第三章 选择最大信息预报因子

章节引入

早在天气图出现之前，民间就已经广泛流传着有关天气的谚语。因为天气与人类的生活是密切相关的。谚语所反映的就是前期的征兆与后期天气的统计关联性。仅就降水而言，降水过程有共同性，也有特殊性，**单一预报指标**必然不能用在所有的降水过程。选择**最大信息的预报指标**（因子）可以减少天气预报的漏报率和空报率。

3.1 概率和条件概率以及预报指标

3.1.1 状态要素与随机事件

状态要素 指表征气象要素的各种状态，观测结果用**非数值型**数据表征。

事件 自然界中的各种现象。状态要素的各种状态可视为**随机事件**，例如：下雨、不下雨、小雨、大雨等都可能出或不出现，每一种状态都是随机的。

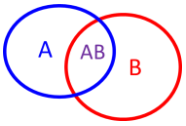
3.1.2 频率与概率

频率 衡量事件出现**可能性大小**的数量指标。n次观测次数中，事件A出现n_A次，则事件A的频率为 n_A/n。

概率 当观测的资料n足概大时（接近总体），$P(A)$ **稳定接近某个常数**时，这就是概率。

概率是事件的**总体特征**（频率的理论值），**频率**是事件的**样本值**（概率的估计值）。

3.2 条件概率和天气预报指标



条件概率 在事件 B 已经发生的条件下计算事件 A 的概率(此处都是状态要素，非连续)，称为事件 A 在事件 B 已出现条件下的条件概率，记为$P(A/B)$。若事件 AB 同时出现的概率为$P(AB)$，则 $\boldsymbol{P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}}$

重要意义 **条件概率是统计预报的基础**。统计天气预报中，往往将事件 A 取为所要预报的具体内容，而将 B 取为事件 A 发生之前的某个**前期**气象条件。 使用数值模式，可以预报出未来的**同期**气象条件。

应用举例

事件 A：长江中下游五站平均的当年 6 月降水小于 250mm 的情况

事件 B：长江中下游五站当年 1 月平均降水小于 22mm 的情况

统计 1885-1980 年共 96 年资料统计得：$P\ A\ =69/96=0.72$　　$P\ A/B\ =13/14=0.93$

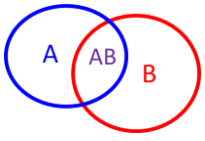
则当 1 月份观测五站平均降水小于 22mm 时，可预报 6 月降水小于 250mm，预报时效 5 个月。

指标判断 条件概率能否作为预报指标的判断必须满足 **2 个经验性条件：**

① $\boldsymbol{P(A/B)\gg P(A)}$ **或** $\boldsymbol{P(A/B)\ll P(A)}$，**差异至少在 0.2 以上**，说明 A 与 B 之间有一定的联系。

② $\boldsymbol{P(A/B)\to 1}$**或** $\boldsymbol{P(A/B)\to 0}$，预报指标有较高的准确率。

3.1.3 事件的独立性



独立事件 如果事件 B 的出现与否不影响事件 A 出现的概率，则称事件 A 对于事件 B 是独立的，满足：$P(A)=P(A/B)$ 或者 $\boldsymbol{P(AB)=P(A)\cdot P(B)}$

① 概率为 0 的事件与任何事件相互独立。

② 若事件A和B相互独立，则$\bar{A}$与B独立，A与$\bar{B}$相互独立，$\bar{A}$与$\bar{B}$也相互独立。

3.3 天气预报指标的统计检验

3.3.1 二项类预报

二项类预报 只预报事件A出现或者不出现$\bar{A}$，又叫正反预报。此类预报，可以有很多预报指标，但评估其可靠程度需要了解它们的概率分布。

概率分布 定义符号：在n次独立试验中，事件A出现m次的概率为$P_n(m)$。现在，定义一个事件B，B表示前面A事件发生m次，后面$n-m$发生不发生A事件，既然是独立试验，有：$P(B)=\underbrace{P(A)\dots P(A)}_{m}\times\underbrace{P(\bar{A})\dots P(\bar{A})}_{n-m}$

$P(B)=p^n(1-p)^{n-m}$ ，由于对出现的位置没有限制，那么出现位置的概率是一个组合数，所以有：

$$\boldsymbol{P_n(m)=C_n^mP(B)=C_n^mp^m(1-p)^{n-m}}$$

排列组合的基本知识

布袋中有n个球（每个球都有自己的标号），拿出m个球，（不考虑次序）可能情况的个数是

$$C_n^m=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

三个条件

① 每次试验只有 2 个结果：A出现和A不出现。

② 试验条件不变，每次试验A和$\bar{A}$出现的概率是不变的。

③ 试验之间是相互独立的。

应用 计算天气现象出现的概率，特别是小概率事件。例如：冰雹、龙卷、超强台风等。

案例：中国体彩大乐透中头奖的概率

彩票规则：35 选 5（前区）加 12 选 2（后区），都选中则获奖。

前区概率：$P\ A\ =1/35,P(A)=34/35$，5 个数字都中的概率：$P_5(5)=C_5^5(\frac{1}{35})^5(\frac{34}{35})^0$；

后区概率：$P\ A\ =1/12,P(A)=11/12$，2 个数字都中的概率：$P_2(2)=C_2^2\ \frac{1}{12}\ ^5\ \frac{11}{12}\ ^0$；

最终总的概率为：$P=P_5(5)P_2(2)=1/7{,}563{,}150{,}000$

3.3.2 预报指标的检验

检验的重要性

通过检验，可以认为在设定的标准意义上，**样本的特性可以代表总体的特性**。

3.3.2.1 用二项分布检验天气预报指标

指标检验 预报指标的检验实际上是**反面**来检验该预报指标的**可靠程度**，历史拟合的准确率则从**正面**说明。

检验方法 检验某一条件概率所指示的事件是**属于偶然性**还是**具有规律性**的一种方法，某事件A出现的无条件概率是p，而在条件B时，发现事件A出现的**频率**是$m_{\text{同时发生的次数}}/n_{\text{发生}B\text{的次数}}$，则：

$$\boldsymbol{Q=\sum_{r=m}^{n}C_n^rp^r(1-p)^{n-r}}$$

Q表示在发生B的n次试验中，事件A至少出现m次的概率，**一般小于 0.05 时**我们认为它是一个小概率事件，即**超偶然**。大于 0.05 时，说明这种事很容易发生m次以上，我们认为它偶然出现的概率很大，所以不用条件B做为预报指标。

在利用条件概率进行预报时，我们要求发生的事件不是偶然发生的，就要求其偶然发生的概率非常低，如果在事件B下A发生的偶然发生的概率非常大，说明B指标不能用。

即**当A出现的概率越小，在B中出现的次数越多，Q就越小。**

案例

有云的 10 天中降水 6 天，且降水的无条件概率为 0.2，则 Q 表示任意 10 天（就是观察到B的 10 天，即在B的条件下）中，出现 6 天或以上降水的概率仅仅为 0.637%，这种事件显然不太可能。

如果考虑$p=0.8$（A本身很大），且$P\ A/B\ =0.95$的情况，就会发现最终结果取决于n的大小：n较大时，说明这 0.15 的提升是显著的，不太可能是因为偶然因素；n较小时，无法确认有效性。

证明与解释

① 假设B条件下，A的发生是偶然的（是无规律的），记为H_1。

② 那么在n次试验中它就容易出现m次及其以上的次数，发生的概率记为Q。

③ 当$Q>0.05$时，A发生m次以上的次数，不是一个小概率事件，H_1成立；说明发生A是偶然的。

④ 当$Q\leq 0.05$时，A发生m次以上的次数，是一个小概率事件，H_1被推翻，说明发生A是非偶然的，是有规律的。

3.3.2.2 小概率事件

小概率事件 随机事件以很小的概率发生，概率很接近于 0（即在大量重复试验中出现的频率非常低）的事件。

小概率标准 一般**多采用 0.01~0.05 两个值**，即事件发生的概率在 0.01 以下或 0.05 以下的事件称为小概率事件。

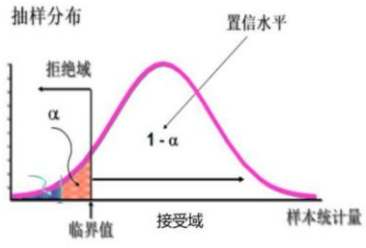
3.3.2.3 小概率事件的应用：假设检验

检验方法 ① **H_0为原假设**，**H_1为与原假设对立的备择假设**（对立假设）；假设H_0成立；**选定显著性水平α**。

② 构造一个**随机事件A**：当原假设成立时随机事件A以**很小的概率**发生；发现H_0成立是一个小概率事件：从总体中抽取**一个样本**在H_0成立的条件下进行检验，若发现选定的统计量（随机变量）取到此样本代入统计量后的值**是一个小概率事件**，亦即小概率事件在一次试验中发生了，这与小概率原理矛盾。

③ 一般来说，该事件在一次试验中小概率事件不应发生，若发生了，则**否定原假设H_0**，**接受与其对立的备择假设H_1**；**反之，接受H_0**

基本思想 首先对**总体的参数或分布形式做出一个假设（原假设）**，然后利用**样本信息**来判断这个假设是否合理。原理是利用小概率事件在一次试验中**几乎是不发生的**来接受或否定假设，是一种有概率性质的反证法。



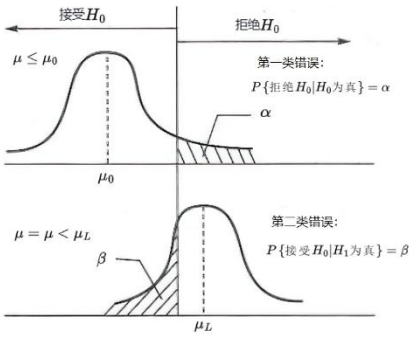
注意两点 ① 这里的**几乎不可能发生**是针对**一次试验**来说的，因为试验次数多了，该事件当然是很可能发生的。

② 当我们运用小概率事件几乎不可能发生的原理进行推断时，**我们也有α%的犯错误的可能**。

两类错误 ① **第一类错误：拒真错误**，即本来原假设是正确的，而根据样本得出的统计量的值落入了拒绝域，拒绝了正确的原假设 **(概率为α)**

② **第二类错误：受伪错误**，即本来原假设是错误的，而根据样本得出的统计量的值落入了接受域，不能拒绝原假设，接受了（确切地说是不拒绝）原本错误的原假设**(概率难以估计)**

两类错误的概率不等，由于第一类错误的概率较小，**一般情况下以拒绝假设的结论为好**。



一般步骤 ① 明确要检验的问题，提出统计假设H_0，与备择假设H_1

② 确定**显著性水平α (0.01, 0.05, 0.1)**（置信水平=1-显著性水平）

③ 在H_0的假设下，针对研究问题，**选取**一个适当的**统计量**；根据观测样本**计算**有关**统计量**；

④ 对给定的 α，根据统计分布，确定事件H_0发生的概率，即确定出临界值，求出H_0的拒绝域；

⑤ 比较统计量计算值与临界值，判断是否显著。

3.4 简单相关系数及检验

状态要素 可以用**条件概率**选择预报因子并且用**二项分布检验**预报因子的可靠程度。

定量数据 主要用**相关系数**选择预报因子或因子集，并用 **t 检验方法**检验其可靠性。

现象间关系 自然界中各现象间存在普遍的关系：

① **确定性关系**：数学上的函数关系　　② **非确定性的关系**：统计上的相关关系（研究出发点）

③ **相关系数**：度量各现象（各要素）间相关程度的量