

# 第一章 大气运动的基本特征

**引言** 大气运动在空间和时间上具有很宽的尺度谱。天气学研究与天气和气候有关的大气运动，可以忽略离散分子特性，把大气视为连续的流体介质，表征大气状态的物理量在连续介质中具有单一的值，这些场变量及其导数是空间和时间的连续函数。控制大气运动的流体力学热力学方程基本定律可以用场变量作为因变量和时空为自变量的偏微分方程表示。大气运动受到质量守恒、动量守恒、能量守恒等基本物理定律支配，为了应用这些定律，本章讨论基本作用力、旋转坐标系中的视示力、控制大气运动的基本方程组，并在此基础上分析大尺度运动系统的环流和气压场的关系，引出天气图分析中应当遵循的基本原则。

## 1.1 影响大气运动的作用力

系统	在时间或空间上能够与其他系统区分开来的一个实体。在系统与系统间存在着界面，各系统的物理量可以通过界面交换。 天气学中，气旋、反气旋等系统虽然与周围大气无明确界面，在性质上有明显不同，是开放系统。
尺度	表征一个系统在空间上的大小或者在时间上持续的长短。 一般来说，无论在高空还是在地面，空间尺度越小，时间尺度也相应越短。 气象学中的尺度一般指特征尺度，不反应个体具体数值。 天气尺度： $10^6\text{m} = 1000\text{km}$
大气基本力 视示力	天气学分析中将大气视为低粘性的流体。符合连续介质假设。 真实作用于大气的力，其存在与参考系无关，也称为牛顿力。例如气压梯度力、地心引力、摩擦力等。 由于坐标系随地球一起旋转而形成的相对运动加速度的力。包括惯性离心力和地转偏向力。 若作用力分析中同时包含基本力和视示力，则牛顿第二运动定律适用于地球旋转非惯性系。
大气分层	对流层、平流层、中间层、热层、散逸层（详见大气物理学） 对流层平均厚度为10~20km，特征量级 $10^1\text{km}$
参考系	为了确定物体的位置和描述其运动而选作标准的另一物体 观测风是相对于地面的，风向是相对于观测地的经纬度确定的，由此可见，选择地球为参照系是最直观和方便的。但地球是旋转的，是一个非惯性系，为适用牛顿第二定律，需引入微分算子等内容。
惯性系	牛顿第二定律成立的参考系称为惯性参考系，反之称为非惯性系。 研究地球上运动的物体时，太阳参考系是惯性参考系。 天气学中，参考系如何选择，原则上是任意的，但在一般研究中通常选择地球作为参考系。
坐标系	为了定量地表示物体相对于参照系的位置而选定的变数(坐标)的组合。 天气学中常用有：球坐标系、局地直角坐标系、自然坐标系(地球上流体的运动带有曲率，在水平方向上取流线建立 $\tau, n$ 方向)、 $p$ 坐标系(气压为垂直坐标)、 $\sigma$ 坐标系(用于数值预报，用气压和地表气压相除，简化地形处理)、 $\theta$ 坐标系(位温为垂直坐标，等熵坐标)

### 1.1.1 基本作用力

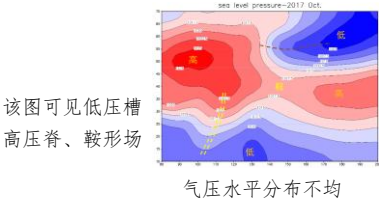
**内容** 基本作用力(基本力)包括气压梯度力 $G$ 、地心引力 $g^*$ 、摩擦力 $F$ 。

#### 1.1.1.1 气压梯度力

**气压产生** 在任何表面上由于大气的重量所产生的压力，即单位面积上所受到空气柱的重力。  
水平方向上气压不是处处相等的。地球各纬度带吸收的热量分布不均，于是高低纬度间产生了热量差，引起上升或下沉的垂直运动，从而导致同一水平面的气压有差异。对流层顶： $\sim 200\text{hPa}$

**天气图表现** 气压梯度反映在天气图上就是等压线的分布有疏有密，等压线的疏密程度表示了单位距离内气压差的大小，等压线愈密集，表示气压梯度愈大。

**定义** 作用于单位质量气块上的净压力，由于气压分布不均匀而产生  $\vec{G} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$

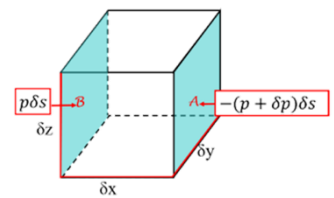


## 推导

取局地直角坐标系中的小立方体空气块，其密度为 $\rho$ ，体积为 $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$

**x方向受力：** B面气压为 $p$ ，则B面所受气压为 $p\delta s$  其中 $\delta s = \delta y \delta z$

已知沿x方向气压变化率为 $\frac{\partial p}{\partial x}$ ，则气压变化量 $\delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \delta x$



则A面所受气压为 $-(p + \delta p)\delta s$ 。则x方向净合力为 $p\delta s - (p + \delta p)\delta s = -\delta p\delta s = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x\delta y\delta z$

同理，其余方向有：**y方向**净合力： $-\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$  **z方向**净合力： $-\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$

则总受净合力为： $-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\delta x\delta y\delta z = -\nabla p\delta\tau$  考虑单位质量： $m = \rho\delta\tau$

则气压梯度力为： $\frac{-\nabla p\delta\tau}{\rho\delta\tau} = -\frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{G}$

## 性质

① 气压梯度力的**大小与气压梯度成正比，与空气密度成反比**。

② 方向与等压线垂直，指向 $-\nabla p$ 方向，由高压指向低压。（梯度方向由小到大）

③ **水平分量远小于垂直分量**  $-\frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)$  然而大气垂直方向受重力静力平衡

“热生风，风生雨”：热力造成气压不均匀，在气压梯度作用下，风便产生了；辐合辐散可能降雨。

### 1.1.1.2 地心引力

**一般定义**  $\vec{F}_g = -\frac{GmM}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$  质量为 $m$ 的空气块受到的质量为 $M$ 的地球的引力

**地心引力**  $\vec{g}^* = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ ， $r = a + z$  **单位质量块受到的引力**， $a$ 为地球平均半径， $z$ 为海拔高度

$\vec{g}_0^* = -\frac{GM}{a^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$  忽略地表到空气块之间的距离 $z$ ，海平面上的地心引力（常数）

则地心引力可写为 $\vec{g}^* = \frac{\vec{g}_0^*}{(1+z/a)^2}$

**注意**  $z$ 一般在10km左右，考虑到 $z \ll a$ ，故 $\vec{g}^* \approx \vec{g}_0^*$ ，可近似为常数。

### 1.1.1.3 摩擦力(分子粘性力)

**概念** **单位质量空气块所受到的净粘滞力**。分为**外摩擦力**和**内摩擦力**，内摩擦力有**分子粘性力**和**湍流粘性力**  
**来源** 大气中任一气块当其周围大气以**不同速度**运动时，由于**粘性**作用，立方体的各个面都与它周围的空气互相拖拉，即互相受到粘滞力的作用。其方向指向速度反方向。

**公式**  $\vec{F} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\vec{k}\right)$  其中 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  为**动力粘滞系数**

**注意** 上述公式中都是对于高度的二阶导数，**其余方向为二阶小量被忽略**。

一般而言，天气学实际公式中，尤其是自由大气运动方程中，**无需考虑摩擦力影响**。

## 特点

① 摩擦力与**风垂直切变的垂直变化成正比**

② 风垂直切变的垂直变化为正时，摩擦力指向正向，摩擦力使气块作正向加速。

③ 风垂直切变的垂直变化为负时，摩擦力指向负向，摩擦力使气块作负向加速。

④ 大气是低粘度流体，在100km下的大气层内 $\nu = 1.46 \times 10^{-5} m^2/s$ 很小，除**近地面(行星边界层)**外大部分气层(**自由大气**)可忽略分子粘滞性作用。

这种气层中动量主要由湍流运动传递，此时以**涡动粘滞系数**代替分子粘滞系数。

## 推导

大气气块摩擦力的推导基于粘性流体切应力作用：当风速分量 $u$ 随高度非线性变化时( $\partial^2 u / \partial z^2 \neq 0$ )，

微立方体上下界面因速度梯度差异产生切应力差。切应力 $\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$ ，上下表面应力差 $\Delta\tau_{zx} \approx \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \delta z$ 。

净粘滞力 $= \Delta\tau_{zx} \cdot \text{面积}$ ，除以质量 $\rho\delta V$ 得单位质量摩擦力 $F_x = \frac{\nu\partial^2 u}{\partial z^2}$ 。同理推导y方向，垂直方向摩擦力可

忽略。该力源于速度二阶导数，反映动量垂直输送的净效应。

具体推导请参考教材正文。

## 1.1.2 视示力

### 1.1.2.1 微分算子

**旋转参考系** 假设考虑运动的参考系本身是以一定的角速度绕轴转动的，这种参考系称为**旋转参考系**。

**微分算子**  $\frac{d_a}{dt}(\vec{A}) = \frac{d}{dt}(\vec{A}) + \vec{\Omega} \times (\vec{A})$  ① 绝对变化项 ② 相对变化项 ③ 牵连变化项

对于任意矢量 $\vec{A}$ ，满足： $\frac{d_a}{dt}(\vec{A}) = \frac{d}{dt}(\vec{A}) + \vec{\Omega} \times (\vec{A})$  该算子是**联系惯性坐标系与旋转坐标系的普遍关系**

对于标量而言，无需引入关系式，其不同坐标系中相同

**证明** 对任意矢量 $\vec{A}$ ，可写在不同的坐标系中，用不同 $i, j, k$ 表达：

**绝对坐标系** 惯性静止坐标系，有  $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$  单位坐标矢量为**常矢量**

**旋转坐标系** 相对坐标系，有  $\vec{A} = A'_x \vec{i}' + A'_y \vec{j}' + A'_z \vec{k}'$  单位坐标矢量**可变**( $x, y$ 轴会随着地球旋转改变)

求该矢量对时间 $t$ 的导数：

$$\text{绝对: } \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d_a A_x}{dt} \vec{i} + \frac{d_a A_y}{dt} \vec{j} + \frac{d_a A_z}{dt} \vec{k} \quad \frac{d_r \vec{A}}{dt} = \frac{d \vec{A}}{dt} = \frac{d A'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{d A'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{d A'_z}{dt} \vec{k}' \quad (\text{省略下标 } r)$$

$$\frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d_a (A'_x \vec{i}' + A'_y \vec{j}' + A'_z \vec{k}')}{dt} \xrightarrow{\text{全微分展开}} \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d A'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{d A'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{d A'_z}{dt} \vec{k}' + A'_x \frac{d_a \vec{i}'}{dt} + A'_y \frac{d_a \vec{j}'}{dt} + A'_z \frac{d_a \vec{k}'}{dt} \quad \text{坐标的变化}$$

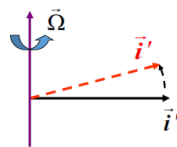
$$\frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d A'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{d A'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{d A'_z}{dt} \vec{k}' \quad A'_x, A'_y, A'_z \text{ 为标量在绝对坐标系和相对坐标系中的时间微商相同}$$

由于 $\vec{i}'$ 是旋转系中的单位矢量，所以 $\frac{d_a \vec{i}'}{dt}$ 表示 $\vec{i}'$ 的转动速度，有：(根据方向和大小可得)

$$\frac{d_a \vec{i}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{i}' \quad \frac{d_a \vec{j}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{j}' \quad \frac{d_a \vec{k}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{k}' \quad \text{上式变为: } \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d \vec{A}}{dt} + A'_x \vec{\Omega} \times \vec{i}' + A'_y \vec{\Omega} \times \vec{j}' + A'_z \vec{\Omega} \times \vec{k}'$$

$$\text{故有 } \frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d \vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

关于标量的说明：**上述算子只适用于矢量的情形**，而**标量的绝对变化与相对变化没有差别**。



### 1.1.2.2 惯性离心力

**概念** 单位质量的气块因为**地球旋转**呈现出的一种惯性力。在旋转坐标系中物体受到**向心力**的作用却静止，这违反牛顿运动定律，从而引入此力以平衡向心力使牛顿运动定律成立。惯性离心力在**纬圈平面内**与向心力大小相等方向相反。

**公式**  $\vec{C} = \Omega^2 \vec{R}$  其由于位于非惯性坐标系内观测运动并运用牛二解释的结果，是向心力的反号。

**地球情况**  $\Omega = 1.29 \times 10^{-5} s^{-1}$  位于地球上观察时，地表上每一静止的物体都受到该力作用

- 特点**
- ① 地球上每个静止物体都受到惯性离心力作用
  - ② 惯性离心力与地轴垂直，**在纬圈平面内，指向地球外侧**
  - ③ 地球自转角速度是常数，惯性离心力的大小随纬度变化，**赤道上最大，极地最小**，在极地为 0

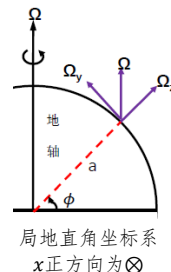
### 1.1.2.3 地转偏向力

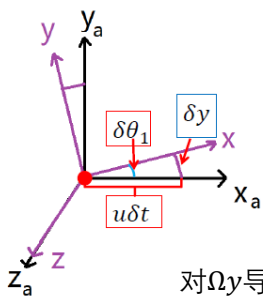
**概念** 当气块相对地球运动时**使气块运动方向发生改变**的一种惯性力

由于坐标系的旋转导致物体没有受力却出现加速度违反牛顿运动定律而引入的视示力

$$\text{公式} \quad \vec{A} = -2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \Omega \cos \phi & \Omega \sin \phi \\ u & v & w \end{vmatrix} = (2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi) \vec{i} - 2\Omega u \sin \phi \vec{j} + 2\Omega u \cos \phi \vec{k}$$

**推导** 先对地球自转角速度进行分解： $\Omega_x = 0$   $\Omega_y = \Omega \cos \phi$   $\Omega_z = \Omega \sin \phi$   $yoz$ 平面不绕着  $x$  轴旋转  $xoz$ 平面绕着  $y$  轴以角速度  $\Omega_y$  旋转  $xoy$ 平面绕着  $z$  轴以角速度  $\Omega_z$  旋转





考虑 $\Omega_z$ ，紫色为 $O-xyz$ 旋转坐标系， $O-x_a y_a z_a$ 为绝对坐标系。一质点向 $x_a$ 运动。  
经过 $\delta t$ 时间， $\Omega_z$ 使得 $xoy$ 平面绕着 $z$ 轴逆时针旋转了 $\delta\theta_1 = \Omega \sin \phi \delta t$ ，坐标轴发生了变化：  
 $x$ 轴向原始 $x_a$ 左侧发生偏转，空气块位置相对 $x$ 轴向右( $y$ 负方向)偏离了 $\delta y$

$$\delta y = u \delta t \delta\theta_1 = u \delta t \Omega \sin \phi \delta t = \frac{1}{2} \left( -\frac{dv}{dt} \right) (\delta t)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \left( -\frac{dv}{dt} \right) = u \Omega \sin \phi \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2\Omega u \sin \phi$$

则得到偏向加速度。旋转地球上，局地 $u$ 的变化会引起 $v$ 的加速，表现为科氏力。

对 $\Omega_y$ 导致的变化，同理，经过 $\delta t$ 时间， $\Omega_y$ 使得 $xoz$ 平面绕着 $y$ 轴逆时针旋转了 $\delta\theta = \Omega \cos \phi \delta t$   
 $x$ 轴相对 $x_a$ 轴向 $z$ 轴的反方向偏转，空气块的位置偏离到 $x$ 轴上方 $\delta z$ 处

$$\delta z = u \delta t \delta\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dt} \right) (\delta t)^2 \Rightarrow \frac{dw}{dt} = 2\Omega u \cos \phi$$

同理，对于 $v > 0, w > 0$ ，可以得到沿着 $x$ 方向的偏向加速度：

$$\left. \begin{aligned} \delta x_1 &= v \delta t \delta\theta_1 = v \delta t \Omega \sin \phi \delta t = \frac{1}{2} \left( \frac{du_1}{dt} \right) (\delta t)^2 \Rightarrow \frac{du_1}{dt} = 2\Omega v \sin \phi \\ \delta x_2 &= w \delta t \delta\theta_2 = w \delta t \Omega \cos \phi \delta t = \frac{1}{2} \left( -\frac{du_2}{dt} \right) (\delta t)^2 \Rightarrow \frac{du_2}{dt} = -2\Omega w \cos \phi \end{aligned} \right\} \frac{du}{dt} = 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi$$

$v, w$ 的变化引起 $u$ 的加速，表现为科氏力

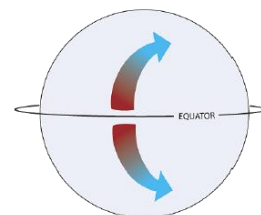
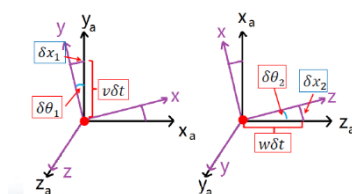
分量

若令地转参数(科里奥利参数)  $f = 2\Omega \sin \phi$  纬度,  $\tilde{f} = 2\Omega \cos \phi$

$$A_x = \frac{du}{dt} = 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi = f v - \tilde{f} w$$

则各个方向有： $A_y = \frac{dv}{dt} = -2\Omega u \sin \phi = -f u$

$$A_z = \frac{dw}{dt} = 2\Omega u \cos \phi = \tilde{f} u$$



地球绕着地轴旋转，在北半球大气将向着运动方向的右侧偏转而在南半球将向着运动方向的左侧发生偏转。这种偏转被称为科里奥利效应。

特点

- ① 根据叉乘关系，地转偏向力 $\vec{A}$ 与 $\vec{\Omega}$ 相垂直，在纬圈平面内。
- ② 地转偏向力 $\vec{A}$ 与风速 $\vec{V}$ 垂直，只改变气块运动方向，不改变速度大小
- ③  $A_z$ 一般比较小(与重力相比很小)，气块运动主要受 $A_x$ 和 $A_y$ 的影响，且 $w \sim 10^{-2} m/s$ 比较小，近似有 $A_x = f v, A_y = -f u$ 。对水平运动，在北半球水平地转偏向力在水平速度的右侧，使得运动右偏；在南半球水平地转偏向力在水平速度的左侧，使得运动左偏。
- ④ 地转偏向力 $\vec{A}$ 与相对速度 $\vec{V}$ 成比例， $\vec{V} = 0$ 时 $\vec{A}$ 立即消失；水平地转偏向力与纬度的正弦成比例
- ⑤ 在赤道上空 $\phi = 0^\circ$ ：地转偏向力仍然存在，只有不考虑含 $w$ 的项才为零。  
北极点上空 $\phi = 90^\circ$ ：仅存在水平地转偏向力。

### 1.1.3 重力

概念

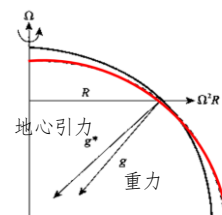
旋转坐标系中的重力：单位质量大气所受到的地心引力与惯性离心力的合力

公式

$$\vec{g} = \vec{g}^* + \Omega^2 \vec{R}$$

特点

- ① 重力不指向地心，不与地心引力一致。但重力垂直于地面，垂直于水平面  
即水平面上无重力
- ② 对正球体，重力可分解为指向球心和沿着经圈的切线方向指向赤道的两个分量，在后者的作用下地球变为一个椭球体，极半径短，赤道半径长(红线所示，是一个等位势面/水平面/等几何高度面)
- ③ 重力与地球椭球体的表面垂直，在地表面，重力没有分量，即在水平面上运动，重力是不做功的。
- ④ 重力随着纬度的增加而增加，在赤道最小，极地最大。重力随着高度 $z$ 的增加而减小
- ⑤ 实际中重力和地心引力的夹角很小，一般在地球的旋转坐标系中就认为重力指向球心  
极半径与赤道半径相差20km左右，可以认为重力指向球心。





## 1.2 控制大气运动的基本定律

基本定律	动量守恒、质量守恒、能量守恒三大定律。对应有运动方程、连续方程、热力学能量方程。
基本假设	分析大气中一个无限小控制体的质量、动量和能量变化。欧拉观点下，控制体积由 $\delta x, \delta y, \delta z$ 的平行六面体构成，位置固定；拉格朗日观点下，控制体积随大气运动而移动，包含空气质点不变。
气象变量	每种气象要素都是随时随地变化的，称之为气象变量，包括了标量和矢量。标量的空间变率常用梯度 $\nabla$ 和拉普拉斯 $\nabla^2$ 等物理量表征。气象要素是空间和时间的函数 $A = A(x, y, z, t)$
气象要素场	确定时间的气象要素的空间分布称为气象要素场或气象变量场。
梯度	$\nabla A$ 表示气象场变量的空间变率，是三维矢量。 $\nabla_H$ 表示水平梯度，是二维矢量。 拉普拉斯算子 $\Delta A$ 表示梯度的梯度，是梯度的空间变率

### 1.2.1 全导数和局地导数的关系

引入 需要导出运动气块中的场变量变化率(全导数或实质导数)与固定点上场变量变化率(局地导数)的关系

#### 1.2.1.1 微商算符

微商算符  $\frac{d(\square)}{dt} = \frac{\partial(\square)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(\square)$

- ① 个别变化率 气块在运动中其要素随时间的变化率，是场变量的全导数
- ② 局地变化率 某一固定空间位置上要素随时间的变化，是场变量的局地导数(偏导数)
- ③ 平流变化 物理量场的非均匀性，在风的作用下，产生输送作用引起局地变化。

推导 假设温度为 $T(x, y, z, t)$ ，对于某特定气块，位置 $(x, y, z)$ 随 $t$ 改变。

假设初始情况： $(x_0, y_0, z_0, t)$ ，经过 $\delta t$ 气块到达 $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$ ，且温度变化 $\delta T$

根据泰勒展开： $\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\delta z + \text{高阶项}$  除以 $\delta t$ ，并取 $\delta t \rightarrow 0$ ，有：

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\frac{dz}{dt} \text{ 则得到 } \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T$$

符号注意 上式中 $\vec{V}$ 表示全速度， $\nabla$ 表示三维微分矢量算子。气象上 $\vec{V}$ 表示水平速度， $\nabla_h$ 表示二维微分矢量算子

气象公式  $\frac{\partial(\square)}{\partial t} = \frac{d(\square)}{dt} - \vec{V} \cdot \nabla_h(\square) - w \frac{\partial(\square)}{\partial z}$  其中 $-\vec{V} \cdot \nabla_h(\square)$ 称为平流变化， $-w \frac{\partial(\square)}{\partial z}$ 称为对流变化。

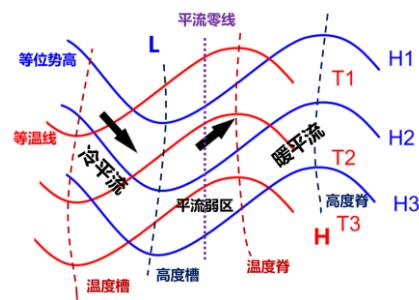
气象中关注的是局地变化，因此写为上式。

平流变化  $-\vec{V} \cdot \nabla_h(\square) < 0$ ，则 $\frac{\partial(\square)}{\partial t} < 0$ ， $-\vec{V} \cdot \nabla_h(\square) > 0$ ，则 $\frac{\partial(\square)}{\partial t} > 0$

如右图所示，等温线与等高线的夹角产生了平流。 $-|\vec{V}| \cdot |\nabla T| \cdot \cos \theta$

最大的冷平流出现在槽线上，当等温线落后于等高线时，温度槽到高度槽之间为冷平流，温度脊到高度脊之间是暖平流，高度槽到温度脊之间有平流零线，平流较弱。

向南凹的等温线称冷舌；向北凸的称暖舌。



冷暖平流和平流零线示意图

#### 1.2.1.2 绝对加速度与相对加速度

运动速度 惯性坐标系与旋转坐标系中的运动速度之间满足： $\vec{V}_a \text{绝对速度} = \vec{V}_r \text{相对速度} + \vec{V}_e \text{牵连速度}$

例如，人在运动的火车上运动，地面为惯性坐标系(绝对坐标系)，火车为相对坐标系， $\vec{V}_a$ 为地面上看人的速度， $\vec{V}_r$ 为火车上观测到的人的速度， $\vec{V}_e$ 就是火车相对地面的速度，这个速度可直线可曲线。

由于引进旋转坐标系而产生的牵连速度： $\vec{V}_e = \vec{\Omega} \times \vec{r}$  其中 $\vec{\Omega}$ 为由于旋转产生的转动角速度

回归矢径随时间的变化的形式： $\frac{d_a \vec{r}}{dt} = \frac{d_r \vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$  (惯性坐标系建立于遥远太空中的某一点)

## 论证

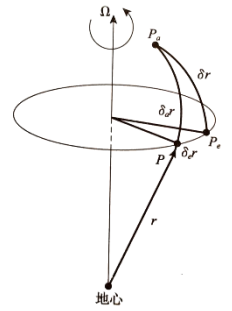
如右图，初始时刻 $t_0$ 在 $P$ 点有空气质块与观测者。

经过 $\delta t$ 时间后，空气块向北运动，到达 $P_a$ 点；观测者随地球自转，到达 $P_e$ 点

此时绝对坐标系中空气块由 $P \rightarrow P_a$ ，绝对位移为 $\delta_a \vec{r}$ ；观测者由 $P \rightarrow P_e$ ，位移为 $\delta_e \vec{r}$

此时相对坐标系中空气块由 $P_e \rightarrow P_a$ ，为 $\delta \vec{r}$

于是有： $\delta_a \vec{r} = \delta_e \vec{r} + \delta \vec{r}$  同除以 $dt$ ，得  $\frac{d_a \vec{r}}{dt} = \frac{d \vec{r}}{dt} + \frac{d_e \vec{r}}{dt}$ ，即为 $\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{V}_e$



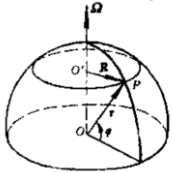
**运动加速度**  $\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d \vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V}$  地转偏向加速度 +  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  向心加速度 或  $-\Omega^2 \vec{R}$  纬圈半径

## 推导

对任意矢量 $A$ 取为任意流体质点对应的绝对速度矢量 $V_a$ 时，可以得到绝对加速度表达式：

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d \vec{V}_a}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{V}_a \Rightarrow \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} + \vec{\Omega} \times (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \Rightarrow \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d \vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

其中： $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\Omega^2 \vec{R}$  纬圈半径 故  $\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d \vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \Omega^2 \vec{R}$



## 1.2.2 大气运动方程

### 1.2.2.1 一般大气运动方程

**受力情况**  $\frac{d \vec{V}}{dt} = \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}$  地转偏向力 +  $\Omega^2 \vec{R}$  惯性离心力 单位质量，加速度即为受力

**惯性参考系** 根据牛顿第二定律： $\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \sum \vec{F}_i$  真实力 =  $-\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}^* + \vec{F}$  该式称为单位质量空气绝对运动方程

**旋转参考系** 将运动加速度表达式代入上式，并合并重力 $\vec{g}$ ，可得：

$$\frac{d \vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \vec{F} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}$$
 地转偏向力项 该式称为单位质量空气相对运动方程

如果考虑旋转坐标系的自转角速度为0，方程中的科氏力与惯性离心力不存在，方程退化为 N-S 方程。

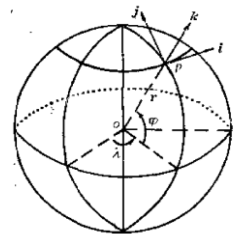
### 1.2.2.2 球坐标系分量方程

**球坐标系** 坐标为 $(\lambda, \varphi, r)$ ，其中 $\lambda$ 为经度， $\varphi$ 为纬度， $r$ 为球心距。 $i, j, k$ 为球坐标单位矢量。

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{r} + \frac{uw}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi + F_\lambda$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{r} + \frac{vw}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2\Omega u \sin \varphi + F_\varphi$$
 前面为曲率项

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\Omega u \cos \varphi + F_r$$



球坐标系

**推导** 具体推导请参考教材正文。

**意义** 球坐标系中的运动方程分量形式能够描述从近地面层附近到全球大气环流的各种各样的运动，它不仅含有旋转坐标系中的各个作用力，还含有地球曲率对相对运动加速度的影响，但形式复杂。在天气学中除个别问题外，一般采用局地直角坐标系的分量方程

### 1.2.2.3 局地直角坐标系分量方程

**坐标系** 局地直角坐标系中： $\frac{di}{dt} = \frac{dj}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0$ ，由 1.2.2.2 中含 $r$ 的曲率加速度项忽略即可

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega(v \sin \varphi - w \cos \varphi) + F_x$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi + F_y$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \varphi - g + F_z$$

**表达式**

## 1.2.3 连续方程

### 1.2.3.1 欧拉型

方程 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

质量通量  $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  单位体积的质量通量, 表示固定在空间的单位体积内流体的净流出量等于该单位体内流体质量的减少。速度场与密度场是相互制约的。

$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) > 0$  质量净流出, 密度要减小  $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) < 0$  质量净流入, 密度要增大

推导 左侧面流入流量: 流入质量 =  $\rho u$  面密度  $\delta y \delta z$  左侧面面积

右侧面流出流量: 流出质量 =  $\rho u \delta y \delta z + \frac{\partial(\rho u \delta y \delta z)}{\partial x} \delta x$  经过左侧面的质量沿着  $x$  方向做一阶泰勒展开

$\frac{d(\delta m)}{dt}$  空间体 =  $m_{in} - m_{out}$  固定空间内, 流体质量变化取决于流入量与流出量之差

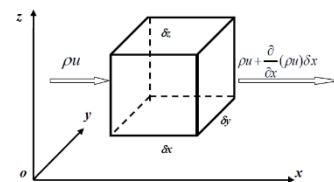
$x$  方向净流出质量:  $\rho u \delta y \delta z + \frac{\partial(\rho u \delta y \delta z)}{\partial x} \delta x - \rho u \delta y \delta z = \frac{\partial(\rho u \delta y \delta z)}{\partial x} \delta x$

$y$  方向净流出质量:  $\rho v \delta x \delta z + \frac{\partial(\rho v \delta x \delta z)}{\partial y} \delta y - \rho v \delta x \delta z = \frac{\partial(\rho v \delta x \delta z)}{\partial y} \delta y$

$z$  方向净流出质量:  $\rho w \delta x \delta y + \frac{\partial(\rho w \delta x \delta y)}{\partial z} \delta z - \rho w \delta x \delta y = \frac{\partial(\rho w \delta x \delta y)}{\partial z} \delta z$

则所有方向净流出为:  $\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$  又控制体内质量减少量:  $-\frac{\partial(\rho \delta x \delta y \delta z)}{\partial t}$

则两式相等:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$  其中  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \dots$



### 1.2.3.2 拉格朗日型

方程  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$  散度  $> 0$ , 体积增大, 则密度减小

推导 由  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$ , 导出  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{d\rho}{dt}$  利用微商算符

速度散度  $\nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}$  ( $\rho = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \ln \rho = \ln \frac{1}{\alpha}$ )

流体在单位时间内体积的相对膨胀率, 或者说在单位时间内单位体积在膨胀时所增加的部分

$\nabla \cdot \vec{V} > 0$  体积增大 辐散, 其密度要减小;  $\nabla \cdot \vec{V} < 0$  体积缩小 辐合, 其密度要增大

水平散度  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$  流体在单位时间内水平面积的相对膨胀率 只考虑前两项

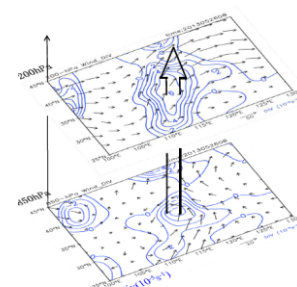
不可压流体 当流体不可压, 密度为常数时:  $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$  不可压缩流体的速度散度为零

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  将水平风场与垂直运动联系在了一起: 可观测  $u, v$ , 计算  $w$

### 1.2.3.3 P坐标系连续方程

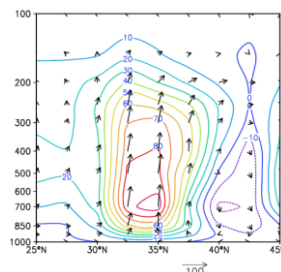
方程  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$

$\omega = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \approx -\rho g w$   $\omega$  小于零, 表示上升运动

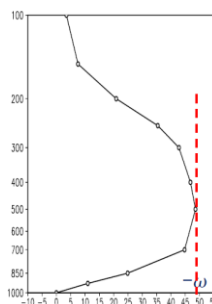


某次南方气旋成熟阶段水平散度的空间分布  
高层有辐散, 低层有辐合, 有上升运动

## 理解



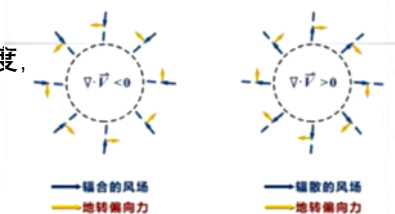
$v - \omega$  经向高度剖面图 (沿115E)  
(等值线为  $\omega$ ; 箭头表示经向垂直  
环流  $v - \omega$ ,  $\omega$  均放大  $-10^4$ )



115 - 117.5E, 30 - 40N  
平均垂直速度  $\omega$  廓线 (放大  $-10^4$ )

① 通过上升运动, 空气中的水汽有可能发生冷却和凝结, 形成云滴和雨滴, 天空中才会有各种云, 才有可能形成雨雪。在这个过程中也会有热量的变化, 会影响到大气的温度场分布。

② 辐散或者辐合的风场, 在地转偏向力作用下形成气旋或者反气旋性涡度, 对涡度的生消有重要的作用。(右图)



## 1.3.4 热力学能量方程

### 1.3.4.1 基本形式

方程 
$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \dot{Q}$$

热力平衡 大气中任取一物质体积元都可视为一个热力学系统, 但它处于运动中, 不是一个热力学平衡系统。然而, 把大气体积元这一热力学系统瞬时能量看成内能 (分子总动能与分子间相互作用总势能之和) 和大气宏观运动动能之和组成, 则可以将该系统看作一个热力学平衡系统。

核心思想 空气块的热力学能量的变化率等于加热率与外力做功率之和。

符号定义  $e$ : 单位质量的内能 密度为  $\rho$ , 体积为  $\delta\tau$  的空气块的总热力学能量为:

总热力学能量:  $\rho \left[ e_{\text{单位质量内能}} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V}_{\text{单位质量动能}} \right] \delta\tau$  外缘加热率:  $\dot{Q}$

作用于体积元的外力:  $p$  大气压力,  $\vec{F}$  摩擦力可忽略,  $\vec{g}$ ,  $\vec{A}$  地转偏向力与速度垂直不做功

推导 重力做功率:  $P = \vec{F} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{g} \rho \delta\tau$  大气压力做功率如下:

A面上环境大气对空气块的做功率为:  $(pu)_A \delta y \delta z$

B面上环境大气对空气块的做功率为:  $-(pu)_B \delta y \delta z$

泰勒级数展开, 有  $(pu)_B = (pu)_A + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (pu) \right] \delta x + \dots$

则压力在x方向的净做功率是  $[(pu)_A - (pu)_B] \delta y \delta z = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (pu) \right] \delta\tau$

同理, 压力在y, z方向的净作功率分别是  $- \left[ \frac{\partial}{\partial y} (pv) \right] \delta\tau, - \left[ \frac{\partial}{\partial z} (pw) \right] \delta\tau$

则压力总做功率为:  $- \left[ \frac{\partial}{\partial x} (pu) + \frac{\partial}{\partial y} (pv) + \frac{\partial}{\partial z} (pw) \right] \delta\tau = - \nabla \cdot (p\vec{V}) \delta\tau = -p \nabla \cdot \vec{V}_{\text{速度散度}} \delta\tau - \vec{V} \cdot \nabla p \delta\tau$

根据能量守恒原理, 对于拉格朗日控制体积, 在忽略摩擦力的作用下, 可以得到:

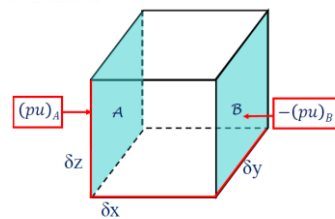
$$\frac{d}{dt} \left[ \left( e + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} \right) \rho \delta\tau \right] = -p \nabla \cdot \vec{V} \delta\tau - \vec{V} \cdot \nabla p \delta\tau + \vec{V} \cdot \vec{g} \rho \delta\tau + \rho \dot{Q} \delta\tau \quad (A)$$

其中  $\dot{Q}$  是由外缘加热 (辐射, 热传导和潜热释放) 而造成的单位质量空气的加热率

考虑质量守恒  $\frac{d}{dt} (\rho \delta\tau) = 0$ , 上式可转变为:  $\frac{de}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} \right) = - \frac{1}{\rho} p \nabla \cdot \vec{V} - \frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla p + \vec{V} \cdot \vec{g} + \dot{Q} \quad (B)$

考虑旋转坐标系的运动方程  $\frac{d\vec{V}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{g}$ , 以  $\vec{V}$  点乘上述运动方程, 得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} \right) = - \frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla p + \vec{V} \cdot \vec{g} \quad (C) \quad \text{BC 两式相减, 得到式: } \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho} p \nabla \cdot \vec{V} = \dot{Q}$$





又考虑到理想气体，单位质量干空气的内能  $e = c_v T$ ，利用连续方程  $\nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d\alpha}{dt}$

最终得到：  $c_v \frac{dT}{dt} = -p \frac{d\alpha}{dt} + \dot{Q}$  压缩功率代表内能与机械能之间的转换

**解释** 热力学第一定律可以用于运动大气，左端第二项表示了压力对单位质量空气的作功率，代表了热能和机械能之间的转换（压缩内能增加，温度增加），反映了大气动力过程与热力过程的相互联系。正是这种相互联系和转换过程使得太阳能可以驱动大气运动

### 1.3.4.2 其他形式

**气温比容**  $c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \dot{Q}$  单位质量空气从外界吸收的热量等于空气内能的增加和对外做功之和

**气压气温**  $c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{Q}$  空气从外界吸收的热量和空气块垂直运动导致绝热变化对空气块温度的影响。

**位温形式**  $\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{c_p T} \dot{Q}$  单位质量空气从外界吸收的热量使得位温发生变化

**推导** 已知位温：  $\theta = T \left( \frac{P_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ ,  $c_p = c_v + R$ ,  $P_0 = 1000 hPa$

$\ln \theta = \ln T + \frac{R}{c_p} (\ln P_0 - \ln p) \Rightarrow \frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{d \ln T}{dt} - \frac{R}{c_p} \frac{d \ln p}{dt}$  代入气压气温式，即得  $\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{c_p T} \dot{Q}$

**熵形式**  $\frac{ds}{dt} = \frac{\dot{Q}}{T}$  单位质量空气从外界吸收的热量使得熵发生变化

**推导** 令  $s = c_p \ln \theta = c_p \ln T - R \ln p + R \ln P_0$ ,  $s$  为单位质量空气的熵，有  $T \frac{ds}{dt} = \dot{Q}$

**绝热形式** 空气运动的短期变化过程中(1~2天)，可以认为空气微团与外界无热量交换，是绝热过程。这时热量学能量方程的四种表述形式就变化为：

$$\textcircled{1} c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad \textcircled{2} c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = 0 \quad \textcircled{3} \frac{d \ln \theta}{dt} = 0 \quad \textcircled{4} \frac{ds}{dt} = 0$$

可以得到在干绝热过程中位温守恒、熵不变的结论。

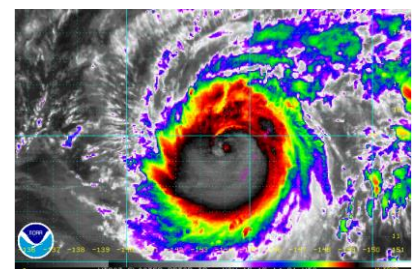
如果考虑水汽释放的凝结潜热，不考虑其他非绝热因子的作用，也可以得到相当位温守恒。相当位温在干湿绝热过程中均守恒：  $\theta_e = \theta e^{Lq_s/c_p T}$



大风降温



高温酷热



在台风发生发展过程中，台风从海洋吸收热量，从水汽凝结所释放的潜热中吸收能量，使得气压降低，辐合加强。温度场的变化影响了大气运动的状态发生了变化

## 1.3 大尺度运动系统的控制方程

**小节概述** 前文得到的基本方程组的各个物理因子对不同类型的运动的作用具有不同的**相对重要性**，为了揭示研究不同类型运动特征及规律，需要**突出主要因子，略去次要因子，即对方程组做简化**。天气学主要研究中短期天气变化有关的大尺度和中小尺度运动，本节先针对**大尺度运动**对局地直角坐标系方程进行简化，导出适用于中高纬度大尺度运动的控制方程。

### 1.3.1 尺度分析和大气运动系统分类

#### 1.3.1.1 尺度分析

**尺度分析** 是一种针对某种类型的运动估计基本方程各项量级的简便方法，**可以保留大项，略去小项**。据其结果，**结合物理上的考虑**，略去方程中量级较小的项，并可分析运动系统的某些基本性质。

**分析步骤**

- ① 先确定方程中各量特征尺度：**场变量数量级、场变量变化幅度、特征长度、厚度、时间尺度**
- ② 用典型值比较各项大小（必须使用**国际单位制**）

**特征值** 各物理场变量具有代表意义的量称之为场变量的特征值。某一物理场变量的尺度正是指其特征值。

**分析规则**

- ① 求几个**变量之和**的数量级时，认为**最大项的数量级**就是变量之和的数量级
- ② 有 2-3 个变量的数量级相同，如果它们之间没有依从关系，则其和(差)的数量级和单个变量的数量级相同；如果**有依从关系**，则其**和的数量级可以小于单个变量数量级** 如水平速度散度之和要更小
- ③ 两个**变量乘积**的数量级一般为**变量数量级的乘积**
- ④ 在一个方程式中，数量级的**最大项至少要有两项**，否则就会矛盾

**零级简化** 只保留方程中**数量级最大的各项**，而其他各项都省略不计

**一级简化** 除保留方程中数量级最大的各项外，还保留**比最大项小一个量级**的各项，而将更小的项略去不计

#### 1.3.1.2 大气运动典型尺度

<b>对流小尺度</b>	10km, $10^4\text{m}$	涡旋(1-100m)、龙卷(100m-1km)	不满足静力平衡
<b>中尺度</b>	$10^2\text{km}, 10^5\text{m}$	海陆风、山谷风、雷暴(1-100km)	
<b>大尺度</b>	<b><math>10^3\text{km}, 10^6\text{m}</math></b>	即 <b>天气尺度</b> ，有台风(100-1000km)、温带气旋、反气旋(1000-10000km)、长波	
<b>行星尺度</b>	$10^4\text{km}, 10^7\text{m}$	行星波(10000-40000km)、平均纬向风(沃克环流)(40000km)	

### 1.3.2 大尺度系统运动方程

#### 1.3.2.1 中纬度天气系统特征尺度

<b>水平尺度</b>	$L \sim 10^6\text{m}$	<b>铅直尺度</b>	$D \sim H \sim 10^4\text{m}$	对流层高度
<b>水平速度</b>	$V \sim 10\text{m/s}$	<b>垂直速度</b>	$W \sim 10^{-2}\text{m/s}$	
<b>重力加速度</b>	$g \sim 10\text{m/s}^2$	<b>密度</b>	$\rho \sim 1\text{kg/m}^3$	<b>时间尺度</b> $T = \frac{L}{V} \sim 10^5\text{s}$ 平流用时
<b>地转参数</b>	$f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0 = 2\Omega \cos \varphi_0 \approx 10^{-4}\text{s}^{-1}$ 标准纬度 $\varphi_0 = 45^\circ$			
<b>水平方向气压变化幅度</b>	$\frac{\Delta P}{\rho} \sim 10^3 \text{m}^2/\text{s}^2$	<b>垂直气压梯度尺度</b>	$\frac{P_0}{H} \sim \frac{10^5\text{pa}}{10^4\text{m}}$	

#### 1.3.2.2 水平运动方程尺度分析

<b>尺度分析</b>	<b>x分量</b>	$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi + F_x$
	<b>y分量</b>	$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi + F_y$
	<b>各项尺度</b>	$\frac{v^2}{L}, \frac{\delta P}{\rho L}, f_0 V, f_0 W, \frac{vV}{H^2}$
	<b>数量级</b>	$10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-12}$
<b>零级简化</b>	$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv$	即为地转平衡关系
	$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu$	
<b>一级简化</b>		$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv$ $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu$

### 1.3.2.3 垂直运动方程尺度分析

尺度分析	w分量	$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos\varphi - g + F_z$				
	各项尺度	$\frac{W}{T}$	$\frac{P_0}{\rho L}$	$f_0 V$	$g$	$\frac{vW}{H^2}$
	数量级	$10^{-7}$	$10^1$	$10^{-3}$	$10^1$	$10^{-15}$

零一级简化  $\boxed{0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g}$  即为静力方程（在很多中小尺度系统中并不成立）

### 1.3.3 大尺度系统连续方程

尺度分析	方程	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$				
	各项尺度	$\frac{\delta_h \rho}{\rho} \frac{V}{L}$	$\frac{\delta_h \rho}{\rho} \frac{V}{L}$	$\frac{\delta_z \rho}{\rho} \frac{W}{H}$	$\frac{V}{L}$	$\frac{W}{H}$
	数量级	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$

注意 ① 补充特征：对大尺度系统，密度水平变化  $\delta_h \rho \sim 10^{-2} \text{kg/m}^3$ ，密度铅直变化  $\delta_z \rho \sim 1 \text{kg/m}^3$   
 ② 对大尺度运动而言， $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  两项符号一般相反，需要采用  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sim 10^{-1} \frac{V}{L} \approx 10^{-6} \text{s}^{-1}$

零级简化  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} = 0$  进步简化  $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0}$  达因补偿原理

整层做积分  $0 = \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta z = - \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \delta z$  则高层辐散，则低层辐合，对应上升运动。

### 1.3.4 大尺度系统能量方程

方程改写 为便于利用实际测量值对热力学能量方程进行分析，需要先利用  $p\alpha = RT$  改写原式

对状态方程取时间全导数：  $p \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{dp}{dt} = R \frac{dT}{dt}$ ，代入原式  $c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \dot{Q}$  得到  $(c_p = c_v + R)$

$\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c_p} \dot{Q}$ ，展开：  $\left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{RT}{c_p p} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{c_p} \dot{Q}$

以静力方程代入：  $\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{c_p p} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + w(\gamma_d - \gamma)_{\text{温度直减率}} = \frac{1}{c_p} \dot{Q}$

$\gamma_d$  推导具体过程：  $w \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{RT}{c_p p} \left( w \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -w\gamma - w \frac{RT}{c_p \rho RT} (-\rho g) = w \frac{g}{c_p} - w\gamma = w(\gamma_d - \gamma)$

尺度分析	方程	$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{c_p p} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + w(\gamma_d - \gamma) = \frac{1}{c_p} \dot{Q}$				
	各项尺度	$\delta_h T \frac{V}{L}$	$\delta_h T \frac{V}{L}$	$0.29 T \frac{\delta p}{p} \frac{V}{L}$	$3 \times 10^{-3} W$	不适用
	数量级	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	

注意 ① 温度水平尺度变化  $\delta_h T \sim 10 \text{K}$ ，温度  $T \sim 10^2 \text{K}$ ，温度直减率经验估计  $\gamma_d - \gamma \sim 3 \times 10^{-3} \text{K/m}$

$\frac{\delta p}{p} \sim 10^{-2}$   $R = 287 \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{k}$   $c_p = 1004 \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{k}$   $R/c_p = 0.29$

② 非绝热加热率变化很大，不适用于特征量级

零级简化  $\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{c_p} \dot{Q}$   $\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} \text{温度局地变化} = - \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \text{温度水平平流} + \frac{1}{c_p} \dot{Q}}$   $\frac{\partial T}{\partial t} = - \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)$

绝热情况 当时间比较短(下垫面交换忽略)并且无凝结过程(无潜热释放)的天气时，非绝热作用很小，则热力学方程化为上方右式形式，表示在非绝热作用很小时，大尺度系统的局地温度变化主要是温度平流引起

一级简化  $\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w(\gamma_d - \gamma) = \frac{1}{c_p} \dot{Q}$  增加了与垂直运动有关的非绝热变化项

上升( $w > 0$ )且稳定( $\gamma_d - \gamma > 0$ )的大气，空气块对外做功，内能减少，导致温度下降

### 1.3.5 大尺度运动零级简化方程组

方程组

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v = 0 & \text{水平运动方程, 地转平衡} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u = 0 & \text{水平运动方程, 地转平衡} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 & \text{垂直运动方程, 静力平衡} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & \text{连续方程, 水平速度散度为零} \end{cases}$$

使用条件 **中纬度** ( $f$  具有一定值)、**准定常** (无时间参与)、**准水平** (无垂直运动)、**准地转平衡**、**准静力平衡**、**准水平无辐散** (连续方程无依从关系得到的)、**自由大气** (无摩擦力) 的**大尺度运动**

注意 此方程组不可用于预报, 仅为诊断方程

没有热力学能量方程。如果有, 则温度场变化, 气压场随之改变, 则破坏平衡方程组。

### 1.3.6 中纬度大尺度运动一级简化方程组

方程组

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + (\gamma_d - \gamma) w = \frac{1}{c_p} \dot{Q} \end{cases}$$

常用方程形式

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + (\gamma_d - \gamma) w = \frac{1}{c_p} \dot{Q} \end{cases}$$

注意 ① 运动方程不含  $w$  项, 连续方程中不含**密度局地变化项**。

② 常用方程连续方程是**考虑密度变化**的原始方程, 因为运动的改变必然导致密度的局地变化。

例题 1. 中  $\alpha$  尺度天气分析: 变量特征尺度定义如下:  $V \sim 10 \text{ m/s}$ ,  $W \sim \frac{100 \text{ m}}{s}$ ,  $L \sim 10^5 \text{ m}$ ,  $H \sim 10^4 \text{ m}$ ;

$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  已知  $F_x, F_y$  的量级为  $10^{-12}$ ,  $F_z$  的量级是  $10^{-13}$ 。

(1) 请运用尺度分析的方法, 推断北纬  $45^\circ$  附近的适用于中尺度线过程的零级简化运动方程。

(2) 在零级简化方程中, 地转平衡和静力平衡是否成立?

① 尺度分析可得	$x$ 分量	$\frac{du}{dt} =$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$+2\Omega v \sin \varphi$	$-2\Omega w \cos \varphi$	$+F_x$
	$y$ 分量	$\frac{dv}{dt} =$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$-2\Omega u \sin \varphi$		$+F_y$
	各项尺度	$\frac{V^2}{L}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$f_0 V$	$f_0 W$	$\frac{vV}{H^2}$
	数量级	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-12}$
	$w$ 分量	$\frac{dw}{dt} =$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$	$+2\Omega u \cos \varphi$	$-g$	$+F_z$
	各项尺度	$\frac{W}{T}$	$\frac{P_0}{\rho L}$	$f_0 V$	$g$	$\frac{vW}{H^2}$
	数量级	$10^{-4}$	$10^1$	$10^{-3}$	$10^1$	$10^{-13}$

② 对于中小尺度系统中, **地转平衡不成立, 静力平衡成立**。



## 1.4 $P$ 坐标系基本方程组

### $P$ 坐标系

以气压 $P$ 为垂直坐标的坐标系称为 $P$ 坐标系，以 $(x, y, p, t)$ 作为独立自变量的坐标系。

等压面图是气压 $P$ 为一定值的平面天气图，在该图上填写的气象资料是各测站同时刻所观测的同一等压面上的资料。若水平方向气压分布不均，等压面在空间会呈现起伏状态，所以依据等压面各处距海平面的高度通过分析等高线可以反映气压在水平方向上的分布形势。度量等压面距海平面的高度采用位势高度。

### 优势

- ① 实际工作的需要，不观测密度，高空只分析等压面图
- ② 在 $P$ 坐标系方程形式简单，不涉及密度，而 $z$ 坐标系中方程中含有密度项
- ③ 上下层可以比较地转风或风的大小及水平气压梯度力的大小， $z$ 坐标系中涉及密度大小不好比

### 物理基础

大尺度运动满足静力平衡关系是建立 $P$ 坐标系的物理基础。因此 $P$ 坐标系仅对大尺度适用。

气压随高度严格单调减少，气压和高度有一一对应关系，则 $z$ 坐标 $\rightarrow P$ 坐标可以实现映射

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \text{在大尺度运动中，该关系十分精确} \quad \rho > 0, g > 0, \frac{\partial p}{\partial z} < 0$$

### 1.4.1 位势和位势高度

#### 1.4.1.1 等压面图

##### 等压面

气压相等的点组成的面。等压面为曲面，气压相等但海拔高度不等。等压面图分析高度场：高空图

##### 等高面

空间高度相同的点组成的面。等高面为平面，面上海拔高度处处相等，但气压不等。等高面图分析气压场：地面图，显示气压场形势

#### 1.4.1.2 位势

##### 重力位势

单位质量的物体从海平面上升到高度 $z$ 克服重力所作的功

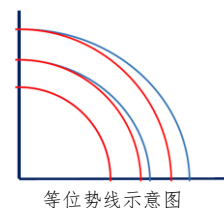
##### 公式

$$\phi \equiv \int_0^z g dz \quad (\text{m}^2/\text{s}^2) \quad d\phi = g dz \quad \text{单位：焦耳/千克}$$

##### 图解

最内圈表示地表面，蓝色圈表示等重力位势线，红色圈表示等海拔高度线

由于重力各纬度不同，所以不同纬度上上升相同高度，消耗能量不同，在等高面上移动重力做功。当物体在等位势面上移动时，位能不发生变化，不需要克服重力做功，等位势面处处与重力方向垂直，等位势面是水平面，用位势度量等压面上各处距海平面的高度，在水平运动方程中不存在重力的分量。



#### 1.4.1.3 位势高度

##### 位势米

位势的单位是焦耳/千克，不是高度单位，为了应用的方便，定义位势米 $gpm$ 为位势高度单位。

则 $\phi = gz$ ，当 $z = 1m$ 时， $\phi = 9.8J/kg$ ，为了让位势米与米在数值上一致，定义 $1gpm = 9.8J/kg$

##### 位势高度

$$H = \frac{\phi}{9.8} = \frac{1}{9.8} \int_0^z g dz$$

把单位质量的物体从海平面上升到某高度时克服重力所作的功来表示的高度，其单位是位势米。

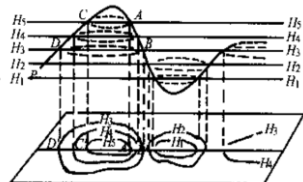
##### 等高线

等高线的数值是高度单位，但不是几何高度，而是位势高度。

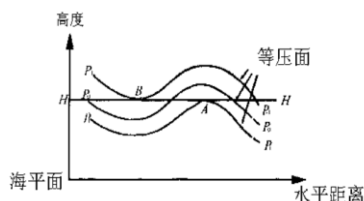
##### 注意

- ① 几何高度 $Z$ 和位势高度 $H$ 在数值上相差不大但概念上完全不同，一个是长度单位，一个是能量单位
- ② 等位势面不平行于等几何面，只在海平面上重合
- ③ 等位势面处处与重力方向垂直，无重力分量，相当于是空中水平面
- ④ 同位势高度上气压比周围低，等压面高度也较周围低，表现为下凹  
位势高度高的位置，气压也高；位势高度低的位置，气压也低。

等位势高度线



等压面和等高线的关系



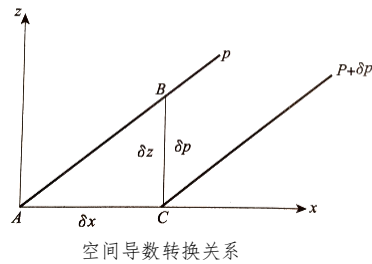
等压面的起伏与等高面上气压分布的关系

## 1.4.2 P坐标系与Z坐标系的转换

**基本依据** 准静力平衡方程建立了 $p$ 和 $z$ 之间一一对应的函数关系

**核心思路** 通过坐标系变换，建立两种坐标系中物理量导数的关系。

同一物理量在不同坐标系中的导数 $\partial F/\partial x$ 会因坐标系本身的移动而不同。



### 1.4.2.1 空间导数转换关系

**条件**  $F$ 表示任一气象要素， $F_A, F_B, F_C$ 表示 $F$ 在 $A, B, C$ 点的值

**解释** 在 $Z$ 坐标系中计算水平导数 $\partial F/\partial x$ 时，实际高度固定的点可能对应不同气压层的移动

在 $P$ 坐标系中计算 $\partial F/\partial x$ 时，等压面可能倾斜，导致同一水平位置的气压层高度不同

**核心思路** 将 $Z$ 坐标系中的变化分解为 $P$ 坐标系中的变化 + 气压场变化带来的影响

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial z} = g \frac{\partial F}{\partial p}$$

**推导**  $A, C$ 之间差值为 $(\delta F)_z = F_C - F_A$ ， $A, B$ 之间差值为 $(\delta F)_p = F_B - F_A$

$$F_B - F_A = F_B - F_C + F_C - F_A = F_B - F_C + F_C - F_A \quad \text{可见应当满足关系有: } (\delta F)_z = (\delta F)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p$$

$$\text{同除以 } \delta x: \left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)_z = \left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)_z \quad \text{取极限 } \delta x \rightarrow 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z \quad y \text{ 方向同理}$$

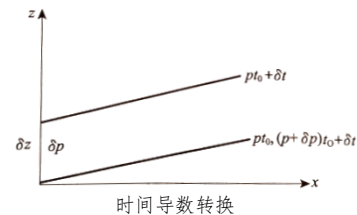
$$z \text{ 方向上, } \delta F = F_B - F_C = \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = \frac{\partial F}{\partial p} \delta p \xrightarrow{\delta z \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{或} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial z} = g \frac{\partial F}{\partial p}$$

$$\text{或者: } \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \text{ 静力方程 } \frac{\partial F}{\partial p} \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial z} = g \frac{\partial F}{\partial p} \quad \text{也可通过数学方法得到}$$

### 1.4.2.2 时间导数转换关系

**全导数** 场变量的时间导数包括全导数(个别变化)和局地导数(局地变化)

由于个别变化与坐标无关，**全导数在任何坐标中都是一致的**:  $\left(\frac{dF}{dt}\right)_z = \left(\frac{dF}{dt}\right)_p$



**局地导数**  $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_z$  表示空间某固定点 $F$ 随时间的变化率  $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_p$  表示等压面上某固定点 $F$ 随时间的变化率。

如果空间气压场发生变化，等压面在空间的位置也有相应变化，则二者不相等。

**核心思路**  $Z$ 坐标系中固定点的 $F$ 变化等于 $P$ 坐标系中固定等压面的 $F$ 变化 + 等压面自身移动带来的变化

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z \quad \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

**推导**  $p_{t_0}$ 表示 $t_0$ 时刻某等压面的空间位置。经过 $\delta t$ 后，等压面升高到 $p_{t_0 + \delta t}$ 的位置。原 $p_{t_0}$ 处变为 $(p + \delta p)_{t_0 + \delta t}$

等压面，则在空间点 $(x_0, y_0, z_0)$ 处 $F$ 变化量为:  $(\delta F)_z = (F_{t_0 + \delta t} - F_{t_0})_z$

在 $(x_0, y_0, p)$ 处 $F$ 变化量为:  $(\delta F)_p = (F_{t_0 + \delta t} - F_{t_0})_p$

$$\text{则有: } (\delta F)_z = (\delta F)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p \Rightarrow \left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_z = \left(\frac{\delta F}{\delta t}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\delta p}{\delta t}\right)_z \xrightarrow{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z$$

**高度场** 设要素即为高度 $F = Z$ ，则 $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_z = 0$ ，有  $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p - \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z \quad \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z = g \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p = \frac{\partial \phi}{\partial t}$

### 1.4.2.3 气压梯度力的表达

**水平方向** 在空间导数转换关系中，设 $F = Z$ ，并利用静力平衡关系，则  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_z = 0$ ， $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p - \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z$

$$\text{则有 } g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_p \quad y \text{ 方向同理}$$

则有: **水平气压梯度力在 $Z$ 坐标系中的表达，等价于 $P$ 坐标系中的位势梯度**

**垂直方向**  $z$ 方向上:  $\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g}$ , 则  $\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$  位势 $\phi$ 随气压的变化率仅与密度有关

**统一表达**  $\frac{1}{\rho} \nabla_h \phi = \nabla_p \phi \xrightarrow{\phi=gz} g \nabla_p z$   $-\frac{1}{\rho} \nabla_h p = -9.8 \nabla_p H$

**等高面上水平气压梯度力**是可以由**等压面上的位势高度梯度表示**, 且位势梯度是等压面的坡度, 所以可以比较各层气压梯度力的大小而不用考虑密度, 直接比较位势梯度即可

**实例** 直接比较不同高度层 500hPa 和 850hPa 的位势梯度即可判断气压梯度力强弱, 无需考虑密度差异

### 1.4.3 连续方程

**方程**  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$  其中  $\omega = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \xrightarrow{\text{尺度分析}} -\rho g w$   $\omega$ 表示 **$P$ 坐标系中垂直速度**

**推导** 在 $Z$ 坐标系中形式为:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \xrightarrow{\text{展开}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$

引入静力平衡方程  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ , 将其**对时间求偏导**:  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\rho g)}{\partial t}$

目标是消去密度 $\rho$ , 将方程转换为以 $p$ 为垂直坐标的形式, 将 $Z$ 坐标系的导数转换为 $P$ 坐标系的导数:

有  $\left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial z} \right)_z + u \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right)_z + v \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} \right)_z + w \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)_z = 0$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)_z + u \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_z + v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_z + w \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)_z = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)_z + u \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_z + v \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_z + w \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)_z + u \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_z + v \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_z + w \frac{\partial p}{\partial z} \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_z - \frac{\partial u}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_z + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_z - \frac{\partial v}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_z + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

考虑到  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \frac{\partial u}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_z$   $\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial v}{\partial p} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_z = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_z$  所以  $\frac{\partial}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p = 0$

最终有  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$

**垂直速度**  $\omega = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z}$  尺度分析可以近似为  $\omega \approx -\rho g w$

$\omega$ 表示气块在运动过程中气压的变化率,  $\omega < 0$ 时**气块上升(气压降低)**  $\omega > 0$ 时**气块下沉(气压升高)**

在天气尺度运动中, 垂直速度 $w$ 通常很小, 但 $\omega$ 的量级与水平运动相当, 便于模式计算

### 1.4.4 运动方程

**方程** 
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -g \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_p + f v \\ \frac{dv}{dt} = -g \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_p - f u \\ \frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \end{cases} \quad \text{其中 } \frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_p + u \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)_p + v \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)_p + \omega \frac{\partial}{\partial p}$$

**推导** 由于个别变化在不同坐标系中相同, 所以使用  $g \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_p = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_z$  代入  $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v$ 等式可得。

## 1.4.5 能量方程

**温度形式**  $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_p = -u\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_p - v\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p + (\Gamma_d - \Gamma)\omega + \frac{1}{c_p}\dot{Q}$

**位势形式**  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right) + S_p \omega = -\frac{R}{c_p p} \dot{Q}$  其中**稳定度参数** $S_p \equiv \frac{R}{p}(\Gamma_d - \Gamma)$

**推导** 从  $c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{Q}$  出发, 引入  $P$  坐标系中的**垂直速度**:  $c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \omega = \dot{Q}$ , 整理可得  $\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha}{c_p} \omega + \frac{1}{c_p} \dot{Q}$

展开**物质导数**  $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + \omega\frac{\partial T}{\partial p}$ , 代入得  $\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y} - \omega\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\alpha}{c_p} \omega + \frac{1}{c_p} \dot{Q}$

引入**温度垂直递减率**: 实际温度递减率  $\Gamma = \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{\gamma}{\rho g}$  ( $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$  为几何高度上的温度递减率)

干绝热递减率为  $\Gamma_d = \left(\frac{dT}{dp}\right)_{\text{干绝热}} = \frac{\alpha}{c_p}$ , 重组方程:  $\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y} + (\Gamma_d - \Gamma)\omega + \frac{1}{c_p} \dot{Q}$

其中前两项表示**温度的水平平流**, 第三项表示**垂直运动引起的温度变化** (取决于大气稳定度), 第四项为非绝热加热

**转换为位势高度形式**: 利用静力平衡方程  $\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{RT}{p}$ , 将温度  $T$  替换为位势梯度:  $T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p}$

代入原方程并整理:  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right) + S_p \omega = -\frac{R}{c_p p} \dot{Q}$

**物理解释**

- ① 稳定度参数  $S_p > 0$  则**大气稳定**,  $S_p < 0$  则大气不稳定
- ② 若气块有上升运动  $\omega < 0$ , 在稳定大气中, 上升运动导致位势高度降低; 在潮湿大气中, 可能触发凝结潜热释放  $\dot{Q} > 0$ , 抵消稳定效应。

## 1.4.6 大气运动基本方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} - f\nu &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + fu &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial p} &= -\frac{1}{\rho} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0 \\ p &= \rho RT \\ \frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla_p T - (\Gamma_d - \Gamma)\omega &= \frac{Q}{c_p} \end{aligned} \right\}$$

**解释**

利用上式基本方程组可以讨论各种天气系统的特征和演变