第一章 大气运动的基本特征

引言　　大气运动在空间和时间上具有**很宽的尺度谱**。天气学研究与天气和气候有关的大气运动，可以忽略离散的分子特性，把大气视为**连续的流体介质**，表征大气状态的物理量在连续介质中具有**单一的值**，这些场变量及其导数是空间和时间的**连续函数**。控制大气运动的流体力学热力学方程基本定律可以用场变量作为因变量和时空为自变量的偏微分方程表示。 大气运动受到质量守恒、动量守恒、能量守恒等**基本物理定律**支配，为了应用这些定律，本章讨论基本作用力、旋转坐标系中的视示力、控制大气运动的基本方程组，并在此基础上分析大尺度运动系统的风场和气压场的关系，引出天气图分析中应当遵循的基本原则。

1.1 影响大气运动的作用力

系统　在**时间或空间**上能够与其他系统区分开来的**一个实体**。在系统与系统间存在着界面，各系统的物理量可以通过界面交换。

天气学中，气旋、反气旋等系统虽然与周围大气无明确界面，在性质上有明显不同，是开放系统。

尺度　表征一个系统在**空间上的大小**或者在**时间上持续的长短**。

一般来说，无论在高空还是在地面，空间尺度越小，时间尺度也相应越短。

气象学中的尺度一般指特征尺度，不反应个体具体数值。

天气尺度：$10^6\mathrm{m} = 1000\mathrm{km}$

大气　天气学分析中将大气视为**低粘性的流体**。符合**连续介质假设**。

基本力　真实作用于大气的力，其存在与参考系无关，也称为**牛顿力**。例如气压梯度力、地心引力、摩擦力等。

视示力　由于坐标系随地球一起旋转而形成的相对运动加速度的力。包括**惯性离心力**和**地转偏向力**。

若作用力分析中同时包含基本力和视示力，则牛顿第二运动定律适用于地球旋转非惯性系。

大气分层　对流层、平流层、中间层、热层、散逸层（详见大气物理学）

对流层平均厚度为$10\sim20\mathrm{km}$，特征量级$10^1\mathrm{km}$

参考系　为了确定物体的**位置**和描述其**运动**而选作标准的另一物体

观测风是相对于地面的，风向是相对于观测地的经纬度确定的，由此可见，选择地球为参照系是最直观和方便的。但地球是旋转的，是一个非惯性系，为适用牛顿第二定律，需引入微分算子等内容。

惯性系　牛顿第二定律成立的参考系称为惯性参考系，反之称为非惯性系。

研究地球上运动的物体时，太阳参考系是惯性参考系。

天气学中，参考系如何选择，原则上是任意的，但在一般研究中通常选择地球作为参考系。

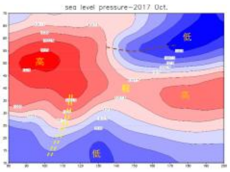
坐标系　为了定量地表示物体相对于**参照系**的位置而选定的变数(**坐标**)的组合。

天气学中常用有：**球坐标系、局地直角坐标系、自然坐标系**(地球上流体的运动带有曲率，在水平方向上取流线建立τ,n方向)、**p坐标系**（气压为垂直坐标）、**σ坐标系**（用于数值预报，用气压和地表气压相除，简化地形处理）、**θ坐标系**（位温为垂直坐标，等熵坐标）

1.1.1 基本作用力

内容　基本作用力(基本力)包括**气压梯度力G、地心引力g^*、摩擦力F**。

该图可见低压槽
高压脊、鞍形场



气压水平分布不均

1.1.1.1 气压梯度力

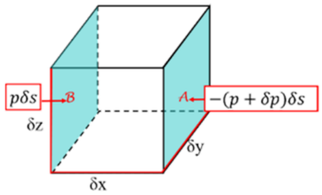
气压　在任何表面上由于**大气的重量**所产生的**压力**，即单位面积上所受到空气柱的重力。

产生　水平方向上气压不是处处相等的。地球各纬度带吸收的热量分布不均，于是高低纬度间产生了热量差，引起上升或下沉的垂直运动，从而导致同一水平面的气压有差异。**对流层顶：$\sim 200hPa$**

天气图表现　气压梯度反映在天气图上就是等压线的分布有疏有密，等压线的疏密程度表示了单位距离内气压差的大小，等压线愈密集，表示气压梯度愈大。

定义　作用于**单位质量气块**上的**净压力**，由于**气压分布不均匀**而产生　$\vec{G} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$

推导 取局地直角坐标系中的小立方体空气块，其密度为ρ，体积为$\delta\tau = \delta x\delta y\delta z$



x方向受力： B面气压为p，则B面所受气压为$p\delta s$ 其中$\delta s = \delta y\delta z$

已知沿x方向**气压变化率**为$\frac{\partial p}{\partial x}$，则**气压变化量**$\delta p = \frac{\partial p}{\partial x}\delta x$

则A面所受气压为$-(p+\delta p)\delta s$。则x方向**净合力**为$p\delta s-(p+\delta p)\delta s = -\delta p\delta s = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x\delta y\delta z$

同理，其余方向有： y方向净合力：$-\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$ z方向净合力：$-\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$

则**总受净合力**为：$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\delta x\delta y\delta z = \boldsymbol{-\nabla p\delta\tau}$ **考虑单位质量：**$m = \rho\delta\tau$

则气压梯度力为：$\frac{-\nabla p\delta\tau}{\rho\delta\tau} = -\frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{G}$

性质 ① 气压梯度力的**大小与气压梯度成正比**，**与空气密度成反比**。

② 方向与等压线垂直，指向$-\nabla p$方向，由高压指向低压。（梯度方向由小到大）

③ 水平分量远小于垂直分量 $-\frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)$ 然而大气垂直方向受重力静力平衡

“热生风，风生雨”：热力造成气压不均匀，在气压梯度作用下，风便产生了；辐合辐散可能降雨。

1.1.1.2 地心引力

一般定义 $\vec{F}_g = -\frac{GmM}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ 质量为m的空气块受到的质量为M的地球的引力

地心引力 $\vec{g}^* = \frac{F_g}{m} = -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$，$r = a+z$ **单位质量块**受到的引力，a为地球平均半径，z为海拔高度

$\vec{g}_0^* = -\frac{GM}{a^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ 忽略地表到空气块之间的距离z，海平面上的地心引力**（常数）**

则地心引力可写为$\vec{g}^* = \frac{\vec{g}_0^*}{(1+z/a)^2}$

注意 z一般在10km左右，考虑到$z \ll a$，故$\vec{g}^* \approx \vec{g}_0^*$，可近似为常数。

1.1.1.3 摩擦力(分子粘性力)

概念 **单位质量空气块所受到的净粘滞力**。分为**外摩擦力**和**内摩擦力**，内摩擦力有**分子粘性力**和**湍流粘性力**

来源 大气中任一气块当其与周围大气以**不同速度**运动时，由于**粘性**作用，立方体的各个面都与它周围的空气互相拖拉，即互相受到**粘滞力**的作用。**其方向指向速度反方向**。

公式 $\vec{F} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\vec{i}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\vec{j}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\vec{k}\right)$ 其中$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 为动力粘滞系数

注意 上述公式中都是对于高度的二阶导数，其余方向为二阶小量被忽略。

一般而言，天气学实际公式中，尤其是自由大气运动方程中，无需考虑摩擦力影响。

特点 ① 摩擦力与**风垂直切变的垂直变化**成**正比**

② 风垂直切变的垂直变化为正时，摩擦力指向正向，摩擦力使气块作正向加速。

③ 风垂直切变的垂直变化为负时，摩擦力指向负向，摩擦力使气块作负向加速。

④ 大气是低粘度流体，在100km下的大气层内$\nu = 1.46\times10^{-5}m^2/s$很小，除**近地面(行星边界层)**外大部分气层**(自由大气)**可忽略分子粘滞性作用。

这种气层中动量主要由湍流运动传递，此时以涡动粘滞系数代替分子粘滞系数。

推导 大气气块摩擦力的推导基于粘性流体切应力作用：当风速分量u随高度非线性变化时（$\partial^2 u/\partial z^2 \neq 0$），微立方体上下界面因速度梯度差异产生切应力差。切应力$\tau_{zx} = \mu\frac{\partial u}{\partial z}$，上下表面应力差$\Delta\tau_{zx} \approx \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\delta z$。

净粘滞力=$\Delta\tau_{zx}\cdot$面积，除以质量$\rho\delta V$得单位质量摩擦力$F_x = \frac{\nu\partial^2 u}{\partial z^2}$。同理推导$y$方向，垂直方向摩擦力可忽略。该力源于速度二阶导数，反映动量垂直输送的净效应。

具体推导请参考教材正文。

1.1.2 视示力

1.1.2.1 微分算子

旋转参考系 假设考虑运动的参考系**本身**是以一定的**角速度绕轴转动**的，这种参考系称为**旋转参考系**。

微分算子 $\frac{d_a}{dt}(\;)=\frac{d}{dt}(\;)+\vec{\Omega}\times(\;)$ ① **绝对变化项** ② **相对变化项** ③ **牵连变化项**

对于**任意矢量$\vec{A}$**，满足：$\frac{d_a}{dt}(\vec{A})=\frac{d}{dt}(\vec{A})+\vec{\Omega}\times(\vec{A})$ 该算子是联系惯性坐标系与旋转坐标系的**普遍关系**

对于标量而言，无需引入关系式，其在不同坐标系中相同

证明 对任意矢量$\boldsymbol{A}$，可写在不同的坐标系中，用不同i,j,k表达：

绝对坐标系 惯性静止坐标系，有 $\vec{A}=A_x\vec{\imath}+A_y\vec{\jmath}+A_z\vec{k}$ 单位坐标矢量为**常矢量**

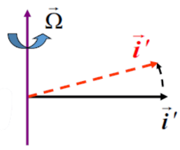
旋转坐标系 相对坐标系，有$\vec{A}=A_x'\vec{\imath}'+A_y'\vec{\jmath}'+A_z'\vec{k}'$ 单位坐标矢量**可变**(x,y轴会随着地球旋转改变)

求该矢量对时间t的导数：

绝对：$\frac{d_a\vec{A}}{dt}=\frac{d_aA_x}{dt}\vec{\imath}+\frac{d_aA_y}{dt}\vec{\jmath}+\frac{d_aA_z}{dt}\vec{k}$ $\frac{d_r\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA_x'}{dt}\vec{\imath}'+\frac{dA_y'}{dt}\vec{\jmath}'+\frac{dA_z'}{dt}\vec{k}'$ （省略下标r）

$$\frac{d_a\vec{A}}{dt}=\frac{d_a(A_x'\vec{\imath}'+A_y'\vec{\jmath}'+A_z'\vec{k}')}{dt}\xrightarrow{\text{全微分 展开}}\frac{d_a\vec{A}}{dt}=\frac{d_aA_x'}{dt}\vec{\imath}'+\frac{d_aA_y'}{dt}\vec{\jmath}'+\frac{d_aA_z'}{dt}\vec{k}'+A_x'\frac{d_a\vec{\imath}'}{dt}+A_y'\frac{d_a\vec{\jmath}'}{dt}+A_z'\frac{d_a\vec{k}'}{dt}$$ 坐标的变化

$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA_x'}{dt}\vec{\imath}'+\frac{dA_y'}{dt}\vec{\jmath}'+\frac{dA_z'}{dt}\vec{k}'$ A_x',A_y',A_z'为**标量**在绝对坐标系和相对坐标系中的**时间微商相同**



由于$\vec{\imath}'$是旋转系中的单位矢量，所以$\frac{d_a\vec{\imath}'}{dt}$**表示$\vec{\imath}'$的转动速度**，有：（根据方向和大小可得）

$\frac{d_a\vec{\imath}'}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{\imath}'$ $\frac{d_a\vec{\jmath}'}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{\jmath}'$ $\frac{d_a\vec{k}'}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{k}'$ 上式变为：$\frac{d_a\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}+A_x'\vec{\Omega}\times\vec{\imath}'+A_y'\vec{\Omega}\times\vec{\jmath}'+A_z'\vec{\Omega}\times\vec{k}'$

故有 $\frac{d_a\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{A}$

关于标量的说明：**上述算子只适用于矢量的情形**，而标量的绝对变化与相对变化没有差别。

1.1.2.2 惯性离心力

概念 单位质量的气块因为**地球旋转**呈现出的一种惯性力。在旋转坐标系中物体受到**向心力**的作用却静止，这违反牛顿运动定律，从而引入此力以平衡向心力使牛顿运动定律成立。惯性离心力在**纬圈平面**内与向心力大小相等方向相反 。

公式 $\vec{C}=\Omega^2\vec{R}$ 其由于位于非惯性坐标系内观测运动并运用牛二解释的结果，是向心力的反号。

地球情况 $\Omega=1.29\times10^{-5}s^{-1}$ 位于地球上观察时，地表上每一静止的物体都受到该力作用

特点

① 地球上每个静止物体都受到惯性离心力作用

② 惯性离心力与地轴垂直，**在纬圈平面内，指向地球外侧**

③ 地球自转角速度是常数，惯性离心力的大小随纬度变化，赤道上最大，极地最小，在极地为 0

1.1.2.3 地转偏向力

概念 当气块相对地球运动时使气块运动方向发生改变的一种惯性力

由于坐标系的旋转导致物体没有受力却出现加速度违反牛顿运动定律而引入的视示力

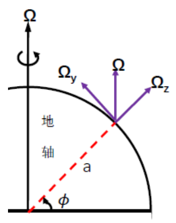
公式
$$\vec{A}=-2\vec{\Omega}\times\vec{V}=-2\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\0&\Omega\cos\phi&\Omega\sin\phi\\u&v&w\end{vmatrix}=(2\Omega v\sin\phi-2\Omega w\cos\phi)\vec{\imath}-2\Omega u\sin\phi\vec{\jmath}+2\Omega u\cos\phi\vec{k}$$

推导 先对地球**自转角速度进行分解**：

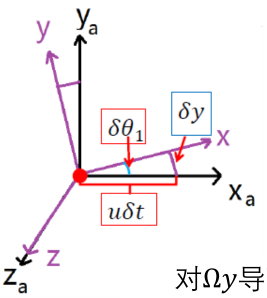
$\Omega_x=0$ yoz平面不绕着 x 轴旋转

$\Omega_y=\Omega\cos\phi$ xoz平面绕着 y 轴以角速度 Ω y旋转

$\Omega_z=\Omega\sin\phi$ xoy平面绕着 z 轴以角速度 Ω z旋转



局地直角坐标系
x正方向为⊗

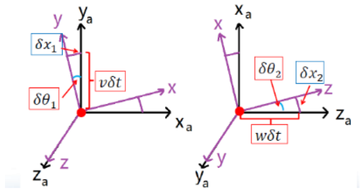


考虑Ωz，紫色为$O-xyz$旋转坐标系，$O-x_ay_az_a$为绝对坐标系。一质点向x_a运动。
经过δt时间，Ω_z使得xoy平面绕着z轴逆时针旋转了$\delta\theta_1=\Omega\sin\phi\,\delta t$，坐标轴发生了变化：
x轴向原始x_a左侧发生偏转，空气块位置**相对x轴向右(y负方向)偏离了δy**

$$\delta y=u\delta t\delta\theta_1=u\delta t\,\Omega\sin\phi\,\delta t=\frac{1}{2}\left(-\frac{dv}{dt}\right)(\delta t)^2\Rightarrow\frac{1}{2}\left(-\frac{dv}{dt}\right)=u\,\Omega\sin\phi\Rightarrow\frac{dv}{dt}=-2\Omega u\sin\phi$$

则得到**偏向加速度**。旋转地球上，局地u的变化会引起v的加速，表现为科氏力。

对Ωy导致的变化，同理，经过δt时间，Ω_y使得xoz平面绕着y轴逆时针旋转了$\delta\theta=\Omega\cos\phi\,\delta t$
x轴相对x_a 轴向 z轴的反方向偏转，空气块的位置偏离到x轴上方 δz 处



$$\delta z=u\delta t\delta\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dt}\right)(\delta t)^2\Rightarrow\frac{dw}{dt}=2\Omega u\cos\phi$$

同理，对于$v>0,w>0$，可以得到沿着x方向的偏向加速度：

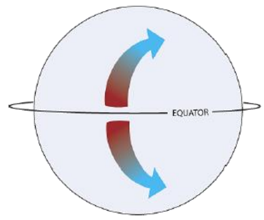
$$\left.\begin{aligned}\delta x_1&=v\delta t\delta\theta_1=v\delta t\delta\Omega\sin\phi\,\delta t=\frac{1}{2}\left(\frac{du_1}{dt}\right)(\delta t)^2\Rightarrow\frac{du_1}{dt}=2\Omega v\sin\phi\\\delta x_2&=w\delta t\delta\theta_2=w\delta t\Omega\cos\phi\,\delta t=\frac{1}{2}\left(-\frac{du_2}{dt}\right)(\delta t)^2\Rightarrow\frac{du_2}{dt}=-2\Omega w\cos\phi\end{aligned}\right\}\frac{du}{dt}=2\Omega v\sin\phi-2\Omega w\cos\phi$$

v,w的变化引起u的加速，表现为科氏力

分量 若令**地转参数(科里奥利参数)** $\boldsymbol{f=2\Omega\sin\phi_{纬度}}$,$\boldsymbol{\tilde{f}=2\Omega\cos\phi}$

则各个方向有：

$$A_x=\frac{du}{dt}=2\Omega v\sin\phi-2\Omega w\cos\phi=fv-\tilde{f}w$$
$$A_y=\frac{dv}{dt}=-2\Omega u\sin\phi=-fu$$
$$A_z=\frac{dw}{dt}=2\Omega u\cos\phi=\tilde{f}u$$



地球绕着地轴旋转，在北半球大气将向着运动方向的右侧偏转而在南半球将向着运动方向的左侧发生偏转。这种偏转被称为科里奥利效应。

特点 ① 根据叉乘关系，地转偏向力$\vec{A}$**与**$\vec{\Omega}$**相垂直**，在**纬圈平面**内。

② 地转偏向力$\vec{A}$**与风速**$\vec{V}$**垂直**，只改变气块运动方向，不改变速度大小

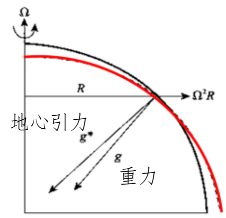
③ A_z一般比较小(与重力相比很小)，气块运动主要受A_x和A_y的影响，且 $w\sim10^{-2}m/s$比较小，近似有$\boldsymbol{A_x=fv,\ A_y=-fu}$。对水平运动，在北半球水平地转偏向力在水平速度的**右侧**，使得运动右偏；在南半球水平地转偏向力在水平速度的**左侧**，使得运动左偏。

④ 地转偏向力$\vec{A}$与**相对速度**$\vec{V}$成比例，$\vec{V}=0$时$\vec{A}$立即消失；水平地转偏向力与纬度的正弦成比例

⑤ 在**赤道**上空$\phi=0°$：**地转偏向力仍然存在**，只有不考虑含w的项才为零。
北极点上空$\phi=90°$：**仅存在水平地转偏向力**。

1.1.3 重力

概念 旋转坐标系中的重力：单位质量大气所受到的**地心引力与惯性离心力**的合力



公式 $\vec{g}=\vec{g}^*+\Omega^2\vec{R}$

特点 ① 重力不指向地心，不与地心引力一致。但**重力垂直于地面**，**垂直于水平面**
即水平面上无重力
② 对正球体，重力可分解为指向球心和沿着经圈的切线方向指向赤道的两个分量，在后者的作用下地球变为一个**椭球体**，极半径短，赤道半径长（红线所示，是一个等位势面/水平面/等几何高度面）
③ 重力与地球椭球体的表面垂直，在地表面，重力没有分量，即在水平面上运动，重力是不做功的。
④ **重力随着纬度的增加而增加**，在赤道最小，极地最大。重力随着高度 z 的增加而减小
⑤ 实际中重力和地心引力的夹角很小，一般在地球的旋转坐标系中就**认为重力指向球心**
极半径与赤道半径相差$20km$左右，可以认为重力指向球心。

1.2 控制大气运动的基本定律

基本定律 **动量守恒、质量守恒、能量守恒**三大定律。对应有运动方程、连续方程、热力学能量方程。

基本假设 分析大气中一个无限小控制体积的质量、动量和能量变化。欧拉观点下，控制体积由$\delta x, \delta y, \delta z$的平行六面体构成，位置固定；拉格朗日观点下，控制体积随大气运动而移动，包含空气质点不变。

气象变量 每种气象要素都是随时随地变化的，称之为气象变量，包括了标量和矢量。**标量的空间变率**常用**梯度∇和拉普拉斯∇^2**等物理量表征。气象要素是空间和时间的函数$A = A(x, y, z, t)$

气象要素场 确定时间的气象要素的空间分布称为气象要素场或气象变量场。

梯度 ∇A表示气象场变量的空间变率，是**三维矢量**。 $\boldsymbol{\nabla_H}$表示**水平梯度**，是二维矢量。

拉普拉斯算子ΔA表示梯度的梯度，是**梯度的空间变率**

1.2.1 全导数和局地导数的关系

引入 需要导出运动气块中的场变量变化率(全导数或实质导数)与固定点上场变量变化率(局地导数)的关系

1.2.1.1 微商算符

微商算符 $\dfrac{\mathbf{d}(\square)}{\mathbf{dt}} = \dfrac{\partial(\square)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(\square)$

① **个别变化率** 气块在运动中其要素随时间的变化率，是场变量的全导数

② **局地变化率** 某一**固定空间位置**上要素随时间的变化，是场变量的局地导数(偏导数)

③ **平流变化** **物理量场的非均匀性**，在风的作用下，产生输送作用引起局地变化。

推导 假设温度为$T(x, y, z, t)$，对于某特定气块，位置(x, y, z)随t改变。

假设**初始情况**：(x_0, y_0, z_0, t)，**经过$\boldsymbol{\delta t}$**气块到达$(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$，且**温度变化$\boldsymbol{\delta T}$**

根据**泰勒展开**：$\delta T = \left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)\delta t + \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)\delta x + \left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)\delta y + \left(\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)\delta z + \text{高阶项}$ 除以δt，并取$\delta t \to 0$，有：

$\dfrac{dT}{dt} = \left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)\dfrac{\delta x}{dt} + \left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)\dfrac{\delta y}{dt} + \left(\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)\dfrac{\delta z}{dt}$ 则得到 $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T$

符号注意 上式中$\vec{V}$表示全速度，∇表示三维微分矢量算子。气象上$\vec{V}$表示水平速度，∇_h表示二维微分矢量算子

气象公式 $\dfrac{\partial(\square)}{\partial t} = \dfrac{d(\square)}{dt} - \vec{V} \cdot \nabla_h(\square) - w\dfrac{\partial(\square)}{\partial z}$ 其中$-\vec{V} \cdot \nabla_h(\square)$称为**平流变化**，$-w\dfrac{\partial(\square)}{\partial z}$称为**对流变化**。

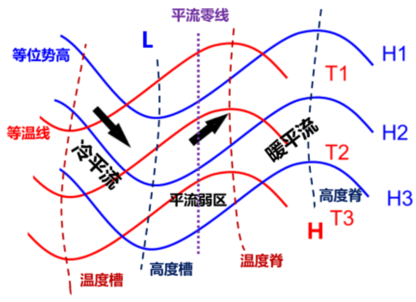
气象中关注的是局地变化，因此写为上式。

平流变化 $-\vec{V} \cdot \nabla_h(\square) < 0$，则$\dfrac{\partial(\square)}{\partial t} < 0$，$-\vec{V} \cdot \nabla_h(\square) > 0$，则$\dfrac{\partial(\square)}{\partial t} > 0$

如右图所示，**等温线与等高线的夹角产生了平流**。$-|\vec{V}| \cdot |\nabla T| \cdot \cos\theta$

最大的冷平流出现在槽线上，当**等温线落后于等高线时**，温度槽到高度槽之间为**冷平流**，温度脊到高度脊之间是**暖平流**，高度槽到温度脊之间有**平流零线，平流较弱**。

向南凹的等温线称**冷舌**；向北凸的称**暖舌**。



冷暖平流和平流零线示意图

1.2.1.2 绝对加速度与相对加速度

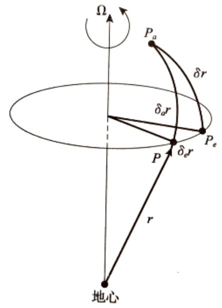
运动速度 **惯性坐标系**与**旋转坐标系**中的运动速度之间满足：$\vec{V}_{a\text{绝对速度}} = \vec{V}_{\text{相对速度}} + \vec{V}_{e\text{牵连速度}}$

例如，人在运动的火车上运动，地面为惯性坐标系(绝对坐标系)，火车为相对坐标系，$\vec{V}_a$为地面上看人的速度，$\vec{V}$为火车上观测到的人的速度，$\vec{V}_e$就是火车相对地面的速度，这个速度可直线可曲线。

由于引进旋转坐标系而产生的**牵连速度**：$\vec{V}_e = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ 其中$\vec{\Omega}$为由于旋转产生的转动角速度

回归矢径随时间的变化的形式：$\dfrac{d_a\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ （惯性坐标系建立于遥远太空中的某一点）

论证　如右图，初始时刻t_0在P点有**空气质块与观测者**。



经过δt时间后，空气块向北运动，到达P_a点；观测者随地球自转，到达P_e点

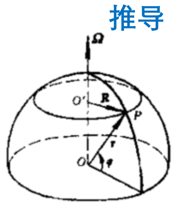
此时**绝对坐标系**中空气块由$P \rightarrow P_a$，绝对位移为$\delta_a \vec{r}$；观测者由$P \rightarrow P_e$，位移为$\delta_e \vec{r}$

此时**相对坐标系**中空气块由$P_e \rightarrow P_a$，为$\delta \vec{r}$

于是有：$\delta_a \vec{r} = \delta_e \vec{r} + \delta \vec{r}$　　同除以dt，得 $\frac{d_a \vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d_e \vec{r}}{dt}$，即为$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{V}_e$

运动加速度　$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_{\text{地转偏向加速度}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})_{\text{向心加速度}}$ 或 $-\Omega^2 \vec{R}_{\text{纬圈半径}}$

推导　对任意矢量$\boldsymbol{A}$取为任意流体质点对应的绝对速度矢量$\boldsymbol{V}_a$时，可以得到绝对加速度表达式：



$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_a}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{V}_a \Rightarrow \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} + \vec{\Omega} \times (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \Rightarrow \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

其中：$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\Omega^2 \vec{R}_{\text{纬圈面半径}}$　　故 $\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \Omega^2 \vec{R}$

1.2.2 大气运动方程

1.2.2.1 一般大气运动方程

受力情况　$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_{\text{地转偏向力}} + \Omega^2 \vec{R}_{\text{惯性离心力}}$　单位质量，加速度即为受力

惯性参考系　根据牛顿第二定律：$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \Sigma_j \vec{F}_{i\ \text{真实力}} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}^* + \vec{F}$　该式称为单位质量空气**绝对运动方程**

旋转参考系　将运动加速度表达式代入上式，并合并重力$\vec{g}$，可得：

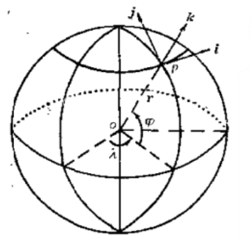
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \vec{F} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_{\text{地转偏向力项}}$$

该式称为单位质量空气**相对运动方程**

如果考虑旋转坐标系的自转角速度为0，方程中的科氏力与惯性离心力不存在，方程退化为 N-S 方程。

1.2.2.2 球坐标系分量方程

球坐标系　坐标为(λ, φ, r)，其中λ为经度，φ为纬度，r为球心距。i, j, k为球坐标单位矢量。



球坐标系

表达式

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv\,\mathrm{tg}\,\varphi}{r} + \frac{uw}{r} = -\frac{1}{\rho\, r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\Omega v\sin\varphi - 2\Omega w\cos\varphi + F_\lambda$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2\mathrm{tg}\,\varphi}{r} + \frac{vw}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial \varphi} - 2\Omega u\sin\varphi + F_\varphi$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\Omega u\cos\varphi + F_r$$

前面为曲率项

推导　具体推导请参考教材正文。

意义　球坐标系中的运动方程分量形式能够描述从近地面层附近到全球大气环流的各种各样的运动，它不仅含有旋转坐标系中的各个作用力，还含有**地球曲率对相对运动加速度的影响**，但形式复杂。在天气学中除个别问题外，一般采用局地直角坐标系的分量方程

1.2.2.3 局地直角坐标系分量方程

坐标系　局地直角坐标系中：$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$，由 1.2.2.2 中**含$r$的曲率加速度项忽略**即可

表达式

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega(v\sin\varphi - w\cos\varphi) + F_x$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u\sin\varphi + F_y$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u\cos\varphi - g + F_z$$

1.2.3 连续方程

1.2.3.1 欧拉型

方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0$ $\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)=0}$

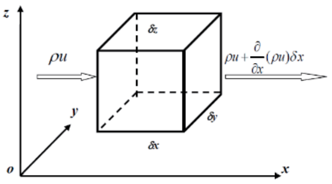
质量通量 $\boldsymbol{\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)=-\frac{\partial \rho}{\partial t}}$ 单位体积的质量通量，表示固定在空间的单位体积内流体的**净流出量等于该单位体积内流体质量的减少**。速度场与密度场是相互制约的。

$\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)>0$ **质量净流出，密度要减小** $\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)<0$ 质量净流入，密度要增大

推导 左侧面流入流量：流入质量 $=\rho u_{\text{面密度}}\ \delta y\delta z_{\text{左侧面面积}}$

右侧面流出流量：流出质量 $=\rho u\delta y\delta z+\frac{\partial(\rho u\delta y\delta z)}{\partial x}\delta x$ 经过左侧面的质量沿着x方向做一阶泰勒展开

$\left.\frac{d(\delta m)}{dt}\right|_{\text{空间体}}=m_{in}-m_{out}$ 固定空间内，流体质量变化取决于流入量与流出量之差



x方向净流出质量：$\rho u\ \delta y\delta z+\frac{\partial(\rho u\ \delta y\delta z)}{\partial x}\delta x-\rho u\ \delta y\delta z=\frac{\partial(\rho u\ \delta y\delta z)}{\partial x}\delta x$

y方向净流出质量：$\rho v\ \delta x\delta z+\frac{\partial(\rho v\ \delta x\delta z)}{\partial y}\delta y-\rho v\ \delta x\delta z=\frac{\partial(\rho v\ \delta x\delta z)}{\partial y}\delta y$

z方向净流出质量：$\rho w\ \delta x\delta y+\frac{\partial(\rho w\ \delta x\delta y)}{\partial z}\delta z-\rho w\ \delta x\delta y=\frac{\partial(\rho w\ \delta x\delta y)}{\partial z}\delta z$

则**所有方向净流出**为：$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial z}\right]\delta x\delta y\delta z$ 又控制体内**质量减少量**：$-\frac{\partial(\rho\delta x\delta y\delta z)}{dt}$

则两式相等：$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0}$ 其中$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}\ \cdots\cdots$

1.2.3.2 拉格朗日型

方程 $\boldsymbol{\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\vec{V}=0}$ 散度>0，体积增大，则密度减小

推导 由 $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0$，导出 $\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$

$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}=\frac{d\rho}{dt}$ 利用微商算符

速度散度 $\boldsymbol{\nabla\cdot\vec{V}}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$ $\left(\rho=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow \ln\rho=\ln\frac{1}{\alpha}\right)$

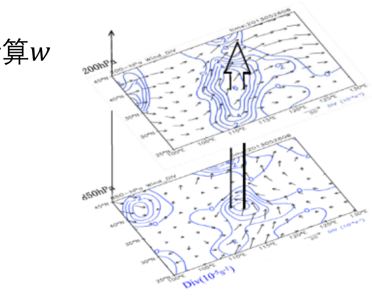
流体在单位时间内体积的相对膨胀率，或者说在单位时间内单位体积在膨胀时所增加的部分

$\nabla\cdot\vec{V}>0$ **体积增大 辐散，其密度要减小**；$\nabla\cdot\vec{V}<0$ 体积缩小 辐合，其密度要增大

水平散度 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ 流体在单位时间内水平面积的相对膨胀率 只考虑前两项

不可压流体 当流体**不可压**，**密度为常数**时：$\frac{d\rho}{dt}=0\Rightarrow\nabla\cdot\vec{V}=0$ 不可压缩流体的速度散度为零

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ 将水平风场与垂直运动联系在了一起：可观测u,v，计算w



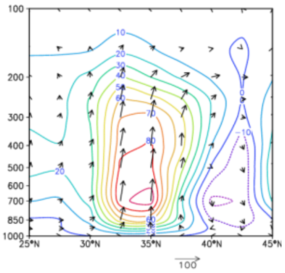
某次南方气旋成熟阶段水平散度的空间分布
高层有辐散，低层有辐合，有上升运动

1.2.3.3 P坐标系连续方程

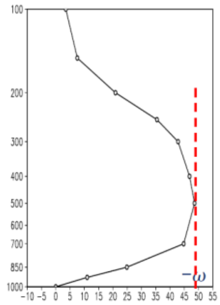
方程 $\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0}$

$\omega=\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\approx-\rho g w$ ω小于零，表示上升运动

理解



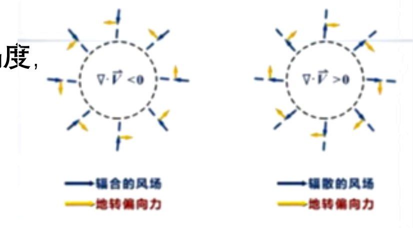
$v-\omega$经向高度剖面图（沿$115E$）（等值线为ω；箭头表示经向垂直环流$v-\omega$，ω均放大-10^4）



$115-117.5E$，$30-40N$ 平均垂直速度ω廓线（放大-10^4）

① 通过上升运动，空气中的水汽有可能发生冷却和凝结，形成云滴和雨滴，天空中才会有各种云，才有可能形成雨雪。在这个过程中也会有热量的变化，会影响到大气的温度场分布。

② **辐散或者辐合的风场**，在地转偏向力作用下形成**气旋或者反气旋性涡度**，对涡度的生消有重要的作用。(右图)



1.3.4 热力学能量方程

1.3.4.1 基本形式

方程 $c_v\frac{dT}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt}=\dot{Q}$

热力平衡 大气中任取一物质体积元都可视为一个热力学系统，但它**处于运动中**，不是一个热力学平衡系统。然而，把大气体积元这一热力学系统**瞬时能量**看成**内能**（**分子总动能**与分子间**相互作用总势能**之和）和**大气宏观运动动能**之和组成，则可以将该系统看作一个热力平衡系统。

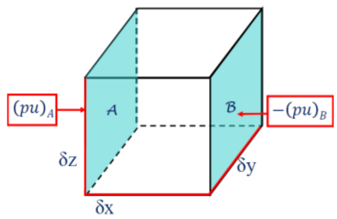
核心思想 **空气块的热力学能量的变化率等于加热率与外力做功率之和。**

符号定义 e：**单位质量的内能**　　密度为ρ，体积为$\delta\tau$的空气块的总热力学能量为：

总热力学能量：$\rho\left[e_{\text{单位质量内能}}+\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}_{\text{单位质量动能}}\right]\delta\tau$　　**外缘加热率**：$\dot{Q}$

作用于**体积元的外力**：$p_{\text{大气压力}}$，$\vec{F}_{\text{摩擦力可忽略}}$，$\vec{g}$，$\vec{A}_{\text{地转偏向力与速度垂直不做功}}$

推导 **重力做功率**：$P=\vec{F}\cdot\vec{V}=\vec{V}\cdot\vec{g}\rho\delta\tau$　　**大气压力做功率**如下：



A面上环境大气对空气块的**做功率**为：$(pu)_A\delta y\delta z$

B面上环境大气对空气块的**做功率**为：$-(pu)_B\delta y\delta z$

泰勒级数展开，有$(pu)_B=(pu)_A+\left[\frac{\partial}{\partial x}(pu)\right]\delta x+\cdots$

则压力在x方向的**净做功率**是$[(pu)_A-(pu)_B]\delta y\delta z=-\left[\frac{\partial}{\partial x}(pu)\right]\delta\tau$

同理，压力在y，z方向的净作功率分别是$-\left[\frac{\partial}{\partial y}(pv)\right]\delta\tau,-\left[\frac{\partial}{\partial z}(pw)\right]\delta\tau$

则压力**总做功率**为：$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(pu)+\frac{\partial}{\partial y}(pv)+\frac{\partial}{\partial z}(pw)\right]\delta\tau=-\nabla\cdot(p\vec{V})\delta\tau=-p\nabla\cdot\vec{V}_{\text{速度散度}}\delta\tau-\vec{V}\cdot\nabla p\delta\tau$

根据能量守恒原理，对于拉格朗日控制体积，在忽略摩擦力的作用下，可以得到：

$$\frac{d}{dt}\left[(e+\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V})\rho\delta\tau\right]=-p\nabla\cdot\vec{V}\delta\tau-\vec{V}\cdot\nabla p\delta\tau+\vec{V}\cdot\vec{g}\rho\delta\tau+\rho\dot{Q}\delta\tau\quad(A)$$

其中$\dot{Q}$是由外缘加热（辐射，热传导和潜热释放）而造成的单位质量空气的加热率

考虑质量守恒$\frac{d}{dt}(\rho\delta\tau)=0$，上式可转变为：$\frac{de}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}\right)=-\frac{1}{\rho}p\nabla\cdot\vec{V}-\frac{1}{\rho}\vec{V}\cdot\nabla p+\vec{V}\cdot\vec{g}+\dot{Q}\quad(B)$

考虑旋转坐标系的运动方程$\frac{d\vec{V}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-2\vec{\Omega}\times\vec{V}+\vec{g}$，以$\vec{V}$点乘上述运动方程,得

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}\right)=-\frac{1}{\rho}\vec{V}\cdot\nabla p+\vec{V}\cdot\vec{g}\quad(C)$　BC 两式相减，得到式：$\frac{de}{dt}+\frac{1}{\rho}p\nabla\cdot\vec{V}=\dot{Q}$

又考虑到理想气体，单位质量干空气的内能$e = c_v T$，利用连续方程$\nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \rho\frac{d\alpha}{dt}$

最终得到：$\boldsymbol{c_v \frac{dT}{dt} = -p\frac{d\alpha}{dt} + \dot{Q}}$　**压缩功率**代表内能与机械能之间的转换

解释　热力学第一定律可以用于运动大气，**左端第二项**表示了**压力对单位质量空气的作功率，代表了热能和机械能之间的转换**（压缩内能增加，温度增加），反映了大气动力过程与热力过程的相互联系。正是这种相互联系和转换过程使得太阳能可以驱动大气运动

1.3.4.2 其他形式

气温比容　$\boldsymbol{c_v \frac{dT}{dt} + p\frac{d\alpha}{dt} = \dot{Q}}$　单位质量空气**从外界吸收的热量**等于**空气内能的增加**和**对外作功之和**

气压气温　$\boldsymbol{c_p \frac{dT}{dt} - \alpha\frac{dp}{dt} = \dot{Q}}$　**空气从外界吸收的热量**和**空气块垂直运动**导致绝热变化对空气块温度的影响。

位温形式　$\boldsymbol{\frac{d\ln\theta}{dt} = \frac{1}{c_p T}\dot{Q}}$　单位质量空气从**外界吸收的热量**使得**位温**发生变化

推导　已知位温：$\boldsymbol{\theta = T\left(\frac{P_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}}, c_p = c_v + R, P_0 = 1000hPa$

$\ln\theta = \ln T + \frac{R}{c_p}(\ln P_0 - \ln p) \Rightarrow \frac{d\ln\theta}{dt} = \frac{d\ln T}{dt} - \frac{R}{c_p}\frac{d\ln p}{dt}$　代入气压气温式，即得 $\frac{d\ln\theta}{dt} = \frac{1}{c_p T}\dot{Q}$

熵形式　$\boldsymbol{\frac{ds}{dt} = \frac{\dot{Q}}{T}}$　单位质量空气**从外界吸收的热量**使得**熵**发生变化

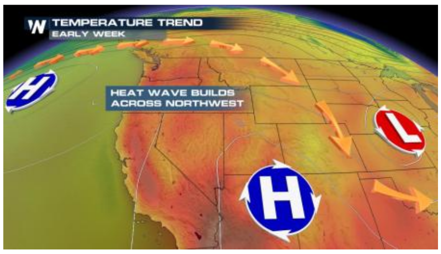
推导　令 $\boldsymbol{s = c_p \ln\theta} = c_p \ln T - R\ln p + R\ln P_0$，$s$为单位质量空气的熵，有$T\frac{ds}{dt} = \dot{Q}$

绝热形式　**空气运动的短期变化过程中(1~2 天)**，可以认为空气微团**与外界无热量交换**，是绝热过程。
这时热量学能量方程的四种表述形式就变化为：

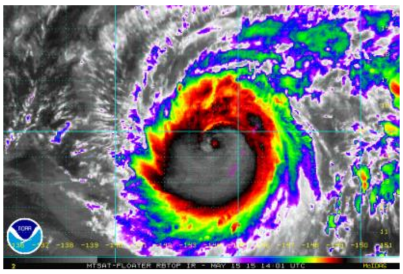
① $c_v\frac{dT}{dt} + p\frac{d\alpha}{dt} = 0$　② $c_p\frac{dT}{dt} - \alpha\frac{dp}{dt} = 0$　③ $\frac{d\ln\theta}{dt} = 0$　④ $\frac{ds}{dt} = 0$

可以得到在干绝热过程中位温守恒、熵不变的结论。
如果考虑水汽释放的凝结潜热，不考虑其他非绝热因子的作用，也可以得到**相当位温守恒**。相当位温在干湿绝热过程中均守恒：$\theta_e = \theta e^{Lq_s/c_p T}$

大风降温



高温酷热



在台风发生发展过程中，台风从海洋吸收热量，从水汽凝结所释放的潜热中吸收能量，使得气压降低，辐合加强。温度场的变化影响了大气运动的状态发生了变化

1.3 大尺度运动系统的控制方程

小节概述　前文得到的基本方程组的各个物理因子**对不同类型的运动的作用**具有不同的**相对重要性**，为了揭示研究不同类型运动特征及规律，需要突出主要因子，略去次要因子，即对方程组做简化。天气学主要研究中短期天气变化有关的大尺度和中小尺度运动，本节先针对**大尺度运动**对局地直角坐标系方程进行简化，导出适用于中高纬度大尺度运动的控制方程。

1.3.1 尺度分析和大气运动系统分类

1.3.1.1 尺度分析

尺度分析　是一种针对某种类型的运动**估计**基本方程各项**量级**的简便方法，可以保留大项，略去小项。
据其结果，结合物理上的考虑，略去方程中量级较小的项，并可分析运动系统的某些基本性质。

分析步骤　① 先确定方程中各量特征尺度：**场变量数量级、场变量变化幅度、特征长度、厚度、时间尺度**
② 用典型值比较各项大小（必须使用**国际单位制**）

特征值　各物理场变量具有代表意义的量称之为场变量的特征值。某一物理场变量的尺度正是指其特征值。

分析规则　① 求几个**变量之和**的数量级时，认为**最大项的量级**就是变量之和的数量级
② 有 2-3 个变量的数量级相同，如果它们之间没有依从关系，则其和(差)的数量级和单个变量的数量级相同；如果**有依从关系**，则其**和的数量级可以小于单个变量数量级**　如水平速度散度之和要更小
③ 两个**变量乘积**的数量级一般为**变量数量级的乘积**
④ 在一个方程式中，数量级的最大项至少要有两项，否则就会矛盾

零级简化　只保留方程中**数量级最大的各项**，而其他各项都省略不计

一级简化　除保留方程中数量级最大的各项外，还保留**比最大项小一个量级**的各项，而将更小的项略去不计

1.3.1.2 大气运动典型尺度

对流小尺度	$10\mathrm{km}, 10^4\mathrm{m}$	涡旋(1-100m)、龙卷(100m-1km)	不满足静力平衡
中尺度	$10^2\mathrm{km}, 10^5\mathrm{m}$	海陆风、山谷风、雷暴(1-100km)	
大尺度	$\mathbf{10^3km, 10^6m}$	即天气尺度，有台风(100-1000km)、温带气旋、反气旋(1000-10000km)、长波	
行星尺度	$10^4\mathrm{km}, 10^7\mathrm{m}$	行星波(10000-40000km)、平均纬向风(沃克环流)(40000km)	

1.3.2 大尺度系统运动方程

1.3.2.1 中纬度天气系统特征尺度

水平尺度　$L \sim 10^6 m$　　铅直尺度　$D \sim H \sim 10^4 m$　对流层高度

水平速度　$V \sim 10 m/s$　　垂直速度　$W \sim 10^{-2} m/s$

重力加速度　$g \sim 10 m/s^2$　　密度　$\rho \sim 1 kg/m^3$　　时间尺度　$T = \frac{L}{V} \sim 10^5 s$　平流用时

地转参数　$f_0 = 2\Omega \sin\varphi_0 = 2\Omega\cos\varphi_0 \approx \mathbf{10^{-4} s^{-1}}$　标准纬度$\varphi_0 = 45°$

水平方向气压变化幅度　$\frac{\Delta P}{\rho} \sim 10^3\ m^2/s^2$　　垂直气压梯度尺度　$\frac{P_0}{H} \sim \frac{10^5 pa}{10^4 m}$

1.3.2.2 水平运动方程尺度分析

尺度分析

x分量	$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} =$	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$	$+2\Omega v\sin\varphi$	$-2\Omega w\cos\varphi$	$+F_x$
y分量	$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} =$	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$	$-2\Omega u\sin\varphi$		$+F_y$
各项尺度	$\frac{V^2}{L}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$f_0 V$	$f_0 W$	$\frac{\nu V}{H^2}$
数量级	10^{-4}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-12}

零级简化

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv$$
$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - fu$$

即为**地转平衡关系**

一级简化

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f v$$
$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - f u$$

1.3.2.3 垂直运动方程尺度分析

尺度分析	w分量	$\frac{dw}{dt}=$	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$	$+2\Omega u\cos\varphi$	$-g$	$+F_z$
	各项尺度	$\frac{W}{T}$	$\frac{P_0}{\rho L}$	$f_0 V$	g	$\frac{\nu W}{H^2}$
	数量级	10^{-7}	10^{1}	10^{-3}	10^{1}	10^{-15}

零一级简化 $\boxed{0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g}$ 即为**静力方程**（在很多中小尺度系统中并不成立）

1.3.3 大尺度系统连续方程

尺度分析	方程	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}$	$+\frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)$	$+\frac{1}{\rho}w\frac{\partial\rho}{\partial z}$	$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$	$+\frac{\partial w}{\partial z}=0$
	各项尺度	$\frac{\delta_h\rho}{\rho}\frac{V}{L}$	$\frac{\delta_h\rho}{\rho}\frac{V}{L}$	$\frac{\delta_z\rho}{\rho}\frac{W}{H}$	$\frac{V}{L}$	$\frac{W}{H}$
	数量级	10^{-7}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-6}

注意 ① 补充特征：对大尺度系统，密度水平变化 $\delta_h\rho\sim10^{-2}\mathrm{kg/m^3}$，密度铅直变化 $\delta_z\rho\sim1\mathrm{kg/m^3}$

② 对大尺度运动而言，$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ **两项符号一般相反**，需要采用$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sim10^{-1}\frac{V}{L}\approx10^{-6}\,\mathrm{s^{-1}}$

零级简化 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial\ln\rho}{\partial z}=0\xRightarrow{\text{进步简化}}\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0}$ **达因补偿原理**

整层做积分$0=\int_0^\infty\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\delta z=-\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\,\delta z$ 则高层辐散，则低层辐合，对应上升运动。

1.3.4 大尺度系统能量方程

方程改写 为**便于利用实际测量值**对热力学能量方程进行分析，需要先利用$p\alpha=RT$改写原式

对状态方程**取时间全导数**：$p\frac{d\alpha}{dt}+\alpha\frac{dp}{dt}=R\frac{dT}{dt}$，**代入原式**$c_v\frac{dT}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt}=\dot{Q}$得到$(c_p=c_v+R)$

$\frac{dT}{dt}-\frac{RT}{c_p p}\frac{dp}{dt}=\frac{1}{c_p}\dot{Q}$，**展开**：$\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\frac{RT}{c_p p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{1}{c_p}\dot{Q}$

以**静力方程**代入：$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{RT}{c_p p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)+w(\gamma_d-\gamma)_{\text{温度直减率}}=\frac{1}{c_p}\dot{Q}$

γ_d推导具体过程：$w\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{RT}{c_p p}\left(w\frac{\partial p}{\partial z}\right)=-w\gamma-w\frac{RT}{c_p\rho RT}(-\rho g)=w\frac{g}{c_p}-w\gamma=w(\gamma_d-\gamma)$

尺度分析	方程	$\frac{\partial T}{\partial t}$	$+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}$	$-\frac{RT}{c_p p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)$	$+w(\gamma_d-\gamma)$	$=\frac{1}{c_p}\dot{Q}$
	各项尺度	$\delta_h T\frac{V}{L}$	$\delta_h T\frac{V}{L}$	$0.29T\frac{\delta P}{P}\frac{V}{L}$	$3\times10^{-3}W$	不适用
	数量级	10^{-4}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-5}	

注意 ① 温度水平尺度变化 $\delta_h T\sim10K$，温度 $T\sim10^2K$，温度直减率经验估计 $\gamma_d-\gamma\sim3\times10^{-3}K/m$

$\frac{\delta P}{P}\sim10^{-2}$ $R=287\,\mathrm{m^2/s^2\cdot k}$ $c_p=1004\,\mathrm{m^2/s^2\cdot k}$ $R/c_p=0.29$

② **非绝热加热率变化很大**，不适用于特征量级

零级简化 $\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{c_p}\dot{Q}$ $\boxed{\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{温度局地变化}}=-\underbrace{\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)}_{\text{温度水平平流}}+\frac{1}{c_p}\dot{Q}}$ $\frac{\partial T}{\partial t}=-\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)$

绝热情况 当**时间比较短**(下垫面交换忽略)并且**无凝结过程**(无潜热释放)的天气时，非绝热作用很小，则热力学方程化为上方右式形式，表示在非绝热作用很小时，大尺度系统的局地温度变化主要是**温度平流**引起

一级简化 $\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w(\gamma_d-\gamma)=\frac{1}{c_p}\dot{Q}$ 增加了与垂直运动有关的非绝热变化项

上升$(w>0)$且稳定$(\gamma_d-\gamma>0)$的大气，空气块对外做功，内能减少，导致温度下降

1.3.5 大尺度运动零级简化方程组

方程组

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv = 0 & \text{水平运动方程，地转平衡} \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - fu = 0 & \text{水平运动方程，地转平衡} \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 & \text{垂直运动方程，静力平衡} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & \text{连续方程，水平速度散度为零} \end{cases}$$

使用条件　**中纬度**（f具有一定值）、**准定常**（无时间参与）、**准水平**（无垂直运动）、**准地转平衡、准静力平衡、准水平无辐散**（连续方程无依从关系得到的）、**自由大气**（无摩擦力）**的大尺度运动**

注意　此方程组不可用于预报，仅为诊断方程

没有热力学能量方程。如果有，则温度场变化，气压场随之改变，则破坏平衡方程组。

1.3.6 中纬度大尺度运动一级简化方程组

方程组

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - fu \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + (\gamma_d - \gamma)w = \frac{1}{c_p}\dot{Q} \end{cases}$$

常用方程形式

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - fu \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + (\gamma_d - \gamma)w = \frac{1}{c_p}\dot{Q} \end{cases}$$

注意　① 运动方程不含w项，连续方程中不含**密度局地变化项**。

② 常用方程连续方程是**考虑密度变化**的原始方程，因为运动的改变必然导致密度的局地变化。

例题　1. 中α尺度飑线天气分析：变量特征尺度定义如下：$V \sim 10m/s$，$W \sim \frac{100m}{s}$, $L \sim 10^5 m, H \sim 10^4 m;$

$\frac{\triangle_h p}{\rho} \sim 10^2 m^2 s^{-2}$ 已知F_x, F_y的量级为10^{-12}，F_z的量级是10^{-13}。

(1) 请运用尺度分析的方法，推断北纬 45°附近的适用于中尺度线过程的零级简化运动方程。

(2) 在零级简化方程中，地转平衡和静力平衡是否成立?

① 尺度分析可得

x分量	$\frac{du}{dt}=$	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$	$+2\Omega v\sin\varphi$	$-2\Omega w\cos\varphi$	$+F_x$
y分量	$\frac{dv}{dt}=$	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$	$-2\Omega u\sin\varphi$		$+F_y$
各项尺度	$\frac{V^2}{L}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$f_0 V$	$f_0 W$	$\frac{\nu V}{H^2}$
数量级	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-12}
w分量	$\frac{dw}{dt}=$	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$	$+2\Omega u\cos\varphi$	$-g$	$+F_z$
各项尺度	$\frac{W}{T}$	$\frac{P_0}{\rho L}$	$f_0 V$	g	$\frac{\nu W}{H^2}$
数量级	10^{-4}	10^{1}	10^{-3}	10^{1}	10^{-13}

② 对于中小尺度系统中，**地转平衡不成立，静力平衡成立。**

1.4 $\boldsymbol{P}$坐标系基本方程组

P坐标系 以**气压P为垂直坐标**的坐标系称为P坐标系，以(x, y, p, t)作为独立自变量的坐标系。
等压面图是气压P为一定值的平面天气图，在该图上填写的气象资料是各测站同时刻所观测的同一等压面上的资料。若水平方向气压分布不均，等压面在空间会呈现起伏状态，所以依据**等压面各处距海平面的高度**通过分析等高线可以反映气压在水平方向上的分布形势。**度量等压面距海平面的高度采用位势高度。**

优势 ① 实际工作的需要，**不观测密度**，高空只分析等压面图
② 在P坐标系方程形式简单，**不涉及密度**，而z坐标系中方程中含有密度项
③ 上下层可以比较地转风或风的大小及水平气压梯度力的大小，z坐标系中涉及密度大小不好比

物理基础 **大尺度运动**满足静力平衡关系是建立P坐标系的物理基础。**因此P坐标系仅对大尺度适用**。
气压随高度严格单调减少，气压和高度有一一对应关系，则z坐标→ P坐标可以实现映射

$\boldsymbol{\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g}$ 在大尺度运动中，该关系十分精确 $\rho > 0, g > 0, \frac{\partial p}{\partial z} < 0$

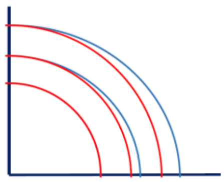
1.4.1 位势和位势高度

1.4.1.1 等压面图

等压面 **气压相等的点组成的面**。等压面为**曲面**，气压相等但**海拔高度不等**。等压面图分析高度场：高空图

等高面 空间高度相同的点组成的面。等高面为平面，面上**海拔高度处处相等**，但气压不等。等高面图分析气压场：地面图，显示气压场形势

1.4.1.2 位势



等位势线示意图

重力位势 单位质量的物体从海平面上升到高度z克服重力所作的功

公式 $\phi \equiv \int_0^z gdz \quad (\mathrm{m}^2/s^2) \qquad d\phi = gdz$ 单位：焦耳/千克

图解 最内圈表示**地表面**，蓝色圈表示**等重力位势线**，红色圈表示**等海拔高度线**
由于**重力各纬度不同**，所以不同纬度上上升相同高度，消耗能量不同，在等高面上移动重力做功。
当物体在等位势面上移动时，位能不发生变化，不需要克服重力作功，**等位势面处处与重力方向垂直**，等位势面是**水平面**，用位势度量等压面上各处距海平面的高度，在水平运动方程中不存在重力的分量。

1.4.1.3 位势高度

位势米 位势的单位是焦耳/千克，不是高度单位，为了应用的方便，定义**位势米$\boldsymbol{gpm}$**为位势高度单位。
则$\phi = gz$，当$z = 1m$时，$\phi = 9.8J/kg$，为了**让位势米与米在数值上一致**，定义 $1gpm = 9.8\,J/kg$

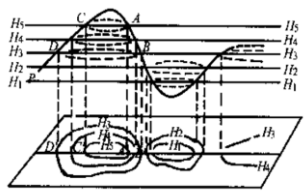
位势高度 则 $\boldsymbol{H = \frac{\phi}{9.8} = \frac{1}{9.8}\int_0^z gdz}$

把**单位质量**的物体从**海平面**上升到某高度时**克服重力所作的功**来表示的高度，其单位是**位势米**。

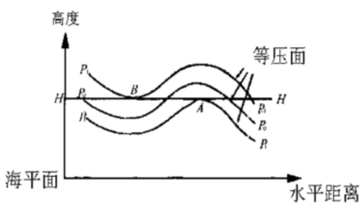
等高线 等高线的数值是高度单位，但不是几何高度，而是**位势高度**。

注意 ① 几何高度Z和位势高度H在数值上相差不大但概念上完全不同，一个是长度单位，一个是能量单位
② 等位势面不平行于等几何面，只在海平面上重合
③ 等位势面处处与重力方向垂直，无重力分量，相当于是空中水平面
④ **同位势高度上气压比周围低，等压面高度也较周围低，表现为下凹**
位势高度高的位置，气压也高；位势高度低的位置，气压也低。

等位势高度线

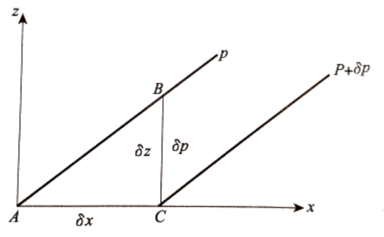


等压面和等高线的关系



等压面的起伏与等高面上气压分布的关系

1.4.2 P坐标系与Z坐标系的转换



空间导数转换关系

基本依据 **准静力平衡方程**建立了p和z之间一一对应的函数关系

核心思路 通过**坐标系变换**，建立两种坐标系中**物理量导数的关系**。

同一物理量在不同坐标系中的导数$\partial F/\partial x$会因坐标系本身的移动而不同。

1.4.2.1 空间导数转换关系

条件 F表示**任一气象要素**，F_A, F_B, F_C表示F在A,B,C点的值

解释 在Z坐标系中计算水平导数$\partial F/\partial x$时，实际高度固定的点可能对应**不同气压层**的移动

在P坐标系中计算$\partial F/\partial x$时，**等压面可能倾斜**，导致同一水平位置的气压层高度不同

核心思路 将**Z坐标系中的变化**分解为**P坐标系中的变化 + 气压场变化带来的影响**

公式 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z$　　$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z$　　$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial z} = g\frac{\partial F}{\partial p}$

推导 A,C之间差值为$(\delta F)_z = F_C - F_A$，A,B之间差值为$(\delta F)_p = F_B - F_A$

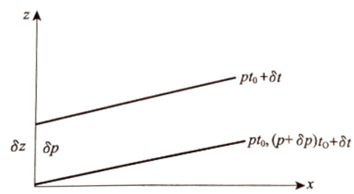
$F_B - F_A = F_B - F_A - F_C + F_C = F_B - F_C + F_C - F_A$　可见应当满足关系有：$(\delta F)_z = (\delta F)_p + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p$

同除以δx：$\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)_z = \left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)_z$　　取极限$\delta x \to 0$，$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z$　　y方向同理

z方向上，$\delta F = F_B - F_C = \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = \frac{\partial F}{\partial p}\delta p \xRightarrow{\delta z \to 0} \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}$　或　$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial z} = g\frac{\partial F}{\partial p}$

或者：$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g_{\text{静力方程}}\frac{\partial F}{\partial p} \Rightarrow -\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial z} = g\frac{\partial F}{\partial p}$　也可通过数学方法得到

1.4.2.2 时间导数转换关系



时间导数转换

全导数 场变量的时间导数包括**全导数(个别变化)**和**局地导数(局地变化)**

由于个别变化与坐标无关，**全导数在任何坐标中都是一致的**：$\left(\frac{dF}{dt}\right)_z = \left(\frac{dF}{dt}\right)_p$

局地导数 $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_z$ 表示**空间某固定点F**随时间的变化率　$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_p$ 表示**等压面上某固定点F**随时间的变化率。

如果空间气压场发生变化，**等压面在空间的位置也有相应变化，则二者不相等**。

核心思路 **Z坐标系中固定点的F变化**等于**P坐标系中固定等压面的F变化 + 等压面自身移动带来的变化**

公式 $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z$　　$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z = \frac{\partial \phi}{\partial t}$

推导 p_{t_0}表示t_0时刻某等压面的空间位置。**经过δt后**，等压面升高到$p_{t_0+\delta t}$的位置。原p_{t_0}处变为$(p+\delta p)_{t_0+\delta t}$

等压面，则在空间点(x_0, y_0, z_0)处F变化量为：$(\delta F)_z = \left(F_{t_0+\delta t} - F_{t_0}\right)_z$

在(x_0, y_0, p)处F变化量为：$(\delta F)_p = \left(F_{t_0+\delta t} - F_{t_0}\right)_p$

则有：$(\delta F)_z = (\delta F)_p + \frac{\delta F}{\delta p}\delta p \Rightarrow \left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_z = \left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_p + \frac{\delta F}{\delta p}\left(\frac{\delta p}{\delta t}\right)_z \xRightarrow{\delta t \to 0} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z$

高度场 设要素即为高度$F = Z$，则$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_z = 0$，有 $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p - \frac{1}{\rho g}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z$　　$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z = g\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p = \frac{\partial \phi}{\partial t}$

1.4.2.3 气压梯度力的表达

水平方向 在空间导数转换关系中，设$F = Z$，并利用静力平衡关系，则 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_z = 0$，$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p - \frac{1}{\rho g}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z$

则有$g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = \boxed{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_p}$　y方向同理

则有：**水平气压梯度力在Z坐标系中的表达，等价于P坐标系中的位势梯度**

垂直方向　z方向上：$\frac{\partial z}{\partial p}=-\frac{1}{\rho g}$，则 $\frac{\partial \phi}{\partial p}=-\frac{1}{\rho}$　位势ϕ随气压的变化率仅与密度有关　p系中的静力平衡

统一表达　$\frac{1}{\rho}\nabla_h p=\nabla_p \phi \xrightarrow{\phi=gz} g\nabla_p z$　　$\boxed{-\frac{1}{\rho}\nabla_h p=-9.8\nabla_p H}$

等高面上水平气压梯度力是可以用**等压面上的位势高度梯度表示**，且位势梯度是等压面的坡度，所以可以比较各层气压梯度力的大小而不用考虑密度，直接比较位势梯度即可

实例　直接比较不同高度层 500hPa 和 850hPa 的位势梯度即可判断气压梯度力强弱，无需考虑密度差异

1.4.3 连续方程

方程　$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0}$　其中 $\omega=\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\xrightarrow{\text{尺度分析}}-\rho g w$ **ω表示P坐标系中垂直速度**

推导　在Z坐标系中形式为：$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0 \xrightarrow{\text{展开}} \frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$

引入静力平衡方程 $\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$，将其**对时间求偏导**：$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)=-\frac{\partial(\rho g)}{\partial t}$

目标是消去密度ρ，将方程转换为以p为垂直坐标的形式，将Z坐标系的导数转换为P坐标系的导数：

有 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial z}\right)_z+u\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial z}\right)_z+v\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial z}\right)_z+w\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)_z=0$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z+u\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z+v\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z+w\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)_z=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z+u\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z+v\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z+w\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)_z=0$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z+u\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z+v\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z+w\frac{\partial p}{\partial z}\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z-\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_z-\frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z+\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

考虑到 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p+\frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z$　$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p+\frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_z$　所以 $\frac{\partial}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p=0$

最终有 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0$

垂直速度　$\omega=\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}$　尺度分析可以近似为 $\omega\approx-\rho g w$

ω表示气块在运动过程中气压的变化率，**$\omega<0$时气块上升(气压降低)　$\omega>0$时气块下沉(气压升高)**

在天气尺度运动中，垂直速度w通常很小，但ω的量级与水平运动相当，便于模式计算

1.4.4 运动方程

方程

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}=-g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p+fv\\ \frac{dv}{dt}=-g\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p-fu\\ \frac{\partial z}{\partial p}=-\frac{1}{\rho g}\end{cases}$$

其中 $\frac{d}{dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p+u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p+v\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p+\omega\frac{\partial}{\partial p}$

推导　由于个别变化在不同坐标系中相同，所以使用$g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z$ 代入 $\frac{du}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv$等式可得。

1.4.5 能量方程

温度形式 $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_p = -u\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_p - v\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p + (\Gamma_d - \Gamma)\omega + \frac{1}{c_p}\dot{Q}$

位势形式 $\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right) + S_p\omega = -\frac{R}{c_p p}\dot{Q}$　　其中**稳定度参数**$S_p \equiv \frac{R}{p}(\Gamma_d - \Gamma)$

推导 从 $c_p\frac{dT}{dt} - \alpha\frac{dp}{dt} = \dot{Q}$ 出发，引入P坐标系中的**垂直速度**：$c_p\frac{dT}{dt} - \alpha\omega = \dot{Q}$，整理可得 $\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha}{c_p}\omega + \frac{1}{c_p}\dot{Q}$

展开**物质导数** $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + \omega\frac{\partial T}{\partial p}$，**代入**得 $\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y} - \omega\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\alpha}{c_p}\omega + \frac{1}{c_p}\dot{Q}$

引入**温度垂直递减率**：实际温度递减率$\Gamma = \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{\gamma}{\rho g}$ (($\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$为几何高度上的温度递减率)

干绝热递减率为$\Gamma_d = \left(\frac{dT}{dp}\right)_{\text{干绝热}} = \frac{\alpha}{c_p}$，重组方程：$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y} + (\Gamma_d - \Gamma)\omega + \frac{1}{c_p}\dot{Q}$

其中前两项表示**温度的水平平流**，第三项表示**垂直运动引起的温度变化**（取决于大气稳定度），第四项为非绝热加热

转换为位势高度形式：利用静力平衡方程 $\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{RT}{P}$，将温度$T$替换为位势梯度：$T = -\frac{P}{R}\frac{\partial \phi}{\partial p}$

代入原方程并整理：$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right) + S_p\omega = -\frac{R}{c_p p}\dot{Q}$

物理解释 ① 稳定度参数**$S_p > 0$则大气稳定**，$S_p < 0$ 则大气不稳定
② 若气块有上升运动$\omega < 0$，在稳定大气中，上升运动导致位势高度降低；在潮湿大气中，可能触发凝结潜热释放$\dot{Q} > 0$，抵消稳定效应。

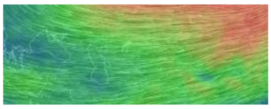
1.4.6 大气运动基本方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} - f\nu = -\frac{\partial \phi}{\partial x}\\
&\frac{d\nu}{dt} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y}\\
&\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0\\
&p = \rho RT\\
&\frac{\partial T}{\partial t} + V\cdot\nabla_p T - (\Gamma_d - \Gamma)\omega = \frac{Q}{c_p}
\end{aligned}\right\}$$

解释 利用上式基本方程组可以讨论各种天气系统的特征和演变

1.5 风场和气压场的关系

小节概述　　天气图所给出的大气运动具有相当的复杂性，但对于天气尺度的系统而言，风和气压具有显著的特征和密切的联系。本节通过讨论两者的关系来分析这种特征和联系。本节将依据大尺度运动平衡关系讨论地转风、梯度风、热成风以建立风场、气压场和温度场三者间的关系。



高空地转风场实况(直线)

1.5.1 地转风 $\vec{V}_g$

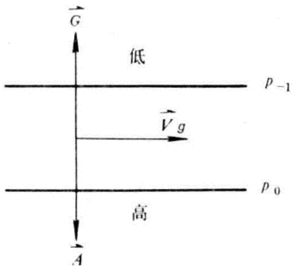
1.5.1.1 地转风的概念

地转关系　　由 1.3.2 中可知水平方向上**地转偏向力**与**气压梯度力**几乎平衡。即 $fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$　$fv=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$

地转风　　满足上述关系的风称为地转风。即自由大气(无摩擦力)中空气的**水平**(无 w)**等速**(无加速度)**直线**(无惯性离心力)**运动**，是指无加速度、惯性离心力不起作用情况下的运动。简而言之，指地转平衡下的风，即在大气运动的水平方向上，水平气压梯度力和水平地转偏向力相平衡下的大气风场。

地转风又可以看作是与等压线(等高线)平行的水平**匀速直线运动**。地转风**沿着等压线或等高线流动**。

1.5.1.2 描述地转风的公式



分量形式　　由地转平衡方程变换可得：$\begin{cases}u_g=-\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial y}\\ v_g=\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial x}\end{cases}$　　p系：$\begin{cases}u_g=-\frac{1}{f}\frac{\partial \phi}{\partial y}\\ v_g=\frac{1}{f}\frac{\partial \phi}{\partial x}\end{cases}$

向量形式　　$\vec{V}_g=-\frac{1}{f\rho}\nabla_h p\times\vec{k}$　　p坐标系形式：$\vec{V}_g=\frac{1}{f}\nabla_p\phi\times\vec{k}\ =\frac{9.8}{f}\nabla H=-\frac{g}{f}\nabla z$

1.5.1.3 地转风的特点

特点一　　地转关系是在**无摩擦**，**不考虑加速度**和**垂直运动**引起的地转偏向力的情况下**近似成立的。**

这只是一种近似，绝对的地转平衡不存在，但实际风和地转风相差很小(由于气流曲率很小)。

需要注意：赤道上不能建立地转平衡关系，低纬地区地转风原理也不能适用。

特点二　　**地转风与气压梯度力成正比**，同纬度风速大的地方等压(高)线密集，风速小的地方等压(高)线稀疏。

特点三　　地转风与等压线平行，**在北半球，背风而立，低压在左，高压在右。 风压定律**　南半球相反

特点四　　**地转风速大小与纬度成反比。**

纬度越高，同样风速地转偏向力越大→则**梯度力相同时，纬度越高，地转风速越小**。

特点五　　地转风基本水平**散度为零**（忽略$\frac{\partial f}{\partial y}$随纬度变化）。 $\nabla_p\cdot\vec{V}_g=\frac{\partial u_g}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial y}\ =-\frac{g}{f}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{g}{f}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)=0$

1.5.2 梯度风 $\vec{V}_f$

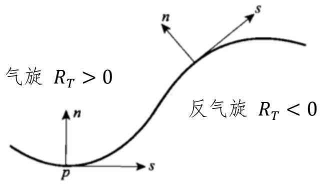
引入　　在水平运动方程除考虑气压梯度力和地转偏向力外，**并考虑曲线运动的惯性离心力**，就得到了梯度风

例如中纬度气旋/反气旋、台风等均有较大的曲率。

1.5.2.1 梯度风的概念

梯度风　　梯度风是**地转风**在一定条件下，**转化**成另一种大尺度的系统风。当地转风在**圆形**的气压场中时，风是做**等速率曲线运动**。作曲线运动物体的运动轨道，都有一定长度半径，所以风在运动时，除**梯度力$\boldsymbol{G}$**、**偏向力作用$\boldsymbol{A}$**外，还要受到**惯性离心力$\boldsymbol{C}$**的作用，当**三个力作用平衡$\boldsymbol{A+G+C=0}$**时，有效分力为零，风沿**等压曲线作惯性等速率曲线运动**，这就是梯度风。

1.5.2.2 自然坐标中的水平运动方程



方程形式　　$\begin{cases}\boldsymbol{\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}=0}\\ \boldsymbol{\frac{V^2}{R_T}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}-fV}\end{cases}$　**(切向方程)**　流线与等压线重合，速度大小不变　**(法向方程)**

引入　　曲线运动在自然坐标中表达清晰，现在自然坐标中讨论梯度风，并建立水平运动方程。

自然坐标　　固定于地球上随地球一起转动的相对坐标系。原点在某流线s上，$\vec{s}$流线方向与每一点上瞬间风速的方向一致，$\vec{n}$法向指向流线**前进方向的左方，垂直轴为z或p**。 右手螺旋

假设 设有**风速** $\vec{V} = V\vec{\tau}$，其大小为 $V = \frac{ds}{dt}$，且**速率** $V = V_s > 0$，$V_n = 0$ 只出现在切向上

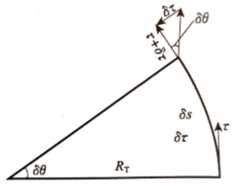
曲率半径 **定义：反气旋曲率半径 $R_T < 0$**（曲率中心在$\vec{n}$负方向），**气旋曲率半径 $R_T > 0$**（曲率中心与$\vec{n}$同向）

则**曲率** $k_T = 1/R_T$ 与曲率半径符号相同，气旋为正，反气旋为负。

推导 计算**加速度**：$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\vec{\tau})}{dt} = \vec{\tau}\frac{dV}{dt} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dV}{dt}\hat{\tau} + \frac{d\hat{\tau}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{dV}{dt}\hat{\tau} + \frac{V^2}{R_T}\hat{n}}$ 随后考虑**两个力的分量**情况

① **地转偏向力**：**切线**方向上为零 **法向**上指向右侧，大小为$-fV$

② **气压梯度力**：**切向**$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = 0$ 等压线与流线平行 **法向** $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$



同时考虑到**加速度**：**切向** $\frac{dV}{dt}$ **法向** $\frac{V^2}{R_T}$，方向连等，即得水平运动方程。

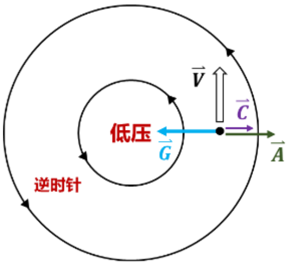
解释 将法向方程改写：$0 = \underbrace{-\frac{V^2}{R_T}}_{\text{惯性离心力}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}_{\text{气压梯度力}} \underbrace{-fV}_{\text{地转偏向力}}$ 可得三力平衡。

1.5.2.3 梯度风平衡

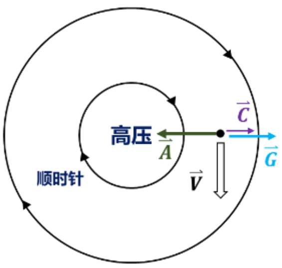
气旋环流 如下图所示，若先给定流场，则惯性离心力和地转偏向力均指向$-n$方向，由此要求气压梯度力指向

n 方向以保持平衡，即$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} > 0$ $\left(\frac{\partial p}{\partial n} < 0\right)$，则中心为低压。 $\boldsymbol{\vec{G} = \vec{A} + \vec{C}}$

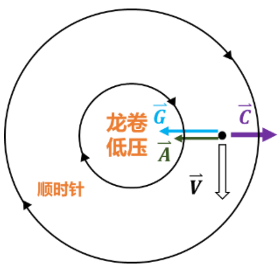
若先给定气压场，则气压梯度力和惯性离心力已知，由从**尺度分析**，地转偏向力必须与梯度力相反。



大尺度低压



大尺度高压



小尺度低压的特殊情况

反气旋环流 若先给定流场，则地转偏向力与惯性离心力确定。如果气压梯度力指向$-\vec{n}$，则反气旋中心为低压中心

此时惯性离心力必须大于地转偏向力/气压梯度力。然而，**大尺度运动中R_T很小，惯性力不可能平衡**。

然而，小尺度情况（如右图双龙卷）低压可以同时存在顺时针、逆时针环流，其惯性离心力足够大。

因此，如中图所示，大尺度反气旋气压梯度力指向$\vec{n}$方向，中心为高压。 $\boldsymbol{\vec{A} = \vec{G} + \vec{C}}$

限制条件 大尺度系统中，**惯性离心力较小**，**地转偏向力主导**，故**反气旋中心附近气压梯度弱，等压线稀疏**。

1.5.2.4 梯度风速率

速率 $\boldsymbol{V_f = -\frac{R_T}{2}f \pm \frac{R_T}{2}\sqrt{f^2 - \frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}}$ **【实际取正】** 由**解一元二次方程**$-\frac{V_f^2}{R_T} - fV_f - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ 可得

然而，同时间同一点速度不可能出现两个值，需要进一步分析讨论舍去错误的解。

不难看出，梯度风的大小与**曲率半径**，**地转参数**，以及**气压梯度**密切相关

基本条件 ① $V_f > 0$ 速率大于零 ② $\frac{\partial p}{\partial n} < 0$ 沿$\vec{n}$方向气压降低 ③ $f^2 - \frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \geq 0$ 数学要求

④ 定义 $R_T > 0$ 为气旋，$R_T < 0$ 为反气旋

气旋环流 $R_T > 0 \Rightarrow -\frac{R_T}{2}f < 0$ 若取负号，则$V_f < 0$，与$V_f > 0$矛盾，即在气旋式环流里面**只能取正号**，

则有$V_f = -\frac{R_T}{2}f + \frac{R_T}{2}\sqrt{f^2 - \frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$ 根号中的项始终大于零，**气压梯度可无限增大，中心风速大**

考虑 $\frac{\partial p}{\partial n} \to 0$ 则 $v_f \to 0$；如果气压梯度越大$\left|\frac{\partial p}{\partial n}\right| \to \infty$，则$f^2$越大，风速 $v_f \to \infty$

反气旋环流 若取负号，相当于$V_f=-\frac{R_T}{2}\left(f+\sqrt{f^2-\frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}\right)$ 气压梯度力越大，**根号下的数值就越小**，相当于风速就越小；而我们知道气压梯度力越大，对应气流速度越快，因此**取负号与实际物理情况不符合**。

所以在反气旋中根号前**仍取正号**：$V_f=-\frac{R_T}{2}f+\frac{R_T}{2}\sqrt{f^2-\frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$

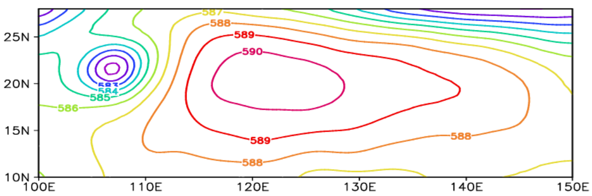
因为**曲率半径小于0**，根号下的数值要大于0，所以必然有：$f^2\geq\frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\Rightarrow\frac{f^2R_T^2}{4}\geq\frac{R_T}{\rho}\frac{\partial P}{\partial n}$

当上式取等号时，即得反气旋中**最大的梯度风风速（绝对值）**$(V_f)_{max}=-\frac{Rf}{2}$

风速和气压梯度不可无限增大，**边缘风速大**。 静稳天气：高压控制，风速很小，污染严重

由于$f=0$，赤道上没有反气旋。

1.5.2.5 梯度风与地转风的关系



高压中心稀疏，低压中心密集

引入 梯度风更接近实际，但研究中常用地转近似。

表达式 **梯度风**：$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial n}-fv_f-\frac{v_f^2}{R_T}$

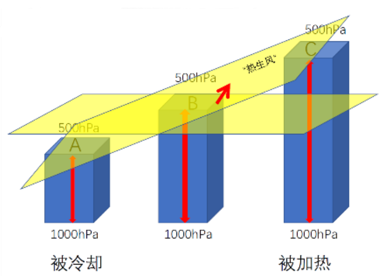
地转风：$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial n}-fv_g$

地转风 $V_g=-\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial n}$ **两者关系** $\frac{V_{g地转风}}{V_{f梯度风}}=1+\frac{V_f}{fR_T}$ **对于气旋，地转风大；对于反气旋，地转风小**

解释 研究气旋用地转风，则模拟风速较实际偏大；研究反气旋用地转风，则模拟风速较实际偏小。

1.5.3 热成风 V_T

1.5.3.1 热成风概念



温度变化导致等压面变化

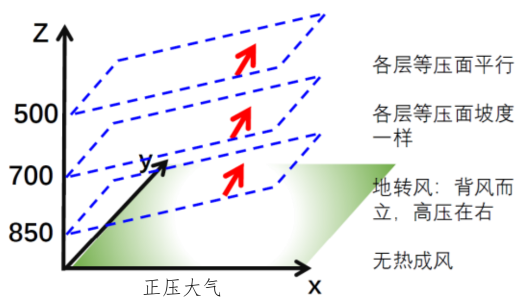
热成风 **地转风V_T随高度的改变量**或铅直方向上两等压面上地转风的矢量关系。

即**上下两层地转风之矢量差**。$\boldsymbol{V}_T=\boldsymbol{V}_{g上}-\boldsymbol{V}_{g下}$ 方向**由低层指高层**

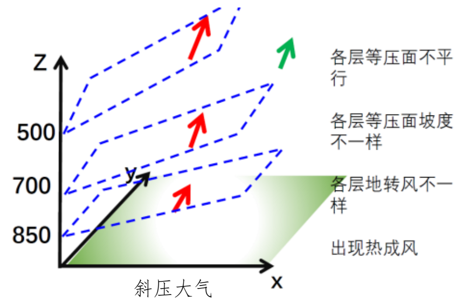
热成风关系是一个极好的诊断关系，揭示了静力平衡大尺度运动中风场、气压场和温度场之间的关系。

即 $V_T=-\frac{1}{f}\nabla(\phi_{up}-\phi_{down})\times\vec{k}=-\frac{1}{f}\nabla(9.8\Delta H_{与温度有关})\times\vec{k}$

图形解释



正压大气



斜压大气

$u_g=-\frac{1}{f}\frac{\partial\phi}{\partial y}$ $v_g=\frac{1}{f}\frac{\partial\phi}{\partial x}$ 地转风的大小与等压面的坡度有关系，热成风是地转风随高度的改变量，也就是等压面坡度的改变量。

1.5.3.2 正压大气与斜压大气

正压大气 **barotropic** **地转风不随高度变化的大气，温度分布均匀**。大气中密度的分布仅仅随着气压而变，**等压面，等密度面、等温度面重合**（这种情况无法分析高空等温线）

大气等压面之间平均温度(厚度)处处相等，等压面坡度不发生变化，地转风随高度无变化

斜压大气 **baroclinic** 温度分布不均匀的大气。大气中密度的分布不仅随气压变化，还随温度变化时，这种状态的大气为斜压大气。等压面和等密度面(或等温面)是相交的。等压面上具有温度梯度。

斜压状态大气等压面之间平均温度(厚度)处处不等，等压面坡度发生变化，地转风随高度变化