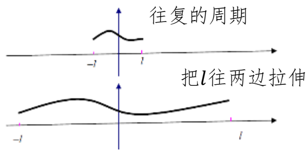
第五章 傅里叶积分变换

5.1 傅里叶积分变换定义

5.1.1 知识回顾



傅里叶级数展开 (周期函数) 傅里叶**级数展开** $\overset{\text{极限 } l\to\infty}{=}$ (非周期函数) 傅里叶**积分表达**

以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 $[-l,l]$上可表达：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t, n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t, n=1,2,\cdots \end{cases}$$ 考虑a_n,b_n的表达式，得到：

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\left(\cos\frac{n\pi t}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}+\sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left[\frac{n\pi}{l}(x-t)\right]\mathrm{d}t$$ 若令$\alpha_n=\frac{n\pi}{l},\Delta\alpha_n=\frac{\pi}{l}$

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left[\alpha_n(x-t)\right]\mathrm{d}t\right\}\Delta\alpha_n$$

假定 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上**绝对可积**, $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty$，则$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t=0$

$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos[\alpha(x-t)]\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\alpha$ 为$f(x)$的傅里叶积分公式。

对积分表达进一步处理，利用欧拉公式:$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}=\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha(x-t)}dtd\alpha+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha(x-t)}dtd\alpha$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha(x-t)}dtd\alpha$$ $f(x)$的傅里叶积分公式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f(t)e^{-i\alpha t}dt}\right\}d\alpha$$ 记为$F(\alpha)$,**称为$f(x)$的傅里叶变换$\mathcal{F}[f(x)]$**

5.1.2 傅里叶积分变换的定义

基本条件 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任一有限区间上满足 Dirichlet 条件,在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积

傅里叶变换 广义积分：$\boldsymbol{F(\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f(t)}e^{-i\alpha t}dt$ 为$f(x)$的傅里叶变换,记为$F(\alpha)=\mathcal{F}[f(x)]$

傅里叶逆变换 $\boldsymbol{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$ 为 $F(\alpha)$的傅里叶**逆变换**,记为 $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\alpha)]$

关系 “信号”$f(x)$ $\underset{\text{“反演” }\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}\text{ 傅里叶分析}}{\rightleftarrows}}$ $F(\alpha)$ 频谱分布函数

注意 傅里叶积分变换来自于非周期傅里叶函数的积分表达，**两者成对出现**

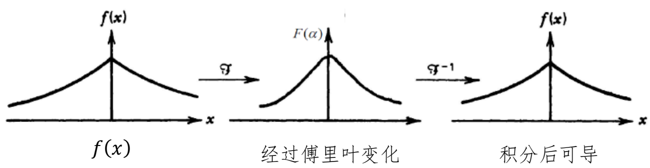
示例：　求函数的傅里叶变换，其中 a 为常数：　$(1) f(x)=e^{-a|x|}$；　$(2) f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant a,\\ 0, |x|>a.\end{cases}$

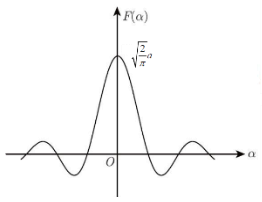
① $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}e^{-i\alpha x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x(a-i\alpha)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{x(-a-i\alpha)}\mathrm{d}x\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\alpha^2}$

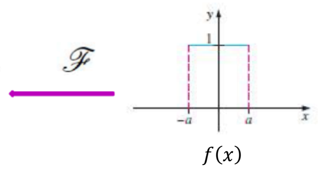
上式中：$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a-i\alpha}\int_{-\infty}^{0} d e^{x(a-i\alpha)}$ 可以继续积分

② 当 $\alpha\neq 0$ 时 $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-i\alpha x}\mathrm{d}x_{\text{可以写为正余弦形式}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\alpha)}{\alpha}$

当 $\alpha=0$ 时 $\lim\limits_{\alpha\to 0}F(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin(a\alpha)}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}a=F(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} dx$ 验证极限值等于函数值，连续







5.2 傅里叶积分变换的性质

5.2.1 线性性质

内容　傅里叶变换和逆变换都是**线性变换**,即　（积分满足线性性质）

$$\mathcal{F}[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]=c_1\mathcal{F}[f_1(x)]+c_2\mathcal{F}[f_2(x)]=c_1F_1(\alpha)+c_2F_2(\alpha)$$
$$\mathcal{F}^{-1}[c_1F_1(\alpha)+c_2F_2(\alpha)]=c_1\mathcal{F}^{-1}[F_1(\alpha)]+c_2\mathcal{F}^{-1}[F_2(\alpha)]=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$$

5.2.2 位移性质

内容　设 x_0 为任意实常数,则 $\boldsymbol{\mathcal{F}[f(x\pm x_0)]=\mathrm{e}^{\pm i\alpha x_0}\mathcal{F}[f(x)]}$　　设：$f(x)\xrightarrow{\mathcal{F}}F(\alpha)$，则$f(x-c)\xrightarrow{\mathcal{F}}e^{-i\alpha c}F(\alpha)$

证明　$\mathcal{F}[f(x-\mathrm{c})]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-c)e^{-i\alpha x}dx\xrightarrow{令\xi=x-c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\alpha\xi}e^{-i\alpha c}d\xi$

5.2.3 相似性质（伸缩性质）

内容　设 c 为任意非零实常数，则$\boldsymbol{\mathcal{F}[f(cx)]=\frac{1}{|c|}F\left(\frac{\alpha}{c}\right)}$

证明　$\mathcal{F}[f(cx)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(cx)e^{-i\alpha x}dx\xrightarrow{令\xi=cx\ (c>0)}\frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\frac{\alpha}{c}\xi}d\xi=\frac{1}{c}F\left(\frac{\alpha}{c}\right)$

$\xrightarrow{令\xi=cx\ (c<0)}\frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{-\infty} f(\xi)e^{-i\frac{\alpha}{c}\xi}d\xi=\frac{1}{c}F\left(\frac{\alpha}{c}\right)=-\frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\frac{\alpha}{c}\xi}d\xi$　合并后为绝对值

5.2.4 微分性质

内容　若当$|x|\to\infty$ 时,$f(x)\to 0$　（函数在无穷远处为零）　$f^{(k)}(x)\to 0$　$(k=1,2,\cdots,n-1)$，则

$\mathcal{F}[f'(x)]=\mathrm{i}\alpha\mathcal{F}[f(x)]$，$\mathcal{F}[f''(x)]=(\mathrm{i}\alpha)^2\mathcal{F}[f(x)],\cdots,\boldsymbol{\mathcal{F}[f^{(n)}(x)]=(\mathrm{i}\alpha)^n\mathcal{F}[f(x)]}$

变化前为求导，变化后为幂的形式

证明　$\mathcal{F}[f'(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,e^{-i\alpha x}dx\xrightarrow{分部积分}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-i\alpha x}\big|_{-\infty}^{\infty}$ 此项为零 $-(-i\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx=\mathrm{i}\alpha\mathcal{F}[f(x)]$

在像原函数空间一阶求导，等价于在该处乘上一个$\mathrm{i}\alpha$

5.2.5 积分性质

$$\mathcal{F}\left[\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\alpha}\mathcal{F}[f(x)]$$

证明　$\left(\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)'=f(x)\xRightarrow{两边傅里叶}\mathcal{F}\left[\left(\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)'\right]=F(\alpha)$　　$\mathcal{F}\left[\left(\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)'\right]=(i\alpha)\mathcal{F}\left[\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$

5.2.6 乘多项式性质

$$\mathcal{F}[xf(x)]=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}F(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha},\cdots,\mathcal{F}[x^n f(x)]=\mathrm{i}^n\frac{\mathrm{d}^n F(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^n}$$

证明 $\mathcal{F}[xf(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,e^{-i\alpha x}dx=-\frac{1}{i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\alpha}(f(x)e^{-i\alpha x})dx=\boldsymbol{i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\alpha}(f(x)e^{-i\alpha x})dx$

$=i\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)e^{-i\alpha x})dx\right)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}F(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$

5.2.7 卷积定理

卷积运算 定义 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积运算为 $f(x)*g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt$

性质 $\mathcal{F}[(f*g)(x)]=F(\alpha)G(\alpha)$ $\boldsymbol{\mathcal{F}^{-1}[F(\alpha)G(\alpha)]=(f*g)(x)}$ **后者常用（频谱域→物理空间）**

示例 1. 计算下列二个函数的卷积：$\begin{cases}f(x)=x\\ g(x)=e^{-x^2}\end{cases}$

$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\xi)e^{-\xi^2}d\xi=\frac{x}{\sqrt{2}}$ （已知结论 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi=\sqrt{\pi}$）

2. 计算卷积。定义$g_n(x)$：$g_n(x)=\begin{cases}n\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & |x|\le\frac{1}{n}\\ 0, & 其它.\end{cases}$ $f(x)$在 $(-\alpha,\alpha)$上连续有界,并由它定义

一个新的函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$.试计算$f(x)*g_n(x)$

有：$f(x)*g_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g_n(t)dt=\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}f(x-t)dt=\frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}f(t)dt$

$f(x)*g_n(x)=\frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}f(t)dt=\frac{F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$ 引申为：$\lim_{n\to\infty}f(x)*g_n(x)=F'(x)=f(x)$

3. 计算函数 $f(x)=e^{-\frac{a}{2}x^2}$ 的傅里叶变换

根据定义有 $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-i\alpha x}dx$（直接计算复杂） 进而得到$F(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ax^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}$

又有：$f(x)=e^{-\frac{a}{2}x^2}\to f'(x)+axf(x)=0\overset{两边傅里叶变换}{=}i\alpha F(\alpha)+ai\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}=0\overset{微分方程}{-}F(\alpha)=Ce^{-\frac{\alpha^2}{2a}}$

可得：$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}$ 即有：$e^{-\frac{a}{2}x^2}\overset{\mathcal{F}}{\to}\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}$ 可用公式$(a\to 2a)$：$\boldsymbol{e^{-ax^2}\overset{\mathcal{F}}{=}\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}}$

例如，计算$e^{-\tilde{a}^2\alpha^2 t}\overset{\mathcal{F}^{-1}}{=}$？ 有：$\sqrt{2a}e^{-ax^2}\overset{\mathcal{F}}{=}e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}$ 则：$\begin{cases}\frac{1}{4a}=\tilde{a}^2t\\ a=\frac{1}{4\tilde{a}^2t}\end{cases}$ 则逆变换 $\frac{1}{\tilde{a}}\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4\tilde{a}^2t}}$