第一章 绪论

1.1 基本概念

微分方程 有自变量、未知函数以及未知函数的导数或微分的方程

常微分方程 **ODE**，未知函数为一元函数

偏微分方程 **PDE**，有未知函数关于自变量的偏导数的等式 即$F\left(x,y,\dots,u,u_x,u_y,\dots,u_{xx},\dots\right)=0$

PDE 方程组 多个未知函数与多个 PDE

阶 **PDE 中最高阶偏导数的阶数**

线性 PDE **齐次** 方程中无自由项，即没有不含未知函数级偏导数的项。

非齐次 有自由项，如$u_{xyy}+u_{yy}+2u=5x$

非线性 PDE **拟线性 PDE** 关于未知函数的**所有**最高阶偏导数是线性的。 $u_x u_{xx}+xuu_y=sin3x$

半线性 PDE 最高阶偏导的系数不含未知函数而依赖于自变量 $u_t+kuu_x+u_{xxx}=0$

完全非线性 如$(u_x)^2+u=3$

解 **古典解** 函数$u=u(x,y\dots)$在区域Ω内有 m 阶连续偏导且代入 m 阶 PDE 后成立

弱解 不要求 m 阶可导，可弱化光滑性

特解 m 阶 PDE 的解还满足某些特殊条件

通解 m 阶 PDE 的解的表达式中含有 **m 个任意函数** （非常数，与 ODE 不同）

求解方法 分离变量、行波法、积分变换、格林函数

典型 PDE

n 维拉普拉斯算子 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

哈密顿算子（梯度算符） $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

散度算子 设$A=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$ $divA=P_x+Q_y+R_z$

散度定理 $\iint_s A\cdot n\,ds=\iiint_V divA\,dv$

旋度算子 $rotA=\left\{R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y\right\}=\begin{vmatrix} j & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

关系 $grad\,u=\nabla u$ $div\,A=\nabla\cdot A$ $rot\,A=\nabla\times A$

典型方程

n 维波动 $u_{tt}-a^2\Delta u=0$

三维热传导 $u_t-a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)=0$

n 维拉普拉斯方程 $-\Delta u=0$

三维泊松方程 $-\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)=f(x,y,z)$

1.2 典型方程的导出

1.2.1 波动方程

问题提出 有一根长为 l 的均匀柔软富有弹性的细弦，在外力作用下作微小横振动，确定弦的运动方程

问题分析 明确：① 研究物理量：弦沿垂直方向位移$u(x,y)$ ② 物理定律：牛二、胡克 ③ 建立范定方程

模型假设 1. 柔软且有弹性：弦的张力沿弦切线方向，张力大小按照胡克定律，对外力无抵抗性

2. 细弦：重量与其张力相比很小 3. 微小振动：位移后斜率≈1 $\sin\alpha \approx u_x$

4. 横振动：弦运动于二维平面，弦上各点沿垂直 x 方向运动

模型建立（三步骤） ① 确定物理量与坐标系（微元法） ② 证明张力为常数（水平胡克定律）

③ 导出弦振动方程（竖直方向结合牛二定律）

推导 **坐标系：**考察弦上微小元素，任取一小段MM',长为Δx,ρ为弦线密度

证明 T 为常数： 水平方向上，$T(x+\Delta x)\cos\alpha' = T(x)\cos\alpha$ 且$\alpha \approx 0$，故$T(x+\Delta x) \approx T(x)$ 与 x 无关

由于弦长未变，$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+u_x^2}dx \approx \Delta x$ 故 T 与 t 无关

导出方程：垂直方向上 $T\sin\alpha' - T\sin\alpha + F(x,t)_{外力密度}\Delta x = \rho\Delta x_{质量}\, u_{tt\,加速度}$

有$\sin\alpha' \approx \tan\alpha' = u_x(x+\Delta x)$ $\sin\alpha \approx \tan\alpha = u_x(x)$

则$T[u_x(x+\Delta x) - u_x(x)] + F(x,t)\,\Delta x = \rho\Delta x\, u_{tt} \Rightarrow Tu_{xx} + F = \rho u_{tt}$

$u_{tt} = \frac{T}{\rho}u_{xx} + \frac{F}{\rho} \Rightarrow u_{tt} = a^2u_{xx}(x,t) + f(x,t)$ 其中$\boldsymbol{a^2 = \frac{T}{\rho}}$，$\boldsymbol{f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}}$ **弦的受迫振动方程**

1.自由振动方程 **弦上不受外力 $\boldsymbol{u_{tt} = a^2u_{xx}}$**

2. 高维拓展 二维薄膜、三维声波光波 $u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}) + f(x,y,t)$ $u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) + f(x,y,z,t)$

1.2.2 一维热传导方程

推导过程 1. 热能密度：单位体积所受热能量 $e(x,t)$

2. 热通量：本质上是有方向的热能量。单位时间向右流过单位面积的热能量。

$\phi(x,t)$ 在Δx部分，流入为$\phi(x,t)$,流出为$\phi(x+\Delta x,t)$

3. 热源：在单位时间内单位体积生成的热能量 $Q(x,t)$

4. 热能守恒定律 $\frac{\partial[A\Delta x\, e(x,t)]}{\partial t} = \phi(x,t)A - \phi(x+\Delta x,t)A + Q(x,t)A\Delta x$ （使用微分表达，左边为这一段微元体内热能的变化率，右边为流入-流出+热源）

$\frac{\partial e}{\partial t} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x,t)-\phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} + Q$

5. 比热：$c(x)$ 单位变化 1℃变化能量

6. 体积密度：$\rho(x)$

7. 温度：$u(x,t)$

关系：温度和能量转换定律$e(x,t)A\Delta x = c(x)u(x,t)\cdot\rho A\Delta x$ *(质量)*

$e(x,t) = \rho c\, u(x,t)$

8. 热传导系数：热通量 $\phi = -K_0\frac{\partial u}{\partial x}$ 傅里叶热传导定律 $\frac{\partial u}{\partial x}$为梯度，温度在杆上做传导是因为受热不均，$\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ 则代表温度向 x 方向递减，故热量向 x 方向传递，故通量有负号。ϕ表示单位时间单位面积上的热流量 $\phi = \frac{dQ}{dsdt}$

由此，可代入原式：$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Q}{c\rho}}$ $a = \sqrt{\frac{K_0}{c\rho}}$

拉普拉斯方程/泊松方程

方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f$ 其不随时间变化，随位置变化

$\nabla^2 u = f$ $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

描述 描述一种稳定的状态

1.3 定解条件与定解问题

描述物理现象：偏微分方程（泛定方程）+ 定解条件

定解条件 准确说明对象的初始状态以及边界上的约束条件

初始条件 说明初始状态的条件

边界条件 说明边界上约束情况的条件

定解条件必要性 不同支撑时弦的振动：边界条件不同

在不同位置拨动弦：初始条件不同

即使泛定方程相同，不同的边界条件或初始条件也可能导致完全不同的解

1.3.1 初始条件

柯西(Cauchy)初始条件 用以给出具体物理现象的初始状态。用来演变到未来的初状态。

三类问题 **弦振动问题** 初始条件是指弦在开始振动时刻的**位移$f(x)$和速度$g(x)$**

$$\begin{cases} u|_{t=0} = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(g) \end{cases}$$

热传导问题 初始条件是指开始传热的时刻物体温度的分布情况

以 f(x)表示 t=0 时物体内一点 x 的温度

$u(x,t)|_{t=0} = f(x)$

泊松/拉普拉斯 描述稳恒状态，与时间无关，所以不提初始条件

注意 ① 不同类型的方程，相应初值条件的个数不同

② 关于 t 的 n 阶偏微分方程，要给出 n 个初始条件

③ 初始条件给出的应是整个系统的初始状态，而非系统中个别点的初始状态

1.3.2 边界条件

弦振动三大类 **固定端** $u(L,t) = 0\,, t \ge 0$

可控端点 $u(x,t)|_{x=0} = f(t)$ 可选择$f(t)$，非齐次

自由端 $T\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = 0 \quad or \quad \boldsymbol{u_x(L,t) = 0, t \ge 0}$ **T 为张力**

弹性支撑端 $\boldsymbol{(u_x + \sigma u)|_{x=L} = 0}$ $\boldsymbol{\sigma = k/T}$**为弹性支撑力**

推导 **自由端**：**边界上的张力沿垂直于 x 轴的方向的分量为 0**，由此$T\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = 0$ 即 $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=t} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{x=t} = 0$

当该点处的张力沿垂直 x 轴的方向的分量是 t 的已知函数时，有$\frac{\partial u}{\partial n}|_{x=l} = \varphi(t)$

弹性支撑端：以左端点固定在一有弹簧的小质量块 m 上为例。弹簧底座以$g_s(t)$规律做运动，弹簧有弹性系数 k。

$$\boldsymbol{m\frac{d^2}{dt^2}u(0,t) = -k\big(u(0,t) - \underbrace{g_s(t)}_{底座位置} - \underbrace{l}_{弹簧原长}\big)_{弹性力} + T_0\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)}_{张力沿y方向}}$$

可得：$u_x(0,t) + \sigma u(0,t) = \sigma^2 l\, g_s(t)$ 其中 $\sigma = \frac{k}{T_0}$

由胡克定律知，在$x = l$ 端张力沿位移方向的分量应等于$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = -ku|_{x=l}$

故有$(u_x + \sigma u)|_{x=L} = 0$，其中$\sigma = k/T$ 非负常数 k 表示弹性体的倔强系数

热传导三大类 **定温端** 物体与外界接触的表面温度已知 如右端放置于冰水混合物中

$u(x,y,z,t) = f(x,y,z)\,,(x,y,z) \in \partial\Omega, t \ge 0$ $u(L,t) = u_0$ 右端点处规定温度

绝热端 在表面 S 上热量的流速始终为 0 在端点 L 处有 f(x)的规律交换

$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ $(x,y,z) \in \partial\Omega, t \ge 0$ (绝热，热流速为 0) $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = f(x)$

热交换端 $(u_n + \sigma u)|_{\partial\Omega} = \sigma u_1$ $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = -h(u(L,t) - u_{m外界})$ 牛顿冷却定律

推导　**热交换问题：**如果物体内部通过边界 S 与周围的介质有热量交换，这时能测量到物体与接触处的介质的温度u_1。通常情形下，u_1与物体在表面 S 上的温度 u 不相同。根据牛顿实验定律，物体从一介质流入另一介质的热量与两个介质间的温度差成正比：$dQ = h(u-u_1)dSdt$，其中常数$h>0$表示两种介质之间的热交换系数。

此时，在物体内部任意取一个无限贴近 S 的闭曲面Γ，由于在 S 的内侧热量不能积累，所以在Γ上的热量流速应等于边界 S 上的热量流速。Γ上的热量流速为$\frac{dQ}{dSdt}|_\Gamma = -k\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma$

所以当物体与外界有热交换时，相应的边界条件为：$-k\frac{\partial u}{\partial n}|_S = h(u-u_1)|_S$

即为：$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)|_S = \sigma u_1|_S$，其中$\sigma = \frac{h}{k}$

三类边界条件（设u为未知函数，$\partial\Omega$为边界）

第一类边界条件（狄利克雷(Dirichlet)边界条件）　直接给出 u 在边界$\partial\Omega$上的值 $u|_{\partial\Omega} = f$

例如：1. 长为l的弦，两端固定：$u|_{x=0}=0; u|_{x=t}=0$

2. 长为l的弦，一端固定，另一端以$\sin(t)$规律自由运动：$u|_{x=0}=0; u|_{x=t}=sint$

3. 长为l的杆，一端温度为 0，一端温度为$\xi(t)$：$u|_{x=0}=0; u|_{x=t}=\xi(t)$

第二类边界条件（诺依曼(Neumann)边界条件）：给出 u 沿$\partial\Omega$的外法线方向的方向**导数** $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = f$ **(通量)**

第三类边界条件(罗宾(Robin)边界条件)：给出 u 以及$\frac{\partial u}{\partial n}$的线性组合在边界的值 $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)|_{\partial\Omega} = f$

注意　① 上面给出的边界条件中，$f_i(i=1,2,3)$ 都是定义在边界$\partial\Omega$上的已知函数

② 当$f_i=0$时，相应的边界条件称为齐次的，否则称为非齐次的

③ 三种条件可归为一式：$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)|_{\partial\Omega} = f, \begin{cases}\alpha=0,\beta\neq 0, & 第一类\\ \alpha\neq 0,\beta=0, & 第二类\\ \alpha\neq 0,\beta\neq 0, & 第三类\end{cases}$

1.3.3 定解条件

初始条件+边界条件=定解条件

泛定方程+定解条件=定解问题

衔接条件　由于系统由不同介质组成，在两种不同介质的交界处需给定两个衔接条件

其他条件　由于物理上的合理性的需要，有时还需对未知函数附加以单值、有限、周期性等限制，这类附加条件称为**自然边界条件**

1. 初值问题或 Cauchy 问题　泛定方程+初始条件

在无穷的区域里面研究的问题

波动方程的柯西问题：$\begin{cases}u_t - a^2u_{xx}=0, -\infty<x<\infty, t>0\\ u|_{t=0}=\phi(x),\ -\infty<x<\infty\end{cases}$

热传导方程的柯西问题：$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, -\infty<x<\infty, t>0\\ u|_{t=0}=\phi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x)\quad -\infty<x<\infty\end{cases}$

2. 边值问题　泛定方程+边界条件（三类）

泊松方程的边值问题

第一类：$\begin{cases}\Delta u = f(x,y,z), (x,y,z)\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in\partial\Omega\end{cases}$

第二类：$\begin{cases}\Delta u = f(x,y,z), (x,y,z)\in\Omega\\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in\partial\Omega\end{cases}$

第三类：$\begin{cases}\Delta u = f(x,y,z), (x,y,z)\in\Omega\\ (\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u)|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in\partial\Omega\end{cases}$

3. 初边值问题 泛定方程+初始条件+边界条件（混合问题）

一维齐次弦振动方程的混合问题：$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0\ ,0<x<l,t>0 \\ u|_{t=0}=\phi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x),0\le x\le l \\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,\ \ t\ge 0 \end{cases}$

其他定解问题：混合边值问题、外边值问题

1.3.4 例题

1. 长为 l 的均匀细杆，x=0 端固定，另一端受到沿杆长方向的力 F，若撤去 F 的瞬间为 t=0，求 t>0 的杆的纵振动定解条件。

边界条件：$u(x,t)|_{x=0}=0$　　$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=t}=0$（t>0 无外力作用，无应变）

初始条件：$E\frac{\partial u}{\partial x}|_{t=0}=\frac{F}{S}$（胡克定律：S 横截面积、E 杨氏模量）$u|t_{x=0}=\int_0^x\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int_0^x\frac{F}{ES}dx=\frac{F}{ES}x$　　$\frac{\partial u}{\partial t}|t_{t=0}=0$

2. 长为l，$x=0$端固定的均匀细杆，处于静止，在$t=0$时，一个沿着杆长方向的力 F 加在杆的另一端，求 t> 0 杆上各点位移的定解条件

边界条件：$u(x,t)|_{x=0}=0$　　$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=\frac{F}{ES}$　　初始条件：$u|_{t=0}=0$　　$\frac{\partial u}{\partial t}|t_{t=0}=0$

3. 一长为L**初始温度为** $\boldsymbol{\varphi(x)}$的均匀细杆,其侧表面与周围介质**无热交换**,内部有**密度为** $\boldsymbol{g(x,t)}$**的热源**,**右端绝热**,左端与**温度为 u 的介质有热交换**.试写出杆内温度分布的定解问题.

$$\text{定解问题}\begin{cases} \text{范定方程：}\ \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{g(x,t)_{\text{热源}}}{c\rho}\quad 0<x<L\ ,t>0 \\ \text{初始条件：}\ u(x,0)=\varphi(x)\quad 0\le x\le L \\ \text{边界条件：}\begin{cases}\text{右端：}\ u_x(L,t)=0\quad t>0 \\ \text{左端：}\ K\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=h(u(0,t)-u)\ t>0\end{cases}\end{cases}$$

4. 一长为 L 的弹性杆,**一端固定**,另一端被**拉离平衡位置 b** 长度而静止,放手**任其振动**，试求杆振动的定解问题.

$$\text{定解问题}\begin{cases} \text{范定方程：}\ u_{tt}=a^2u_{xx}\quad 0<x<L,t>0 \\ \text{初始条件：}\begin{cases}\text{位置：}\ u(x,0)=\frac{x}{L}b\ ,0\le x\le L \\ \text{速度：}\ \mathrm{u_t(x,0)}=0,\ \ 0\le x\le L\end{cases} \\ \text{边界条件：}\begin{cases}\text{左端：}\ u(0,t)=0\ \ ,t\ge 0 \\ \text{右端：}\ u_x(L,t)=0,\ \ \ t\ge 0\end{cases}\end{cases}$$

5. 一边长为 l 的正方形薄板,其 **y=0 边保持**恒温 T,其他三边保持 0℃求**稳恒状态下**板内温度的定解问题.

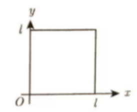


图 1.3.1　正方形薄板

$$\text{定解问题}\begin{cases} \text{范定方程：}\ u_{xx}+u_{yy}=0\quad 0<x<l,\ 0<y<l \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0\quad 0\le y\le l \\ \mathrm{u}|_{\mathrm{y=0}}=T,\ u|_{y=t}=0\quad 0\le x\le l\end{cases}$$

1.4 定解问题的适定性

章题解释　　即提法的合理性，存在性（是否有解），唯一性（是否有唯一解），稳定性（解是否连续依赖定解条件（定解条件有微小变动时，引起解的变动是否足够小））

1.4.1 定解问题的解

定解问题的解　　在指定的范围内满足方程,同时满足所给的定解条件的函数

古典解　　具有方程中出现的各个偏导数且一般说它们应该是连续的以保证函数可微的解

弱解（物理解）　　函数在个别的点(线、面)上不可导或导数不连续,其不满足古典解的要求,但其在实际问题中是有意义的　写出弱形式的方程进行求解得到弱解（有限元数值求解）

1.4.2 解的存在与唯一性

唯一情况　　一般情况下,实际问题的解应该是唯一确定的，相应的定解问题的解应该是唯一的。
如果不唯一，说明在构造解决问题的数学模型时可能存在如下问题:
1. 可能在建立方程时某些物理方面的假设失实　2. 略去小量时欠妥　3. 定解条件不合适

解不存在情况　　定解条件给得过多

解不唯一情况　　定解条件给得太少

特殊的情形　　有些实际问题的解本身就允许相差常数：电势问题。因此,定解问题解可能不唯一，但在实际问题中仍有意义

1.4.3 解的稳定性（解的连续依赖性）

在实际问题中，所有的观测数据都不可避免地带有误差。
在对应的定解问题中，这种误差常常出现在定解条件及自由项中。这种误差必然导致定解问题的解与"真实情况"的差距。这种差距是不可避免的,关键是能否容忍。

稳定性　　如果定解条件或自由项发生微小改变时，解的相应改变也是微小的，则称定解问题为稳定的。否则，称为不稳定的。

1.4.4 定解问题的适定性

适定性　　实际问题中，如果一定解问题的解**存在、唯一、稳定**，则称其适定的(**well-posed**)。
否则，称其为不适定的(**ill-posed**)

价值　　适定性的讨论对于检查定解问题是否能在允许范围内真实地反映所对应的实际问题常常是有效的
先考虑适定性,有助于发现建立的数学模型是否存在失误

1.4.5 不适定问题的例子

拉普拉斯方程的边值问题

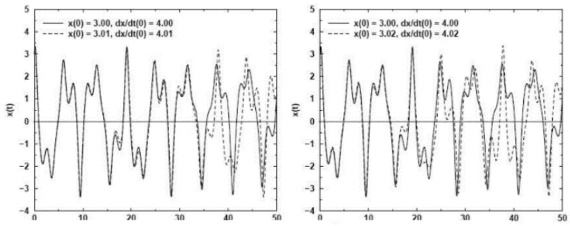
$$\begin{cases}\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x > 0, \ \ y \in R \\ u(0,y) = 0, \ \ u_x(0,y) = \frac{1}{n}\sin(ny)_{微小扰动} \quad , \ \ y \in R\end{cases}$$ 其解为 $u = u(x,y) = \frac{1}{n^2}\sin(ny)\sinh(nx), \ x \geq 0, y \in R$

又 $\begin{cases}u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(0,y) = 0, \ \ u_x(0,y) = 0\end{cases}$ 其解为 $u_0(x,y) = 0$　显然 $\left|\frac{1}{n}\sin(ny)\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$，但是对一切 $x > 0$, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\sup|u(x,y) - u_0(x,y)|_{做差最大值} = \sup|u(x,y)| = \frac{1}{n^2}\left|\frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2}\right| \to \infty$$

说明初值仅仅只有微小扰动，最终值却发生极大的变化，因此该问题不适定。

达芬方程（右图）



1.4.6 反问题和数值天气预报

1.5 线性叠加原理

1.5.1 引入

叠加原理 物理学解释：**几种不同原因综合**产生的效果等于这些原因**单独产生效果的累加**

例如力的叠加原理、电场的叠加原理、电势叠加原理（标量、向量场均有叠加原理）

思考问题 叠加原理存在性、其表现形式、应用

线性 PDE 叠加原理

适用条件 泛定方程、定解条件都是**线性的**：线性定解问题（对于线性，叠加原理是普适的）

数学表达 将复杂的定解问题看作是若个相对简单部分的线性叠加而成，这几个部分所得出的解的线性叠加给出的形式解，即为原定解问题的解 （"化归"思想）

意义 线性偏微分方程及其重要的特征，是求解线性偏微分方程的出发点

本质 将复杂定解问题分解为若干个简单的定解问题

1.5.2 线性定解问题

线性算符 一般地，线性方程 $\mathbf{L}u(x,y,z,t)=0$的算符 L 称为**线性算符**。c_1,c_2,u_1,u_2是任意的

有特点 $\boldsymbol{L(c_1u_1+c_2u_2)=c_1L(u_1)+c_2L(u_2)}$ $\Leftrightarrow$ ***线性***

线性算子的组合也是线性算子，例如热传导算子 $L=\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 也是线性算子

典例 微分算符$\partial/\partial x$、积分算符等 $\frac{\partial}{\partial t}(c_1u_1+c_2u_2)=c_1\frac{\partial u_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial u_2}{\partial t}$

非线性算符 如$\sqrt{A},\ln(A),\sin(A)$等

① 线性微分算子 L 考虑自变量$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$的二阶线性偏微分方程：

$$L[u]=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x)$$

可简写为$L[u]=f$，则 L 为二阶线性偏微分算子

② 线性边界条件 $L_0[u]=\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)|_{\partial\Omega}=\phi$，其中$L_0$为线性算子

1.5.3 叠加原理

有限叠加原理 若u_i满足线性方程$L[u_i]=f_i$（或定解条件$B[u_i]=g_i$），

则$u=\sum_{i=1}^{n}c_iu_i$（线性组合）满足方程$L[u]=\sum_{i=1}^{n}c_if_i$

具体应用 例如：非齐次波动方程的 Cauchy 问题：$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),-\infty<x<\infty,t>0\\ u|_{t=0}=\phi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x)\quad -\infty<x<\infty\end{cases}$

其解可以化为下方两解之和：(1) $\begin{cases}u_{vv}-a^2v_{xx}=0,-\infty<x<\infty,t>0\\ v|_{t=0}=\phi(x),v_t|_{t=0}=\psi(x)\quad -\infty<x<\infty\end{cases}$

(2) $\begin{cases}w_{vv}-a^2w_{xx}=f(x,t),-\infty<x<\infty,t>0\\ w|_{t=0}=0,w_t|_{t=0}=0,\quad -\infty<x<\infty\end{cases}$

无限叠加原理 若u_i满足线性方程$L[u_i]=f_i$（或定解条件$B[u_i]=g_i$）且函数级数$\sum_{i=1}^{\infty}c_iu_i$在 W 内收敛，

并且 L,B 可以逐项作用，则和函数$u=\sum_{i=1}^{\infty}c_iu_i$满足方程$L[u]=\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i$

若$u_i(i=1,2,\dots)$满足有$\begin{cases}L[u_i]=f_i \quad \text{(线性方程或线性定解条件)}\\ \sum_{i=1}^{\infty}c_iu_i(\text{收敛})=u\ \text{且可以逐项微分两次}\\ \sum_{i=1}^{\infty}c_if_i(\text{收敛})=f\end{cases}$

$\Rightarrow L\left[\sum_{i=1}^{\infty}c_iu_i\right]=\sum_{i=1}^{\infty}c_if_i$，即$L[u]=f$

具体应用 **例如：热传导方程的叠加原理**

设$u_k(x,t)$, $k=1,2,3\ldots$是方程$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$(x,t)\in G$的解，如级数$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k u_k(x,t)$在 G 内收敛并且对 t 可以逐项求导一次，对 x 可逐项求导两次，则和函数在 G 内仍然是方程的解。

如果$u_k(x,t)$是方程的解，那么它的无限线性组合仍然是方程的解。

1.5.4 应用与反例

1. 求泊松方程$u_{xx}+u_{yy}=x^2-3xy+2y^2$的通解。

思路：分别考虑 ① $V_{xx}+V_{yy}=x^2-3xy+2y^2$的一个特解$V(x,y)$

② $W_{xx}+W_{yy}=0$的通解$W(x,y)$

对①，设$V(x,y)=ax^4+bx^3y+cy^4$ 代入方程，得到$V_{xx}+V_{yy}=12ax^2+6bxy+12cy^2=x^2-3xy+2y^2$

2. 对非线性方程$u_t+uu_x=0$

法一：容易验证$u(x,t)=\frac{x}{t+1}$是方程的一个解，然而$\frac{cx}{t+1}$并非方程的解，除非$c=0,1$则$cL(u)\neq L(cu)$，不满足线性算符

法二：令$u=u_1+u_2$，则计算$(u_1+u_2)_t+(u_1+u_2)(u_1+u_2)_x$是否等于$u_{1t}+u_1u_{1x}+u_{2t}+u_2u_{2x}$