

第三章 气旋与反气旋

章节概述 本节讲授**涡度方程**、**位势倾向方程**、 **ω 方程**的物理意义及其在分析温带气旋与反气旋发展机制方面的定性应用；影响我国的温带气旋、反气旋的结构特征与活动规律；用位势涡度守恒原理解释天气系统在上山、下山时强度的变化；用地转适应的观点解释气旋发展。

3.1 气旋、反气旋的特征和分类

气旋 气旋是占有三度空间的，在同一高度上中心气压**低于**四周的流场中的涡旋。涡旋中的空气在**北半球逆时针旋转，在南半球顺时针旋转。在北半球具有正的涡度，南半球具有负的涡度。**

反气旋 反气旋是占有三度空间的，在同一高度上中心气压**高于**四周的流场中的涡旋。涡旋中的空气在**北半球顺时针旋转，在南半球逆时针旋转。在北半球具有负的涡度，南半球具有正的涡度。**

3.1.1 气旋和反气旋的水平尺度

尺度定义 气旋、反气旋的水平尺度以**最外围的闭合等压线的直径**长度来表示，反气旋尺度大于气旋。

气旋尺度 平均而言，气旋： $1000km - 3000km$ ，东亚气旋比欧洲和北美的水平尺度小

反气旋尺度 大者面积可达亚洲大陆的3/4

3.1.2 气旋和反气旋的强度

强度定义 使用**中心气压值**表征。气旋中心气压值越低，气旋越强；反气旋中心气压值越高，反气旋越强。气旋可以表述为加强或加深发展(等高面低于周围)，但反气旋只能说加强。

强度范围 气旋： $970 - 1010hPa$ 反气旋： $1020 - 1030hPa$
平均而言，温带的气旋和反气旋冬季强于夏季，海上的气旋强于陆上的，陆上的反气旋强于海上的。

3.1.3 气旋和反气旋的分类

气旋 **地理区域：**热带气旋和温带气旋

热力性质：锋面气旋(有温度对比)和无锋气旋(无温度对比，如台风、热低压)

反气旋 **地理区域：**极地、温带和副热带反气旋(西太平洋副热带高压)

热力性质：冷性反气旋(西伯利亚冷高压)、暖性反气旋(西太平洋副热带高压)

气旋与反气旋会相互转化。无锋气旋可以转化为锋面气旋(台风北上)、冷高压也可以受热变为热高压

温带气旋 **源地：**不是均匀分布在温带地区的。

北半球气旋源地的特点：① 1、7月北太平洋和北大西洋两个气旋最大频率中心(阿留申低压、冰岛低压)、② 源地分布基本与纬圈平行、③ 巨大山地背风一侧及其以东地区、④ 海湾以及内陆湖泊(非绝热加热影响：冬季温度高)

东亚无论冬夏， $30 \sim 35N, 45 \sim 50N$ 生成频率最多。与锋生带有关

3.2 涡度和涡度方程

引入 使用气压的变化率误差较大，但发现大尺度大气运动具有涡旋和准地转平衡的特点，可以用涡度衡量。

3.2.1 涡度

涡度 度量空气块**旋转程度和旋转方向**的物理量 **单位：** $1/s$ **量纲：** $\zeta \sim V/L$

量级 $\bar{\zeta} \sim 10^{-5}$ 大尺度 $\bar{\zeta} \sim 10^{-4}$ 中尺度 $\bar{\zeta} \sim 10^{-3}$ 小尺度 $f \sim 10^{-4}$ 中高纬度

$f = 2\Omega \sin \varphi$ 称为地转参数，也称为**地转涡度**，对于大尺度运动，地转涡度要更大。

公式
$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$
 大尺度准水平，前两项不考虑

我们关注的是 $\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ P坐标系中相对涡度的垂直分量 $\zeta_p = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p$

方向 **涡度的方向是指旋转轴的方向**，不在气流旋转平面。

物理意义 涡度的物理意义：简化问题：设 $u = 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 只考虑 $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$

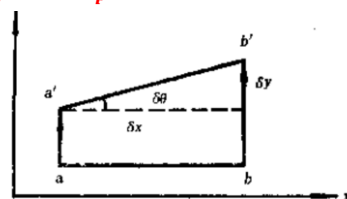
由于风速分布不均匀，原线段 ab 变化为 $a'b'$ ，平移外发生了转动。

转动角速度有： $(v_b - v_a)\delta t = \delta x \delta \theta \Rightarrow \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \theta}{\delta t} = \frac{v_b - v_a}{\delta x} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$

可得 $\partial v / \partial x$ 表示与 x 轴平行的气块边界转动角速度，同理 $-\partial u / \partial y$ 表示与 y 轴平行的气块边界角速度。

如果把气块换为刚体，则 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ ，于是 $\zeta_z = 2 \frac{d\theta}{dt}$ ，**涡度为刚体旋转角速度的两倍**。

风场在空间分布不均匀，导致质点在流场中发生旋转。



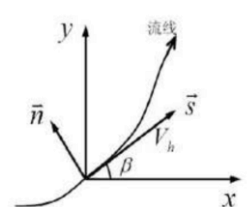
相对涡度 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 分量的物理意义

3.2.1.1 绝对涡度与相对涡度

绝对涡度 \vec{V}_a 表示绝对速度， \vec{V} 表示空气相对于地球的相对速度， \vec{V}_e 为牵连速度。

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{V}_e \Rightarrow \vec{\zeta}_a = \vec{\zeta} + \vec{\zeta}_e \quad \text{绝对涡度} = \text{相对涡度} + \text{地转涡度}$$

如果涡度没有矢量符号，则表示垂直分量



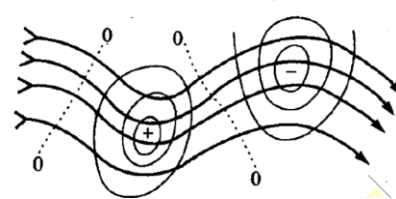
自然坐标系的转换

3.2.1.2 曲率涡度与切变涡度

自然坐标 令水平方向全风速为 V_h ，则有： $\vec{V}_h = V_h \vec{s} \Rightarrow \begin{cases} u = V_h \cdot \vec{i} = V_h \cos \beta \\ v = V_h \cdot \vec{j} = V_h \sin \beta \end{cases}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V_h}{\partial x} \sin \beta + V_h \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V_h}{\partial y} \cos \beta - V_h \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

$$\zeta = V \frac{\partial \beta}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{R_s} \text{曲率涡度} - \frac{\partial V}{\partial n} \text{切变涡度} = VK_s - \frac{\partial V}{\partial n}$$



曲率涡度 表示**由于流线(或等高线)弯曲造成的涡度**，风速愈大，曲率愈大，涡度就愈大。

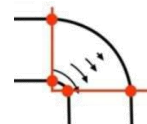
气旋性弯曲时，曲率涡度为正；反气旋性弯曲时，曲率涡度为负；等高线平直，曲率涡度为零。

切变涡度 **速度在法线方向分布不均匀，也就是等高线沿着法线方向分布不均匀。急流附近切变涡度较为明显。**

急流轴的两侧：北侧具有正的切变涡度 $-\frac{\partial V}{\partial n} > 0$ ，南侧具有负的切变涡度 $-\frac{\partial V}{\partial n} < 0$ ，导致高空辐散

注意 弯曲流场的涡度可能等于零。只要流体微团的环流保持不变。

$$\oint_L \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{a}{R^2} + \frac{a}{R^2} = 0$$



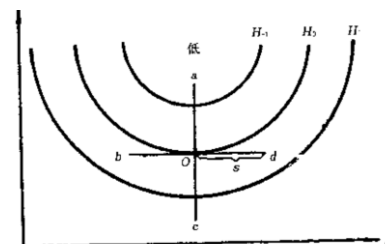
3.2.1.3 地转风涡度、热成风涡度与行星涡度

地转风涡度 以**地转风代替实际风**，得**地转风涡度**：

$$\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \text{拉普拉斯算子} = \frac{9.8}{f} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)$$

说明**等高线的不同弯曲状态，决定了地转风涡度的正负和大小**

二阶导数反应**等高线曲率**，如右图 $\zeta_g \approx \frac{v_d - v_b}{\Delta x}$



地转风涡度的计算

槽线上曲率涡度最大

热成风涡度 以**热成风**： $u_T = -\frac{g}{f} \frac{\partial(z_2 - z_1)}{\partial y} = -\frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial y}$ $v_T = \frac{g}{f} \frac{\partial(z_2 - z_1)}{\partial x} = \frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial x}$ 代入

得到： $\zeta_T = \frac{\partial v_T}{\partial x} - \frac{\partial u_T}{\partial y} = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = \frac{g}{f} \nabla^2 h$ 冷舌中有正的热成风涡度，暖舌中有负的热成风涡度

行星涡度 地转涡度 $\vec{V}_e = \vec{\Omega} \times \vec{R}$ 取自然坐标有 $\vec{\zeta}_e = \frac{V_e}{R} + \frac{\partial V_e}{\partial R} = 2\Omega$ 向量形式为 $\vec{\zeta}_e = 2\vec{\Omega}$

可见行星涡度的方向与地球自转方向一致，大小是自转角速度的两倍。

绝对涡度垂直分量: $(\vec{\zeta}_a)_z = (\vec{\zeta})_z + 2\Omega \sin \phi$ $(\vec{\zeta}_a)_p = (\vec{\zeta})_p + 2\Omega \sin \phi$

其中 $f = 2\Omega \sin \phi$ 为行星涡度的垂直分量，又称地转参数。北半球 $f > 0$ ，南半球 $f < 0$

3.2.2 涡度方程 (p坐标)

3.2.2.1 涡度方程的推导与公式

引入 我们想通过旋转程度来分析气旋或反气旋的增强情况，需要推导涡度与时间的关系。

推导 对运动方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} = -g \frac{\partial z}{\partial x} + fv$ ① $\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} = -g \frac{\partial z}{\partial y} - fu$ ②

对②求x偏导数，对①求y偏导数，并利用 $\zeta_p = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\textcircled{1}: \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -g \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\textcircled{2}: \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -g \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - u \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}: \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} = -u \frac{\partial f}{\partial x} - v \frac{\partial f}{\partial y} - f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - (f + \xi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

涡度方程 $\frac{d(f+\zeta)}{dt} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right) - (f + \xi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ 绝对涡度个别变化=涡度倾侧-绝对涡度水平散度项

局地变化 $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right) - (f + \xi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

涡度局地变化= -相对涡度平流-地转涡度平流-涡度垂直输送+涡度倾侧项-绝对涡度水平散度项

或记忆为: $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla \zeta - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \beta v + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right) - (f + \xi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

$\frac{\partial \zeta}{\partial t} > 0$ 表示气旋性涡度增加，反气旋性涡度减小 $\frac{\partial \zeta}{\partial t} < 0$ 表示反气旋性涡度增加，气旋性涡度减小

3.2.2.2 涡度方程的物理意义

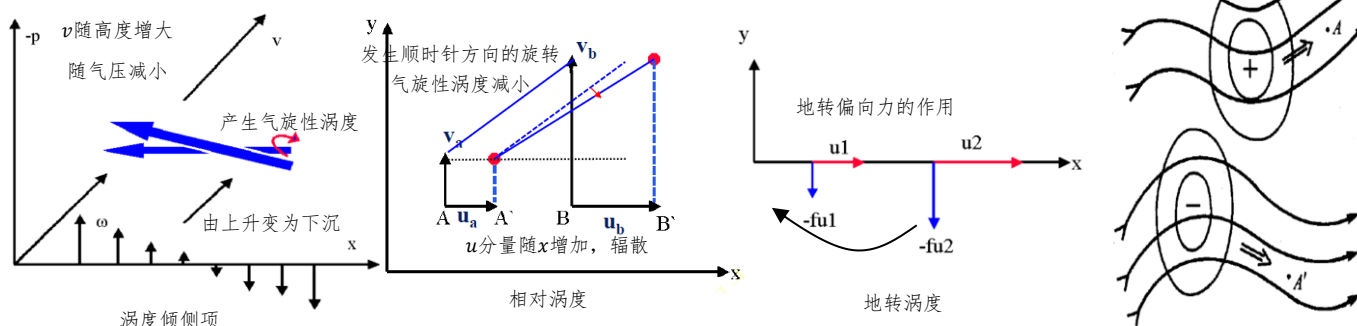
涡度倾侧项 $\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right)$ 由于垂直速度在水平方向分布不均匀，使涡度水平分量转化为铅直分量

相对涡度 相对涡度与水平散度 $-\xi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ $\zeta > 0$ 时(具有气旋性涡度时)，水平辐散使气旋性涡度减小

$\zeta < 0$ 时(具有反气旋性涡度时)，水平辐散使反气旋性涡度减弱 辐散使得旋转系统减弱

地转涡度 地转涡度与水平散度 $-f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ 辐散使反气旋性涡度增加，气旋性涡度减小；辐合使气旋性涡度

增加，反气旋性涡度减小 水平辐散时， $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} > 0$ 有 $-f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) < 0$



槽脊情况

槽线上相对涡度最大，槽前有正的相对涡度平流，槽后有负的相对涡度平流

- ① 槽前脊后，沿着气流方向相对涡度减小，有正涡度平流，局地涡度增加 $\Delta\zeta > 0$ 附加气旋性环流
- ② 槽后脊前，沿着气流方向相对涡度增加，有负涡度平流，局地涡度减小 $\Delta\zeta < 0$ 附加反气旋环流
- ③ 槽前脊后同时有高空辐散，低层辐合上升，冷却，导致 $-\Delta H$ ；槽后脊前同时有高空辐合， $+\Delta H$
- ④ 槽脊线为涡度平流零线，正圆形的高低压系统涡度平流为零

短波槽($L \leq 3000\text{km}$)以相对涡度平流为主，长波槽以地转涡度平流为主，稳定西退

相对平流

$$-\left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \quad \text{空气作水平运动时产生的涡度局地变化}$$

相对涡度分布不均匀和大气水平运动所引起的局地涡度变化

地转平流

$$-\left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\beta v_y \text{ 方向速度, 空气块南北运动} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \beta$$

北半球, $f > 0, \beta > 0$ 当吹南风时($v > 0$), 气块 f 增大, 为保持绝对涡度守恒, 气块 ζ 必须减小, 使得局地相对涡度减小。

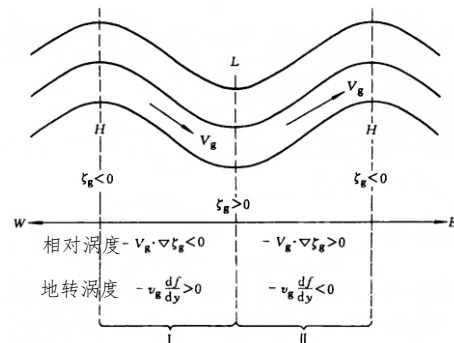
垂直输送

$$-\omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} \quad \text{涡度垂直输送, 取决于相对涡度随高度的变化}$$

$\frac{\partial \zeta}{\partial p} > 0$ 相对涡度随高度减小, $\omega < 0$ 上升运动局地涡度增加, $\omega > 0$ 下沉运动局地涡度减小

$\frac{\partial \zeta}{\partial p} < 0$ 相对涡度随高度增加, $\omega < 0$ 局地涡度减小, $\omega > 0$ 局地涡度增加

高空槽前下方有气旋, 槽前正涡度平流随高度增强, 低层辐合上升加强, 触发气旋发展。



3.2.3 涡度方程的简化

尺度分析

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) - v \frac{\partial f}{\partial y} - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p}\right) - (f + \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$\frac{V^2}{L^2} \quad \frac{V^2}{L^2} \quad V \cdot 10^{-13} \quad \frac{WV}{LH} \quad \frac{WV}{LH} \quad f_0 \cdot 10^{-6}$
 $10^{-10} \quad 10^{-10} \quad 10^{-10} \quad 10^{-11} \quad 10^{-11} \quad 10^{-10}$

零级简化

$$\frac{d(f+\zeta)}{dt} = -(f+\zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

物理解释

运动方程中速度的时间导数项比气压梯度力小一个数量级；气压局地变化项为小项
相对涡度的局地变化主要由涡度的平流变化，空气微团的南北运动以及水平辐合辐散造成。

又因为 $f \gg \zeta$ 有 $\frac{d(f+\zeta)}{dt} = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ 当大气准水平无辐散时, 有 $\frac{d(f+\zeta)}{dt} = 0$

即水平无辐散大气中绝对涡度守恒, 由此导致了罗斯贝波的生成。

3.2.4 位涡(位势涡度)及位涡守恒

垂直位涡度

$$\frac{f+\zeta}{H} \text{ 或 } \frac{f+\zeta}{\Delta p} \quad \text{绝对涡度与气柱厚度的比值}$$

称为正压大气的垂直位涡度。

位涡守恒

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f+\zeta}{H} \right) = 0 \quad \text{位涡是一个常数}$$

位涡

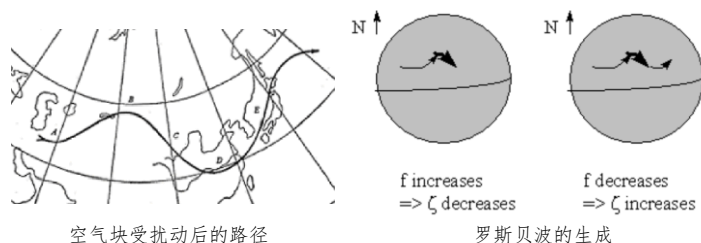
位涡是一个综合描述大气运动状态和热力状态的物理量。
位涡守恒定律揭示了大气热力结构对涡度变化的约束效应。

位涡度方程

由涡度方程、连续方程、热力学能量方程以及状态方程, 通过变换, 可以得到 Ertel 位涡度方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{\zeta}_a \cdot \nabla s}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla s_{\text{熵}} \cdot \nabla \times \vec{F}_{\text{摩擦}} + \frac{1}{\rho} \bar{\zeta}_a \cdot \nabla \left(\frac{Q_{\text{非绝热加热}}}{T} \right) \quad \text{其中 } \frac{\bar{\zeta}_a \cdot \nabla s}{\rho} \text{ 称为位涡度}$$

在绝热无摩擦条件下, 则位涡度方程变为 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{\zeta}_a \cdot \nabla s}{\rho} \right) = 0$ 称为位涡守恒定律。



形式推导

因大气的水平运动远大于垂直运动，且物理量的垂直变化远大于水平变化，近似有

$$\frac{\zeta_a \cdot \nabla s}{\rho} \stackrel{\text{简化为垂直方向}}{=} \frac{(f+\zeta)}{\rho} \cdot \frac{\partial s}{\partial z} \stackrel{\text{熵的表达式}}{=} \frac{c_p}{\rho} (f+\zeta) \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \quad s = c_p \ln \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{f+\zeta}{\rho} \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \frac{d}{dt} (f+\zeta) - \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) + \frac{f+\xi}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{T} \right) \quad \frac{d}{dt} \left[(f+\zeta) \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right] = \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) + \frac{f+\xi}{c_p} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{Q}{T} \right)$$

若绝热无摩擦 $\frac{d}{dt} \left[(f+\zeta) \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right] = 0$ 进一步的，在干绝热过程中，空气微团始终在等位温面或等熵

面上运动，在两个等熵面之间的空气柱尽管在运动过程中有所伸缩，但始终被禁锢在两个等熵面(位温面)间。介于两个等位温面间的气柱，设其气压差为 Δp ，因绝热过程中空气微团的位温保持守恒，则：

$$(f+\zeta) \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = (f+\zeta) \frac{\ln \theta_2 - \ln \theta_1}{\Delta p} = \frac{(f+\zeta)}{\Delta p} \ln \frac{\theta_2}{\theta_1} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{f+\zeta}{\Delta p} \right) = 0$$

若假定气层厚度为 H ，且空气不可压，则有 $AH = \text{const}$ ， A 为气柱底面积， H 为厚度

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{H} \frac{dH}{dt} \quad \frac{d(f+\xi)}{dt} = -(f+\xi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \frac{d(f+\zeta)}{dt} = (f+\zeta) \frac{1}{H} \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f+\xi}{H} \right) = 0 \quad H \text{ 增大, 为辐合} \quad H \text{ 减小, 为辐散}$$

应用

① 气柱上山， H 减小，辐散， f 不变，则气旋性涡度减小，反气旋性涡度增大。上山一侧有利于反气旋生成发展，背风坡一侧有利于气旋的生成。

② 正压绝热过程下的位涡守恒： $\frac{d}{dt} \left(\frac{f+\xi}{\Delta p} \right) = 0$

具体解释

均匀广阔的西风气流，遇到南北向无限宽的山脉地形

① 上山前，均匀西风气流，因此相对涡度为 0

② 上山，厚度 H 减小，因此相对涡度 ζ 减小， f 不变；此时 $\zeta < 0$ ，反气旋性涡度，空气块向南运动（反气旋运动轨迹）， f 减小

③ 越过山顶后，因为 β 效应，即绝对涡度守恒， f 减小，则相对涡度增加。同时下山中， H 增加，位涡守恒要求相对涡度增加。

④ 因此气块运动将按照气旋式环流轨迹，使得在山后形成第一个槽：背风槽。

此后按照绝对涡度守恒，向下游形成一系列的槽。

真实情况下，有地形的摩擦作用、绕流作用。

