第二章 质点组力学

2.1 基本概念

2.1.1 力学体系

质点系 彼此相互影响的**若干质点的一个集合**，称为力学体系，简称质点系。
分为**可变质点系**(液体)、**不变质点系**(刚体，内部质点相互位置不变)

2.1.2 内力和外力

外力$\vec{F}^{(e)}$ 作用于系中某一质点的力，**不来自质点系**中任何其他质点者

内力 $\vec{F}^{(i)}$ 同一质点系中**各质点之间的相互作用**。

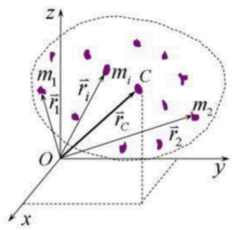
注意 ① 质点系中所有内力的**矢量和恒为零**(牛三定律)。$\vec{F}^{(a)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\vec{F}_{ij}^{(i)}=0$

② 质点系中所有内力对任一定点(或定轴)的**力矩的矢量和恒为零** $\overrightarrow{\boldsymbol{M}}^{(i)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n}\vec{\boldsymbol{r}}_i\times\vec{\boldsymbol{F}}_{ij}^{(i)}=0$

③ 由于内力是作用在不同质点上，所以**不能根据上述性质将内力误解为平衡力系**（只有刚体才是这样)，换言之，内力可使质点间发生相对位移，从而改变质点系中个别质点的运动状态。

2.1.2 质心

定义 质点系的质量中心 $\vec{\boldsymbol{r}}_c=\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$ 每个质点的质量加权平均位矢



分量情况 $x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$ $y_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$ $z_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$

连续分布 $x_C=\frac{\iiint x\mathrm{d}m}{\iiint \mathrm{d}m}$ $y_C=\frac{\iiint y\mathrm{d}m}{\iiint \mathrm{d}m}$ $z_C=\frac{\iiint z\mathrm{d}m}{\iiint \mathrm{d}m}$

注意 ① 对密度ρ为常数的物体来讲，**质心和几何中心**重合。
② 如重力加速度$\vec{g}$为恒矢量，则**质心与重心**重合。

2.2 动量定理与动量守恒律

2.2.1 质点系的动量定理

质点系动量 $\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i$ 每个质点动量之和

动量定理 $\frac{\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathbf{dt}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(e)}$ $\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(e)}\right)\mathbf{d}\boldsymbol{t}$

质点系的**动量对时间的微商**，等于作用在质点系上**诸外力之矢量和**，或质点系动量的微分等于作用在质点系上**诸外力**的元冲量的矢量和。

注意 ① 首先要划清质点系所受的内力、外力，因为**只有外力**才能直接改变质点系的动量．
② **动量是矢量**。质点系的总动量，等于各质点动量的矢量和。质点系在t_1—t_2的这段时间内动量的改变，应等于在这段时间的终、初时刻**质点系动量的矢量差，而不是代数差**。
③ 使用动量定理时，初(或终)时刻的速度，是指各质点在同一时刻相**对于同一参照系**的速度．这一点尤其在处理相对运动的问题时需特别注意。这里所指的**参照系是惯性参照系**。

2.2.2 质心运动定理

定义 $\boldsymbol{m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}}$

推导 由质心的定义 $\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i=m\vec{r}_C$ 对时间求导 $\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i=m\vec{v}_C$ 其中$\vec{v}_C$ 为质心速度

结合动量定理 $m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}$

质点系质心的运动，就好像一个质点的运动一样，此质点的质量等于整个质点系的质量，作用在此质点上的力，等于作用在质点系上所有诸外力的矢量和，这就是**质心运动定理**。

注意 ① 质点系的**内力不能直接改变质心的动量**．当质点系所受外力的矢量和为零时，质心速度等于常矢量．即质心静止或作匀速直线运动．

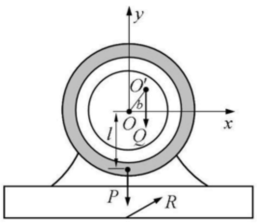
② 由质心运动定理求积分所给出的质心运动，是质点系**总体随质心的平动**，而每个质点相对质心的运动，则不能由公式求出．

③ 当质点系所受外力的**矢量和不为零时，质心速度将发生变化**。其加速度与质点系总质量m相乘等于质点系所受外力的矢量和。与牛二定律比较，**若把质心看做质量等于m的质点**，则处理质心运动问题与处理质点力学问题完全一样。即质心相当于质量等于质点系总质量m的质点，外力的矢量和相当于作用在这个质点(质心)上的合外力。在这样的情况下，质心的加速度与这质点的加速度相同。

④ **质心运动定理**与**质点系动量定理**是**等效**的。

⑤ **“力的矢量和”与“合力”，是两个不同的概念**。一般的质点系，只能求力的矢量和，而不能求合力。因为，求合力的一般方法是**把力移到某一点之后**，运用平面四边形法则求解。但作用在一般质点系上的力，如作用点发生移动，不仅影响质点相对质心的**转动状态**的变化，还影响各质点间的**相对位置**。

例题 1. 电动机由固定部分和转子部分组成，固定部分重为P，转子重为Q，转子转动轴通过定子中心O，转子重心在O'，且有$OO'=b$。**求转子以角速度ω转动时，地面对电动机的约束反力**。



以电动机为研究对象，在P点建立坐标系。由质心运动定理 $\frac{P+Q}{g}\ddot{\vec{r}}_C=\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}$

分量形式：$\begin{cases}\frac{P+Q}{g}\ddot{x}_C=R_x\\ \frac{P+Q}{g}\ddot{y}_C=R_y-P-Q\end{cases}$ 质心坐标：$\begin{aligned}x_C&=\frac{1}{m}\left(\frac{P}{g}x_P+\frac{Q}{g}x_Q\right)=\frac{Q}{P+Q}b\cos\omega t\\ y_C&=\frac{1}{m}\left(\frac{P}{g}y_P+\frac{Q}{g}y_Q\right)=\frac{-Pl}{P+Q}+\frac{Q}{P+Q}b\sin\omega t\end{aligned}$

求导加速度：$\begin{cases}\ddot{x}_C=-\frac{Qb\omega^2}{P+Q}\cos\omega t\\ \ddot{y}_C=-\frac{Qb\omega^2}{P+Q}\sin\omega t\end{cases}$ 得到约束力：$\begin{cases}R_x=-\frac{Qb\omega^2}{g}\cos\omega t\\ R_y=P+Q-\frac{Qb\omega^2}{g}\sin\omega t\end{cases}$

2.2.3 动量守恒定律

定律 **如果$\sum_{i=1}^{n}F_i^{(e)}=0$，则 $\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i=m\vec{v}_C=$恒矢量**

质点系不受外力作用或所受外力的矢量和为零运动时，质点系的动量亦即质心的动量都是一个恒矢量。

分量情况 如果作用在质点系上的诸外力在某一轴（设为x轴）上的投影之和为零 $\sum_{i=1}^{n}F_{ix}^{(e)}=0$

则 $p_x=\sum_{i=1}^{n}m_iv_{ix}=mv_{Cx}=$常数 在这一情形下，虽然质点系的动量并不是一个恒矢量，但它在**这一坐标轴上的投影却保持为常数**。或者说，质点系质心的速度，在这一坐标轴上的投影为一常数.

注意 ① 内力虽然可使质点系中**个别质点的动量发生变化**，但却**不能改变整个质点系的动量**，也不能改变质点系**质心的速度**。例如，沿水平方向发射炮弹的大炮（设炮身轴线平行x轴），在发射前沿x方向的总动量，当炮弹发射后，炮身向后反冲，若不计水平方向上可能有的外力（如地面摩擦力），那么将炮弹与炮身作为质点系看待，因为沿x方向无外力作用，则沿x方向总的动量仍然等于零，炮弹在这个方向上的运动是由这个质点系的内力的作用引起的。

② 所谓质点系的动量守恒，是指质点系中各质点动量的**矢量和等于常矢量**，即其大小不变，其方向也不变．而不是各质点动量的**代数和不变**。(伴随动能变化)

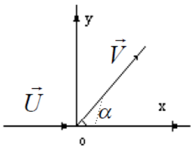
③ 外力的冲量和为零，不是动量守恒的充要条件。 周期性作用的力，过程中动量不一定守恒。

④ 在惯性系中使用动量守恒定律时，质点系内各质点的速度是**同一时刻，对同一个惯性系**而言的。

⑤ 动量守恒定律不仅适用于宏观物体的低速运动，**也适用于宏观物体的高速运动**、微观粒子的运动以及电磁运动等等。

例题

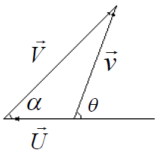
1. 一门大炮 炮弹质量为m，炮身及炮车质量和等于M，炮车可以自由地在铁轨上反冲。如炮身与地面成一角度α，炮弹对炮身的相对速度为$\vec{V}$，试求炮弹离炮身时对地面的速度$\vec{v}$及炮车反冲的速度$\vec{U}$。



因为火药爆炸力是内力，沿水平方向（设为x方向）无外力作用，故沿x方向动量守恒

$\boldsymbol{mv_x + MU = 0}$（要用绝对速度）　由相对运动关系可得 $\vec{v} = \vec{U} + \vec{V}$　分量：$\begin{matrix} V\cos\alpha + U = v_x \\ V\sin\alpha = v_y \end{matrix}$

联立可得：$v_x = \frac{M}{M+m}V\cos\alpha$　$v_y = V\sin\alpha$　$U = -\frac{m}{M+m}V\cos\alpha$



炮弹离炮身时对地面的速度的大小是$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = V\sqrt{1 + \left[\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 - 1\right]\cos^2\alpha}$

如$\vec{\boldsymbol{v}}$ 与水平线间夹角为 θ，则 $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha$　所以$\theta > \alpha$