第二章 二阶线性偏微分方程的分类与化简

本章研究对象

PDE 分类 **双曲型** $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}=\cdots$ 波动方程为代表 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$

抛物型 $u_{\eta\eta}=Au_{\xi}+\cdots$ 热传导方程为代表 $\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$

椭圆型 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\cdots$ 位势方程为代表 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$

2 个自变量的一般形 $\underbrace{a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}}_{\text{二阶主部项}}+\underbrace{b_1u_x+b_2u_y+cu}_{\text{低阶项}}=f$ 其中$a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c,f$都是区域Ω上的实函数

n 个自变量时一般形式 $\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}(\partial^2 u)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu+f=0,a_{ij}=a_{ji}$ 其中a_{ij},b_i,c,f是自变量$x_1,x_2,\ldots,x_n$的函数

方程化简 重点引入**非奇异变化**，将方程化为三类方程的标准型

举例 $u_{xx}+5u_{xy}-4u_{yy}=1$，其中 $a_{11}=1,a_{22}=-4,a_{12}=5/2$

2.1 两个自变量的方程的分类与化简

2.1.1 分类情况

分类 记$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$，则有$\begin{cases}\Delta>0 & \textit{双曲型} \quad u_{xx}-a^2u_{yy}=f\\ \Delta=0 & \textit{抛物型} \quad u_x-a^2u_{yy}=f\\ \Delta<0 & \textit{椭圆型} \quad u_{xx}+u_{yy}=f\end{cases}$

注意 常系数方程分类是**全局**的，而变系数方程的分类是**依赖(x,y)的**，如特里波利方程（混合类型）：
$yu_{xx}+u_{yy}=0\rightarrow\Delta=-y$ 其类型取决于 y 的符号（x 轴上方椭圆型，x 轴抛物型，x 轴下双曲型）

2.1.2 方程化简

思路 寻求一个**<u>非奇异</u>变换**，使得原方程化简为相应的标准形式（希望二阶主部项系数两个为零）。

标准形式 $a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f$ 其中$a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c,f$都是区域Ω上的实函数

推导 ① 作**<u>非奇异</u>变量代换** $\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$ （将原坐标→新坐标用于简化，我们的目的是找到合适的这个代换）

② 转换为$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_{\xi}+B_2u_{\eta}+Cu=F$

③ 适当取变换，使得A_{ij}部分为 0（两个为零），达到化简之目的

代换 **非奇异变化** 雅克比(Jacobi)行列式在点(x_0,y_0)**不等于零** $J=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0$ 保证变化前后同号

则在点(x_0,y_0)附近变换是可逆的。 两个曲面要求相交

具体变换 $u(x,y)\rightarrow u\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big)\rightarrow u(\xi,\eta)$ 保证新旧坐标互相变换

链式法则 $u_x\rightarrow u_{\xi}\xi_x+u_{\eta}\eta_x \qquad u_y\rightarrow u_{\xi}\xi_y+u_{\eta}\eta_y$

$$u_{xx}\rightarrow\left(u_{\xi\xi}\xi_x+u_{\xi\eta}\eta_x\right)\xi_x+\left(u_{\eta\xi}\xi_x+u_{\eta\eta}\eta_x\right)\eta_x+u_{\xi}\xi_{xx}+u_{\eta}\eta_{xx}$$
$$\rightarrow u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_{\xi}\xi_{xx}+u_{\eta}\eta_{xx}$$
$$u_{xy}\rightarrow\left(u_{\xi\xi}\xi_y+u_{\xi\eta}\eta_y\right)\xi_x+\left(u_{\eta\xi}\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y\right)\eta_x+u_{\xi}\xi_{xy}+u_{\eta}\eta_{xy}$$
$$\rightarrow u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_{\xi}\xi_{xy}+u_{\eta}\eta_{xy}$$
$$u_{xy}\rightarrow\left(u_{\xi\xi}\xi_y+u_{\xi\eta}\eta_y\right)\xi_y+\left(u_{\eta\xi}\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y\right)\eta_y+u_{\xi}\xi_{yy}+u_{\eta}\eta_{yy}$$
$$\rightarrow u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_{\xi}\xi_{yy}+u_{\eta}\eta_{yy}$$

方程转型 $A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu=F$

新系数

$A_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2$ $A_1=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y$

$A_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y$ $B_1=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y$

$A_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2$ $C_1=c$ $F=f$

观察一 $\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{12}&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_x&\xi_y\\\eta_x&\eta_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_x&\xi_y\\\eta_x&\eta_y\end{bmatrix}^T$ 两边取行列式

$A_{12}^2-A_{11}A_{22}=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})J^2=J^2\Delta$ 非奇异变化能够保证转换后类型不变

观察二 发现A_{11}与A_{22}有**相同的形式**，可以尝试**让这两个为零**

即 $A_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=0$ $A_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2=0$

解方程$\boldsymbol{a_{11}\phi_x^2+2a_{12}\phi_x\phi_y+a_{22}\phi_y^2=0}$

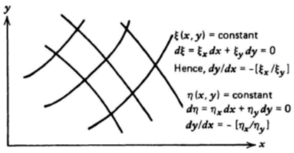
得到**两个无关解**$\phi_1(x,y),\phi_2(x,y)$，那么就取 $\begin{cases}\xi=\phi_1(x,y)\\\eta=\phi_2(x,y)\end{cases}$ 可以得到$A_{11}=A_{22}=0$

如果能求解到$\phi_1(x,y),\phi_2(x,y)$，就可以获得这个变换了

求解过程 $a_{11}\phi_x^2+2a_{12}\phi_x\phi_y+a_{22}\phi_y^2=0$ 这是一个完全非线性方程，其解应当为$\phi(x,y)$，表现为一个**曲面**。如果有两个解，就是两个曲面，如果无关，一定相交。

方程中假设$\phi_x^2+\phi_y^2\neq0$,设$\phi_y\neq0$ （要求**非平凡解**（常数解））

那方程等价于 $a_{11}\left(\frac{\phi_x}{\phi_y}\right)^2+2a_{12}\frac{\phi_x}{\phi_y}+a_{22}=0$



想象在空间$Oxyz$内有两个无关解平面，用$z=c$ $(\phi(x,y)=c)$，让c不断变动，则投影如左图所示，是**两族曲线**。在曲线两边做微分 $0=d\phi=\phi_xdx+\phi_ydy$，用$-\frac{dy}{dx}$替代$\frac{\phi_x}{\phi_y}$，则非线性偏微分方程转换为了常微分方程。

可得**特征方程**：$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0$

和**特征线方程**：$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}}\\\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}}\end{cases}$ 根据Δ的符号给出常微分方程相应的解（特征线）

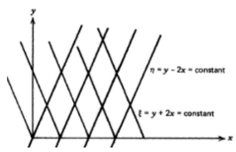
利用特征线方程可以进一步解的特征面（例如，$\frac{dy}{dx}=x\ \rightarrow\ y=\frac{1}{2}x^2+c\rightarrow y-\frac{1}{2}x^2=z$）

化简方程过程总结 原方程→特征方程→特征曲线→变量非奇异变换→未知函数及其导数的导数变换→结合原方程→简化后的标准型

2.1.3 三类情况

① $\Delta>0$ 方程有两族不同的实解曲线 $\phi_1(x,y)=c_1$，$\phi_2(x,y)=c_2$ 又有$\begin{cases}\xi=\phi_1(x,y)\\\eta=\phi_2(x,y)\end{cases}$

双曲型方程第一标准形式：$2A_{12}u_{\xi\eta}+A_1u_\xi+B_1u_\eta+C_1u=F$



例题 1. $u_{xx}-4u_{yy}+u_x$ 特征方程及求解特征坐标

$$u_{xx}-4u_{yy}+u_x=0\rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}}=2\\\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}}=-2\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}y=-2x+c_1\\y=2x+c_2\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}\xi=y+2x=c_1\\\eta=y-2x=c_2\end{matrix}$$ (得到新的特征坐标)

2. 简化方程$y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0\ (x>0\ y>0)$

$$原式\rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}}=-\frac{x}{y}\\\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}}=\frac{x}{y}\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}y^2-x^2=c_1\\y^2+x^2=c_2\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}\xi=y^2-x^2\\\eta=y^2+x^2\end{matrix}\qquad u_{\xi\eta}=\frac{-(x^2+y^2)u_\xi+(y^2-x^2)u_\xi}{8x^2y^2}=\frac{\eta u_\xi-\xi u_\eta}{2(\xi^2-\eta^2)}$$

3. 证明方程$3u_{xx}+7u_{xy}+2u_{yy}=0$对所有的$x,y$是双曲型的，并求出新的特征坐标

$$则a_{12}=\frac{7}{2}\quad原式\rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}}=\frac{\frac{7}{2}+\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-6}}{3}=2\\\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}}=\frac{\frac{7}{2}-\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-6}}{3}=\frac{1}{3}\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}y=2x+c_1\\y=\frac{1}{3}x+c_2\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}\xi=y-2x=c_1\\\eta=y-\frac{1}{3}x=c_2\end{matrix}$$ 有$\Delta=\frac{5}{2}>0$为双曲型可证。

4. 对方程$u_{xx}+4u_{xy}=0$求出新的特征坐标，并简化方程，再求解简化后的方程

② $\boldsymbol{\Delta=0}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}}\overset{(\Delta=0)}{=\!=}\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}}{a_{11}}\rightarrow\phi_1(x,y)=C\ (A_{11}=0\ or\ A_{22}=0)$ 只能解到一个方程

令$\xi=\phi_1(x,y)$，取 $\begin{matrix}\eta=y\ if\ \xi_x\neq0\\ \eta=x\ if\ \xi_y\neq0\end{matrix}$ （雅可比行列式满足条件下，另一个表达式越简单越好 $\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq0$）

抛物型方程的标准形式：$u_{\eta\eta}=A_4u_\xi+B_4u_\eta+C_4u+F_4$

例题 1. 简化方程$u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0$

$\frac{dy}{dx}=1\ \rightarrow\ y=x+c\ \rightarrow\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=y\end{cases}$ 经过一番运算可得 $u_{\eta\eta}=0$

③ $\boldsymbol{\Delta<0}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{11}}=\frac{a_{12}\pm i\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}\rightarrow\frac{dy}{dx}=p(x,y)\pm iq(x,y)\rightarrow\begin{matrix}\phi_1(x,y)=\alpha+i\beta=c_1\\ \phi_2(x,y)=\alpha-i\beta=c_2\end{matrix}$ 取变换$\begin{cases}\xi=\alpha(x,y)\text{ 实部}\\ \eta=\beta(x,y)\text{ 虚部}\end{cases}$

例如，若有 $\begin{matrix}\frac{dy}{dx}=-\sqrt{-4x^2}=-2ix\\ \frac{dy}{dx}=\sqrt{-4x^2}=2ix\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}\xi=y+ix^2\\ \eta=y-ix^2\end{matrix}\xrightarrow{\text{需求实变量}}\begin{matrix}\xi=y\\ \eta=x^2\end{matrix}$ 挑选一个特征方程

椭圆方程的标准形式 $A_{11}u_{\xi\xi}+A_{22}u_{\eta\eta}=A_5u_\xi+B_5u_\eta+C_5u+F_5$ $A_{11}=A_{22}$

例题 1. 判断方程类型并化简$y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$