第四章 分离变量法

4.1 预备知识

4.1.1 函数内积

在区间$[a,b]$上定义**二个函数$f_1(x)$和$f_2(x)$**，则它们的**内积**定义为 $\langle f_1,f_2\rangle=\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$

4.1.2 正交函数

二个函数$f_1(x)$和$f_2(x)$在区间$[a,b]$上是**正交的**，则它们的**内积为 0**，即$\langle f_1,f_2\rangle=\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\ =0$

例如：$f(x)=x^2,f(x)=x^3$在$[-1,1]$上是正交的。

4.1.3 正交函数系

设有一族$[a,b]$上的函数，满足$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\begin{cases}=0 & m\neq n\\ \neq 0 & m=n\end{cases}\quad m,n=0,1,\ldots$

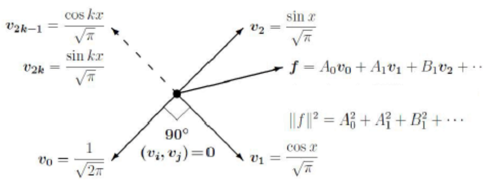
则称该函数系为定义域上的**正交函数系**，简称**正交系**，记为$\{\boldsymbol{\varphi_n}\}_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty}$ 或 $\{\boldsymbol{\varphi_n}\}$

重要性质：**线性无关**　　　例如：函数系 $1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots$为$[-l,l]$上的正交函数系。

4.1.4 范数

一个函数$f(x)$，若积分$\int_a^b f^2(x)dx$存在，则称f**平方可积**

将$\|\varphi\|_2=\left[\int_a^b \varphi^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$称为$\varphi$在$L^2([a,b])$中的**范数**。范数便是函数的度量。



正交函数系 每个箭头两两垂直

4.1.5 正交函数集的标准化

假设有正交函数系：$1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots$为$[-l,l]$上的正交函数系

令$l=\pi$，然后 $\frac{(\quad)}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(\quad)^2dx}}$，可得$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ldots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ldots$为上的$[-\pi,\pi]$**标准正交系**

正交系的一个重要性质就是**线性无关，两两正交**

4.1.6 函数的傅里叶级数展开

设$f(x)$是$2l$为周期的函数，在$[-l,l]$上满足 ①连续或只有有限个第一类间断点 ② 至多有有限个极值点

则有 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$　　其中$\begin{cases}a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots\\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots\end{cases}$

且当x是$f(x)$连续点时，级数收敛于$f(x)$ $\left(\text{或}\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]_{\text{不连续时}}\right)$

4.1.7 二阶线性齐次常微分方程的求解问题

问题　$y''+py'+qy=0$　　　令$y(x)=e^{rx}$，有$r^2+pr+q=0$，两个根为r_1,r_2

通解　① 相异实根 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

② 相等实根 $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$　　　根据参数变异法所求

③ 共轭复根 $\alpha\pm\beta i$　$y=e^{\alpha}x[C_1\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x)]$

4.2 波动方程初边值问题分离变量法求解

4.2.1 Fourier 方法

条件 物理上，机械振动或电磁振动可以看成是**多个简谐振动**（驻波）$e^{iw(t+cx)}=e^{iwt}e^{ikt}$，$k=cw$**的叠加**

数学上，驻波是只含变量x的函数与只含t的函数的乘积，即具有变量分离的形式

求解 由此受到启发，求解线性方程定解问题时，可**尝试**先求出齐次方程和齐次边界条件的具有**变量分离形式**的解，$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t), n=1,2,\cdots$，然后把它们**叠加起来**，即$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nX_n(x)T_n(t)$，最后利用初始条件**确定各项中的系数**，使其成为定解问题的解

4.2.1.1 分离变量法求解波动方程定解问题

问题

$$\begin{cases}\boldsymbol{u_{tt}=a^2u_{xx}}, & 0<x<l, t>0\\ u(x,0)=\phi(x), & u_t(x,0)=\psi(x)\\ \boldsymbol{u(0,t)=u(l,t)=0}\ _{\text{两端固定}}\end{cases}$$

分离变量 设问题有非零(非平凡)的**变量分离解** $\boldsymbol{u(x,t)}=X(x)T(t)$

由$u_{tt}=a^2u_{xx}$得：$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)\ \Rightarrow\ \dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda\ \Rightarrow \boldsymbol{X''(x)+\lambda X(x)=0}$

由$u(0,t)=u(l,t)=0$得：$\boldsymbol{X(0)=X(l)=0}$，$\begin{matrix}X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l\\ T''(t)+\lambda a^2T(t)=0, t>0\end{matrix}$ **特征值问题**

特征值问题 $\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$

① **当$\lambda<0$时** $\left.\begin{matrix}X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}\\ X(0)=X(l)=0\text{ 代入上式}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l}\end{vmatrix}\neq 0} C_1=C_2=0\Rightarrow X(x)\equiv 0$

因此，$\boldsymbol{\lambda<0}$ **不是特征值**

② **当$\lambda=0$时** $\left.\begin{matrix}X(x)=C_1x+C_2\\ X(0)=X(l)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow X(x)\equiv 0$ 因此，$\boldsymbol{\lambda=0}$ **不是特征值**

③ **当$\lambda>0$时** $\left.\begin{matrix}X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x\\ X(0)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow C_1=0\Rightarrow \begin{matrix}X(x)=C_2\sin\sqrt{\lambda}x\\ X(l)=0\end{matrix}\Rightarrow \begin{matrix}0=C_2\sin(\sqrt{\lambda}l)\\ X(l)=0\end{matrix}$

$$\Rightarrow\sqrt{\lambda}l=n\pi\ \Rightarrow\ \begin{matrix}\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2>0\\ X_n(x)=C_2\sin\frac{n\pi x}{l}\end{matrix}\qquad n=1,2,\cdots\ \ C_2\text{可视为}1$$

其他方程 求解其他常微分方程，得到特解$u_n(x,t)$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0\overset{\lambda=\lambda_n}{=\!=}T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\,(n=1,2,\cdots)\overset{u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)}{=\!=}$$

$$u_n(x,t)=\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, n=1,2,3,\ldots\quad \text{其中,}a_n=C_2A_n,\ \ b_n=C_2B_n$$

特解叠加 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$

将n从结果中去除 且要确保该级数收敛于$u(x,t)$，结果与n无关

系数确定 确定a_n,b_n的值。利用初始条件$u(x,0)=\phi(x)$，$u_t(x,0)=\psi(x)$，得到：

$$\begin{cases}\phi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\\ \psi(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\end{cases}\overset{\text{傅里叶正弦级数展开}}{=\!=}\begin{cases}a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\ b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\end{cases}\quad n=1,2,\ldots$$

4.2.1.2 解的物理意义

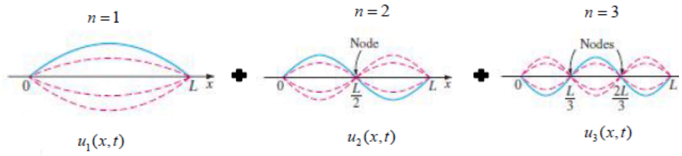
驻波 $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t)+\cdots$

$$u_n(x,t)=\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t+\alpha_n\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$u_n(x,t)=N_n\cos(\omega_n t+\alpha_n)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中，**强度**$N_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，**圆频率**$\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$，**初相** $\sin\alpha_n=-\frac{b_n}{N_n}$，$\cos\alpha_n=\frac{a_n}{N_n}$

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=$



$+\cdots$

基频 $\frac{\pi a}{l}$ 其他频率是它的整数倍

该方程求解方法也叫做驻波法。