第一章 大气运动的基本特征

引言　　大气运动在空间和时间上具有**很宽的尺度谱**。天气学研究与天气和气候有关的大气运动，可以忽略离散的分子特性，把大气视为**连续的流体介质**，表征大气状态的物理量在连续介质中具有**单一的值**，这些场变量及其导数是空间和时间的**连续函数**。控制大气运动的流体力学热力学方程基本定律可以用场变量作为因变量和时空为自变量的偏微分方程表示。 大气运动受到质量守恒、动量守恒、能量守恒等**基本物理定律**支配，为了应用这些定律，本章讨论基本作用力、旋转坐标系中的视示力、控制大气运动的基本方程组，并在此基础上分析大尺度运动系统的风场和气压场的关系，引出天气图分析中应当遵循的基本原则。

1.1 影响大气运动的作用力

系统　在**时间或空间**上能够与其他系统区分开来的**一个实体**。在系统与系统间存在着界面，各系统的物理量可以通过界面交换。

天气学中，气旋、反气旋等系统虽然与周围大气无明确界面，在性质上有明显不同，是开放系统。

尺度　表征一个系统在**空间上的大小**或者在**时间上持续的长短**。

一般来说，无论在高空还是在地面，空间尺度越小，时间尺度也相应越短。

气象学中的尺度一般指特征尺度，不反应个体具体数值。

天气尺度：$10^6\mathrm{m} = 1000\mathrm{km}$

大气　天气学分析中将大气视为**低粘性的流体**。符合**连续介质假设**。

基本力　真实作用于大气的力，其存在与参考系无关，也称为**牛顿力**。例如气压梯度力、地心引力、摩擦力等。

视示力　由于坐标系随地球一起旋转而形成的相对运动加速度的力。包括**惯性离心力**和**地转偏向力**。

若作用力分析中同时包含基本力和视示力，则牛顿第二运动定律适用于地球旋转非惯性系。

大气分层　对流层、平流层、中间层、热层、散逸层（详见大气物理学）

对流层平均厚度为10~20km，特征量级10^1km

参考系　为了确定物体的**位置**和描述其**运动**而选作标准的另一物体

观测风是相对于地面的，风向是相对于观测地的经纬度确定的，由此可见，选择地球为参照系是最直观和方便的。但地球是旋转的，是一个非惯性系，为适用牛顿第二定律，需引入微分算子等内容。

惯性系　牛顿第二定律成立的参考系称为惯性参考系，反之称为非惯性系。

研究地球上运动的物体时，太阳参考系是惯性参考系。

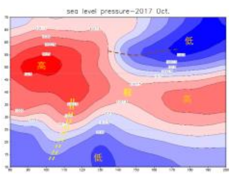
天气学中，参考系如何选择，原则上是任意的，但在一般研究中通常选择地球作为参考系。

坐标系　为了定量地表示物体相对于**参照系**的位置而选定的变数(**坐标**)的组合。

天气学中常用有：**球坐标系、局地直角坐标系、自然坐标系**(地球上流体的运动带有曲率，在水平方向上取流线建立τ,n方向)、**p坐标系**(气压为垂直坐标)、**σ坐标系**(用于数值预报，用气压和地表气压相除，简化地形处理)、**θ坐标系**（位温为垂直坐标，等熵坐标）

1.1.1 基本作用力

内容　基本作用力(基本力)包括**气压梯度力G、地心引力g^*、摩擦力F**。



该图可见低压槽
高压脊、鞍形场

气压水平分布不均

1.1.1.1 气压梯度力

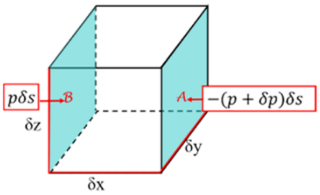
气压　在任何表面上由于**大气的重量**所产生的**压力**，即单位面积上所受到空气柱的重力。

产生　水平方向上气压不是处处相等的。地球各纬度带吸收的热量分布不均，于是高低纬度间产生了热量差，引起上升或下沉的垂直运动，从而导致同一水平面的气压有差异。**对流层顶：~$200hPa$**

天气图表现　气压梯度反映在天气图上就是等压线的分布有疏有密，等压线的疏密程度表示了单位距离内气压差的大小，等压线愈密集，表示气压梯度愈大。

定义　作用于**单位质量气块**上的**净压力**，由于**气压分布不均匀**而产生　$\vec{G} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$

推导 取局地直角坐标系中的小立方体空气块，其密度为ρ，体积为$\delta\tau = \delta x\delta y\delta z$



x方向受力：B面气压为p，则B面所受气压为$p\delta s$　其中$\delta s = \delta y\delta z$

已知沿x方向**气压变化率**为$\frac{\partial p}{\partial x}$，则**气压变化量**$\delta p = \frac{\partial p}{\partial x}\delta x$

则A面所受气压为$-(p+\delta p)\delta s$。则x方向**净合力**为$p\delta s - (p+\delta p)\delta s = -\delta p\delta s = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x\delta y\delta z$

同理，其余方向有：　y方向净合力：$-\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$　　z方向净合力：$-\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$

则**总受净合力**为：$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\delta x\delta y\delta z = -\boldsymbol{\nabla p\delta\tau}$　**考虑单位质量：**$m = \rho\delta\tau$

则气压梯度力为：$\frac{-\nabla p\delta\tau}{\rho\delta\tau} = -\frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{G}$

性质 ① 气压梯度力的**大小与气压梯度成正比**，**与空气密度成反比**。
② 方向与等压线垂直，指向$-\nabla p$方向，由高压指向低压。（梯度方向由小到大）
③ 水平分量远小于垂直分量　$-\frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)$ 然而大气垂直方向受重力静力平衡
“热生风，风生雨”：热力造成气压不均匀，在气压梯度作用下，风便产生了；辐合辐散可能降雨。

1.1.1.2 地心引力

一般定义 $\vec{F}_g = -\frac{GmM}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$　质量为m 的空气块受到的质量为 M 的地球的引力

地心引力 $\boldsymbol{\vec{g}^*} = \frac{\boldsymbol{F_g}}{\boldsymbol{m}} = -\frac{\boldsymbol{GM}}{\boldsymbol{r^2}}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$，$r = a + z$　**单位质量块**受到的引力，a为地球平均半径，z为海拔高度

$\vec{g}_0^* = -\frac{GM}{a^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$　忽略地表到空气块之间的距离z，海平面上的地心引力**（常数）**

则地心引力可写为$\vec{g}^* = \frac{\vec{g}_0^*}{(1+z/a)^2}$

注意 z一般在10km左右，考虑到$z \ll a$，故$\vec{g}^* \approx \vec{g}_0^*$，可近似为常数。

1.1.1.3 摩擦力(分子粘性力)

概念 **单位质量空气块所受到的净粘滞力**。分为外摩擦力和内摩擦力，内摩擦力有分子粘性力和湍流粘性力

来源 大气中任一气块当其与周围大气以**不同速度**运动时，由于**粘性**作用，立方体的各个面都与它周围的空气互相拖拉，即互相受到**粘滞力**的作用。**其方向指向速度反方向**。

公式 $\vec{F} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\vec{k}\right)$　其中$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 为动力粘滞系数

注意 上述公式中都是对于高度的二阶导数，其余方向为二阶小量被忽略。
一般而言，天气学实际公式中，尤其是自由大气运动方程中，无需考虑摩擦力影响。

特点 ① 摩擦力与**风垂直切变的垂直变化**成**正比**
② 风垂直切变的垂直变化为正时，摩擦力指向正向，摩擦力使气块作正向加速。
③ 风垂直切变的垂直变化为负时，摩擦力指向负向，摩擦力使气块作负向加速。
④ 大气是低粘度流体，在100km下的大气层内$\nu = 1.46 \times 10^{-5} m^2/s$很小，除**近地面(行星边界层)**外大部分气层**(自由大气)**可忽略分子粘滞性作用。
这种气层中动量主要由湍流运动传递，此时以涡动粘滞系数代替分子粘滞系数。

推导 大气气块摩擦力的推导基于粘性流体切应力作用：当风速分量u随高度非线性变化时（$\partial^2 u/\partial z^2 \neq 0$），微立方体上下界面因速度梯度差异产生切应力差。切应力$\tau_{zx} = \mu\frac{\partial u}{\partial z}$，上下表面应力差$\Delta\tau_{zx} \approx \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\delta z$。净粘滞力=$\Delta\tau_{zx} \cdot$面积，除以质量$\rho\delta V$得单位质量摩擦力$F_x = \frac{\nu\partial^2 u}{\partial z^2}$。同理推导$y$方向，垂直方向摩擦力可忽略。该力源于速度二阶导数，反映动量垂直输送的净效应。
具体推导请参考教材正文。

1.1.2 视示力

1.1.2.1 微分算子

旋转参考系 假设考虑运动的参考系**本身**是以一定的**角速度绕轴转动**的，这种参考系称为**旋转参考系**。

微分算子 $\frac{d_a}{dt}(\square)=\frac{d}{dt}(\square)+\vec{\Omega}\times(\square)$ ① **绝对变化项** ② **相对变化项** ③ **牵连变化项**

对于**任意矢量$\vec{A}$**，满足：$\frac{d_a}{dt}(\vec{A})=\frac{d}{dt}(\vec{A})+\vec{\Omega}\times(\vec{A})$ 该算子是联系惯性坐标系与旋转坐标系的**普遍关系**

对于标量而言，无需引入关系式，其在不同坐标系中相同

证明 对任意矢量$\boldsymbol{A}$，可写在不同的坐标系中，用不同i,j,k表达：

绝对坐标系 惯性静止坐标系，有 $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$ 单位坐标矢量为**常矢量**

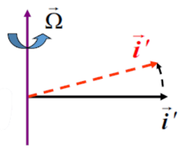
旋转坐标系 相对坐标系，有$\vec{A}=A'_x\vec{i}'+A'_y\vec{j}'+A'_z\vec{k}'$ 单位坐标矢量**可变**(x,y轴会随着地球旋转改变)

求该矢量对时间t的导数：

绝对：$\frac{d_a\vec{A}}{dt}=\frac{d_aA_x}{dt}\vec{i}+\frac{d_aA_y}{dt}\vec{j}+\frac{d_aA_z}{dt}\vec{k}$ $\frac{d_r\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA'_x}{dt}\vec{i}'+\frac{dA'_y}{dt}\vec{j}'+\frac{dA'_z}{dt}\vec{k}'$ （省略下标r）

$\frac{d_a\vec{A}}{dt}=\frac{d_a(A'_x\vec{i}'+A'_y\vec{j}'+A'_z\vec{k}')}{dt}\overset{\text{全微分 展开}}{=\!=}$ $\frac{d_a\vec{A}}{dt}=\frac{d_aA'_x}{dt}\vec{i}'+\frac{d_aA'_y}{dt}\vec{j}'+\frac{d_aA'_z}{dt}\vec{k}'+A'_x\frac{d_a\vec{i}'}{dt}+A'_y\frac{d_a\vec{j}'}{dt}+A'_z\frac{d_a\vec{k}'}{dt}$ 坐标的变化

$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA'_x}{dt}\vec{i}'+\frac{dA'_y}{dt}\vec{j}'+\frac{dA'_z}{dt}\vec{k}'$ A'_x,A'_y,A'_z为**标量**在绝对坐标系和相对坐标系中的**时间微商相同**



由于$\vec{i}'$是旋转系中的单位矢量，所以$\frac{d_a\vec{i}'}{dt}$**表示$\vec{i}'$的转动速度**，有：（根据方向和大小可得）

$\frac{d_a\vec{i}'}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{i}'$ $\frac{d_a\vec{j}'}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{j}'$ $\frac{d_a\vec{k}'}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{k}'$ 上式变为：$\frac{d_a\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}+A'_x\vec{\Omega}\times\vec{i}'+A'_y\vec{\Omega}\times\vec{j}'+A'_z\vec{\Omega}\times\vec{k}'$

故有 $\frac{d_a\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{A}$

关于标量的说明：**上述算子只适用于矢量的情形**，而标量的绝对变化与相对变化没有差别。

1.1.2.2 惯性离心力

概念 单位质量的气块因为地球旋转呈现出的一种惯性力。在旋转坐标系中物体受到向心力的作用却静止。这违反牛顿运动定律，从而引入此力以平衡向心力使牛顿运动定律成立。惯性离心力在**纬圈平面**内与向心力大小相等方向相反 。

公式 $\vec{C}=\Omega^2\vec{R}$ 其由于位于非惯性坐标系内观测运动并运用牛二解释的结果

地球情况 $\Omega=1.29\times10^{-5}s^{-1}$ 位于地球上观察时，地表上每一静止的物体都受到该力作用

特点
① 地球上每个静止物体都受到惯性离心力作用
② 惯性离心力与地轴垂直，在纬圈平面内，指向地球外侧
③ 地球自转角速度是常数，惯性离心力的大小随纬度变化，赤道上最大，极地最小，在极地为 0

1.1.2.3 地转偏向力

概念 当气块相对地球运动时使气块运动方向发生改变的一种惯性力

由于坐标系的旋转导致物体没有受力却出现加速度违反牛顿运动定律而引入的视示力

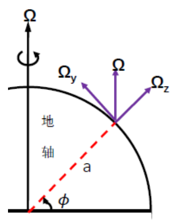
公式 $\vec{A}=-2\vec{\Omega}\times\vec{V}=-2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & \Omega\cos\phi & \Omega\sin\phi\\ u & v & w\end{vmatrix}=(2\Omega v\sin\phi-2\Omega w\cos\phi)\vec{i}-2\Omega u\sin\phi\vec{j}+2\Omega u\cos\phi\vec{k}$

推导 先对地球**自转角速度进行分解**：

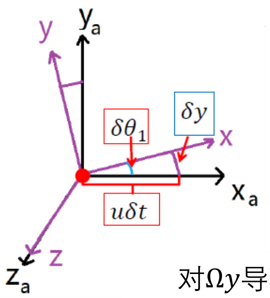
$\Omega_x=0$ yoz平面不绕着 x 轴旋转

$\Omega_y=\Omega\cos\phi$ xoz平面绕着 y 轴以角速度 Ω y旋转

$\Omega_z=\Omega\sin\phi$ xoy平面绕着 z 轴以角速度 Ω z旋转



局地直角坐标系
x正方向为⊗

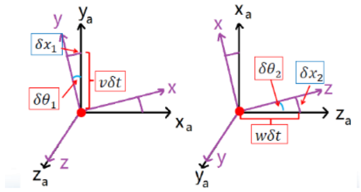


考虑Ωz，紫色为$O-xyz$旋转坐标系，$O-x_a y_a z_a$为绝对坐标系。一质点向x_a运动。
经过δt时间，Ω_z使得xoy平面绕着z轴逆时针旋转了$\delta\theta_1=\Omega\sin\phi\,\delta t$，坐标轴发生了变化：
x轴向原始x_a左侧发生偏转，空气块位置**相对x轴向右(y负方向)偏离了δy**

$$\delta y=u\delta t\delta\theta_1=u\delta t\,\Omega\sin\phi\,\delta t=\frac{1}{2}\left(-\frac{dv}{dt}\right)(\delta t)^2\Rightarrow\frac{1}{2}\left(-\frac{dv}{dt}\right)=u\,\Omega\sin\phi\Rightarrow\frac{dv}{dt}=-2\Omega u\sin\phi$$

则得到**偏向加速度**。

对Ωy导致的变化，同理，经过δt时间，Ω_y使得xoz平面绕着y轴逆时针旋转了$\delta\theta=\Omega\cos\phi\,\delta t$
x轴相对x_a 轴向 z轴的反方向偏转，空气块的位置偏离到x轴上方 δz 处



$$\delta z=u\delta t\delta\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dt}\right)(\delta t)^2\Rightarrow\frac{dw}{dt}=2\Omega u\cos\phi$$

同理，对于$v>0,w>0$，可以得到沿着x方向的偏向加速度。

$$\left.\begin{aligned}\delta x_1&=v\delta t\delta\theta_1=v\delta t\delta\Omega\sin\phi\,\delta t=\frac{1}{2}\left(\frac{du_1}{dt}\right)(\delta t)^2\Rightarrow\frac{du_1}{dt}=2\Omega v\sin\phi\\ \delta x_2&=w\delta t\delta\theta_2=w\delta t\Omega\cos\phi\,\delta t=\frac{1}{2}\left(-\frac{du_2}{dt}\right)(\delta t)^2\Rightarrow\frac{du_2}{dt}=-2\Omega w\cos\phi\end{aligned}\right\}\frac{du}{dt}=2\Omega v\sin\phi-2\Omega w\cos\phi$$

分量

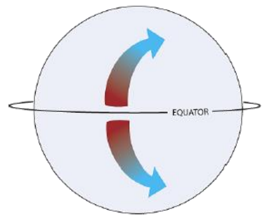
若令**地转参数(科里奥利参数)** $\boldsymbol{f=2\Omega\sin\phi_{纬度}}$,$\boldsymbol{\tilde{f}=2\Omega\cos\phi}$

$$\boldsymbol{A_x=\frac{du}{dt}}=2\Omega v\sin\phi-2\Omega w\cos\phi=\boldsymbol{fv-\tilde{f}w}$$

则各个方向有：

$$\boldsymbol{A_y=\frac{dv}{dt}}=-2\Omega u\sin\phi=\boldsymbol{-fu}$$

$$\boldsymbol{A_z=\frac{dw}{dt}}=2\Omega u\cos\phi=\boldsymbol{\tilde{f}u}$$



地球绕着其地轴旋转，在北半球大气将向着运动方向的右侧偏转而在南半球将向着运动方向的左侧发生偏转。这种偏转被称为科里奥利效应。

特点

① 根据叉乘关系，地转偏向力$\vec{A}$**与**$\vec{\Omega}$**相垂直**，在纬圈平面内。

② 地转偏向力$\vec{A}$**与风速**$\vec{V}$**垂直**，只改变气块运动方向，不改变速度大小

③ A_z一般比较小(与重力相比很小)，气块运动主要受A_x和A_y的影响，且 $w\sim10^{-2}m/s$比较小，近似有$\boldsymbol{A_x=fv,\ A_y=-fu}$。对水平运动，在北半球水平地转偏向力在水平速度的**右侧**，使得运动右偏；在南半球水平地转偏向力在水平速度的**左侧**，使得运动左偏。

④ 地转偏向力$\vec{A}$与相对速度$\vec{V}$成比例，$\vec{V}=0$时地转偏向力消失；水平地转偏向力与纬度的正弦成比例

1.2 控制大气运动的基本定律

基本定律 **动量守恒、质量守恒、能量守恒**三大定律。对应有连续方程、热力学能量方程

基本假设 分析大气中一个无限小控制体积的质量、动量和能量变化。欧拉观点下，控制体积由$\delta x, \delta y, \delta z$的平行六面体构成，位置固定；拉格朗日观点下，控制体积随大气运动而移动，包含空气质点不变。

气象变量 每种气象要素都是随时随地变化的，称之为气象变量，包括了标量和矢量。标量的空间变率特点常用梯度和拉普拉斯等物理量表征。气象要素是空间和时间的函数$A = A(x, y, z, t)$

气象要素场 确定时间的气象要素的空间分布称为气象要素场或气象变量场。

梯度 ∇A 表示气象场变量的空间变率，是三维矢量。拉普拉斯算子ΔA表示梯度的梯度，是梯度的空间变率

1.2.1 全导数和局地导数的关系

引入 需要导出运动气块中的场变量变化率(全导数或实质导数)与固定点上场变量变化率(局地导数)的关系

假设 选取某个特定的气象要素场温度，讨论全导数与局地导数的关系。

1.2.1.1 微商算符

微商算符 $\frac{\mathbf{d}(\square)}{\mathbf{dt}} = \frac{\partial(\square)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(\square)$

① **个别变化率** 气块在运动中其要素随时间的变化率，是场变量的全导数

② **局地变化率** 某一**固定空间位置**上要素随时间的变化，是场变量的局地导数

③ **平流变化** 物理量**场的非均匀性**引起的变化

推导 假设温度为$T(x, y, z, t)$，对于某特定气块，位置(x, y, z)随t改变。

假设初始情况：(x_0, y_0, z_0, t)，经过δt气块到达$(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$，且温度变化$\delta T$

根据泰勒展开：$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\delta z + \text{高阶项}$ 除以δt，并取$\delta t \to 0$，有：

$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\delta x}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\delta y}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\frac{\delta z}{dt}$ 则得到 $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T$

符号注意 上式中$\vec{V}$表示全速度，∇表示三维微分矢量算子。气象上$\vec{V}$表示水平速度，∇_h表示二维微分矢量算子

气象公式 $\frac{\partial(\square)}{\partial t} = \frac{d(\square)}{dt} - \vec{V} \cdot \nabla_h(\square) - w\frac{\partial(\square)}{\partial z}$ 其中$-\vec{V} \cdot \nabla_h(\square)$称为**温度平流变化**，$-w\frac{\partial(\square)}{\partial z}$称为**对流变化**。

平流变化 气块在温度水平分布不均匀的区域内保持原有的温度做水平运动而对局地温度变化所提供的贡献。或：当某一属性随空间分布不均时，在风的作用下，产生输送作用引起的局地变化。

1.2.1.2 绝对加速度与相对加速度

运动速度 **惯性坐标系**与**旋转坐标系**中的运动速度之间满足：$\vec{V}_{a\text{绝对速度}} = \vec{V}_{\text{相对速度}} + \vec{V}_{e\text{牵连速度}}$

例如，人在运动的火车上运动，地面为惯性坐标系(绝对坐标系)，火车为相对坐标系，$\vec{V}_a$为地面上看人的速度，$\vec{V}$为火车上观测到的人的速度，$\vec{V}_e$就是火车相对地面的速度，这个速度可直线可曲线。

由于引进旋转坐标系而产生的**牵连速度**：$\vec{V}_e = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ 其中$\vec{\Omega}$为由于旋转产生的转动角速度

回归矢径随时间的变化的形式：$\frac{d_a\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ （惯性坐标系建立于遥远太空中的某一点）

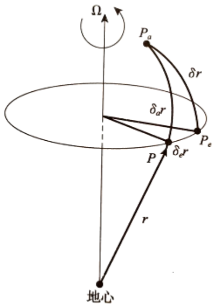
论证 如右图，初始时刻t_0在P点有**空气质块与观测者**。

经过δt时间后，空气块向北运动，到达P_a点；观测者随地球自转，到达P_e点

此时**绝对坐标系**中空气块由$P \to P_a$，绝对位移为$\delta_a\vec{r}$；观测者由$P \to P_e$，位移为$\delta_e\vec{r}$

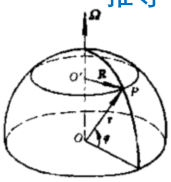
此时**相对坐标系**中空气块由$P_e \to P_a$，为$\delta\vec{r}$

于是有：$\delta_a\vec{r} = \delta_e\vec{r} + \delta\vec{r}$ 同除以dt，得 $\frac{d_a\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d_e\vec{r}}{dt}$，即为$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{V}_e$



运动加速度 $\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}_{地转偏向加速度}+\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})_{向心加速度}$ 或 $-\Omega^2\vec{R}_{纬圈半径}$

推导 对任意矢量$\boldsymbol{A}$取为任意流体质点对应的绝对速度矢量$\boldsymbol{V}_a$时，可以得到绝对加速度表达式：



$$\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}_a}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{V}_a\Rightarrow\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d(\vec{V}+\vec{\Omega}\times\vec{r})}{dt}+\vec{\Omega}\times(\vec{V}+\vec{\Omega}\times\vec{r})\Rightarrow\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}+\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

其中：$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})=\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{R})=-\Omega^2\vec{R}_{纬圈面半径}$ 故 $\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}-\Omega^2\vec{R}$