Лекция № 3
Решение обратной кинематической задачи

Анастасия А. Усова
anastasy.edu@gmail.com

Содержание лекции

- Постановка задачи
- Какую информацию содержит преобразование T_0^n?
- Алгебраический подход к решению задачи. Пример
- Геометрический подход к решению задачи. Пример
- Теорема Пайпера для 6-ти звенных роботов с вращающейся «кистью»
- Пример
- Задания для самостоятельного решения

Постановка задачи

Прямая задача:

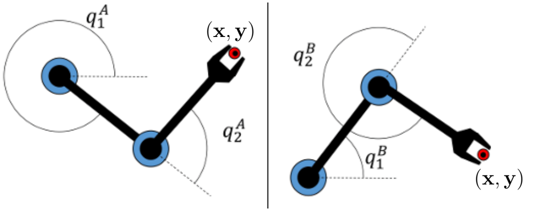
Обобщенные переменные (θ, d) $\longrightarrow$ Декартовы координаты позиции (x, y, z) «схвата»

Обратная задача:

Декартовы координаты позиции (x, y, z) «схвата» $\longrightarrow$ Обобщенные переменные (θ, d)

Обратная кинематическая задача состоит в восстановлении значений обобщенных переменных, при заданной геометрии манипулятора и известных значениях координат позиции «схвата» (end-effector).

! Обратная кинематическая задача может иметь более одного решения!



Какую информацию содержит преобразование T_0^n?

Преобразование T_0^n имеет структуру

$$T_0^n = \begin{pmatrix} R_0^n & P_0^n \\ \mathcal{O}_{1\times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь R_0^n — матрица поворота, P_0^n — позиция «схвата» (end-effector) в базовой системе координат.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(\theta, d, a, \alpha) & = & \left\{P_n^0\right\}_x \\ y(\theta, d, a, \alpha) & = & \left\{P_n^0\right\}_y \\ z(\theta, d, a, \alpha) & = & \left\{P_n^0\right\}_z \end{array} \right. \qquad (1)$$

- Система уравнений (1) должна быть решена относительно величин (θ, d).
- Это решение можно строить алгебраическим и/или геометрическим методами.

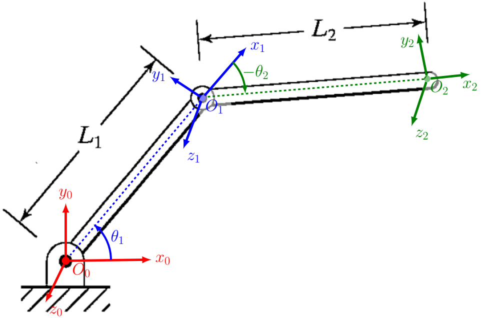
Алгебраический подход

Рассмотрим пример из предыдущей лекции и построим решение обратной кинематической задачи для плоского двухзвенного манипулятора, изображенного на рисунке.

1. Решением прямой кинематической задачи являются следующие выражения.

$$x = x(\theta_1, \theta_2) = L_2 c_{12} + L_1 c_1$$
$$y = y(\theta_1, \theta_2) = L_2 s_{12} + L_1 s_1$$
$$z = z(\theta_1, \theta_2) = 0$$

2. Алгебраический подход подразумевает аналитическое представление решения системы.

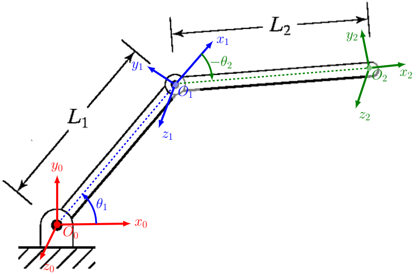


Здесь $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$.

Алгебраический подход (продолжение)

3. Здесь система является достаточно простой, потому ее решение получается следующим образом.
Находим θ_2.

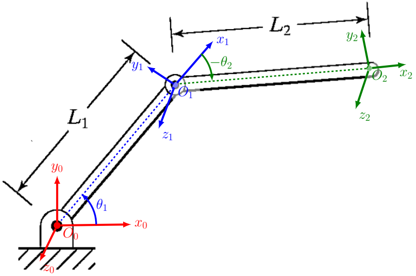
$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= L_2^2 c_{12}^2 + 2L_1L_2c_{12}c_1 + L_1^2c_1^2 + \\
&+ L_2^2 s_{12}^2 + 2L_1L_2s_{12}s_1 + L_1^2s_1^2 = \\
&= L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2\left(c_{12}c_1 + s_{12}s_1\right) = \\
&= L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2c_2 \\
\Rightarrow \quad c_2 &= \frac{x^2 + y^2 - (L_1^2 + L_2^2)}{2L_1L_2} \\
s_2 &= \pm\sqrt{1 - c_2^2} \\
\Rightarrow \quad \theta_2^{1,2} &= \operatorname{arctg}\frac{s_2}{c_2}.
\end{aligned}$$



Алгебраический подход (продолжение)

4. Находим θ_1, используя найденные значения для c_2 и s_2.

$$
\begin{aligned}
x &= L_2 c_{12} + L_1 c_1 = (L_2 c_2 + L_1) c_1 - (L_2 s_2) s_1 \\
y &= L_2 s_{12} + L_1 s_1 = (L_2 s_2) c_1 + (L_2 c_2 + L_1) s_1 \\
\begin{pmatrix} c_1 \\ s_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_2 c_2 + L_1 & -L_2 s_2 \\ L_2 s_2 & L_2 c_2 + L_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad c_1 &= \frac{(L_2 c_2 + L_1) x + (L_2 s_2) y}{x^2 + y^2} \\
s_1 &= \frac{-(L_2 s_2) x + (L_2 c_2 + L_1) y}{x^2 + y^2} \\
\Rightarrow \quad \theta_1^{1,2} &= \operatorname{arctg} \frac{s_1}{c_1}.
\end{aligned}
$$



Величина s_2 принимает 2 значения, поэтому переменная θ_1, как зависящая от s_2, тоже может принимать 2 различных значения.

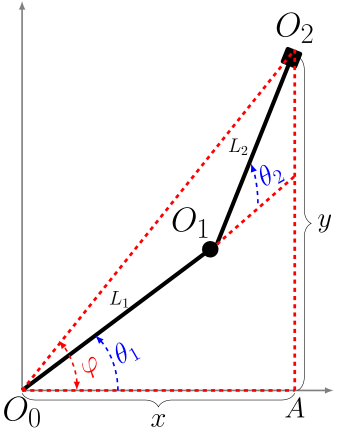
5. Найденные величины $\theta_1^{1,2}$ и $\theta_2^{1,2}$ есть решения обратной кинематической задачи, полученные алгебраическим путем.

Геометрический подход (первый случай)

Рассмотрим геометрический подход к решению задачи. Первый случай изображен на рисунке и отвечает ситуации, когда $\theta_1 < \varphi$ (или поворот на θ_2 осуществляется в положительном направлении, *т.е.* $\theta_2 \geqslant 0$).

1. Из $\Delta O_0 A O_2$ находим $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$;
2. Из $\Delta O_{01} O_2$ получим

$$
\begin{aligned}
\cos(\pi - \theta_2) &= -\cos\theta_2 = \frac{O_0O_1^2 + O_1O_2^2 - O_0O_2^2}{2O_0O_1 \cdot O_1O_2} \\
&= \frac{L_1^2 + L_2^2 - \left(x^2 + y^2\right)}{2L_1L_2}; \\
\cos(\varphi - \theta_1) &= \frac{O_0O_1^2 + O_0O_2^2 - O_1O_2^2}{2O_0O_1 \cdot O_0O_2} = \\
&= \frac{L_1^2 + \left(x^2 + y^2\right) - L_2^2}{2L_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}.
\end{aligned}
$$

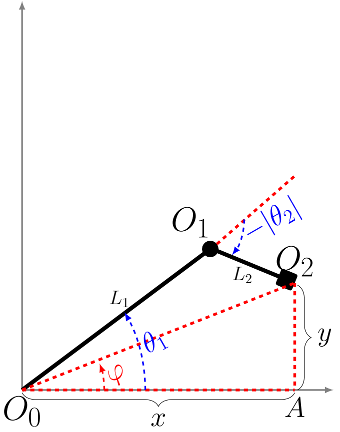


Геометрический подход (второй случай)

Рассмотрим геометрический подход к решению задачи. Второй случай изображен на рисунке и отвечает ситуации, когда $\theta_1 \geqslant \varphi$ (или поворот на θ_2 осуществляется в отрицательном направлении, *т.е.* $\theta_2 \leqslant 0$).

1. Из ΔO_0AO_2 находим $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$;
2. Из $\Delta O_{01}O_2$ получим

$$\begin{aligned}
\cos(\pi + |\theta_2|) &= -\cos|\theta_2| = \frac{O_0O_1^2 + O_1O_2^2 - O_0O_2^2}{2O_0O_1 \cdot O_1O_2} \\
&= \frac{L_1^2 + L_2^2 - \left(x^2 + y^2\right)}{2L_1L_2}; \\
\cos(\theta_1 - \varphi) &= \frac{O_0O_1^2 + O_0O_2^2 - O_1O_2^2}{2O_0O_1 \cdot O_0O_2} = \\
&= \frac{L_1^2 + \left(x^2 + y^2\right) - L_2^2}{2L_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}.
\end{aligned}$$



Решение обратной кинематической задачи в замкнутой форме

- Нахождение явных соотношений

$$q_i = f_i(x, y, z), \qquad i = \{1, 2, \dots, \text{количество звеньев}\}$$

для обобщенных переменных $q_i \in \{\theta_i, d_i\}$ через пространственные координаты и элементы матрицы преобразования T_0^n позволяет

– быстрее вычислять значения обобщенных координат;

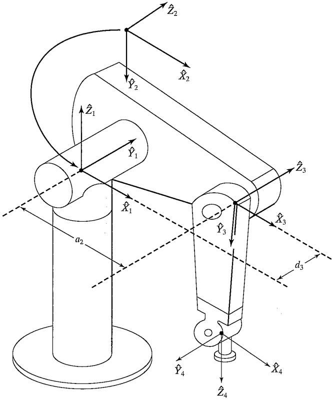
– определять и учитывать ограничения в рабочем пространстве манипулятора;

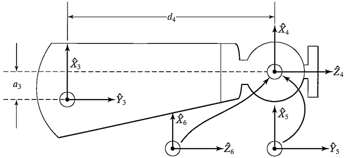
– в случае существования нескольких решений, позволяет явно сформулировать правила выбора более подходящего решения.

Это может быть особенно полезно в случае, когда движение манипулятора сковано наличием препятствий или некоторыми условиями оптимальности.

Теорема Пайпера (Piper's theorem)

Для шестизвеного робота, у которого кисть совершает три различных вращательных движения (*т.е.* сочленяет 3 звена, с началом координат для каждого в одной точке), решение обратной кинематической задачи в замкнутой форме может быть декомпозировано в два шага: на первом этапе мы ищем положение кисти T_4^0, а на втором — ее ориентацию $T_6^4 = T_6^4(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$.





Окончательный вид преобразования есть композиция T_4^0 и T_6^4:

$$T_6^0 = T_4^0 \cdot T_6^4.$$

Более сложные примеры

Более сложные примеры аналитического решения обратной кинематической задачи можно найти в литературе. Например, в книге

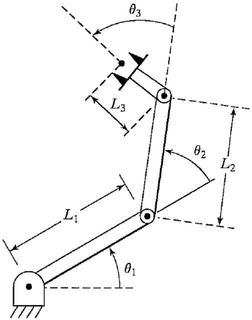
- **Зенкевич С. Л., Ющенко А. С.** *Управление роботами. Основы управления манипуляционными роботами*[1]. — Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана Москва, 2000. — 400 с.

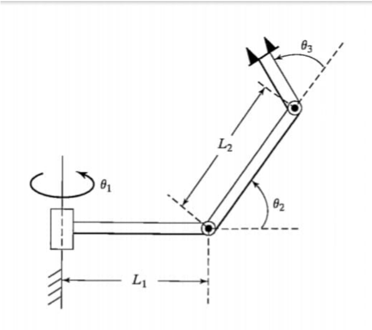
В разделе 2.3.2 учебника (стр. 94) разбирается пример решения обратной позиционной (кинематической) задачи для робота Puma560, изображенного на предыдущем слайде.

[1] https://drive.google.com/file/d/1FqMSG90PId_NWhalq4crI3jzF8i5cO3C/view?usp=sharing
См. раздел 2.3 учебника на стр. 61

Задания для самостоятельного решения

Решить обратную кинематическую задачу для трехзвенных манипуляторов, представленных на рисунках.





1. Решения можно прислать на почту anastasy.edu@gmail.com.
2. Вопросы можно писать на указанный выше электронный адрес.

Всем спасибо!