第四章 非惯性系中质点的运动

4.0 回顾平动参考系

4.0.1 时间与空间

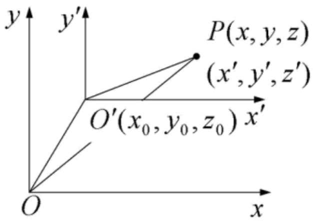
绝对性 小车以**较低的速度**$\vec{v}$沿水平轨道先后通过点 A 和点 B，地面上人测得车通过 A、B 两点间的距离和时间与车上的人测量结果相同。
在两个相对作直线运动的参考系中，时间的测量是绝对的，空间的测量也是绝对的，与参考系无关，**时间和长度的绝对性**是经典力学或牛顿力学的基础.

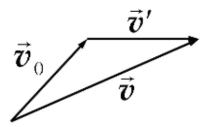
4.0.2 相对运动

4.0.2.1 平动参照系中质点的速度

模型建立 **动系S'** 相对于**静止坐标系S**作**匀速直线运动**

相对分速度 某一瞬时S'系原点O'相对于S系原点O的坐标(x_0, y_0, z_0)





$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = u_0 \quad \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t} = v_0 \quad \frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}t} = w_0$ u_0、v_0、w_0为S'系坐标原点对S系的**相对分速度**，均为定值。

绝对速度 P代表运动质点在同一瞬时的位置，相对于S系其坐标为(x, y, z)，相对于S'系其坐标为(x', y', z')
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$ 分量情况：$x = x_0 + x'$ $y = y_0 + y'$ $z = z_0 + z'$
求导得：$\dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{x}' = u_0 + \dot{x}'$ $\dot{y} = \dot{y}_0 + \dot{y}' = v_0 + \dot{y}'$ $\dot{z} = \dot{z}_0 + \dot{z}' = w_0 + \dot{z}'$
写成矢量形式为 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ 物体**相对于静止参照系的运动**叫做**绝对运动**，所以物体相对于S系的运动速度$\vec{v}$ 叫做**绝对速度**。 对应的，物体相对于运动参照系S'的运动叫做相对运动，物体相对于S'的运动速度 $\vec{v}'$ 叫做**相对速度**。 物体随S'系一道运动而具有的相对于S系的运动，叫做牵连运动，所以物体被S'系带着一起运动而具有的相对于S系的速度 $\vec{v}_0$ 叫做**牵连速度**。
在平动参考系中，质点的绝对速度等于牵连速度与相对速度的矢量和

注意 ① 运动参考系的速度就是牵连速度的说法是错误的。
当谈到牵连速度时，总是指**质点**的牵连速度，它是由于运动参考系的运动而使质点的牵连点所具有的相对固定参考系的速度。那种说运动参考系的速度就是牵连速度的提法是不确切的。当运动参考系有转动时，说运动参考系的速度而不指明动系上哪一点（牵连点）的速度是毫无意义的。
质点牵连速度的严格定义是：由于**运动参考系**的**运动**而使**质点**的**牵连点**所具有的**相对固定参考系**的速度叫质点的牵连速度。
② 对于运动参考系相对静止参考系作**加速直线运动或一般平动时**，这个速度关系式仍正确。
但是当$\vec{v}_0$接近光速时，速度关系式不成立。

4.0.2.2 平动参考系中质点的加速度

匀速模型 **平动参考系S'**相对于**静止参考系S**作**匀速**直线运动，$\vec{v}_0$是恒矢量。

相对性原理 $\dot{\vec{v}}_0 = 0$ $\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}'$ $\vec{a} = \vec{a}'$ 在静系中和在相对于静系作匀速直线运动的参考系中所**观察到的物体的加速度相同**。 若S系是惯性系，$\vec{F} = m\vec{a}$；则S'系必有$\vec{F}' = m'\vec{a}'$

表明相对于惯性系作**匀速直线运动**的一切参考系**都是惯性系**，在所有惯性系中力学规律都相同。

加速模型 **平动参考系S'**相对于**静止参考系S**作**加速**直线运动。

绝对加速度 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$ 质点**相对于静止参照系S的加速度**

相对加速度 $\vec{a}'$ 质点**相对于S'的加速度** **牵连加速度** $\vec{a}_0$ 质点被S'带着一起运动时获得的相对S的加速度

4.0.2.3 质点在加速平动参照系中的运动

牛顿定律 发现有$\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}'$，所以有：$\vec{F}=m\vec{a}_0+m\vec{a}'$，$\vec{F}\neq m\vec{a}'$ 故相对静止参照系作加速直线运动的**非惯性参照系**，牛顿运动定律不再成立，上式改写为：$\vec{F}+(-m\vec{a}_0)=m\vec{a}'\Rightarrow \vec{F}'=m\vec{a}'$

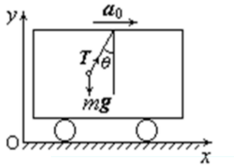
相对于非惯性系来讲，牛顿第二定律在形式上仍然成立。

惯性力 这样除了物体间相互作用的力之外，还有一种非相互作用力$(-m\vec{a}_0)$，这种力是由于参照系本身相对于惯性参照系作加速运动所引起的，这种力叫做**惯性力**。

注意 ① 惯性力只不过反映参照系并非惯性参照系而已，惯性力没有施力者。

② 不存在惯性力的反作用力，惯性力不遵守牛顿第三定律。

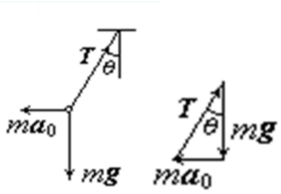
③ 惯性力的具体表达式，跟参照系运动的方式有关。



例题 1. 在以加速度$\vec{a}_0$作匀加速运动的车中，用线悬挂一小球,悬线与竖直线成θ角，求θ。

惯性系解法：选地面为参照系，小球受两个力，重力和绳的拉力：$\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}_0$

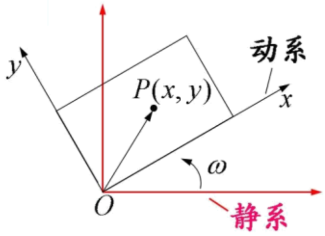
$T\sin\theta=ma_0$ $T\cos\theta=mg$ 解之得 $\tan\theta=\frac{a_0}{g}$



非惯性系解法：选车为参照系，小球相对于车处于静止状态，成为**三力平衡问题**。

三个力：重力、绳的拉力、惯性力：三力形成一闭合三角形 $\tan\theta=\frac{a_0}{g}$

4.1 平面转动参考系



4.1.1 静止系与转动系的速度变换公式

模型设置 设**平面转动参照系S'**以**角速度$\vec{\omega}$**绕垂直于自身的轴转动，在动系S'上取坐标系$O-xyz$，动系与静系原点O重合，**z轴为转动轴**，任一点P的位矢为：$\vec{r}=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}$ $\vec{\omega}=\omega\hat{k}$ 角速度只在z方向

速度 质点相对静止坐标系S的速度为：$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\hat{\imath}+\dot{y}\hat{\jmath}+x\frac{\mathrm{d}\hat{\imath}}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}\hat{\jmath}}{\mathrm{d}t}=(\dot{x}-y\omega)\hat{\imath}+(\dot{y}+x\omega)\hat{\jmath}$

其中 $\frac{\mathrm{d}\hat{\imath}}{\mathrm{d}t}=\omega\times\hat{\imath}=\omega\hat{\jmath}$ ，$\frac{\mathrm{d}\hat{\jmath}}{\mathrm{d}t}=\omega\times\hat{\jmath}=-\omega\hat{\imath}$，长度不变的矢量对时间求导为其角速度与它自己的矢量积。

相对速度 $\vec{v}'=\dot{x}\hat{\imath}+\dot{y}\hat{\jmath}$ 如P在平板上不动，此项速度为零

牵连速度 $-y\omega\hat{\imath}+x\omega\hat{\jmath}=\omega\hat{k}\times(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath})=\vec{\omega}\times\vec{r}$ 由于平板转动而带着P点一起转动所引起的相对静系的速度

速度变换 $\boxed{\vec{v}=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}}$ **绝对速度等于相对速度与牵连速度的矢量和**

解读 ① 平动参考系变换 $\vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_0$，牵连速度为动系原点的速度，且任一点速度变换均使用相同的 $\vec{v}_0$

② 转动参考系变换，牵连速度 $\vec{v}_0=\vec{\omega}\times\vec{r}$ 是由参考系转动引起的，且牵连速度依赖于点的位置 $\vec{r}$

③ 若P点取为刚体上一点，则$\vec{v}'=0$，上式回到**定点运动**中刚体上任一点的速度公式 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

4.1.2 科里奥利加速度

绝对加速度 现在求P点对S的加速度：$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=(\ddot{x}-\dot{y}\omega-y\dot{\omega})\hat{\imath}+(\ddot{y}+\dot{x}\omega+x\dot{\omega})\hat{\jmath}+(\dot{x}-y\omega)\frac{\mathrm{d}\hat{\imath}}{\mathrm{d}t}+(\dot{y}+x\omega)\frac{\mathrm{d}\hat{\jmath}}{\mathrm{d}t}$

$\vec{a}=(\ddot{x}-y\dot{\omega}-x\omega^2-2\dot{y}\omega)\hat{\imath}+(\ddot{y}+x\dot{\omega}-y\omega^2+2\dot{x}\omega)\hat{\jmath}$ 速度的四个分量都需要进行求导，形式复杂

相对加速度 $\ddot{x},\ddot{y}$ 为质点P对转动参照系的**轴向加速度分量**，它的合成：$\ddot{x}\hat{\imath}+\ddot{y}\hat{\jmath}=\vec{a}'$

切向加速度 $-y\dot{\omega}\hat{\imath}+x\dot{\omega}\hat{\jmath}=\dot{\omega}\hat{k}\times(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath})=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ 由于平板作**变角速度转动**所引起的**切向加速度**，如平板以匀角速度转动，则此项加速度为零。

向心加速度 $-\omega^2x\hat{\imath}-\omega^2y\hat{\jmath}=-\omega^2\vec{r}$ 沿矢径指向O点，它是由于平板以**角速度$\vec{\omega}$**转动所引起的**向心加速度**。

牵连加速度 即**切向加速度与向心加速度之和**，都是由于平板转动所引起的。

科氏加速度 $-2\dot{y}\omega\hat{\imath}+2\dot{x}\omega\hat{\jmath}=2\omega\hat{k}\times(\dot{x}\hat{\imath}+\dot{y}\hat{\jmath})=\boldsymbol{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}$

其方向则垂直于$\vec{\omega}$与$\vec{v}'$所决定的平面，在平面问题中，$\vec{\omega}$恒沿$\hat{k}$方向，故$\boldsymbol{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}$为位于$x$、$y$平面内的矢量，其指向由右手螺旋法则决定。这个加速度叫**科里奥利加速度**，简称科氏加速度。

解读 科氏加速度是由于在S系中的观察者看来，**牵连运动**(即$\vec{\omega}$)可**使相对速度$\vec{v}'$**发生变化，而相对运动(即$\vec{v}'$)又同时使牵连速度$\vec{\omega}\times\vec{r}$中的$\vec{r}$发生改变，即科氏加速度是由牵连运动与相对运动相互影响所产生的。如果$\vec{\omega}$与$\vec{v}'$两者中有一个为零，则此项加速度为零。

加速度综合 在平面转动参照系中，**绝对加速度为相对加速度、牵连加速度及科里奥利加速度三者的矢量和**。

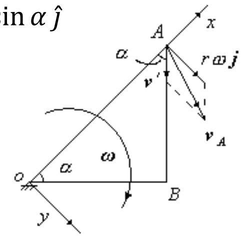
$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}'+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}-\omega^2\vec{r}+2\vec{\omega}\times\vec{v}'=\vec{a}'+\vec{a}_t+\vec{a}_c}$$

注意：科氏加速度必须是质点相对运动和牵连运动同时存在才能产生。

① 若P取为刚体上一点，则 $\vec{v}'=\vec{a}'=0$，回到定点运动中刚体上任意点的加速度公式。

② **$\vec{\omega}$是在地面参考系中观察到的转动参照物的角速度。**（不同的转动系中，观察到的角速度不相同）

例题 1. 一等腰直角三角形OAB在其自身平面内以匀角速ω 绕定点O转动，某一点P以相对速度v'沿AB边运动，当三角形转了一周时，P点走过了AB，如已知 $AB=b$，试求P点在A时的绝对速度与绝对加速度。



如图建立坐标系，P点的牵连速度和相对速度为：$\vec{\omega}\times\vec{r}=r\omega\hat{\jmath}$ $\vec{v}'=-v'\cos\alpha\,\hat{\imath}+v'\sin\alpha\,\hat{\jmath}$

绝对速度为：$\vec{v}_A=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}=-v'\cos\alpha\,\hat{\imath}+(r\omega+v'\sin\alpha)\hat{\jmath}$

$\alpha=\frac{\pi}{4}$ $r=2b\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}b$ $v'=\frac{b}{2\pi/\omega}=\frac{b\omega}{2\pi}$

绝对速度的大小为：$v_A=\sqrt{v'^2+r^2\omega^2+2r\omega v'\sin\alpha}=\frac{b\omega}{2\pi}\sqrt{8\pi^2+4\pi+1}$

$\tan\theta=\frac{v_{Ay}}{v_{Ax}}=\frac{r\omega+v'\sin\alpha}{-v'\cos\alpha}=-(4\pi+1)$ θ为$\vec{v}_A$ 与三角形斜边的夹角。

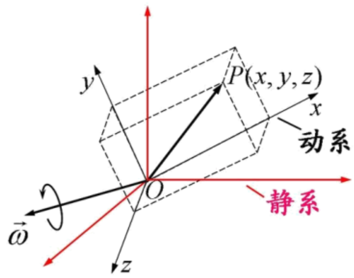
在平面转动参照系中，质点的绝对加速度为：$\vec{a}_A=\vec{a}'+\vec{a}_t+\vec{a}_c=\vec{a}'-\omega^2\vec{r}+2\vec{\omega}\times\vec{v}'$

$\vec{a}'=0$ $\vec{a}_t=-r\omega^2\hat{\imath}$ $\vec{a}_c=-2\omega v'\cos\alpha\,\hat{\imath}-2\omega v'\sin\alpha\,\hat{\jmath}$

$\therefore\vec{a}_A=-(r\omega^2+2\omega v'\cos\alpha)\vec{\imath}-2\omega v'\sin\alpha\,\vec{\jmath}$ 其加速度的大小为：$a_A=\frac{b\omega^2}{\pi}\sqrt{2\pi^2+2\pi+1}$

$\tan\beta=\frac{a_{Ay}}{a_{Ax}}=\frac{2\omega v'\sin\alpha}{r\omega^2+2\omega v'\cos\alpha}=\frac{1}{2\pi+1}$ β为$\vec{a}_A$ 与三角形斜边的夹角。

4.2 空间转动参考系



4.2.1 速度变换

模型设置 空间转动参考系的**角速度$\vec{\omega}$**的量值和方向都可以改变，S'的原点和静止坐标系S的原点O重合，因此$\vec{\omega}$恒通过O点。令$\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}$为固着在$S'$系三个坐标轴上的单位矢量，故$P$点位置矢量为：$\boldsymbol{\vec{r}=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}}$

绝对速度 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{\imath}+\frac{dy}{dt}\hat{\jmath}+\frac{dz}{dt}\hat{k}+x\frac{d\hat{\imath}}{dt}+y\frac{d\hat{\jmath}}{dt}+z\frac{d\hat{k}}{dt}$ 利用$\frac{d\hat{\imath}}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{\imath}$ ，$\frac{d\hat{\jmath}}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{\jmath}$ ，$\frac{d\hat{k}}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{k}$

$$\boxed{\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}}$$ 绝对速度等于相对速度和牵连速度的矢量和

相对速度 $\vec{v}'=\dot{x}\hat{\imath}+\dot{y}\hat{\jmath}+\dot{z}\hat{k}$ **牵连速度** $\vec{\omega}\times\vec{r}$

4.2.2 加速度

绝对加速度 $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}'}{dt}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$ 其中 $\frac{d\vec{v}'}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath}+\frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath}+\frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}+\frac{dx}{dt}\frac{d\hat{\imath}}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\hat{\jmath}}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\hat{k}}{dt}=\vec{a}'+\vec{\omega}\times\vec{v}'$

其中 $\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\times(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r})$ **绝对加速度等于相对加速度、牵连加速度与科氏加速度的矢量和。**

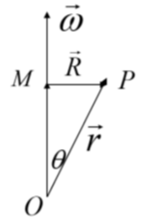
得到表达式：$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}'+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})+2\vec{\omega}\times\vec{v}'=\vec{a}'+\vec{a}_t'+\vec{a}_c}$$

相对加速度 $\vec{a}' = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$ 　　质点P相对S'系的加速度

牵连加速度 $\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ 　　其中 $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}$ 由$\vec{\omega}$的大小发生改变所产生的，如参照系S'以恒定角速度转动，则此项为零；$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ 由于S'系以角速度$\vec{\omega}$转动所产生的

科氏加速度 $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}'$ 　　由于质点P对转动的S'系有一相对速度$\vec{v}'$，从而与$\vec{\omega}$相互影响所产生的。

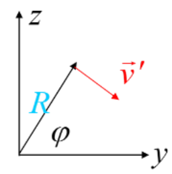
注意 **绝对速度与绝对加速度**都是从静止参照系来观测一个在转动参照系中质点P的速度与加速度的，如果从转动参照系中来看，只能看到相对速度与相对加速度。

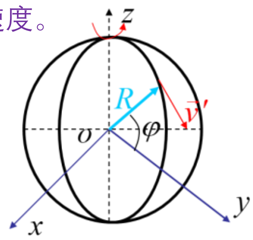


地球加速度 如果S'系以匀角速转动，**$\vec{\omega}$是一恒矢量**(量值和方向都不变)以OB表示之，故 $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$

则：$\boldsymbol{\vec{a}_t = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -\omega^2\vec{R}}$ 　**在此情况下，加速度简化为：**$\boldsymbol{\vec{a} = \vec{a}' - \omega^2\vec{R} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'}$

例题 1. 在地球上北纬度为φ处，一辆汽车以匀速率v_r沿经线自北向南运动，地球半径为R，绕地轴的自转角速度为ω。不考虑地轴在空中的平移，试求汽车的绝对速度和绝对加速度。





$\vec{v}' = v_r\sin\varphi\,\vec{\jmath} - v_r\cos\varphi\,\vec{k}$ 　　$\vec{R} = R\cos\varphi\,\vec{\jmath} + R\sin\varphi\,\vec{k}$

$\vec{v}_e = \vec{\omega}\times\vec{R} = \omega\vec{k}\times(R\cos\varphi\,j + R\sin\varphi\,\vec{k}) = -R\omega\cos\varphi\,\vec{\imath}$

则有：$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e = -R\omega\cos\varphi\,\vec{\imath} + v_r\sin\varphi\,\vec{\jmath} - v_r\cos\varphi\,\vec{k}$

考虑到：$\vec{a} = \vec{a}' - \omega^2\vec{R} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'$，有相对加速度 $\vec{a}' = -\frac{v^2r}{R}\cos\varphi\vec{\jmath} - \frac{v^2r}{R}\sin\varphi\vec{k}$

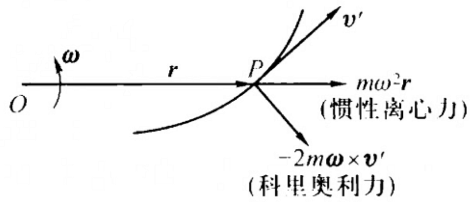
牵连 $\vec{a}_t = -\omega^2\vec{R}' = -\omega^2R\cos\varphi\,\vec{\jmath}$ 　　科氏 $\vec{a}_c = 2\omega\vec{k}\times(v_r\sin\varphi\,\vec{\jmath} - v_r\cos\varphi\,\vec{k}) = -2\omega v_r\sin\varphi\,\vec{\imath}$

最终：$\vec{a} = -2\omega v_r\sin\,\varphi\vec{\imath} - \left(\frac{v_r^2}{R} + R\omega^2\right)\cos\varphi\,\vec{\jmath} - \frac{v_r^2}{R}\sin\varphi\,\vec{k}$

一般扩展 平动与转动同时存在的非惯性系：对于更一般的情况，即S'系的原点O'不与S系的原点O重合，且O'相对O的速度为$\vec{v}_0$，加速度为$\vec{a}_0$，则：$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}'$

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'$ 　　式中$\vec{r}'$为质点相对O'的位矢。

4.3 转动参考系中质点动力学方程



4.3.1 平面转动参照系

动力学方程 相对平面转动参照系运动的质点，它的绝对加速度为：$\vec{a} = \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} - \omega^2\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'$

于是：$\vec{a}' = \vec{a} - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \omega^2\vec{r} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}'$ 　即 $\boldsymbol{m\vec{a}' = \vec{F} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + m\omega^2\vec{r} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'}$

对平面转动参照系来讲，如果**添上三种惯性力**：$-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ 　$m\omega^2\vec{r}$ 　$-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

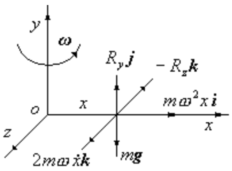
则牛顿运动定律对S'系在形式上就仍然成立。

物理意义 **惯性力** $\boldsymbol{-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}$ 　由于S'系作变角速转动所引起的，如果转动是匀速的，则此项惯性力为零。

惯性离心力 $\boldsymbol{m\omega^2\vec{r}}$ 　由于S'系的转动所引起的，惯性离心力的量值和$\boldsymbol{\omega}$平方及质点离开坐标原点$\boldsymbol{O}$的距离成正比，它的方向自坐标原点$\boldsymbol{O}$沿矢径向外。

科里奥利力 $\boldsymbol{-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'}$

例题 1. 在一光滑水平直管中，有一质量为m的小球，此管以恒定角速度ω绕通过管子一端的竖直轴转动，如果起始时，球距转动轴的距离为a，球相对于管子的速度为零，求小球沿管的运动规律及管对小球的约束反作用力。



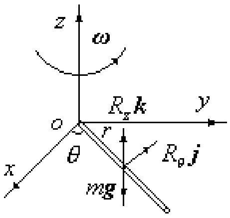
① 选取非惯性参照系,如图建立坐标系$O-xyz$,小球受力分析所示,由平面转动参照系的动力学方程得

$m\vec{a}'=\vec{F}+m\omega^2\vec{r}-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$ 小球运动微分方程的分量形式为: $\begin{cases} m\ddot{x}=m\omega^2x & (1)\\ m\ddot{y}=R_y-mg=0 & (2)\\ m\ddot{z}=2m\omega\dot{x}-R_z=0 & (3)\end{cases}$

(1)式的通解: $x=Ae^{\omega t}+Be^{-\omega t}$ 利用初始条件: $t=0\quad x=a\quad \dot{x}=0\Rightarrow A=B=\frac{a}{2}$

故小球沿管的运动规律为: $x=\frac{a}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})=a\mathrm{ch}(\omega t)$ 由(2)(3)得管对小球的约束反作用力为:

$R_y=mg\qquad R_z=2m\omega\dot{x}=2m\omega^2\frac{a}{2}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})=2ma\omega^2\mathrm{sh}(\omega t)$



② 选用惯性参照系,建立柱坐标系,小球受力分析如图所示,运动微分方程为: $\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r=0\\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=R_\theta\\ m\ddot{z}=R_z-mg=0\end{cases}$

因为: $\dot{\theta}=\omega=$常数, 所以$\ddot{\theta}=0$, 则上式简化为: $\begin{cases} m\ddot{r}=mr\omega^2\\ 2m\omega\dot{r}=R_\theta\\ R_z=mg\end{cases}$ 结果与选用惯性系完全相同。

4.3.2 空间转动参照系

绝对加速度 当S'系的原点与S系的原点O重合, 且S'系绕O点以角速度$\vec{\omega}$转动, $\vec{\omega}$不一定是恒矢量, 则质点对S系的绝对加速度为: $\vec{a}=\vec{a}'+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})+2\vec{\omega}\times\vec{v}'=\vec{a}'+\vec{a}_t+\vec{a}_c$

于是: $m\vec{a}'=\vec{F}-\boldsymbol{m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}-\boldsymbol{m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}-\boldsymbol{2m\vec{\omega}\times\vec{v}'}$ 或者 $m\vec{a}'=\vec{F}-\boldsymbol{m\vec{a}_t}-\boldsymbol{m\vec{a}_c}$

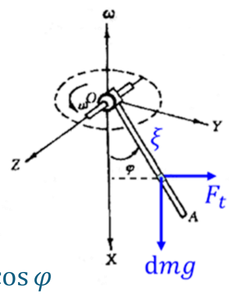
4.3.3 相对平衡

相对平衡 如果质点P相对于S'系不动, 则 $\vec{v}'=0\quad \vec{a}'=0\quad \vec{a}_c=0$, 有相对动力学方程: $m\vec{a}'=\vec{F}-m\vec{a}_t-m\vec{a}_c$

得: $\vec{F}-m\vec{a}_t=0$ 即当质点在**非惯性系**中处于平衡状态时, **主动力、约束反力**和由牵连运动而引起的**惯性力**的**矢量和等于零**, 我们通常把这种平衡叫做**相对平衡**。

在行驶的火车中的观察者，看悬挂在车厢中的小球，就是一个相对平衡问题。

例题 1. 长为L质量为M的细杆OA可在oxy平面内绕水平轴oz自由摆动, 而oz轴又绕竖直轴ox轴以ω匀速转动。求摆的微振动周期。



建立随oz轴一起转动的参考系S', 则S'系角速度为 $\vec{\omega}=-\omega\vec{\imath}$, OA为复摆 $I_{zz}\ddot{\varphi}=M_z$

考虑杆上任意质点dm, 受到的外力有重力 $\mathrm{d}\vec{G}=\mathrm{dm}\,g\vec{\imath}$ 和惯性力

$\mathrm{d}\vec{F}_{惯}=\mathrm{dm}\,\omega^2\vec{R}-2\mathrm{dm}\,\vec{\omega}\times\vec{v}'$ $\vec{\omega}\times\vec{v}'$沿$-z$方向, 对$M_z$无贡献。根据右手定则,

离心力贡献为正 $M_{惯}=\int\xi\cos\varphi\cdot\mathrm{dm}\,\omega^2R=\omega^2\int_0^l\xi^2\sin\varphi\cos\varphi\,\rho\mathrm{d}\xi=\frac{1}{3}ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi$

重力对oz轴的力矩 $Mg=-\frac{1}{2}Mgl\sin\varphi$ 根据角动量定理: $I_{zz}\ddot{\varphi}=M_z$

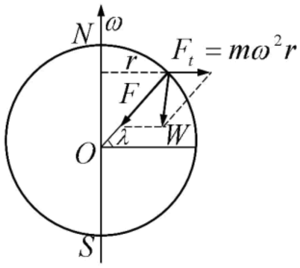
$\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\varphi}=\frac{1}{3}Ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi-\frac{1}{2}Mgl\sin\varphi$ 对于微振动, $\sin\varphi\simeq\varphi$, $\cos\varphi\simeq1$, 代入上式得:

$\ddot{\varphi}+\left(\frac{3g}{2l}-\omega^2\right)\varphi=0\ \therefore\omega_0^2=\frac{3g-2\omega^2l}{2l}$, $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g-2\omega^2l}}$

上解仅对ω较小的时候, 即$\omega^2<\frac{3g}{2l}$时成立。若ω很大, $\omega^2=\frac{3g}{2l}$ 时, 回复力正比于φ3

$\omega^2>3g/2l$ 时, 平衡位置发生偏移。

4.4 地球自转产生的动力学效应



4.4.1 牵连惯性力

引入 考虑地球绕地轴自转时，可认为它的角速度是沿着地轴的一个恒矢量，即$\dot{\vec{\omega}} = 0$，因而只需考虑离轴惯性力和科里奥利力所产生的影响。如果质点相对于地球是静止的，即$\vec{v}' = 0$，则只需考虑离轴惯性力的影响。

惯性力 $\boldsymbol{\vec{W} = \vec{F}_{\text{引力}} + m\omega^2\vec{r}}$ $\qquad W = \sqrt{F_{\text{引}}^2 + F_t^2 - 2FF_t\cos\lambda} \approx F_{\text{引}} - F_t\cos\lambda = F_{\text{引}} - m\omega^2 R\cos^2\lambda$

物理图像 由于离轴惯性力的作用，使**重力W常小于引力F**，重力随着**纬度λ**发生变化，在纬度越小的地方，重力越小，只有在两极的地方，重力和引力才相等。另外，除两极和赤道外重力的方向也不和引力的方向一致，引力的作用线通过地球的球心，而重力的作用线一般并不通过地球的球心。

性质 ① 在赤道上：$\lambda = 0$, $\vec{F}_t = m\omega^2\vec{R}$最大，重力$W$最小，指向地心

② $\lambda\uparrow, F_t\downarrow$，重力$W\uparrow$，方向不指向地心

③ 在南北极：$\lambda = \pm\pi/2, F_t = 0$，重力$W$最大 $=F$，且指向地心。

4.4.2 科里奥利力

引入 离轴惯性力只是一个小量，一般只考虑科里奥利力的影响。由于离轴惯性力的作用，重力的量值与引力有差别，重力的方向也随着纬度变化，**但是这种差别和变化都比较小**，所以在研究质点相对于地球的运动时，可以只考虑科里奥利力的效应。

微分方程 $\boldsymbol{m\vec{a}' = \vec{F} - mg\hat{k} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'}$ $\quad\vec{F}$代表重力以外的作用力

$$\vec{\omega} = -\omega\cos\lambda\,\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + \omega\sin\lambda\,\hat{k} \qquad \vec{\omega}\times\vec{v}' = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$= -\omega\dot{y}\sin\lambda\,\hat{\imath} + (\omega\dot{x}\sin\lambda + \omega\dot{z}\cos\lambda)\hat{\jmath} - \omega\dot{y}\cos\lambda\,\hat{k}$ 在三个方向上都具有分量

于是质点P在三个坐标轴方向的**运动微分方程**为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{m\ddot{x} = F_x + 2m\omega\dot{y}\sin\lambda} \\ \boldsymbol{m\ddot{y} = F_y - 2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda)} \\ \boldsymbol{m\ddot{z} = F_z - mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda} \end{cases}$$

利用上式可以定性或定量地研究科里奥利力的影响

4.4.3 地球上的自然现象

4.4.3.1 落体偏东问题

模型假设 质点从有限的高度h自由下落（初始和地球同样的角速度）认为g值不变，且重力以外的力$F_x = F_y = F_z = 0$，则动力学方程变为。 动力学方程

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\lambda \\ \ddot{y} = -2\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y}\cos\lambda \end{cases} \quad ①$$

初始条件 $t = 0$ $\quad\begin{cases} x = y = 0 \quad z = h \\ \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \end{cases}$

方程求解 对①式中每个量做积分（三角函数纬度不变化不积分）

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\omega y\sin\lambda \\ \dot{y} = -2\omega[x\sin\lambda + (z-h)\cos\lambda] \\ \dot{z} = -gt + 2\omega y\cos\lambda \end{cases} \quad ②$$

将②代入①，得到位置和加速度的函数

$$\begin{cases} \ddot{x} = -4\omega^2\sin\lambda\,[x\sin\lambda + (z-h)\cos\lambda] \\ \ddot{y} = 2gt\omega\cos\lambda - 4y\omega^2 \\ \ddot{z} = -g - 4\omega^2\cos\lambda\,[x\sin\lambda + (z-h)\cos\lambda] \end{cases} \quad ③$$

因为$\omega(7.3\times10^{-5}\mathrm{rad/s})$很小，忽略$\omega^2$项得：$\begin{cases}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=2gt\omega\cos\lambda\\ \ddot{z}=-g\end{cases}$ ④　利用初始条件对④式积分两次得：

$$\begin{cases}x=0\\ y=\frac{1}{3}gt^3\omega\cos\lambda\\ z=h-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

由上式看出：在赤道上$\lambda=0$ 偏东的数值最为显著，两极不偏转。

轨道方程　半立方抛物线：消去 t 得轨道方程为 $y^2=\frac{8}{9}\frac{\omega^2\cos^2\lambda}{g}(h-z)^3$

偏东数值　$y=\frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\lambda$

4.4.3.2 信风

信风　在地球上，若忽略自转，理论上热带部分的空气因热上升，并在高空形成高压向两极推进，而两极附近的空气因冷下降，并在地面附近形成高压向赤道附近推进，形成了一种环流，彼此交易，故称为**信风**。由于受到科里奥利力的作用，南北向的气流发生了东西向的偏转，并形成**三圈环流**。

全球形势　在北半球，地面附近自北向南的气流，有朝西的偏向，成为**东北贸易风**。$\vec{F}_c=-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

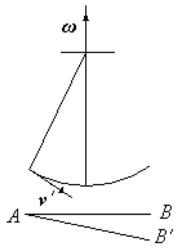
在南半球，地面附近自南向北的气流，也有朝西的偏向，而成为**东南贸易风**。
大气上层的反贸易风，在北半球为西南贸易风，在南半球则为**西北贸易风**。

4.4.3.3 傅科摆

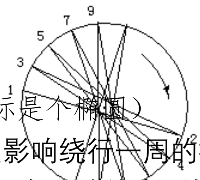
概述　一种可以**显示地球自转**、摆线很长的单摆。1851 年傅科在巴黎首先制成，他第一次试验时，摆长为 67 米，摆锤是质量为 28 公斤、直径为 30 厘米的铁球。

装置要求　① 由于地球转动的比较缓慢（相对摆的周期而言），需要一个比较长的摆线才能显示出轨迹的差异。
② 因为空气阻力的影响，这个系统必须拥有足够的 机械能（一旦摆开始运动，就不能给它增加能量）。
③ 悬挂摆线的地方必须允、许摆线在任意方向运动。

定性解释　考虑在地球北极有一单摆，**从地球上观察，因地球自转**，单摆除受重力作用外，**还受到惯性力的作用**，主要是科里奥利力的作用。



如图所示，当摆由左至右摆动时，摆受到的科里奥利力垂直纸面向外，摆球不能沿直线由A到B，而是偏离AB，由A沿曲线运动到B'。当摆由右向左摆动时，摆受到的科里奥利力垂直纸面向里，摆球不能沿直线由B'到C，而是偏离$B'C$，由B'沿曲线运动到C'，这样运动下去，摆球运动轨迹为如图所示的形状。



定量解释　可以将傅科摆看作**简谐振动**与**绕圆盘中心轴线的圆周运动**的叠加（实际是个椭圆）
① 简谐振动振幅在合理范围内，频率不会影响圆周运动的角速度，只影响绕行一周的振动次数
② 惯性系中观测的摆球在圆盘轴线方向实际角速度为0，地球自转在圆盘所处纬度φ处角速度轴向分量为$\omega\sin\varphi$
③ 地球参考系中观测到的摆球圆周运动角速度为$-\omega\sin\varphi$，即相对地球运动的角速度。

周期　$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{\sin\varphi}\simeq\frac{24}{\sin\varphi}h}$