第六章 格林函数方法

6.1 从高斯散度定理到格林公式

6.1.1 散度定理

内容 设Ω是$\mathbb{R}^3$中以足够光滑的曲面$\partial\Omega$ 为边界的有界区域, 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$上连续且在 Ω 内具有一阶连续偏导数，并令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R})$，则有如下公式成立：

$$\iiint_{\Omega}\nabla\cdot A dV=\iint_{\partial\Omega}A\cdot n dS$$

其中，n为$\partial\Omega$上的单位外法线方向。

6.1.2 第二格林公式

推导 由散度定理：$\iiint_{\Omega}\nabla\cdot AdV=\iint_{\partial\Omega}A\cdot ndS$，令$P=u\frac{\partial v}{\partial x}, Q=u\frac{\partial v}{\partial y}, R=u\frac{\partial v}{\partial z}$

可得：$\iiint_{\Omega}u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，将$u,v$位置互换，可得：

$\iiint_{\Omega}v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\nabla v\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 再将这两个式子做减法。

公式 $\boldsymbol{\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S}$

6.1.3 第三格林公式

6.1.3.1 三维拉普拉斯方程的基本解

条件 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的给定区域，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 Ω 中某固定点，$M(x,y,z)$为 Ω 中的动点，

记$r_{MM_0}=|MM_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ 为M_0和M两点间的距离

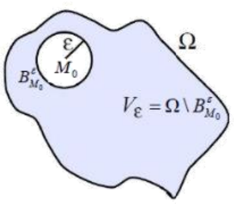
解 则有$\boldsymbol{v=-\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}}$ 满足三维拉普拉斯方程$\Delta v=0$，$M\neq M_0$，称其为**三维拉普拉斯方程的基本解**

6.1.3.2 第三格林公式

定理 若 $u(M)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，则对任意 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$, 成立第三格林公式

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial}{\partial n}(u(M))-u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right]\mathrm{d}S-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

证明 内部点的信息依靠边界点的信息获取。$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\overset{v=\frac{1}{r_{MM_0}}}{=}$



$\iiint_{\Omega\setminus B_{M_0}^{\varepsilon}}\left[u(M)\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)-\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u(M)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega\cup\partial B_{M_0}^{\varepsilon}\text{两个面}}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)-\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$

当$\varepsilon_{\text{半径}}\to 0$时，在 $\partial B_{M_0}^{\varepsilon}$ 上，$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)=\frac{1}{\varepsilon^2}$ 得到：

$-\iiint_{\Omega}\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)-\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S+4\pi u(M_0)$

6.1.4 格林公式的应用—调和函数的基本性质

定义 一个调和函数是一个二阶连续可导的函数f，其**满足拉普拉斯方程** $\Delta f = 0$

基本积分表达式 $M_0 \in \Omega$ $\quad \boldsymbol{u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial}{\partial n}\big(u(M)\big) - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right]dS}$

注意

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n} - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right]\mathrm{d}S \quad M_0 \in \partial\Omega_{\text{表面}}$$

$$u(M_0) = 0 \qquad M_0 \notin \bar{\Omega}$$

Neumann 边值问题有解的必要条件 $\begin{cases} -\Delta u = F(x,y,z) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f(x,y,z) \end{cases}$ 有解 $\longrightarrow \iiint_\Omega F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = -\iint_{\partial\Omega} f\mathrm{d}S$

拉普拉斯方程有解的必要条件 $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f(x,y,z) \end{cases}$ 有解$\rightarrow \oiint_{\partial\Omega} f\mathrm{d}S = 0$

调和函数的球面平均值公式 $u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\partial B_{M_0}^a} u(M)\mathrm{d}S$