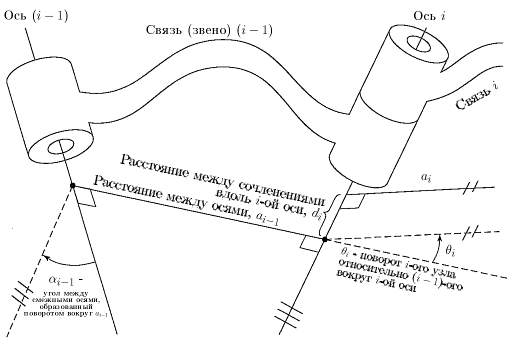
Лекция № 2
Решение прямой кинематической задачи

Анастасия А. Усова
anastasy.edu@gmail.com

Содержание лекции

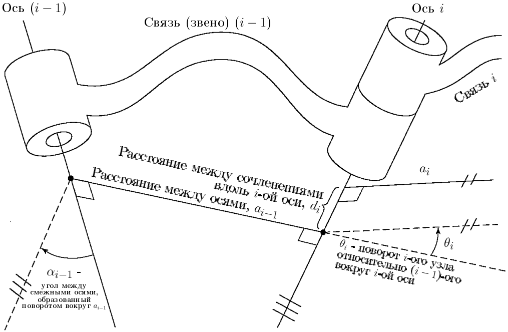
- Задание систем координат
- Определение DH-параметров
- Однородные преобразования
- Итерационный алгоритм вычисления преобразования
- Решение прямой кинематической задачи
- Пример
- Задания для самостоятельного решения

Промежуточные звенья цепи



- Каждое сочленение (узел) насажено на некоторую ось. Расстояние между этими осями определяется параметром a — длина общего перпендикуляра, ограниченного смежными осями (может быть равна нулю, если оси лежат в одной плоскости).
- Расстояние между перпендикулярами двух смежных звеньев, измеренное вдоль i-ой оси (то есть оси i-ого узла), обозначается d_i и называется смещением звена (link offset).
- Угол между перпендикулярами a_{i-1} и a_i, образованный поворотом вокруг оси i-ого сочленения, обозначается θ_i и называется угол сочленения (joint angle).
- Угол между смежными осями, образованный поворотом вокруг a_{i-1}, обозначается α_{i-1}.

Крайние звенья цепи



- Для крайних звеньев полагаем $a_0 = a_n = 0$ и $\alpha_0 = \alpha_n = 0$.
- Параметры d_i и θ_i корректно определяются для сочленений, начиная со 2 и до $n-1$. Поэтому для вращательного первого звена начальное значение θ_1 выбирается произвольно, а d_1 полагаем равным 0. Симметрично, для поступательного первого звена — начальное смещение d_1 выбираем произвольно, а угол θ_1 договоримся брать равным 0.

Системы координат

Алгоритм и правила введения систем координат

1. В каждой точке сочленения манипулятора ввести оси Oz.
   Правило: Oz_i есть ось,
   - вдоль которой осуществляется поступательное движение для прямолинейно движущегося звена, либо
   - вокруг которой осуществляется вращательное движение для вращательного звена;
2. Выбрать базовую (неподвижную) систему координат.

Системы координат: выбор O_i

3. Определить точку O_i — начало системы координат i-ого сочленения. Выбор O_i осуществляется по **правилам** в зависимости от ситуации
   - 3.1 В точке пересечения общей нормали a_i (пунктирная линия) с z_i (см. Рис. к п.3.1.)
   - 3.2 В точке пересечения осей z_i и z_{i+1} (т.е. $O_i = z_i \cap z_{i+1}$, см. Рис. к п.3.2.)
   - 3.3 В любом удобном месте вдоль z_i (см. Рис. к п.3.3.)

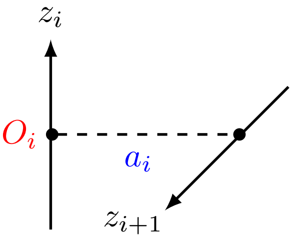


Рисунок к п. 3.1.

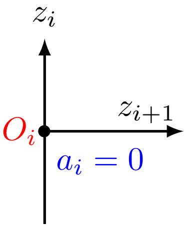


Рисунок к п. 3.2.

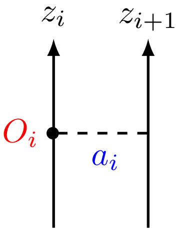


Рисунок к п. 3.3.

Системы координат: определение x_i

4. Выбор оси абсцисс x_i для i-ого сочленения по **правилу**:
   4.1 Ось x_i должна быть направлена вдоль общего перпендикуляра между z_i и z_{i+1} в направлении $(i+1)$ сочленения (т.е. $x_i \perp z_i$ и $x_i \perp z_{i+1}$, см. рис. 4.3.)
   4.2 Ось x_i есть нормаль к плоскости образованной векторами z_i и z_{i+1} (т.е. $x_i \perp z_i$ и $x_i \perp z_{i+1}$, см. рис. 4.4.)
   4.3 Для случая на рис. 4.5., когда оси z_i и z_{i+1} параллельны, ось x_i проводят в любом удобном направлении, ортогонально оси z_i (но при этом рекомендуется проводить ее так, чтобы d_{i+1} равнялась нулю, *то есть* расстояние между x_i и x_{i+1} вдоль z_{i+1} нулевое, что означает $x_i \cap x_{i+1} \neq \emptyset$).

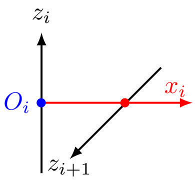


Рисунок к п. 4.3.

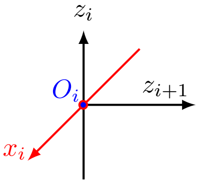


Рисунок к п. 4.4.

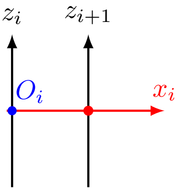


Рисунок к п. 4.5.

Системы координат: назначение y_i

5. Выбор оси абсцисс y_i для i-ого сочленения по **правилу** «правой руки», а именно поворот от x_i к y_i вокруг z_i должен осуществляться против часовой стрелки.
6. Присвоить системы координат для базы и конечного звена («схват» или end-effector)

Системы координат базы и схвата

Определяем **базовую** (неподвижную, нулевую $\{0\}$) систему координат, *иными словами* **систему отсчета**.

1. Поскольку выбор базовой системы координат произволен, то удобно провести ось z_0, совпадающей с z_1.
2. Начало O_0 выбирается так, что при нулевых отклонениях $O_0 = O_1$.
3. При таком определении базовой системы координат $a_0 = 0$ и $\alpha_0 = 0$. Кроме того, это гарантирует, что $d_1 = 0$, если первое звено является вращательным, и $\theta_1 = 0$, если оно поступательное.

Определим конечную систему координат, систему координат для **схвата**.

1. Если сочленение n вращательное, то
   – направление x_n должно совпадать с x_{n-1}, когда $\theta_n = 0$
   – начало координат $\{n\}$ располагается там, где $d_n = 0$.
2. Если сочленение n поступательное, то
   – направление x_n должно быть таким, чтобы угол $\theta_n = 0$
   – начало координат $\{n\}$ располагается в точке пересечения x_{n-1} и z_n при $d_n = 0$.

Параметры Денавита-Хартенберга

Таблица параметров Денавита-Хартенберга (DH-параметры) последовательно фиксирует смещение и поворот систем координат относительно друг друга.

Звено, i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	a_0	α_0	d_1	θ_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	a_{n-1}	α_{n-1}	d_n	θ_n

a_{i-1} — расстояние от O_{i-1} начала координат $(i-1)$-того звена до точки пересечения x_{i-1} и z_i вдоль x_{i-1}: $a_{i-1} = \mathrm{dist}\{O_{i-1}, (x_{i-1} \cap z_i)\}_{x_{i-1}}$;

α_{i-1} — угол между z_{i-1} и z_i, измеренный вокруг x_{i-1}: $\alpha_{i-1} = \angle\{z_{i-1}, z_i\}_{x_{i-1}}$;

d_i — расстояние от O_i начала координат (i)-того звена до точки пересечения x_{i-1} и z_i вдоль z_i: $d_i = \mathrm{dist}\left\{O_i, (x_{i-1} \cap z_i)\right\}_{z_i}$;

θ_i — угол между x_{i-1} и x_i, измеренный вокруг z_i: $\theta_i = \angle\{x_{i-1}, x_i\}_{z_i}$.

Однородные преобразования координат

DH-параметры описывают 2 преобразования систем координат при переходе от $(i-1)$-ого к i-ому звену.

• Первое преобразование $A1$ осуществляет трансформацию вдоль и/или вокруг предыдущего звена $i-1$, *т.е.* параметры a_{i-1} и α_{i-1}. Это преобразование включает поворот $R_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1})$ вокруг x_{i-1} и смещение вдоль x_{i-1} — $P_{x_{i-1}}(a_{i-1}) = (a_{i-1},\, 0,\, 0)^\top$:

$$R_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} \\ 0 & s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} \end{pmatrix} \Rightarrow A1 = \left(\begin{array}{c|c} R_{x_{i-1}}(\alpha_{i-1}) & P_{x_{i-1}}(a_{i-1}) \\ \hline \mathcal{O}_{1\times 3} & 1 \end{array}\right)$$

• Второе преобразование $A2$ фиксирует изменения, произошедшие вдоль и/или вокруг звена i, *т.е.* учитывает параметры d_i и θ_i. Это преобразование включает поворот $R_{z_i}(\theta_i)$ вокруг z_i и смещение вдоль z_i — $P_{z_i}(d_i) = (0,\, 0,\, d_i)^\top$, где

$$R_{z_i}(\theta_i) = \begin{pmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A2 = \left(\begin{array}{c|c} R_{z_i}(\theta_i) & P_{z_i}(d_i) \\ \hline \mathcal{O}_{1\times 3} & 1 \end{array}\right)$$

$\mathcal{O}_{m\times n}$ — нулевая матрица размером $m \times n$

Однородные преобразования координат (продолжение)

- Переход от $(i-1)$-ого к i-ому звену определяется матрицей перехода ${}^{i-1}_{i}T$

$$
{}^{i-1}_{i}T := A1(a_{i-1},\alpha_{i-1})\cdot A2(d_i,\theta_i) = \left(\begin{array}{ccc|c}
c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\
s_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -d_i\cdot s_{\alpha_{i-1}} \\
s_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & d_i\cdot c_{\alpha_{i-1}} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

- Положение O_i начала координат i-ого звена определяется последним столбцом в матрице ${}^{i-1}_{i}T$.
- Переход от базовой (неподвижной) системы координат к системе координат, определенной для конечного звена (схвата), находится последовательным произведением матриц перехода

$$
{}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}T\cdot{}^{1}_{2}T\cdot\ldots\cdot{}^{n-1}_{n}T = \left(\begin{array}{c|c}
{}^{0}_{n}R & {}^{0}P_n \\
\hline
\mathcal{O}_{1\times 3} & 1
\end{array}\right),
$$

где вектор ${}^{0}P_n$ задает положение конечного звена в базовой (неподвижной) системе координат.

Решение прямой кинематической задачи

ЗАДАЧА *состоит в вычислении положения конечного звена в неподвижной системе координат базового звена.*

• Переход от базовой (неподвижной) системы координат к системе координат, определенной для конечного звена, находится по формуле

$$
{}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}_{n}T = \left(\begin{array}{c|c} {}^{0}_{n}R & {}^{0}P_n \\ \hline \mathcal{O}_{1\times 3} & 1 \end{array}\right),
$$

где вектор ${}^{0}P_n$ задает положение конечного звена в неподвижной системе координат.

• Соответственно решением служат координаты вектора ${}^{0}P_n$

$$
\begin{cases} x(\theta, d, a, \alpha) & = & {}^{0}P_n^x \\ y(\theta, d, a, \alpha) & = & {}^{0}P_n^y \\ z(\theta, d, a, \alpha) & = & {}^{0}P_n^z \end{cases} \qquad (1)
$$

• Параметры a, α являются неизменными константами, а величины θ и d — переменными. Для удобства переменные величины θ и d обозначают одной буквой q_i, где индекс i есть последовательный номер звена.

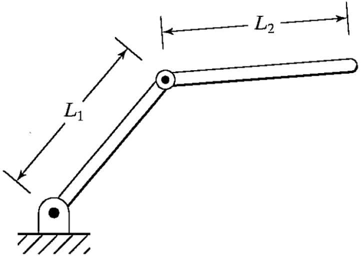
! Формулы (1) определяют нелинейный переход от обобщенных координат q_i к декартовым координатам (x, y, z).

Пример

Решить прямую кинематическую задачу для плоского двухзвенного манипулятора, изображенного на рисунке.

1. DH параметры:

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	L_1	0	0	θ_2
3	L_2	0	0	0



2. Матрицы перехода

$$ {}^0_1T = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^1_2T = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^2_3T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Здесь $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$, $i = 1, 2$.

Пример (продолжение)

3. Матрица перехода из базовой системы координат в систему координат конечного звена:

$$
{}^0_3T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_2 c_{12} + L_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_2 s_{12} + L_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

4. Решением прямой кинематической задачи являются координаты конечного звена, выраженные в базовой системе координат. Вычисленные координаты расположенны в последнем столбце матрицы T_2^0.

$$
\begin{aligned}
x &= x(\theta_1, \theta_2) = L_2 c_{12} + L_1 c_1 \\
y &= y(\theta_1, \theta_2) = L_2 s_{12} + L_1 s_1 \\
z &= z(\theta_1, \theta_2) = 0
\end{aligned}
$$

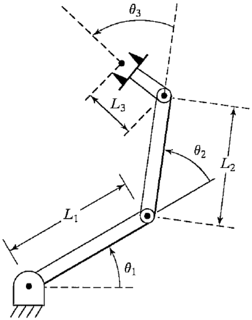
Длины L_1, L_2 — постоянные величины.

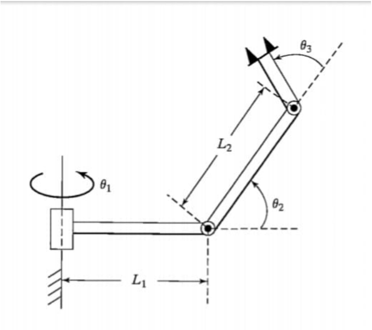
Поскольку по осям z движения не происходит (манипулятор плоский), координата z в найденных формулах всегда постоянна и равна 0.

Здесь $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$.

Задания для самостоятельного решения

Решить прямую кинематическую задачу для трехзвенных манипуляторов, представленных на рисунках.





1. Решения можно прислать на почту anastasy.edu@gmail.com.
2. Вопросы можно писать на указанный выше электронный адрес.

Всем спасибо!