

# Самостоятельная работа № 2-2025FT

## Динамическая модель манипулятора

по курсам

«Моделирование и управления в робототехнических системах»,  
«Моделирование и управления манипуляционными роботами»

Самостоятельная работа № 2 состоит из трёх частей. В первой части работы необходимо вычислить скорости, используя итерационную процедуру, далее на основе решения прямой кинематической задачи, полученного в самостоятельной работе № 1, вычислить матрицу Якоби и сравнить полученные результаты. Завершает первую часть работы поиск точек сингулярности манипулятора.

Вторая часть работы посвящена вычислению статических сил, действующих на звенья манипулятора, и получению вектора обобщенных сил, как при помощи итерационного алгоритма так и через матрицу Якоби.

Третья и заключительная часть работы состоит в построении уравнения Эйлера-Лагранжа для предложенного манипулятора. Она использует результаты, полученные в предыдущих частях работы. Дополнительно потребуется построить графики, связанные с движением манипулятора по заданному пути.

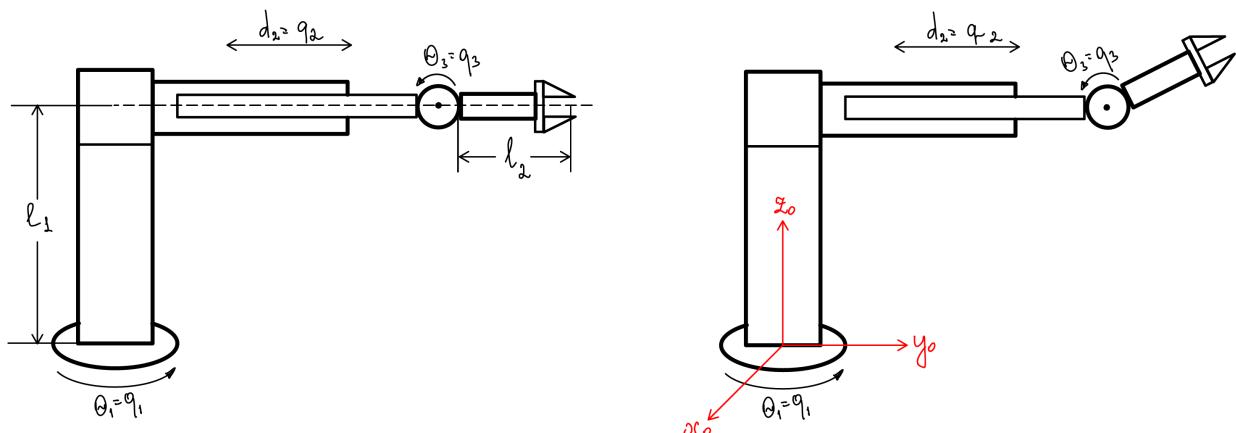


Рис. 1: Трехзвеный манипулятор с тремя степенями свободы

## Часть 1. Вычисление линейных и угловых скоростей манипулятора

На рисунке 1 изображен манипулятор с тремя степенями свободы. Для данного манипулятора выполните следующие задания.

1. Для каждого звена манипулятора в системе координат, ассоциированной с текущим звеном, вычислите линейную и угловую скорости.
2. Выразите линейную скорость схвата в неподвижной (базовой) системе координат.
3. Используя решение прямой кинематической задачи, вычислите матрицу Якоби и сравните полученный результат с полученным в предыдущем пункте.
4. Определите точки сингулярности в рамках рабочего пространства манипулятора.

## Часть 2. Статические силы и моменты сил

Для каждого звена манипулятора, изображенного на рисунке 1, используя полученное ранее решение прямой кинематической задачи, выполните задания

1. Найдите обобщенные силы, если на схват действует сила  $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$ , заданная в системе координат схвата  $\mathcal{F} = {}^3\mathcal{F}$ .
2. Вычислите вектор обобщенных сил, если внешняя сила  $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$  измерена в базовой системе координат  $\mathcal{F} = {}^0\mathcal{F}$ .
3. Сравните полученный результат с вектором сил, вычисленным с использованием матрицы Якоби (якобиан сил).

## Часть 3. Уравнение Эйлера-Лагранжа

1. Для манипулятора, изображенного на Рисунке 1 требуется составить уравнение Эйлера-Лагранжа, используя следующую информацию о звеньях манипулятора
  - (a) Центры масс расположены в точка, изображенных на рисунке 2.
  - (b) Масса каждого звена сосредоточена в точке центра масс и равна  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где  $i$  — номер подвижного звена.
  - (c) Схват манипулятора движется в свободном пространстве, не испытывая на себе внешних сил (сопротивлением воздуха можно пренебречь).

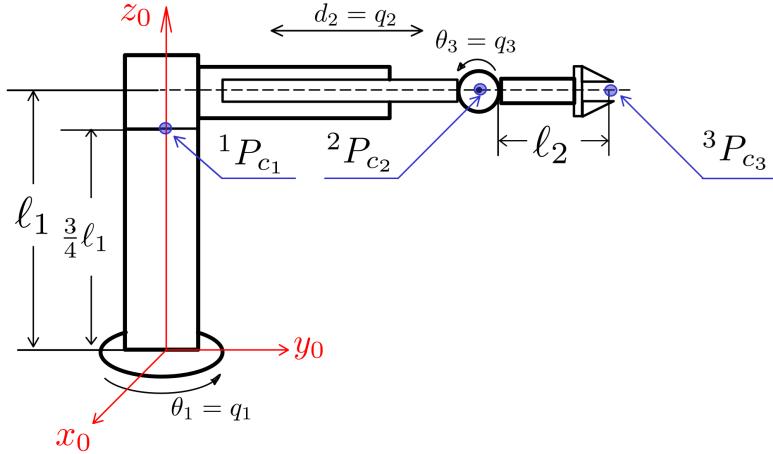


Рис. 2: Центры масс звеньев RPR-манипулятора

2. Пусть манипулятор совершает движение, определяемое следующими уравнениями для каждого звена

$$\begin{cases} q_1(t) = \theta_1(t) = \frac{\pi}{20} (7 + 8e^{-0.2t} - 15e^{-0.5t}) \\ q_2(t) = d_2(t) = 0.8 (2e^{-0.2t} - 1.75e^{-0.5t}), \quad t \in [0, 10] \\ q_3(t) = \theta_3(t) = \frac{\pi}{30} (4 - 5e^{-0.5t} + e^{-0.2t}). \end{cases}$$

При этом параметры модели манипулятора определены значениями:  $\ell_1 = 1.0$  м.,  $\ell_2 = 0.15$  м.,  $m_1 = 5$  кг.,  $m_2 = 1.5$  кг. и  $m_3 = 0.5$  кг.

- (a) Нарисуйте графики траекторий в обобщенных координатах;
- (b) Нарисуйте графики траекторий в декартовых координатах, используя решение прямой кинематической задачи;
- (c) Изобразите графически линейную скорость схвата в базовой системе координат  ${}^0v_3(t)$ ;
- (d) Рассчитайте обобщённые силы  $\tau_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), которые испытывают звенья манипулятора при движении вдоль траектории в течении 10 секунд. Изобразите их на графике.
- (e) Зная обобщённые силы, вычислите вектор сил  ${}^0f_3(t)$ , который испытывает на себе схват при движении по траектории. Изобразите возникающие силы на графике.