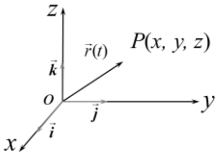
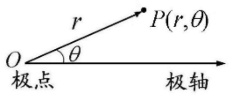
第一章 质点力学

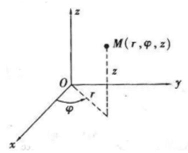
1.1 运动的描述方法

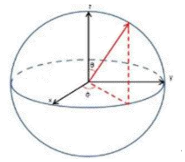


直角坐标



极坐标


柱坐标


球坐标

1.1.1 参照系与坐标系

参照系　为了确定物体的**位置**和描述其**运动**而选作标准的另一物体（默认地球）

坐标系　为了定量地表示物体相对于**参照系**的位置而选定的变数(**坐标**)的组合。

常见有：直角坐标系、平面极坐标、自然坐标系、柱坐标、球坐标

笛卡尔坐标系(仿射坐标系)大部分为直角坐标，也有斜角坐标系用于晶格计算中。

直角坐标系　遵照**右手螺旋**（四指由x指向y，大拇即指z，即$x \times y = z$）

极坐标系　由极轴与极点构造，表述为$P(r,\theta)$

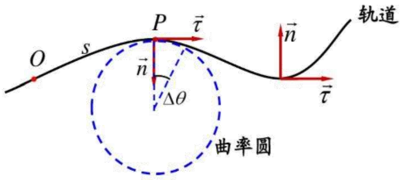
柱坐标系　与极坐标系高度相似，表述为$P(r,\varphi,z)$

球坐标系　$P(r,\theta,\varphi)$　θ为天顶角　计算中运用的并不多，计算十分复杂

例如南京北纬32，东经119，海拔$30m$，$(r+30,58,119)$

自然坐标系　沿质点运动轨迹建立的坐标系：设定原点与路程，点即唯一确定。

变量：切向$\vec{\tau}$、法向$\vec{n}$



1.1.2 运动方程与轨道

运动方程　确定点的**位置随时间的变化**规律的数学表达式。

轨道　质点在**空间**所描绘的**连续曲线**（或称为路径），与时间无关，由运动方程消去t得到。

描述方法：矢量表示法、坐标表示法、自然表示法

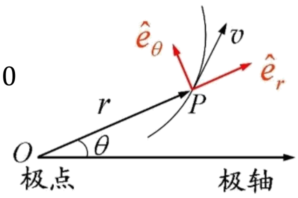
矢量表示　也称为**几何表示**，动点位置由**位矢**$\vec{r}$表示。$\vec{r}$以坐标原点O为始点，以动点P为终点。

运动方程：$\vec{r}=\vec{r}(t)$　称其为P点相对于原点O的位矢，当$\vec{r}$变动时，其端点描绘的曲线便是轨道。

坐标表示　也称为**投影表示**，可以用各类坐标系表示。

直角系　**位矢**：$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$　**运动方程**：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$　**轨道**：$F(x,y,z)=0$

极坐标　**位矢**：$\vec{r}=r\hat{e}_r$　**运动方程**：$\begin{cases}r=r(t)\\\theta=\theta(t)\end{cases}$



自然表示　也称为**内禀表示**，用这种表示方法时，**轨道应为已知**。假定s表示质点沿轨道运动在t内所经**弧长**

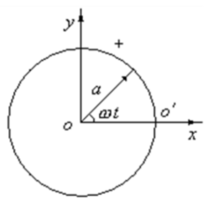
运动方程：$s=s(t)$　表示为路程与时间的关系。由该方程无法直接得到轨道方程。

例题　1. 一质点作匀速圆周运动，半径为a，角速度为ω，运动方程为？

① 选取直角坐标系$O-xy$即得：$\begin{cases}x=a\cos\omega t\\y=a\sin\omega t\end{cases}$　$\Rightarrow$　$x^2+y^2=a$　得到轨道

② 极坐标：$\begin{cases}r=a\\\theta=\omega t\end{cases}\Rightarrow r=a$

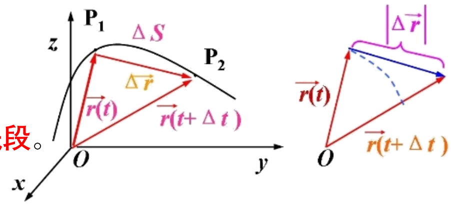
③ 自然表示：　以o'点为弧长起点，逆时针方向为正：$s=a\omega t$



注意　运动方程中若有变量与时间无关，则轨道方程中该变量**不一定**不存在，

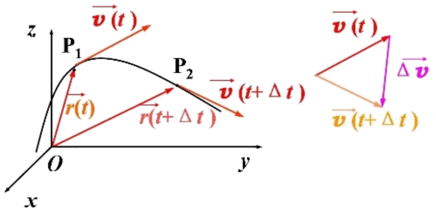
例如：$\begin{cases}x=1\\y=\cos\omega t_{\text{有边界限制}}\end{cases}$　与　$\begin{cases}x=1\\y=2t\\z=3t\end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}3y=2z\\x=1\end{cases}$

1.1.3 位移、速度和加速度



位移　质点在一段时间内位置的改变，即从始位置指向末位置的**有向线段**。位移只取决于始末位置，与通过路程无关

速度　即瞬时速度 $\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}}$　**位矢的时间变化率**　注意：$\dot{r}$ 特指对时间的导数



速率　$v=|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s}$　**路程的时间变化率**

加速度　$\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}$　**速度的时间变化率**

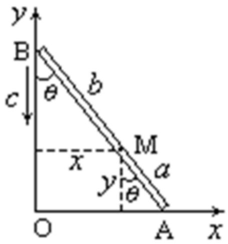
1.2 速度与加速度的分量表达式

1.2.1 直角坐标系

位矢　$\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$

速度　$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{\imath}+\frac{dy}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\dot{x}\vec{\imath}+\dot{y}\vec{\jmath}+\dot{z}\vec{k}$　**速率**　$v=|\vec{v}|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$

加速度　$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec{\imath}+\frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}=\ddot{x}\vec{\imath}+\ddot{y}\vec{\jmath}+\ddot{z}\vec{k}$　$a=|\vec{a}|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$



例题　1. 求椭圆规尺上M点的轨道方程、速度和加速度，已知B**以匀速**c**运动**
设有$MA=a, MB=b, \angle OBA=\theta$

① M点坐标为：$\begin{cases}x=b\sin\theta\\ y=a\cos\theta\end{cases}$　② 消去参数θ得**轨道方程**：$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 是个椭圆

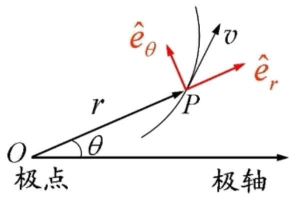
③ M点速度分量：$\begin{cases}\dot{x}=b\cos\theta\ \dot{\theta}\\ \dot{y}=-a\sin\theta\,\dot{\theta}\end{cases}$　又有初始条件：$\begin{cases}x_B=0\\ \dot{x}_B=0\end{cases}$ $\begin{cases}y_B=(a+b)\cos\theta\\ \dot{y}_B=-(a+b)\sin\theta\,\dot{\theta}=-c\end{cases}$

④ 可解得：$\dot{\theta}=\frac{c}{(a+b)\sin\theta}$　回代得**速度** $\dot{x}=\frac{bc\cos\theta}{(a+b)\sin\theta}=\frac{bc}{(a+b)}\cot\theta$，$\dot{y}=-\frac{ac\sin\theta}{(a+b)\sin\theta}=-\frac{ac}{(a+b)}$

$v_M=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\frac{c}{a+b}\sqrt{a^2+b^2\cot^2\theta}$　理论力学中求出分量即可，无需求解方向，该步可略

⑤ 加速度 $\begin{cases}\ddot{x}=-\frac{bc}{(a+b)}\csc^2\theta\,\dot{\theta}=-\frac{bc}{(a+b)}\csc^2\theta\,\frac{c}{(a+b)\sin\theta}=-\frac{bc^2}{(a+b)^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\\ \ddot{y}=0\quad\text{与题干强迫条件相关}\end{cases}$　$a_M=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\frac{b^4c^2}{(a+b)^2}\frac{1}{x^3}$

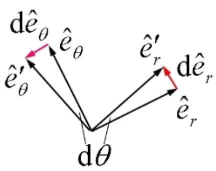
1.2.2 平面极坐标系



参量定义　**径向单位矢量**$\hat{e}_r$　为沿位矢$\vec{r}$的单位矢量
横向单位矢量$\hat{e}_\theta$　为**垂直**位矢$\vec{r}$且指向**角增加方向**的单位矢量

位矢　$\vec{r}=r\,\hat{e}_r$

速度　$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\hat{e}_r)=\dot{r}\hat{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$　即 $\begin{cases}\text{径向速度 } v_r=\dot{r}\\ \text{横向速度 } v_\theta=r\dot{\theta}\end{cases}$



推导　$\left.\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\hat{e}_\theta\\ \frac{\mathrm{d}\hat{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\hat{e}_r\end{array}\right\}\Rightarrow\ \vec{v}=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$　两者独立无关

加速度　$\begin{cases}a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 & \text{多了向心加速度，指向速度减小方向}\\ a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) & \text{多了科里奥利加速度}\end{cases}$　径向运动会影响到横向的加速度

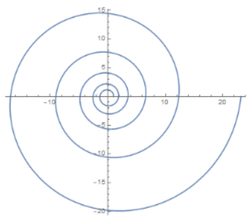
推导 $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\hat{e}_r)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\hat{e}_r)=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{e}_r+\dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}t}=\ddot{r}\hat{e}_r+\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{e}_\theta+r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta+r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta-r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$

例题 1. 某点运动方程为：$r=e^{ct}$ $\theta=bt$ 试求其速度与加速度

① 对r微分：$r=e^{ct}$ $\dot{r}=ce^{ct}=cr$ $\ddot{r}=c\dot{r}=c^2r$ $\theta=bt$ $\dot{\theta}=b$ $\ddot{\theta}=0$

② 速度有：$v_r=\dot{r}=cr$ $v_\theta=r\dot{\theta}=rb$



③ 加速度有：$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=c^2e^{ct}-rb^2=(c^2-b^2)r$ $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=2bcr$

可以看出，速度和加速度都和矢径$\vec{r}$成正比，是个螺旋线

1.2.3 自然坐标系

条件 仅考虑二维空间，质点沿**平面曲线**运动

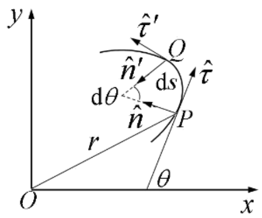
参量定义

径向单位矢$\hat{\tau}$ 为沿轨道切线并指向轨道**弧长增加**的方向上的单位矢量

法向单位矢$\hat{n}$ 为沿轨道法线并指向曲线**凹侧**的单位矢量

夹角θ 为轨道前进的切线方向和x轴正向之间的夹角

曲率半径ρ 轨道曲率半径



速度 $\vec{v}=\frac{ds}{dt}\hat{\tau}=v\hat{\tau}$ $\boldsymbol{v_\tau=\dot{s}}$ $\boldsymbol{v_n=0}$

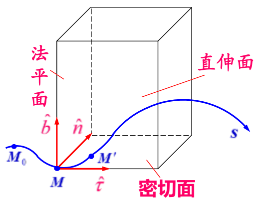
加速度 $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\hat{\tau}+\frac{d\hat{\tau}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{\mathbf{d}v}{\mathbf{d}t}\hat{\boldsymbol{\tau}}+\frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}}=\ddot{s}\hat{\boldsymbol{\tau}}+\frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}}$ (发现有 $\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}\theta}=\hat{n}$ $\frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}\theta}=-\hat{\tau}$)

切向加速度：$a_\tau=\frac{dv}{dt}$ 引起**速度大小**改变 **法向加速度**：$\frac{v^2}{\rho}$ 引起**速度方向**改变

推广 对于**空间曲线**来讲，上述公式仍然适用。由微分几何学：a 恒位于轨道的密切平面内。

轨道的密切平面是**轨道的切线**和曲线上**无限接近于切点的另一个点**所确定的极限平面，亦即轨道上无限接近的两点的**两条切线**所确定的极限平面。

对空间曲线上的某点而言，$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\tau}$仍为切向加速度（在$\hat{\tau}$方向上），$\frac{v^2}{\rho}\hat{n}$为在密切平面内并和切线垂直的加速度分矢量，叫做加速度在主法线方向$\hat{n}$上的分矢量。

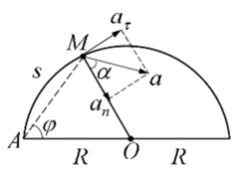


至于另一条法线，即所谓副法线方向$\hat{b}$上加速度的分矢量**则为零**。

局部的三维运动可以近似看成在密切平面上的二维运动。

例题 1. 质点M沿着半径为R的圆弧由A开始运动，**M到A的距离AM以匀速率v_0增加**，求质点M的加速度，用v_0,φ表示

法一 以A点为原点，建立自然坐标系，质点M运动方程：$s=R(\pi-2\varphi)$



质点速率：$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-2R\dot{\varphi}$ 有$\overline{AM}=2R\cos\varphi$ 且已知$v_0=\frac{\mathrm{d}\overline{AM}}{\mathrm{d}t}=-2R\sin\varphi\,\dot{\varphi}$

解得：$\dot{\varphi}=-\frac{v_0}{2R\sin\varphi}$ 由此$v=2R\frac{v_0}{2R\sin\varphi}=\frac{v_0}{\sin\varphi}$ 则 $a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v_0\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\dot{\varphi}=v_0^2\frac{\cos\varphi}{2R\sin^3\varphi}$

$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{v_0^2}{R\sin^2\varphi}$ (可以进一步表示$\varphi=\arccos\frac{v_0t}{2R}$) $a=\frac{v_0^2}{2R\sin^3\varphi}\sqrt{1+3\sin^2\varphi}$

法二 建立极坐标系，原点取在O点，则$r=R$为常量，$\theta=2\varphi$ 也可求解

2. 已知质点运动方程为$x=R\cos\omega t,y=R\sin\omega t,z=h\omega t/2\pi$ (R,ω,h为常数)，求质点的切向、法向加速度及轨道的曲率半径。

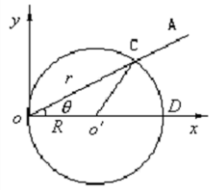
直接求导计算： 则有速度：$\vec{v}=\dot{x}\hat{\imath}+\dot{y}\hat{\jmath}+\dot{z}\hat{k}=-R\omega\sin\omega t\hat{\imath}+R\omega\cos\omega t\hat{\jmath}+\frac{h\omega}{2\pi}\hat{k}$

加速度：$\vec{a}=\ddot{x}\hat{\imath}+\ddot{y}\hat{\jmath}+\ddot{z}\hat{k}=-R\omega^2\cos\omega t\hat{\imath}-R\omega^2\sin\omega t\hat{\jmath}$

速率：$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\omega\sqrt{R^2+\left(\frac{h^2}{4\pi^2}\right)}$ 是常数

切向加速度：$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$ 法向加速度：$a_n=a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}=R\omega^2$

曲率半径：$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{\omega^2\left[R^2+\left(\frac{h^2}{4\pi^2}\right)\right]}{R\omega^2}=R+\frac{h^2}{4\pi^2 R}$ 密切面是一个斜面，投影是椭圆



3. 杆OA绕O点作定轴转动，小环C活套在OA杆和半径为R的固定圆环上，此固定圆环与OA杆在同一平面内且通过O点，已知OA杆与$\overline{OO'}$的夹角$\theta=\theta(t)$，求小环C在任一时刻的**速度、加速度**的大小。

法一： 建立如左图**直角坐标系** 有运动方程：$\begin{cases}x=R(1+\cos 2\theta)\\ y=R\sin 2\theta\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}=-2R\dot{\theta}\sin 2\theta\\ \dot{y}=2R\dot{\theta}\cos 2\theta\end{cases}$

加速度：$\begin{cases}\ddot{x}=-2R\ddot{\theta}\sin 2\theta-4R\dot{\theta}^2\cos 2\theta\\ \ddot{y}=2R\ddot{\theta}\cos 2\theta-4R\dot{\theta}^2\sin 2\theta\end{cases}$ 则$v=2R\dot{\theta}$ $a=2R\sqrt{\ddot{\theta}^2+4\dot{\theta}^4}$

法二： 建立**极坐标系** （以O为极点，O_x为极轴，θ为极角）

运动方程为：$\begin{cases}r=\overline{OC}=2R\cos\theta\\ \theta=\theta(t)\end{cases}$ 速度为 $\begin{cases}v_r=\dot{r}=-2R\dot{\theta}\sin\theta\\ v_\theta=r\dot{\theta}=2R\dot{\theta}\cos\theta\end{cases}$

有$\ddot{r}=-2R\ddot{\theta}\sin\theta-2R\dot{\theta}^2\cos\theta$ 加速度为$\begin{cases}a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-2R\ddot{\theta}\sin\theta-4R\dot{\theta}^2\cos\theta\\ a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=2R\ddot{\theta}\cos\theta-4R\dot{\theta}^2\sin\theta\end{cases}$

实际上更简单的建系方法是以O'为极点。

法三： 取C点的已知轨道(大圆环)为**自然坐标**，$t=0$时，C点位置（D点）为弧坐标的原点，并以θ角正向为弧坐标的正方向，则C点的弧坐标运动方程为：$s=\widehat{DC}=2R\theta$ $v=\dot{s}=2R\dot{\theta}$

$a_\tau=\ddot{s}=2R\ddot{\theta}$ $a_n=v^2/R=4R\dot{\theta}^2$ 很方便地给出最终结果

1.3 质点运动定律

1.3.1 牛顿运动定律

1.3.1.1 牛顿第一定律(惯性定律)

定律 任何物体如果没有受到其他物体作用，都将保持静止或匀速直线运动状态

注意 ① 定律说明了维持物体的运动不需力的作用，而是靠物体本身的惯性

② 定律揭示了其他物体的作用是改变物体运动状态的原因

③ 定律所描述的静止和匀速直线运动涉及到对哪种参照系描述（惯性参考系）

1.3.1.2 牛顿第二定律

定律 当一物体受到外力作用时，该物体所获得的加速度和外力成正比，和物体本身的质量成反比，加速度的方向和外力的方向一致。

表达式 $\vec{F}=m\vec{a}$

注意 ① 第二定律不是**力的定义**而是运动定律，$m\vec{a}$ 不是力。

② 式中$\boldsymbol{F}$应理解为物体所受的合力。

③ 第二定律表明$\boldsymbol{F}$和$\vec{a}$之间关系的瞬时性，即无论物体做直线或曲线运动，无论物体受恒力或变力作用，在任何时刻表达式都成立。

④ 第二定律的矢量性，表明在任何时刻物体所受的合力方向和加速度方向一致。

⑤ 牛顿定律只适用于宏观物体低速运动（对一些忽略波动性的经典粒子也适用）

1.3.1.3 牛顿第三定律(作用力与反作用力)

定律 当一物体A对另一物体B有一个作用力的同时，另一个物体B同时也对该物体A有一个反作用力，作用力和反作用力大小相等,方向相反,在一条直线上，即$\vec{F}_{12}=\vec{F}_{21}$

注意　　作用力与反作用力施加在两个不同的物体上，它们互以对方的存在为自己存在的前提。它们同时产生，同时消灭，相互依存，形成对立的局面，它们是力学中普遍存在的一种矛盾

1.3.2 相对性原理

惯性参考系	牛顿运动定律能成立的参照系
非惯性参考系	牛顿运动定律不能成立的参照系
力学相对性原理	也称为伽利略相对性原理：一切惯性参照系对所有的**力学规律**都是等价的
爱因斯坦相对性	即一切惯性参照系**对所有的物理过程（包括电磁的、光学的）**都是等价的

1.4 质点运动微分方程及其求解

1.4.1 运动微分方程的建立

1.4.1.1 自由质点

自由质点　$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$　也称为动力学方程

直角坐标系　上式可写为以下三个标量式：$\begin{aligned} m\ddot{x}&=F_x(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t)\\ m\ddot{y}&=F_y(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t)\\ m\ddot{z}&=F_z(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t)\end{aligned}$　各个坐标可能**耦合存在，称耦合方程**

需要提供初始条件(边界条件)：$t=0$时，质点的 初位置 x_0,y_0,z_0 初速度 u_0,v_0,w_0

极坐标系　上式可写为：$\begin{aligned} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)&=F_r(r,\theta;\dot{r},\dot{\theta};t)\\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})&=F_\theta(r,\theta;\dot{r},\dot{\theta};t)\end{aligned}$　$t=0$时，质点的 初位置 $r=r_0$，$\theta=\theta_0$ 初速度 $\dot{r}=v_{r0}$，$\dot{\theta}=\omega$

1.4.1.2 非自由质点

非自由质点　$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)+\vec{R}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$　如果质点受到**某种约束**，例如被限制在**某曲线或曲面上运动**，则叫做非自由质点。该曲线/曲面称为约束，该曲线/曲面方程叫做约束方程。 如压力、支持力等

自然坐标系　运动微分方程为（内禀方程）：

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F_\tau\\ m\dfrac{v^2}{\rho}=F_n+\boldsymbol{R_n}\\ 0=F_b+\boldsymbol{R_b}\end{cases}$$

如光滑平面曲线约束的约束方程为$f(x)$，则 $\frac{1}{\rho}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

1.4.2 质点运动微分方程的解

概述　理论力学的主要任务，就是根据具体问题进行具体分析后，建立**运动微分方程组**，然后求解这些方程组。也就是说，在具体分析以后，我们将把力学问题化为数学问题；再根据题给的起始条件来解出这些方程组；最后，还要对所得的结果加以分析，阐明它们的物理含义

问题　① **已知运动规律 ⇒ (微分)求力**
　　　② **已知力 ⇒ (积分)求运动规律**

1.4.2.1 力只是坐标的函数——三维谐振动

模型　**原子在晶体点阵中的运动**：
在简单情况下，力只是坐标x、y、z的函数，且可互相分开，不耦合，故其运动微分方程可写为

DQM　$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x=-k_x x\\ m\ddot{y}=F_y=-k_y y\\ m\ddot{z}=F_z=-k_z z\end{cases}$　$k_xk_yk_z$是比例系数，常称为倔强系数，形似弹簧。

求解 只选择x方向研究：$\ddot{x}=-\frac{k_x}{m}x=-\omega_x^2 x$　　可表示其解为：$x=A_x\cos(\omega_x t+\theta_x)$

所以：
$$\begin{aligned}x&=A_x\cos(\omega_x t+\theta_x),\omega_x=\sqrt{k_x/m}\\ y&=A_y\cos(\omega_y t+\theta_y),\omega_y=\sqrt{k_y/m}\\ z&=A_z\cos(\omega_z t+\theta_z),\omega_z=\sqrt{k_z/m}\end{aligned}$$

例题 1. 一质点受一**与距离成反比的引力**作用在一直线上运动，质点的质量为m，比例系数为k，若质点从距原点O为a的地方由静止开始运动，求其到达O点所需的时间。

质点受引力为$F=-\frac{k}{x}$　其运动微分方程为 $m\ddot{x}=-\frac{k}{x}\Rightarrow mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{k}{x}$　需要引入x来积分

分离变量积分$\int_0^v mv\mathrm{d}v=-k\int_a^x\frac{\mathrm{d}x}{x}$　得 $\frac{1}{2}mv^2=k\ln\frac{a}{x}$ $\Rightarrow$ $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{2k}{m}}\sqrt{\ln\left(\frac{a}{x}\right)}$　v与x反向，取负值

$(\because x\in(0,a)\therefore\ln\frac{a}{x}>0\quad x\to 0\quad \ln\frac{a}{x}\to\infty)$ 令$y=\sqrt{\ln\left(\frac{a}{x}\right)}$　则$x=ae^{-y^2}$　$\mathrm{d}x=-2aye^{-y^2}\mathrm{d}y$ 代入得

$2ae^{-y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{2k}{m}}$ 分离变量积分$(x:a\to 0\quad y:0\to\infty)$　$2a\int_0^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{2k}{m}}\int_0^t\mathrm{d}t$　$2a\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{2k}{m}}t$

已知结论 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　故到达O点所需的时间为$t=a\sqrt{\frac{m\pi}{2k}}$

1.4.2.2 力只是时间的函数——自由电子在沿x轴的振荡电场中的运动

模型 设沿x轴的**电场强度**为：$E_x=E_0\cos(\omega t+\theta)$　电子**所受的力**则为：$F=-eE_x=-eE_0\cos(\omega t+\theta)$

DQM 根据牛顿运动定律，电子运动的微分方程为：$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-eE_0\cos(\omega t+\theta)$

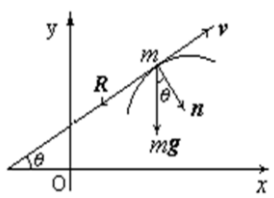
求解 设起始条件是：当$t=0$时，$v=v_0$　上式积分一次得：$v=v_0+\frac{eE_0}{m\omega}\sin\theta-\frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t+\theta)$

设当$x=0$时，$x=x_0$　上式积分：$x=x_0-\frac{eE_0\cos\theta}{m\omega^2}+\left(v_0+\frac{eE_0}{m\omega}\sin\theta\right)t+\frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t+\theta)_{\text{震荡项}}$

特点 **振荡项**与电场具有相同的角频率ω，且与初始条件无关。
非振荡项与起始条件有关，对波的传播特性无贡献，只能影响波到达的前沿位置。

1.4.2.3 力只是速度的函数——在具有阻力的媒质中运动的抛射体

模型 设阻力$\vec{R}$只**与速度$\vec{v}$的大小的一次方成正比**，即 $\vec{R}=-mk\vec{v}$



DQM 取直角坐标系：
$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}=-k\dot{x}\qquad \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}=-g-k\dot{y}$$

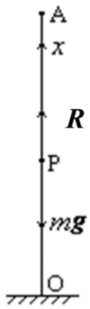
求解 当$t=0$ 时，$v_x=v_{x0}$　$v_y=v_{y0}$　$x=0$　$y=0$　积分一次得：
$$\dot{x}=v_{x0}e^{-kt}\qquad \dot{y}=\left(\frac{g}{k}+v_{y0}\right)e^{-kt}-\frac{g}{k}$$

再次积分：
$$x=\frac{v_{x0}}{k}(1-e^{-kt})\qquad y=\frac{g}{k^2}\left(1+\frac{kv_{y0}}{g}\right)(1-e^{-kt})-\frac{g}{k}t$$
轨道方程为：$y=\left(\frac{g}{kv_{x0}}+\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)x-\frac{g}{k^2}\ln\left(\frac{v_{x0}}{v_{x0}-kx}\right)$

极限情况
① 如果阻力很小或距离很短，即：$\frac{kx}{v_{x0}}\ll 1$，上式展开为级数后，得：$y=\frac{v_{y0}}{v_{x0}}x-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}x^2-\frac{1}{3}\frac{kg}{v_{x0}^3}x^3-\cdots$
② 当x趋向于v_{x0}/k 时，y趋向于负无穷大，即轨道在$x=v_{x0}/k$ 处变成竖直直线。
③ 当抛射体的速度接近枪弹的速度时，R与v的正比关系已经不再适用。如为低速炮弹，可以认为R与 v^2成正比；当速度接近声速时，R与v^2正比的关系又不再适用

例题

1. 质量为m 的质点，在有阻力的空气中无初速地自离地面为h的地方**竖直下落**。**如阻力与速度成正比**，试研究其运动。



选取直角坐标系，其运动微分方程为：$m\ddot{x}=R-mg$　考虑到$\vec{R}=-mk\vec{v}$　有$m\ddot{x}=-mk\dot{x}-mg$

则$\ddot{x}=-k\dot{x}-g$　初始条件：$t=0,\dot{x}_0=0,x_0=h$　则积分：$\dot{x}=\frac{g}{k}e^{-kt}-\frac{g}{k}=-\frac{g}{k}(1-e^{-kt})$

二次积分：$x=h+\frac{g}{k^2}(1-e^{-kt})-\frac{g}{k}t$

可见：速度逐渐接近于**定值极限速度 $-g/k$**，运动几乎是匀速直线运动。这是阻力和重力平衡的结果。

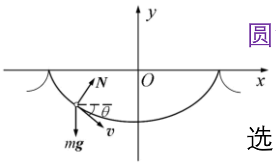
2. 在上述例题中，**如阻力与速度平方成正比**，试研究该质点的运动。

则有阻力$R=mk^2g\dot{x}^2$　有$m\ddot{x}=mk^2g\dot{x}^2-mg$，则$\begin{cases}\ddot{x}=-g+k^2g\dot{x}^2\\ t=0:\ \dot{x}_0=0\quad x_0=h\end{cases}$

积分两次可得：$\dot{x}=-\frac{1}{k}\mathrm{th}(kgt)$ 双曲正切　　$x=h-\frac{1}{k^2g}\ln\mathrm{ch}(kgt)$ 双曲正弦

当$t\to\infty$时，$\mathrm{th}(kgt)\to1$，故物体的速度由零逐渐增大，但以定值$1/k$为其极限。极限速度与运动物体在运动垂直方向的**最大截面积**有关。

3. 一质量为m质点自光滑的圆滚线尖端无初速下滑，试证在任一点的压力为$N=2mgcos\theta$。



圆滚线方程：$\begin{cases}x=-a(2\theta+\sin2\theta)\\ y=-a(1+\cos2\theta)\end{cases}$

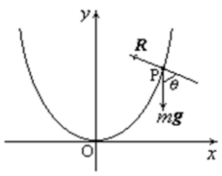
选自然坐标系，微分方程为$\begin{cases}m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg\sin\theta & ①\\ m\frac{v^2}{\rho}=N-mg\cos\theta & ②\end{cases}$　考虑到 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ 与 $\sin\theta=-\frac{dy}{ds}$

① 变为 $v\mathrm{d}v=-g\mathrm{d}y$，积分$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_0^y -g\mathrm{d}y$，得到$v^2=-2gy\xRightarrow{\text{轨迹代入}}2ga(1+\cos2\theta)=4ga\cos^2\theta$

$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=4a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$　$\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=4a\cos\theta$　　②式有 $m\frac{v^2}{\rho}=N-mg\cos\theta$

$N=\frac{4ga\cos^2\theta}{4a\cos\theta}+mg\cos\theta=2mg\cos\theta$

4. 小环的质量为m，套在一条光滑的钢索上，钢索的方程式为$x^2=4ay$。试求小环自$x=2a$处自由滑至抛物线顶点时的速度及小环在此时所受到的约束反作用力。



小环放在任意位置P处，小环受力分析如图所示。选自然坐标系，其运动微分方程为：

$\begin{cases}m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg\sin\theta & ①\\ m\frac{v^2}{\rho}=R-mg\cos\theta & ②\end{cases}$　$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$　$\sin\theta=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$　① 式变为：$v\mathrm{d}v=-g\mathrm{d}y$

$x=2ay=a$对上式积分得：$v=\sqrt{2ag}$　由$x^2=4ay$求得 $\frac{1}{\rho}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{1}{2a}$

$R=m\frac{v^2}{\rho}+mg\cos\theta=m\frac{2ag}{2a}+mg=2mg$

1.5 质点动力学的基本定理与基本守恒定律

1.5.1 动量定理与动量守恒律

1.5.1.1 动量定理

微分形式 $\vec{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ $\mathrm{d}\vec{p}=\mathrm{d}(m\vec{v})=\vec{F}\mathrm{d}t$

积分形式 $\vec{p}_2-\vec{p}_1=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$

1.5.1.2 动量守恒律

冲量 $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$

动量守恒律 $\boldsymbol{\vec{F}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{\vec{v}})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\vec{p}}}{\mathrm{d}t}$ 质点动量的变化等于外力在这段时间内给予该质点的冲量

$\boldsymbol{\vec{F}=0}$ $\boldsymbol{\vec{p}=m\vec{v}=\vec{C}}$

$$\begin{cases}p_x=m\dot{x}=C_1\\p_y=m\dot{y}=C_2\\p_z=m\dot{z}=C_3\end{cases}$$

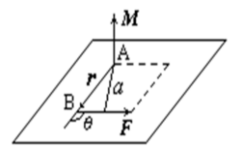
有时$\vec{F}\neq 0$, 但$\vec{F}$在某一坐标轴上的投影为零, 那么动量虽不守恒, 但它在该坐标轴上的投影为一常数。

如质点只在重力作用下运动，如取z轴竖直向上，则$F_x=0$ $F_y=0$ $F_z=-mg$
这时动量（或速度）在x及y两轴上的投影为常数，即动量守恒。但质点作直线运动还是作抛物线运动，则由速度的起始值（初速度）决定。

1.5.2 力矩与角动量（动量矩）

力矩 $\boldsymbol{\vec{M}}=\boldsymbol{\vec{r}}_{\text{矢径}}\times\boldsymbol{\vec{F}}$ $M=rF\sin\theta$

$$\boldsymbol{\vec{M}}=\boldsymbol{\vec{r}}\times\boldsymbol{\vec{F}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\hat{\imath}}&\boldsymbol{\hat{\jmath}}&\boldsymbol{\hat{k}}\\x&y&z\\F_x&F_y&F_z\end{vmatrix}=\left(yF_z-zF_y\right)\boldsymbol{\hat{\imath}}+\left(zF_x-xF_z\right)\boldsymbol{\hat{\jmath}}+\left(xF_y-yF_x\right)\boldsymbol{\hat{k}}$$



角动量 动量矩 $\boldsymbol{\vec{J}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$ $\vec{J}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\x&y&z\\m\dot{x}&m\dot{y}&m\dot{z}\end{vmatrix}$

角动量分量 $J_x=m(y\dot{z}-z\dot{y})$ $J_y=m(z\dot{x}-x\dot{z})$ $J_z=m(x\dot{y}-y\dot{x})$

1.5.3 角动量定理与动量矩守恒律

1.5.3.1 角动量定理

微分形式 $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}(\boldsymbol{\vec{r}}\times\boldsymbol{m\vec{v}})=\boldsymbol{\vec{r}}\times\boldsymbol{\vec{F}}$ $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\vec{J}}}{\mathbf{d}t}=\boldsymbol{\vec{M}}$

分量形式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(y\dot{z}-z\dot{y})]=yF_z-zF_y$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(z\dot{x}-x\dot{z})]=zF_x-xF_z$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(x\dot{y}-y\dot{x})]=xF_y-yF_x$

积分形式 $\vec{J}_2-\vec{J}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t$ **冲量矩** $\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{\vec{M}}\mathrm{d}t$

1.5.3.2 角动量守恒定律

定律描述 质点**角动量的变化**，等于外力在该时间内给予该质点的**冲量矩**。

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times m\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}$ $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$ $\vec{J}=\vec{r}\times m\vec{v}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{C}$

$$J_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = C_4 \qquad J_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) = C_5 \qquad J_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = C_6$$

1.5.4 动能定理与机械能守恒律

1.5.4.1 功和功率

恒力作功 $W = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \Delta\vec{\boldsymbol{r}} = F|\Delta\vec{\boldsymbol{r}}|\cos\theta$

变力作功 $W = \int_A^B \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$ **直角坐标系** $W = \int_A^B F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$

多个力作功 $W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \cdots + \int \vec{F}_n \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

单位 在国际单位制中，功的单位是焦耳

功率 $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ 在国际单位制中，功率的单位是瓦特，即焦耳每秒。

1.5.4.2 能

动能 由于物体有一定的**速度**而具有的能量

势能 物体由于**所处的位置**或**发生形变**而具有的能量 功是能量变化的量度

1.5.4.3 保守力 非保守力

力场 假如力仅为坐标 x, y, z 的单值、有限和可微的函数，则此空间称为**力场**。如稳定场$\vec{F}(x, y, z)$

则必存在一个单值、有限和可微的函数$V_{势能}(x, y, z)$，满足有：

$$\vec{F} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) \qquad \vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} \qquad F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ \ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \ \ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$\mathrm{d}W = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z\right)$ 为一**恰当微分**，**其值只由两端点的位置所决定**。

对于恰当微分，沿任何闭合路径运行一周时，力所作的功为零。$W^2 = \oint \vec{\boldsymbol{F}}^2 \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^2 = 0$

保守力 力所作的功**与中间路径无关**，或者沿任何闭合路径运行一周时，力所作的功为零。（万有引力、弹性力和静电力 ）

非保守力 力所作的功与中间路径有关（涡旋电磁力）

耗散力 **总是作负功而消耗能量**（流体的粘滞力、摩擦力）

1.5.4.4 势能

示例 在重力场中，把质点从高度为z_1沿任意路径举到高度为z_2时，重力mg对质点所作的功为$-mg(z_2 - z_1)$即等于标量函数mgz的减少值。

势能 标量函数$V(x, y, z)$叫做质点在点(x, y, z)处的势能

保守力做功等于势能增量的负值 $W = -(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A})$ $\begin{cases} W > 0 & V_B < V_A \quad 势能减少 \\ W < 0 & V_B > V_A \quad 势能增加 \end{cases}$

充要条件 如果F_x，F_y，F_z是坐标x, y, z 的单值、有限和可微的函数，则势能存在的**必要条件**是：

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \qquad 即\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{0}$$

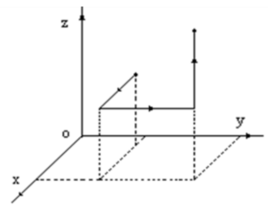
反之，如果$\nabla \times \vec{\boldsymbol{F}} = 0$，那么这力就一定是保守力，而它所作的功就一定和路径无关，因而，也就一定存在着某一标量函数$V(x, y, z)$，它就是质点的势能。

如果$\nabla \times \vec{\boldsymbol{F}} \neq 0$，则该力就是非保守力，这时它所作的功就与路径有关，因而谈不上什么势能。

注意 ① 保守力做功等于势能增量的负值：$W = -(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A})$ 所以，有意义的是势能的变化，而不是势能的绝对值，因此势能零点可以任意选取，不影响结果。 通常取无穷远处为零。

② 势能是**力场**与处于力场中某位置的**质点**所共有的（如重力势能是物体与地球引力场共有，质点有

质量。单独立场的称为势，如电势）



求解方法 ① 选择积分路径为平行于坐标轴的折线 $V=-\int_{x_0}^{x} F_x\mathrm{d}x-\int_{y_0}^{y} F_y\mathrm{d}y-\int_{z_0}^{z} F_z\mathrm{d}z$

② 将$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$化为全微分，势能为：$V=-\int_A^B \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$

例题 1. 已知作用于质点上的力为：$\vec{F}=xz\hat{\imath}+yz\hat{\jmath}+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\hat{k}$ 检验此力是否是保守力，若是求出势能。

本问题中$\frac{\partial F_y}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial y}=y-y=0$ $\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}=x-x=0$ $\frac{\partial F_x}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial x}=0$ 故此力是保守力，下面求势能。

法一 设(x_0,y_0,z_0)为势能零点，其势能为：$V=-\int_{x_0}^{x} xz_0\mathrm{d}x-\int_{y_0}^{y} yz_0\mathrm{d}y-\int_{z_0}^{z}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$

$=-\frac{1}{2}[z_0(x^2-x_0^2)+z_0(y^2-y_0^2)+(x^2+y^2)(z-z_0)]=-\frac{1}{2}[(x^2+y^2)z-(x_0^2+y_0^2)z_0]$

法二 $\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}=xz\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}z=\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)z\right]$ 一般凑不出来

其势能为：$V=-\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)z+C\right]$ 将$x=x_0$ $y=y_0$ $z=z_0$ $V(x_0.y_0.z_0)=0$

代入上式得：$C=-\frac{1}{2}(x_0^2+y_0^2)z_0$ $V=-\frac{1}{2}[(x^2+y^2)z-(x_0^2+y_0^2)z_0]$

1.5.4.5 动能定理及机械能守恒定律

动能定理 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ $\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{x_0,y_0,z_0}^{x,y,z}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$

如果$\vec{F}$为保守力 $\vec{F}=-\nabla V$ $W=-(V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A})$

机械能守恒 $\frac{1}{2}mv^2+V(x,y,z)=E$ $T+V=E$

当质点所受的力都是保守力时（或只有保守力作功,其他力不作功或作功为零），质点的动能与势能虽可互相消长，但总机械能的数值恒保持不变。

1.6 质点在有心力作用下的运动

1.6.1 有心力运动的特点

有心力 一般来讲，如果运动质点所受的**力的作用线**始终通过**某一个定点**，我们就说这个质点所受的力是有心力，而这个定点则叫做**力心**。 如地面物体受到地心的万有引力。

引力斥力 有心力在大小上，一般是矢径大小（即质点和力心间的距离）的函数，而力的方向则始终沿着质点和力心的联线。凡**力趋向定点的是引力，离开定点的是斥力**。

$\vec{F}=F(r)\frac{\vec{r}}{r}$ $\begin{cases}F(r)>0 & 斥力\\ F(r)<0 & 引力\end{cases}$ 质点始终在**一平面内**运动。可选择极坐标 (r,θ)来研究它的运动。

性质一 质点受有心力作用，**角动量守恒，做平面运动。**

推导 在极坐标系中，质点的运动微分方程为：$\begin{cases}m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r=F(r)\\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=F_\theta=0\end{cases}$ 二式可写为$m\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0$

积分得：$\boldsymbol{r^2\dot{\theta}=h}$ **角动量守恒** $\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\frac{F(r)}{r}\vec{r}=0$ $\vec{J}=\vec{r}\times\vec{p}=$ 恒矢量

$\begin{cases}J_x=m(y\dot{z}-z\dot{y})=c_4 & (1)\\ J_y=m(z\dot{x}-x\dot{z})=c_5 & (2)\\ J_z=m(x\dot{y}-y\dot{x})=c_6 & (3)\end{cases}$ $x\cdot(1)+y\cdot(2)+z\cdot(3)$, 得$c_4x+c_5y+c_6z=0$ 质点必**作平面运动**

性质二 质点受有心力作用，**机械能守恒。**$\boldsymbol{\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+V(r)=E}$

有心力对质点所作的功，**只取决于起点和终点的矢径**，而与中间所通过的路径无关。

$W=\int_{r_1}^{r_2}F(r)\mathrm{d}r$ 所以，有心力是保守力，一定存在势能 V $\int_{r_1}^{r_2}F(r)\mathrm{d}r=-(V_2-V_1)$

1.6.2 轨道微分方程——比耐公式

比耐公式 $\boldsymbol{h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=-\frac{F}{m}}$

推导 研究有心力问题的基本方程 ：$\begin{cases}m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F(r) & ①\\ r^2\dot{\theta}=h & ②\end{cases}$

设$\boldsymbol{u=\frac{1}{r}}$ 则 $r^2\dot{\theta}=h\Rightarrow\dot{\theta}=hu^2$ $\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$

$\ddot{r}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)\dot{\theta}=-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$ 回代①式可得

例题 1. 质点受有心力作双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$的运动时（a为常数），试证明有心力的形式为$F=-\frac{3ma^4h^2}{r^7}$。

$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{a\sqrt{\cos 2\theta}}$ $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\sin 2\theta}{a(\cos 2\theta)^{3/2}}$ $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}=\frac{3-\cos^2 2\theta}{a(\cos 2\theta)^{5/2}}$ $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{3}{a(\cos 2\theta)^{5/2}}$

代入比耐公式 $F=-mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)$ $F=-mh^2\frac{1}{a^2\cos 2\theta}\frac{3}{a(\cos 2\theta)^{5/2}}=-\frac{3mh^2a^4}{r^7}$

1.6.3 平方反比引力——行星的运动

1.6.3.1 比耐公式判据

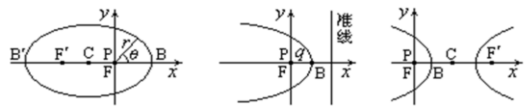
假设 利用**比耐公式**求质点在与距离平方成反比的引力作用下的**轨道方程**。

令太阳的质量为M，行星的质量为m，由万有引力定律得：$F=-\frac{GMm}{r^2}=-\frac{k^2m}{r^2}=-mk^2u^2$

推导 代入比耐公式得： $h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=k^2u^2$ $\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{k^2}{h^2}}$

换元令：$u=\xi+\frac{k^2}{h^2}$　　则 $\frac{d^2\xi}{d\theta^2}+\xi=0$　　其解：　$\xi=A\cos(\theta-\theta_0)$

转动极轴，使$\theta_0=0$　　$r=\frac{h^2/k^2}{1+(Ah^2/k^2)\cos\theta}$


(1)椭圆 CB = a, CF = c, $e<1$　　(2)抛物线 FB = q, $e=1$　　(3)双曲线 FC = c, BC = a, $e>1$

化简方程：令 $\frac{h^2}{k^2}=p$　$A\frac{h^2}{k^2}=\boldsymbol{Ap=e}$　　则$\boldsymbol{r=\frac{p}{1+e\cos\theta}}$

所以，轨道是**原点在焦点上的圆锥曲线，力心位于焦点上**。

圆锥曲线，**可依偏心率e的数值**，分为下列三种类型：(1)椭圆$e<1$　(2)抛物线 $e=1$　(3)双曲线 $e>1$

近日点　在圆锥曲线中，**离力心最近**的顶点 B 叫**近日点**。

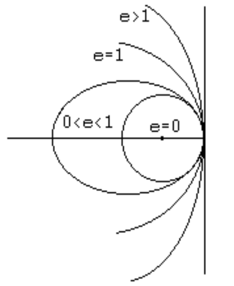
远日点　在椭圆中，离力心最远的顶点叫**远日点**，在抛物线和双曲线中都没有远日点。

椭圆　在近日点：$r=a-c=a(1-e)$　　$\theta=0$　　$a(1-e)=\frac{p}{1+e}\Rightarrow \boldsymbol{p=a(1-e^2)}$

抛物线　在近日点：$r=q$，$\theta=0\Rightarrow \boldsymbol{p=2q}$

双曲线　在近日点：$r=c-1=a(e-1)\Rightarrow \boldsymbol{p=a(e^2-1)}$

1.6.3.2 总能量判据



判据　$e=\sqrt{1+\frac{2E}{m}\left(\frac{h}{k^2}\right)^2}$　　因为$\frac{2E}{m}\left(\frac{h}{k^2}\right)^2$恒为正值，所以有结论：

① $\boldsymbol{E>0}$　$\boldsymbol{e>1}$　**轨道为双曲线**　　② $\boldsymbol{E=0}$　$\boldsymbol{e=1}$　**轨道为抛物线**

③ $\boldsymbol{-\frac{mk^4}{2h^2}<E<0}$　$0<e<1$ **轨道为椭圆**　　④ $\boldsymbol{E=-\frac{mk^4}{2h^2}}$　$\boldsymbol{e=0}$　**轨道为圆**

如果小于临界值，则轨道塌缩，近日点变化为远日点。

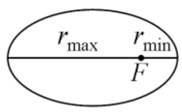
推导　质点在距力心为r时的**引力势能**为$V(r)=-\int_\infty^r -\frac{k^2m}{r^2}dr=-\frac{k^2m}{r}$

有心力是保守力，**机械能守恒，得动能** $\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)-\frac{k^2m}{r}=E$　利用$r^2\dot\theta=h$作变换

$\dot r=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$　代入上式得：$\frac{1}{2}m\left[\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}-\frac{2k^2}{r}\right]=E$　解出$\frac{dr}{d\theta}$,并分离变量得

$\frac{hdr}{r\sqrt{\frac{2E}{m}r^2+2k^2r-h^2}}=d\theta$　　积分得到$r=\frac{h^2/k^2}{1+\sqrt{1+2h^2E/k^4m}\cos\theta}$　　$e=\sqrt{1+\frac{2E}{m}\left(\frac{h}{k^2}\right)^2}$

例题　1. 证明行星绕太阳运动的椭圆轨道长半轴a仅与能量E有关，而与其角动量无关。



$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$　近日点,$\theta=0$　$r_{min}=\frac{p}{1+e}$　　远日点,$\theta=\pi$　$r_{max}=\frac{p}{1-e}$

半长轴：$a=\frac{1}{2}(r_{max}+r_{min})=\frac{p}{1-e^2}$　则 $a=\frac{p}{1-e^2}$　因为 $\frac{h^2}{k^2}=p$，得到 $e=\sqrt{1+\frac{2E}{m}\left(\frac{h}{k^2}\right)^2}$　　$k^2=GM$

最终得到$a=-\frac{k^2m}{2E}=-\frac{GMm}{2E}$

2. 质点在有心力作用下运动。此力的量值为质点到力心距离r的函数，而质点的速率则与此距离成反比，即$v=a/r$，如果$a^2>h^2$,求质点的轨迹方程。

$\vec v=\dot r\hat e_r+r\dot\theta\hat e_\theta$　　$r^2\dot\theta=h$　可得：$v^2=\dot r^2+r^2\dot\theta^2=\dot r^2+\frac{h^2}{r^2}$　　$\dot r=\pm\sqrt{v^2-\frac{h^2}{r^2}}=\pm\sqrt{\frac{a^2-h^2}{r^2}}$

换元：$\dot r=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$　　轨迹微分方程为：$\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=\pm\sqrt{\frac{a^2-h^2}{r^2}}$

分离变量并积分：$\int_{r_0}^r\frac{dr}{r}=\int_0^\theta\pm\sqrt{\frac{a^2-h^2}{h^2}}d\theta\Rightarrow \ln\frac{r}{r_0}=\pm\sqrt{\frac{a^2-h^2}{h^2}}\theta$　　是对数螺旋线

1.6.4 宇宙速度和宇宙航行

推导 **总能量和轨道半长轴之间的关系**：由 $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{k^2m}{r}=E$ $\quad r^2\dot{\theta}=h$ 出发

两式消去$\dot{\theta}$得：$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\right)-\frac{k^2m}{r}=E$ **如轨道为椭圆**，在近日点$r=a(1-e)$ $\quad \dot{r}=0$

$\frac{h^2}{k^2}=p \quad p=a(1-e^2)$ $\qquad E=\frac{mh^2}{2r^2}-\frac{k^2m}{r}=\frac{mk^2a(1-e^2)}{2a^2(1-e)^2}-\frac{k^2m}{a(1-e)}=-\frac{k^2m}{2a}$

如轨道为抛物线，则在近日点 $\dot{r}=0$，$r=q$，$p=2q$ $\quad E=\frac{mk^2(2q)}{2q^2}-\frac{k^2m}{r}=0$

如轨道为双曲线，在近日点 $\dot{r}=0$，$r=a(e-1)$，$\frac{h^2}{k^2}=p$，$p=a(e^2-1)$ $\quad E=\frac{mh^2}{2r^2}-\frac{k^2m}{r}=+\frac{k^2m}{2a}$

第一速度 即**环绕速度**，对于椭圆轨道的星体，能量守恒为：$\frac{1}{2}mv^2-\frac{k^2m}{r}=-\frac{k^2m}{2a}$

令 $a=r=$ 地球半径，$k^2=GM=gr^2$ 则从地球表面上发射一颗人造地球卫星所需要的最低速度v_1

$$v_1=\sqrt{gr}\approx\sqrt{9.8\times 6400/1000}\approx \mathbf{7.9(km/s)}$$

第二速度 即**逃逸速度**，物体脱离地球引力，但不能脱离太阳引力作用所需的最低速度v_2

沿用第一式能量守恒，$\frac{1}{2}mv^2-\frac{k^2m}{r}=-\frac{k^2m}{2a}$ 令 $a=\infty$ $\quad v_2^2=\frac{2k^2}{r}=2gr$（椭圆→抛物线），则有

$$v_2=\sqrt{2gr}=\sqrt{2}v_1\approx 1.4\times 7.9\approx \mathbf{11.2(km/s)}$$

第三速度 即从地球表面发射，物体能够**脱离太阳系**，应具有的速度v_3（在地球绕太阳运行的轨道上发射物体时可以脱离太阳的速度v）

脱离地球的速度 $v_2^2=\frac{2k^2}{r}=\frac{2GM}{r}$ $\qquad$ 脱离太阳的速度$v^2=\frac{2GM'_{\text{太阳质量}}}{r'_{\text{日地半径}}}$

所以 $v=v_2\sqrt{\frac{M'r}{Mr'}}=11.2\times\sqrt{333400/23400}\approx \mathbf{42(km/s)}$

此外，地球绕太阳公转的速度约为30km/s。如果发射时的速度方向和地球在公转轨道上运行的速度方向一致，那么只要相对于地球的速度为12 千米/秒。在地面发射，还要同时克服地球的引力，因此：

$$v_3=\sqrt{(12)^2+(11.2)^2}\approx \mathbf{16.7(km/s)}$$

1.6.5 开普勒定律

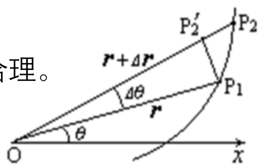
1.6.5.1 定律内容

第一定律 行星绕太阳作**椭圆运动**，太阳位于椭圆的一个**焦点**上。

第二定律 行星和太阳之间的联线（矢径），**在相等时间内所扫过的面积相等** $\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\text{常数}\right)$ 实质是角动量守恒

第三定律 行星公转的**周期的平方**和**轨道半长轴的立方**成正比 $T^2\propto a^3$

1.6.5.2 利用开普勒定律推证万有引力定律



科学史 开普勒定律是在万有引力定律**之前**被提出的，因此用开普勒定律推导万有引力更合理。

$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$计算 很短时间内，$r$不变 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ 即：$\mathbf{2\dot{A}=r^2\dot{\theta}=h}$

F计算 因此行星**角动量守恒**，受到有心力。$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ $\qquad$ 改写 $u=\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos\theta$

代入比耐公式得：$F=-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=-\frac{mh^2u^2}{p}=-\frac{h^2}{p}\frac{m}{r^2}$ $\qquad h$是某个守恒量，p与轨道有关

理论上上式可以通过行星实际轨道观测计算，但我们想证明上式与轨道无关，得到普遍的万有引力。

周期 对$2\dot{A}=r^2\dot{\theta}=h$ 积分得：$2A=h(t-t_0)$ $\qquad$ 当矢径扫过全部椭圆后：$2\pi ab=h\tau$ $\quad$ **引入第三定律**：

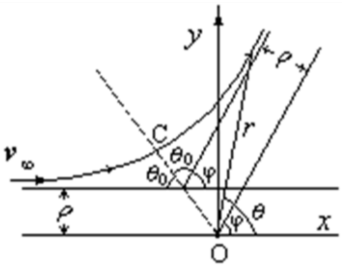
$\tau=\frac{2\pi ab}{h}$ $\frac{\tau^2}{a^3}=\frac{4\pi^2b^2}{h^2a}$ 解析几何：$\frac{b^2}{a}=\frac{1}{a}(a^2-c^2)=a(1-\frac{c^2}{a^2})=a(1-e^2)=p$ 所以$\frac{\tau^2}{a^3}=\frac{4\pi^2p}{h^2}$(常数)

令 $\frac{h^2}{p}=k^2$ 则**行星公转周期**：$\tau=\frac{2\pi a^{3/2}}{k}$ 则 $F=-\frac{h^2}{p}\frac{m}{r^2}$ 所以：$\boldsymbol{F=-\frac{mk^2}{r^2}}$

引入**牛顿第三定律**，反作用力 $F'\propto M$(太阳的质量) 所以:$k^2\propto M$

令 $k^2=GM$ $\boldsymbol{F=-G\frac{Mm}{r^2}}$ 即得到**万有引力定律一般形式**

1.6.6 平方反比斥力—— α粒子的散射



引入 除了有心引力外，还存在**有心斥力**，诸如**库仑力、核力**等。

模型设置 带正电荷$2e$的α粒子射入一原子中 $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}=\frac{k'}{r^2}$ 注意：不涉及核力

质点的**能量方程** $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{k'}{r}=E>0$ 则轨道是双曲线的一支，偏转角$\varphi=\pi-2\theta_0$

轨道方程 求α粒子质点散射时的**轨道方程**，从**比耐公式**出发，把通解写成**正弦和余弦的组合**

$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-\frac{k'}{m}u^2\Rightarrow u'=u+\frac{k'}{mh^2}\Rightarrow\frac{d^2u'}{d\theta^2}+u'=0$ $u=\frac{1}{r}=\boldsymbol{A}\cos\theta+\boldsymbol{B}\sin\theta+\boldsymbol{C_1}(1)$

$\boldsymbol{C_1=-\frac{k'}{mh^2}}$ **入射初始**：当 $\theta=\pi$ 时 $r=\infty$ $u=0\Rightarrow\boldsymbol{A=C_1}$

要求参数B，先轨道上任一点纵坐标 $y=r\sin\theta$ $\frac{1}{y}=\frac{1}{r\sin\theta}=\frac{u}{\sin\theta}$ $u=\frac{\sin\theta}{y}$ $\boldsymbol{\frac{1}{y}=\frac{C_1(1+\cos\theta)}{\sin\theta}+B}$

瞄准距离 ρ：当 $\theta=\pi$ 时，纵坐标y等于从**力心**到**双曲线渐近线**所作的**垂线**的距离。

当 $\theta=\pi$ 时 $y=\rho$ $\boldsymbol{B=\frac{1}{\rho}}$ 轨道方程为 $u=C_1(1+\cos\theta)+\frac{1}{\rho}\sin\theta$

关系推导 轨道方程涉及ρ，我们希望进一步简化，且尚未用到出射方向的边界条件。
则**求偏转角φ与瞄准距离ρ之关系** 粒子远离力心后 $r=\infty$ $u=0$ $\theta=\phi$

代入轨道方程得：$u=C_1(1+\cos\theta)+\frac{1}{\rho}\sin\theta$ 先乘ρ，再$\theta=\phi$，可得 $-\frac{1}{C_1\rho}=\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$

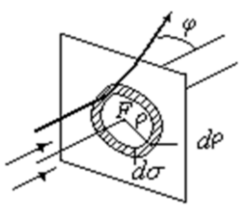
将$C_1=-k'/mh^2$ 代入上式得：$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\frac{mh^2}{k'\rho}$ ②

设无穷远处α质点的速度为 v_∞（通过速度筛选器得到），动量矩为 $mh=mr(r\dot{\theta})=m\rho v_\infty$

故 $h=\rho v_\infty$代入②式得：$\cot\frac{\varphi}{2}=\frac{m\rho v_\infty^2}{k'}$ 所以：$\boldsymbol{\rho=\frac{k'}{mv_\infty^2}\cot\frac{\varphi}{2}}$ $\rho\nearrow\ \Rightarrow\phi\searrow$

表示瞄准距离 ρ 增加时，偏转角 φ 减小。

散射截面 令一束**平行**的具有**相同速度**的α质点轰击薄金属箔（ρ相同）
dN表示单位时间内，在φ和$\varphi+d\varphi$角度内**所散射的质点数**
n 是在单位时间内**通过垂直于粒子束的单位截面积的质点数（数密度）**



散射截面 $d\sigma=\frac{dN}{n}$ $dN=2\pi\rho d\rho\cdot n$ $d\sigma=2\pi\rho d\rho=-2\pi\rho(\varphi)\frac{d\rho}{d\varphi}d\varphi$

$d\sigma=2\pi\rho d\rho=-2\pi\rho(\varphi)\frac{d\rho}{d\varphi}d\varphi$ $\rho=\frac{k'}{mv_\infty^2}\cot\frac{\varphi}{2}$

所以 $d\sigma=\frac{1}{4}\left(\frac{k'}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{2\pi\sin\varphi}{\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)}d\varphi$ **卢瑟福公式**

(理想条件：不考虑相对论效应(速度不能太大)、原子核等效为点粒子(ρ不能小于原子核尺度))