第三章 气旋与反气旋

章节概述 本节讲授涡度方程、位势倾向方程、ω方程的物理意义及其在分析温带气旋与反气旋发展机制方面的定性应用；影响我国的温带气旋、反气旋的结构特征与活动规律；用位势涡度守恒原理解释天气系统在上山、下山时强度的变化；并用地转适应的观点解释气旋发展。

3.1 气旋、反气旋的特征和分类

气旋 气旋是占有三度空间的，在同一高度上中心气压低于四周的流场中的涡旋。涡旋中的空气在**北半球逆时针旋转，在南半球顺时针旋转**。**在北半球具有正的涡度，南半球具有负的涡度。**

反气旋 反气旋是占有三度空间的，在同一高度上中心气压高于四周的流场中的涡旋。涡旋中的空气在**北半球顺时针旋转，在南半球逆时针旋转**。**在北半球具有负的涡度，南半球具有正的涡度。**

3.1.1 气旋和反气旋的水平尺度

尺度定义 气旋、反气旋的水平尺度以最外围的闭合等压线的直径长度来表示，反气旋尺度大于气旋。

气旋尺度 平均而言，气旋：$1000km-3000km$，东亚气旋比欧洲和北美的水平尺度小

反气旋尺度 大者面积可达亚洲大陆的$3/4$

3.1.2 气旋和反气旋的强度

强度定义 使用**中心气压值**表征。气旋中心气压值越低，气旋越强；反气旋中心气压值越高，反气旋越强

气旋可以表述为加强或加深发展(等高面低于周围)，但反气旋只能说加强。

强度范围 气旋：$970-1010hPa$ 反气旋：$1020-1030hPa$

平均而言，温带的气旋和反气旋冬季强于夏季，海上的气旋强于陆上的，陆上的反气旋强于海上的。

3.1.3 气旋和反气旋的分类

气旋 地理区域：**热带气旋**和**温带气旋**

热力性质：**锋面气旋**(有温度对比)和**无锋气旋**(无温度对比，如台风、热低压)

反气旋 地理区域：**极地、温带和副热带反气旋**(西太平洋副热带高压)

热力性质：**冷性反气旋**(西伯利亚冷高压)、**暖性反气旋**(西太平洋副热带高压)

气旋与反气旋会相互转化。无锋气旋可以转化为锋面气旋(台风北上)、冷高压也可以受热变为热高压

温带气旋 源地：不是均匀分布在温带地区的。

北半球气旋源地的特点：① 1、7 月**北太平洋和北大西洋**两个气旋最大频率中心(阿留申低压、冰岛低压)、② 源地分布基本**与纬圈平行**、③ 巨大山地背风一侧及其以东地区、④ 海湾以及内陆胡泊（非绝热加热影响：冬季温度高）

东亚无论冬夏，$30\sim35N,45\sim50N$ 生成频率最多。 与锋生带有关

3.2 涡度和涡度方程

引入 使用气压的变化率误差较大，但发现大尺度大气运动具有涡旋和准地转平衡的特点，可以用涡度衡量。

3.2.1 涡度

涡度 度量空气块**旋转程度和旋转方向**的物理量 单位：$1/s$ 量纲：$\boldsymbol{\zeta\sim V/L}$

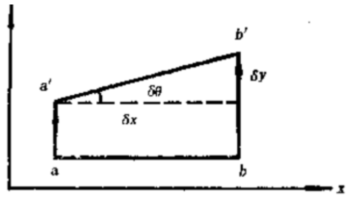
量级 $\vec{\zeta}\sim10^{-5}$ 大尺度 $\vec{\zeta}\sim10^{-4}$ 中尺度 $\vec{\zeta}\sim10^{-3}$ 小尺度 $f\sim10^{-4}$ 中高纬度

$f = 2\Omega\sin\varphi$ 称为地转参数，也称为**地转涡度**，对于大尺度运动，地转涡度要更大。

公式 $\vec{\zeta} = \nabla\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$ 大尺度准水平，前两项不考虑

我们关注的是 $\boldsymbol{\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}$ P坐标系中相对涡度的垂直分量 $\boldsymbol{\zeta_p = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p}$

方向 **涡度的方向是指旋转轴的方向**，不在气流旋转平面。



相对涡度 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 分量的物理意义

物理意义 涡度的物理意义：简化问题：设$u = 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 只考虑 $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$

由于**风速分布不均匀**，原线段ab变化为$a'b'$，**平移外发生了转动**。

转动角速度有：$(v_b - v_a)\delta t = \delta x\delta\theta \Rightarrow \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{v_b - v_a}{\delta x} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$

可得$\partial v/\partial x$表示与x轴平行的气块边界转动角速度，同理$-\partial u/\partial y$表示与y轴平行的气块边界角速度。

如果把气块换为刚体，则 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$，于是 $\zeta_z = 2\frac{d\theta}{dt}$，**涡度为刚体旋转角速度的两倍**。

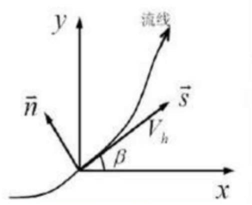
风场在空间分布不均匀，导致质点在流场中发生旋转。

3.2.1.1 绝对涡度与相对涡度

绝对涡度 $\vec{V}_a$表示绝对速度，$\vec{V}$表示空气相对于地球的相对速度，$\vec{V}_e$为牵连速度。

$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{V}_e \Rightarrow \vec{\zeta}_a = \vec{\zeta} + \vec{\zeta}_e$ **绝对涡度=相对涡度+地转涡度**

如果涡度没有矢量符号，则表示垂直分量



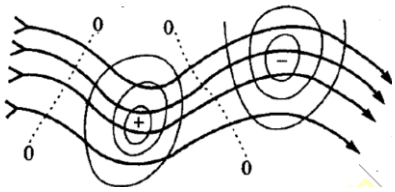
自然坐标系的转换

3.2.1.2 曲率涡度与切变涡度

自然坐标 令水平方向全风速为V_h，则有：$\vec{V}_h = V_h\vec{s} \Rightarrow \begin{cases} u = V_h\cdot\vec{i} = V_h\cos\beta \\ v = V_h\cdot\vec{j} = V_h\sin\beta \end{cases}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V_h}{\partial x}\sin\beta + V_h\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V_h}{\partial y}\cos\beta - V_h\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial y}$

$\zeta = V\frac{\partial\beta}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial n} = \underbrace{\frac{V}{R_s}}_{\text{曲率涡度}} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial n}}_{\text{切变涡度}} = \boxed{VK_s - \frac{\partial V}{\partial n}}$



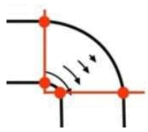
曲率涡度 表示**由于流线(或等高线)弯曲造成的涡度**，风速愈大，曲率愈大，涡度就愈大。
气旋性弯曲时，曲率涡度为正；反气旋性弯曲时，曲率涡度为负；等高线平直，曲率涡度为零。

切变涡度 速度在法线方向分布不均匀，也就是**等高线沿着法线方向分布不均匀**。**急流附近切变涡度较为明显**。

急流轴的两侧：北侧具有正的切变涡度 $-\frac{\partial V}{\partial n} > 0$，南侧具有负的切变涡度 $-\frac{\partial V}{\partial n} < 0$，导致高空辐散

注意 弯曲流场的涡度可能等于零。只要流体微团的环流保持不变。

$\oint_L \vec{V}\cdot d\vec{l} = 0$ $\zeta = \frac{V}{R_s} - -\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{a}{R^2} + \frac{a}{R^2} = 0$



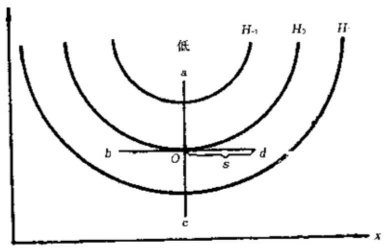
3.2.1.3 地转风涡度、热成风涡度与行星涡度

地转风涡度 以**地转风代替实际风**，得**地转风涡度**：

$\boldsymbol{\zeta_g} = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \underbrace{\frac{g}{f}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)}_{\text{拉普拉斯算子}} = \frac{9.8}{f}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)$

说明等高线的**不同弯曲状态**，决定了地转风**涡度的正负和大小**

二阶导数反应**等高线曲率**，如右图 $\zeta_g \approx \frac{v_d - v_b}{\Delta x}$



地转风涡度的计算

槽线上曲率涡度最大

热成风涡度 以**热成风**：$u_T = -\frac{g}{f}\frac{\partial(z_2 - z_1)}{\partial y} = -\frac{g}{f}\frac{\partial h}{\partial y}$ $v_T = \frac{g}{f}\frac{\partial(z_2 - z_1)}{\partial x} = \frac{g}{f}\frac{\partial h}{\partial x}$ 代入

得到：$\boldsymbol{\zeta_T} = \frac{\partial v_T}{\partial x} - \frac{\partial u_T}{\partial y} = \frac{g}{f}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) = \frac{g}{f}\nabla^2 h$ 冷舌中有正的热成风涡度，暖舌中有负的热成风涡度

行星涡度　　牵连速度代入 $\vec{V}_e=\vec{\Omega}\times\vec{R}$ 　取自然坐标有 $\vec{\zeta}_e=\frac{V_e}{R}+\frac{\partial V_e}{\partial R}=2\Omega$ 　向量形式为 $\vec{\zeta}_e=2\vec{\Omega}$

可见行星涡度的方向与地球自转方向一致，大小是自转角速度的两倍。

绝对涡度垂直分量：$\left(\zeta_a\right)_z=\left(\zeta\right)_z+2\Omega\sin\phi$ 　　$\left(\zeta_a\right)_p=\left(\zeta\right)_p+2\Omega\sin\phi$

其中 $f=2\Omega\sin\varphi$ 为行星涡度的垂直分量，又称**地转参数**。 北半球 $f>0$，南半球 $f<0$

3.2.2 涡度方程（p坐标）

3.2.2.1 涡度方程的推导与公式

引入　　我们想通过旋转程度来分析气旋或反气旋的增强情况，需要推导涡度与时间的关系。

推导　　对运动方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\omega\frac{\partial u}{\partial p}=-g\frac{\partial z}{\partial x}+fv$ ① 　$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\omega\frac{\partial v}{\partial p}=-g\frac{\partial z}{\partial y}-fu$ ②

要凑出**涡度的表达式$\zeta_p=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$，可以对②求$x$偏导数，对①求$y$偏导数，并相减：**

①：$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}+\omega\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\cancel{-g\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}+v\frac{\partial f}{\partial y}+f\frac{\partial v}{\partial y}$

②：$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}+\omega\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\cancel{-g\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}-u\frac{\partial f}{\partial x}-f\frac{\partial u}{\partial x}$

②−①：$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\zeta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}+\omega\frac{\partial \zeta}{\partial p}=-u\frac{\partial f}{\partial x}-v\frac{\partial f}{\partial y}-f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$$\left[\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+\omega\frac{\partial \zeta}{\partial p}\right]=\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}-(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

涡度方程　　$\boxed{\frac{d(f+\zeta)}{dt}=\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}\right)-(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}$ 　**绝对涡度个别变化=涡度倾侧**−绝对涡度水平**散度项**

局地变化　　$\boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t}=-\left(u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)-\left(u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\omega\frac{\partial \zeta}{\partial p}+\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}\right)-(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}$

涡度局地变化= −相对涡度平流−地转涡度平流−涡度垂直输送+涡度倾侧项−绝对涡度水平**散度项**

或记忆为：$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=-\vec{V}\cdot\nabla\zeta-\omega\frac{\partial \zeta}{\partial p}-\beta v+\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}\right)-(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial \zeta}{\partial t}>0$ 表示气旋性涡度增加，反气旋涡度减小 $\frac{\partial \zeta}{\partial t}<0$ 表示反气旋性涡度增加，气旋性涡度减小

3.2.2.2 涡度方程的物理意义

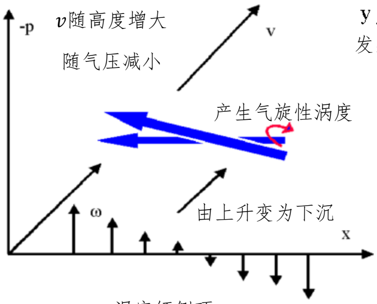
涡度倾侧项　　$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}\right)$ 　　**由于垂直速度在水平方向分布不均匀，使涡度水平分量转化为铅直分量**

相对涡度　　相对涡度与水平散度 $-\zeta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ 　$\zeta>0$时（具有气旋性涡度时），水平辐散使气旋性涡度减小

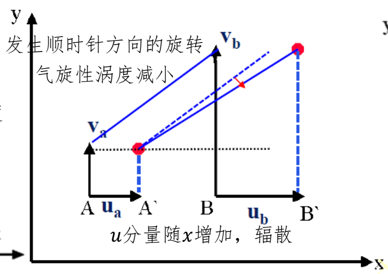
$\zeta<0$时（具有反气旋性涡度时），水平辐散使反气旋性涡度减弱 　**辐散使得旋转系统减弱**

地转涡度　　地转涡度与水平散度 $-f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ 　辐散使反气旋性涡度增加，气旋性涡度减小；辐合使气旋性涡度

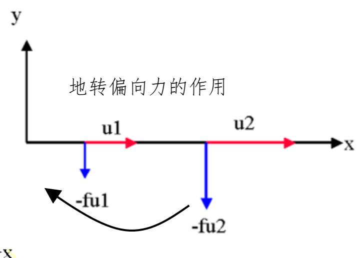
增加，反气旋性涡度减小　水平辐散时，$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}>0$ 有 $-f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)<0$



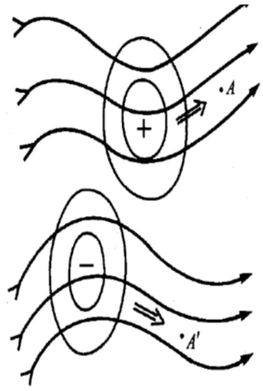
涡度倾侧项



相对涡度



地转涡度



槽脊情况　**槽线上相对涡度最大，槽前有正的相对涡度平流，槽后有负的相对涡度平流**

① 槽前脊后，沿着气流方向相对涡度减小，**有正涡度平流**，局地涡度增加 $\Delta\zeta > 0$ **附加气旋性环流**

② 槽后脊前，沿着气流方向相对涡度增加，**有负涡度平流**，局地涡度减小 $\Delta\zeta < 0$ **附加反气旋环流**

附加的环流结合地转偏向力导致辐散(高空槽前有辐散)

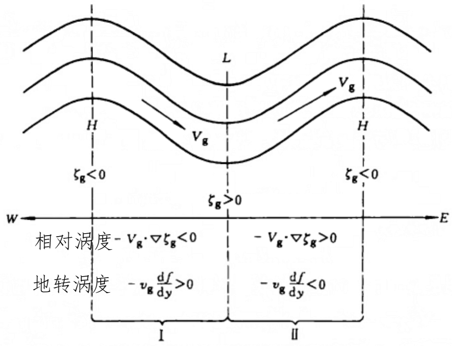
③ 槽前脊后同时有高空辐散，低层辐合上升，冷却，导致$-\boldsymbol{\Delta H}$；槽后脊前同时有高空辐合，$+\boldsymbol{\Delta H}$

④ 槽脊线为**涡度平流零线**，正圆形的高低压系统涡度平流为零

短波槽($L \leq 3000km$)以相对涡度平流为主，长波槽以地转涡度平流为主，稳定西退

相对平流　$-\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$　空气**作水平运动时**产生的涡度局地变化

相对涡度**分布不均匀和大气水平运动**所引起的**局地涡度变化**



地转平流　$-\left(u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\beta v_{\text{y方向速度，空气块南北运动}}$　$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$　$\frac{\partial f}{\partial y} = \beta$

北半球，$f > 0$，$\beta > 0$　当吹南风时($v > 0$)，气块f增大，为保持绝对涡度守恒，气块ζ必须减小，使得局地相对涡度减小。

垂直输送　$-\omega\frac{\partial\zeta}{\partial p}$　涡度垂直输送，**取决于相对涡度随高度的变化**

$\frac{\partial\zeta}{\partial p} > 0$ 相对涡度随高度减小，$\omega < 0$ 上升运动局地涡度增加，$\omega > 0$ 下沉运动局地涡度减小

$\frac{\partial\zeta}{\partial p} < 0$ 相对涡度随高度增加，$\omega < 0$ 局地涡度减小，$\omega > 0$ 局地涡度增加

高空槽前下方有气旋，槽前正涡度平流随高度增强，低层辐合上升加强，触发气旋发展。

3.2.3 涡度方程的简化

尺度分析

$\frac{\partial\zeta}{\partial t}$	$= -\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$	$-v\frac{\partial f}{\partial y}$	$-\omega\frac{\partial\zeta}{\partial p}$	$+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}\right)$	$-(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$、
$\frac{V^2}{L^2}$	$\frac{V^2}{L^2}$	$V\cdot 10^{-13}$	$\frac{WV}{LH}$	$\frac{WV}{LH}$	$f_0\cdot 10^{-6}$
$\mathbf{10^{-10}}$	$\mathbf{10^{-10}}$	$\mathbf{10^{-10}}$	10^{-11}	10^{-11}	$\mathbf{10^{-10}}$

零级简化　$\frac{d(f+\zeta)}{dt} = -(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$

运动方程中速度的时间导数项比气压梯度力小一个数量级；气压局地变化项为小项

物理解释　相对涡度的局地变化主要由**涡度的平流变化**，**空气微团的南北运动**以及**水平辐合辐散造成**。

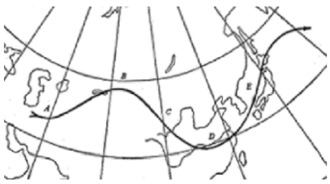
又因为 $f \gg \zeta$　有 $\frac{d(f+\zeta)}{dt} = -f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$　**当大气准水平无辐散时**，有 $\frac{d(f+\zeta)}{dt} = 0$

即**水平无辐散大气中绝对涡度守恒**，由此导致了罗斯贝波的生成。

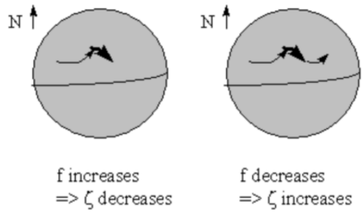
3.2.4 位涡(位势涡度)及位涡守恒

垂直位涡度　$\frac{f+\zeta}{H}$ 或 $\frac{f+\zeta}{\Delta p}$　**绝对涡度与气柱厚度的比值**

称为正压大气的**垂直位涡度**。



空气块受扰动后的路径



罗斯贝波的生成

位涡守恒　$\frac{d}{dt}\left(\frac{f+\zeta}{H}\right) = 0$　位涡是一个常数

位涡　位涡是一个综合描述大气**运动状态和热力状态**的物理量。

位涡守恒定律揭示了大气热力结构对涡度变化的约束效应。

位涡度方程　由涡度方程、连续方程、热力学能量方程以及状态方程，通过变换，可以得到 Ertel 位涡度方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\zeta}_a\cdot\nabla s}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\nabla s_{\text{熵}}\cdot\nabla\times\vec{F}_{\text{摩擦力}} + \frac{1}{\rho}\vec{\zeta}_a\cdot\nabla\left(\frac{Q_{\text{非绝热加热}}}{T}\right)$$

其中 $\frac{\vec{\zeta}_a\cdot\nabla s}{\rho}$ 称为位涡度

在**绝热无摩擦**条件下，则位涡度方程变为 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\zeta}_a\cdot\nabla s}{\rho}\right) = 0$ 称为**位涡守恒定律**。

形式推导 因大气的水平运动远大于垂直运动，且物理量的垂直变化远大于水平变化，近似有

$$\frac{\vec{\zeta}_a\cdot\nabla s}{\rho}\xRightarrow{\text{简化为垂直方向}}\frac{(f+\zeta)}{\rho}\cdot\frac{\partial s}{\partial z}\xRightarrow{\text{熵的表达形式}}\frac{c_p}{\rho}(f+\zeta)\frac{\partial\ln\theta}{\partial z}\qquad s=c_p\ln\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{f+\zeta}{\rho}\frac{\partial\ln\theta}{\partial z}\right]=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\ln\theta}{\rho\,\partial z}-\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)+\frac{f+\xi}{\rho c_p}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q}{T}\right)\qquad \frac{d}{dt}\left[(f+\zeta)\frac{\partial\ln\theta}{\partial p}\right]=\frac{\partial\ln\theta}{\partial p}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)+\frac{f+\xi}{c_p}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Q}{T}\right)$$

若绝热无摩擦 $\frac{d}{dt}\left[(f+\zeta)\frac{\partial\ln\theta}{\partial p}\right]=0$ 进一步的，在干绝热过程中，**空气微团始终在等位温面或等熵面上运动**，在两个等熵面之间的空气柱尽管在运动过程中有所伸缩，但始终被禁锢在两个等熵面(位温面)间。介于两个等位温面间的气柱，设其气压差为Δp，因绝热过程中空气微团的位温保持守恒，则：

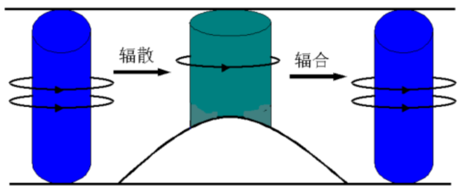
$$(f+\zeta)\frac{\partial\ln\theta}{\partial p}=(f+\zeta)\frac{\ln\theta_2-\ln\theta_1}{\Delta p}=\frac{(f+\zeta)}{\Delta p}\ln\frac{\theta_2}{\theta_1}\quad\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{f+\zeta}{\Delta p}\right)=0$$

若假定气层厚度为H，且空气不可压，则有 $AH=const$，A为气柱底面积，H为厚度

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{H}\frac{dH}{dt}\qquad \frac{d(f+\zeta)}{dt}=-(f+\xi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\qquad \frac{d(f+\zeta)}{dt}=(f+\zeta)\frac{1}{H}\frac{dH}{dt}$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{f+\xi}{H}\right)=0$ H增大，为辐合 H减小，为辐散

气柱被禁锢在等位温面之间



应用 ① **气柱上山**，H减小，辐散，f不变，则**气旋性涡度减小，反气旋性涡度增大**。**上山一侧有利于反气旋生成发展，背风坡一侧有利于气旋的生成**。

② **正压绝热过程下的位涡守恒**：$\frac{d}{dt}\left(\frac{f+\xi}{\Delta p}\right)=0$

具体解释 **如下方左图，均匀广阔的西风气流，遇到南北向无限宽的山脉地形**

① 上山前，均匀西风气流，因此**相对涡度为0**

② 上山，**厚度H减小**，f不变，因此**相对涡度ζ减小**；此时$\zeta<0$，是反气旋性涡度，导致**空气块向南运动**，进一步导致f**减小**

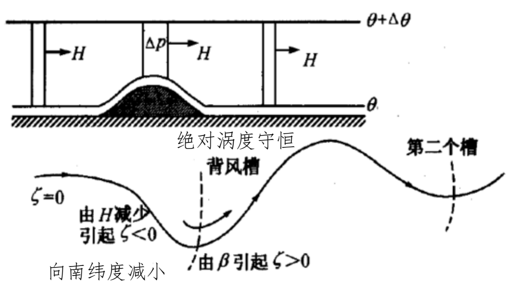
③ 越过山顶后，因为β**效应**，即**绝对涡度守恒**，f减小，则**相对涡度增加**。同时下山中，H**增加**，**位涡守恒**要求**相对涡度增加**。

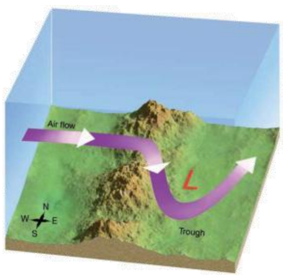
④ 因此气块运动将按照气旋式环流轨迹，使得**在山后形成第一个槽：背风槽**（下方右图）。此后按照**绝对涡度守恒**，向下游形成一些列的槽。 真实情况下，有地形的摩擦作用、绕流作用。

问题 为何使用涡度方程可以预测天气变化？

因为大尺度天气过程中，大气基本上是**做涡旋运动的**，且满足**准地转关系**，知道了涡度变化也就大致知道了气压变化，因而可以利用涡度变化做大尺度天气预报。 $\zeta_g=\frac{1}{f}\nabla^2\phi\propto-\phi$

sin()函数求两次导变为负号 所以 $\frac{\partial\zeta_g}{\partial t}\propto-\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 由此引入涡度方程





3.3 位势倾向方程与ω方程

引入 涡度方程不能直接用于判断形势发展(右端水平辐散项不能直接从天气图上的位势高度判断)，为此需要将涡度方程**变化为位势倾向方程**。同时为了理解气旋发展的物理实质，常引入ω方程。

倾向 某地**物理量随时间的变化**，也就是通常所说的**物理量的局地变化**，表示为$\boldsymbol{\partial/\partial t}$

3.3.1 位势倾向方程

3.3.1.1 方程形式与推导

推导 1. 将**连续方程** $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial \omega}{\partial p}$ 代入**涡度方程**：$\frac{d(f+\zeta)}{dt}=-f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$，并展开个别变化为局地变化和平流变化之和，得到 $\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\vec{V_g}\cdot\nabla(f+\zeta)=f\frac{\partial \omega}{\partial p}$ 准地转关系则为：$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t}+\vec{V_g}\cdot\nabla(f+\zeta_g)=f\frac{\partial \omega}{\partial p}$

2. 假设**准地转关系**，以**地转风** $\begin{cases}u_g=-\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial y}\\ v_g=\frac{1}{f}\frac{\partial \phi}{\partial x}\end{cases}\Rightarrow \zeta_g=\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}=\frac{1}{f}\nabla^2\phi$ 代入得到：

$\boldsymbol{\nabla^2\frac{\partial \phi}{\partial t}+f\overline{V_g}\cdot\nabla(f+\zeta_g)=f^2\frac{\partial \omega}{\partial p}}$ ② 其中有两个变量ϕ,ω，ϕ是未知数保留，我们**希望消去$\boldsymbol{\omega}$**

注意：第一项ϕ是连续的，可以偏导交换；中间一项表示涡度平流项，是已知项，可以通过等高线分析判断得到。 平流补充：$\boldsymbol{-\vec{V}\cdot\nabla(\square)}$ 其依赖于风速、物理要素梯度和两者的夹角。

3. 从**位温**出发：$\theta=T\left(\frac{1000}{p}\right)^{\frac{AR}{c_p}}\Rightarrow \boldsymbol{\ln\theta=\ln T+\frac{AR}{c_p}(\ln 1000-\ln p)}$ **取微分**：$\frac{1}{\theta}d\theta=\frac{1}{T}dT-\frac{AR}{c_p p}dp$

乘以系数凑整：原式$\times Tc_p\Rightarrow\frac{Tc_p}{\theta}d\theta=c_p dT-\frac{ART}{p}dp$ 利用**热力学第一定律**：$dQ=c_p dT-\frac{ART}{p}dp$

(系统内能变化等于加入系统的热量与系统对环境做功的差)。则 $\frac{Tc_p}{\theta}d\theta=dQ\Rightarrow\boldsymbol{\frac{dQ}{c_pT}=\frac{d\theta}{\theta}}$

对单位时间而言（求dt）：$\frac{\mathbf{1}}{c_pT}\frac{dQ}{dt}=\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt}$ 位温的个别变化 展开：$\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\theta+\omega\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)=\frac{1}{c_pT}\frac{dQ}{dt}$ ③

4. 对位温公式取对数后在**等压面上**($p=const$)，**两端求$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial t}}$**：$\frac{\partial}{\partial t}\ln\theta=\frac{\partial}{\partial t}\ln T\Rightarrow\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t}$

引入气体状态方程 $p=\rho RT, T=\frac{p}{R\rho},\alpha=\frac{1}{\rho}$ 得到：$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\rho R}{p}\cdot\frac{p}{R}\cdot\frac{\partial(1/\rho)}{\partial t}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$

所以 $\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ 两端求$\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$：$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}$ 和 $\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}$ 由此可得**位温和比容的关系**：$\frac{1}{\theta}\nabla\theta=\frac{1}{\alpha}\nabla\alpha$