax^2} \xRightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}}$

例如，计算$e^{-\tilde{a}^2\alpha^2 t} \xRightarrow{\mathcal{F}^{-1}} ?$ 有：$\sqrt{2a}e^{-ax^2} \xRightarrow{\mathcal{F}} e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}$ 则：$\begin{cases} \frac{1}{4a} = \tilde{a}^2 t \\ a = \frac{1}{4\tilde{a}^2 t} \end{cases}$ 则逆变换 $\frac{1}{\tilde{a}}\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4\tilde{a}^2 t}}$

5.3 傅里叶积分变换在求解偏微分方程初值问题中的应用

5.3.1 偏导数的傅里叶变换

条件　对于**多变量函数** $u(x,t)$的偏导数$u_x(x,t)$，$u_{xx}(x,t)$，$u_t(x,t)$，$u_{tt}(x,t)$　针对x做变换，固定t

变换　$\mathcal{F}[u_x]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_x(x,t)e^{-i\alpha x}dx=i\alpha\mathcal{F}[u]$　　$\mathcal{F}[u_{xx}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}(x,t)e^{-i\alpha x}dx=-\alpha^2\mathcal{F}[u]$

$\mathcal{F}[u_t]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,t)e^{-i\alpha x}dx=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u]$　　$\mathcal{F}[u_{tt}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_{tt}(x,t)e^{-i\alpha x}dx=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}[u]$

5.3.2 求解热传导方程的初值问题

问题　$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t) & -\infty<x<+\infty,t>0\\ u(x,0)=\phi(x) & -\infty<x<+\infty\end{cases}$

问题转化　对 $u(x,t),f(x,t)$ 和 $\phi(x)$ 关于 x 进行**傅里叶变换** $\Rightarrow$ $\begin{matrix}\mathcal{F}[u(x,t)]=\boldsymbol{U(\alpha,t)}\\ \mathcal{F}[f(x,t)]=\boldsymbol{F(\alpha,t)}\\ \mathcal{F}[\phi(x)]=\boldsymbol{\Phi(\alpha)}\end{matrix}$

原问题转为：$\begin{cases}U_t(\alpha,t)=a^2(i\alpha)^2U(\alpha,t)+F(\alpha,t)\\ U(\alpha,0)=\Phi(\alpha)\end{cases}$　$U_t+a^2\alpha^2U=F(\alpha,t)\xRightarrow{\text{等价}}y'(x)+ay(x)=f(x)$

常数变易法：$\xRightarrow{\text{两边乘}e^{ax}}(y(x)e^{ax})'=f(x)e^{ax}\xRightarrow{\text{积分}}y(x)=y(0)e^{-ax}+\int_0^x f(\xi)e^{-a(x-\xi)}d\xi$

代入原方程相关内容：$U(\alpha,t)=\Phi(\alpha)e^{-\alpha^2a^2t}+\int_0^t F(\alpha,\tau)e^{-\alpha^2a^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$

反解　$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}[U(\alpha,t)]=\mathcal{F}^{-1}[\Phi(\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha^2a^2t}]+\mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t F(\alpha,\tau)\mathrm{e}^{-\alpha^2a^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]$

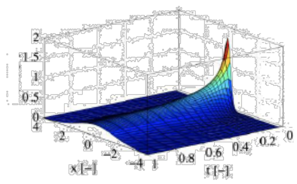
$$=\mathcal{F}^{-1}[\Phi(\alpha)]*\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\alpha^2a^2t}]+\int_0^t\mathcal{F}^{-1}[F(\alpha,\tau)]*\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\alpha^2a^2(t-\tau)}]\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\phi(x)*\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\alpha^2a^2t}\right]+\int_0^t f(x,\tau)*\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\alpha^2a^2(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\tau\xRightarrow{\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-a^2\alpha^2t}\right]=\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\ \text{推导见上节}}$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\phi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\xRightarrow{\text{高斯函数}G(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}}$$

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-\xi,t)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{u(x,t)=\underbrace{\phi(x)*G(x,t)}_{\text{边界项}}+\underbrace{\int_0^t f(x,\tau)*G(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau}_{\text{强迫项}}}$$



热核函数

注意　① $\boldsymbol{G(x,t)}$**热核函数或高斯核函数**：$t=0$时刻,$x=0$处的单位强度的热源在其它位置时刻的响应函数

② 对于热传导初值问题 $\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$ 其解的表达式为：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-\xi,t)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi=\phi(x)*G(x,t)$$

③ 对于热传导初值问题的解，在下列极限意义下满足初始条件：$u(x,0)=\varphi(x)$

即$\lim\limits_{t\to0}u(x,t)=\lim\limits_{t\to0}\varphi(x)*G(x,t)=\varphi(x)$