

# 第三章 气旋与反气旋

**章节概述** 本节讲授**涡度方程**、**位势倾向方程**、 **$\omega$ 方程**的物理意义及其在分析温带气旋与反气旋发展机制方面的定性应用；影响我国的温带气旋、反气旋的结构特征与活动规律；用位势涡度守恒原理解释天气系统在上山、下山时强度的变化；并用地转适应的观点解释气旋发展。

## 3.1 气旋、反气旋的特征和分类

**气旋** 气旋是占有三度空间的，在同一高度上中心气压**低于**四周的流场中的涡旋。涡旋中的空气在**北半球逆时针旋转，在南半球顺时针旋转。在北半球具有正的涡度，南半球具有负的涡度。**

**反气旋** 反气旋是占有三度空间的，在同一高度上中心气压**高于**四周的流场中的涡旋。涡旋中的空气在**北半球顺时针旋转，在南半球逆时针旋转。在北半球具有负的涡度，南半球具有正的涡度。**

### 3.1.1 气旋和反气旋的水平尺度

**尺度定义** 气旋、反气旋的水平尺度以**最外围的闭合等压线的直径**长度来表示，反气旋尺度大于气旋。

**气旋尺度** 平均而言，气旋：1000km – 3000km，东亚气旋比欧洲和北美的水平尺度小

**反气旋尺度** 大者面积可达亚洲大陆的3/4

### 3.1.2 气旋和反气旋的强度

**强度定义** 使用**中心气压值**表征。气旋中心气压值越低，气旋越强；反气旋中心气压值越高，反气旋越强。气旋可以表述为加强或加深发展(等高面低于周围)，但反气旋只能说加强。

**强度范围** 气旋：970 – 1010hPa 反气旋：1020 – 1030hPa  
平均而言，温带的气旋和反气旋冬季强于夏季，海上的气旋强于陆上的，陆上的反气旋强于海上的。

### 3.1.3 气旋和反气旋的分类

**气旋** **地理区域：**热带气旋和温带气旋

**热力性质：**锋面气旋(有温度对比)和无锋气旋(无温度对比，如台风、热低压)

**反气旋** **地理区域：**极地、温带和副热带反气旋(西太平洋副热带高压)

**热力性质：**冷性反气旋(西伯利亚冷高压)、暖性反气旋(西太平洋副热带高压)

气旋与反气旋会相互转化。无锋气旋可以转化为锋面气旋(台风北上)、冷高压也可以受热变为热高压

**温带气旋** **源地：**不是均匀分布在温带地区的。

**北半球气旋源地的特点：**① 1、7月北太平洋和北大西洋两个气旋最大频率中心(阿留申低压、冰岛低压)、② 源地分布基本与纬圈平行、③ 巨大山地背风一侧及其以东地区、④ 海湾以及内陆湖泊(非绝热加热影响：冬季温度高)

东亚无论冬夏，30~35N, 45~50N 生成频率最多。与锋生带有关

## 3.2 涡度和涡度方程

**引入** 使用气压的变化率误差较大，但发现大尺度大气运动具有涡旋和准地转平衡的特点，可以用涡度衡量。

### 3.2.1 涡度

**涡度** 度量空气块**旋转程度和旋转方向**的物理量 **单位：**1/s **量纲：** $\zeta \sim V/L$

**量级**  $\zeta \sim 10^{-5}$  大尺度  $\zeta \sim 10^{-4}$  中尺度  $\zeta \sim 10^{-3}$  小尺度  $f \sim 10^{-4}$  中高纬度

$f = 2\Omega \sin \varphi$  称为地转参数，也称为**地转涡度**，对于大尺度运动，地转涡度要更大。

公式 
$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$
 大尺度准水平，前两项不考虑

我们关注的是  $\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  P坐标系中相对涡度的垂直分量  $\zeta_p = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p$

方向 **涡度的方向是指旋转轴的方向**，不在气流旋转平面。

物理意义 涡度的物理意义：简化问题：设  $u = 0$   $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  只考虑  $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$

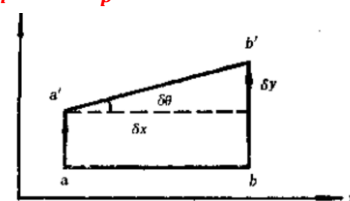
由于风速分布不均匀，原线段  $ab$  变化为  $a'b'$ ，平移外发生了转动。

转动角速度有：  $(v_b - v_a)\delta t = \delta x \delta \theta \Rightarrow \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \theta}{\delta t} = \frac{v_b - v_a}{\delta x} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$

可得  $\partial v / \partial x$  表示与  $x$  轴平行的气块边界转动角速度，同理  $-\partial u / \partial y$  表示与  $y$  轴平行的气块边界角速度。

如果把气块换为刚体，则  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ ，于是  $\zeta_z = 2 \frac{d\theta}{dt}$ ，**涡度为刚体旋转角速度的两倍。**

风场在空间分布不均匀，导致质点在流场中发生旋转。



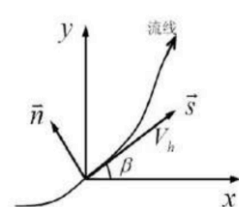
相对涡度  $\frac{\partial v}{\partial x}$  分量的物理意义

### 3.2.1.1 绝对涡度与相对涡度

绝对涡度  $\vec{V}_a$  表示绝对速度， $\vec{V}$  表示空气相对于地球的相对速度， $\vec{V}_e$  为牵连速度。

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{V}_e \Rightarrow \vec{\zeta}_a = \vec{\zeta} + \vec{\zeta}_e \quad \text{绝对涡度} = \text{相对涡度} + \text{地转涡度}$$

如果涡度没有矢量符号，则表示垂直分量



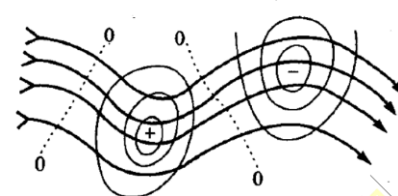
自然坐标系的转换

### 3.2.1.2 曲率涡度与切变涡度

自然坐标 令水平方向全风速为  $V_h$ ，则有：  $\vec{V}_h = V_h \vec{s} \Rightarrow \begin{cases} u = V_h \cdot \vec{i} = V_h \cos \beta \\ v = V_h \cdot \vec{j} = V_h \sin \beta \end{cases}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V_h}{\partial x} \sin \beta + V_h \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V_h}{\partial y} \cos \beta - V_h \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

$$\zeta = V \frac{\partial \beta}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial n} = \underbrace{\frac{V}{R_s}}_{\text{曲率涡度}} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial n}}_{\text{切变涡度}} = \boxed{VK_s - \frac{\partial V}{\partial n}}$$



曲率涡度 表示**由于流线(或等高线)弯曲造成的涡度**，风速愈大，曲率愈大，涡度就愈大。

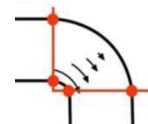
气旋性弯曲时，曲率涡度为正；反气旋性弯曲时，曲率涡度为负；等高线平直，曲率涡度为零。

切变涡度 **速度在法线方向分布不均匀，也就是等高线沿着法线方向分布不均匀。急流附近切变涡度较为明显。**

急流轴的两侧：北侧具有正的切变涡度  $-\frac{\partial V}{\partial n} > 0$ ，南侧具有负的切变涡度  $-\frac{\partial V}{\partial n} < 0$ ，导致高空辐散

注意 弯曲流场的涡度可能等于零。只要流体微团的环流保持不变。

$$\oint_L \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{a}{R^2} + \frac{a}{R^2} = 0$$



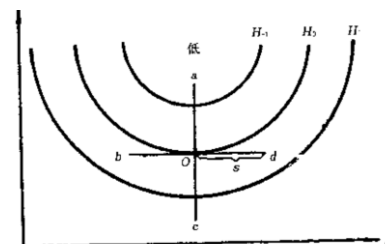
### 3.2.1.3 地转风涡度、热成风涡度与行星涡度

地转风涡度 以**地转风代替实际风**，得**地转风涡度**：

$$\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{g}{f} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad \text{拉普拉斯算子} = \frac{9.8}{f} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)$$

说明**等高线的不同弯曲状态，决定了地转风涡度的正负和大小**

二阶导数反应**等高线曲率**，如右图  $\zeta_g \approx \frac{v_d - v_b}{\Delta x}$



地转风涡度的计算

槽线上曲率涡度最大

热成风涡度 以**热成风**：  $u_T = -\frac{g}{f} \frac{\partial(z_2 - z_1)}{\partial y} = -\frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial y}$   $v_T = \frac{g}{f} \frac{\partial(z_2 - z_1)}{\partial x} = \frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial x}$  代入

得到：  $\zeta_T = \frac{\partial v_T}{\partial x} - \frac{\partial u_T}{\partial y} = \frac{g}{f} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = \frac{g}{f} \nabla^2 h$  冷舌中有正的热成风涡度，暖舌中有负的热成风涡度

**行星涡度** 牵连速度代入  $\vec{V}_e = \vec{\Omega} \times \vec{R}$  取自然坐标有  $\vec{\zeta}_e = \frac{V_e}{R} + \frac{\partial V_e}{\partial R} = 2\Omega$  向量形式为  $\vec{\zeta}_e = 2\vec{\Omega}$

可见行星涡度的方向与地球自转方向一致，大小是自转角速度的两倍。

绝对涡度垂直分量：  $(\vec{\zeta}_a)_z = (\vec{\zeta})_z + 2\Omega \sin \phi$   $(\vec{\zeta}_a)_p = (\vec{\zeta})_p + 2\Omega \sin \phi$

其中  $f = 2\Omega \sin \phi$  为行星涡度的垂直分量，又称地转参数。北半球  $f > 0$ ，南半球  $f < 0$

### 3.2.2 涡度方程 (p坐标)

#### 3.2.2.1 涡度方程的推导与公式

**引入** 我们想通过旋转程度来分析气旋或反气旋的增强情况，需要推导涡度与时间的关系。

**推导** 对运动方程  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} = -g \frac{\partial z}{\partial x} + fv$  ①  $\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} = -g \frac{\partial z}{\partial y} - fu$  ②

要凑出涡度的表达式  $\zeta_p = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ，可以对②求x偏导数，对①求y偏导数，并相减：

$$\textcircled{1}: \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -g \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\textcircled{2}: \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -g \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - u \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}: \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} = -u \frac{\partial f}{\partial x} - v \frac{\partial f}{\partial y} - f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\left[ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - (f + \zeta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

**涡度方程**  $\frac{d(f+\zeta)}{dt} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right) - (f + \zeta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$  绝对涡度个别变化=涡度倾侧-绝对涡度水平散度项

**局地变化**  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \left( u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \left( u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right) - (f + \zeta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

涡度局地变化= -相对涡度平流-地转涡度平流-涡度垂直输送+涡度倾侧项-绝对涡度水平散度项

或记忆为：  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla \zeta - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \beta v + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right) - (f + \zeta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

$\frac{\partial \zeta}{\partial t} > 0$  表示气旋性涡度增加，反气旋性涡度减小  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} < 0$  表示反气旋性涡度增加，气旋性涡度减小

#### 3.2.2.2 涡度方程的物理意义

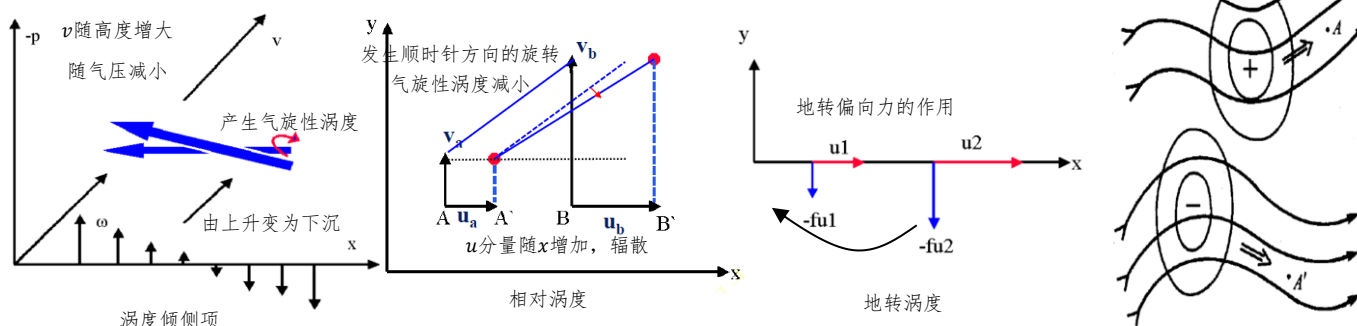
**涡度倾侧项**  $\left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right)$  由于垂直速度在水平方向分布不均匀，使涡度水平分量转化为铅直分量

**相对涡度** 相对涡度与水平散度  $-\zeta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$   $\zeta > 0$ 时(具有气旋性涡度时)，水平辐散使气旋性涡度减小

$\zeta < 0$ 时(具有反气旋性涡度时)，水平辐散使反气旋性涡度减弱 辐散使得旋转系统减弱

**地转涡度** 地转涡度与水平散度  $-f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$  辐散使反气旋性涡度增加，气旋性涡度减小；辐合使气旋性涡度

增加，反气旋性涡度减小 水平辐散时，  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} > 0$  有  $-f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) < 0$



## 槽脊情况

槽线上相对涡度最大，槽前有正的相对涡度平流，槽后有负的相对涡度平流

- ① 槽前脊后，沿着气流方向相对涡度减小，有正涡度平流，局地涡度增加  $\Delta\zeta > 0$  附加气旋性环流
- ② 槽后脊前，沿着气流方向相对涡度增加，有负涡度平流，局地涡度减小  $\Delta\zeta < 0$  附加反气旋环流
- ③ 槽前脊后同时有高空辐散，低层辐合上升，冷却，导致  $-\Delta H$ ；槽后脊前同时有高空辐合， $+\Delta H$
- ④ 槽脊线为涡度平流零线，正圆形的高低压系统涡度平流为零

短波槽( $L \leq 3000\text{km}$ )以相对涡度平流为主，长波槽以地转涡度平流为主，稳定西退

## 相对平流

$$-\left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \quad \text{空气作水平运动时产生的涡度局地变化}$$

相对涡度分布不均匀和大气水平运动所引起的局地涡度变化

## 地转平流

$$-\left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\beta v_y \text{ 方向速度, 空气块南北运动} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \beta$$

北半球,  $f > 0, \beta > 0$  当吹南风时( $v > 0$ ), 气块  $f$  增大, 为保持绝对涡度守恒, 气块  $\zeta$  必须减小, 使得局地相对涡度减小。

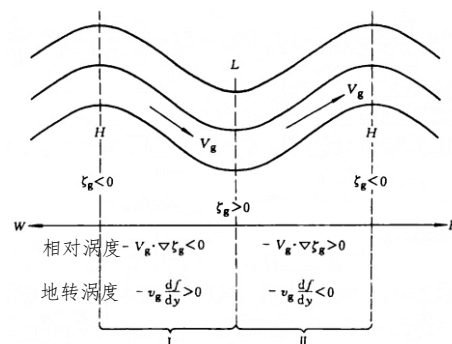
## 垂直输送

$$-\omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} \quad \text{涡度垂直输送, 取决于相对涡度随高度的变化}$$

$\frac{\partial \zeta}{\partial p} > 0$  相对涡度随高度减小,  $\omega < 0$  上升运动局地涡度增加,  $\omega > 0$  下沉运动局地涡度减小

$\frac{\partial \zeta}{\partial p} < 0$  相对涡度随高度增加,  $\omega < 0$  局地涡度减小,  $\omega > 0$  局地涡度增加

高空槽前下方有气旋, 槽前正涡度平流随高度增强, 低层辐合上升加强, 触发气旋发展。



## 3.2.3 涡度方程的简化

### 尺度分析

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) - v \frac{\partial f}{\partial y} - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p}\right) - (f + \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$\frac{V^2}{L^2} \quad \frac{V^2}{L^2} \quad V \cdot 10^{-13} \quad \frac{WV}{LH} \quad \frac{WV}{LH} \quad f_0 \cdot 10^{-6}$   
 $10^{-10} \quad 10^{-10} \quad 10^{-10} \quad 10^{-11} \quad 10^{-11} \quad 10^{-10}$

### 零级简化

$$\frac{d(f+\zeta)}{dt} = -(f+\zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

### 物理解释

运动方程中速度的时间导数项比气压梯度力小一个数量级；气压局地变化项为小项  
相对涡度的局地变化主要由涡度的平流变化，空气微团的南北运动以及水平辐合辐散造成。

又因为  $f \gg \zeta$  有  $\frac{d(f+\zeta)}{dt} = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$  当大气准水平无辐散时, 有  $\frac{d(f+\zeta)}{dt} = 0$

即水平无辐散大气中绝对涡度守恒，由此导致了罗斯贝波的生成。

## 3.2.4 位涡(位势涡度)及位涡守恒

### 垂直位涡度

$$\frac{f+\zeta}{H} \text{ 或 } \frac{f+\zeta}{\Delta p} \quad \text{绝对涡度与气柱厚度的比值}$$

称为正压大气的垂直位涡度。

### 位涡守恒

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{f+\zeta}{H} \right) = 0 \quad \text{位涡是一个常数}$$

### 位涡

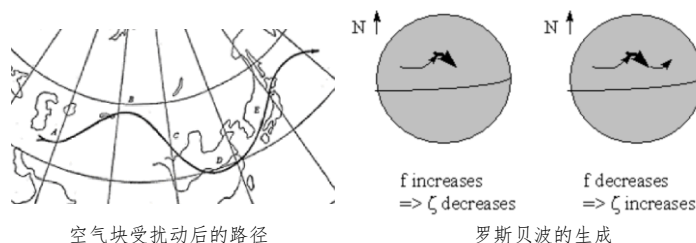
位涡是一个综合描述大气运动状态和热力状态的物理量。  
位涡守恒定律揭示了大气热力结构对涡度变化的约束效应。

### 位涡度方程

由涡度方程、连续方程、热力学能量方程以及状态方程，通过变换，可以得到 Ertel 位涡度方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{\zeta}_a \cdot \nabla s}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla s_{\text{熵}} \cdot \nabla \times \vec{F}_{\text{摩擦}} + \frac{1}{\rho} \bar{\zeta}_a \cdot \nabla \left( \frac{Q_{\text{非绝热加热}}}{T} \right) \quad \text{其中 } \frac{\bar{\zeta}_a \cdot \nabla s}{\rho} \text{ 称为位涡度}$$

在绝热无摩擦条件下, 则位涡度方程变为  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{\zeta}_a \cdot \nabla s}{\rho} \right) = 0$  称为位涡守恒定律。





## 形式推导

因大气的水平运动远大于垂直运动，且物理量的垂直变化远大于水平变化，近似有

$$\frac{\zeta_a \cdot \nabla s}{\rho} \xrightarrow{\text{简化为垂直方向}} \frac{(f+\zeta)}{\rho} \cdot \frac{\partial s}{\partial z} \xrightarrow{\text{熵的表达形式}} \frac{c_p}{\rho} (f+\zeta) \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \quad s = c_p \ln \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{f+\zeta}{\rho} \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \frac{d}{dt} (f+\zeta) - \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) + \frac{f+\zeta}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{Q}{T} \right) \quad \frac{d}{dt} \left[ (f+\zeta) \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right] = \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) + \frac{f+\zeta}{c_p} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{Q}{T} \right)$$

若绝热无摩擦  $\frac{d}{dt} \left[ (f+\zeta) \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right] = 0$  进一步的，在干绝热过程中，空气微团始终在等位温面或等熵

面上运动，在两个等熵面之间的空气柱尽管在运动过程中有所伸缩，但始终被禁锢在两个等熵面(位温面)间。介于两个等位温面间的气柱，设其气压差为  $\Delta p$ ，因绝热过程中空气微团的位温保持守恒，则：

$$(f+\zeta) \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = (f+\zeta) \frac{\ln \theta_2 - \ln \theta_1}{\Delta p} = \frac{(f+\zeta)}{\Delta p} \ln \frac{\theta_2}{\theta_1} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{f+\zeta}{\Delta p} \right) = 0$$

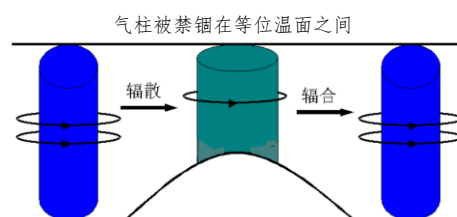
若假定气层厚度为  $H$ ，且空气不可压，则有  $AH = \text{const}$ ， $A$  为气柱底面积， $H$  为厚度

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{H} \frac{dH}{dt} \quad \frac{d(f+\zeta)}{dt} = -(f+\zeta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \frac{d(f+\zeta)}{dt} = (f+\zeta) \frac{1}{H} \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{f+\zeta}{H} \right) = 0 \quad H \text{ 增大, 为辐合} \quad H \text{ 减小, 为辐散}$$

## 应用

① 气柱上山， $H$  减小，辐散， $f$  不变，则气旋性涡度减小，反气旋性涡度增大。上山一侧有利于反气旋生成发展，背风坡一侧有利于气旋的生成。



② 正压绝热过程下的位涡守恒:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{f+\zeta}{\Delta p} \right) = 0$

## 具体解释

如下方左图，均匀广阔西风气流，遇到南北向无限宽的山脉地形

① 上山前，均匀西风气流，因此相对涡度为0

② 上山，厚度  $H$  减小， $f$  不变，因此相对涡度  $\zeta$  减小；此时  $\zeta < 0$ ，是反气旋性涡度，导致空气块向南运动，进一步导致  $f$  减小

③ 越过山顶后，因为  $\beta$  效应，即绝对涡度守恒， $f$  减小，则相对涡度增加。同时下山中， $H$  增加，位涡守恒要求相对涡度增加。

④ 因此气块运动将按照气旋式环流轨迹，使得在山后形成第一个槽：背风槽（下方右图）。此后按照绝对涡度守恒，向下游形成一些列的槽。

真实情况下，有地形的摩擦作用、绕流作用。

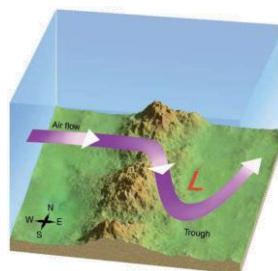
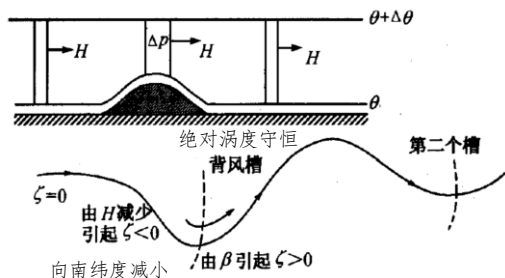
## 问题

为何使用涡度方程可以预测天气变化？

因为大尺度天气过程中，大气基本上是做涡旋运动的，且满足准地转关系，知道了涡度变化也就大致

知道了气压变化，因而可以利用涡度变化做大尺度天气预报。  $\zeta_g = \frac{1}{f} \nabla^2 \phi \propto -\phi$

$\sin()$  函数求两次导变为负号 所以  $\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \propto -\frac{\partial \phi}{\partial t}$  由此引入涡度方程



## 3.3 位势倾向方程与 $\omega$ 方程

**引入** 涡度方程不能直接用于判断形势发展(右端水平辐散项不能直接从天气图上的位势高度判断), 为此需  
要将涡度方程变化为位势倾向方程。同时为了理解气旋发展的物理实质, 常引入 $\omega$ 方程。

**倾向** 某地物理量随时间的变化, 也就是通常所说的物理量的局地变化, 表示为 $\partial/\partial t$

### 3.3.1 位势倾向方程

#### 3.3.1.1 方程形式与推导

**推导** 1. 将连续方程  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$  代入涡度方程:  $\frac{d(f+\zeta)}{dt} = -f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ , 并展开个别变化为局地变化和

平流变化之和, 得到  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla(f + \zeta) = f \frac{\partial \omega}{\partial p}$  准地转关系则为:  $\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla(f + \zeta_g) = f \frac{\partial \omega}{\partial p}$  ①

2. 假设准地转关系, 以地转风  $\begin{cases} u_g = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{f} \nabla^2 \phi$  代入得到:

$$\nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} + f \vec{V}_g \cdot \nabla(f + \zeta_g) = f^2 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (2) \quad \text{其中有两个变量 } \phi, \omega, \phi \text{ 是未知数保留, 我们希望消去 } \omega$$

注意: 第一项 $\phi$ 是连续的, 可以偏导交换; 中间一项表示涡度平流项, 是已知项, 可以通过等高线分析判断得到。平流补充:  $-\vec{V} \cdot \nabla(\dots)$  其依赖于风速、物理要素梯度和两者的夹角。

3. 从位温出发:  $\theta = T \left(\frac{1000}{p}\right)^{\frac{AR}{c_p}} \Rightarrow \ln \theta = \ln T + \frac{AR}{c_p} (\ln 1000 - \ln p)$  取微分:  $\frac{1}{\theta} d\theta = \frac{1}{T} dT - \frac{AR}{c_p p} dp$

乘以系数凑整: 原式  $\times T c_p \Rightarrow \frac{T c_p}{\theta} d\theta = c_p dT - \frac{ART}{p} dp$  利用热力学第一定律:  $dQ = c_p dT - \frac{ART}{p} dp$

(系统内能变化等于加入系统的热量与系统对环境做功的差)。则  $\frac{T c_p}{\theta} d\theta = dQ \Rightarrow \frac{dQ}{c_p T} = \frac{d\theta}{\theta}$

对单位时间而言(求 $dt$ ):  $\frac{1}{c_p T} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt}$  位温的个别变化 展开:  $\frac{1}{\theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \theta + \omega \frac{\partial \theta}{\partial p} \right) = \frac{1}{c_p T} \frac{dQ}{dt}$  ③

4. 对位温公式取对数后在等压面上( $p = \text{const}$ ), 两端求 $\frac{\partial}{\partial t}$ :  $\frac{\partial}{\partial t} \ln \theta = \frac{\partial}{\partial t} \ln T \Rightarrow \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t}$

引入气体状态方程  $p = \rho RT, T = \frac{p}{\rho R}, \alpha = \frac{1}{\rho}$  得到:  $\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\rho R}{p} \cdot \frac{p}{R} \cdot \frac{\partial (1/\rho)}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$

所以  $\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$  两端求  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ :  $\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$  和  $\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y}$  由此可得位温和比容的关系:  $\frac{1}{\theta} \nabla \theta = \frac{1}{\alpha} \nabla \alpha$

5. 代入③式, 取地转近似, 得到  $\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \vec{V}_g \cdot \nabla \alpha + \frac{1}{\theta} \omega \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{\rho R}{c_p p} \frac{dQ}{dt}$  两端同乘 $\alpha$ 并移项, 得到:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla \alpha = \frac{R}{c_p p} \frac{dQ}{dt} - \frac{\alpha}{\theta} \omega \frac{\partial \theta}{\partial p} \quad \text{令稳定度: } \sigma = -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \text{ 得到: } \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla \alpha = \frac{R}{c_p p} \frac{dQ}{dt} + \sigma \omega$$

该式同时也为 $\omega$ 方程推导的中间过程 注意稳定大气中  $\frac{\partial \theta}{\partial p} < 0 \Rightarrow \sigma > 0$

6. 由于比容  $\alpha = \frac{1}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial p}$  ( $\partial p = -\rho g dz = -\rho \partial \phi$ ) 应用到上式:  $\frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \vec{V}_g \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{R}{c_p p} \frac{dQ}{dt} - \sigma \omega$

7. 上式两端求  $\frac{\partial}{\partial p} \times \frac{f^2}{\sigma}$ , 得到  $\frac{f^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{f^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left( \vec{V}_g \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = -\frac{f^2 R}{\sigma c_p p} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{dQ}{dt} \right) - f^2 \frac{\partial \omega}{\partial p}$  ④

与②式比较, 发现可以消去 $\omega$ : ②式+④式, 得到最终方程。 此处近似 $\sigma$ 与高度无关

**方程**

$$\left( \nabla^2 + \frac{f^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} = -f \vec{V}_g \cdot \nabla(f + \zeta_g) + \frac{f^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left( -\vec{V}_g \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \frac{f^2 R}{c_p p \sigma} \frac{\partial}{\partial p} \frac{dQ}{dt}$$

位势倾向整个空间的 Laplace

地转风的绝对涡度平流

温(厚)度平流随高度的变化

非绝热加热随高度的变化

### 3.3.1.2 方程的物理意义

左端第一项  $\left(\nabla^2 + \frac{f^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) \frac{\partial \phi}{\partial t}$  位势倾向整个空间的 Laplace 前面有一串系数,

假设  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  的分布是正负相间出现的正弦波动: 则  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{A \text{ 振幅}} \sin kx \sin ly \sin mp$   $k, l, m$  为波数

求水平方向的拉普拉斯:  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -k^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_A \sin kx \sin ly \sin mp$  则拉普拉斯对应有负号

则: 在稳定大气中 ( $\sigma > 0$ )  $\left(\nabla^2 + \frac{f^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\left(k^2 + l^2 + \frac{(fm)^2}{\sigma}\right) \frac{\partial \phi}{\partial t} \propto -\frac{\partial \phi}{\partial t}$  忽略系数, 有正比关系

则稳定大气位势倾向方程可以简化为:  $-\frac{\partial \phi}{\partial t} \propto -f \vec{V}_g \cdot \nabla(f + \zeta_g) + \frac{f^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(-\vec{V}_g \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p}\right) - \frac{f^2 R}{c_p p \sigma} \frac{\partial}{\partial p} \frac{dQ}{dt}$

右端第一项  $-f \vec{V}_g \cdot \nabla(f + \zeta_g)$  地转风绝对涡度平流 其可拆分:  $-\vec{V}_g \cdot \nabla f - \vec{V}_g \cdot \nabla \zeta_g$  地转涡度平流+相对涡度平流

对于一般波长  $< 3000\text{km}$  的短波(八个以上的槽脊), 上式右端第二项较大, 因此地转风绝对涡度平流的强弱主要取决于地转风相对涡度平流。波长越长, 相对平流的贡献变小。

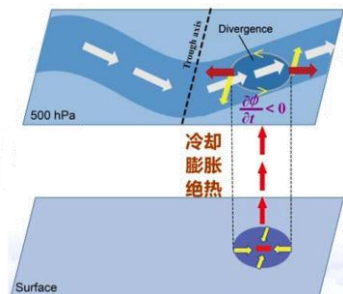
槽前脊后: 正的地转风相对涡度平流  $-\vec{V}_g \cdot \nabla \zeta_g > 0$   $-\frac{\partial \phi}{\partial t} > 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} < 0$  负变高

物理意义: 西南风→正相对涡度平流输送→气旋性涡度增加→水平地转偏向力→高层辐散→地面减压(整层气柱质量)→气压梯度力→地面辐合→大气运动的连续性→上升运动→绝热情况下膨胀冷却(非绝热由第三项单独考虑)→气柱收缩→等压面高度降低→负变高 【流场→气压场】

槽后脊前: 负的地转风相对涡度平流  $-\vec{V}_g \cdot \nabla \zeta_g < 0$   $-\frac{\partial \phi}{\partial t} < 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} > 0$  正变高

物理意义: 西北风→负相对涡度平流→反气旋性涡度增加→水平地转偏向力→高层辐合→地面加压→气压梯度力→地面辐散→下沉运动→绝热情况下压缩增温→气柱膨胀→等压面高度升高→正变高

在对称槽、脊线上: 涡度平流为0, 变高为零, 因而槽脊不会发展, 而是向前移动(变高的梯度方向)



槽前负变高的物理过程