第三章 波动方程的初值问题与行波法

3.1 一维波动方程的初值问题

3.1.1 无界弦无强迫振动的初值问题

问题描述 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \phi(x)_{初始位移} \quad u_t(x,0) = \psi(x)_{初始速度} \end{cases}$ $a = \sqrt{\frac{\rho}{T}}$

在弦的微小振动中，研究其中**一小段**，那么在不太长的时间里，两端的影响都来不及传到，可以认为两端都不存在，弦是**无限长**的。弦的振动是**自由振动**（无外力强迫）。

大气的运动形式就是以波动的形式进行的。

求解思路 **从通解到特解**

泛定方程的通解计算 由泛定方程$u_{tt} = a^2 u_{xx}$可得其**特征方程**为$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0$，**特征线**满足$\frac{dx}{dt} = \pm a$

特征线为$\begin{cases} x + at = c_1 \\ x - at = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$ 可以得到**标准型**：$u_{\xi\eta} = 0$

两边依次关于ξ,η积分，可得通解：$u(\xi,\eta) = \int f(\xi)d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta)$

代回原变量，得**泛定方程通解** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)}$

定解问题得特解——达朗贝尔公式

推导 利用**初始条件**来确定通解中的任意函数F和G：$\begin{cases} u(x,0) = F(x) + G(x) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = a[F'(x) - G'(x)] = \psi(x) \end{cases}$

将导数移去：$\frac{1}{a}\psi(x) = F'(x) - G'(x)$ 在x轴上，**任取一个点$\boldsymbol{x_0}$,再取一个$\boldsymbol{x}$**,在区间$[x_0, x]$上积分,则

$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{a}\psi(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x} F'(\xi)d\xi - \int_{x_0}^{x} G'(\xi)d\xi$ ξ为任取的一个变量（避免与积分上限 x 重复）

$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{a}\psi(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x} dF(\xi) - \int_{x_0}^{x} dG(\xi) = F(x) - G(x) - c$ $\Rightarrow$ $F(x) - G(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi + c$

再**融合第一个关系** $F(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi + \frac{c}{2}$ $G(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi - \frac{c}{2}$

特解 $\boldsymbol{u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)]} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi$ 称其为**达朗贝尔公式**

位移贡献项 **速度贡献项** 并称其为无界弦的自由振动问题的达朗贝尔解

行波法 **使用条件**：双曲型方程

特征方程与特征根：$\lambda^2 - a^2 = 0 \to \lambda = \pm a$

变量替换：$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$ **解方程**：$u_{\xi\eta} = 0 \to u = F(x+at) + G(x-at)$

利用初始条件解F,G： $u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi$

例题 1. 求解初值问题：$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \cos x \quad u_t(x,0) = 6 \end{cases}$

此时$\phi(x) = \cos x, \psi(x) = 6$ 故有公式：$u(x,t) = \frac{1}{2}[\cos(x+at) + \cos(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} 6d\xi$

$u(x,t) = \cos x \cos at + 6t$ （如果$u_t(x,0) = x^2$,则后项为$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \xi^2 d\xi$）

2. 求解初值问题：$\begin{cases} u_{tt}+4u_{xy}-5u_{yy}=0 \\ u(x,0)=5x^2 \quad u_t(x,0)=0 \end{cases}$

可以得到特征方程为$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4\frac{dy}{dx}-5=0$　即特征线满足方程$\frac{dx}{dt}=-1,\frac{dx}{dt}=5$

有 $\begin{cases} 5x-y=c_1 \\ x+y=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi=5x-y \\ \eta=x+y \end{cases}$ 原方程化为$u_{\xi\eta}=0$ 通解为$u(x,y)=F(5x-y)+G(x+y)$

利用初始条件可得 $F(5x)+G(x)=5x,-F'(5x)+G'(x)=0$　　即 $-\frac{1}{5}F(5x)+G(x)=c$

故有$F(x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{6}c,\ G(x)=\frac{5}{6}x^2+\frac{5}{6}c$　　可得特解为$u(x,y)=\frac{1}{6}(5x-y)^2+\frac{5}{6}(x+y)^2=5x^2+y^2$

3. 求解有阻尼的波动方程初值问题$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}-2ku_t-k^2u \\ u(x,0)=\varphi(x) \quad u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$

泛定方程含有阻尼项，不能直接使用达朗贝尔公式。但可以**将阻尼作用表示为其解中一个随时间成指数衰减的因子**。即令$u(x,t)=e^{-\alpha t}v(x,t)$ $\alpha>0$为待定系数，于是有$u_t=e^{-\alpha t}(v_t-\alpha v)$，

$u_{tt}=e^{-\alpha t}(v_{tt}-2\alpha v_t+\alpha^2 v)$　　$u_{xx}=e^{-\alpha t}v_{xx}$. 代入泛定方程得：

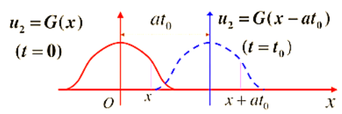
$v_{tt}=a^2v_{xx}-2(k-\alpha)v_t-(k^2-2k\alpha+\alpha^2)v$　　取$\alpha=k$，则原定解问题可以化为

$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx} \\ v(x,0)=\varphi(x) \quad v_t(x,0)=\frac{d}{dt}[e^{kt}u(x,t)]_{t=0}=k\varphi(x)+\psi(x) \end{cases}$

由公式可得 $v(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}[k\varphi(\xi)+\psi(\xi)]d\xi$

从而原问题得解为：$u(x,t)=\frac{1}{2e^{kt}}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2ae^{kt}}\int_{x-at}^{x+at}[k\varphi(\xi)+\psi(\xi)]d\xi$

3.1.2 波的传播-解的物理意义

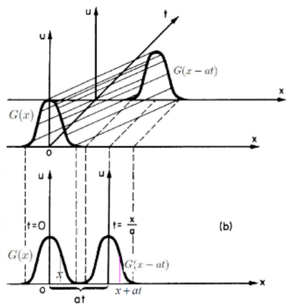


3.1.2.1 行波解

右行波　对于方程$u(x,t)=G(x-at)$ 当$t=0$时，呈现$G(x)$，当$t>0$时，x对应的质点向右移动的距离为$x+at$。立体的柱状曲面就是$G(x-at)$的表达式。

考察$G(x-at)$在位置$x+at$处的形状变化：任取x_0，有$G(x_0)$，任意时刻$t>0$，该位置移动距离为at，到达$x_1=x_0+at$处，考察该点对应值$G(x_0+at-at)=G(x_0)$ 表明时刻$t=t_0$的波形相对于初始时刻波形向右平移距离at_0。随着时间推移，波形继续以速度a向右移动，**形状保持不变**。

a为波移动的速度。形如$u(x,t)=G(x-at)$的解所描述的弦振动规律称为**右行波**



左行波　类似的，形如$u(x,t)=F(x+at)$的解，保持波形$F(x)$以速度 a 向左移动，称为左行波

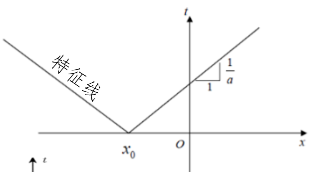
行波解　达朗贝尔解$\frac{1}{2}\phi(x\pm at)+\frac{1}{2a}\Psi(x\pm at)$的物理意义。这种构造解的方法称为行波法。

注意　行波法基于波动的特点，引入了坐标变换简化方程。

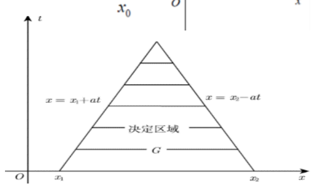
其易于理解，求解波动方程方便；但通解不易求，有局限性。

3.1.2.2 特征线与求解有关的区域

特征线　在$t-x$平面上，下列直线称为特征线 $t=-\frac{x}{a}+\frac{x_0}{a}$ 和 $t=\frac{x}{a}-\frac{x_0}{a}$　　在特征线上，u保持不变

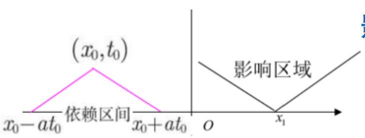


依赖区间　初值问题的解u在**点(x_0,t_0)的值**由函数ϕ在**点x_0-at和x_0+at的值**以及**函数ψ在区间$[x_0-at,x_0+at]$上的值**唯一确定。称区间$[x_0-at,x_0+at]$为点(x_0,t_0)的依赖区间

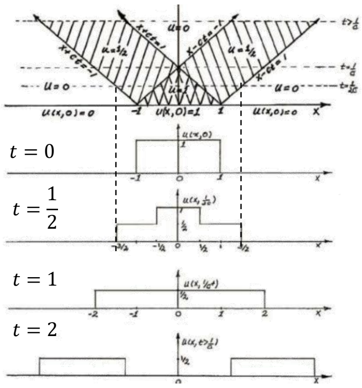


决定区域　在x轴上任取一区间$[x_1,x_2]$，过两点分别做直线$x=x_1+at,x=x_2-at$构成一个三角形区域 G。G 内任一点(x,t)的依赖区间都落在$[x_1,x_2]$内，所以$u(x,t)$在 G 内任一点(x,t)的值都完全由初值函数φ,ψ在区间$[x_1,x_2]$上的值来确定，与此区间外的数据无关。

在$[x_1,x_2]$上给定初值φ,ψ，就可以确定解在 G 内的值。



影响区域　影响区域里的$u(x,t)$都受到$u(x_1,0)$的影响



3.1.2.3 特征线在弱解计算方面的应用

弱解　　区别于解析解。如下式，其初始条件不光滑。

方波求解　　求解初值问题：$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(x,0)=\phi(x) \quad u_t(x,0)=0 \end{cases}$　　$\phi(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1\end{cases}$

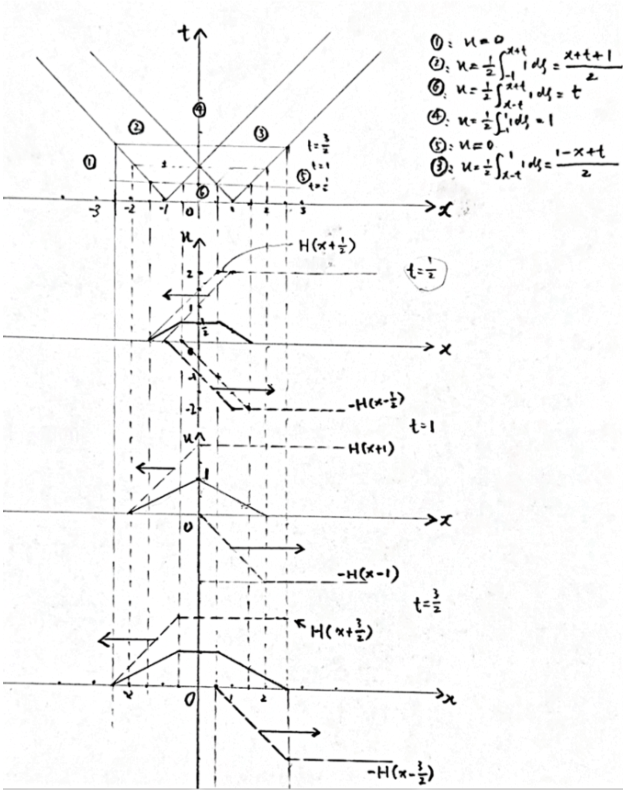
根据公式有$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]$　令$a_{\text{波速}}=1$计算可得

$t=\frac{1}{2}$时　$x_r-\frac{1}{2}=1\Rightarrow x_r=\frac{3}{2}$　　$x_R+\frac{1}{2}=1\Rightarrow x_R=\frac{1}{2}$　　$x_l-\frac{1}{2}=-1\Rightarrow x_l=-\frac{1}{2}$　　$x_L+\frac{1}{2}=-1\Rightarrow x_L=\frac{-3}{2}$

$t=1$时　$x_r-1=1\Rightarrow x_r=2$　$x_R+1=1\Rightarrow x_R=0$　　$x_l-1=-1\Rightarrow x_l=0$　　$x_L+1=-1\Rightarrow x_L=-2$

$t=2$时　$x_r-2=1\Rightarrow x_r=3$　$x_R+2=1\Rightarrow x_R=-1$　　$x_l-2=-1\Rightarrow x_l=1$　　$x_L+2=-1\Rightarrow x_L=-3$

初始速度　　**求解初值问题**：$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(x,0)=0 \quad u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$　　$\psi(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1\end{cases}$　　$a=1$



根据公式有$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$

$=\frac{1}{2}[H(x+at)-H(x-at)]$

其中 $H(x)=\int_{-\infty}^{x}\psi(\xi)d\xi=\begin{cases}0 & x\le -1 \\ x+1 & -1<x\le 1 \\ 2 & x>1\end{cases}$

① $u=\frac{1}{2a}\int 0d\xi=0$　　　　　**求解各个区域**

② $u=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x+t}1d\xi=\frac{x+t+1}{2}$

③ $u=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{1}1d\xi=\frac{1-x+t}{2}$

④ $u=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}1d\xi=1$

⑤ $u=0$

⑥ $u=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}1d\xi=t$

3.1.3 带有强迫的无界弦振动初值问题

问题　　当弦受到**外力$f(x,t)$**作用而产生振动，有如下初值问题：

$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \\ u(x,0)=\phi(x) \quad u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$　使用**叠加原理$u=v+\omega$**分解：

$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx} \\ v(x,0)=\phi(x) \quad v_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$（达朗贝尔公式求解）　　$\begin{cases} \omega_{tt}=a^2\omega_{xx}+f(x,t) \\ \omega(x,0)=0 \quad \omega_t(x,0)=0 \end{cases}$（齐次化原理）

冲量原理-齐次化原理-杜阿梅尔原理（Duhamel）

内容　　求解问题：$\begin{cases} \omega_{tt}=a^2\omega_{xx}+f(x,t) \\ \omega(x,0)=0 \quad \omega_t(x,0)=0 \end{cases}\Rightarrow \omega(x,t)=\int_0^t h(x,t;\tau)d\tau$　（τ是个参数）

其中$h(x,t;\tau)$满足$\begin{cases} \boldsymbol{h_{tt}=a^2h_{xx}} \quad ,-\infty<x<+\infty, t>\tau \\ \boldsymbol{h_{t=\tau}=0 \quad h_{t,t=\tau}(x,\tau)=0} \end{cases}$　分别进行数学说明与物理说明

数学证明　**牛顿-莱布尼兹公式**：$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} g(s,x)\, ds\right) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{dg(s,x)}{dx} ds + g(b(x),x)b'(x) - g(a(x),x)a'(x)$

验证定解条件①：$\omega(x,t=0) = \int_0^{t=0} h(x,t;\tau)d\tau = 0$　满足条件

验证定解条件②：$\Rightarrow \omega_t(x,t) = \int_0^t h(x,t;\tau)d\tau = \int_0^t h_t(x,t;\tau)d\tau + h(x,t;t)\times 1 - h(x,t;0)\times 0$

$\Rightarrow \int_0^t h_t(x,t;\tau)d\tau$ （$t=\tau$时$h(x,t;t)=0$）满足条件

验证方程：$\Rightarrow \omega_{tt}(x,t) = (\omega_t)_t = \left(\int_0^t h_t(x,t;\tau)d\tau\right)_t = \int_0^t h_{tt}(x,t;\tau)d\tau + h_t(x,t;t=\tau) - h_t(x,t;0)\cdot 0$

$\Rightarrow \omega_{tt}(x,t) = \int_0^t h_{tt}(x,t;\tau)d\tau + f(x,\tau) = a^2\int_0^t h_{xx}(x,t;\tau)d\tau + f(x,\tau)$

$\Rightarrow a^2\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\int_0^t h(x,t;\tau)d\tau\right) + f(x,t) = a^2\omega_{xx} + f(x,t)$　满足条件

物理说明　$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t)$　单位质量的外力称其为**加速度**

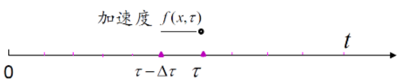
$f(x,t)$作用在**区间$[0,t]$上**，将连续作用的区间**离散化**，考察$[\tau-\Delta\tau,\tau]$一小间隔。

$t=\tau$时刻的**位移和速度**对$t>\tau$**产生的弦的改变：**

当$\boldsymbol{t=\tau}$时，$\boldsymbol{\frac{1}{2}f(x,\tau)\Delta\tau^2}_{\text{位移}} \approx \boldsymbol{0}$　　$\boldsymbol{f(x,\tau)}_{\text{加速度}}\boldsymbol{\Delta\tau}_{\text{持续作用的时间段}} = $ **速度**

当$\boldsymbol{t>\tau}$时，$\boldsymbol{h(x,t;\tau)\Delta\tau}$ 引起的弦的改变。弦的改变和振动**符合波动方程** $\begin{cases} h_{tt} = a^2h_{xx} \\ h|_{t=\tau} = 0,\ \ h_t|_{t=\tau} = f \end{cases}$

在$[\boldsymbol{0,t}]$上连续累加：$\begin{cases} \omega(x,t) = \lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\sum_{\tau=0}^{t} h(x,t;\tau)\Delta\tau \\ \quad\Rightarrow \omega(x,t) = \int_0^t h(x,t;\tau)d\tau \end{cases}$



求解问题　求解微分方程：$\omega(x,t) = \int_0^t h(x,t;\tau)d\tau$　有定解条件：$\begin{cases} h_{tt} = a^2h_{xx} \\ h_{t=\tau} = 0 \quad h_{t,t=\tau} = f(x,\tau) \end{cases}$

变量变换：时间平移　令$t' = t-\tau$，　$h(x,t'+\tau;\tau) = \tilde{h}(x,t',\tau)$　$h_{tt} = \tilde{h}_{tt} = \left(\tilde{h}_{t'}\right)_t = \left(\tilde{h}_{t'}\right)_{t'}$

有$\begin{cases} \tilde{h}_{t't'} = a^2\tilde{h}_{xx} \\ \tilde{h}_{t'=0} = 0 \quad \tilde{h}_{t',t'=0} = f(x,\tau) \end{cases}$　应用**达朗贝尔公式**

$\tilde{h}(x,t;\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-at'}^{x+at'} f(\xi,\tau)d\xi \overset{h=\tilde{h}}{=} \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$

$\omega(x,t) = \int_0^t h(x,t;\tau)d\tau = \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\, d\tau$

总解　问题：$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + \boldsymbol{f(x,t)} \\ \boldsymbol{u(x,0) = \phi(x)} \quad \boldsymbol{u_t(x,0) = \psi(x)} \end{cases}$

$$\boldsymbol{u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]}_{\text{由端点定义}} + \underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi}_{\text{由端点连线定义}} + \underbrace{\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\, d\tau}_{\text{由决定区域定义}}}$$

称为**一维非齐次波动方程**的**基尔霍夫(Kirchhoff)公式**

注意　假设$\boldsymbol{\phi(x)},\boldsymbol{\psi(x)}$和$\boldsymbol{f(x,t)}$关于变量$\boldsymbol{x}$**都是奇函数**，则**解**$\boldsymbol{u(x,t)}$也为**关于$x$的奇函数**。对于**偶函数，周期 T 的函数**也成立。

例题

1. 求初值问题$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 2x \\ u(x,0) = 0 \quad u_t(x,0) = 0 \end{cases}$

则直接使用公式：$u(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} 2\xi d\xi\, d\tau = \frac{1}{4}\int_0^t\{[x+2(t-\tau)]^2 - [x-2(t-\tau)]^2\} = xt^2$

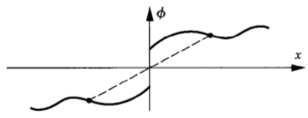
2. 求初值问题$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + e^x - e^{-x} \\ u(x,0) = x \quad u_t(x,0) = \sin x \end{cases}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(x + 2t + x - 2t) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \sin\xi \, d\xi + \frac{1}{4}\int_0^t \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} (e^{\xi} - e^{-\xi}) d\xi \, d\tau$$

$$u(x,t) = x + \frac{1}{2}\sin x \sin 2t - \frac{1}{2}\sin hx + \frac{1}{2}\sinh x \cosh 2t$$

3.1.4 半无界弦的振动和延拓法

问题提出 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x)_{\text{初始位移}} \quad u_t(x,0) = \psi(x)_{\text{初始速度}} \\ u(0,t) = 0_{\text{端点固定(如果不是无界，则边界一定要有信息)}} \end{cases}$



奇延拓

问题思路 **半无界问题**$\xrightarrow{\text{延拓法}}$**全无界问题**

实施过程 **奇延拓** $\Phi = \begin{cases} \phi(x) & x \geq 0 \\ -\phi(-x) & x < 0 \end{cases}$ $\Psi = \begin{cases} \psi(x) & x \geq 0 \\ -\psi(-x) & x < 0 \end{cases}$ $F = \begin{cases} f(x,t) & x \geq 0 \\ -f(-x,t) & x < 0 \end{cases}$

构成**新的弦振动问题** $\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx} + F(x,t) \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ U(x,0) = \Phi(x) \quad U_t(x,0) = \Psi(x) \end{cases}$

① 在$x \geq 0$部分，新函数与原函数完全一致，满足相同的方程与初始条件。

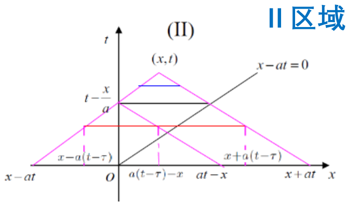
$$U(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x + at) + \Phi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau) d\xi \, d\tau$$

（需要使用已知函数ϕ, ψ, f来表示所求的解，需要根据黄色坐标对应确定函数）

② 在端点处，$u(0,t) = U(0,t) = 0$

$x \geq 0$部分 根据**特征线$(x - at)$**划分为**两部分**:

Ⅰ区域: **不受边界影响**: $\frac{1}{2}[\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi \, d\tau$

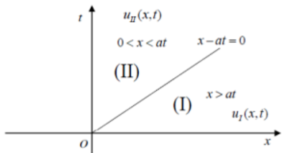


Ⅱ区域: 依赖区间为$[at - x, x + at]$

$$u(x,t) = U(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x + at) - \phi(at - x)] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi +$$

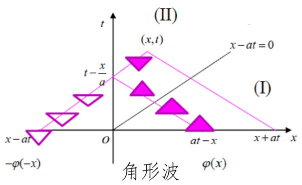
$$\frac{1}{2a}\left[\int_0^{t-\frac{x}{a}} \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi \, d\tau + \int_{t-\frac{x}{a}}^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi \, d\tau\right]$$

最终的答案是一个**分段函数**



区域划分

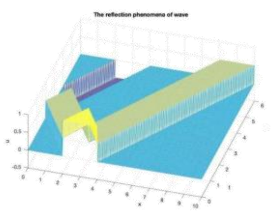
例题 1. 求解如下问题: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$



角形波

当$x > at$时，有$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x + at) + \phi(x - at)]$

当$0 < x < at$时，有$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x - at) - \boldsymbol{\phi(at - x)}_{\text{反射波}}]$



方波

反射前后相差一个负号

2. 对于$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$ 求点(2,1)和(1,2)两点的依赖区间。

有特征线$x - at$，则判断(2,1)在Ⅰ区域内，则为$(x - at, x + at)$

判断(1,2)在Ⅱ区域内，则有$(at - x, x + at)$

3. 求解定解问题$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+\frac{1}{2}(x-t) & 0<x<+\infty,\quad t>0 \\ u(x,0)=\sin x \quad u_t(x,0)=1-\cos x \\ u(0,t)=0 \end{cases}$

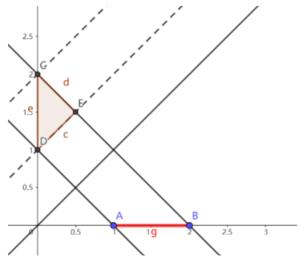
把$\phi(x)=\sin x$，$\psi(x)=1-\cos x$，$f(x,t)=\frac{1}{2}(x-t)$关于x奇延拓到$(-\infty,0)$

则有 $\Phi(x)=\sin x\ ,-\infty<x<+\infty$ $\quad\Psi(x)=\begin{cases}1-\cos x\ ,x\geq 0\\ -(1-\cos x)\ ,x<0\end{cases}$ $\quad F(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-t)\ ,x\geq 0,t>0\\ -\frac{1}{2}(-x-t),x<0,t>0\end{cases}$

得到新定解问题的解：$U(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi\, d\tau$

得到$u(x,t)=\begin{cases}x-at\geq 0,x>0 & u(x,t)=\sin x\cos at+t-\frac{1}{a}\sin at\cos x+\frac{xt^2}{4}-\frac{t^3}{12}\\ x-at<0,x>0 & u(x,t)=\left(1-\frac{1}{a}\right)\sin x\cos at+\frac{x}{a}-\frac{1}{12a^3}(x^3-3ax^2t-3a^3xt^2+3a^2xt^2)\end{cases}$

4. $\begin{cases}u_{tt}=u_{xx} & 0<x<+\infty,\quad t>0\\ u(x,0)=\phi(x) & u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=0\end{cases}$ $\qquad$ 其中$\phi(x)=\begin{cases}1 & 1<x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$



右图棕色区域内相互作用，$u=0$ （右行翻转，相互抵消）

斜上方区域为$\frac{1}{2}$

3.2 三维波动方程的初值问题-球面平均值方法

3.2.1 球对称解

问题描述 $\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,t>0\\ u|_{t=0}=\phi(x,y,z)\quad u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z) & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\end{cases}$

球坐标系 $\begin{cases}x=r\,sin\theta\cos\varphi\\ y=r\,sin\theta\sin\varphi\\ z=r\,cos\theta\end{cases}$

坐标转换 $u_{tt}=a^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]$ **假设**$u=u(r,\theta,\varphi,t)$ **与$\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\varphi}$无关,仅与$\boldsymbol{r}$有关**

$\Rightarrow u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)\quad r>0,t>0\quad\Rightarrow \boldsymbol{(ru)_{tt}=a^2(ru)_{rr}}$ **球对称**

通解 $u=\frac{F(r+at)-F(r-at)}{r}\quad ,r>0,t>0$

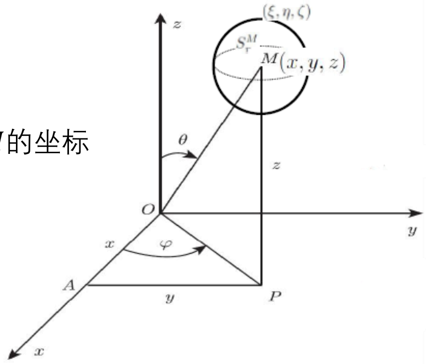
收敛波：$F(r+at)$表示沿着r负方向传播的行波 **发散波**：$F(r-at)$表示沿着r正方向传播的行波

$\begin{cases}\boldsymbol{(ru)_{tt}=a^2(ru)_{rr}}\\ ru(r,0)|_{t=0}=r\phi(r)\quad ru_t(r,0)=r\psi(r)\\ ru(0,t)=0 \text{ 确定为零}\end{cases}$

$u(r,t)=\begin{cases}\frac{1}{2r}[(r+at)\phi(r+at)+(r-at)\phi(r-at)]+\frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi & r-at\geq 0\\ \frac{1}{2r}[(r+at)\phi(r+at)-(r-at)\phi(r-at)]+\frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi & r-at<0\end{cases}$

3.2.2 球面平均值方法

表述　围绕一特定点取球面，围绕球取平均值后，与$\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\varphi}$无关



$$\begin{cases}\xi = x + r\sin\theta\cos\varphi \\ \eta = y + r\sin\theta\sin\varphi \\ \zeta = z + r\cos\theta\end{cases} \quad r\ge 0,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$$ 该处的(x,y,z)是M的坐标

$$\bar{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2_{\text{球面面积}}}\oiint_{S_r^M} u(\xi,\eta,\zeta,t)dS_{\text{球面上任意点的值之和}} = \frac{1}{4\pi}\oiint_{S_{\text{半径单位 1}}} u d\omega$$

$dS = r^2 d\omega = r^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$　**球面平均值与半径相关，与球心无关**

均值与特定点的关系：$u(x,y,z,t) = \bar{u}(0,t) = \lim\limits_{r\to 0}\bar{u}(r,t)$

满足方程　$\boldsymbol{[r\bar{u}(r,t)]_{tt} = a^2[r\bar{u}(r,t)]_{rr}}$　即为球对称解的关系式

证明　三维波动问题：$u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$　　B_r^M表示中心为M，半径为r的球域

在初始问题上做体积分：$\iiint_{B_r^M} u_{tt}dxdydz = a^2\iiint_{B_r^M}\left[(u_x)_x + (u_y)_y + (u_z)_z\right]dxdydz$

左侧：把时间与空间交换 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint_{B_r^M} udv = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \oiint_{S^M_{\rho_{\text{小球面半径}}}} udS_{\text{球面积分}}\, d\rho_{\text{所有半径积分之和}}$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \oiint_{S_1} u\rho^2 d\omega_{\text{这就是}ds}\, d\rho = 4\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \rho^2\bar{u}(\rho,t)\,d\rho$$

右侧：高斯散度定理 $\iiint_V \nabla\cdot\vec{A} = \oiint_\sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds$　　$\iiint_{B_r^m}\Delta u dV = \iiint_{B_r^M}\nabla\cdot\nabla u\,dV = \iint_{S_r^M}\nabla u\cdot\vec{n}dS$

$$= \iint_{S_r^M}\frac{\partial u}{\partial n}dS = \oiint_{S_r^M}(u_x,u_y,u_z)\cdot\vec{n}dS = \oiint_{S_1}\frac{\partial u}{\partial r}r^2 d\omega = 4\pi a^2 r^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}$$

两式相同：$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \rho^2\bar{u}(\rho,t)\,d\rho = 4\pi a^2 r^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}$　两端**关于$\boldsymbol{r}$求导**：$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r^2\bar{u}) = a^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)$

导出关系：$\frac{\partial^2(r\bar{u})}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2(r\bar{u})}{\partial r^2}$　则得证。

通解　方程有 $r\bar{u}(r,t) = F(r+at) + G(r-at)$　行波解

两边分别关于 r 和 t 求导

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(r\bar{u})}{\partial r} = r\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial r} + \bar{u}(r,t) = F'(r+at) + G'(r-at) \\ \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial(r\bar{u})}{\partial t} = F'(r+at) - G'(r-at)\end{cases}$$

做加法：$\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial t} = r\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right) + \bar{u}(r,t) = 2F'(r+at)$

① $r\to 0$　　$u(x,y,z,t) = \bar{u}(0,t) = 2F'(at)$

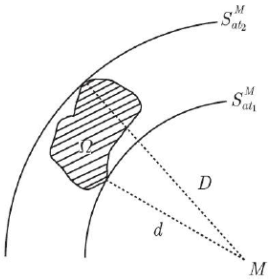
② $t\to 0$　　$2F'(r) = \left[\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial(r\bar{u})}{\partial t}\right]\Big|_{t=0} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{S_r^M} udS\right) + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{S_r^M} udS\right)\right]_{t=0}$

$$= \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\oiint_{S_r^M}\frac{u}{r}dS + \frac{1}{4a\pi}\oiint_{S_r^M}\frac{u_t}{r}dS\right)_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\oiint_{S_r^M}\frac{\phi}{r}dS + \frac{1}{4a\pi}\oiint_{S_r^M}\frac{\psi}{r}dS$$

泊松公式：　$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\oiint_{S_{at}^M}\frac{\phi(\xi,\eta,\zeta)}{t}dS + \frac{1}{4\pi a^2}\oiint_{S_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}dS$

其中，S_{at}^M表示以$M(x,y,z)$为中心，以at为半径的球面。

3.2.3 惠更斯原理



方程通解：$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\oiint_{S_{at}^M}\frac{\phi(\xi,\eta,\zeta)}{t}dS+\frac{1}{4\pi a^2}\oiint_{S_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}dS$

三维空间中有扰动区域Ω，由ϕ,ψ定义，空间中有一个位置$M(x,y,z)$

考察ϕ,ψ，当$t>0$，如何影响位置M上u的取值

扰动区域与 M 点有最近距离$S_{at_1}^M$和最远距离$S_{at_2}^M$。

① **当$at<d$，即$t<\frac{d}{a}$ 时**，S_{at}^M与Ω不相交，S_{at}^M上的初始函数ϕ,ψ为零，故$u(M,t)=0$

扰动前锋尚未达到 M 处。

② **当$d\le at\le D$，即$\frac{d}{a}\le t\le\frac{D}{a}$ 时**，S_{at}^M与Ω相交，S_{at}^M上的初始函数不为零

一般$u\neq 0$，表明扰动正在经过 M 点

③ **当$at>D$，即$t>\frac{D}{a}$ 时**，S_{at}^M与Ω再次不相交，故$u(M,t)=0$

扰动阵尾已经传过 M 点，M 点又恢复到静止状态。

说明了球面波的**无后效现象**。