第四章 分离变量法

4.1 预备知识

4.1.1 函数内积

在区间$[a,b]$上定义**二个函数$f_1(x)$和$f_2(x)$**，则它们的**内积**定义为 $\langle f_1,f_2\rangle=\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$

4.1.2 正交函数

二个函数$f_1(x)$和$f_2(x)$在区间$[a,b]$上是**正交的**，则它们的**内积为 0**，即$\langle f_1,f_2\rangle=\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\ =0$

例如：$f(x)=x^2, f(x)=x^3$在$[-1,1]$上是正交的。

4.1.3 正交函数系

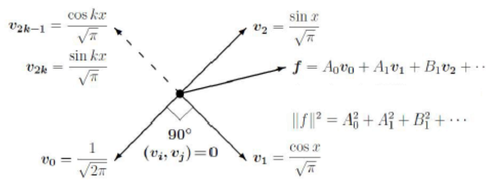
设有一族$[a,b]$上的函数，满足$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx\ \begin{cases}=0 & m\neq n\\ \neq 0 & m=n\end{cases}\quad m,n=0,1,\ldots$

则称该函数系为定义域上的**正交函数系**，简称**正交系**，记为$\{\boldsymbol{\varphi_n}\}_{n=0}^{\infty}$ 或 $\{\boldsymbol{\varphi_n}\}$

重要性质：**线性无关**　　　例如：函数系 $1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots$为$[-l,l]$上的正交函数系。

4.1.4 范数

一个函数$f(x)$，若积分$\int_a^b f^2(x)dx$存在，则称f**平方可积**



正交函数系 每个箭头两两垂直

将$\|\varphi\|_2=\left[\int_a^b \varphi^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$称为$\varphi$在$L^2([a,b])$中的**范数**。范数便是函数的度量。

4.1.5 正交函数集的标准化

假设有正交函数系：$1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots$为$[-l,l]$上的正交函数系

令$l=\pi$，然后 $\frac{(\ \ )}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(\ \ )^2dx}}$，可得$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ldots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ldots$为上的$[-\pi,\pi]$**标准正交系**

正交系的一个重要性质就是**线性无关，两两正交**

4.1.6 函数的傅里叶级数展开

设$f(x)$是$2l$为周期的函数，在$[-l,l]$上满足 ①连续或只有有限个第一类间断点 ② 至多有有限个极值点

则有 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$　　其中$\begin{cases}a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots\\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots\end{cases}$

且当x是$f(x)$连续点时，级数收敛于$f(x)$ $\left(\text{或}\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]_{\text{不连续时}}\right)$

4.1.7 二阶线性齐次常微分方程的求解问题

问题　$y''+py'+qy=0$　　令$y(x)=e^{rx}$，有$r^2+pr+q=0$，两个根为r_1,r_2

通解　① 相异实根 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

② 相等实根 $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$　　　根据参数变异法所求

③ 共轭复根 $\alpha\pm\beta i$　$y=e^{\alpha x}[C_1\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x)]$

4.2 波动方程初边值问题分离变量法求解

4.2.1 Fourier 方法

条件　物理上，机械振动或电磁振动可以看成是**多个简谐振动**（驻波）$e^{iw(t+cx)}=e^{iwt}e^{ikt}$，$k=cw$**的叠加**

数学上，驻波是只含变量x的函数与只含t的函数的乘积，即具有变量分离的形式

求解　由此受到启发，求解线性方程定解问题时，可**尝试**先求出齐次方程和齐次边界条件的具有**变量分离形式**的解，$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t), n=1,2,\cdots$，然后把它们**叠加起来**，即$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nX_n(x)T_n(t)$，最后利用初始条件**确定各项中的系数**，使其成为定解问题的解

4.2.1.1 分离变量法求解波动方程定解问题

问题

$$\begin{cases}\boldsymbol{u_{tt}=a^2u_{xx}}, & 0<x<l,t>0\\ u(x,0)=\phi(x), & u_t(x,0)=\psi(x)\\ \boldsymbol{u(0,t)=u(l,t)=0}_{\text{两端固定}}\end{cases}$$

分离变量　设问题有非零(非平凡)的**变量分离解** $\boldsymbol{u(x,t)}=\boldsymbol{X(x)T(t)}$　将它回代到原式中：

由$u_{tt}=a^2u_{xx}$得：$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)\xrightarrow{\text{变量整理}}\dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\boldsymbol{\lambda}$

$$\Rightarrow\begin{matrix}\boldsymbol{X''(x)+\lambda X(x)=0,0<x<l}\\ \boldsymbol{T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,t>0}\end{matrix}\quad\text{特征值问题}$$

其边界由$u(0,t)=u(l,t)=0\Rightarrow X(0)T(t)=X(l)T(t)=0$　得 $\boldsymbol{X(0)=X(l)=0}$,

特征值问题　问题：$\begin{cases}\boldsymbol{X''(x)+\lambda X(x)=0,\ \ 0<x<l}\\ \boldsymbol{X(0)=X(l)=0}\end{cases}$

① **当$\boldsymbol{\lambda}<0$时**　$\left.\begin{matrix}X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}\\ X(0)=X(l)=0\text{ 代入上式}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l}\end{vmatrix}\neq0}C_1=C_2=0\Rightarrow X(x)\equiv0$

不符合非零解的要求，因此，$\boldsymbol{\lambda<0}$ **不是特征值**

② **当$\boldsymbol{\lambda}=0$时**　$\left.\begin{matrix}X(x)=C_1x+C_2\\ X(0)=X(l)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow X(x)\equiv0$　　因此，$\boldsymbol{\lambda=0}$ **不是特征值**

③ **当$\boldsymbol{\lambda}>0$时**　$\left.\begin{matrix}X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x\\ X(0)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow C_1=0\Rightarrow\begin{matrix}X(x)=C_2\sin\sqrt{\lambda}x\\ X(l)=0\end{matrix}\Rightarrow0=C_2\sin(\sqrt{\lambda}l)$

$$\Rightarrow\sqrt{\lambda}l=n\pi\ \Rightarrow\ \begin{matrix}\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2>0\\ X_n(x)=C_2\sin\dfrac{n\pi x}{l}\end{matrix}\quad n=1,2,\cdots\quad C_2\text{可视为}1$$

其他方程　求解其他常微分方程，得到特解$u_n(x,t)$

$$\boldsymbol{T''(t)+\lambda a^2T(t)=0}\xrightarrow{\lambda=\lambda_n}T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}(n=1,2,\cdots)\xrightarrow{u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)}$$

$$u_n(x,t)=\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},n=1,2,3,\ldots\quad\text{其中},a_n=C_2A_n,\ \ b_n=C_2B_n$$

特解叠加

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}}$$

将n从结果中去除　　且要确保该级数收敛于$u(x,t)$，结果与n无关

系数确定　确定a_n,b_n的值。利用初始条件$u(x,0)=\phi(x)$，$u_t(x,0)=\psi(x)$，得到：

$$\begin{cases}\phi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\\ \psi(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\dfrac{n\pi a}{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l}\end{cases}\xrightarrow{\text{傅里叶正弦级数展开}}\begin{cases}a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\\ b_n=\dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\end{cases}\quad n=1,2,\ldots$$

4.2.1.2 解的物理意义

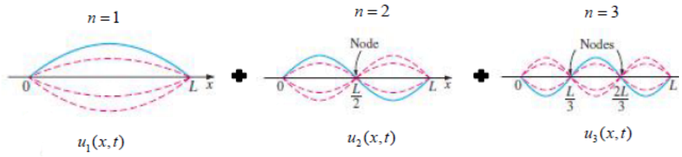
驻波

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t)+\cdots$$

$$u_n(x,t)=\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t+\alpha_n\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$u_n(x,t)=N_n\cos(\omega_n t+\alpha_n)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中，**强度/振幅** $N_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，**圆频率** $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$，**初相** $\sin\alpha_n=-\frac{b_n}{N_n},\cos\alpha_n=\frac{a_n}{N_n}$

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=$  $+\cdots$

基频 $\frac{\pi a}{l}$ 最低频率，其他频率是它的整数倍。解的级数可以看作一系列频率成倍增长，相位不同，振幅不同的驻波的线性叠加而成。因此分离变量法也叫做**驻波法**。

4.2.2 自由边界条件下波动方程问题的求解

问题

$$\begin{cases}\boldsymbol{u_{tt}=a^2u_{xx}}, & 0<x<l,t>0\\ u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) & \\ \boldsymbol{u_x(0,t)=u_x(l,t)=0}_{\text{两端自由}} & \end{cases}$$

分离变量 设问题有非零(非平凡)的**变量分离解** $\boldsymbol{u(x,t)}=X(x)T(t)$

特征值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l\\ X'(0)=X'(l)=0\end{cases}\qquad T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,t>0$$

$$\begin{cases}\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\geqslant 0\\ X_n(x)=A_n\cos\frac{n\pi}{l},n=\mathbf{0},1,2,\cdots\end{cases}\qquad T_n(t)=\begin{cases}\boldsymbol{C_0+D_0t} & n=0\\ C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}, & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

特解

$$u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)=\begin{cases}\boldsymbol{(C_0+D_0t)A_0} & n=0\\ \left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)A_n\cos\frac{n\pi x}{l} & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

通解

$$\boxed{u(x,t)=\boldsymbol{a_0+b_0t}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}}$$

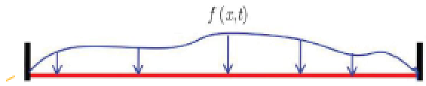
系数确定 确定a_n,b_n的值。利用初始条件$u(x,0)=\phi(x)$，$u_t(x,0)=\psi(x)$和特征函数的正交性得到：

$$\begin{cases}\phi(x)=u(x,0)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\\ \psi(x)=u_t(x,0)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\end{cases}\xRightarrow{\text{特征函数正交性}}\begin{cases}a_0=\frac{1}{l}\int_0^l\phi(x)\mathrm{d}x\\ b_0=\frac{1}{l}\int_0^l\psi(x)\mathrm{d}x\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\ b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\end{cases}\quad n=1,2,\ldots$$

4.3 非齐次问题的求解

4.3.1 非齐次方程+齐次边界条件



问题
$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+\boldsymbol{f(x,t)}, & 0<x<l, t>0 \\ u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) \\ u(0,t)=u(l,t)=0 & \text{固定} \end{cases}$$

引例 求解$Ax=b$, $A_{n\times n}$, $b\in R^n$, $x\in\mathbb{R}^n$

1. $Ax=\lambda x \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ k_1 & \cdots & k_n\end{matrix}$ 满足$Ak_i=\lambda k_i$ 这些特征值对应的特征向量两两正交。
2. 将x,b写为k_i的线性组合形式（例如$x=\alpha_1k_1+\cdots+\alpha_nk_n$，$b=\langle b,k_1\rangle+\cdots+\langle b,k_n\rangle$）
3. 将它们代入$Ax=b$，得$\alpha_1\lambda_1k_1+\cdots+\alpha_n\lambda_nk_n=\langle b,k_1\rangle k_1+\cdots+\langle b,k_n\rangle k_n$
4. 比对系数相同：$\alpha_i=\frac{\langle b,k_i\rangle}{\lambda_i}$

第一步 **求正交基（特征函数系）**

设问题有非零(非平凡)的**变量分离解** $\boldsymbol{u(x,t)}=\boldsymbol{X(x)T(t)}$ 则代入<u>齐次问题</u>有 $\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ X(0)=X(l)=0.\end{cases}$

由此解得**特征函数为：**$X_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi x}{l}, n=1,2,\cdots$

第二步 把定解问题中的未知函数和已知函数**写成特征函数展开的形式**

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}\qquad T_n(t)\text{为待定系数}\qquad f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{f_n(t)}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

每个方向的**投影系数**：$f_n(t)=\frac{\left(f(x,t),\sin\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left(\sin\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l}\right)}\longrightarrow f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

初始条件：$\phi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}$ $\qquad\psi(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l}$

第三步 关于$T_n(t)$的定解问题：将上述函数的级数展开形式**代入原方程，求展开系数**：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=f_n(t)}\\ T_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx := a_n\\ T_n'(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx := b_n\end{cases}$$

该**方程通解**为其**齐次方程的通解**+其**自身的一个特解**

第四步 用**参数变易法**解关于$T_n(t)$的定解问题

$$T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=0\xrightarrow{\text{通解}}T_n(t)=C_1\cos\frac{n\pi at}{l}+C_2\sin\frac{n\pi at}{l}\xrightarrow{\text{参数变易}}T_n(t)=C_1(t)\cos\frac{n\pi at}{l}+C_2(t)\sin\frac{n\pi at}{l}$$

第五步 **确定系数$\boldsymbol{C_1(t),C_2(t)}$**，求解$T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=f_n(t)$的**一个特解**。

$$T_n(t)\xrightarrow{\text{两边求导}}T_n'(t)=\cancel{C_1'(t)\cos\frac{n\pi a}{l}t}-\frac{n\pi a}{l}C_1(t)\sin\frac{n\pi a}{l}t+\cancel{C_2'(t)\sin\frac{n\pi a}{l}t}+\frac{n\pi a}{l}C_2(t)\cos\frac{n\pi a}{l}l$$

为简化方程，令$C_1'(t)\cos\frac{n\pi a}{l}t+C_2'(t)\sin\frac{n\pi a}{l}t=0$，则有：

$$T_n''(t)=-\frac{n\pi a}{l}C_1'(t)\sin\frac{n\pi a}{l}t-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2C_1(t)\cos\frac{n\pi a}{l}t+\frac{n\pi a}{l}C_2'(t)\cos\frac{n\pi a}{l}t-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2C_2(t)\sin\frac{n\pi a}{l}t$$

回代方程 $T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=f_n(t)$ 得：$-C_1'(t)\sin\frac{n\pi a}{l}t+C_2'(t)\cos\frac{n\pi a}{l}t=\frac{l}{n\pi a}f_n(t)$

可使用克莱姆法则求解$C_1'(t),C_2'(t)$

$$C_1'(t)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin\frac{n\pi at}{l}\\ \frac{l}{n\pi a}f_n(t) & \cos\frac{n\pi at}{l}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\frac{n\pi at}{l} & \sin\frac{n\pi at}{l}\\ -\sin\frac{n\pi at}{l} & \cos\frac{n\pi at}{l}\end{vmatrix}}=-\frac{l}{n\pi a}f_n(t)\sin\frac{n\pi at}{l}\Rightarrow C_1(t)=-\frac{l}{n\pi a}\int_0^t \sin\frac{n\pi a\tau}{l}f_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau+c_1(=0)$$

$$C_2'(t)=\frac{\begin{vmatrix}\cos\frac{n\pi at}{l} & 0\\ -\sin\frac{n\pi at}{l} & \frac{l}{n\pi a}f_n(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\frac{n\pi at}{l} & \sin\frac{n\pi at}{l}\\ -\sin\frac{n\pi at}{l} & \cos\frac{n\pi at}{l}\end{vmatrix}}=\frac{l}{n\pi a}f_n(t)\cos\frac{n\pi at}{l}\Rightarrow C_2(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t \cos\frac{n\pi a\tau}{l}f_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau+c_2(=0)$$

第六步 **确定$T_n(t)$** 方程 $T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=0$

解：$\boldsymbol{T_n(t)=C_1\cos\frac{n\pi at}{l}+C_2\sin\frac{n\pi at}{l}+C_1(t)\cos\frac{n\pi at}{l}+C_2(t)\sin\frac{n\pi at}{l}}$

通解 **特解**

其中 $\begin{cases}C_1(t)=-\frac{l}{n\pi a}\int_0^t \sin\frac{n\pi a\tau}{l}f_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\ C_2(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t \cos\frac{n\pi a\tau}{l}f_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{cases}$ **代入方程**并化简可得：

通解表达$\boldsymbol{T_n(t)=C_1\cos\frac{n\pi at}{l}+C_2\sin\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau}$

边界代入又有：$\begin{cases}T_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx :=a_n\\ T_n'(0)=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx :=b_n\end{cases}$ 故：$T_n(0)=\boldsymbol{C_1=a_n}$，$T_n'(0)=\boldsymbol{C_2=\frac{l}{n\pi a}b_n}$

最终得到：$\boldsymbol{T_n(t)=a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{lb_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau}$

第七步 给出原问题的解 由于有：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$，所以：

$$\boldsymbol{u(x,t)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{b_nl}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\left[\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

齐次方程部分 **非齐次方程部分**

典型模型-共振现象

方程 $\begin{cases}u_{tt}=u_{xx}+\sin wt\sin 2x & 0<x<\pi\\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=0,\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$

解 $f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^x \sin wt\sin 2x\sin nx\,dx=\begin{cases}\sin\ wt & n=2\\ 0 & n\neq 2.\end{cases}$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\,d\tau\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{1}{2}\int_0^t\sin w\tau\sin 2(t-\tau)\,d\tau\sin 2x$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\left(\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t\cos 2t\right)\sin 2x, & w=2\\ -\frac{2\sin wt-w\sin 2t}{2(w^2-4)}\sin 2x, & w\neq 2\end{cases}\quad (\text{固有频率}\frac{2\pi a}{l})$$

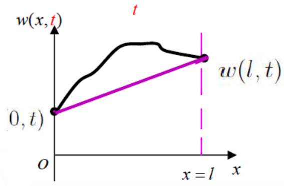
物理 这表明，当$w=2$时，位移随时间增加线性增长，不断增大，实际应用中为避免共振的发生，常常要控制自由项的振动频率，让它$w\neq 2$

4.3.2 非齐次方程+非齐次边界条件 [必考]

4.3.2.1 非齐次项与时间有关

问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \\ \boldsymbol{u(0,t) = p(t), \quad u(l,t) = q(t)} \end{cases}$$



求解

引入**边界齐次化函数** $\omega(x,t) \leftarrow \begin{cases} \omega(0,t) = p(t) \\ \omega(l,t) = q(t) \end{cases}$

$$u(x,t) = \boldsymbol{v(x,t)} + \boldsymbol{\omega(x,t)}$$

其中：$\boldsymbol{\omega(x,t)} = \frac{1}{l}[q(t) - p(t)]x + p(t)$ **直线方程**

其中：$\boldsymbol{v(x,t)} = \begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + \boldsymbol{f(x,t) - \omega_{tt}} & 0 < x < l, t > 0 \\ v(x,0) = \phi(x) - \boldsymbol{\omega}(x,0), \quad v_t(x,0) = \psi(x) - \boldsymbol{\omega}_t(x,0) & 0 \le x \le l \\ \boldsymbol{v(0,t) = v(l,t) = 0} & t \ge 0 \end{cases}$

4.3.2.2 非齐次项与时间无关

问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x) \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \\ \boldsymbol{u(0,t) = A, \quad u(l,t) = B} \end{cases}$$

求解 $u(x,t) = \boldsymbol{v(x,t)} + \boldsymbol{w(x,t)}$ 引入边界齐次化函数$w(x)$

$$\begin{cases} a^2 w_{xx} + f(x) = 0 \\ w(0) = A \quad w(l) = B \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} + f(x) \\ v(x,0) = u(x,0) - w(x) = \phi(x) - w(x), \quad v_t(x,0) = u_t(x,0) = \psi(x), \\ v(0,t) = u(0,t) - w(0) = A - w(0) = 0 \\ v(l,t) = u(l,t) - w(l) = B - w(l) = 0 \end{cases}$$

即取 $w(x) = A + \frac{(B-A)x}{l} + \frac{x}{a^2 l}\int_0^l \left[\int_0^\eta f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\eta - \frac{1}{a^2}\int_0^\pi \left[\int_0^\eta f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\eta$

4.3.2.3 其他类型边界条件

① $u(0,t) = p(t), u_x(l,t) = q(t)$ $\qquad w(x,t) = q(t)x + p(t)$

② $u_x(0,t) = p(t), u(l,t) = q(t)$ $\qquad w(x,t) = p(t)(x - l) + q(t)$

③ $u_x(0,t) = p(t), u_x(l,t) = q(t)$ $\qquad w(x,t) = p(t)x + \frac{q(t)-p(t)}{2l}x^2$