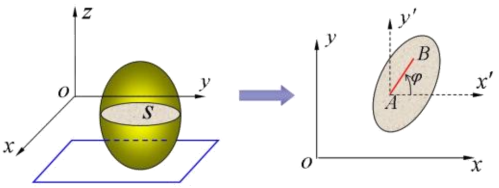
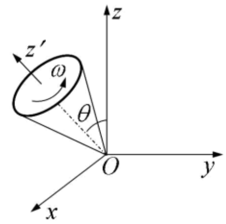
第三章 刚体力学



平面平行运动



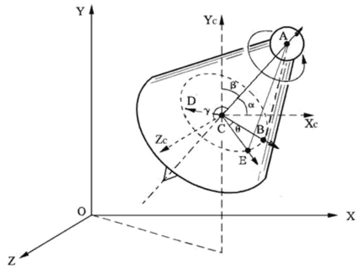
定点转动

3.1 刚体运动的分析

刚体　　形状和大小都不变的物体，**任意两质点之间的距离保持不变**的质点系。

3.1.1 刚体的自由度

自由度　　描述刚体位置的独立变量的个数。一般情况下，需要**六个独立变量**可以确定刚体位置。



一般运动

平动　　**自由度为三**，分别对应x,y,z三个方向。刚体在运动过程中，其上任意两点的连线始终保持平行，故可以用一个质点的运动来描述刚体的平动。刚体平动时各点的速度和加速度相同。

定轴转动　　**自由度为一**。刚体上所有质点都绕同一直线作圆周运动，这条直线称为**转轴**。

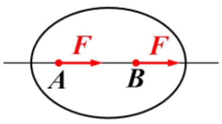
平面平行　　**自由度为三**。分解为某一平面内任意一点的**平动**和**绕通过此点且垂直于固定平面**的固定轴的转动。

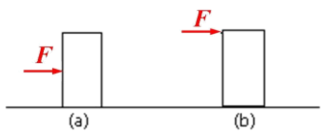
定点转动　　**自由度为三**。只有一点固定不动，刚体围绕过这点的某一瞬时轴转动。两个角度(φ,θ)决定转轴取向，一个参数描述绕轴转动的情况。

一般运动　　**确定质心位置**三个坐标+**确定转轴空间取向**两个坐标+**确定相对转轴转过的角度**一个坐标

即**质心的平动+对质心的定点转动**

3. 2 力系的简化和刚体的平衡





作用线的位置不能随意移动

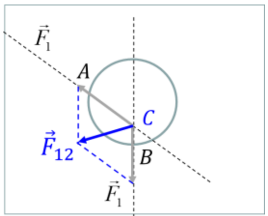
3.2.1 力的可传性原理

3.2.1.1 可传性原理

可传性原理　　作用在刚体上的力**可沿作用线任意移动**，施力点虽然改变，但**对刚体的作用效果不变**

滑移矢量　　作用在刚体上的力所产生的力学效果，全靠**力的量值、方向、作用线的位置**，而与力的**作用点在作用线上的位置无关**。所以，在刚体力学中，力被称为**滑移矢量**。

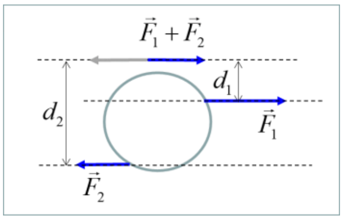
3.2.1.2 力的简化



基本模型　　在**平面上**的作用

非平行力　　作用于A点的力$\vec{F}_1$与作用于B点的力$\vec{F}_2$ $\Leftrightarrow$ 作用于**两力作用线交点C的合力$\vec{F}_{12}$**

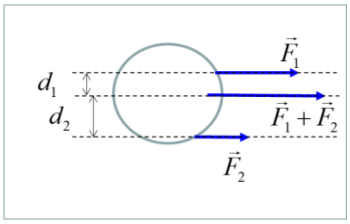
对于三个及以上力，递归反复操作，直至两个力。



平行力　　合力作用线满足：$F_1 d_1 = F_2 d_2$

当此合力的反作用力作用于刚体，刚体满足力平衡和力矩平衡

两力**同方向**，合力在**中间**；两力**反方向**，合力在**大力外侧**。

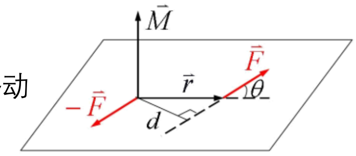


3.2.2 力偶 力偶矩

力偶　　作用于刚体上**大小相等、方向相反、不共线**上的两个力组成的力系。

力偶矩　　$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad M = rF\sin\theta = Fd$

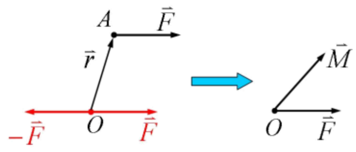
其是一个**自由矢量**，可在力偶作用面上自由移动



力偶臂　　力偶的两力之间的**垂直距离d**

力偶作用面　**力偶所在的平面**

3.2.3 空间力系的简化



目的　找到一个与**原力系效果相同**而形式简单的**等效力系**。

定理　力的平行移动定理：$\overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{OA}} \times \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}$

可将作用在刚体上**任一点A的力$\vec{F}$**，**平行移动**到另一点O，同时，**必须添加一力偶**，这个力偶的**力偶矩**

$\overline{\boldsymbol{M}}$等于原力$\vec{F}$对$O$点的力矩。

简化效果　作用在刚体上的任何力系，总可以简化为**通过某定点O的一个单力**和**一个力偶矩为$\overline{M}$的力矩**。

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

O点称为**简化中心**，**力的矢量和**称为**主矢**，**力偶矩的矢量和**叫做对简化中心的**主矩**。

简化中心　O点可以任取，但通常选择**质心C**为简化中心。

此时主矢F是发生平动的原因，主矩是使刚体绕通过质心C的轴线转动的原因。

注意：力系的主矢与简化中心无关，主矩与简化中心位置有关

案例分析　1. 如图 3-14 所示，等边三角形板 ABC，边长为 l，沿其边缘作用力分别为 F_1、F_2和 F_3，方向分别如图。且$|F_1| = |F_2| = |F_3| = F$。求两种情况下这三个力的合成结果。

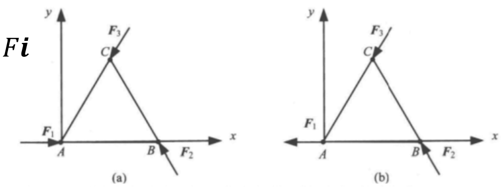
① 由矢量合成可得主矢 $\vec{R} = 0$ 取 A 点为简化中心

$\mathrm{F_1}$和$\mathrm{F_3}$通过 A 点,力矩为零,所以,仅有$\mathrm{F_2}$对 A 点的力矩

$M_A = r_{AB} \times F_2 = lF \sin 120^\circ \vec{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} lF\vec{k}$　　可见这三个力合成的结果是，主矢为 $\mathrm{R} = 0$,主矩为$\mathrm{M_A}$

即该力系的简化结果是一合力偶，且与简化中心的选择无关。

② 由题意，这三个力的合成结果:主矢$R = F_1 + F_2 + F_3 = -2F\boldsymbol{i}$



若取 A 点为简化中心，得主矩$M_A = r_{AB} \times F_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} lF\vec{k}$

若取 C 点为简化中心，得主矩$M_C = r_{CA} \times F_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} lF\vec{k}$

该力系的最终简化结果：因为$M_A \cdot R = 0$，所以该力系最终可简化为作用于 P点的一个合力，

且该简化中心 P 位置为:$\boldsymbol{r}_{AP} = \frac{\boldsymbol{F}_A \times \boldsymbol{M}_A}{F_A^2} = \frac{\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{M}_A}{R^2} = \frac{\sqrt{3}l}{4} \vec{j}$

3.2.4 刚体平衡方程

平衡方程　空间一般力系平衡的充要条件：六个方程 $\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \quad \sum F_{iy} = 0 \quad \sum F_{iz} = 0 \\ \sum M_{ix} = 0 \quad \sum M_{iy} = 0 \quad \sum M_{iz} = 0 \end{cases}$

对**共面力系**，所有力在xy平面内，则**平衡方程**可变为：$\boldsymbol{\Sigma F_{ix} = 0}$　　$\boldsymbol{\Sigma F_{iy} = 0}$　　$\boldsymbol{\Sigma M_{iz} = 0}$

特殊情况　① **平面汇交力系**：所有力作用线汇交于一点：$\Sigma F_{ix} = 0$，$\Sigma F_{iy} = 0$

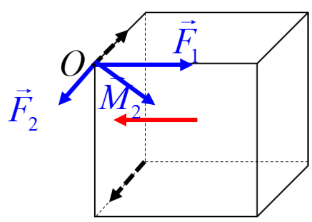
② **平面平行力系**：诸力与y轴平行：$\Sigma F_{iy} = 0$，$\Sigma M_{iz} = 0$

③ 若刚体仅受三个非平行力的作用而平衡，则此三力必然交于一点，否则力矩不能平衡

证明　使用反证法：若三力非平行，则两力要么**平面相交**、要么**空间中非平行非相交**。

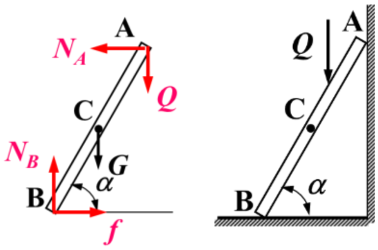
① 如果两力相交，取交点O为简化中心，F_1, F_2力矩和为0，如果F_3作用线不穿过O，则力矩不为零，无法平衡。

② 如果非平行非相交，总是可以找到一个立方体表示两力，可见F_3逆着合力的方向，与M_2并不垂直，其力偶无法抵消，无法平衡。



例题

1. 梯子AB长L,重$G=100N$，靠在光滑墙上并和水平地面成$\alpha=75°$角，地面与梯子间的静摩擦因数$\mu=0.3$，问重$Q=700N$的人能否爬到梯子顶端而不致使梯子滑倒？并求地面对梯子的摩擦力。假定梯子的重心在中点C。



取梯子为研究对象，设人在顶端梯子能平衡，受力如图。平衡方程：

$\sum F_x=0\ \Rightarrow\ f-N_A=0$　　　　$\sum F_y=0\ \Rightarrow\ N_B-G-Q=0$

$\sum M_A=0\ \ \Rightarrow\ \ fL\sin\alpha+G\frac{L}{2}\cos\alpha-N_BL\cos\alpha=0$

解得：$f=N_A=\frac{G+2Q}{2\sin\alpha}\cos\alpha=201\text{N}$

$N_B=G+Q=800\text{N}$　　　$f_{max}=\mu N_B=240\text{N}>201\text{N}$

所以人爬到梯子顶端能保持平衡而不致滑倒。

地面与梯子临界角：$f=\frac{G+2Q}{2\sin\alpha}\cos\alpha\le\mu N_B$　　　$\tan\alpha\ge\frac{G+2Q}{2\mu(G+Q)}=3.13$　　　$\alpha\ge72.3°$

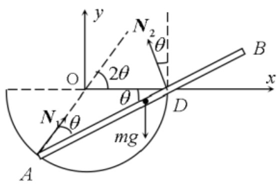
2. 半径为r的光滑半球形碗，固定在水平面上，一均质细棒斜靠在碗缘，一端在碗内，一端在碗外，在碗内的长度为c，试证棒的全长为：$\frac{4(c^2-2r^2)}{c}$

设棒长为l，质量为m，其受力分析如图所示，据平衡方程得：

$\sum F_x=0\Rightarrow N_1\cos2\theta-N_2\sin\theta=0$　　　$\sum F_y=0\Rightarrow N_1\sin2\theta+N_2\cos\theta-mg=0$

$\sum M_A=0\Rightarrow N_2C-mg\frac{l}{2}\cdot\cos\theta=0$　　　由(1)得:$N_1=\frac{N_2\sin\theta}{\cos2\theta}$

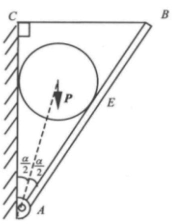
将N_1代入(2)得:$N_2=\frac{mg}{\tan2\theta\cdot\sin\theta+\cos\theta}$　　　将N_2代入(3)得:$l=\frac{2C}{\cos\theta(\tan2\theta\cdot\sin\theta+\cos\theta)}$



$\cos\theta=\frac{c/2}{r}=\frac{c}{2r}$　　　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{4r^2-c^2}}{2r}$　　　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{4r^2-c^2}}{c}$

$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{c\sqrt{4r^2-c^2}}{c^2-2r^2}$　　　$l=\frac{2c}{\cos\theta(\tan2\theta\cdot\sin\theta+\cos\theta)}=\frac{4(c^2-2r^2)}{c}$

3. 重力为P 的匀质圆球半径为r,放在墙和 AB 杆之间。杆的 A 端光滑铰支，B 端用水平绳 BC 拉住杆长为 l，其与墙的交角为 α。如不计杆重,求绳的拉力T的大小。并问 α 为何值时,绳的拉力最小。



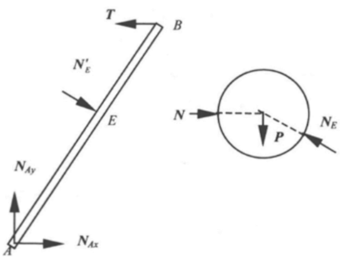
(a)

① 杆 AB 受力分析如图 (b)所示 由$\sum M_A=0\Rightarrow Tl\cos\alpha-N_E\overline{AE}=0$ 即$Tl\cos\alpha-N_Er\cdot\cot\frac{\alpha}{2}=0$

球受力分析如图(c)所示　　由$R_y=0\Rightarrow N_E\sin\alpha-P=0$　　得 $N_E=\frac{P}{\sin\alpha}$

故$T=\frac{N_Er\cot\frac{\alpha}{2}}{l\cos\alpha}=\frac{Pr}{2l\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$

② 令$\frac{dT}{d\alpha}=\frac{Pr}{2l}\frac{-\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right]}{\sin^4\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha}=0$，当$\alpha=60°$时，$T=T_{min}=\frac{4Pr}{l}$

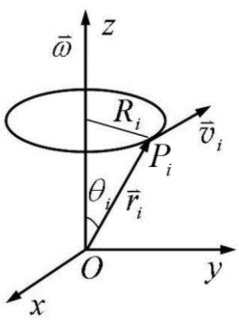


(b)　　(c)

3.3 刚体的定轴转动

自由度　　只有一个　　　　**运动方程**　　$\varphi=\varphi(t)$

角速度矢量　$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}=\dot{\varphi}\vec{k}$　　　**角加速度矢量**：$\vec{\alpha}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\ddot{\varphi}\vec{k}$　各点角速度和角加速度相同。



3.3.1 定轴转动刚体中任一点的速度和加速度

线速度　　某一时刻，任一点的线速度：　$\vec{v}_i=\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}_i$　　　$v_i=\omega r_i\sin\theta_i=\omega R_i$

加速度　　任一点的加速度：　$\vec{a}_i=\frac{d\vec{v}_i}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_i+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_i+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$

其中：切向加速度：$a_{i\tau}=\dot{\omega}r_i\sin\theta_i=R_i\alpha$　　法向加速度：$a_{in}=R_i\omega^2$

在定轴转动中，角加速度的方向与角速度$\vec{\omega}$相同或相反，沿着同一条转动轴线。

3.3.2 定轴转动的转动惯量

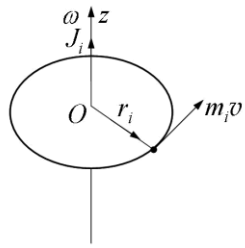
转动惯量　$\boldsymbol{I_z=\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2}$　　连续分布：$I_z=\int r^2dm$

代表物体在转动时惯性的量度，取决于**物体的形状和转动轴的位置**。

回转半径　质量按一定规律分布的刚体，在转动中等效于集中在某一点上的一个质点的质量，此点离某轴线的垂直距离为k，称为回转半径 $I_z=mk^2\Rightarrow \boldsymbol{k=\sqrt{\frac{I_z}{m}}}$

平行轴定理　$\boldsymbol{I=I_c+md^2}$　　对两条平行轴而言，如果其中有一条通过物体的质心，则物体**对另一轴线的**转动惯量，等于对通过质心的平行轴的转动惯量，加上物体的质量与两轴间垂直距离平方的乘积。

3.3.3 定轴转动的动力学问题



角动量　整个刚体对z轴的角动量：　$\boldsymbol{J_z=I_z\omega}$

有 $\vec{J}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i)$　　由于 $\vec{v}_i=\vec{\omega}\times\vec{r}_i$

得到 $\vec{\boldsymbol{J}}=\sum_{i=1}^{n}m_i[\vec{\boldsymbol{r}}_i\times(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{r}}_i)]=(\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2)\omega\vec{k}=I_z\omega\vec{k}$

动力学方程　$\boldsymbol{M_z=I_z\dot{\omega}=I_z\ddot{\varphi}}$　刚体在外力作用下，绕固定轴z轴转动，由对固定轴的角动量定理得：

$\frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t}=M_z$　则可以得到定轴转动的动力学方程。

机械能守恒　$\boldsymbol{\frac{1}{2}I_{zz}\omega^2+V=E}$　刚体定轴转动时，如果只有保守力做功，机械能守恒。