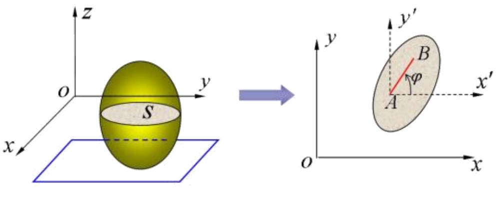
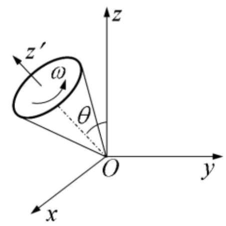
第三章 刚体力学



平面平行运动



定点转动

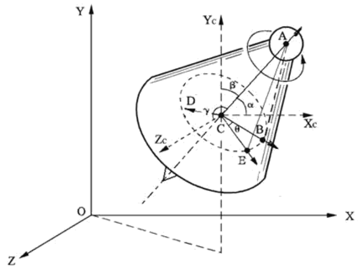
3.1 刚体运动的分析

刚体 形状和大小都不变的物体，**任意两质点之间的距离保持不变**的质点系。

3.1.1 刚体的自由度

自由度 描述刚体位置的独立变量的个数。一般情况下，需要**六个独立变量**可以确定刚体位置。

平动 **自由度为三**，分别对应x,y,z三个方向。刚体在运动过程中，其上任意两点的连线始终保持平行，故可以用一个质点的运动来描述刚体的平动。刚体平动时各点的速度和加速度相同。



一般运动

定轴转动 **自由度为一**。刚体上所有质点都绕同一直线作圆周运动，这条直线称为**转轴**。

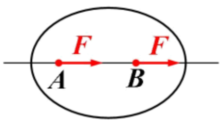
平面平行 **自由度为三**。分解为某一平面内任意一点的**平动**和**绕通过此点且垂直于固定平面**的固定轴的转动。

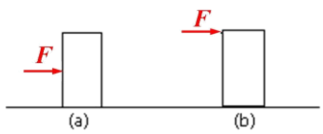
定点转动 **自由度为三**。只有一点固定不动，刚体围绕这点的某一瞬时轴转动。两个角度(φ,θ)决定转轴取向，一个参数描述绕轴转动的情况。

一般运动 **确定质心位置**三个坐标+**确定转轴空间取向**两个坐标+**确定相对转轴转过的角度**一个坐标

即**质心的平动+对质心的定点转动**

3.2 力系的简化和刚体的平衡





作用线的位置不能随意移动

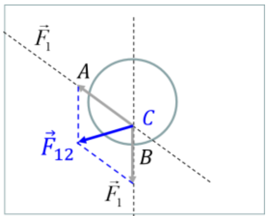
3.2.1 力的可传性原理

3.2.1.1 可传性原理

可传性原理 作用在刚体上的力**可沿作用线任意移动**，施力点虽然改变，但**对刚体的作用效果不变**

滑移矢量 作用在刚体上的力所产生的力学效果，全靠**力的量值、方向、作用线的位置**，而与力的**作用点在作用线上的位置无关**。所以，在刚体力学中，力被称为**滑移矢量**。

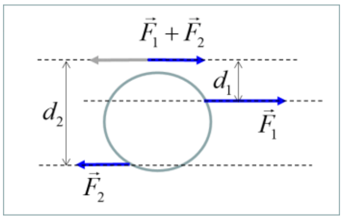
3.2.1.2 力的简化



基本模型 在**平面上**的作用

非平行力 作用于A点的力$\vec{F}_1$与作用于B点的力$\vec{F}_2$ $\Leftrightarrow$ 作用于**两力作用线交点C的合力$\vec{F}_{12}$**

对于三个及以上力，递归反复操作，直至两个力。

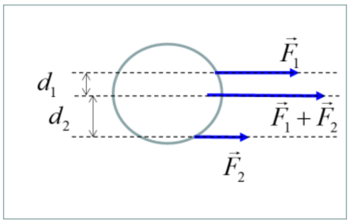


平行力 合力作用线满足：$F_1d_1=F_2d_2$

当此合力的反作用力作用于刚体，刚体满足力平衡和力矩平衡

两力**同方向**，合力在**中间**；两力**反方向**，合力在**大力外侧**。

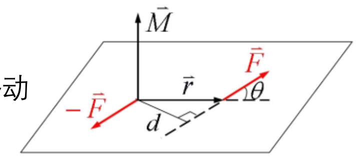
3.2.2 力偶 力偶矩



力偶 作用于刚体上**大小相等、方向相反、不共线**上的两个力组成的力系。

力偶矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ $\quad M=rF\sin\theta=Fd$

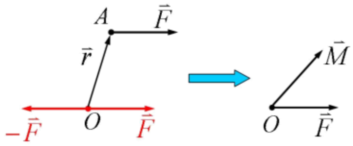
其是一个**自由矢量**，可在力偶作用面上自由移动



力偶臂 力偶的两力之间的**垂直距离d**

力偶作用面　**力偶所在的平面**

3.2.3 空间力系的简化



目的　找到一个与**原力系效果相同**而形式简单的**等效力系**。

定理　力的平行移动定理：$\overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{OA}} \times \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}$

可将作用在刚体上**任一点A的力$\overline{F}$**，**平行移动**到另一点O，同时，**必须添加一力偶**，这个力偶的**力偶矩**$\overline{\boldsymbol{M}}$等于原力$\vec{F}$对$O$点的力矩。

简化效果　作用在刚体上的任何力系，总可以简化为**通过某定点O的一个单力**和**一个力偶矩为$\overline{M}$的力矩**。

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

O点称为**简化中心**，**力的矢量和**称为**主矢**，**力偶矩的矢量和**叫做对简化中心的**主矩**。

简化中心　O点可以任取，但通常选择**质心C**为简化中心。

此时主矢F是发生平动的原因，主矩是使刚体绕通过质心C的轴线转动的原因。

注意：力系的主矢与简化中心无关，主矩与简化中心位置有关

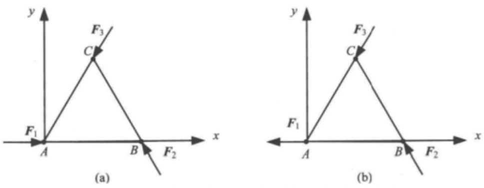
案例分析　1. 如图 3-14 所示，等边三角形板 ABC，边长为 l，沿其边缘作用力分别为 F_1、F_2和 F_3，方向分别如图。且$|F_1| = |F_2| = |F_3| = F$。求两种情况下这三个力的合成结果。

① 由矢量合成可得主矢 $\vec{R} = 0$ 取 A 点为简化中心

$\mathrm{F_1}$和$\mathrm{F_3}$通过 A 点,力矩为零,所以,仅有$\mathrm{F_2}$对 A 点的力矩

$M_A = r_{AB} \times F_2 = lF \sin 120^\circ \vec{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} lF\vec{k}$　可见这三个力合成的结果是，主矢为 $\mathrm{R} = 0$, 主矩为$\mathrm{M_A}$

即该力系的简化结果是一合力偶，且与简化中心的选择无关。



② 由题意，这三个力的合成结果:主矢$R = F_1 + F_2 + F_3 = -2F\boldsymbol{i}$

若取 A 点为简化中心，得主矩$M_A = r_{AB} \times F_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} lF\vec{k}$

若取 C 点为简化中心，得主矩$M_C = r_{CA} \times F_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} lF\vec{k}$

该力系的最终简化结果：因为$M_A \cdot R = 0$，所以该力系最终可简化为作用于 P点的一个合力，

且该简化中心 P 位置为:$\boldsymbol{r}_{AP} = \frac{\boldsymbol{F}_A \times \boldsymbol{M}_A}{F_A^2} = \frac{\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{M}_A}{R^2} = \frac{\sqrt{3}l}{4}\vec{j}$

3.2.4 刚体平衡方程

平衡方程　空间一般力系平衡的充要条件：六个方程 $\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 & \sum F_{iy} = 0 & \sum F_{iz} = 0 \\ \sum M_{ix} = 0 & \sum M_{iy} = 0 & \sum M_{iz} = 0 \end{cases}$

对**共面力系**，所有力在xy平面内，则**平衡方程**可变为：$\boldsymbol{\Sigma F_{ix} = 0}$　$\boldsymbol{\Sigma F_{iy} = 0}$　$\boldsymbol{\Sigma M_{iz} = 0}$

特殊情况　① **平面汇交力系**：所有力作用线汇交于一点：$\Sigma F_{ix} = 0$，$\Sigma F_{iy} = 0$

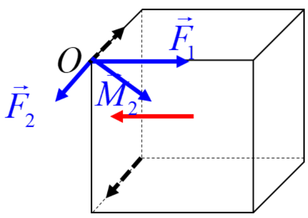
② **平面平行力系**：诸力与y轴平行：$\Sigma F_{iy} = 0$，$\Sigma M_{iz} = 0$

③ 若刚体仅受三个非平行力的作用而平衡，则此三力必然交于一点，否则力矩不能平衡

证明　使用反证法：若三力非平行，则两力要么**平面相交**、要么**空间中非平行非相交**。

① 如果两力相交，取交点O为简化中心，F_1, F_2力矩和为0，如果F_3作用线不穿过O，则力矩不为零，无法平衡。

② 如果非平行非相交，总是可以找到一个立方体表示两力，可见F_3逆着合力的方向，与M_2并不垂直，其力偶无法抵消，无法平衡。

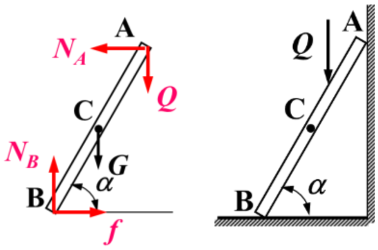


例题 1. 梯子AB长L,重$G=100N$，靠在光滑墙上并和水平地面成$\alpha=75°$角，地面与梯子间的静摩擦因数$\mu=0.3$，问重$Q=700N$的人能否爬到梯子顶端而不致使梯子滑倒？并求地面对梯子的摩擦力。假定梯子的重心在中点C。

取梯子为研究对象，设人在顶端梯子能平衡，受力如图。平衡方程：

$\sum F_x=0 \Rightarrow f-N_A=0$ $\qquad$ $\sum F_y=0 \Rightarrow N_B-G-Q=0$

$\sum M_A=0 \Rightarrow fL\sin\alpha+G\frac{L}{2}\cos\alpha-N_BL\cos\alpha=0$



解得：$f=N_A=\frac{G+2Q}{2\sin\alpha}\cos\alpha=201\mathrm{N}$

$N_B=G+Q=800\mathrm{N}$ $\qquad$ $f_{max}=\mu N_B=240\mathrm{N}>201\mathrm{N}$

所以人爬到梯子顶端能保持平衡而不致滑倒。

地面与梯子临界角：$f=\frac{G+2Q}{2\sin\alpha}\cos\alpha\le\mu N_B$ $\qquad$ $\tan\alpha\ge\frac{G+2Q}{2\mu(G+Q)}=3.13$ $\qquad$ $\alpha\ge72.3°$

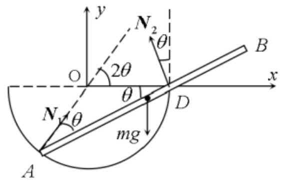
2. 半径为r的光滑半球形碗，固定在水平面上，一均质细棒斜靠在碗缘，一端在碗内，一端在碗外，在碗内的长度为c，试证棒的全长为：$\frac{4(c^2-2r^2)}{c}$

设棒长为l，质量为m，其受力分析如图所示，据平衡方程得：

$\sum F_x=0\Rightarrow N_1\cos2\theta-N_2\sin\theta=0$ $\qquad$ $\sum F_y=0\Rightarrow N_1\sin2\theta+N_2\cos\theta-mg=0$

$\sum M_A=0\Rightarrow N_2C-mg\frac{l}{2}\cdot\cos\theta=0$ $\qquad$ 由(1)得:$N_1=\frac{N_2\sin\theta}{\cos2\theta}$

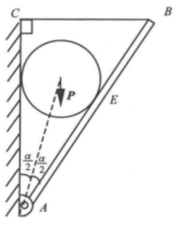
将N_1代入(2)得:$N_2=\frac{mg}{\tan2\theta\cdot\sin\theta+\cos\theta}$ $\qquad$ 将N_2代入(3)得:$l=\frac{2C}{\cos\theta(\tan2\theta\cdot\sin\theta+\cos\theta)}$



$\cos\theta=\frac{c/2}{r}=\frac{c}{2r}$ $\qquad$ $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{4r^2-c^2}}{2r}$ $\qquad$ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{4r^2-c^2}}{c}$

$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{c\sqrt{4r^2-c^2}}{c^2-2r^2}$ $\qquad$ $l=\frac{2c}{\cos\theta(\tan2\theta\cdot\sin\theta+\cos\theta)}=\frac{4(c^2-2r^2)}{c}$

3. 重力为P的匀质圆球半径为r,放在墙和AB杆之间。杆的A端光滑铰支，B端用水平绳BC拉住杆长为l，其与墙的交角为α。如不计杆重,求绳的拉力T的大小。并问α为何值时,绳的拉力最小。



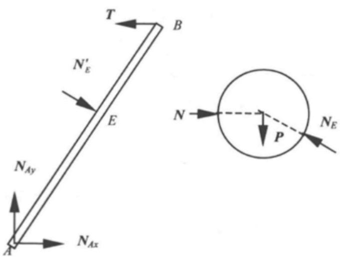
(a)

① 杆AB受力分析如图(b)所示 由$\sum M_A=0\Rightarrow Tl\cos\alpha-N_E\overline{AE}=0$ 即$Tl\cos\alpha-N_Er\cdot\cot\frac{\alpha}{2}=0$

球受力分析如图(c)所示 $\qquad$ 由$R_y=0\Rightarrow N_E\sin\alpha-P=0$ $\qquad$ 得 $N_E=\frac{P}{\sin\alpha}$

故$T=\frac{N_Er\cot\frac{\alpha}{2}}{l\cos\alpha}=\frac{Pr}{2l\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$

② 令$\frac{dT}{d\alpha}=\frac{Pr}{2l}\frac{-\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right]}{\sin^4\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha}=0$，当$\alpha=60°$时，$T=T_{min}=\frac{4Pr}{l}$



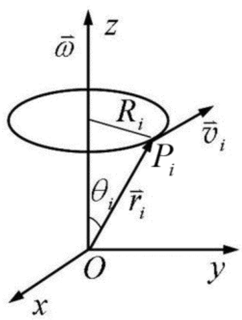
(b) (c)

3.3 刚体的定轴转动

自由度 只有一个 $\qquad$ **运动方程** $\varphi=\varphi(t)$

角速度矢量 $\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}=\dot{\varphi}\vec{k}$ $\qquad$ **角加速度矢量**：$\vec{\alpha}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\ddot{\varphi}\vec{k}$ 各点角速度和角加速度相同。

3.3.1 定轴转动刚体中任一点的速度和加速度



线速度 某一时刻，任一点的线速度：$\vec{v}_i=\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}_i$ $\qquad$ $v_i=\omega r_i\sin\theta_i=\omega R_i$

加速度 任一点的加速度：$\vec{a}_i=\frac{d\vec{v}_i}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_i+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_i+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$

其中：切向加速度：$a_{i\tau}=\dot{\omega}r_i\sin\theta_i=R_i\alpha$　　法向加速度：$a_{in}=R_i\omega^2$

在定轴转动中，角加速度的方向与角速度$\vec{\omega}$相同或相反，沿着同一条转动轴线。

3.3.2 定轴转动的转动惯量

转动惯量　$\boldsymbol{I_z=\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2}$　　**连续分布**：$\boldsymbol{I_z=\int r^2dm}$

代表物体在转动时惯性的量度，取决于**物体的形状和转动轴的位置**。

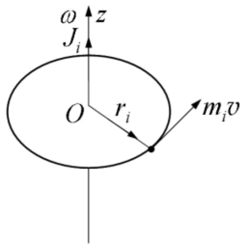
回转半径　质量按一定规律分布的刚体，在转动中等效于集中在某一点上的一个质点的质量，此点离某轴线的垂直距离为k，称为回转半径 $I_z=mk^2\Rightarrow \boldsymbol{k=\sqrt{\frac{I_z}{m}}}$

平行轴定理　$\boldsymbol{I=I_c+md^2}$　对两条平行轴而言，如果其中有一条通过物体的质心，则物体**对另一轴线的**转动惯量，等于对通过质心的平行轴的转动惯量，加上物体的质量与两轴间垂直距离平方的乘积。

常见刚体　**细棒** $\frac{1}{12}ml^2$（中心）　$\frac{1}{3}ml^2$（边缘）　**圆柱体** $\frac{1}{2}mR^2$　**薄圆环** mR^2

球体 $\frac{2}{5}mR^2$　**圆筒** $\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$

3.3.3 定轴转动的动力学问题



角动量　整个刚体对z轴的角动量：$\boldsymbol{J_z=I_z\omega}$

有 $\vec{J}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i)$　　由于 $\vec{v}_i=\vec{\omega}\times\vec{r}_i$

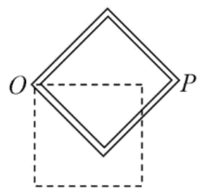
得到 $\vec{\boldsymbol{J}}=\sum_{i=1}^{n}m_i[\vec{\boldsymbol{r}}_i\times(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{r}}_i)]=(\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2)\omega\vec{k}=I_z\omega\vec{k}$

动力学方程　$\boldsymbol{M_z=I_z\dot{\omega}=I_z\ddot{\varphi}}$　刚体在外力作用下，绕固定轴z轴转动，由对固定轴的角动量定理得：

$\frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t}=M_z$　则可以得到定轴转动的动力学方程。

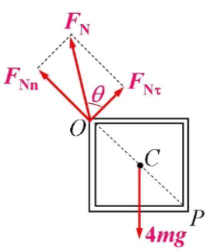
机械能守恒　$\boldsymbol{\frac{1}{2}I_{zz}\omega^2+V=E}$　刚体定轴转动时，如果只有保守力做功，机械能守恒。

例题　1. 由长为l，质量各为m的均质细杆组成正方形框架，如图，其中一角连于光滑水平轴O，转轴与框架所在平面垂直。最初，对角线OP处于水平，然后从静止开始向下自由摆动。求OP对角线与水平成45°时**P点的速度**，并求此时**框架对支点的作用力**。



框架**对水平轴O**的转动惯量为：$I=2\cdot\frac{1}{3}ml^2+2\times\left(\frac{1}{12}ml^2+\frac{5}{4}ml^2\right)=\frac{10}{3}ml^2$

由**机械能守恒**：$\frac{1}{2}I\omega^2-4mg\frac{l}{2}=0\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{6g}{5l}}$　　P点的速度：$v_P=\omega\times\sqrt{2}l=2\sqrt{\frac{3}{5}gl}$



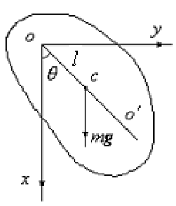
下面求支点对框架的作用力，框架受力如图，由**质心运动定理**，得：

$\vec{F}_N+4m\vec{g}=4m\vec{a}_C$　　采用**自然坐标**：分量式为 $\begin{cases}F_{Nn}-4mg\cos45^\circ=4ma_{Cn} & ①\\ 4mg\sin45^\circ-F_N=4ma_C & ②\end{cases}$

法向加速度为：$a_{Cn}=\frac{\sqrt{2}}{2}l\omega^2=\frac{3\sqrt{2}}{5}g$　　切向加速度可由定轴转动的动力学方程求得：

$4mg\frac{l}{2}=I\ddot{\varphi}\Longrightarrow\ddot{\varphi}=\frac{3g}{5l}$　　所以 $a_{C\tau}=\frac{\sqrt{2}}{2}l\ddot{\varphi}=\frac{3\sqrt{2}}{10}g$　将法向加速度、切向加速度代入①②，得：

$\begin{cases}F_{Nn}=\frac{22\sqrt{2}}{5}mg\\ F_{N\tau}=\frac{4\sqrt{2}}{5}mg\end{cases}$　　$F_N=\sqrt{F_{Nn}^2+F_{N\tau}^2}=2\sqrt{10}mg=6.3mg$　　$\theta=\arctan\frac{F_{Nn}}{F_{N\tau}}=\arctan5.5=79.7^\circ$



2. 设质量为m的**复摆（物理摆）**绕通过某点的水平轴作微小振动，试求其**运动方程及振动周期**。如图所示，代表复摆中包含质心C的一个截面，O为悬点，l为悬点O到质心C的距离，设此复摆绕通过O点的水平轴线转动时的转动惯量为I_O，回转半径为k_O，由刚体定轴转动的动力学方程：

$I_{zz}\dot{\omega}=I_{zz}\ddot{\theta}=M_z$　　$I_O\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta$　$(I_O=mk_o^2)$　　$k_o^2\ddot{\theta}+gl\sin\theta=0$　①

由平行轴定理知：$mk_o^2=mk_c^2+ml^2$　　因为振动是微小的，故$\sin\theta\approx\theta$，①式变为：

$\ddot{\theta}+\frac{gl}{k_c^2+l^2}\theta=0$ ② 其通解为：$\theta=A\sin\left(\sqrt{\frac{gl}{k_c^2+l^2}}t+\theta_0\right)$ 周期为：$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{k_c^2+l^2}{gl}}=2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgl}}$

将摆的全部质量都集中在OC的延长线某点O'上，如$OO'=l_1$，则l_1叫**等值单摆长**。因为这个单摆与此复摆的振动周期相同，故O'点又叫振动中心（或摆动中心）

$$l_1=\frac{I_O}{ml}=\frac{k_c^2+l^2}{l}=\frac{k_c^2}{l}+l \qquad l_1-l=\frac{k_c^2}{l} \qquad \tau=2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

将悬点转换，如O'以为悬点：$I_{O'}=mk_c^2+m(l_1-l)^2=mk_c^2+m\left(\frac{k_c^2}{l}\right)^2=mk_c^2\left(\frac{k_c^2+l^2}{l^2}\right)$

周期：$\tau'=2\pi\sqrt{\frac{I_{O'}}{mg(l_1-l)}}=2\pi\sqrt{\frac{mk_c^2}{l^2}\frac{k_c^2+l^2}{mg(l_1-l)}}=2\pi\sqrt{\frac{k_c^2+l^2}{gl}}=2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgl}}=\tau$

以O'为悬点与以O为悬点时的振动周期相同，故悬点和振动中心可以互相交换而周期不变，利用这个关系，可以比较准确地测定重力加速度的数值。 单摆长度l具有误差、绳子重量未考虑。

3.3.4 轴上的附加压力

附加压力 当轴杆件处于受压状态时，其受到的外界施加的力称为轴压力，方向垂直于截面并指向截面内部。

转轴在边缘：$\int dm\omega^2r=\frac{1}{2}m\omega^2l$ 转轴在中间：无受力

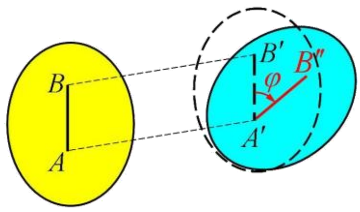
转轴在中间有角度：等效为两截作用点不同的杆，受力正比于ω^2

动平衡条件 动平衡即**附加压力为零**的条件：

① 转轴通过**质心** ② 转轴通过**惯量主轴**（对于密度均匀形状规则的刚体，即为几何对称轴）

3.4 刚体的平面平行运动

平面平行运动 刚体作平面平行运动时，刚体中任何一点都始终在平行于某一固定平面的平面内运动，因此只需研究刚体中**任一和固定平面平行的截面（薄片）**的运动，因为垂直于固定平面的直线上的各点都有相同的轨道、速度和加速度，于是空间问题就简化为平面问题。



运动分解 **平移＋定轴转动**

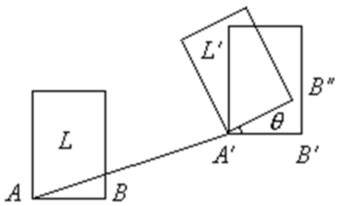
3.4.1 平面平行运动运动学

运动分解 当薄片连续运动时，由下列两个步骤完成：① **纯平动：随基点的平动** ② **纯转动：绕基点的转动**

设**A为基点**，在某一时刻，其速度为$\vec{v}_A$，此时薄片L绕A转动的角速度为$\vec{\omega}$（垂直于薄片并沿着转动轴），

则薄片上**任意一点P的速度**为：$\vec{r}=\vec{r}_A+\vec{r}'$ $\qquad \vec{v}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}'$

基点的选取是任意的。



速度分量 $\vec{v}=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}' \qquad \vec{\omega}=\omega\hat{k}$

$$\vec{\omega}\times(\vec{r}-\vec{r}_A)=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x-x_A & y-y_A & 0\end{vmatrix}=-(y-y_A)\omega\hat{\imath}+(x-x_A)\omega\hat{\jmath}$$

所以在**静坐标系中** $\begin{cases}v_x=v_{Ax}-(y-y_A)\omega\\ v_y=v_{Ay}+(x-x_A)\omega\end{cases}$

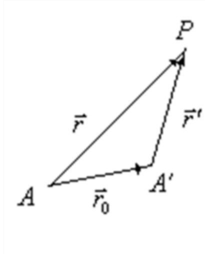
在**刚体坐标系**中速度分量：$\vec{\omega}\times\vec{r}'=\begin{vmatrix}\hat{\imath}' & \hat{\jmath}' & \hat{k}'\\ 0 & 0 & \omega\\ x' & y' & 0\end{vmatrix}=-\omega y'\hat{\imath}'+\omega x'\hat{\jmath}'$ $\qquad \begin{cases}v_{x'}=v_{Ax'}-\omega y'\\ v_{y'}=v_{Ay'}+\omega x'\end{cases}$

角速度 P点的加速度为：$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}_A}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}_A}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

平面运动中可以写为：$\boldsymbol{\vec{a}=\vec{a}_A+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}'-\vec{r}'\omega^2}$

第一项是**基点A的加速度**，第二项是**相对切向加速度**，第三项是**相对法向加速度**。

证明　角速度与基点的选取无关。



取A点为基点,设其速度为$\vec{v}_A$，角速度为$\vec{\omega}$　$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}(1)\vec{v}_{A'} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_0(2)$

取 A' 为基点,其速度为$\vec{v}_{A'}$,角速度为$\vec{\omega}'$　　$\vec{v}_P = \vec{v}_{A'} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'$

将（2）代入（3）得：$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_0 + \vec{\omega}' \times \vec{r}'$（4）

$(1) = (4)$得：$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}_0 + \vec{\omega}' \times \vec{r}'$　　$\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) - \vec{\omega}' \times \vec{r}' = 0$

$\vec{\omega} \times \vec{r}' - \vec{\omega}' \times \vec{r}' = 0$　　　$(\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{r}' = 0$

由于$\vec{r}'$是任意向量，它不等于零，只有$\vec{\omega} = \vec{\omega}'$。角速度描写整个刚体的运动量，故与所选基点无关。

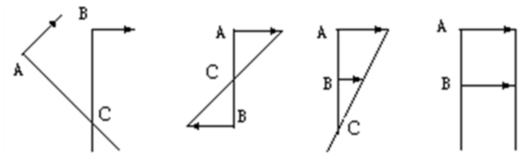
有关量　**$\vec{v}_A$，$\vec{a}_A$，$\vec{r}'$与基点的选取有关**　　　$\vec{v}, \vec{a}$，ω，$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$与基点的选取无关。

3.4.2 转动瞬心

转动瞬心　基点的选取是任意的，我们引入转动瞬心为基点。作平面运动的刚体的角速度不为零时(有转动)，**在任意时刻薄片上或薄片外恒有一点的速度为零**，这点叫做**转动瞬心**，常以C表之。
其不是一个定点，是一系列的点集。

瞬心坐标　$\begin{cases} v_{Ax} - (y_c - y_A)\omega = 0 \\ v_{Ay} + (x_c - x_A)\omega = 0 \end{cases}$　$\begin{cases} v_{x'} = v_{Ax'} - \omega y' = 0 \\ v_{y'} = v_{Ay'} + \omega x' = 0 \end{cases}$　$\begin{cases} x_C = x_A - \frac{v_{Ay}}{\omega} \\ y_C = y_A + \frac{v_{Ax}}{\omega} \end{cases}$　$\begin{cases} x_C' = -\frac{v_{Ay'}}{\omega} \\ y_C' = +\frac{v_{Ax'}}{\omega} \end{cases}$

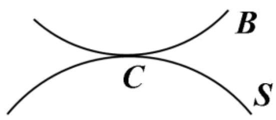
几何方法：



速度相反　速度相同　刚体不转动

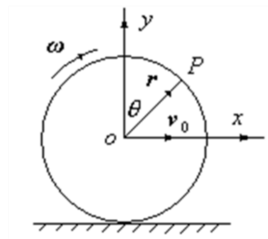
空间极迹　当薄片运动时，转动瞬心C的位置也不断地随之运动，转动瞬心C在**固定平面**（即相对于$O - xy$）上所描绘的轨迹叫**空间极迹**。

本体极迹　而转动瞬心C在**薄片**（即相对于$A - x'y'$）上所描绘的轨迹叫**本体极迹**。



相关性　薄片的运动实际上是本体极迹B在空间极迹S上作无滑动的滚动，如图所示，在任意瞬时，两轨迹的共公切点C，即为该时刻的转动瞬心。

案例证明　**车轮在地面上沿直线做纯滚动，如图所示。**



以O为基点，P点的速度为：$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' = v_0\hat{\imath} + (-\omega\hat{k}) \times (r\sin\theta\,\hat{\imath} + r\cos\theta\,\hat{\jmath}) = (v_0 + r\omega\cos\theta)\hat{\imath} - r\omega\sin\theta\,\hat{\jmath}$

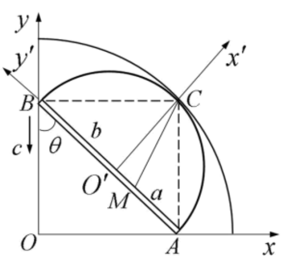
在最低点：$\theta = \pi$，因无滑动，$v_0 = r\omega$，该点相对地面的速度为零，即:$v = 0$

所以轮缘与地面的接触点就是该时刻的**转动瞬心**，**接触点在地面上形成的轨迹**(直线)是空间极迹，而**接触点在车轮上形成的轨迹**(轮缘)则是本体极迹。

注意区分**瞬心速度和质点的速度**：所谓转动瞬心的速度为零，是指转动瞬心处质点的速度为零，也就是指此点的基点速度和绕基点转动速度的合速度为零。对于某个质点来说，t时刻合速度为零，质点所在位置就是转动瞬心，$t + \Delta t$时刻这个质点的合速度不再为零了，其位置也就不是转动瞬心了，时间$t \to t + \Delta t$，转动瞬心从一个位置移到了另一个位置，瞬心也有一个速度，要注意瞬心移动的速度与瞬心处质点的速度不相同。如车轮向前滚动，转动瞬心对固定坐标系运动的速度，等于车轮质心的速度，而瞬心处质点的速度为零。转动瞬心的速度虽然等于零，**但它的加速度不等于零**，否则，就成为固定的转动中心了。

在平面平行运动中，基点既然可以任意选择，求速度和加速度时，选用那些特殊点作为基点比较好？
求速度时，选转动瞬心较好，这样可使速度公式得到简化：$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$
求加速度时，选速度为常矢量的点或选加速度为已知的点较好，可方便地求出加速度。

例题　1. 试用转动瞬心法求的椭圆规尺M点的速度、加速度,并求本体极迹和空间极迹。



椭圆规尺AB两端点的速度方向已知，过A、B作两直线分别与$\vec{v}_A$、$\vec{v}_B$垂直，两直线相交于C，故C为转动瞬心。

$\because$ B点速度量值为已知量c　　$v_B = c = (a + b)\sin\theta \cdot \omega$　（ω 为 $\overline{AB}$ 的角速度）

$\therefore$ $\omega = \frac{c}{(a+b)\sin\theta}$　　　由转动瞬心定义知：

$v_M = \overline{MC} \cdot \omega = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} \cdot \omega = (c/a + b)\sqrt{a^2 + b^2\cot^2\theta}$

空间极迹： 对固定坐标系$O-xy$，C点的坐标为：$\begin{cases}x=(a+b)\sin\theta\\ y=(a+b)\cos\theta\end{cases}$ $\quad x^2+y^2=(\overline{AB})^2=(a+b)^2$

故空间极迹为中心在O点、半径为$(a+b)$的圆周。

本体极迹： 以AB中点O'为动坐标系$O'=x'y'$的原点，C点的坐标为：$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}(a+b)\\ y'=0\end{cases}$

$x'^2+y'^2=(\overline{O'C})^2=\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2$ 故本体极迹为中心在O'点、半径为$\frac{a+b}{2}$的圆周，此两圆周有公共切点C，此点即为转动瞬心。

求解加速度： 以B为基点，M点的加速度为：$\vec{a}_M=\vec{a}_B+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}'-\vec{r}'\omega^2$

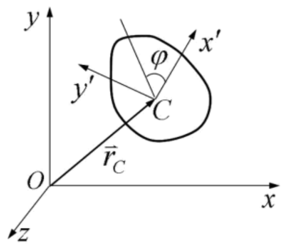
$$=\left(\frac{-c}{a+b}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{k}'\times(-b\vec{j}')-(-b\omega^2\vec{j}')=-\frac{bc\omega}{a+b}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\vec{\imath}'+\frac{bc^2}{(a+b)^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\vec{\jmath}'$$

$$=\frac{bc^2}{(a+b)^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\times(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta\,\hat{\imath}-\cos\theta\,\hat{\jmath}-\sin\theta\,\hat{\imath}+\cos\theta\,\hat{\jmath})\ =-\frac{bc^2}{(a+b)^2}\frac{1}{\sin^2\theta}(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}+\sin\theta)\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

$$=-\frac{bc^2}{(a+b)^2}\frac{1}{\sin^3\theta}\hat{\boldsymbol{\imath}}\qquad M\text{点的}x\text{坐标为}:x=b\sin\theta\qquad\therefore\vec{a}_M=-\frac{b^4c^2}{(a+b)^2}\frac{1}{x^3}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

3.4.3 平面平行运动动力学

目的 求刚体作平面平行运动时的动力学方程；取质心C作为基点，以便用质心运动定理和相对于质心的角动量定理来写出平面平行运动的动力学方程。



方程 质心C的动力学方程为：$\begin{cases}m\ddot{x}_c=F_x\\ m\ddot{y}_c=F_y\end{cases}$

刚体绕通过质心C的z轴转动的动力学方程为：$\boldsymbol{I_{zz}\dot{\omega}=I_{zz}\ddot{\varphi}=M_z}$

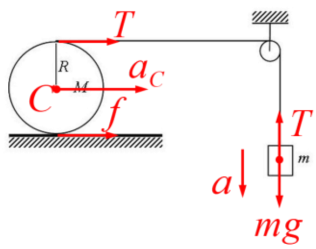
方程中包括约束反力，对于特定问题需添加约束方程。

能量形式 由柯尼希定理知，刚体的动能为：$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_{zz}\omega^2$

如果作用在刚体上的外力都是保守力或只有保守力做功，则机械能守恒：$\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_{zz}\omega^2+V=E}$

例题 1. 质量为M、半径为R的均质圆柱体放在粗糙水平面上，柱的外面绕有轻绳，绳子跨过一个很轻的滑轮，并悬挂一质量为m的物体。设圆柱体只滚不滑，并且圆柱体与滑轮间的绳子是水平的。求圆柱体质心的加速度a_C，物体的加速度a及绳中的张力T （绳与滑轮质量忽略不计）

法一： 取隔离体，受力分析如图所示。圆柱体作平面平行运动，物体m作平动，



动力学方程为：$mg-T=ma$ ① 对于圆柱：$\begin{cases}T+f=Ma_C & ②\\ (T-f)R=\frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi} & ③\end{cases}$

圆柱体只滚不滑有：$a_C=R\ddot{\varphi}$ ④ $\qquad a=a_C+R\ddot{\varphi}=2a_C$ ⑤

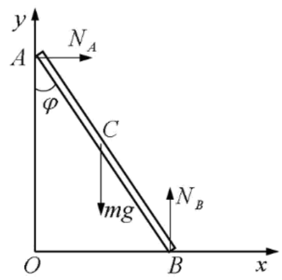
以上五式联立得 $a_C=\frac{4mg}{3M+8m}\quad a=\frac{8mg}{3M+8m}\quad T=\frac{3Mm}{3M+8m}g$

法二： 利用机械能守恒定律 $\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}I_{zz}\omega^2+\frac{1}{2}mv^2=mgh\qquad v_C=R\omega\qquad v=v_C+R\omega=2v_C$

三式联立求得 $v^2=\frac{16mgh}{3M+8m}\qquad\because v^2-0=2ah\qquad\therefore a=\frac{8mg}{3M+8m}$

2. 质量为m、长为l的均质杆AB，两端分别靠在光滑的竖直墙面和水平地面上，初始时杆与墙夹角为φ_0，如任其自此位置开始下滑，求杆在何处将与墙面分离及分离后地面对杆的约束反力。

杆受力分析如图所示，其动力学方程为：$m\ddot{x}_C=N_A\qquad m\ddot{y}_C=N_B-mg$



$I_C\ddot{\varphi}=\frac{l}{2}\sin\varphi\cdot N_B-\frac{l}{2}\cos\varphi\cdot N_A$ 得到 $x_C=\frac{l}{2}\sin\varphi\quad y_C=\frac{l}{2}\cos\varphi$

其中 $\dot{x}_C=\frac{l}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\qquad\ddot{x}_C=-\frac{l}{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2+\frac{l}{2}\cos\varphi\,\ddot{\varphi}$

$\dot{y}_C = -\frac{l}{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi}$ $\quad$ $\ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - \frac{l}{2}\sin\varphi\,\ddot{\varphi}$ $\qquad$ 联立上式：$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l}\sin\varphi$ $\quad$ $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{3g}{2l}\sin\varphi$

积分上式：$\int_0^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}d\dot{\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{3g}{2l}\sin\varphi\, d\varphi$ $\qquad$ $\dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$

$N_A = m\ddot{x}_C = \frac{3}{4}mg\sin\varphi\,(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$

$N_B = m\ddot{y}_C + mg = \frac{3}{4}mg\left(2\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\cos\varphi_0 - \sin^2\varphi + \frac{4}{3}\right)$ $\qquad$ 杆与墙面分离时,$N_A = 0$

$\cos\varphi = \frac{2}{3}\cos\varphi_0$ $\qquad$ $N_B = \frac{1}{4}mg$

3. 半径为r，质量为m的圆轮，在粗糙的水面上作纯滚动，分别讨论在下列情况下的运动。

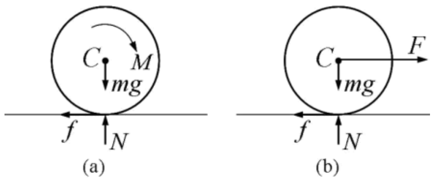
（1）在垂直于圆轮面的力偶矩M的作用下 （2）在圆轮平面内，通过圆心沿水平x方向的力F的作用。

① **受力分析**如图所示：在y**方向**受力平衡：$N - mg = 0$

在x**方向**，力偶矩为零，仅受到$-f$作用

力偶矩除M外还有摩擦力提供的力偶矩：$M + rf$

考虑到纯滑滚动，则**约束方程**为：$\ddot{x}_c = r\ddot{\varphi}$



动力学方程为：$\begin{cases} m\ddot{x}_c = -f \\ m\ddot{y}_c = N - mg = 0 \\ I_c\ddot{\varphi} = M + rf \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = -\frac{mr}{mr^2+I_c}M \\ \ddot{x}_c = \frac{r}{mr^2+I_c}M \\ \ddot{\varphi} = \ddot{x}_c/r \\ N = mg \end{cases}$ $\qquad$ 可见f是个负值，f方向实际往正方向

该摩擦力为一个不做功的静摩擦力（不是滑动或滚动摩擦力，该位置瞬时速度为零）

② x方向多了个力，则**动力学方程**为：$\begin{cases} m\ddot{x}_c = F - f \\ m\ddot{y}_c = N - mg = 0 \\ I_c\ddot{\varphi} = rf \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = \frac{I_c}{mr^2+I_c}F \\ \ddot{x}_c = \frac{r^2}{mr^2+I_c}F \\ \ddot{\varphi} = \ddot{x}_c/r \\ N = mg \end{cases}$

圆轮在力偶矩M作用下，静摩擦力f为负，表明f实际方向向前，起到了推动轮心向前运动的效果

而在力F作用下，静摩擦力f为正，其方向与轮心运动方向相反，起到了阻碍轮心向前运动的效果

3.4.4 滚动摩擦

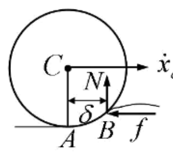
3.4.4.1 无滑滚动

模型建立 若圆柱体以初速v_0在**粗糙水平面上**作无滑滚动，运动方程：$\begin{cases} m\ddot{x}_c = -f \\ m\ddot{y}_c = N - mg = 0 \\ I_c\ddot{\varphi} = rf \end{cases}$ 无滑约束：$\ddot{x}_c = r\ddot{\varphi}$

该约束并不严谨，其更严谨的表述为：接触点为转动瞬心，速度为零 $v = 0 = v_c - \omega r$

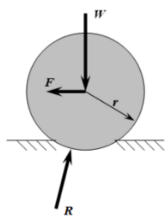
模型求解 解得：$f = 0,\ \ddot{x}_c = 0,\ \ddot{\varphi} = 0 \Longrightarrow \dot{x}_c = v_0,\ \dot{\varphi} = \frac{v_0}{r}$ $\qquad$ 表明圆柱体**将以惯性而永远滚动下去**，但实际情况并不如此，圆柱体越滚越慢，原因是它受到了滚动摩擦的作用。

滚动摩擦 滚动摩擦是由于**圆柱体与地面接触处的形变**所引起的。



因为圆柱体和地面都**不是绝对刚性的**，圆柱体由于重量而**陷入地面**，同时本身也**受到压缩**，当它向前滚动时，由于地面的隆起，地面的竖直反作用力N**并不通过质心**，而是**偏于质心的前方**，因而产生了一个反抗圆柱体滚动的力矩，这个力矩就是滚动摩擦力矩，它的量值为 $M = \delta N$（右图的N可能不垂直，其实际指向曲率中心）

δ叫做滚动摩擦系数，等于N**的作用点**B到通过质心O的**竖直线**OA**的垂直距离**，δ的大小和圆柱体及地面的性质有关，即和圆柱体压入地面的程度有关。



注意 滚动摩擦系数非常小，滚动摩擦一般远小于滑动摩擦，使用**滚珠轴承、滚柱轴承**都是为了以滚动摩擦代替滑动摩擦。

3.4.4.2 带滑滚动

模型建立 若圆柱体以初速v_0在**粗糙水平面上**作带滑滚动，运动方程：$\begin{cases} m\ddot{x}_c = -f \\ m\ddot{y}_c = N - mg = 0 \\ I_c\ddot{\varphi} = rf \end{cases}$

约束条件：① 不满足 $\ddot{x}_c = r\ddot{\varphi}$ ② 变更为滑动摩擦力 $f = \mu N$

注意 滑动摩擦力为零时，是否会发生滑动？仍然会有，但其将一直存在，不会消失

案例 1. 一个圆柱半径为R，质量为M，绕轴以ω_0转动，将圆柱无初速度地放在一个摩擦因数为μ的水平面上，问该圆柱何时开始纯滚动？

建立模型：$\begin{cases} M\ddot{x}_c = f \\ M\ddot{y}_c = N - Mg = 0 \\ I_c\ddot{\varphi} = -fR \end{cases}$ 与 $f = \mu N$ 需要求解$\ddot{x}_c, \ddot{\varphi}$ 得到：$\ddot{x}_c = \mu g$ $\ddot{\varphi} = -\frac{\mu MgR}{\frac{1}{2}MR^2} = -\frac{2\mu g}{R}$

则有t时刻质心速度：$\dot{x}_c = \mu g t$ t时刻转动角速度：$\dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R}t$ 圆柱体做纯滚动满足：$\dot{x}_c = R\dot{\varphi}$

则有 $t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$ (注意此时不满足：$\ddot{x}_c = r\ddot{\varphi}$)

2. 半径为R的均质球m，放在粗糙的桌面上。打击球的底端，使球获得如图所示的逆时针的初角速度ω_0和初速度v_0（正向）。问两者满足何种关系时，球能做返回运动？

建立模型：$\begin{cases} m\ddot{x}_c = -f \\ m\ddot{y}_c = N - mg = 0 \\ I_c\ddot{\varphi} = -fR \end{cases}$ 与 $f = \mu N$ 需要求解$\ddot{x}_c, \ddot{\varphi}$ 得到：$\ddot{x}_c = -\mu g$ $\ddot{\varphi} = -\frac{5\mu g}{2R}$

则有t时刻质心速度：$\dot{x}_c = v_0 - \mu g t$ t时刻转动角速度：$\dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{5\mu g}{2R}t$ 其中一个会先到零。

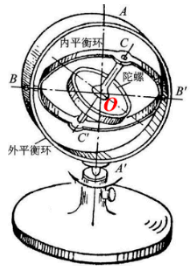
① 如果速度为零，角速度非零，则往回运动：求解得到：$\omega_0 > \frac{5v_0}{2R}$

② 如果角速度为零，速度非零，则继续前进，角速度变为顺时针

3. 复杂问题：小球放到斜面上或小球与大球的作用。

斜面上的方程：$\begin{cases} m\ddot{x}_c = -F_f + mg\sin\theta \\ m\ddot{y}_c = F_N - mg\cos\theta = 0 \\ I_c\ddot{\varphi} = -F_f R \end{cases}$ 与 $F_f = \mu F_N$ 如果斜面运动，需要加上斜面的分析

3.5 刚体的定点转动



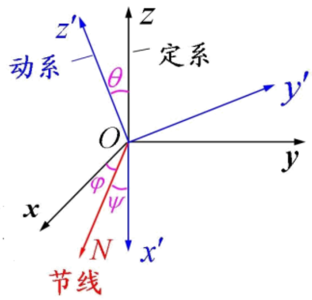
回转仪陀螺的O点始终不动

定点转动 刚体转动时，如果**刚体内只有一点始终保持不动**，则叫定点转动。

3.5.1 欧拉角

欧拉角 刚体作定点转动时，选**这个定点作为坐标系的原点**，用**三个独立的角度**来确定**转动轴的取向**（该转动轴不断改变）和**刚体绕这轴线所转动的角度**，这三个能够独立变化的角度叫欧拉角。

我们讨论**经典欧拉角**：① 绕 $z \to \varphi$ ② 绕 $N \to \theta$ ③ 绕 $z' \to \psi$

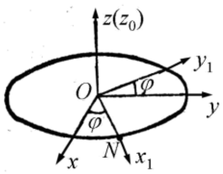


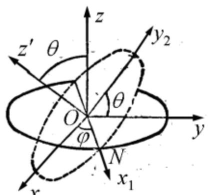
进动角 $\boldsymbol{\varphi}$ $0 \le \varphi \le 2\pi$ 转轴因为进动角产生间接变化

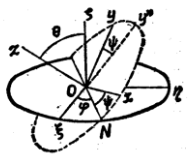
章动角 $\boldsymbol{\theta}$ $0 \le \theta \le \pi$ ON 叫节线 导致转轴直接变化，最终影响z'的方向

自转角 $\boldsymbol{\psi}$ $0 \le \psi \le 2\pi$

外旋内旋 根据旋转轴是否固定分为内旋和外旋，不论哪种定义下的欧拉角，内旋效果皆等价于颠倒顺序后的外旋效果。


进动角

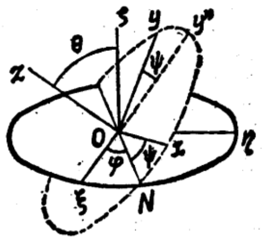

章动角


自转角

矩阵表示 二维平面内绕z轴的转动: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

三维空间内绕z轴的转动: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 绕不同轴的转动交换之后不相等。

3.5.2 欧拉运动学方程

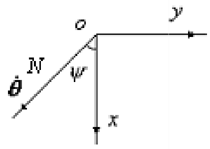


方程 $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega_x \hat{\imath} + \omega_y \hat{\jmath} + \omega_z \hat{k}$ $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\vec{\boldsymbol{\varphi}}} + \dot{\vec{\boldsymbol{\theta}}} + \dot{\vec{\boldsymbol{\psi}}}$ x, y, z为末态坐标轴

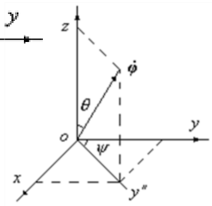
① **自转角速度** $\dot{\vec{\psi}}$ (沿自转轴Oz) $\dot{\psi}_x = 0,\ \dot{\psi}_y = 0,\ \dot{\psi}_z = \dot{\psi}$

② **章动角速度** $\dot{\vec{\theta}}$ (沿ON方向) $\dot{\theta}_x = \dot{\theta}\cos\psi,\ \dot{\theta}_y = -\dot{\theta}\sin\psi,\ \dot{\theta}_z = 0$

③ **进动角速度** $\dot{\vec{\varphi}}$ (沿着固定轴$O\zeta$方向) $\begin{cases} \dot{\varphi}_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \dot{\varphi}_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\varphi}_z = \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}$



章动角速度



进动角速度

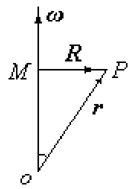
$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi}_x + \dot{\theta}_x + \dot{\varphi}_x \\ \omega_y = \dot{\psi}_y + \dot{\theta}_y + \dot{\varphi}_y \\ \omega_z = \dot{\psi}_z + \dot{\theta}_z + \dot{\varphi}_z \end{cases}$ 将各量代入上式得: $\begin{cases} \boldsymbol{\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi} \\ \boldsymbol{\omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi} \\ \boldsymbol{\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}} \end{cases}$

方程解析 由欧拉运动学方程看出: 如果**φ, θ, ψ和时间的关系为已知**, 则可利用上式计算出**角速度在动坐标轴x, y, z上的三个分量**; 反之如果在任意时刻**t, ω的各分量为已知**, 利用上式可**求出φ, θ, ψ和时间t的关系**。

3.5.3 定点转动刚体上任一点速度和加速度

转动瞬轴 刚体作定点转动时, 角速度矢量虽然都通过定点O, 但其取向则随着时间的改变而改变, 我们把**某一瞬时角速度$\vec{\omega}$的取向**, 也就是在**该瞬时的转动轴**叫做**转动瞬轴**。

速度 设在某一瞬时, 刚体的**总角速度矢量**和为$\vec{\omega}$, 它的取向沿着该时刻的转动瞬轴OM, 在此时刻刚体内任意点P的线速度为: $\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$



加速度 刚体内任一点的加速度: $\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{d}t} \times \vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$

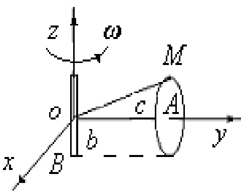
$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{d}t} \times \vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}})$ $\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}$ **转动加速度** $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{R}$ **向轴加速度**

一般运动 刚体的一般运动: 看成是**随基点的平动**和**绕基点的定点转动**的合成。
刚体作一般运动时, 刚体内任一点**P的速度和加速度为**:

$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_A + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}'$ $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}_A + \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{d}t} \times \vec{\boldsymbol{r}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}')$ 式中 $\vec{r}'$ 是P点相对基点的位矢

一般运动中向轴加速度ω与r的关系较为复杂, 不做处理。

例题 1. 碾磨机碾轮的边缘沿水平面作纯滚动, 轮的水平轴则以匀角速度$\vec{\omega}$绕铅垂轴BO转动, 如$OA = c$, $OB = b$,试求轮上最高点的速度及加速度的大小。



如图建立坐标系$O - xyz$: $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ $\vec{\omega}_A = -\omega_A\hat{\jmath}$ $\because$ 作纯滚动 $\therefore$ $\omega c = \omega_A b$

则碾轮的**总角速度**$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_A = \omega\hat{k} - \omega_A\hat{\jmath} = \omega\left(\hat{k} - \frac{c}{b}\hat{\jmath}\right)$ $\overrightarrow{OM} = c\hat{\jmath} + b\hat{k}$

最高点M的速度 $\vec{v}_M = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OM} = \omega\left(\hat{k} - \frac{c}{b}\hat{\jmath}\right) \times \left(c\hat{\jmath} + b\hat{k}\right) = -2\omega c\hat{\imath}$ 矢量硬算

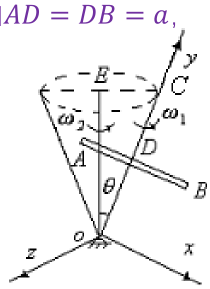
$\therefore v_M = 2\omega c$ $\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega c}{b}\frac{\mathrm{d}\hat{\jmath}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega c}{b}(-\omega\hat{\imath}) = \frac{c}{b}\omega^2\hat{\imath}$

最高点M的加速度 $\vec{a}_M = \frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_M = -3c\omega^2\hat{\jmath} - \frac{c^2\omega^2}{b}\hat{k}$

$$\therefore a_M = \sqrt{(-3c\omega^2)^2 + \left(-\frac{c^2\omega^2}{b}\right)^2} = c\omega^2\sqrt{9+\frac{c^2}{b^2}}$$ 总角速度方向往外侧

对速度矢量直接求导：$\frac{d}{dt}(-2\omega c\hat{\imath}) = -2\omega c\frac{d\hat{\imath}}{dt}$　　最高点M是一个动点，不是同一点

2. 转轮AB，绕OC轴转动的角速度为ω_1，而OC绕竖直线OE转动的角速度则为ω_2，如$AD = DB = a$，$OD = b, \angle COE = \theta$，试求转轮最低点$B$的速度。



如图建立坐标系$O-xyz$：$\vec{\omega}_1 = \omega_1\hat{\jmath}$　　$\vec{\omega}_2 = -\omega_2\sin\theta\,\hat{\imath} + \omega_2\cos\theta\,\hat{\jmath}$

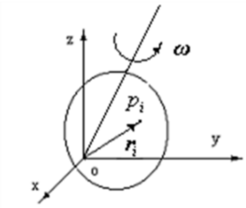
转轮的角速度为 $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = -\omega_2\sin\theta\,\hat{\imath} + (\omega_1 + \omega_2\cos\theta)\hat{\jmath}$　位矢：$\vec{r}_B = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}$

转轮最低点B的速度　$\vec{v}_B = \vec{\omega}\times\vec{r}_B = [-\omega_2\sin\theta\,\hat{\imath} + (\omega_1+\omega_2\cos\theta)\hat{\jmath}]\times(a\hat{\imath}+b\hat{\jmath})$

$= -(a\omega_1 + b\omega_2\sin\theta + a\omega_2\cos\theta)\hat{k}$　　$\therefore v_B = a\omega_1 + \omega_2(b\sin\theta + a\cos\theta)$

$\vec{v}_B$方向垂直纸面向里

3.5.4 刚体定点转动的角动量和转动动能



3.5.4.1 刚体的角动量

角动量　整个刚体对O点的角动量：$\vec{J} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i)$

$\because \vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i$　　$\therefore \vec{J} = \sum_{i=1}^{n} m_i[\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)] = \sum_{i=1}^{n} m_i[\vec{\omega}r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)]$

其中关系：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$　　上式表明：角动量$\vec{J}$一般不与角速度$\vec{\omega}$共线。

分量形式　下面求在一般情况下, 角动量 $\vec{J}$ 的分量表示式: 直角坐标系 $\vec{r}_i = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}$　$\vec{\omega} = \omega_x\hat{\imath} + \omega_y\hat{\jmath} + \omega_z\hat{k}$

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i\left[\omega_x\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2\right) - x_i\left(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i\right)\right]$$ 做整理可得:

$$J_x = \omega_x\sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i^2+z_i^2\right) - \omega_y\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i - \omega_z\sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$ 同理可得:

$$J_y = -\omega_x\sum_{i=1}^{n} m_i y_i x_i + \omega_y\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+z_i^2\right) - \omega_z\sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$$

$$J_z = -\omega_x\sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i - \omega_y\sum_{i=1}^{n} m_i z_i y_i + \omega_z\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)$$

轴转动惯量
$$\begin{cases} I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i^2+z_i^2\right) \\ I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+z_i^2\right) \\ I_{zz} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+y_i^2\right) \end{cases}$$
惯量积
$$\begin{cases} I_{yz} = I_{zy} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \\ I_{zx} = I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i \\ I_{xy} = I_{yx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \end{cases}$$

质量均匀　对**质量均匀**(或按一定规律)分布、且形状规则的刚体，其轴转动惯量、惯量积为:

轴转动惯量
$$\begin{cases} I_{xx} = \int(y^2+z^2)dm \\ I_{yy} = \int(x^2+z^2)dm \\ I_{zz} = \int(x^2+y^2)dm \end{cases}$$
惯量积
$$\begin{cases} I_{yz} = I_{zy} = \int yzdm \\ I_{zx} = I_{xz} = \int zxdm \\ I_{xy} = I_{yx} = \int xydm \end{cases}$$

角动量　所以在一般情况下，角动量$\vec{J}$的分量表示式：
$$\begin{cases} \boldsymbol{J_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z} \\ \boldsymbol{J_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z} \\ \boldsymbol{J_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z} \end{cases}$$

惯量张量　三个轴转动惯量和惯量积，可以排成矩阵：$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$ 此矩阵叫做**对O点的惯量张量**

角动量用矩阵表示为：$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$　　或 $\boldsymbol{\vec{J} = \vec{I}\cdot\vec{\omega}}$ 或 $\vec{J} = \hat{I}\cdot\vec{\omega}$

3.5.4.2 刚体的转动动能

转动动能 刚体对定点O的转动动能：$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{w}_i\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$

$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\omega}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{v}_i)$ 因为 $\boldsymbol{\vec{v}_i=\vec{\omega}\times\vec{r}_i}$ 所以：

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\vec{\omega}}\cdot\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\vec{r}}_i\times m_i\boldsymbol{\vec{v}}_i)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\vec{\omega}}\cdot\boldsymbol{\vec{J}}=\frac{1}{2}\left(\omega_x\hat{\imath}+\omega_y\hat{\jmath}+\omega_z\hat{k}\right)\cdot\left(J_x\hat{\imath}+J_y\hat{\jmath}+J_z\hat{k}\right)$$

分量形式

$$\begin{cases}J_x=I_{xx}\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z\\J_y=-I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y-I_{yz}\omega_z\\J_z=-I_{zx}\omega_x-I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z\end{cases}$$

$$\boldsymbol{T=\frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2+I_{yy}\omega_y^2+I_{zz}\omega_z^2-2I_{yz}\omega_y\omega_z-2I_{zx}\omega_z\omega_x-2I_{xy}\omega_x\omega_y\right)}$$ **刚体对定点O的转动动能**

3.5.4.3 转动惯量

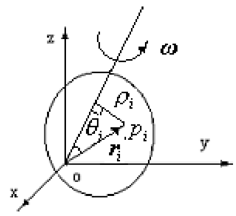
转动惯量 $T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{\vec{v}}_i\cdot\boldsymbol{\vec{v}}_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\boldsymbol{\vec{\omega}}\times\boldsymbol{\vec{r}}_i)\cdot(\boldsymbol{\vec{\omega}}\times\boldsymbol{\vec{r}}_i)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\omega^2r_i^2\sin^2\theta_i=\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{n}m_i\rho_i^2=\frac{1}{2}I\omega^2$

这里的算法有很多，例如$\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{v})=\vec{\omega}\cdot[\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]=\vec{\omega}\cdot[\vec{\omega}r^2-\vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})]=\omega^2r^2-(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2$

$\boldsymbol{I=\sum_{i=1}^{n}m_i\rho_i^2}$ 称为刚体**绕转动瞬轴**的转动惯量，它代表物体在**转动时惯性的量度**。

刚体绕通过空间一点O的任意瞬时轴的转动惯量 ：

$$T=\frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2+I_{yy}\omega_y^2+I_{zz}\omega_z^2-2I_{yz}\omega_y\omega_z-2I_{zx}\omega_z\omega_x-2I_{xy}\omega_x\omega_y\right)=\frac{1}{2}I\omega^2$$



令：$\boldsymbol{\omega_x=\alpha\omega\quad\omega_y=\beta\omega\quad\omega_z=\gamma\omega}$ （α、β、γ为坐标轴的方向余弦）

则 $I=I_{xx}\alpha^2+I_{yy}\beta^2+I_{zz}\gamma^2-2I_{yz}\beta\gamma-2I_{zx}\gamma\alpha-2I_{xy}\alpha\beta$

用矩阵可表示为：$I=(\alpha\quad\beta\quad\gamma)\begin{pmatrix}I_{xx}&-I_{xy}&-I_{xz}\\-I_{yx}&I_{yy}&-I_{yz}\\-I_{zx}&-I_{zy}&I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ **惯量张量与转动惯量的关系**

3.5.4.4 惯量椭球和惯量主轴

引入 惯量张量的每个元素都是坐标的函数，如果采用静坐标系，那么刚体转动时，惯量系数随之变化，这是不方便的。因此，通常选取**固连在刚体上**、并随刚体一同转动的动坐标系，这样惯量系数都为常数。固连在刚体上的动坐标系可任意选取，当选取恰当的坐标系可**使惯量积为零**，从而使问题更为简化。

惯量椭球 为消去转动惯量中的惯量积，在**转动轴上截取一线段**，$\overline{OQ}=\frac{1}{\sqrt{I}}=R$ 其中I为刚体绕该轴的转动惯量，则**Q点的坐标**为：$x=\alpha R\quad y=\beta R\quad z=\gamma R$ 因为通过O点有很多转轴，就有很多的Q点，这些点的**轨迹方程满足：$\boldsymbol{R^2I=1}$** 又有 $I=I_{xx}\alpha^2+I_{yy}\beta^2+I_{zz}\gamma^2-2I_{yz}\beta\gamma-2I_{zx}\gamma\alpha-2I_{xy}\alpha\beta$

将Q点的坐标与上式联立得：$I_{xx}x^2+I_{yy}y^2+I_{zz}z^2-2I_{yz}yz-2I_{zx}zx-2I_{xy}xy=1$

上式代表一个**中心在O点的椭球**，通常叫做**惯量椭球**。

画出椭球后，可求出刚体绕该轴转动时的转动惯量：$I=\frac{1}{R^2}$

惯量主轴 每一椭球都有三条相互垂直的主轴，如果**以此三主轴为坐标轴**，则椭球方程中**含有异坐标相乘的项统统消失**，即惯量积为零。**惯量椭球的主轴叫惯量主轴**，而对惯量主轴的转动惯量叫**主转动惯量**，并改以I_1、I_2、I_3表示之。取惯量主轴为坐标轴，则**惯量椭球方程、角动量、转动动能、转动惯量**简化为：

$$I_1x^2+I_2y^2+I_3z^2=1\qquad\hat{I}=\begin{pmatrix}I_1&0&0\\0&I_2&0\\0&0&I_3\end{pmatrix}\qquad\begin{cases}\vec{J}=I_1\omega_x\hat{\imath}+I_2\omega_y\hat{\jmath}+I_3\omega_z\hat{k}\\T=\frac{1}{2}\left(I_1\omega_x^2+I_2\omega_y^2+I_3\omega_z^2\right)\\I=I_1\alpha^2+I_2\beta^2+I_3\gamma^2\end{cases}$$

对惯量主轴来说，椭球与主轴交点的位矢R的方向和椭球上该点的法线方向重合。对均匀刚体，且此均匀刚体有对称轴，那么此对称轴就是惯量主轴。如果$I_1=I_2$，那么椭球变为**旋转椭球**，在xy平面内的各轴都是主轴，如果$I_1=I_2=I_3$，椭球变为球，所有通过O点的轴都是主轴。

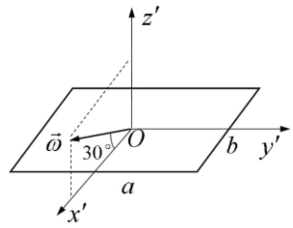
惯量积意义 如果转轴不垂直于飞轮面，而是有个偏角的话，这个转动的惯性就不只体现在转轴这一个轴上，在垂直于转轴的另外两个轴上也会产生力矩，需要用其他的量来表示这个力矩。

转动惯量描述的是刚体质量对于转轴的集中度，**惯量积反映了刚体质量分布相对于转轴的对称度，对称度越好，惯量积越趋于零。**

例题 1. 一质量为m，长宽分别为a b的匀质矩形薄板，其中心为O点，建立如图所示刚体坐标系$O-x'y'z'$，且其坐标轴分别为刚体矩形板的对称轴

① 求该矩形板对O点的惯量张量

② 已知某瞬时矩形板绕过中心且与Ox'，Oy'，Oz'轴分别成30°，60°，90°的轴以角速度转动，求该瞬时圆盘对中心O点的角动量和圆盘的动能，以及圆盘对此轴的转动惯量.



① 因为刚体坐标系$O-x'y'z'$的坐标轴为惯量主轴 $I_1=I_{x'x'}=\frac{1}{12}ma^2$

同理：$I_2=I_{y'y'}=\frac{1}{12}mb^2$ 有垂直轴定理：$I_3=I_{z'z'}=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$

惯量积为零：$I_{x'y'}=I_{y'x'}=I_{y'z'}=I_{z'y'}=I_{z'x'}=I_{x'z'}=0$

该圆盘对O点的惯量张量：$I=\begin{pmatrix} 1/12\,ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12\,mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12\,m(a^2+b^2) \end{pmatrix}$

② $\vec{\omega}=\omega_{x'}\hat{\imath}'+\omega_{y'}\hat{\jmath}'+\omega_{z'}\hat{k}'=\omega\cos 30°\ \hat{\imath}'+0\hat{\jmath}'+\omega\sin 30°\ \hat{k}'\ =\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\hat{\imath}'+0\hat{\jmath}'+\frac{1}{2}\omega\hat{k}'$

角动量 $\vec{L}_o=I_1\omega_{x'}\hat{\imath}'+I_2\omega_{y'}\hat{\jmath}'+I_3\omega_{z'}\hat{k}'=\left(\frac{\sqrt{3}}{24}ma^2\omega\right)\hat{\imath}'+\left(\frac{1}{24}m(a^2+b^2)\omega\right)\hat{k}'$

动能 $T=\frac{1}{2}I_1\omega_{x'}^2+\frac{1}{2}I_2\omega_{y'}^2+\frac{1}{2}I_3\omega_{z'}^2=\frac{1}{32}ma^2\omega^2+\frac{1}{96}m(a^2+b^2)\omega^2=\left(\frac{1}{24}a^2+\frac{1}{96}b^2\right)m\omega^2$

转动惯量 $I_l=\left(\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{48}b^2\right)m$

3.5.4.5 刚体运动的几何化图像

几何图像 惯量椭球**球心**用长$\sqrt{2T}/J$的杆固定在地面上，刚体运动过程等价于椭球在地面上无滑滚动的过程。

3.5.5 欧拉动力学方程

力学本质 $\dot{\vec{J}}=\vec{M}$ 取惯量主轴：$\vec{J}=I_1\omega_x\hat{\imath}+I_2\omega_y\hat{\jmath}+I_3\omega_z\hat{k}$

对$\vec{J}$的求导包括两部分： ① 对ω各项的求导 ② 对$\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}$的求导 $\dot{\hat{e}}_i=\vec{\omega}\times\hat{e}_i\ \ (i=x,y,z)$

方程形式
$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_x-(I_2-I_3)\omega_y\omega_z=M_x \\ I_2\dot{\omega}_y-(I_3-I_1)\omega_z\omega_x=M_y \\ I_3\dot{\omega}_z-(I_1-I_2)\omega_x\omega_y=M_z \end{cases}$$