Лекция № 4
Линейная и угловая скорости звеньев робота

Анастасия А. Усова

anastasy.edu@gmail.com

Содержание лекции

- Понятие линейной и угловой скорости твёрдого тела
- Линейная и угловая скорости звена
- Пример
- Задания для самостоятельного решения

Изменение позиции во времени

- Изменение позиции Q в некотором базисе B есть вектор ${}^BV_Q$ — скорость точки Q относительно базиса B, которая определяется соотношением

$$ {}^BV_Q = \frac{d}{dt}{}^BQ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^BQ(t+\Delta t) - {}^BQ(t)}{\Delta t} $$

! *Очень важно определить систему координат, в которой осуществляется дифференцирование вектора.*

- Вектор скорости можно определить в произвольной системе координат, в том числе и отличной от радиус-вектора самого положения

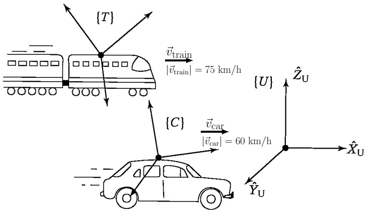
$$ {}^A\left({}^BV_Q\right) = {}^A\frac{d}{dt}{}^BQ = {}^A_BR\,{}^BV_Q, \tag{1} $$

В таких обозначениях дифференцирование происходит в системе координат B, а вектор скорости выражен в системе координат A. Здесь ${}^A_BR$ — матрица перехода (по существу, поворота) из системы координат B в систему координат A[1]

[1] Формула (1) справедлива для любого вектора.

Изменение позиции во времени. Пример

Заданы постоянные матрицы перехода ${}^U_T R$ и ${}^U_C R$ из базисов $\{T\}$ и $\{C\}$ в неподвижную систему координат $\{U\}$, соответственно.



(а) Найти скорость изменения положения начала координат $P_{C_{org}}$ базиса $\{C\}$ в универсальной системе координат $\{U\}$, *т.е.* ${}^U\dfrac{d}{dt}\,{}^U P_{C_{org}}$;

(б) Выразить вектор скорости ${}^U V_{T_{org}}$ начала координат $P_{T_{org}}$ базиса $\{T\}$ в системе координат $\{C\}$;

(в) Выразить вектор скорости ${}^T V_{C_{org}}$ начала координат $P_{C_{org}}$, заданный в $\{T\}$, в системе координат $\{C\}$;

Решение: (а) ${}^U\dfrac{d}{dt}\,{}^U P_{C_{org}} = {}^U V_{C_{org}} = v_C = (60, 0, 0)^\top$;

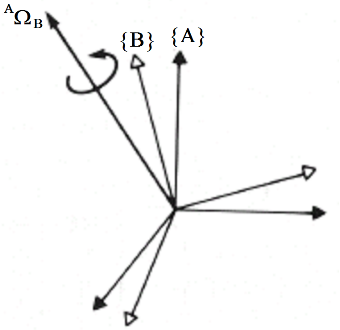
(б) ${}^C\left({}^U V_{T_{org}}\right) = {}^C V_T = {}^C_U R V_T = {}^U_C R^{-1} V_T = {}^U_C R^{-1} (75, 0, 0)^\top$;

(в) ${}^C\left({}^T V_{C_{org}}\right) = {}^C_T R\left({}^T V_{C_{org}}\right) = {}^C_U R\left({}^U_T R\left({}^T V_{C_{org}}\right)\right) = -{}^U_C R^{-1}\left({}^U_T R\,(15, 0, 0)^\top\right)$ или

${}^C\left({}^T V_{C_{org}}\right) = {}^C_T R\left({}^T V_{C_{org}}\right) = {}^C_T R\left({}^T_U R\left({}^U V_{C_{org}}\right)\right) = {}^C_U R\left({}^U V_{C_{org}}\right) = {}^U_C R^{-1} v_C = {}^U_C R^{-1}(60, 0, 0)^\top$.

Вектор угловой скорости

Рассмотрим систему координат $\{B\}$, полученную вращением базиса $\{A\}$ вокруг ${}^{A}\Omega_{B}$.



Базис $\{B\}$ вращается с угловой скоростью ${}^{A}\Omega_{B}$ относительно $\{A\}$

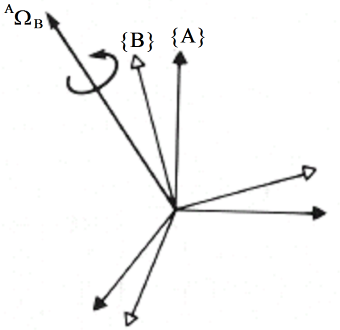
- Вектор ${}^{A}\Omega_{B}$ описывает поворот $\{B\}$ относительно $\{A\}$.
- Направление вектора ${}^{A}\Omega_{B}$ определяет ось вращения в каждый момент времени.
- Длина вектора ${}^{A}\Omega_{B}$ задает скорость вращения.

- Поскольку угловая скорость ${}^{A}\Omega_{B}$ суть вектор, то его координаты можно выразить и в любом другом базисе:
- В некотором базисе $\{C\}$ вектор угловой скорости договоримся обозначать ${}^{C}\left({}^{A}\Omega_{B}\right)$.

- Угловая скорость ${}^{U}\Omega_{B}$ отностительно некоторого универсального базиса $\{U\}$ обозначается ω_{B}.
- Вектор угловой скорости ω_{B}, выраженный в системе координат $\{A\}$, обозначается ${}^{A}\omega_{B}$, *т.е.* ${}^{A}\omega_{B} := {}^{A}\left({}^{U}\Omega_{B}\right)$.

Вектор угловой скорости

Рассмотрим систему координат $\{B\}$, полученную вращением базиса $\{A\}$ вокруг ${}^{A}\Omega_{B}$.



Базис $\{B\}$ вращается с угловой скоростью ${}^{A}\Omega_{B}$ относительно $\{A\}$

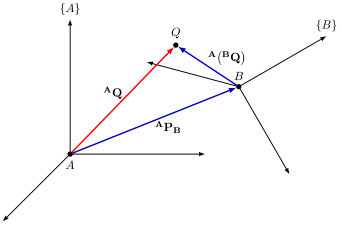
- Вектор ${}^{A}\Omega_{B}$ описывает поворот $\{B\}$ относительно $\{A\}$.
- Направление вектора ${}^{A}\Omega_{B}$ определяет ось вращения в каждый момент времени.
- Длина вектора ${}^{A}\Omega_{B}$ задает скорость вращения.

- Поскольку угловая скорость ${}^{A}\Omega_{B}$ суть вектор, то его координаты можно выразить и в любом другом базисе:
- В некотором базисе $\{C\}$ вектор угловой скорости договоримся обозначать ${}^{C}\left({}^{A}\Omega_{B}\right)$.

- Угловая скорость ${}^{U}\Omega_{B}$ отностительно некоторого универсального базиса $\{U\}$ обозначается ω_{B}.
- Вектор угловой скорости ω_{B}, выраженный в системе координат $\{A\}$, обозначается ${}^{A}\omega_{B}$, *т.е.* ${}^{A}\omega_{B} := {}^{A}\left({}^{U}\Omega_{B}\right)$.

Скорость прямолинейного движения твердого тела

Рассмотрим линейную скорость движения точки Q, заданной в базисе $\{B\}$, и выразим её в координатах базиса $\{A\}$.



Разложение координат точки Q (радиус-вектора $\overrightarrow{AQ}$) в базисе $\{A\}$

- Вектор $^AQ = {}^AP_B + {}^A(^BQ) = {}^AP_B + {}^A_BR\,{}^BQ$ (1)
- Пусть матрица поворота ^A_BR постоянна, и базис $\{A\}$ неподвижен.
- Скорость точки Q зависит от движения системы координат $\{B\}$ и изменения радиус-вектора $\overrightarrow{BQ}$.

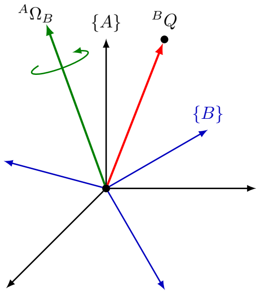
- Дифференцируя равенство (1), получим

$$^AV_Q = \frac{d\,^AQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(^AP_B + {}^A_BR\,{}^BQ\right) = {}^AV_B + {}^A_BR\,{}^BV_Q,$$

где ^AV_B — скорость движения начала системы координат $\{B\}$, измеренное в неподвижном базисе $\{A\}$, а ^BV_Q — скорость движения точки Q относительно базиса $\{B\}$.

Скорость вращательного движения твердого тела

Рассмотрим вращательную компоненту скорости V_Q движения точки Q, заданной в базисе $\{B\}$, и выразим её в координатах базиса $\{A\}$, *т.е.* ${}^{A}V_Q$.

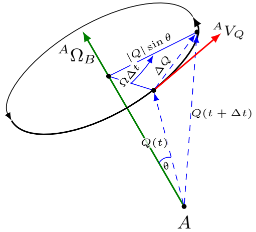


Вектор ${}^{B}Q$, зафиксированный в системе координат $\{B\}$, вращается относительно системы координат $\{A\}$ с угловой скоростью ${}^{A}\Omega_B$

- Пусть вектор ${}^{B}Q$ не движется в базисе $\{B\}$, *т.е.* ${}^{B}V_Q = 0$.
- Перемещение точки Q наблюдается из системы координат $\{A\}$ за счет вращения системы координат $\{B\}$ относительно $\{A\}$.
- Начала систем координат $\{A\}$ и $\{B\}$ совпадают и не совершают поступательных движений.

Скорость вращательного движения твердого тела

$Q(t)$ и $Q(t+\Delta t)$ два положения точки Q, вращающейся вокруг ${}^A\Omega_B$ с угловой скоростью Ω, в моменты времени t и $t+\Delta t$ соответственно.



Скорость точки, обусловленная вращением с угловой скоростью ${}^A\Omega_B$, где $\left|{}^A\Omega_B\right| = \Omega$

- Смещение $\left|\breve{\Delta Q}\right|$ точки ${}^A Q$ за период времени Δt:

$$\left|\breve{\Delta Q}\right| = \left(\left|{}^A Q\right|\sin\theta\right)\cdot\left(\left|{}^A\Omega_B\right|\Delta t\right) \quad \Rightarrow$$

$$\left|{}^A V_Q\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\breve{\Delta Q}\right|}{\Delta t} = \left|{}^A Q\right|\cdot\left|{}^A\Omega_B\right|\sin\theta.$$

- Вектор ${}^A V_Q$ ортогонален оси вращения ${}^A\Omega_B$ и радиус-вектору ${}^A Q$.
- Значит,

$$ {}^A V_Q = {}^A\Omega_B \times {}^A Q $$

Одновременная линейная и вращательная скорости

- В общем случае, дополнительно к вращению базиса $\{B\}$ вокруг ${}^{A}\Omega_{B}$, вектор Q может двигаться поступательно в базисе $\{B\}$, поэтому общая скорость будет складываться из поступательной и вращательной составляющей

$$ {}^{A}V_{Q} = {}^{A}\left({}^{B}V_{Q}\right) + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}Q = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q $$

- Добавляя к последнему пункту поступательное движение системы координат $\{B\}$ относительно $\{A\}$, получим следующее выражение для скорости ${}^{A}V_{Q}$ точки Q

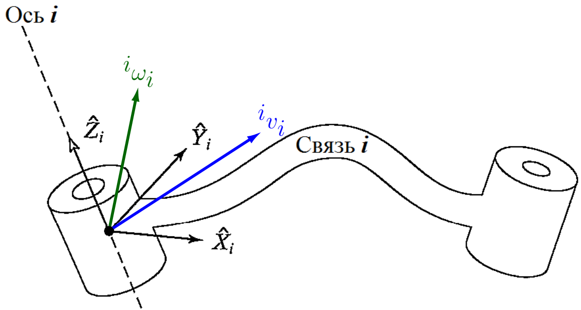
$$ {}^{A}V_{Q} = {}^{A}V_{B} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q $$

- Скорость точки ${}^{A}Q = {}^{A}B + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q$ в базисе $\{A\}$ вычисляется прямым дифференцированием ее положения

$$ \begin{aligned} {}^{A}V_{Q} = \frac{d}{dt}{}^{A}Q \quad &= \quad \frac{d}{dt}{}^{A}B + \frac{d}{dt}\left({}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q\right) = {}^{A}V_{B} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + \left(\frac{d}{dt}{}^{A}_{B}R\right){}^{B}Q = \\ &= \quad {}^{A}V_{B} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q. \end{aligned} $$

Движение звена робота

- Пусть $\{O\}$ есть неподвижная система координат, относительно которой v_i и ω_i означают, соответственно, **линейную** и **угловую скорости движения** начала системы координат $\{i\}$, относящуюся к i-ому звену робота.

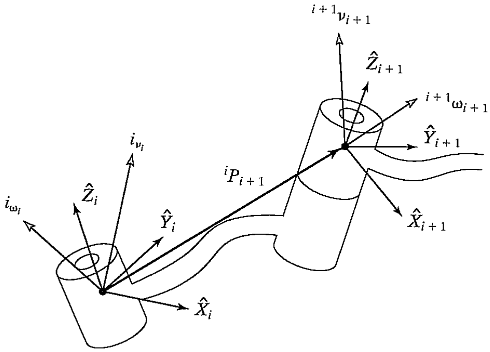


$$
\begin{aligned}
{}^iv_i &:= {}^i\left({}^0V_i\right) \\
{}^i\omega_i &:= {}^i\left({}^0\Omega_i\right)
\end{aligned}
$$

- Скорость звена i определяется векторами v_i и ω_i, которые можно выразить в любой системе координат, в т.ч. и в базисе i-ого звена, получив вектора ^iv_i и $^i\omega_i$.

Передача скорости от звена к звену. Угловая скорость

Скорость вращения $i+1$ звена есть сумма скорости i-ого звена и $i+1$ сочленения. Каждое звено рассматривается как твёрдое тело с линейной и угловой скоростями.



Вектора скоростей смежных звеньев

Угловая скорость $i+1$ звена, наблюдаемая из системы координат i-ого звена, есть

$$^{i}\omega_{i+1} = {}^{i}\omega_{i} + {}^{i}_{i+1}R \cdot \underbrace{{}^{i+1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{pmatrix}}_{^{i+1}\Omega_{i+1}} \Rightarrow$$

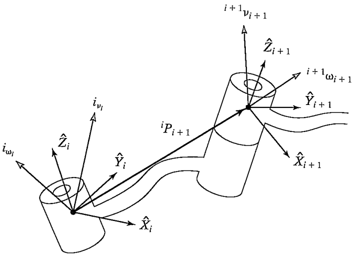
$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i} + {}^{i+1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$^{i+1}\Omega_{i+1}$ — вектор угловой скорости вращения $(i+1)$-го звена вокруг оси z_{i+1}, выраженный в системе координат $(i+1)$ сочленения.

Передача скорости от звена к звену. Линейная скорость

Линейная скорость $(i+1)$ сочленения, вычисленная в точке начала $(i+1)$ системы координат, есть сумма

+ линейной скорости начала системы координат i-ого сочленения: ${}^{i}v_i$,
+ скорости перемещения, вызванного вращением i-ого звена: ${}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}$, и
+ скорости поступательного движения точки начала $(i+1)$-ой системы координат (для поступательно движущегося сочленения): ${}^{i}_{i+1}R \left(0 \; 0 \; \dot{d}_{i+1}\right)^{\top}$.



Вектора скоростей смежных звеньев

В итоге вектор линейной скорости, наблюдаемый из $(i+1)$ системы координат вычисляется по формуле

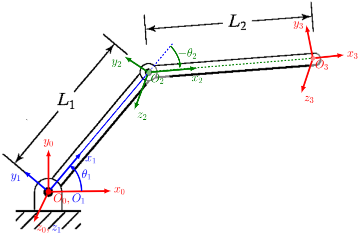
$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}v_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}v_{i+1} = \\
&= {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}\right) + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_{i+1} \end{pmatrix}^{\cancel{\top}}.
\end{aligned}
$$

(2)

Пример (начало)

Найти скорость схвата двухзвенного плоского RR-манипулятора как функцию обобщенных координат θ_1, θ_2 и скоростей $\dot\theta_1$, $\dot\theta_2$:
(1) в базисе $\{3\}$, ассоциированном со схватом, и
(2) в неподвижном базисе $\{0\}$.

$$
{}^0_1T = \left(\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad
{}^1_2T = \left(\begin{array}{ccc|c} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad
{}^2_3T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$



Двухзвенный RR-манипулятор

Точки начала систем координат:

$$
{}^0P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^1P_2 = \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^2P_3 = \begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

База неподвижна $\Rightarrow {}^0\omega_0 = {}^0v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Пример (продолжение)

Найти скорость схвата двухзвенного плоского RR-манипулятора как функцию обобщенных координат θ_1, θ_2 и скоростей $\dot\theta_1$, $\dot\theta_2$: (1) в базисе $\{3\}$, ассоциированном со схватом.

$$^1\omega_1 = {}^1_0R\,{}^0\omega_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$^1v_1 = {}^1_0R\left({}^0v_0 + {}^0\omega_0 \times {}^0P_1\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$^2\omega_2 = {}^2_1R\,{}^1\omega_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 + \dot\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$^2v_2 = {}^2_1R\left({}^1v_1 + {}^1\omega_1 \times {}^1P_2\right) = \begin{pmatrix} L_1 s_2 \dot\theta_1 \\ L_1 c_2 \dot\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$^3\omega_3 = {}^3_2R\,{}^2\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 + \dot\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$^3v_3 = {}^3_2R\left({}^2v_2 + {}^2\omega_2 \times {}^2P_3\right) = \begin{pmatrix} L_1 s_2 \dot\theta_1 \\ L_1 c_2 \dot\theta_1 + L_2\left(\dot\theta_1 + \dot\theta_2\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пример (конец)

Найти скорость схвата двухзвенного плоского RR-манипулятора как функцию обобщенных координат θ_1, θ_2 и скоростей $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$: (2) в неподвижном базисе $\{0\}$.
Для представления вектора скорости ${}^3v_3$ в базовой (неподвижной) системе координат $\{0\}$, необходимо применить к найденному вектору ${}^3v_3$ обратное преобразование координат ${}^0_3R$ по правилу

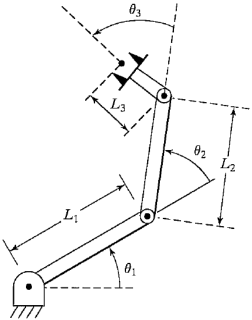
$$ {}^0_3R = {}^0_1R \cdot {}^1_2R \cdot {}^2_3R = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

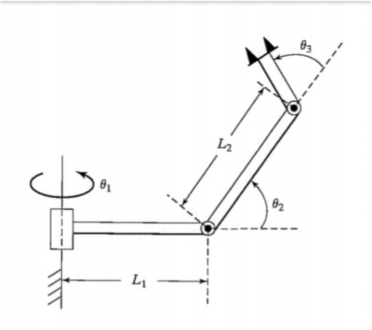
В итоге, искомый вектор скорости имеет вид

$$ {}^0v_3 = {}^0_3R \cdot {}^3v_3 = {}^0_3R \cdot \begin{pmatrix} L_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ L_1 c_2 \dot{\theta}_1 + L_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(L_1 s_1 + L_2 s_{12} \right) \dot{\theta}_1 - L_2 s_{12} \dot{\theta}_2 \\ -\left(L_1 c_1 + L_2 c_{12} \right) \dot{\theta}_1 + L_2 c_{12} \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix} $$

Задания для самостоятельного решения

Расчитать линейную и угловую скорости звеньев трехзвенных манипуляторов, представленных на рисунках.





1. Решения необходимо прислать на почту anastasy.edu@gmail.com.
2. Вопросы можно писать на указанный выше электронный адрес.

Всем спасибо!