第二章 质点组力学

2.1 基本概念

2.1.1 力学体系

质点系　彼此相互影响的**若干质点的一个集合**，称为力学体系，简称质点系。
分为**可变质点系**(液体)、**不变质点系**(刚体，内部质点相互位置不变)

2.1.2 内力和外力

外力$\vec{\boldsymbol F}^{(e)}$　作用于系中某一质点的力，**不来自质点系**中任何其他质点者

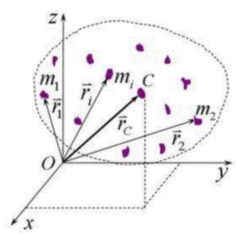
内力 $\vec{\boldsymbol F}^{(i)}$　同一质点系中**各质点之间的相互作用**。

注意　① 质点系中所有内力的**矢量和恒为零**(牛三定律)。$\vec F^{(a)} = \sum_{i=1}^n \sum_{i=j}^n \vec F_{ij}^{(i)} = 0$

② 质点系中所有内力对任一定点(或定轴)的**力矩的矢量和恒为零** $\vec{\boldsymbol M}^{(i)} = \sum_{i=1}^n \sum_{i\neq j}^n \vec{\boldsymbol r}_i \times \vec{\boldsymbol F}_{ij}^{(i)} = 0$

③ 由于内力是作用在不同质点上，所以**不能根据上述性质将内力误解为平衡力系**（只有刚体才是这样)，换言之，内力可使质点间发生相对位移，从而改变质点系中个别质点的运动状态。

2.1.2 质心



定义　质点系的质量中心 $\vec{\boldsymbol r}_c = \overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{\boldsymbol r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$　每个质点的质量加权平均位矢

分量情况　$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$　$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$　$z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$

连续分布　$x_C = \frac{\iiint x\mathrm{d}m}{\iiint \mathrm{d}m} y_C = \frac{\iiint y\mathrm{d}m}{\iiint \mathrm{d}m} z_C = \frac{\iiint z\mathrm{d}m}{\iiint \mathrm{d}m}$

注意　① 对密度ρ为常数的物体来讲，**质心和几何中心**重合。
② 如重力加速度$\vec g$为恒矢量，则**质心与重心**重合。

2.2 动量定理与动量守恒律

2.2.1 质点系的动量定理

质点系动量　$\vec p = \sum_{i=1}^n m_i \vec v_i$ 每个质点动量之和

动量定理　$\frac{\mathbf{d}\vec{\boldsymbol p}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathrm d}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^n m_i \vec v_i = \sum_{i=1}^n \vec{\boldsymbol F}_i^{(e)}$　　$\mathbf{d}\vec{\boldsymbol p} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{\boldsymbol F}_i^{(e)}\right)\mathbf{dt}$

质点系的**动量对时间的微商**，等于作用在质点系上**诸外力之矢量和**，或质点系动量的微分等于作用在质点系上**诸外力**的元冲量的矢量和。

注意　① 首先要划清质点系所受的内力、外力，因为**只有外力**才能直接改变质点系的动量。
② **动量是矢量**。质点系的总动量，等于各质点动量的矢量和。质点系在t_1—t_2的这段时间内动量的改变，应等于在这段时间的终、初时刻**质点系动量的矢量差，而不是代数差**。
③ 使用动量定理时，初(或终)时刻的速度，是指各质点在同一时刻相**对于同一参照系**的速度。这一点尤其在处理相对运动的问题时需特别注意。这里所指的**参照系是惯性参照系**。

2.2.2 质心运动定理

定义 $\boldsymbol{m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}}$

推导 由质心的定义 $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i=m\vec{r}_C$ 对时间求导 $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i=m\vec{v}_C$ 其中$\vec{v}_C$ 为质心速度

结合动量定理 $m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}$

质点系质心的运动，就好像一个质点的运动一样，此质点的质量等于整个质点系的质量，**作用在此质点上的力，等于作用在质点系上所有诸外力的矢量和**，这就是质心运动定理。

注意 ① 质点系的**内力不能直接改变质心的动量**。当质点系所受外力的矢量和为零时，质心速度等于常矢量。即质心静止或作匀速直线运动。

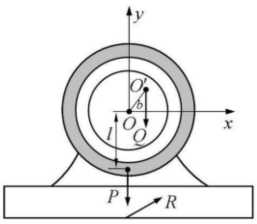
② 由质心运动定理求积分所给出的质心运动，是质点系**总体随质心的平动**，而每个质点相对质心的运动，则不能由公式求出。

③ 当质点系所受外力的**矢量和不为零时，质心速度将发生变化**。其加速度与质点系总质量m相乘等于质点系所受外力的矢量和。与牛二定律比较，**若把质心看做质量等于m的质点**，则处理质心运动问题与处理质点力学问题完全一样。即质心相当于质量等于质点系总质量m的质点，外力的矢量和相当于作用在这个质点(质心)上的合外力。在这样的情况下，质心的加速度与这质点的加速度相同。

④ **质心运动定理**与**质点系动量定理**是**等效**的。

⑤ **"力的矢量和"与"合力"，是两个不同的概念**。一般的质点系，只能求力的矢量和，而不能求合力。因为，求合力的一般方法是**把力移到某一点之后**，运用平面四边形法则求解。但作用在一般质点系上的力，如作用点发生移动，不仅影响质点相对质心的**转动状态**的变化，还影响各质点间的**相对位置**。

例题 1. 电动机由固定部分和转子部分组成，固定部分重为P，转子重为Q，转子转动轴通过定子中心O，转子重心在O'，且有$OO'=b$。**求转子以角速度ω转动时，地面对电动机的约束反力**。



以电动机为研究对象，在P点建立坐标系。由质心运动定理 $\frac{P+Q}{g}\ddot{\vec{r}}_C=\vec{P}+\vec{\mathrm{Q}}+\vec{\mathrm{R}}$

分量形式：$\begin{cases}\frac{P+Q}{g}\ddot{x}_C=R_x\\ \frac{P+Q}{g}\ddot{y}_C=R_y-P-Q\end{cases}$ 质心坐标：$\begin{aligned}x_C&=\frac{1}{m}\left(\frac{P}{g}x_P+\frac{Q}{g}x_Q\right)=\frac{Q}{P+Q}b\cos\omega t\\ y_C&=\frac{1}{m}\left(\frac{P}{g}y_P+\frac{Q}{g}y_Q\right)=\frac{-Pl}{P+Q}+\frac{Q}{P+Q}b\sin\omega t\end{aligned}$

求导加速度：$\begin{cases}\ddot{x}_C=-\frac{Qb\omega^2}{P+Q}\cos\omega t\\ \ddot{y}_C=-\frac{Qb\omega^2}{P+Q}\sin\omega t\end{cases}$ 得到约束力：$\begin{cases}R_x=-\frac{Qb\omega^2}{g}\cos\omega t\\ R_y=P+Q-\frac{Qb\omega^2}{g}\sin\omega t\end{cases}$

2.2.3 动量守恒定律

定律 **如果$\sum_{i=1}^{n}F_i^{(e)}=0$，则 $\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i=m\vec{v}_C=$恒矢量**

质点系不受外力作用或所受外力的矢量和为零运动时，**质点系的动量亦即质心的动量都是一个恒矢量**

分量情况 如果作用在质点系上的诸外力在某一轴（设为x轴）上的投影之和为零 $\sum_{i=1}^{n}F_{ix}^{(e)}=0$

则 $p_x=\sum_{i=1}^{n}m_iv_{ix}=mv_{Cx}=$常数 在这一情形下，虽然质点系的动量并不是一个恒矢量，但它在**这一坐标轴上的投影却保持为常数**。或者说，质点系质心的速度，在这一坐标轴上的投影为一常数.

注意 ① 内力虽然可使质点系中**个别质点的动量发生变化**，但却**不能改变整个质点系的动量**，也不能改变质点系**质心的速度**。例如，沿水平方向发射炮弹的大炮（设炮身轴线平行x轴），在发射前沿x方向的总动量，当炮弹发射后，炮身向后反冲，若不计水平方向上可能有的外力（如地面摩擦力），那么将炮弹与炮身作为质点系看待，因为沿x方向无外力作用，则沿x方向总的动量仍然等于零，炮弹在这个方向上的运动是由这个质点系的内力的作用引起的。

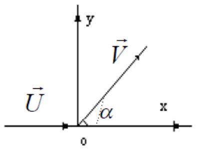
② 所谓质点系的动量守恒，是指质点系中各质点动量的**矢量和等于常矢量**，即其大小不变，其方向也不变。而不是各质点动量的**代数和不变**。(伴随动能变化)

③ 外力的冲量和为零，不是动量守恒的充要条件。 周期性作用的力，过程中动量不一定守恒。

④ 在惯性系中使用动量守恒定律时，质点系内各质点的速度是**同一时刻，对同一个惯性系**而言的。

⑤ 动量守恒定律不仅适用于宏观物体的低速运动，**也适用于宏观物体的高速运动**、微观粒子的运动以及电磁运动等等。

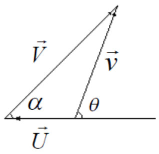
例题 1. 一门大炮炮弹质量为m，炮身及炮车质量和等于M，炮车可以自由地在铁轨上反冲。如炮身与地面成一角度α，炮弹对炮身的相对速度为$\vec{V}$，试求炮弹离炮身时对地面的速度$\vec{v}$及炮车反冲的速度$\vec{U}$。



因为火药爆炸力是内力，沿水平方向（设为x方向）无外力作用，故沿x方向动量守恒

$\boldsymbol{mv_x + MU = 0}$（要用绝对速度）　　由相对运动关系可得 $\vec{v} = \vec{U} + \vec{V}$　　分量：$\begin{matrix} V\cos\alpha + U = v_x \\ V\sin\alpha = v_y \end{matrix}$

联立可得：$v_x = \frac{M}{M+m} V\cos\alpha$　　$v_y = V\sin\alpha$　　$U = -\frac{m}{M+m} V\cos\alpha$



炮弹离炮身时对地面的速度的大小是$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = V\sqrt{1 + \left[\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 - 1\right]\cos^2\alpha}$

如$\vec{v}$与水平线间夹角为θ，则 $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha$　　所以$\theta > \alpha$

2.3 角动量定理与角动量守恒定律

2.3.1 质点系的角动量定理

定理 $\boldsymbol{\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}}$ **质点系对任一固定点的角动量对时间的微商，等于诸外力对同一点的力矩的矢量和**。

推导 由n个质点所形成的质点系，**每一质点**的动力学方程为$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$，方程两侧**左矢乘** $\vec{r}_i$，

并对i**求和**，得 $\sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(i)}\right)$　　$\sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_t \times \vec{F}_t^{(i)}\right) = 0$

有数学形式：$\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ 该项为零

$\vec{r}_i \times \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)$ 所以有 $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}\right)$ 故得证

微分形式 $\boldsymbol{d\vec{J} = \vec{M}dt}$　质点系**角动量的微分**等于作用在质点系上的**诸外力的元冲量矩的矢量和**。

直角坐标 $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^n m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) = \sum_{i=1}^n \left(y_i F_{iz}^{(e)} - z_i F_{iy}^{(e)}\right)$　　yzx　　注意每个方向上不知含有该方向的分量

$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^n m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i) = \sum_{i=1}^n \left(z_i F_{ix}^{(e)} - x_i F_{iz}^{(e)}\right)$　　zyx

$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^n m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) = \sum_{i=1}^n \left(x_i F_{iy}^{(e)} - y_i F_{ix}^{(e)}\right)$　　zxy

注意 ① 公式中所包括的角动量$\vec{J}$、外力矩的矢量和$\vec{M}$及冲量矩的矢量和，都是对空间同一点而言的，而且在所研究的时间间隔内，角动量$\vec{J}$与力矩$\vec{M}$**始终是相对于该点的**。

② 在对加速动点的角动量定理中，要出现惯性力矩，想使惯性力矩不出现，所选取的动点必须满足一定的要求，关于这一点，后面将加以讨论。

2.3.2 质点系角动量矩守恒定律

定律 $\vec{\boldsymbol{M}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{r}}_i \times \vec{\boldsymbol{F}}_i^{(e)} = 0$ $\vec{J} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \text{恒矢量}$

质点系不受外力作用时，或虽受外力作用，但这些力对某固定点的力矩的矢量和为零，则对此固定点而言，**质点系的角动量为一恒矢量**。

如果作用在质点系上诸外力对某固定点O的力矩的矢量和虽然不等于零，但对通过原点O的**某一坐标轴**（设为x轴）**的力矩的代数和为零** $M_x = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i F_{iz}^{(e)} - z_i F_{iy}^{(e)}\right) = 0$ $J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) =$ 常数 在这一情形下，质点系的角动量在这轴上的投影为一常数。

注意 ① 在质点系角动量守恒的条件下，**个别质点的角动量是可能因内力矩的作用而改变的**。例如：静止在转盘上的人，若将一手举过头顶并沿某一（如顺时针）方向描画水平圆圈，则转盘将向相反方向转动。这是因为：外力（即重力）对铅直轴的力矩为零，故整个人体对该轴的角动量应保持为零，当手旋转时，这一部分质点对铅直轴沿顺时针方向产生角动量，因而，质点系的其余部分必须向相反方向缓缓转动，方能保持各部分绕铅直轴的角动量的代数和为零。

② 角动量守恒是质点系中各个质点对某点角动量的矢量和为常矢量，而质点系内每个质点的角动量时刻在变化着。

③ 质点系对空间某点角动量守恒时，它对空间的另一点，角动量并不一定守恒。原因就是力矩的大小及方向与参考点的选取有关，当力对空间某点力矩为零时，对另外一点并不一定为零。

④ 角动量守恒定律也是物理学的一条**普遍定律**，它不止限于力学范围。和动量守恒一样，对于那些不遵从牛顿第三定律的非机械运动，**只要系统是孤立的，其角动量也是守恒的**。

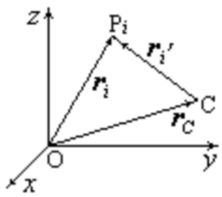
与动量关系 ① **当质点系根本不受外力时**，既满足外力的矢量和为零，又同时满足外力矩矢量和为零的条件。所以**动量守恒，角动量也守恒**。

② 当有外力作用时，若外力的矢量和为零，则动量虽然守恒，但角动量并不一定守恒。例如磁场转子两端受力相反。因为外力矩矢量和的大小及方向**与矩心位置的选取有关**，所以外力的矢量和为零，保证不了对矩心的外力矩矢量和也为零，也就是不一定满足角动量守恒。

③ 当角动量守恒时，其动量也不一定守恒。原因是质点系对某点的角动量守恒时，只是外力对该点的力矩矢量和为零，**它保证不了外力的矢量和也为零**。

2.3.3 对质心的角动量定理

定理 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{J}}'}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{M}}'$



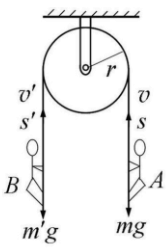
推导 对随**质心C加速平动**的参照系来讲，$\mathbf{P}_i$的动力学方程为 $m_i \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i'}{\mathrm{d}t^2} = \vec{\boldsymbol{F}}_i^{(e)} + \vec{\boldsymbol{F}}_i^{(i)} + \left(-m_i \ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}_C\right)$

用$\vec{r}_i'$左矢乘上式，并对i求和，则**内力矩仍互相抵消**，故得：

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{r}}_i'\right)\right]_{\text{角动量}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(e)}\right) + \ddot{\vec{r}}_{C\,\text{常数}} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i'{}_{\text{力矩}}$ 因C为质心，故$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' = 0$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{\boldsymbol{r}}_i' \times m_i \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}_i'\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{\boldsymbol{r}}_i' \times \vec{\boldsymbol{F}}_i^{(e)}\right) \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\vec{J}'}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{M}}'$ 因此，虽然质心是动点，但对质心可以和对固定点一样写出角动量定理。如外力对质心的力矩的矢量和为零，则对质心的角动量也必然守恒。**但对于其他动点一般则不能。**(且对于转动也不一定)

例题 1. 在具有水平轴的滑轮上悬有一根绳子，绳子的两端距通过该轴水平面的距离为s 和s'。两个质量分别为m与m'的人抓着绳子的两端，他们**同时开始以匀加速度向上爬并同时到达滑轮轴所在的水平面**。假设滑轮的质量可忽略，且所有的阻力也都忽略不计，问需多久时间，两人可以同时到达？



取滑轮轴线为中心位置，令滑轮的半径为r ，A爬绳的速度为$\vec{v}$，B的速度为$\vec{v}'$，

则他们对通过滑轮中心的水平轴的**角动量**为 $J_z = mvr - m'v'r$

外力$m\vec{g}$ 和 $m'\vec{g}$ 对**同轴的力矩**则为 $M_z = m'gr - mgr$ 由角动量定理，得：

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(mv - m'v')r] = (m' - m)gr$ $ma - m'a' = (m' - m)g$

因为$a=\frac{2s}{t^2}$ $a'=\frac{2s'}{t^2}$ 所以$t=\sqrt{\frac{2(ms-m's')}{(m'-m)g}}$

2.4 动能定理与机械能守恒定律

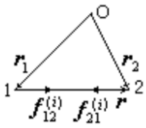
2.4.1 质点系的动能定理

定理 $\mathrm{d}T=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(i)}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}_i$

质点系**动能的微分**，等于作用在该质点系上**诸内力及诸外力所作元功之和**

注意 在动能定理中，内力所作的功通常并不能互相抵消。即使质点系不受外力作用，或虽受外力作用而互相平衡时，质点系的动能并不一定守恒。 例如双星引力作用，产生相向运动，产生动能。

内力做功 证明质点系内力作功一般不等于零。设第一个质点相对于固定点O的位矢是r_1，第二个质点相对于O的位矢是r_2。 第一个质点所受的内力为了$\vec{f}_{12}^{(t)}$,第二个质点所受的内力为0，$\vec{f}_{12}^{(i)}+\vec{f}_{21}^{(i)}=0$



$\mathrm{d}W_i=\vec{\boldsymbol{f}}_{12}^{(i)}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}_1+\vec{\boldsymbol{f}}_{21}^{(i)}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}_2=\vec{\boldsymbol{f}}_{21}^{(i)}\cdot\mathrm{d}(\vec{\boldsymbol{r}}_2-\vec{\boldsymbol{r}}_1)=\vec{\boldsymbol{f}}_{21}^{(i)}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}=-\vec{\boldsymbol{f}}_{12}^{(i)}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$

对一般质点系来讲，$d\neq 0$，故内力作功一般不等于零。$\mathrm{d}\vec{r}=0$ 意味着质点间距离不能改变，即为刚体

注意 ① 质点系所有外力作功的代数和及所有内力作功的代数和。绝不能理解为外力矢量和的功及内力矢量和的功。因为作功的要素之一是力作用的质点的位移，对质点系来说各质点的位移不相同，所以求功时不能算力的矢量和再标乘相同的位移。只有对单质点才能说合力的功。

② 动能的改变不仅与外力作功有关，而且与内力作功有关，而动量和角动量的变化，仅仅与外力或外力矩有直接关系。

2.4.2 质点系的机械能守恒律

定理 作用在质点系上的**所有外力和内力都是保守力或只有保守力作功**，则机械能守恒。

$\boldsymbol{T}+\boldsymbol{V}=\boldsymbol{E}$ 式中$\boldsymbol{E}$**是总能量，**$\boldsymbol{T}$**为质点系的动能，而**$\boldsymbol{V}$**则包含内力和外力的势能**

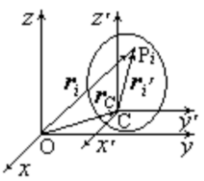
注意 对质点系来讲，内力所作的功之和一般并不为零，所以若只有外力是保守力而内力并不是保守力时，质点系的机械能并不守恒。

2.4.3 质点系对质心的动能定理

定理 $\mathbf{d}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i'^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}\cdot\mathbf{d}\vec{r}_i'+\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(i)}\cdot\mathbf{d}\vec{r}_i'$

质点系对质心动能的微分，等于质点系相对于质心系位移时**内力及外力所作的元功**之和。

推导 $C-x'y'z'$系称为质心坐标系，在惯性系中平动。对**加速平动参照系**来讲，P_i 的动力学方程为：



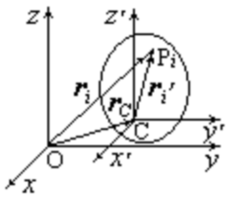
$m_i\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i'}{\mathrm{d}t^2}=\vec{F}_i^{(e)}+\vec{F}_i^{(i)}+\left(-m_i\ddot{\vec{r}}_C\right)$ 用相对于质心系的位移$d\vec{r}_i'$ 标乘上式中的各项，并对i求和，得

$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i'^2\right)_{\text{动能变化}}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(a)}\cdot\mathrm{d}\vec{r}'_{i\,\text{内力}}+\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(i)}\cdot\mathrm{d}\vec{r}'_{i\,\text{外力}}+\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\vec{r}}_C\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r}'_{i\,\text{惯性力}}$

对于惯性力而言：$\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\vec{r}}_C\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i'=-\ddot{\vec{r}}_C\cdot\sum_{i=1}^{n}m_i\mathrm{d}\vec{r}_i'=-\ddot{\vec{r}}_C\cdot\mathrm{d}(\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i')=0$

注意 质心虽是动点，但**惯性力所作功之和为零**，不起作用，与角动量定理的情形相似。

2.4.4 柯尼希定理



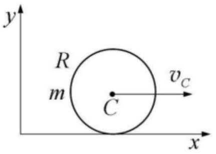
定理 $\boldsymbol{T}=\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\dot{\vec{r}}_C^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_i\dot{\vec{r}}_i'^2$ **质点系的动能为质心的动能与各质点对质心的动能之和**

推导 $\vec{r}_i=\vec{r}_C+\vec{r}_i$ 质点系的动能为 $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\dot{\vec{r}}_C+\dot{\vec{r}}_i'\right)^2=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_C^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i'^2+\dot{\vec{r}}_C\cdot\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}'$

$\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i'=m\dot{\vec{r}}_C'=0$

注意　量子力学多体运动中，动量与动能也有类似的情况。

例题　1. 圆柱体在地面上**无滑滚动**，质心速度为v_C，求圆柱的动能。

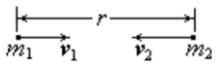


由柯尼希定理：$\boldsymbol{T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iv_i'^2}=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}dm\omega^2r^2$ 取环状微元

其中 $dm=\int_0^R\omega^2r^2\rho\,2\pi r\,dr=\frac{1}{4}\rho\pi\omega^2R^4=\frac{1}{4}\rho\pi v_C^2R^2=\frac{1}{4}mv_C^2$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I\omega^2_{\text{转动惯量}}}=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v_C}{R}\right)^2=\frac{3}{4}mv_C^2$

2. 质量为m_1及m_2的两自由质点**互相以力吸引**，引力与其质量成正比，与距离平方成反比，比例常数为k。开始时两质点皆处于静止状态，其间距离为a。试求两质点的距离为$a/2$时两质点的速度。



令质量为m_1的质点的速度为$\vec{v}_1$，质量为m_2的质点的速度为$\vec{v}_2$，则因两者互相吸引，故$\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 的方向相反，现在取$\vec{v}_1$的方向为正方向。 **无外力作用，故动量守恒**　$m_1v_1-m_2v_2=0$

内力为保守力，机械能守恒　$\underbrace{-\frac{km_1m_2}{a}}_{\text{引力势能}}=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-\frac{km_1m_2}{a/2}$

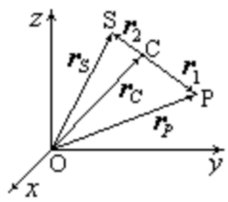
解得：$v_1=m_2\sqrt{\frac{2k}{a(m_1+m_2)}}$　　$v_2=m_1\sqrt{\frac{2k}{a(m_1+m_2)}}$

2.5 两体问题

雅可比坐标　将质点系中各质点的坐标表示为**质心位矢+质点相对于质心的位矢**的形式

对于两体而言，$r_1=R+\frac{S}{2}$　　$r_2=R-\frac{S}{2}$

2.5.1 质心的运动



方程建立　$M\frac{\mathrm{d}^2\vec{\boldsymbol{r}}_S}{\mathrm{d}t^2}=\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}$　　$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{\boldsymbol{r}}_P}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}$　　两式联立得：$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(M\vec{\boldsymbol{r}}_S+m\vec{\boldsymbol{r}}_P)=0$

$M\vec{r}_S+m\vec{r}_P=(M+m)\vec{r}_C$　　$(M+m)\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2}=0$

解释　所以，系统(P,S)的质心将按惯性运动。

2.5.2 行星、太阳相对质心的运动

方程建立　以行星为例，$m\ddot{\vec{r}}_1=-\frac{k^2m}{(r_1+r_2)^2}\frac{\vec{r}_1}{r_1}$　　同时 $mr_1=Mr_2$　则 $r_1+r_2=\left(1+\frac{m}{M}\right)r_1=\frac{M+m}{M}r_1$

再次回代：$m\ddot{\vec{r}}_1=-\frac{k^2mM^2}{(M+m)^2}\frac{\vec{r}_1}{r_1^2r_1}$

解释　所以，太阳和行星都绕它们的质心作圆锥曲线运动。

2.5.3 行星相对太阳的运动

方程建立　$M\frac{\mathrm{d}^2\vec{\boldsymbol{r}}_S}{\mathrm{d}t^2}=\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}$　(1)　　$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{\boldsymbol{r}}_P}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}$　(2)　　$(2)M-(1)m$得：

$Mm\left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_P}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_S}{\mathrm{d}t^2}\right)=-\frac{GMm}{r^2}(M+m)\frac{\vec{r}}{r}$　　利用$\vec{\boldsymbol{r}}_P-\vec{\boldsymbol{r}}_S=\vec{\boldsymbol{r}}$　可得 $Mm\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{GMm}{r^2}(M+m)\frac{\vec{r}}{r}$

令 $k'^2=G(M+m)$　　$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{Gm(M+m)}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=-\frac{k'^2m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$　　$\frac{Mm}{M+m}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k^2m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$　　$m\ddot{\vec{r}}_1=-\frac{k^2mM^2}{(M+m)^2}\frac{\vec{r}_1}{r_1^2r_1}$

折合质量　$\boldsymbol{\mu=\frac{Mm}{M+m}}$　或 $\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m}+\frac{1}{M}$　也称为**约化质量**，它是在处理两体问题时，把**本来属于非惯性系中的问题化为在惯性系中处理的单体问题而采用的等效质量**。

2.5.4 对开普勒第三定律的修正

修正定律 $\frac{a_1^3}{\tau_1^2}:\frac{a_2^3}{\tau_2^2}=\frac{M+m_1}{M+m_2}=\frac{1+m_1/M}{1+m_2/M}$

推导 行星公转周期: $\tau=\frac{2\pi a^{3/2}}{k}$ 对行星$P_1\frac{4\pi^2 a_1^3}{\tau_1^2}=k_1'^2=G(M+m_1)$

对行星$P_2\frac{4\pi^2 a_2^3}{\tau_2^2}=k_2'^2=G(M+m_2)$ 两式相除得到: $\frac{a_1^3}{\tau_1^2}:\frac{a_2^3}{\tau_2^2}=\frac{M+m_1}{M+m_2}=\frac{1+m_1/M}{1+m_2/M}$

解释说明 ① 太阳系中最大的行星是木星，它的质量也不过是太阳质量的$1/1047$，故如令下指标1代表木星，下指标2代表太阳系中的其他某个行星，因而$\frac{M+m_1}{M+m_2}$，不会超过$\frac{1048}{1047}$，这与1相差甚微。故开普勒第三定律虽只具有近似性质，但是近似程度却是相当高的。

② 该修正仍然为简化，实际情况为 N-body 问题，需要对轨道进一步修正

2.6 变质量物体的运动

变质量运动 当物体运动时，质量随时间而连续的变化。这里的质量变化是指质量随时间增加或减少。

2.6.1 变质量物体的运动方程

方程形式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$ $\vec{u}$ 代表**微质量 Δm 未与m合并之前**或**自m分出后一刹那的速度**

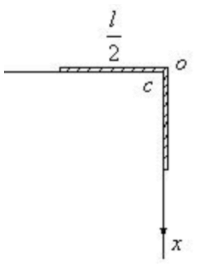
推导 设一物体的质量在t时刻为m，它的速度是$\vec{v}$，同时，一微小质量Δm以速度$\vec{u}$运动，并在时间间隔$t+\Delta t$内与m相**合并**，合并以后的共同速度是$\vec{v}+\Delta\vec{v}$。如果作用在m及Δm上的合外力为$\vec{F}$，则由动量定理：

$(m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})-m\vec{v}-\Delta m\vec{u}=\vec{F}\Delta t$ 化简得$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$

解释 如果$\vec{u}=0$ 则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})=\vec{F}$ 相当于质量变化为静止状态(凭空产生或消失)，没有额外的动量变化

如果 $\vec{u}=\vec{v}$ 一直是个整体 $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}$

经典例题 1. 长为 l 的均匀细链条伸直地平放在水平光滑桌面上，其方向与桌边缘垂直，此时链条的一半从桌上下垂，起始时整个链条是静止的，求此链条的末端滑到桌子的边缘时，链条的速度v。



本问题属于：$\vec{u}=\vec{v}$，其动力学方程简化为$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}$，以垂下链条为本体，$m=\lambda x$ (λ为链条的线密度)

对上式投影，对竖直方向的链条有 $\lambda x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\lambda gx-T$ 对桌面上的链条有 $\lambda(l-x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=T$

两式联立得 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{l}x\Rightarrow v\mathrm{d}v=\frac{g}{l}x\mathrm{d}x$ 积分 $\int_0^v v\mathrm{d}v=\frac{g}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}x\mathrm{d}x$ $v=\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$

2.6.1.1 绳下落问题

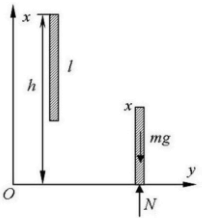
模型假设 一条线密度为η、长为l的细绳，上端悬于高为$h(h>l)$处，使绳子从静止开始自由下落

阶段一 触碰地面前，绳子做自由落体运动，由**机械能守恒定律**得$\eta lg(h-l)=\frac{1}{2}\eta lv^2$ 则 $v=\sqrt{2g(h-l)}$

阶段二 ① 以**空中绳为本体**，把时间dt内落到地板上的$\boldsymbol{dm}$**作为微小物体**。由变质量动力学方程：

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$ $\vec{u}=0$ 此问题满足的动力学方程为：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})=\vec{F}$

在竖直方向投影：$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\dot{x}+m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}=-mg+N_1$ 受到重力和**约束反力** 该结论与绳性质无关



$\because m=\eta x \quad \therefore \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\eta\dot{x}$ 则有：$\boldsymbol{N_1=\eta xg+\eta\dot{x}^2+\eta x\ddot{x}}$ 空中绳受到的**约束反力**

② 若**绳内部无相互作用**，**以$-dm$为研究对象**，触地瞬间，$-dm$的速度由$\dot{x}$变为0，根据动量定理得

$0-(-dm)\dot{x}=N_1dt-dm\cdot g\cdot dt_{二阶小量} \qquad (dm)\dot{x}=N_1dt \qquad \frac{dm}{dt}\dot{x}=\eta\dot{x}^2=N_1$

根据：$N_1=\eta xg+\eta\dot{x}^2+\eta x\ddot{x}$ 可以得到：$\ddot{x}=-g$ 无论绳子是否触碰地面，下落部分仍在自由落体

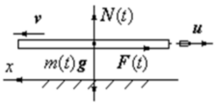
③ 以**地板上的绳子**为本体质量，$m(t)=\eta(l-x)$。由变质量动力学方程：

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$ 在竖直方向投影 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$ $\boldsymbol{-\frac{dm}{dt}u=N_1+N_2-m'g}$

考虑到 $v=0 \quad u=-\sqrt{2g(h-x)} \quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-\eta\dot{x}=-\eta u=\eta\sqrt{2g(h-x)}$

可得 $0+\eta(\sqrt{2g(h-x)})^2=N-\eta(l-x)g \qquad N=\eta g(2h+l-3x)$

反冲机枪 机枪质量为M，子弹质量为M'，单位时间内射出子弹质量为m，相对于地面速度为u，摩擦系数为μ，当子弹全部射出后，机枪后退速度为？



选择后退方向为正方向，由 $\frac{dM'}{dt}=m$ 则本体质量为：$m(t)=M+M'-mt$

受力分析：摩擦力 $F(t)=\mu N(t)=\mu(M+M'-mt)g$ 代入动力学方程：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$

$\frac{d}{dt}[(M+M'-mt)v_x]-mu=-(M+M'-mt)\mu g$ 分离变量并积分：(初始条件$t=0$，$v_x=0$)

$(M+M'-mt)v_x-mut=-\left[(M+M')t-\frac{1}{2}mt^2\right]\mu g$ 考虑子弹全部射出：$t=\frac{M'}{m}$ 回代方程：

$Mv_x-M'u=-\left[\frac{2MM'+M'^2}{2m}\right]\mu g$ 则得到：$v_x=\frac{M'}{M}u-\frac{(M+M')^2-M^2}{2mM}\mu g$

结果的复杂性源自于动力学方程等式左边两项均不是零。

2.6.1.2 水滴下落问题

模型设置 雨滴在下落时，由于不断吸收周围的水分而逐渐变大。以雨滴作为本体，质量为m，dt时间内吸收质量为dm，水汽可以认为是静止的$\vec{u}=0$，则动力学方程简化为：$\frac{d}{dt}(m\vec{v})=m\vec{g}$

模型假设 对于雨滴质量变化，一般有几种假设：

① 随时间**均匀变化** ② 正比于**瞬时表面积** ③ 正比于**瞬时质量**和**瞬时速度**的乘积。

假设一 随时间均匀变化：$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\lambda$ 则 $\frac{\mathrm{d}[(m_0+\lambda t)v]}{\mathrm{d}t}=(m_0+\lambda t)g$，根据初始条件$t=0$，$v=0$积分得

$(m_0+\lambda t)v=(m_0t+\frac{1}{2}\lambda t^2)g$ 有**t时刻速率** $v=\frac{(m_0t+\frac{1}{2}\lambda t^2)g}{m_0+\lambda t}$ 可见不断加速，但加速度不断减小

根据初始条件积分得t时间后下落距离：$s=\frac{g}{2}\left[\frac{t^2}{2}+\frac{m_0}{\lambda}-\frac{m_0^2}{\lambda^2}\ln\frac{m_0+\lambda t}{m_0}\right]$（但不合理，实际中有终端速度）

假设二 假设质量正比于瞬时表面积，并假设为球形水滴。

假设质量：$m=\frac{4}{3}\rho\pi r^3 \qquad \frac{dm}{dt}=\frac{dm}{dr}\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\rho\frac{dr}{dt} \qquad \lambda=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=$常量

$r=r_0+\lambda t\Rightarrow m=\frac{4}{3}\pi\rho(r_0+\lambda t)^3$ 代入动力学方程在竖直方向投影 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)=\frac{4}{3}\pi\rho(r_0+\lambda t)^3g$

积分得 $mv=\frac{4}{3}\pi\rho g\int_0^t(r_0+\lambda t)^3\mathrm{d}t=\frac{1}{3\lambda}\pi\rho g[(r_0+\lambda t)^4-r_0^4] \Longrightarrow v=\frac{g}{4\lambda}\left[r_0+\lambda t-\frac{r_0^4}{(r_0+\lambda t)^3}\right]$

速率仍然随时间递增，不太合理

假设三　　假设正比于瞬时质量和瞬时速度的乘积　$\frac{dm}{dt}=Kmv$　代入动力学方程：$\frac{d}{dt}(m\vec{v})=m\vec{g}$

竖直投影：$\frac{dm}{dt}v+m\frac{dv}{dt}=mg$ 可得：$\frac{dv}{dt}=g-Kv^2$ ，$\frac{dv}{g-Kv^2}=dt\xRightarrow{\text{裂项}}\frac{dv}{g/K-v^2}=Kdt\Rightarrow$

$\frac{dv}{\sqrt{g/K}-v}+\frac{dv}{\sqrt{g/K}+v}=2\sqrt{gK}dt$　积分：$\int_0^v\frac{dv}{\sqrt{g/K}-v}+\frac{dv}{\sqrt{g/K}+v}=\int_0^t2\sqrt{gK}dt$　得 到：$\ln\frac{\sqrt{g/K}+v}{\sqrt{g/K}-v}=2\sqrt{gK}t$

当 $t\to\infty$，$v=\sqrt{\frac{g}{K}}$　　　貌似合理了点

2.6.2 火箭

方程形式　已知变质量物体动力学方程为：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$　改写为：$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{u}-\vec{v})$

其中 $\vec{u}-\vec{v}=\vec{v_r}$ 是**放出物质相对于运动物体**的速度

$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}_r=\vec{F}+\vec{F}_r$　$\vec{F}_r$是由于放出物质所引起的附加力或反作用力

$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{u}-\vec{v})$ 通常有 $\vec{u}-\vec{v}=-v_r\hat{\tau}$　放出物质相对速度**沿轨道切线负方向**

动力学方程变换为：　$\boldsymbol{m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v_r\hat{\tau}}$

火箭方程　下面研究一种比较简单的情况：一个变质量物体在空间运动时**不受任何外力作用**，设放出物体的相对速度$\vec{v}_r$的量值不变，与运动质点的速度$\vec{v}$共线而反向，则动力学方程简化为：$\boldsymbol{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$

$\mathrm{d}v=-v_r\frac{\mathrm{d}m}{m}$　　两边积分：$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=-v_r\int_{m_0}^{m}\frac{\mathrm{d}m}{m}$　　$\boldsymbol{v=v_0+v_r\ln\frac{m_0}{m}}$　　令 $v_0=0$ 得 $v=v_r\ln\frac{m_0}{m}$

令m_s代表空火箭质量，m'代表放出物质的质量，当燃料燃烧终了时，火箭所具有的速度为：

$v=v_r\ln\frac{m_s+m'}{m_s}=v_r\ln\left(1+\frac{m'}{m_s}\right)$ 可见要提高火箭终速度：① 提高喷射速度　② 提高质量比

一般情况：$v_{rmax}\approx3\mathrm{km/s}$，$\frac{m_s+m'}{m_s}|_{max}\approx10$　若取：$v_{rmax}=2.5\mathrm{km/s}$ $\frac{m_s+m'}{m_s}=9$ 则:$v\approx5.5\mathrm{km/s}$

多级火箭　设各级火箭的质量比分别为N_1，N_2，N_3，…

一级火箭速率：$v_1=u_r\ln N_1$　二级火箭速率：$v_2=v_1+u_r\ln N_2$

三级火箭速率：$v_3=u_2+u_r\ln N_3$　$v_3=u_r(\ln N_1+\ln N_2+\ln N_3)=u_r\ln(N_1\cdot N_2\cdot N_3)$

$N_2=\frac{M-m_1-\Delta m}{M-m_1-m_2-\Delta m}>\frac{M-m_1}{M-m_1-m_2}=N_{20}$

火箭发射　① **加速段**：火箭在大气密度最大的一层内飞行阻力很大，为了尽快摆脱稠密的大气层，通常采用垂直向上发射，在几分钟内使火箭加速到足够大的速度，一般靠第一级和第二级火箭完成。

② **惯性飞行段**：第二级火箭脱离后，第三级火箭不立即发动，靠加速度而获得的动能继续升高而作惯性飞行，同时在地面中心控制站的控制下，火箭轨道偏离竖直方向逐渐转变为水平方向。

③ **进入轨道**：当火箭到达与卫星轨道相切的位置时，开动第三级火箭，使火箭连同它所装载的卫星加速到预定的速度而进入卫星轨道。