第三章 波动方程的初值问题与行波法

3.1 一维波动方程的初值问题

3.1.1 无界弦无强迫振动的初值问题

问题描述 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \phi(x)_{初始位移} \quad u_t(x,0) = \psi(x)_{初始速度} \end{cases} \quad a = \sqrt{\frac{\rho}{T}}$

在弦的微小振动中，研究其中**一小段**，那么在不太长的时间里，两端的影响都来不及传到，可以认为两端都不存在，弦是**无限长**的。弦的振动是**自由振动**（无外力强迫）。

大气的运动形式就是以波动的形式进行的。

求解思路 **从通解到特解**

泛定方程的通解计算 由泛定方程$u_{tt} = a^2 u_{xx}$可得其**特征方程**为$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0$，**特征线**满足$\frac{dx}{dt} = \pm a$

特征线为$\begin{cases} x + at = c_1 \\ x - at = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$ 可以得到**标准型**：$u_{\xi\eta} = 0$

两边依次关于ξ,η积分，可得通解：$u(\xi,\eta) = \int f(\xi)d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta)$

代回原变量，得**泛定方程通解** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)}$

定解问题得特解——达朗贝尔公式

推导 利用**初始条件**来确定通解中的任意函数F和G：$\begin{cases} u(x,0) = F(x) + G(x) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = a[F'(x) - G'(x)] = \psi(x) \end{cases}$

将导数移去：$\frac{1}{a}\psi(x) = F'(x) - G'(x)$ 在x轴上，**任取一个点x_0,再取一个x**,在区间$[x_0,x]$上积分,则

$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{a}\psi(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x} F'(\xi)d\xi - \int_{x_0}^{x} G'(\xi)d\xi$ ξ 为任取的一个变量（避免与积分上限 x 重复）

$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{a}\psi(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x} dF(\xi) - \int_{x_0}^{x} dG(\xi) = F(x) - G(x) - c \quad \Rightarrow F(x) - G(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi + c$

再**融合第一个关系** $F(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi + \frac{c}{2} \qquad G(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi - \frac{c}{2}$

特解 $\boldsymbol{u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi}$ 称其为**达朗贝尔公式**

位移贡献项 **速度贡献项** 并称其为无界弦的自由振动问题的达朗贝尔解

行波法 **使用条件**：双曲型方程

特征方程与特征根：$\lambda^2 - a^2 = 0 \to \lambda = \pm a$

变量替换：$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$ **解方程**：$u_{\xi\eta} = 0 \to u = F(x+at) + G(x-at)$

利用初始条件解F,G： $u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi$

例题 1. 求解初值问题：$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \cos x \quad u_t(x,0) = 6 \end{cases}$

此时$\phi(x) = \cos x, \psi(x) = 6$ 故有公式：$u(x,t) = \frac{1}{2}[\cos(x+at) + \cos(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} 6d\xi$

$u(x,t) = \cos x \cos at + 6t$ （如果$u_t(x,0) = x^2$,则后项为$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \xi^2 d\xi$）

2. 求解初值问题：$\begin{cases} u_{tt}+4u_{xy}-5u_{yy}=0 \\ u(x,0)=5x^2 \quad u_t(x,0)=0 \end{cases}$

可以得到特征方程为$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4\frac{dy}{dx}-5=0$ 即特征线满足方程$\frac{dx}{dt}=-1,\frac{dx}{dt}=5$

有 $\begin{cases} 5x-y=c_1 \\ x+y=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi=5x-y \\ \eta=x+y \end{cases}$ 原方程化为$u_{\xi\eta}=0$ 通解为$u(x,y)=F(5x-y)+G(x+y)$

利用初始条件可得 $F(5x)+G(x)=5x,-F'(5x)+G'(x)=0$ 即 $-\frac{1}{5}F(5x)+G(x)=c$

故有$F(x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{6}c,\ G(x)=\frac{5}{6}x^2+\frac{5}{6}c$ 可得特解为$u(x,y)=\frac{1}{6}(5x-y)^2+\frac{5}{6}(x+y)^2=5x^2+y^2$

3. 求解有阻尼的波动方程初值问题$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}-2ku_t-k^2u \\ u(x,0)=\varphi(x) \quad u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$

泛定方程含有阻尼项，不能直接使用达朗贝尔公式。但可以**将阻尼作用表示为其解中一个随时间成指数衰减的因子**。即令$u(x,t)=e^{-\alpha t}v(x,t)$ $\alpha>0$为待定系数，于是有$u_t=e^{-\alpha t}(v_t-\alpha v)$，

$u_{tt}=e^{-\alpha t}(v_{tt}-2\alpha v_t+\alpha^2 v)$ $u_{xx}=e^{-\alpha t}v_{xx}$. 代入泛定方程得：

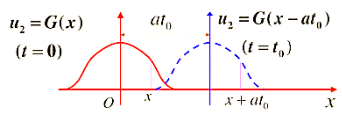
$v_{tt}=a^2v_{xx}-2(k-\alpha)v_t-(k^2-2k\alpha+\alpha^2)v$ 取$\alpha=k$，则原定解问题可以化为

$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx} \\ v(x,0)=\varphi(x) \quad v_t(x,0)=\frac{d}{dt}[e^{kt}u(x,t)]_{t=0}=k\varphi(x)+\psi(x) \end{cases}$

由公式可得 $v(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}[k\varphi(\xi)+\psi(\xi)]d\xi$

从而原问题得解为：$u(x,t)=\frac{1}{2e^{kt}}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2ae^{kt}}\int_{x-at}^{x+at}[k\varphi(\xi)+\psi(\xi)]d\xi$

3.1.2 波的传播-解的物理意义

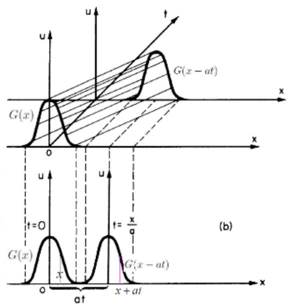


3.1.2.1 行波解

右行波 对于方程$u(x,t)=G(x-at)$ 当$t=0$时，呈现$G(x)$，当$t>0$时，x对应的质点向右移动的距离为$x+at$。立体的柱状曲面就是$G(x-at)$的表达式。

考察$G(x-at)$在位置$x+at$处的形状变化：任取x_0，有$G(x_0)$，任意时刻$t>0$，该位置移动距离为at，到达$x_1=x_0+at$处，考察该点对应值$G(x_0+at-at)=G(x_0)$ 表明时刻$t=t_0$的波形相对于初始时刻波形向右平移距离at_0。随着时间推移，<u>波形继续以速度a向右移动</u>，<u>**形状保持不变**</u>。

***a*为波移动的速度**。形如$u(x,t)=G(x-at)$的解所描述的弦振动规律称为**右行波**



左行波 类似的，形如$u(x,t)=F(x+at)$的解，保持波形$F(x)$以速度 a 向左移动，称为左行波

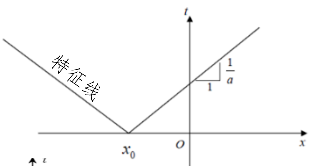
行波解 达朗贝尔解$\frac{1}{2}\phi(x\pm at)+\frac{1}{2a}\Psi(x\pm at)$的物理意义。这种构造解的方法称为行波法。

注意 行波法基于波动的特点，引入了坐标变换简化方程。

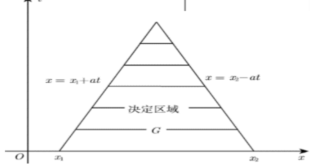
其易于理解，求解波动方程方便；但通解不易求，有局限性。

3.1.2.2 特征线与求解有关的区域

特征线 在$t-x$平面上，下列直线称为特征线 $t=-\frac{x}{a}+\frac{x_0}{a}$ 和 $t=\frac{x}{a}-\frac{x_0}{a}$ 在特征线上，u保持不变

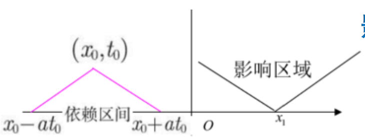


依赖区间 初值问题的解u在**点(x_0,t_0)的值**由函数ϕ在**点x_0-at和x_0+at的值**以及**函数ψ在区间$[x_0-at,x_0+at]$上的值**唯一确定。称区间$[x_0-at,x_0+at]$为点(x_0,t_0)的依赖区间



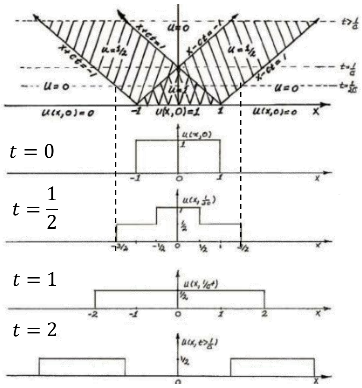
决定区域 在x轴上任取一区间$[x_1,x_2]$，过两点分别做直线$x=x_1+at,x=x_2-at$构成一个三角形区域 G。G 内任一点(x,t)的依赖区间都落在$[x_1,x_2]$内，所以$u(x,t)$在 G 内任一点(x,t)的值都完全由初值函数φ,ψ在区间$[x_1,x_2]$上的值来确定，与此区间外的数据无关。

在$[x_1,x_2]$上给定初值φ,ψ，就可以确定解在 G 内的值。



影响区域 影响区域里的$u(x,t)$都受到$u(x_1,0)$的影响

3.1.2.3 特征线在弱解计算方面的应用



弱解　　区别于解析解。如下式，其初始条件不光滑。

方波求解　　求解初值问题: $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(x,0)=\phi(x) \quad u_t(x,0)=0 \end{cases}$　　$\phi(x)=\begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$

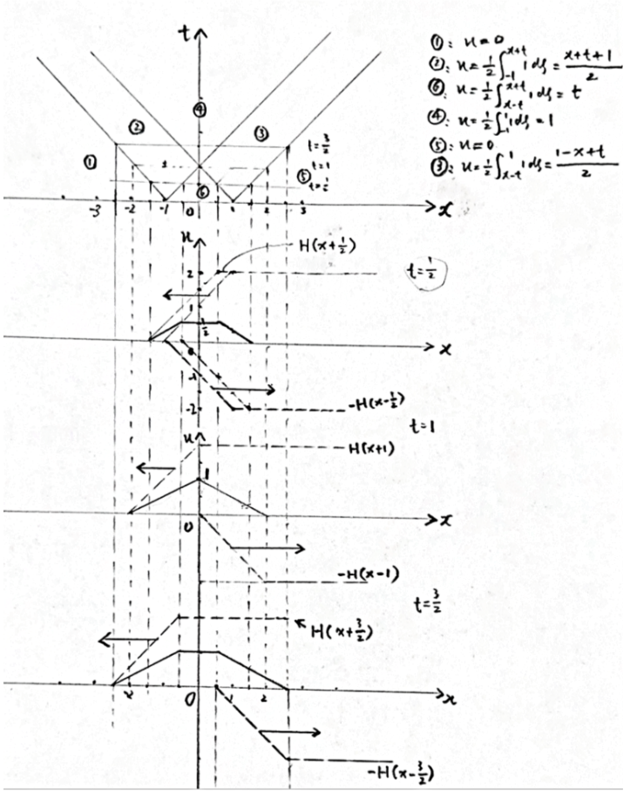
根据公式有$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]$　令$a_{波速}=1$计算可得

$t=\frac{1}{2}$时　$x_r-\frac{1}{2}=1\Rightarrow x_r=\frac{3}{2}$　　$x_R+\frac{1}{2}=1\Rightarrow x_R=\frac{1}{2}$　　$x_l-\frac{1}{2}=-1\Rightarrow x_l=-\frac{1}{2}$　　$x_L+\frac{1}{2}=-1\Rightarrow x_L=\frac{-3}{2}$

$t=1$时　$x_r-1=1\Rightarrow x_r=2$　$x_R+1=1\Rightarrow x_R=0$　　$x_l-1=-1\Rightarrow x_l=0$　　$x_L+1=-1\Rightarrow x_L=-2$

$t=2$时　$x_r-2=1\Rightarrow x_r=3$　$x_R+2=1\Rightarrow x_R=-1$　　$x_l-2=-1\Rightarrow x_l=1$　　$x_L+2=-1\Rightarrow x_L=-3$

初始速度　　**求解初值问题**: $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(x,0)=0 \quad u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$　　$\psi(x)=\begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$　　$a=1$



根据公式有$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$

$=\frac{1}{2}[H(x+at)-H(x-at)]$

其中 $H(x)=\int_{-\infty}^{x}\psi(\xi)d\xi=\begin{cases} 0 & x\le -1 \\ x+1 & -1<x\le 1 \\ 2 & x>1 \end{cases}$

① $u=\frac{1}{2a}\int 0d\xi=0$　　　　**求解各个区域**

② $u=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x+t}1d\xi=\frac{x+t+1}{2}$

③ $u=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{1}1d\xi=\frac{1-x+t}{2}$

④ $u=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}1d\xi=1$

⑤ $u=0$

⑥ $u=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}1d\xi=t$

3.1.3 带有强迫的无界弦振动初值问题

问题　　当弦受到**外力$f(x,t)$**作用而产生振动，有如下初值问题:

$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \\ u(x,0)=\phi(x) \quad u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$　使用**叠加原理$u=v+\omega$**分解:

$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx} \\ v(x,0)=\phi(x) \quad v_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$（达朗贝尔公式求解）　$\begin{cases} \omega_{tt}=a^2\omega_{xx}+f(x,t) \\ \omega(x,0)=0 \quad \omega_t(x,0)=0 \end{cases}$（齐次化原理）

冲量原理-齐次化原理-杜阿梅尔原理（Duhamel）

内容　　求解问题: $\begin{cases} \omega_{tt}=a^2\omega_{xx}+f(x,t) \\ \omega(x,0)=0 \quad \omega_t(x,0)=0 \end{cases}\Rightarrow \omega(x,t)=\int_0^t h(x,t;\tau)d\tau$　（τ是个参数）

其中$h(x,t;\tau)$满足$\begin{cases} \boldsymbol{h_{tt}=a^2h_{xx}}, & -\infty<x<+\infty, t>\tau \\ \boldsymbol{h_{t=\tau}=0} & \boldsymbol{h_{t,t=\tau}(x,\tau)=0} \end{cases}$　分别进行数学说明与物理说明

数学证明　牛顿-莱布尼兹公式：$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} g(s,x)\,ds\right)=\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{dg(s,x)}{dx}ds+g(b(x),x)b'(x)-g(a(x),x)a'(x)$

验证定解条件①：$\omega(x,t=0)=\int_0^{t=0}h(x,t;\tau)d\tau=0$　满足条件

验证定解条件②：$\Rightarrow \omega_t(x,t)=\int_0^t h(x,t;\tau)d\tau=\int_0^t h_t(x,t;\tau)d\tau+h(x,t;t)\times 1-h(x,t;0)\times 0$

$\Rightarrow \int_0^t h_t(x,t;\tau)d\tau$ $(t=\tau\text{时}h(x,t;t)=0)$ 满足条件

验证方程：$\Rightarrow \omega_{tt}(x,t)=(\omega_t)_t=\left(\int_0^t h_t(x,t;\tau)d\tau\right)_t=\int_0^t h_{tt}(x,t;\tau)d\tau+h_t(x,t;t=\tau)-h_t(x,t;0)\cdot 0$

$\Rightarrow \omega_{tt}(x,t)=\int_0^t h_{tt}(x,t;\tau)d\tau+f(x,\tau)=a^2\int_0^t h_{xx}(x,t;\tau)d\tau+f(x,\tau)$

$\Rightarrow a^2\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\int_0^t h(x,t;\tau)d\tau\right)+f(x,t)=a^2\omega_{xx}+f(x,t)$ 满足条件

物理说明　$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$ 单位质量的外力称其为**加速度**

$f(x,t)$作用在**区间$[0,t]$上**，将连续作用的区间**离散化**，考察$[\tau-\Delta\tau,\tau]$一小间隔。

$t=\tau$时刻的**位移和速度对$t>\tau$产生的弦的改变：**

当$t=\tau$时，$\frac{1}{2}f(x,\tau)\Delta\tau^2{}_{\text{位移}}\approx 0$　　$f(x,\tau)_{\text{加速度}}\Delta\tau_{\text{持续作用的时间段}}=$ **速度**

当$t>\tau$时，$h(x,t;\tau)\Delta\tau$ 引起的弦的改变。弦的改变和振动**符合波动方程** $\begin{cases}h_{tt}=a^2h_{xx}\\ h|_{t=\tau}=0,\ \ h_t|_{t=\tau}=f\end{cases}$

在$[0,t]$上连续累加：$\begin{cases}\omega(x,t)=\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=0}^{t}h(x,t;\tau)\Delta\tau\\ \quad\Rightarrow \omega(x,t)=\int_0^t h(x,t;\tau)d\tau\end{cases}$

求解问题　求解微分方程：$\omega(x,t)=\int_0^t h(x,t;\tau)d\tau$ 有定解条件：$\begin{cases}h_{tt}=a^2h_{xx}\\ h_{t=\tau}=0\quad h_{t,t=\tau}=f(x,\tau)\end{cases}$

变量变换：时间平移 令$t'=t-\tau$，　$h(x,t'+\tau;\tau)=\tilde{h}(x,t',\tau)$ $h_{tt}=\tilde{h}_{tt}=\left(\tilde{h}_{t'}\right)_t=\left(\tilde{h}_{t'}\right)_{t'}$

有$\begin{cases}\tilde{h}_{t't'}=a^2\tilde{h}_{xx}\\ \tilde{h}_{t'=0}=0\quad \tilde{h}_{t',t'=0}=f(x,\tau)\end{cases}$ 应用**达朗贝尔公式**

$\tilde{h}(x,t;\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-at'}^{x+at'}f(\xi,\tau)d\xi\overset{h=\tilde{h}}{=}\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$

$\omega(x,t)=\int_0^t h(x,t;\tau)d\tau=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau$

总解　问题：$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)\\ u(x,0)=\phi(x)\quad u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases}$

$$u(x,t)=v(x,t)+\omega(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau$$

由端点定义　**由端点连线定义**　**由决定区域定义**

称为**一维非齐次波动方程**的**基尔霍夫(Kirchhoff)公式**

注意　假设$\phi(x)$,$\psi(x)$和$f(x,t)$关于变量x**都是奇函数**，则**解**$u(x,t)$也为**关于x的奇函数**。对于**偶函数，周期 T 的函数**也成立。

例题

1. 求初值问题$\begin{cases}u_{tt}=4u_{xx}+2x\\ u(x,0)=0\quad u_t(x,0)=0\end{cases}$

则直接使用公式：$u(x,t)=\frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}2\xi d\xi\,d\tau=\frac{1}{4}\int_0^t\{[x+2(t-\tau)]^2-[x-2(t-\tau)]^2\}=xt^2$

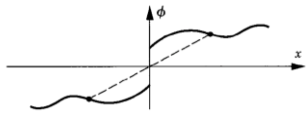
2. 求初值问题$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + e^x - e^{-x} \\ u(x,0) = x \quad u_t(x,0) = \sin x \end{cases}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(x + 2t + x - 2t) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \sin\xi \, d\xi + \frac{1}{4}\int_0^t \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} (e^\xi - e^{-\xi}) d\xi \, d\tau$$

$$u(x,t) = x + \frac{1}{2}\sin x \sin 2t - \frac{1}{2}\sin hx + \frac{1}{2}\sinh x \cosh 2t$$

3.1.4 半无界弦的振动和延拓法

问题提出 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x)_{初始位移} \quad u_t(x,0) = \psi(x)_{初始速度} \\ u(0,t) = 0_{端点固定(如果不是无界，则边界一定要有信息)} \end{cases}$



奇延拓

问题思路 **半无界问题$\xrightarrow{延拓法}$全无界问题**

实施过程 **奇延拓** $\Phi = \begin{cases} \phi(x) & x \ge 0 \\ -\phi(-x) & x < 0 \end{cases}$ $\Psi = \begin{cases} \psi(x) & x \ge 0 \\ -\psi(-x) & x < 0 \end{cases}$ $F = \begin{cases} f(x,t) & x \ge 0 \\ -f(-x,t) & x < 0 \end{cases}$

构成**新的弦振动问题** $\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx} + F(x,t) \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ U(x,0) = \Phi(x) \quad U_t(x,0) = \Psi(x) \end{cases}$

① 在$x \ge 0$部分，新函数与原函数完全一致，满足相同的方程与初始条件。

$$U(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x + at) + \Phi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau) d\xi \, d\tau$$

（需要使用已知函数ϕ, ψ, f来表示所求的解，需要根据黄色坐标对应确定函数）

② 在端点处，$u(0,t) = U(0,t) = 0$

$x \ge 0$部分 根据**特征线$(x - at)$**划分为**两部分**：

I 区域：**不受边界影响**：$\frac{1}{2}[\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi \, d\tau$