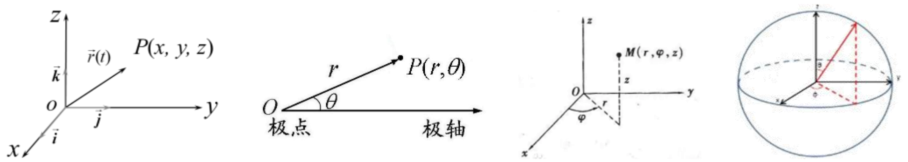
第一章 质点力学

1.1 运动的描述方法



直角坐标　　极坐标　　柱坐标　　球坐标

1.1.1 参照系与坐标系

参照系　为了确定物体的**位置**和描述其**运动**而选作标准的另一物体（默认地球）

坐标系　为了定量地表示物体相对于**参照系**的位置而选定的变数(**坐标**)的组合。

常见有：直角坐标系、平面极坐标、自然坐标系、柱坐标、球坐标

笛卡尔坐标系(仿射坐标系)大部分为直角坐标，也有斜角坐标系用于晶格计算中。

直角坐标系　遵照**右手螺旋**（四指由x指向y，大拇即指z，即$x \times y = z$）

极坐标系　由极轴与极点构造，表述为$P(r,\theta)$

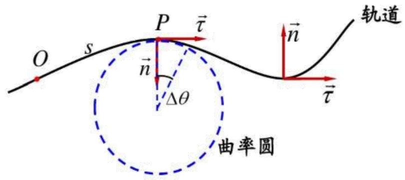
柱坐标系　与极坐标系高度相似，表述为$P(r,\varphi,z)$

球坐标系　$P(r,\theta,\varphi)$ θ为天顶角 计算中运用的并不多，计算十分复杂

例如南京北纬32，东经119，海拔$30m$，$(r+30,58,119)$

自然坐标系　沿质点运动轨迹建立的坐标系：设定原点与路程，点即唯一确定。

变量：切向$\vec{\tau}$、法向$\vec{n}$



1.1.2 运动方程与轨道

运动方程　确定点的**位置随时间的变化**规律的数学表达式。

轨道　质点在**空间**所描绘的**连续曲线**（或称为路径），与时间无关，由运动方程消去t得到。

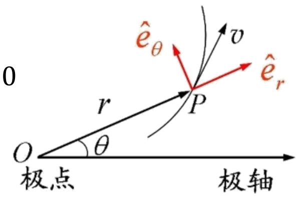
描述方法：矢量表示法、坐标表示法、自然表示法

矢量表示　也称为**几何表示**，动点位置由**位矢**$\vec{r}$表示。$\vec{r}$以坐标原点O为始点，以动点P为终点。

运动方程：$\vec{r} = \vec{r}(t)$　称其为P点相对于原点O的位矢，当$\vec{r}$变动时，其端点描绘的曲线便是轨道。

坐标表示　也称为**投影表示**，可以用各类坐标系表示。

直角系　位矢：$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$　运动方程：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$　轨道：$F(x,y,z) = 0$

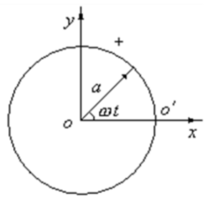


极坐标　位矢：$\vec{r} = r\hat{e}_r$　运动方程：$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$

自然表示　也称为**内禀表示**，用这种表示方法时，**轨道应为已知**。假定s表示质点沿轨道运动在t内所经**弧长**

运动方程：$s = s(t)$ 表示为路程与时间的关系。由该方程无法直接得到轨道方程。

例题　1. 一质点作匀速圆周运动，半径为a，角速度为ω，运动方程为？



① 选取直角坐标系$O-xy$即得：$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = a$ 得到轨道

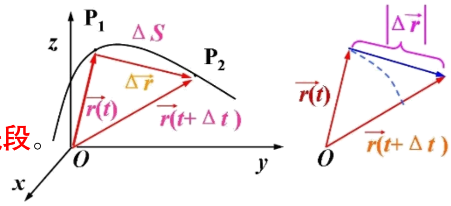
② 极坐标：$\begin{cases} r = a \\ \theta = \omega t \end{cases} \Rightarrow r = a$

③ 自然表示：　以o'点为弧长起点，逆时针方向为正：$s = a\omega t$

注意　运动方程中若有变量与时间无关，则轨道方程中该变量**不一定**不存在，

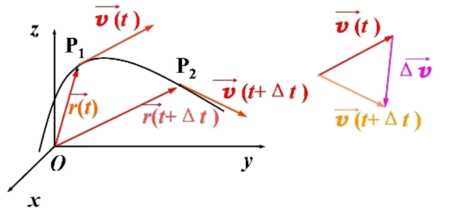
例如：$\begin{cases} x = 1 \\ y = \cos\omega t_{\text{有边界限制}} \end{cases}$　与　$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 2z \\ x = 1 \end{cases}$

1.1.3 位移、速度和加速度



位移 质点在一段时间内位置的改变，即从始位置指向末位置的**有向线段**。
位移只取决于始末位置，与通过路程无关

速度 即瞬时速度 $\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}}$ **位矢的时间变化率** 注意：$\dot{r}$ 特指对时间的导数



速率 $v=|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s}$ **路程的时间变化率**

加速度 $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}$ **速度的时间变化率**

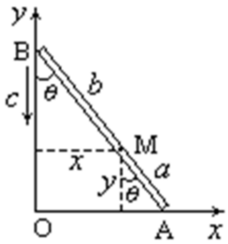
1.2 速度与加速度的分量表达式

1.2.1 直角坐标系

位矢 $\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$

速度 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{\imath}+\frac{dy}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\dot{x}\vec{\imath}+\dot{y}\vec{\jmath}+\dot{z}\vec{k}$ **速率** $v=|\vec{v}|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$

加速度 $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec{\imath}+\frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}=\ddot{x}\vec{\imath}+\ddot{y}\vec{\jmath}+\ddot{z}\vec{k}$ $a=|\vec{a}|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$



例题 1. 求椭圆规尺上M点的轨道方程、速度和加速度，已知B以匀速c运动
设有$MA=a, MB=b, \angle OBA=\theta$

① M点坐标为：$\begin{cases}x=b\sin\theta\\ y=a\cos\theta\end{cases}$ ② 消去参数θ得**轨道方程**：$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 是个椭圆

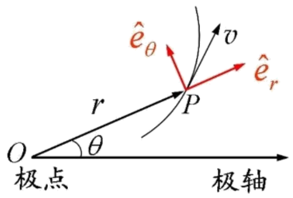
③ M点速度分量：$\begin{cases}\dot{x}=b\cos\theta\ \dot{\theta}\\ \dot{y}=-a\sin\theta\,\dot{\theta}\end{cases}$ 又有初始条件：$\begin{cases}x_B=0\\ \dot{x}_B=0\end{cases}$ $\begin{cases}y_B=(a+b)\cos\theta\\ \dot{y}_B=-(a+b)\sin\theta\,\dot{\theta}=-c\end{cases}$

④ 可解得：$\dot{\theta}=\frac{c}{(a+b)\sin\theta}$ 回代得**速度** $\dot{x}=\frac{bc\cos\theta}{(a+b)\sin\theta}=\frac{bc}{(a+b)}\cot\theta,\ \ \dot{y}=-\frac{ac\sin\theta}{(a+b)\sin\theta}=-\frac{ac}{(a+b)}$

$v_M=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\frac{c}{a+b}\sqrt{a^2+b^2\cot^2\theta}$ 理论力学中求出分量即可，无需求解方向，该步可略

⑤ 加速度 $\begin{cases}\ddot{x}=-\frac{bc}{(a+b)}\csc^2\theta\,\dot{\theta}=-\frac{bc}{(a+b)}\csc^2\theta\frac{c}{(a+b)\sin\theta}=-\frac{bc^2}{(a+b)^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\\ \ddot{y}=0\quad \text{与题干强迫条件相关}\end{cases}$ $a_M=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\frac{b^4c^2}{(a+b)^2}\frac{1}{x^3}$

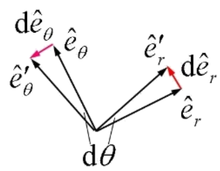
1.2.2 平面极坐标系



参量定义 **径向单位矢量$\hat{e}_r$** 为沿位矢$\vec{r}$的单位矢量
横向单位矢量$\hat{e}_\theta$ 为**垂直**位矢$\vec{r}$且指向**角增加方向**的单位矢量

位矢 $\vec{r}=r\,\hat{e}_r$

速度 $\vec{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\hat{e}_r)=\dot{r}\hat{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ 即 $\begin{cases}\text{径向速度 } v_r=\dot{r}\\ \text{横向速度 } v_\theta=r\dot{\theta}\end{cases}$



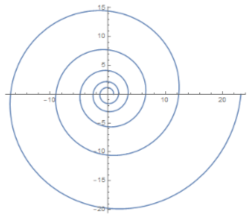
推导 $\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\hat{e}_\theta\\ \frac{\mathrm{d}\hat{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\hat{e}_r\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \vec{v}=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ 两者独立无关

加速度 $\begin{cases}a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 & \text{向心加速度，指向速度减小方向}\\ a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) & \text{科里奥利加速度}\end{cases}$ 径向运动会影响到横向的加速度

推导 $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\hat{e}_r)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\hat{e}_r)=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{e}_r+\dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}t}=\ddot{r}\hat{e}_r+\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{e}_\theta+r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta+r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta-r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$

例题 1. 某点运动方程为：$r=e^{ct}$ $\quad\theta=bt$ $\quad$试求其速度与加速度



① 对r微分：
$$\begin{aligned} r&=e^{ct} & \theta&=bt\\ \dot{r}&=ce^{ct}=cr & \dot{\theta}&=b\\ \ddot{r}&=c\dot{r}=c^2r & \ddot{\theta}&=0\end{aligned}$$

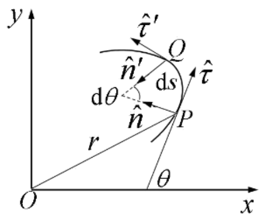
② 速度有：
$$v_r=\dot{r}=cr \qquad v_\theta=r\dot{\theta}=rb$$

③ 加速度有：
$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=c^2e^{ct}-rb^2=(c^2-b^2)r$$
$$a_\theta=\ r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=2bcr$$

可以看出，速度和加速度都和矢径$\vec{r}$成正比，是个螺旋线

1.2.3 自然坐标系

条件 仅考虑二维空间，质点沿**平面曲线**运动



参量定义

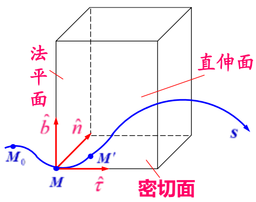
径向单位矢$\hat{\tau}$	为沿轨道切线并指向轨道**弧长增加**的方向上的单位矢量
法向单位矢$\hat{n}$	为沿轨道法线并指向曲线**凹侧**的单位矢量
夹角θ	为轨道前进的切线方向和x轴正向之间的夹角
曲率半径ρ	轨道曲率半径

速度 $\vec{v}=\frac{ds}{dt}\hat{\tau}=v\hat{\tau}$

加速度 $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\hat{\tau}+\frac{d\hat{\tau}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\boldsymbol{\frac{dv}{dt}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{n}=\ddot{s}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{n}}$ $\quad$ (发现有 $\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}\theta}=\hat{n}$ $\quad \frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}\theta}=-\hat{\tau}$)

切向加速度：$a_\tau=\frac{dv}{dt}$ 引起**速度大小**改变 $\qquad$ **法向加速度**：$\frac{v^2}{\rho}$ 引起**速度方向**改变

推广 对于**空间曲线**来讲，上述公式仍然适用。由微分几何学：a 恒位于轨道的**密切平面**内。
轨道的密切平面是**轨道的切线**和曲线上**无限接近于切点的另一个点**所确定的极限平面，亦即轨道上无限接近的两点的**两条切线**所确定的极限平面。



对空间曲线上的某点而言，$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\tau}$仍为切向加速度（在$\hat{\tau}$方向上），$\frac{v^2}{\rho}\hat{n}$为在密切平面内并和切线垂直的加速度分矢量，叫做加速度在主法线方向$\hat{n}$上的分矢量。至于另一条法线，即所谓副法线方向$\hat{b}$上加速度的分矢量**则为零**。