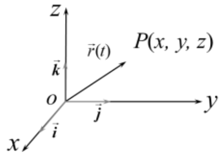
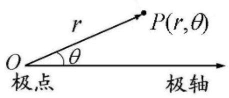
第一章 质点力学

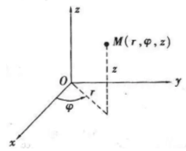
1.1 运动的描述方法

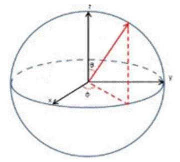


直角坐标



极坐标


柱坐标


球坐标

1.1.1 参照系与坐标系

参照系 为了确定物体的**位置**和描述其**运动**而选作标准的另一物体（默认地球）

坐标系 为了定量地表示物体相对于**参照系**的位置而选定的变数(**坐标**)的组合。

常见有：直角坐标系、平面极坐标、自然坐标系、柱坐标、球坐标

笛卡尔坐标系(仿射坐标系)大部分为直角坐标，也有斜角坐标系用于晶格计算中。

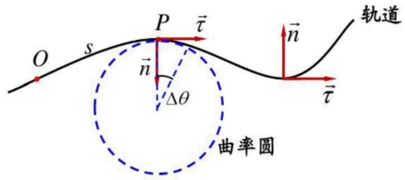
直角坐标系 遵照**右手螺旋**（四指由x指向y，大拇即指z，即$x \times y = z$）

极坐标系 由极轴与极点构造，表述为$P(r,\theta)$

柱坐标系 与极坐标系高度相似，表述为$P(r,\varphi,z)$

球坐标系 $P(r,\theta,\varphi)$ θ为天顶角 计算中运用的并不多，计算十分复杂

例如南京北纬32，东经119，海拔$30m$，$(r+30,58,119)$



自然坐标系 沿质点运动轨迹建立的坐标系：设定原点与路程，点即唯一确定。

变量：切向$\vec{\tau}$、法向$\vec{n}$

1.1.2 运动方程与轨道

运动方程 确定点的**位置随时间的变化**规律的数学表达式。

轨道 质点在**空间**所描绘的**连续曲线**（或称为路径），与时间无关，由运动方程消去t得到。

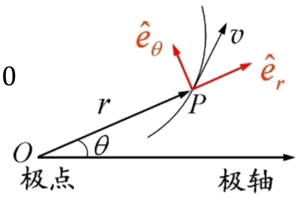
描述方法：矢量表示法、坐标表示法、自然表示法

矢量表示 也称为**几何表示**，动点位置由**位矢**$\vec{r}$表示。$\vec{r}$以坐标原点O为始点，以动点P为终点。

运动方程：$\vec{r}=\vec{r}(t)$ 称其为P点相对于原点O的位矢，当$\vec{r}$变动时，其端点描绘的曲线便是轨道。

坐标表示 也称为**投影表示**，可以用各类坐标系表示。

直角系 **位矢**：$\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ **运动方程**：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ **轨道**：$F(x,y,z)=0$

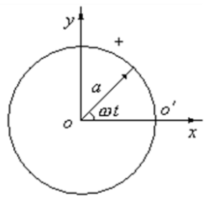


极坐标 **位矢**：$\vec{r}=r\hat{e}_r$ **运动方程**：$\begin{cases}r=r(t)\\\theta=\theta(t)\end{cases}$

自然表示 也称为**内禀表示**，用这种表示方法时，**轨道应为已知**。假定s表示质点沿轨道运动在t内所经**弧长**

运动方程：$s=s(t)$ 表示为路程与时间的关系。由该方程无法直接得到轨道方程。

例题 1. 一质点作匀速圆周运动，半径为a，角速度为ω，运动方程为?



① 选取直角坐标系$O-xy$即得：$\begin{cases}x=a\cos\omega t\\y=a\sin\omega t\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x^2+y^2=a$ 得到轨道

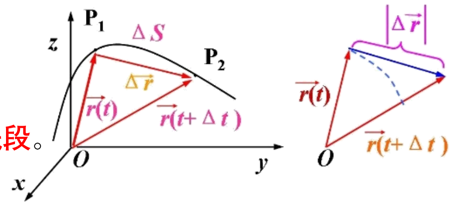
② 极坐标：$\begin{cases}r=a\\\theta=\omega t\end{cases}\Rightarrow r=a$

③ 自然表示：以o'点为弧长起点，逆时针方向为正：$s=a\omega t$

注意 运动方程中若有变量与时间无关，则轨道方程中该变量**不一定**不存在，

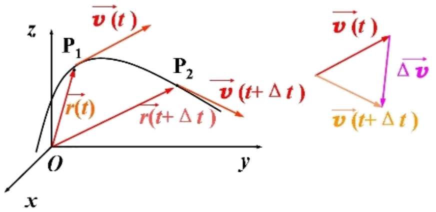
例如：$\begin{cases}x=1\\y=\cos\omega t_{有边界限制}\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x=1\\y=2t\\z=3t\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}3y=2z\\x=1\end{cases}$

1.1.3 位移、速度和加速度



位移 质点在一段时间内位置的改变，即从始位置指向末位置的**有向线段**。位移只取决于始末位置，与通过路程无关

速度 即瞬时速度 $\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}}$ **位矢的时间变化率** 注意：$\dot{r}$ 特指对时间的导数



速率 $v=|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s}$ **路程的时间变化率**

加速度 $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}$ **速度的时间变化率**

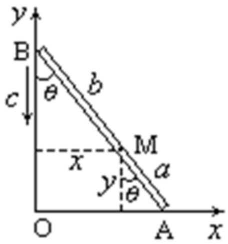
1.2 速度与加速度的分量表达式

1.2.1 直角坐标系

位矢 $\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$

速度 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{\imath}+\frac{dy}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\dot{x}\vec{\imath}+\dot{y}\vec{\jmath}+\dot{z}\vec{k}$ **速率** $v=|\vec{v}|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$

加速度 $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec{\imath}+\frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}=\ddot{x}\vec{\imath}+\ddot{y}\vec{\jmath}+\ddot{z}\vec{k}$ $a=|\vec{a}|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$



例题 1. 求椭圆规尺上M点的轨道方程、速度和加速度，已知$\boldsymbol{B}$以匀速$\boldsymbol{c}$运动
设有$MA=a,MB=b,\angle OBA=\theta$

① M点坐标为：$\begin{cases}x=b\sin\theta\\y=a\cos\theta\end{cases}$ ② 消去参数θ得**轨道方程**：$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 是个椭圆

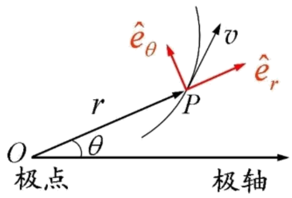
③ M点速度分量：$\begin{cases}\dot{x}=b\cos\theta\ \dot{\theta}\\\dot{y}=-a\sin\theta\ \dot{\theta}\end{cases}$ 又有初始条件：$\begin{cases}x_B=0\\\dot{x}_B=0\end{cases}$ $\begin{cases}y_B=(a+b)\cos\theta\\\dot{y}_B=-(a+b)\sin\theta\,\dot{\theta}=-c\end{cases}$

④ 可解得：$\dot{\theta}=\frac{c}{(a+b)\sin\theta}$ 回代得**速度** $\dot{x}=\frac{bc\cos\theta}{(a+b)\sin\theta}=\frac{bc}{(a+b)}\cot\theta$，$\dot{y}=-\frac{ac\sin\theta}{(a+b)\sin\theta}=-\frac{ac}{(a+b)}$

$v_M=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\frac{c}{a+b}\sqrt{a^2+b^2\cot^2\theta}$ 理论力学中求出分量即可，无需求解方向，该步可略

⑤ 加速度 $\begin{cases}\ddot{x}=-\frac{bc}{(a+b)}\csc^2\theta\,\dot{\theta}=-\frac{bc}{(a+b)}\csc^2\theta\,\frac{c}{(a+b)\sin\theta}=-\frac{bc^2}{(a+b)^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\\\ddot{y}=0\quad\text{与题干强迫条件相关}\end{cases}$ $a_M=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\frac{b^4c^2}{(a+b)^2}\frac{1}{x^3}$

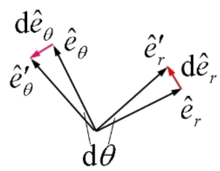
1.2.2 平面极坐标系



参量定义 **径向单位矢量$\hat{e}_r$** 为沿位矢$\vec{r}$的单位矢量
横向单位矢量$\hat{e}_\theta$ 为**垂直**位矢$\vec{r}$且指向**角增加方向**的单位矢量

位矢 $\vec{r}=r\,\hat{e}_r$

速度 $\vec{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\hat{e}_r)=\dot{r}\hat{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ 即 $\begin{cases}\text{径向速度 } \boldsymbol{v_r=\dot{r}}\\\text{横向速度 } \boldsymbol{v_\theta=r\dot{\theta}}\end{cases}$



推导 $\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\hat{e}_\theta\\\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\hat{e}_r\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \vec{v}=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ 两者独立无关

加速度 $\begin{cases}\boldsymbol{a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2}\ \text{ 多了向心加速度，指向速度减小方向}\\\boldsymbol{a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)\ \text{ 多了科里奥利加速度}\end{cases}$ 径向运动会影响到横向的加速度

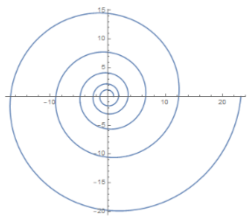
推导 $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\hat{e}_r)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\hat{e}_r)=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{e}_r+\dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_r}{\mathrm{d}t}=\ddot{r}\hat{e}_r+\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{e}_\theta+r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta+r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta-r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$

例题 1. 某点运动方程为：$r=e^{ct}$ $\quad \theta=bt$ $\quad$ 试求其速度与加速度

① 对r微分：$r=e^{ct}$，$\dot{r}=ce^{ct}=cr$，$\ddot{r}=c\dot{r}=c^2r$ $\qquad \theta=bt$，$\dot{\theta}=b$，$\ddot{\theta}=0$

② 速度有：$v_r=\dot{r}=cr$，$v_\theta=r\dot{\theta}=rb$



③ 加速度有：$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=c^2e^{ct}-rb^2=(c^2-b^2)r$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=2bcr$

可以看出，速度和加速度都和矢径$\vec{r}$成正比，是个螺旋线

1.2.3 自然坐标系

条件 仅考虑二维空间，质点沿**平面曲线**运动

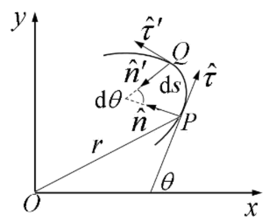
参量定义

径向单位矢$\hat{\tau}$ 为沿轨道切线并指向轨道**弧长增加**的方向上的单位矢量

法向单位矢$\hat{n}$ 为沿轨道法线并指向曲线**凹侧**的单位矢量

夹角θ 为轨道前进的切线方向和x轴正向之间的夹角

曲率半径ρ 轨道曲率半径



速度 $\vec{v}=\frac{ds}{dt}\hat{\tau}=v\hat{\tau}$ $\qquad \boldsymbol{v_\tau=\dot{s}} \qquad \boldsymbol{v_n=0}$

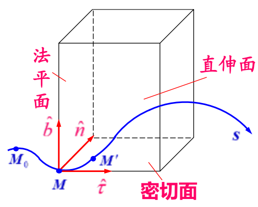
加速度 $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\hat{\tau}+\frac{d\hat{\tau}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{n}=\ddot{s}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{n}$ $\qquad$ (发现有 $\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}\theta}=\hat{n}$ $\quad \frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}\theta}=-\hat{\tau}$)

切向加速度：$a_\tau=\frac{dv}{dt}$ 引起**速度大小**改变 $\qquad$ **法向加速度**：$\frac{v^2}{\rho}$ 引起**速度方向**改变

推广 对于**空间曲线**来讲，上述公式仍然适用。由微分几何学：a 恒位于轨道的密切平面内。

轨道的密切平面是**轨道的切线**和曲线上**无限接近于切点的另一个点**所确定的极限平面，亦即轨道上无限接近的两点的**两条切线**所确定的极限平面。

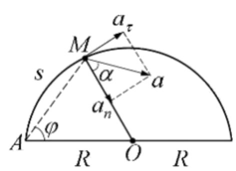
对空间曲线上的某点而言，$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\tau}$仍为切向加速度（在$\hat{\tau}$方向上），$\frac{v^2}{\rho}\hat{n}$为在密切平面内并和切线垂直的加速度分矢量，叫做加速度在主法线方向$\hat{n}$上的分矢量。至于另一条法线，即所谓副法线方向$\hat{b}$上加速度的分矢量**则为零**。



局部的三维运动可以近似看成在密切平面上的二维运动。

例题 1. 质点M沿着半径为R的圆弧由A开始运动，**M到A的距离AM以匀速率v_0增加**，求质点M的加速度，用v_0,φ表示

法一 以A点为原点，建立自然坐标系，质点M运动方程：$s=R(\pi-2\varphi)$



质点速率：$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-2R\dot{\varphi}$ $\qquad$ 有$\overline{AM}=2R\cos\varphi$ 且已知$v_0=\frac{\mathrm{d}\overline{AM}}{\mathrm{d}t}=-2R\sin\varphi\,\dot{\varphi}$

解得：$\dot{\varphi}=-\frac{v_0}{2R\sin\varphi}$ $\qquad$ 由此$v=2R\frac{v_0}{2R\sin\varphi}=\frac{v_0}{\sin\varphi}$ $\qquad$ 则 $a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v_0\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\dot{\varphi}=v_0^2\frac{\cos\varphi}{2R\sin^3\varphi}$

$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{v_0^2}{R\sin^2\varphi}$ $\qquad$ (可以进一步表示$\varphi=\arccos\frac{v_0t}{2R}$) $\qquad a=\frac{v_0^2}{2R\sin^3\varphi}\sqrt{1+3\sin^2\varphi}$

法二 建立极坐标系，原点取在O点，则$r=R$为常量，$\theta=2\varphi$ 也可求解

2. 已知质点运动方程为$x=R\cos\omega t,y=R\sin\omega t,z=h\omega t/2\pi$（$R,\omega,h$为常数），求质点的切向、法向加速度及轨道的曲率半径。

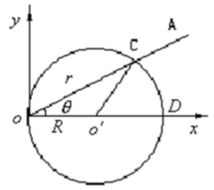
直接求导计算： 则有速度：$\vec{v}=\dot{x}\hat{\imath}+\dot{y}\hat{\jmath}+\dot{z}\hat{k}=-R\omega\sin\omega t\hat{\imath}+R\omega\cos\omega t\hat{\jmath}+\frac{h\omega}{2\pi}\hat{k}$

加速度：$\vec{a}=\ddot{x}\hat{\imath}+\ddot{y}\hat{\jmath}+\ddot{z}\hat{k}=-R\omega^2\cos\omega t\hat{\imath}-R\omega^2\sin\omega t\hat{\jmath}$

速率：$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\omega\sqrt{R^2+\left(\frac{h^2}{4\pi^2}\right)}$ 是常数

切向加速度：$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$ 法向加速度：$a_n=a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}=R\omega^2$

曲率半径：$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{\omega^2\left[R^2+\left(\frac{h^2}{4\pi^2}\right)\right]}{R\omega^2}=R+\frac{h^2}{4\pi^2R}$ 密切面是一个斜面，投影是椭圆



3. 杆OA绕O点作定轴转动，小环C活套在OA杆和半径为R的固定圆环上，此固定圆环与OA杆在同一平面内且通过O点，已知OA杆与$\overline{OO'}$的夹角$\theta=\theta(t)$，求小环C在任一时刻的**速度、加速度**的大小。

法一： 建立如左图**直角坐标系** 有运动方程：$\begin{cases}x=R(1+\cos 2\theta)\\ y=R\sin 2\theta\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{x}=-2R\dot{\theta}\sin 2\theta\\ \dot{y}=2R\dot{\theta}\cos 2\theta\end{cases}$

加速度：$\begin{cases}\ddot{x}=-2R\ddot{\theta}\sin 2\theta-4R\dot{\theta}^2\cos 2\theta\\ \ddot{y}=2R\ddot{\theta}\cos 2\theta-4R\dot{\theta}^2\sin 2\theta\end{cases}$ 则$v=2R\dot{\theta}$ $a=2R\sqrt{\ddot{\theta}^2+4\dot{\theta}^4}$

法二： 建立**极坐标系** （以O为极点，O_x为极轴，θ为极角）

运动方程为：$\begin{cases}r=\overline{OC}=2R\cos\theta\\ \theta=\theta(t)\end{cases}$ 速度为 $\begin{cases}v_r=\dot{r}=-2R\dot{\theta}\sin\theta\\ v_\theta=r\dot{\theta}=2R\dot{\theta}\cos\theta\end{cases}$

有$\ddot{r}=-2R\ddot{\theta}\sin\theta-2R\dot{\theta}^2\cos\theta$ 加速度为$\begin{cases}a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-2R\ddot{\theta}\sin\theta-4R\dot{\theta}^2\cos\theta\\ a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=2R\ddot{\theta}\cos\theta-4R\dot{\theta}^2\sin\theta\end{cases}$

实际上更简单的建系方法是以O'为极点。

法三： 取C点的已知轨道(大圆环)为**自然坐标**，$t=0$时，C点位置（D点）为弧坐标的原点，并以θ角正向为弧坐标的正方向，则C点的弧坐标运动方程为：$s=\widehat{DC}=2R\theta$ $v=\dot{s}=2R\dot{\theta}$

$a_\tau=\ddot{s}=2R\ddot{\theta}$ $a_n=v^2/R=4R\dot{\theta}^2$ 很方便地给出最终结果

1.3 质点运动定律

1.3.1 牛顿运动定律

1.3.1.1 牛顿第一定律(惯性定律)

定律 任何物体如果没有受到其他物体作用，都将保持静止或匀速直线运动状态

注意 ① 定律说明了维持物体的运动不需力的作用，而是靠物体本身的惯性

② 定律揭示了其他物体的作用是改变物体运动状态的原因

③ 定律所描述的静止和匀速直线运动涉及到对哪种参照系描述（惯性参考系）

1.3.1.2 牛顿第二定律

定律 当一物体受到外力作用时，该物体所获得的加速度和外力成正比，和物体本身的质量成反比，加速度的方向和外力的方向一致。

表达式 $\vec{F}=m\vec{a}$

注意 ① 第二定律不是**力的定义**而是运动定律，$m\vec{a}$ 不是力。

② 式中$\boldsymbol{F}$应理解为物体所受的合力。

③ 第二定律表明$\boldsymbol{F}$和$\vec{a}$之间关系的瞬时性，即无论物体做直线或曲线运动，无论物体受恒力或变力作用，在任何时刻表达式都成立。

④ 第二定律的矢量性，表明在任何时刻物体所受的合力方向和加速度方向一致。

⑤ 牛顿定律只适用于宏观物体低速运动（对一些忽略波动性的经典粒子也适用）

1.3.1.3 牛顿第三定律(作用力与反作用力)

定律 当一物体A对另一物体B有一个作用力的同时，另一个物体B同时也对该物体A有一个反作用力，作用力和反作用力大小相等,方向相反,在一条直线上，即$\vec{F}_{12}=\vec{F}_{21}$

注意 作用力与反作用力施加在两个不同的物体上，它们互以对方的存在为自己存在的前提。它们同时产生，同时消灭，相互依存，形成对立的局面，它们是力学中普遍存在的一种矛盾

1.3.2 相对性原理

惯性参考系 牛顿运动定律能成立的参照系

非惯性参考系 牛顿运动定律不能成立的参照系

力学相对性原理 也称为伽利略相对性原理：一切惯性参照系对所有的**力学规律**都是等价的

爱因斯坦相对性 即一切惯性参照系**对所有的物理过程（包括电磁的、光学的）**都是等价的

1.4 质点运动微分方程及其求解

1.4.1 运动微分方程的建立

1.4.1.1 自由质点

自由质点 $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ 也称为**动力学方程**

直角坐标系 上式可写为以下三个标量式：$\begin{matrix} m\ddot{x} = F_x(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \\ m\ddot{y} = F_y(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \\ m\ddot{z} = F_z(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \end{matrix}$ 各个坐标可能**耦合存在，称耦合方程**

需要提供初始条件(边界条件)：$t=0$时，质点的 $\begin{matrix} \text{初位置} & x_0,y_0,z_0 \\ \text{初速度} & u_0,v_0,w_0 \end{matrix}$

极坐标系 上式可写为：$\begin{matrix} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) = F_r(r,\theta;\dot{r},\dot{\theta};t) \\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta(r,\theta;\dot{r},\dot{\theta};t) \end{matrix}$ $t=0$时，质点的 $\begin{matrix} \text{初位置} & r=r_0, & \theta=\theta_0 \\ \text{初速度} & \dot{r}=v_{r0}, & \dot{\theta}=\omega \end{matrix}$

1.4.1.2 非自由质点

非自由质点 $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) + \vec{R}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ 如果质点受到**某种约束**，例如被限制在**某曲线或曲面上运动**，则叫做**非自由质点**。该曲线/曲面称为**约束**，该曲线/曲面方程叫做**约束方程**。

自然坐标系 运动微分方程为（**内禀方程**）：$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n + \boldsymbol{R_n} \\ 0 = F_b + \boldsymbol{R_b} \end{cases}$

如光滑平面曲线约束的约束方程为$f(x)$，则 $\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

1.4.2 质点运动微分方程的解

概述 理论力学的主要任务，就是根据具体问题进行具体分析后，建立**运动微分方程组**，然后求解这些方程组。也就是说，在具体分析以后，我们将把力学问题化为数学问题；再根据题给的起始条件来解出这些方程组；最后，还要对所得的结果加以分析，阐明它们的物理含义

问题 ① **已知运动规律 ⇒ (微分)求力**

② **已知力 ⇒ (积分)求运动规律**

1.4.2.1 力只是坐标的函数——三维谐振动

模型 **原子在晶体点阵中的运动**：

在简单情况下，力只是坐标x、y、z的函数，且可互相分开，不耦合，故其运动微分方程可写为

DQM $\begin{cases} m\ddot{x} = F_x = -k_x x \\ m\ddot{y} = F_y = -k_y y \\ m\ddot{z} = F_z = -k_z z \end{cases}$ $k_x k_y k_z$是比例系数，常称为倔强系数，形似弹簧。

求解 只选择x方向研究：$\ddot{x}=-\frac{k_x}{m}x=-\omega_x^2 x$ 可表示其解为：$x=A_x\cos(\omega_x t+\theta_x)$

所以：
$$
\begin{aligned}
x&=A_x\cos(\omega_x t+\theta_x),\omega_x=\sqrt{k_x/m}\\
y&=A_y\cos(\omega_y t+\theta_y),\omega_y=\sqrt{k_y/m}\\
z&=A_z\cos(\omega_z t+\theta_z),\omega_z=\sqrt{k_z/m}
\end{aligned}
$$

例题 1. 一质点受一**与距离成反比的引力**作用在一直线上运动，质点的质量为m，比例系数为k，若质点从距原点O为a的地方由静止开始运动，求其到达O点所需的时间。

质点受引力为$F=-\frac{k}{x}$ 其运动微分方程为 $m\ddot{x}=-\frac{k}{x}\Rightarrow mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{k}{x}$ 需要引入x来积分

分离变量积分$\int_0^v mv\mathrm{d}v=-k\int_a^x\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 得 $\frac{1}{2}mv^2=k\ln\frac{a}{x}$ $\Rightarrow$ $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{2k}{m}}\sqrt{\ln\left(\frac{a}{x}\right)}$ v与x反向，取负值

$(\because x\in(0,a)\therefore\ln\frac{a}{x}>0\quad x\to 0\quad \ln\frac{a}{x}\to\infty)$ 令$y=\sqrt{\ln\left(\frac{a}{x}\right)}$ 则$x=ae^{-y^2}$ $\mathrm{d}x=-2aye^{-y^2}\mathrm{d}y$ 代入得

$2ae^{-y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{2k}{m}}$ 分离变量积分$(x:a\to 0\quad y:0\to\infty)$ $2a\int_0^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{2k}{m}}\int_0^t\mathrm{d}t$ $2a\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{2k}{m}}t$

已知结论 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 故到达O点所需的时间为$t=a\sqrt{\frac{m\pi}{2k}}$

1.4.2.2 力只是时间的函数——自由电子在沿x轴的振荡电场中的运动

模型 设沿x轴的**电场强度**为：$E_x=E_0\cos(\omega t+\theta)$ 电子**所受的力**则为：$F=-eE_x=-eE_0\cos(\omega t+\theta)$

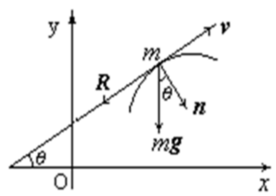
DQM 根据牛顿运动定律，电子运动的微分方程为：$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-eE_0\cos(\omega t+\theta)$

求解 设起始条件是：当$t=0$时，$v=v_0$ 上式积分一次得：$v=v_0+\frac{eE_0}{m\omega}\sin\theta-\frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t+\theta)$

设当$x=0$时，$x=x_0$ 上式积分：$x=x_0-\frac{eE_0\cos\theta}{m\omega^2}+\left(v_0+\frac{eE_0}{m\omega}\sin\theta\right)t+\frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t+\theta)_{震荡项}$

特点 **振荡项**与电场具有相同的角频率ω，且与初始条件无关。
非振荡项与起始条件有关，对波的传播特性无贡献，只能影响波到达的前沿位置。

1.4.2.3 力只是速度的函数——在具有阻力的媒质中运动的抛射体



模型 设阻力$\vec{R}$只**与速度$\vec{v}$的大小的一次方成正比**，即 $\vec{R}=-mk\vec{v}$

DQM 取直角坐标系：
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}&=-k\dot{x}\\
\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}&=-g-k\dot{y}
\end{aligned}
$$

求解 当$t=0$ 时 ,$v_x=v_{x0}$ $v_y=v_{y0}$ $x=0$ $y=0$ 积分一次得：
$$
\begin{aligned}
\dot{x}&=v_{x0}e^{-kt}\\
\dot{y}&=\left(\frac{g}{k}+v_{y0}\right)e^{-kt}-\frac{g}{k}
\end{aligned}
$$

再次积分：
$$
\begin{aligned}
x&=\frac{v_{x0}}{k}(1-e^{-kt})\\
y&=\frac{g}{k^2}\left(1+\frac{kv_{y0}}{g}\right)(1-e^{-kt})-\frac{g}{k}t
\end{aligned}
$$
轨道方程为：$y=\left(\frac{g}{kv_{x0}}+\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)x-\frac{g}{k^2}\ln\left(\frac{v_{x0}}{v_{x0}-kx}\right)$

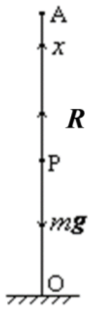
极限情况 ① 如果阻力很小或距离很短，即：$\frac{kx}{v_{x0}}\ll 1$，上式展开为级数后，得：$y=\frac{v_{y0}}{v_{x0}}x-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}x^2-\frac{1}{3}\frac{kg}{v_{x0}^3}x^3-\cdots$

② 当x趋向于 v_{x0}/k 时，y趋向于负无穷大，即轨道在$x=v_{x0}/k$ 处变成竖直直线。

③ 当抛射体的速度接近枪弹的速度时，R与v的正比关系已经不再适用。如为低速炮弹，可以认为 R 与 v^2成正比；当速度接近声速时，R与v^2正比的关系又不再适用

例题

1. 质量为m 的质点，在有阻力的空气中无初速地自离地面为h的地方**竖直下落**。**如阻力与速度成正比**，试研究其运动。



选取直角坐标系，其运动微分方程为：$m\ddot{x}=R-mg$ 考虑到$\vec{R}=-mk\vec{v}$ 有$m\ddot{x}=-mk\dot{x}-mg$

则$\ddot{x}=-k\dot{x}-g$ 初始条件：$t=0,\dot{x}_0=0,x_0=h$ 则积分：$\dot{x}=\frac{g}{k}e^{-kt}-\frac{g}{k}=-\frac{g}{k}(1-e^{-kt})$

二次积分：$x=h+\frac{g}{k^2}(1-e^{-kt})-\frac{g}{k}t$

可见：速度逐渐接近于**定值极限速度 $-g/k$**，运动几乎是匀速直线运动。这是阻力和重力平衡的结果。

2. 在上述例题中，如**阻力与速度平方成正比**，试研究该质点的运动。

则有阻力$R=mk^2g\dot{x}^2$ 有$m\ddot{x}=mk^2g\dot{x}^2-mg$，则$\begin{cases}\ddot{x}=-g+k^2g\dot{x}^2\\ t=0:\ \dot{x}_0=0\quad x_0=h\end{cases}$

积分两次可得：$\dot{x}=-\frac{1}{k}\operatorname{th}(kgt)$ 双曲正切 $x=h-\frac{1}{k^2g}\ln\operatorname{ch}(kgt)$ 双曲正弦

当$t\to\infty$时，$\operatorname{th}(kgt)\to 1$，故物体的速度由零逐渐增大，但以定值$1/k$为其极限。极限速度与运动物体在运动垂直方向的**最大截面积**有关。