# 命题逻辑

School of Computer Wuhan University



# 命题逻辑

School of Computer Wuhan University



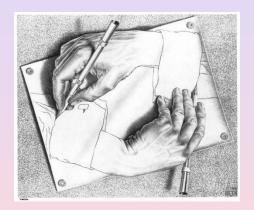
- 命题符号化
  - 命题
  - 符号化
  - 合式公式的形式文法
  - 合式公式的形式语义
- 2 永真公式
  - 公式的分类
  - 逻辑等价
  - 永真蕴含
  - 恒等变换和不等变换
  - 对偶性
- ③ 范式
  - 析取范式和合取范式
  - 主析取范式
- 4 联结词的扩充和归约
  - 联结词的扩充
  - 联结词的归约
- 5 推理和证明方法
  - 有效结论
  - 自然推理的形式证明
  - 证明方法

### Outline

- 1 命题符号化
  - 命题
  - 符号化
  - 合式公式的形式文法
  - 合式公式的形式语义

- 4 联结词的扩充和归约
- 5 推理和证明方法

# Drawing hands

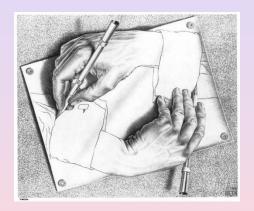


#### True or False

- 左手画右手,右手画左手;

◆□▶ ◆圖▶ ◆臺▶ ◆臺▶

# Drawing hands



#### True or False

- 左手画右手,右手画左手;
- paradox

◆□▶ ◆圖▶ ◆臺▶ ◆臺▶

- 自然语言是对客观世界的描述,因此有"真"有"假";
- 逻辑学是研究"真假"的普遍规律的学科;
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑,也称符号逻辑,是数理逻辑的基础;
- 数理逻辑的主要研究内容:公理集合论、证明论、模型论、递归论

- 自然语言是对客观世界的描述,因此有"真"有"假";
- 逻辑学是研究"真假"的普遍规律的学科;
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑,也称符号逻辑,是数理逻辑 的基础;
- 数理逻辑的主要研究内容:公理集合论、证明论、模型论、递归论

- 自然语言是对客观世界的描述,因此有"真"有"假";
- 逻辑学是研究"真假"的普遍规律的学科;
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑,也称符号逻辑,是数理逻辑的基础;
- 数理逻辑的主要研究内容:公理集合论、证明论、模型论、递归论

- 自然语言是对客观世界的描述,因此有"真"有"假";
- 逻辑学是研究"真假"的普遍规律的学科;
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑,也称符号逻辑,是数理逻辑的基础;
- 数理逻辑的主要研究内容:公理集合论、证明论、模型论、递归论.

### 推理和证明

- 数学中的重要问题是"推理",即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法,来研究推理
- 用命题逻辑表达的推理,其基本要素即为命题.

#### Definition命题

● 有唯一真假值的陈述句(Declarative Sentence).

### 推理和证明

- 数学中的重要问题是"推理",即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法,来研究推理.
- 用命题逻辑表达的推理,其基本要素即为命题.

#### Definition命题

有唯一直假值的陈述句(Declarative Sentence)。

### 推理和证明

- 数学中的重要问题是"推理",即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法,来研究推理.
- 用命题逻辑表达的推理,其基本要素即为命题.

#### Definition命题

有唯一真假值的陈述句(Declarative Sentence).

### 推理和证明

- 数学中的重要问题是"推理",即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法,来研究推理.
- 用命题逻辑表达的推理,其基本要素即为命题.

#### Definition命题

• 有唯一真假值的陈述句(Declarative Sentence).

- 糖是碳水化合物; (简单命题)

### Example (非命题)

- 糖是碳水化合物; (简单命题)
- 武汉大学是最美丽的大学; (简单命题)
- 如果不下雨,就开运动会; (复合命题)

### Example (非命题)

- 现在几点? (疑问句)
- 请不要讲话! (祈使句)
- $x + y \le 4$

### Example (Paradox)

• 我正在说谎.

- 糖是碳水化合物; (简单命题)
- 武汉大学是最美丽的大学; (简单命题)
- 如果不下雨,就开运动会; (复合命题)

### Example (非命题)

- 现在几点? (疑问句)
- 请不要讲话! (祈使句)
- $x + y \le 4$

### Example (Paradox)

• 我正在说谎.

- 糖是碳水化合物; (简单命题)
- 武汉大学是最美丽的大学; (简单命题)
- 如果不下雨,就开运动会; (复合命题)

### Example (非命题)

- 现在几点?-(疑问句)

- 糖是碳水化合物; (简单命题)
- 武汉大学是最美丽的大学; (简单命题)
- 如果不下雨,就开运动会; (复合命题)

### Example (非命题)

- 现在几点?-(疑问句)
- 请不要讲话! (祈使句)

- 糖是碳水化合物; (简单命题)
- 武汉大学是最美丽的大学; (简单命题)
- 如果不下雨,就开运动会; (复合命题)

### Example (非命题)

- 现在几点?-(疑问句)
- 请不要讲话! (祈使句)
- $\bullet$   $x+y \leq 4$

- 糖是碳水化合物; (简单命题)
- 武汉大学是最美丽的大学; (简单命题)
- 如果不下雨,就开运动会; (复合命题)

### Example (非命题)

- 现在几点?-(疑问句)
- 请不要讲话! (祈使句)
- $\bullet$   $x+y \leq 4$

### Example (Paradox)

• 我正在说谎.

- 每个具体命题有惟一真假值, 称为命题的真值.
- 对于真命题,称命题真值为"真";假命题,称其真值为"假".
- 但符号化只关心命题的真假,不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子(atom),用英文字母表示:
  - 。 令題变元-可以代表真命題或假命題,常用大写字母表示:
- 原子通过联结词(connectives)按照一定的规则组成复合命题.

- 每个具体命题有惟一真假值, 称为命题的真值.
- 对于真命题,称命题真值为"真";假命题,称其真值为"假".
- 但符号化只关心命题的真假,不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子(atom),用英文字母表示:
  - 。 命題变元—可以代表真命题或假命题,常用大写字母表示: □ PAP
- 原子通过联结词(connectives)按照一定的规则组成复合命题.

- 每个具体命题有惟一真假值, 称为命题的真值.
- 对于真命题,称命题真值为"真";假命题,称其真值为"假".
- 但符号化只关心命题的真假,不关心其具体含义.

- 每个具体命题有惟一真假值, 称为命题的真值.
- 对于真命题,称命题真值为"真";假命题,称其真值为"假".
- 但符号化只关心命题的真假,不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子(atom),用英文字母表示:
  - 命题常元-真命题:T,假命题:F;
  - 命题变元-可以代表真命题或假命题,常用大写字母表示: P,Q,R,...
- 原子通过联结词(connectives)按照一定的规则组成复合命题.

- 每个具体命题有惟一真假值, 称为命题的真值.
- 对于真命题,称命题真值为"真";假命题,称其真值为"假".
- 但符号化只关心命题的真假,不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子(atom),用英文字母表示:
  - 命题常元-真命题: T,假命题: F;
  - 命题变元-可以代表真命题或假命题,常用大写字母表示: P,Q,R,...
- 原子通过联结词(connectives)按照一定的规则组成复合命题.

- 每个具体命题有惟一真假值, 称为命题的真值.
- 对于真命题,称命题真值为"真";假命题,称其真值为"假".
- 但符号化只关心命题的真假,不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子(atom),用英文字母表示:
  - 命题常元-真命题: T,假命题: F;
  - 命题变元-可以代表真命题或假命题,常用大写字母表示: P,Q,R,...
- 原子通过联结词(connectives)按照一定的规则组成复合命题

- 每个具体命题有惟一真假值, 称为命题的真值.
- 对于真命题,称命题真值为"真";假命题,称其真值为"假".
- 但符号化只关心命题的真假,不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子(atom),用英文字母表示:
  - 命题常元-真命题: T,假命题: F;
  - 命题变元-可以代表真命题或假命题,常用大写字母表示: *P*,*Q*,*R*, ...
- 原子通过联结词(connectives)按照一定的规则组成复合命题.

# 逻辑联结词

#### 常用的逻辑联结词

名称	英文	符号	解释
否定词	negation	$\neg P$	非P,否定P
析取词	disjunction	$P \lor Q$	P或者 Q(兼或)
合取词	conjunction	$P \wedge Q$	P并且 $Q$
蕴含词	implication	$P \rightarrow Q$	如果 $P$ ,则 $Q$
			P是 $Q$ 的充分条件
			Q是 $P$ 的必要条件
			P是前提, $Q$ 是结论
			当 $P$ ,则 $Q$ (仅当 $Q$ ,有 $P$ )
等值词	bicondition	$P \leftrightarrow Q$	P等值于Q
			P是 $Q$ 的充分必要条件
			P当且仅当 $Q$

# 逻辑联结词

#### 联结词含义

- 原子命题的真值有"真"和"假",由原子和联结词组成的复合命题也有"真"和"假".
- 复合命题的真值由其中的原子和联结词的含义决定

#### 逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \lor Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

◆ロ → ◆ 個 → ◆ 重 → ● ● り へ ○

# 逻辑联结词

#### 联结词含义

- 原子命题的真值有"真"和"假",由原子和联结词组成的复合命题也有"真"和"假".
- 复合命题的真值由其中的原子和联结词的含义决定.

#### 逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \lor Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

#### Example

- 如果上天再给一次重来机会,我一定要...
- 若前件为真,后件为假,则该蕴含式不成立,即为假;
- 若前件为假,后件为真或假,都为真.

#### 形式蕴含

由于简单命题在符号化为原子时,剥离了原子之间可能存在的语义 关系,蕴含式的真假仅与条件和结论的真假有关,而与条件和结论 是否有语意关联无关.

#### Example

- If today is Friday, then 2+3=5. (True)
- If today is Friday, then 2+3=6. (True, except for Friday)

◆□▶◆□▶◆■▶◆■▶ ■ かへで

#### Example

- 如果上天再给一次重来机会,我一定要...
- 若前件为真,后件为假,则该蕴含式不成立,即为假;
- 若前件为假,后件为真或假,都为真.

### 形式蕴含

 由于简单命题在符号化为原子时,剥离了原子之间可能存在的语义 关系,蕴含式的真假仅与条件和结论的真假有关,而与条件和结论 是否有语意关联无关.

### Example

- If today is Friday, then 2 + 3 = 5. (True)
- If today is Friday, then 2 + 3 = 6. (True, except for Friday)

◆□▶ ◆□▶ ◆■▶ ◆■▶ ● めので

### Example

- 如果上天再给一次重来机会,我一定要...
- 若前件为真,后件为假,则该蕴含式不成立,即为假;
- 若前件为假,后件为真或假,都为真.

### 形式蕴含

由于简单命题在符号化为原子时,剥离了原子之间可能存在的语义 关系,蕴含式的真假仅与条件和结论的真假有关,而与条件和结论 是否有语意关联无关.

### Example

- If today is Friday, then 2 + 3 = 5. (True)
- If today is Friday, then 2+3=6. (True, except for Friday)

### Example

- 如果上天再给一次重来机会,我一定要...
- 若前件为真,后件为假,则该蕴含式不成立,即为假;
- 若前件为假,后件为真或假,都为真.

### 形式蕴含

由于简单命题在符号化为原子时,剥离了原子之间可能存在的语义 关系,蕴含式的真假仅与条件和结论的真假有关,而与条件和结论 是否有语意关联无关.

### Example

- If today is Friday, then 2 + 3 = 5. (True)
- If today is Friday, then 2+3=6. (True, except for Friday)

### Example

- 如果上天再给一次重来机会,我一定要...
- 若前件为真,后件为假,则该蕴含式不成立,即为假;
- 若前件为假,后件为真或假,都为真.

### 形式蕴含

由于简单命题在符号化为原子时,剥离了原子之间可能存在的语义 关系,蕴含式的真假仅与条件和结论的真假有关,而与条件和结论 是否有语意关联无关.

### Example

- If today is Friday, then 2 + 3 = 5. (True)
- If today is Friday, then 2+3=6. (True, except for Friday)

## 蕴含式

## Example

- 如果上天再给一次重来机会,我一定要...
- 若前件为真,后件为假,则该蕴含式不成立,即为假;
- 若前件为假,后件为真或假,都为真.

## 形式蕴含

由于简单命题在符号化为原子时,剥离了原子之间可能存在的语义 关系,蕴含式的真假仅与条件和结论的真假有关,而与条件和结论 是否有语意关联无关.

- If today is Friday, then 2 + 3 = 5. (True)
- If today is Friday, then 2+3=6. (True, except for Friday)

## Example (命题)

你可以上网,仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生.

### 符号化命题中的原子

- A: 你可以上网;
- C: 你是计算机专业的学生;
- F: 你是一年级的学生.

- 你不是一年级的学生:¬F
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生: C∨¬F
- 原命题:  $A \to (C \vee \neg F)$

## Example (命题)

你可以上网,仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生.

#### 符号化命题中的原子

- A: 你可以上网;
- C: 你是计算机专业的学生;
- F: 你是一年级的学生.

- 你不是一年级的学生:¬F
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生: C∨¬F
- 原命题:  $A \to (C \vee \neg F)$

## Example (命题)

你可以上网,仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生.

#### 符号化命题中的原子

- A: 你可以上网;
- C: 你是计算机专业的学生;
- F: 你是一年级的学生.

- 你不是一年级的学生: ¬F
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生: C∨¬F
- 原命题:  $A \to (C \vee \neg F)$

## Example (命题)

你可以上网,仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生.

#### 符号化命题中的原子

- A: 你可以上网;
- C: 你是计算机专业的学生;
- F: 你是一年级的学生.

- 你不是一年级的学生: ¬F
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生: C∨¬F
- 原命题:  $A \to (C \vee \neg F)$

## Example (命题)

你可以上网,仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生.

#### 符号化命题中的原子

- A: 你可以上网;
- C: 你是计算机专业的学生;
- F: 你是一年级的学生.

- 你不是一年级的学生: ¬F
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生:  $C \lor \neg F$
- 原命题:  $A \to (C \vee \neg F)$

## Example (命题)

你可以上网,仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生.

#### 符号化命题中的原子

- A: 你可以上网;
- C: 你是计算机专业的学生;
- F: 你是一年级的学生.

- 你不是一年级的学生: ¬F
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生: C∨¬F
- $\emptyset$   $A \to (C \vee \neg F)$

#### Desription

• 命题符号化的结果是合式公式,是命题"语言"中的"句子".

## 字母表

- 常元: T.F
- 变元: P, Q, R, ...
- 联结词: ¬, ∨, ∧, →, ↔
- 辅助符号: (,)

## Definition (合式公式WFFs)

- ① 递归基础: 常元和变元是WFFs:
- ② 递归规则: 若A, B是WFFs, 则

 $(\neg A), (A \lor B), (A \land B), (A \to B), (A \leftrightarrow B) \not\in \mathsf{WFFs};$ 

③ 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

←□ → ←□ → ← = → ← = → へ ○ ←

#### Desription

• 命题符号化的结果是合式公式,是命题"语言"中的"句子".

## 字母表

- 常元: T,F
- 变元: P, Q, R, ...
- 联结词: ¬, ∨, ∧, →, ↔
- 辅助符号: (,)

## Definition (合式公式WFFs)

- ① 递归基础:常元和变元是WFFs;
- ② 递归规则: 若A, B是WFFs, 则

 $(\neg A), (A \lor B), (A \land B), (A \to B), (A \leftrightarrow B) \not\in \mathsf{WFFs};$ 

③ 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

#### Desription

• 命题符号化的结果是合式公式,是命题"语言"中的"句子".

### 字母表

- 常元: T,F
- 变元: *P*, *Q*, *R*, ...
- 联结词: ¬, ∨, ∧, →, ↔
- 辅助符号: (,)

- ① 递归基础: 常元和变元是WFFs:
- ② 递归规则: 若A, B是WFFs, 则
  - $(\neg A), (A \lor B), (A \land B), (A \to B), (A \leftrightarrow B) \not\in \mathsf{WFFs};$
- ③ 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

#### Desription

• 命题符号化的结果是合式公式,是命题"语言"中的"句子".

### 字母表

- 常元: T,F
- 变元: P, Q, R, ...
- 联结词: ¬, ∨, ∧, →, ↔
- 辅助符号: (,)

- ① 递归基础:常元和变元是WFFs:
- ② 递归规则: 若A, B是WFFs, 则
  - $(\neg A), (A \lor B), (A \land B), (A \to B), (A \leftrightarrow B) \not\in WFFs;$
- ③ 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

#### Desription

• 命题符号化的结果是合式公式,是命题"语言"中的"句子".

#### 字母表

- 常元: T, F
- 变元: *P*, *Q*, *R*, ...
- 联结词: ¬, ∨, ∧, →, ↔
- 辅助符号: (,)

- ① 递归基础: 常元和变元是WFFs:
- ② 递归规则: 若A, B是WFFs, 则
  - $(\neg A), (A \lor B), (A \land B), (A \to B), (A \leftrightarrow B) \not\in WFFs;$
- ③ 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

#### Desription

• 命题符号化的结果是合式公式,是命题"语言"中的"句子".

#### 字母表

- 常元: T, F
- 变元: *P*, *Q*, *R*, ...
- 联结词: ¬, ∨, ∧, →, ↔
- 辅助符号: (,)

- ① 递归基础: 常元和变元是WFFs;
- ② 递归规则: 若A, B是WFFs, 则
  - $(\neg A), (A \lor B), (A \land B), (A \to B), (A \leftrightarrow B) \not\in \mathsf{WFFs};$
- ③ 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

### Desription

• 命题符号化的结果是合式公式,是命题"语言"中的"句子".

## 字母表

- 常元: T, F
- 变元: *P*, *Q*, *R*, ...
- 联结词: ¬, ∨, ∧, →, ↔
- 辅助符号: (,)

## Definition (合式公式WFFs)

- ① 递归基础: 常元和变元是WFFs;
- ② 递归规则: 若A, B是WFFs, 则

 $(\neg A), (A \lor B), (A \land B), (A \to B), (A \leftrightarrow B) \not\in \mathsf{WFFs};$ 

③ 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

### Desription

• 命题符号化的结果是合式公式,是命题"语言"中的"句子".

#### 字母表

- 常元: T,F
- 变元: *P*, *Q*, *R*, ...
- 联结词: ¬, ∨, ∧, →, ↔
- 辅助符号: (,)

## Definition (合式公式WFFs)

- ① 递归基础:常元和变元是WFFs;
- ② 递归规则: 若A, B是WFFs, 则

 $(\neg A), (A \lor B), (A \land B), (A \to B), (A \leftrightarrow B) \not\in \mathsf{WFFs};$ 

■ 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

•  $(A \rightarrow (C \lor (\neg F)))$  是公式.

#### Proof.

- A, C, F, 是公式, 根据规则①;
- ② (¬F)是公式,根据❶和规则②;
- ③ (C∨(¬F)),根据①和规则②;
- ④  $(A \rightarrow (C \lor (\neg F)))$ 是公式,根据**①**3和规则②.

#### Example

- $(→(C \lor ¬F))$ 不是公式,因为没有生成(→A)的规则;
- $(A \Rightarrow (C \lor \neg F))$  不是公式,因为 $\Rightarrow$  不是联结词.

◆ロ > ◆園 > ◆園 > ◆園 > ■ 釣 へ ○

•  $(A \to (C \lor (\neg F)))$  是公式.

#### Proof.

- **△** A, C, F, 是公式, 根据规则①;
- ② (¬F)是公式,根据❶和规则②;
- ③ (C∨(¬F)),根据①和规则②;
- **③**  $(A \rightarrow (C \lor (\neg F)))$ 是公式,根据**①③**和规则②.

#### Example

- $(→(C \lor ¬F))$ 不是公式,因为没有生成(→ A)的规则;
- $(A \Rightarrow (C \lor \neg F))$  不是公式,因为⇒不是联结词.

◆□▶ ◆□▶ ◆壹▶ ◆壹▶ 壹 めなべ

•  $(A \to (C \lor (\neg F)))$  是公式.

## Proof.

- **1** A, C, F, 是公式, 根据规则①;
- ② (¬F)是公式,根据①和规则②;
- ③ (C∨(¬F)),根据①和规则②;
- ③  $(A \rightarrow (C \lor (\neg F)))$ 是公式,根据**①**3和规则②

#### Example

- $(→(C \lor ¬F))$ 不是公式,因为没有生成(→ A)的规则;
- $(A \Rightarrow (C \lor \neg F))$  不是公式,因为⇒不是联结词.

◆□▶◆□▶◆壹▶◆壹▶ 壹 めQで

•  $(A \to (C \lor (\neg F)))$  是公式.

### Proof.

- **●** *A*, *C*, *F*, 是公式, 根据规则①;
- ② (¬F)是公式,根据❶和规则②;
- **③** (C∨(¬F)),根据❶和规则②;
- ③  $(A \rightarrow (C \lor (\neg F)))$ 是公式,根据**①**3和规则②

- $(→(C \lor \neg F))$ 不是公式,因为没有生成(→ A)的规则;
- $(A \Rightarrow (C \lor \neg F))$  不是公式,因为 $\Rightarrow$  不是联结词.

•  $(A \to (C \lor (\neg F)))$  是公式.

## Proof.

- **●** *A*, *C*, *F*, 是公式, 根据规则①;
- ② (¬F)是公式,根据❶和规则②;
- ③ (C∨(¬F)),根据❶和规则②;
- **4**  $(A \rightarrow (C \lor (\neg F)))$ 是公式,根据**03**和规则②.

- $(→(C \lor ¬F))$ 不是公式,因为没有生成(→ A)的规则;
- $(A \Rightarrow (C \lor \neg F))$  不是公式,因为 $\Rightarrow$  不是联结词.

•  $(A \to (C \lor (\neg F)))$ 是公式.

#### Proof.

- **1** A, C, F, 是公式, 根据规则①;
- ② (¬F)是公式,根据①和规则②;
- **③** (*C*∨(¬*F*)),根据❶和规则②;
- **4**  $(A \rightarrow (C \lor (\neg F)))$ 是公式,根据**03**和规则②.

- $(→ (C \lor ¬F))$ 不是公式,因为没有生成(→ A)的规则;
- $(A \Rightarrow (C \lor \neg F))$  不是公式,因为⇒不是联结词

•  $(A \to (C \lor (\neg F)))$  是公式.

#### Proof.

- **1** *A*, *C*, *F*, 是公式, 根据规则①;
- ② (¬F)是公式,根据❶和规则②;
- **③** (*C*∨(¬*F*)),根据❶和规则②;
- **④**  $(A \rightarrow (C \lor (\neg F)))$ 是公式,根据**❶③**和规则②.

- $(→ (C \lor ¬F))$ 不是公式,因为没有生成(→ A)的规则;
- $(A \Rightarrow (C \lor \neg F))$  不是公式,因为⇒不是联结词.

## 约定

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低:括号, $\neg$ , $\wedge$ , $\vee$ , $\rightarrow$ .
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

## Example

- $(A \rightarrow (C \lor (\neg F)))$ 可以简化为:  $A \rightarrow C \lor \neg F$
- $((P \lor Q) \lor R)$ 可以简化为:  $P \lor Q \lor R$

## 注意

- $P \lor Q \land R \equiv P \lor (Q \land R) \neq (P \lor Q) \land R$
- $P \to Q \to R \equiv (P \to Q) \to R \neq P \to (Q \to R)$

### 约定

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低:括号,¬,∧,∨,→,↔;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

## Example

- $(A \to (C \lor (\neg F)))$ 可以简化为:  $A \to C \lor \neg F$
- $((P \lor Q) \lor R)$ 可以简化为:  $P \lor Q \lor R$

### 注意

- $P \lor Q \land R \equiv P \lor (Q \land R) \neq (P \lor Q) \land R$
- $P \to Q \to R \equiv (P \to Q) \to R \neq P \to (Q \to R)$

### 约定

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低:括号,¬,∧,∨,→,↔;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

## Example

- $(A \to (C \lor (\neg F)))$ 可以简化为:  $A \to C \lor \neg F$
- $((P \lor Q) \lor R)$ 可以简化为:  $P \lor Q \lor R$

### 注意

- $P \lor Q \land R \equiv P \lor (Q \land R) \neq (P \lor Q) \land R$
- $P \to Q \to R \equiv (P \to Q) \to R \neq P \to (Q \to R)$

◆ロト ◆団 ト ◆ 豊 ト ◆ 豊 ト り へ ②

## 约定

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低:括号 $,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ ;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

## Example

- $(A \rightarrow (C \lor (\neg F)))$ 可以简化为:  $A \rightarrow C \lor \neg F$
- $((P \lor Q) \lor R)$ 可以简化为:  $P \lor Q \lor R$

### 注意

- $P \lor Q \land R \equiv P \lor (Q \land R) \neq (P \lor Q) \land R$
- $P \to Q \to R \equiv (P \to Q) \to R \neq P \to (Q \to R)$

←ロト→□→→ = → → = → へへ

## 约定

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低:括号,¬,∧,∨,→,↔;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

## Example

- $(A \to (C \lor (\neg F)))$ 可以简化为:  $A \to C \lor \neg F$
- $((P \lor Q) \lor R)$ 可以简化为:  $P \lor Q \lor R$

#### 注意

◆□▶◆圖▶◆臺▶◆臺▶

## 约定

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低:括号, $\neg$ , $\wedge$ , $\vee$ , $\rightarrow$ , $\leftrightarrow$ ;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

## Example

- $(A \to (C \lor (\neg F)))$ 可以简化为:  $A \to C \lor \neg F$
- $((P \lor Q) \lor R)$ 可以简化为:  $P \lor Q \lor R$

#### 注意

- $P \lor Q \land R \equiv P \lor (Q \land R) \neq (P \lor Q) \land R$
- $P \to Q \to R \equiv (P \to Q) \to R \neq P \to (Q \to R)$

◆□▶◆□▶◆壹▶◆壹▶ 壹 めQで

## 约定

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低:括号 $,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ ;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

## Example

- $(A \to (C \lor (\neg F)))$ 可以简化为:  $A \to C \lor \neg F$
- $((P \lor Q) \lor R)$ 可以简化为:  $P \lor Q \lor R$

#### 注意

- $P \lor Q \land R \equiv P \lor (Q \land R) \neq (P \lor Q) \land R$
- $P \to Q \to R \equiv (P \to Q) \to R \neq P \to (Q \to R)$

◆□▶◆□▶◆壹▶◆壹▶ 壹 めQで

#### Description

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定,则该命题的真假也惟一确定, 即对应公式的真假值也惟一确定.

#### 真值表

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写,用0表示假值,1表示真值.

#### 逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \lor Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

#### Description

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定,则该命题的真假也惟一确定,即对应公式的真假值也惟一确定.

#### 真值表

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写,用0表示假值,1表示真值.

#### 逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \lor Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

#### Description

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定,则该命题的真假也惟一确定,即对应公式的真假值也惟一确定.

#### 真值表

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写,用0表示假值,1表示真值.

#### 逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \lor Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

#### Description

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定,则该命题的真假也惟一确定,即对应公式的真假值也惟一确定.

## 真值表

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写,用0表示假值,1表示真值.

#### 逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \lor Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

联结词的扩充和归约 推理和证明方法

# 一般公式的语义

#### 记号

• 记含n个原子 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的公式G为:  $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ .

## Definition (指派(assignment))

设 $G(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 是一公式: 对 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 的一次取值  $\langle x_1,x_2,\ldots,x_n \rangle$ ,  $x_i \in \{0,1\}$ , 称为一个指派(assignment). 记 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 的指派 $I=\langle x_1,x_2,\ldots,x_n \rangle$ 为:  $I=x_1x_2\ldots x_n$ 

### Property

- 公式 $G(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 一共有 $2^n$ 种不同的指派.
- 注意:指派的下标与对应指派间的关系.

## Example

•  $G(P, Q) = \neg((P \lor Q) \land P)$  的4个指派是:  $I_0 = 00, \ I_1 = 01, \ I_2 = 10, \ I_3 = 11.$  3. 永真公式 范式 联结词的扩充和归约 推理和证明方法

# 一般公式的语义

#### 记号

• 记含n个原子 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的公式G为:  $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ .

## Definition (指派(assignment))

设 $G(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 是一公式: 对 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 的一次取值  $\langle x_1,x_2,\ldots,x_n \rangle$ ,  $x_i \in \{0,1\}$ , 称为一个指派(assignment). 记 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 的指派 $I=\langle x_1,x_2,\ldots,x_n \rangle$ 为:  $I=x_1x_2\ldots x_n$ 

#### Property

- 公式 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 一共有 $2^n$ 种不同的指派.
- 注意:指派的下标与对应指派间的关系

## Example

•  $G(P, Q) = \neg((P \lor Q) \land P)$  的4个指派是:  $I_0 = 00, \ I_1 = 01, \ I_2 = 10, \ I_3 = 11.$  - 題符号化 永真公式 范式 联结词的扩充和归约 推理和证明方法

# 一般公式的语义

#### 记号

• 记含n个原子 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的公式G为:  $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ .

## Definition (指派(assignment))

设 $G(P_1, P_2, ..., P_n)$ 是一公式: 对 $P_1, P_2, ..., P_n$ 的一次取值  $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ , 称为一个指派(assignment). 记 $P_1, P_2, ..., P_n$ 的指派 $I = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ 为:  $I = x_1 x_2 ... x_n$ 

#### Property

- 公式 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 一共有 $2^n$ 种不同的指派.
- 注意:指派的下标与对应指派间的关系.

## Example

•  $G(P, Q) = \neg((P \lor Q) \land P)$  的4个指派是:  $I_0 = 00, I_1 = 01, I_2 = 10, I_3 = 11.$ 

## 一般公式的语义

#### 记号

• 记含n个原子 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 的公式G为:  $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ .

### Definition (指派(assignment))

设 $G(P_1, P_2, ..., P_n)$ 是一公式: 对 $P_1, P_2, ..., P_n$ 的一次取值  $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ , 称为一个指派(assignment). 记 $P_1, P_2, ..., P_n$ 的指派 $I = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ 为:  $I = x_1 x_2 ... x_n$ 

#### **Property**

- 公式 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 一共有 $2^n$ 种不同的指派.
- 注意:指派的下标与对应指派间的关系.

#### Example

•  $G(P,Q) = \neg((P \lor Q) \land P)$  的4个指派是:  $I_0 = 00, \ I_1 = 01, \ I_2 = 10, \ I_3 = 11.$ 

## 解释(Interpretation)

#### Definition (G在解释I下的真值I(G))

设 $I = x_1 x_2 \dots x_n$ 为公式 $G(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 的一个指派,则公式G在指派I下的值记为: I(G), 其递归定义如下:

• 
$$I(\mathbb{T}) = 1$$
,  $I(\mathbb{F}) = 0$ ;

• 
$$I(G) = x_i$$
, if  $G \equiv P_i$ ;

0

$$I(G) = \begin{cases} \neg I(A), & \text{if} \quad G = \neg A \\ I(A) \land I(B), & \text{if} \quad G = A \land B \\ I(A) \lor I(B), & \text{if} \quad G = A \lor B \\ I(A) \to I(B), & \text{if} \quad G = A \to B \\ I(A) \leftrightarrow I(B), & \text{if} \quad G = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

◆ロ → ◆団 → ◆ 豆 → ◆ 豆 ・ り へ ⊙

#### Definition (G在解释I下的真值I(G))

设 $I = x_1 x_2 \dots x_n$ 为公式 $G(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 的一个指派,则公式G在指派I下的值记为: I(G), 其递归定义如下:

• 
$$I(\mathbb{T}) = 1$$
,  $I(\mathbb{F}) = 0$ ;

• 
$$I(G) = x_i$$
, if  $G \equiv P_i$ ;

$$I(G) = \begin{cases} \neg I(A), & \text{if} \quad G = \neg A \\ I(A) \land I(B), & \text{if} \quad G = A \land B \\ I(A) \lor I(B), & \text{if} \quad G = A \lor B \\ I(A) \to I(B), & \text{if} \quad G = A \to B \\ I(A) \leftrightarrow I(B), & \text{if} \quad G = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

- (ロ) (団) (巨) (巨) (E) の(O

## 解释(Interpretation)

#### Definition (G在解释I下的真值I(G))

设 $I = x_1 x_2 \dots x_n$ 为公式 $G(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 的一个指派,则公式G在指派I下的值记为: I(G), 其递归定义如下:

• 
$$I(\mathbb{T}) = 1$$
,  $I(\mathbb{F}) = 0$ ;

• 
$$I(G) = x_i$$
, if  $G \equiv P_i$ ;

•

$$I(G) = \begin{cases} \neg I(A), & \text{if} \quad G = \neg A \\ I(A) \wedge I(B), & \text{if} \quad G = A \wedge B \\ I(A) \vee I(B), & \text{if} \quad G = A \vee B \\ I(A) \rightarrow I(B), & \text{if} \quad G = A \rightarrow B \\ I(A) \leftrightarrow I(B), & \text{if} \quad G = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

- 4 ロ ト 4 ┛ ト 4 ≧ ト 4 ≧ ト 9 Q @

## Example

#### 真值表

• 公式 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 在 $2^n$ 的指派下的值所构成的表称为公式G的 真值表.

#### Example

## Example

#### 真值表

• 公式 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 在 $2^n$ 的指派下的值所构成的表称为公式G的 真值表.

#### Example

•  $\triangle \preceq G = \neg((P \lor Q) \land P)$ 的真值表:

## Example

#### 真值表

• 公式 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 在 $2^n$ 的指派下的值所构成的表称为公式G的 真值表.

#### Example

•  $\triangle \preceq G = \neg((P \lor Q) \land P)$ 的真值表:

#### 真值表

• 公式 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 在 $2^n$ 的指派下的值所构成的表称为公式G的 真值表.

#### Example

•  $\triangle \preceq G = \neg((P \lor Q) \land P)$ 的真值表:

指派	P	Q	$P \lor Q$	$(P \lor Q) \land P$	G
$I_0 = 00$	0	0	0	0	1
$I_1 = 01$	0	1	1	0	1
$I_2 = 10$	1	0	1	1	0
$I_3 = 11$	1	1	1	1	0

• 公式 $G(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 的语义解释实际上是一个函数:  $\underbrace{\{0,1\}\times\{0,1\}\times\ldots\times\{0,1\}}_{n\coloredge} o \{0,1\}$ 

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function);
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序;
- 形式系统的构成:"形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题".

- 公式 $G(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 的语义解释实际上是一个函数:  $\underbrace{\{0,1\}\times\{0,1\}\times\ldots\times\{0,1\}}_{n\c x} \to \{0,1\}$   $\langle x_1,x_2,\ldots,x_n \rangle \mapsto G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function);
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序;
- 形式系统的构成:"形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题".

- 公式 $G(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 的语义解释实际上是一个函数:  $\underbrace{\{0,1\}\times\{0,1\}\times\ldots\times\{0,1\}}_{n\c x_1,x_2,\ldots,x_n} \to G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function);
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序;
- 形式系统的构成:"形式结构+语义
- 逻辑问题转化为"计算问题"

# • 公式 $G(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 的语义解释实际上是一个函数: $\underbrace{\{0,1\}\times\{0,1\}\times\ldots\times\{0,1\}}_{n\c x} \to \{0,1\}$ $\langle x_1,x_2,\ldots,x_n \rangle \mapsto G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function);
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序;
- 形式系统的构成:"形式结构+语义"
- ▶ 逻辑问题转化为"计算问题"

• 公式 $G(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 的语义解释实际上是一个函数:

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n \not X} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function);
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序;
- 形式系统的构成:"形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题".

#### 计算问题

- 计算一个n个原子的真值表需要2n次计算;
- 计算能力为1T(2<sup>40</sup>)Flops, 计算100个原子的公式的真值表所用的 时间是:

$$2^{100}(\cancel{x}) = 2^{100} \div 2^{40} = 2^{60}(\cancel{b})$$
$$= 2^{60} \div (365 * 24 * 3600) = 3.6558901 \times 10^{10}(\cancel{4})$$

Boolean Satisfiability problem(SAT):NP-complete problem.

#### 计算问题

- 计算一个n个原子的真值表需要 $2^n$ 次计算;
- → 计算能力为1T(2<sup>40</sup>)Flops, 计算100个原子的公式的真值表所用的 时间是:

$$2^{100}($$
次 $) = 2^{100} \div 2^{40} = 2^{60}($ 秒 $)$   
=  $2^{60} \div (365 * 24 * 3600) = 3.6558901 \times 10^{10}($ 年 $)$ 

Boolean Satisfiability problem(SAT):NP-complete problem

## Remarks(2/2)

#### 计算问题

- 计算一个n个原子的真值表需要2n次计算;
- 计算能力为 $1T(2^{40})$ Flops,计算100个原子的公式的真值表所用的 时间是:

$$2^{100}(\cancel{x}) = 2^{100} \div 2^{40} = 2^{60}(\cancel{v})$$
$$= 2^{60} \div (365 * 24 * 3600) = 3.6558901 \times 10^{10}(\cancel{4})$$

Boolean Satisfiability problem(SAT):NP-complete problem.

22/85

#### Outline

- 2 永真公式
  - 公式的分类
  - 逻辑等价
  - 永真蕴含
  - 恒等变换和不等变换
  - 对偶性

- 5 推理和证明方法

#### Definition

#### 设 G是 公式:

- 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 1,称G为重言式(永真式);

#### Definition

#### 设G是公式:

- 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 1,称G为重言式(永真式);
- 如果存在G的一个解释I, 有I(G) = 1, 称G为可满足式(satisfiable);
- 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 0,称G为矛盾式(invalid)

#### Example

公式 $G = \neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P$  为重言式

| ロ > 4 回 > 4 豆 > 4 豆 > 9 Q (~)

#### Definition

#### 设G是公式:

- 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 1,称G为重言式(永真式);
- 如果存在G的一个解释I, 有I(G) = 1, 称G为可满足式(satisfiable);
- 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 0,称G为矛盾式(invalid).

#### Example

公式 $G = \neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P$  为重言式

#### Definition

#### 设G是公式:

- 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 1,称G为重言式(永真式);
- 如果存在G的一个解释I, 有I(G) = 1, 称G为可满足式(satisfiable);
- 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 0,称G为矛盾式(invalid).

#### Example

公式 $G = \neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P$  为重言式

#### Definition

#### 设 G是 公式:

- 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 1,称G为重言式(永真式);
- 如果存在G的一个解释I, 有I(G) = 1, 称G为可满足式(satisfiable);
- 如果对G的任意一个解释I,都有I(G) = 0,称G为矛盾式(invalid).

#### Example

公式 $G = \neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P$ 为重言式.

指派	P	$\overline{Q}$	$P \lor Q$	$(P \lor Q) \land P$	$\neg((P \lor Q) \land P)$	$\neg P$	G
$I_0 = 00$	0	0	0	0	1	1	1
$I_1 = 01$	0	1	1	0	1	1	1
$I_2 = 10$	1	0	1	1	0	0	1
$I_3 = 11$	1	1	1	1	0	0	1

(ロ ) 4団 ) 4 E ) 4 E ) 9 Q (P

#### Definition

称公式F和G逻辑等价, iff, 公式 $(F) \leftrightarrow (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Leftrightarrow G$ .

#### Example

● 公式 $G = \neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P$ 为重言式, 则.  $\neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P$ .

- $A \Leftrightarrow A$ ;
- if  $A \Leftrightarrow B$ , then  $B \Leftrightarrow A$ ;
- if  $A \Leftrightarrow B$  and  $B \Leftrightarrow C$ , then  $A \Leftrightarrow C$ .

#### Definition

称公式F和G逻辑等价, iff, 公式 $(F) \leftrightarrow (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Leftrightarrow G$ .

#### Example

• 公式 $G = \neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P$ 为重言式,则, $\neg((P \lor Q) \land P) \Leftrightarrow \neg P$ .

- $A \Leftrightarrow A$ ;
- if  $A \Leftrightarrow B$ , then  $B \Leftrightarrow A$ ;
- if  $A \Leftrightarrow B$  and  $B \Leftrightarrow C$ , then  $A \Leftrightarrow C$ .

#### Definition

称公式F 和G 逻辑等价, iff, 公式 $(F) \leftrightarrow (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Leftrightarrow G$ .

#### Example

•  $\triangle \preceq G = \neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P \land \varpi \equiv \preceq,$ 则,  $\neg((P \lor Q) \land P) \Leftrightarrow \neg P$ .

#### **Properties**

◆□▶◆御▶◆意▶◆意▶ 意

#### Definition

称公式F 和G 逻辑等价, iff, 公式 $(F) \leftrightarrow (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Leftrightarrow G$ .

#### Example

•  $\triangle \preceq G = \neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P \land \varpi \equiv \preceq,$ 则,  $\neg((P \lor Q) \land P) \Leftrightarrow \neg P$ .

#### **Properties**

- $\bullet$   $A \Leftrightarrow A$ :

◆□▶◆御▶◆意▶◆意▶ 意

#### Definition

称公式F和G逻辑等价, iff, 公式 $(F) \leftrightarrow (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Leftrightarrow G$ .

#### Example

• 公式 $G = \neg((P \lor Q) \land P) \leftrightarrow \neg P$ 为重言式,则, $\neg((P \lor Q) \land P) \Leftrightarrow \neg P$ .

#### **Properties**

- $\bullet$   $A \Leftrightarrow A$ ;
- if  $A \Leftrightarrow B$ , then  $B \Leftrightarrow A$ ;
- if  $A \Leftrightarrow B$  and  $B \Leftrightarrow C$ , then  $A \Leftrightarrow C$ .

◆ロ → ◆ 個 → ◆ 重 → ● ● り へ ○

#### Definition

称公式F和G逻辑等价, iff, 公式 $(F) \leftrightarrow (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Leftrightarrow G$ .

#### Example

公式G=¬((P∨Q)∧P)↔¬P为重言式,
 则,¬((P∨Q)∧P)⇔¬P.

- $\bullet$   $A \Leftrightarrow A$ ;
- if  $A \Leftrightarrow B$ , then  $B \Leftrightarrow A$ ;
- if  $A \Leftrightarrow B$  and  $B \Leftrightarrow C$ , then  $A \Leftrightarrow C$ .

## 常用的逻辑等价式

$\neg \neg P \Leftrightarrow P$	双重否定律
$P \wedge P \Leftrightarrow P$	幂等律
$P \lor P \Leftrightarrow P$	
$P \land Q \Leftrightarrow Q \land P$	交换律
$P \lor Q \Leftrightarrow Q \lor P$	
$(P \land Q) \land R \Leftrightarrow P \land (Q \land R)$	结合律
$(P \lor Q) \lor R \Leftrightarrow P \lor (Q \lor R)$	
$(P \land Q) \lor P \Leftrightarrow P$	吸收律
$(P \lor Q) \land P \Leftrightarrow P$	
$(P \land Q) \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$	分配律
$(P \lor Q) \land R \Leftrightarrow (P \land R) \lor (Q \land R)$	
$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \lor Q$	蕴含恒等式
$\neg (P \land Q) \Leftrightarrow \neg P \lor \neg Q$	De Morgan律
$\neg (P \lor Q) \Leftrightarrow \neg P \land \neg Q$	
$(P \to Q) \land (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$	归谬律
$(P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{T}$	排中律

#### Definition

- 称公式F 永真蕴含公式G, iff, 公式 $(F) \to (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ .
- 注: 对F 和G 中原子的所有指派I, 都有 $I(F) \leq I(G)$ , 即F 为真时 G 一定为真, 相当于代数中的不等式.

#### Example

公式 G = P ∧ (P → Q) → Q为重言式
 则, P ∧ (P → Q) ⇒ Q.

- $\bullet$   $A \Rightarrow A$ :
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow A$ , then  $A \Leftrightarrow B$
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow C$ , then  $A \Rightarrow C$ ;
- $\bullet \text{ if } A \Rightarrow B \text{ then } \neg B \Rightarrow \neg A$

#### Definition

- 称公式F 永真蕴含公式G, iff, 公式 $(F) \to (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ .
- 注: 对F 和G 中原子的所有指派I, 都有 $I(F) \leq I(G)$ , 即F 为真时 G 一定为真, 相当于代数中的不等式.

#### Example

• 公式  $G = P \land (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 为重言的则,  $P \land (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ .

- $\bullet$   $A \Rightarrow A$ :
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow A$ , then  $A \Leftrightarrow B$ ;
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow C$ , then  $A \Rightarrow C$ ;
- $\bullet \text{ if } A \Rightarrow B \text{ then } \neg B \Rightarrow \neg A$

#### Definition

- 称公式F 永真蕴含公式G, iff, 公式 $(F) \to (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ .
- 注: 对F 和G 中原子的所有指派I, 都有 $I(F) \leq I(G)$ , 即F 为真时 G 一定为真, 相当于代数中的不等式.

#### Example

• 公式  $G = P \land (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 为重言式,

- $\bullet$   $A \Rightarrow A$
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow A$ , then  $A \Leftrightarrow B$
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow C$ , then  $A \Rightarrow C$ :
- $\bullet \text{ if } A \Rightarrow B \text{ then } \neg B \Rightarrow \neg A$

#### Definition

- 称公式F 永真蕴含公式G, iff, 公式 $(F) \to (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ .
- 注: 对F 和G 中原子的所有指派I, 都有 $I(F) \leq I(G)$ , 即F 为真时 G 一定为真, 相当于代数中的不等式.

#### Example

• 公式  $G = P \land (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 为重言式,则, $P \land (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ .

- $\bullet$   $A \Rightarrow A$ :
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow A$ , then  $A \Leftrightarrow B$ ;
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow C$ , then  $A \Rightarrow C$ :
- $\bullet \text{ if } A \Rightarrow B \text{ then } \neg B \Rightarrow \neg A$

#### Definition

- 称公式F 永真蕴含公式G, iff, 公式 $(F) \to (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ .
- 注: 对F 和G 中原子的所有指派I, 都有 $I(F) \leq I(G)$ , 即F 为真时 G 一定为真, 相当于代数中的不等式.

#### Example

• 公式  $G = P \land (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 为重言式,则, $P \land (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ .

- $\bullet$   $A \Rightarrow A$ :
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow A$ , then  $A \Leftrightarrow B$ ;
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow C$ , then  $A \Rightarrow C$ ;
- if  $A \Rightarrow B$ , then  $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

#### Definition

- 称公式F 永真蕴含公式G, iff, 公式 $(F) \to (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ .
- 注: 对F 和G 中原子的所有指派I, 都有 $I(F) \leq I(G)$ , 即F 为真时 G 一定为真, 相当于代数中的不等式.

#### Example

公式 G = P ∧ (P → Q) → Q为重言式,
 则, P ∧ (P → Q) ⇒ Q.

- $\bullet$   $A \Rightarrow A$ :
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow A$ , then  $A \Leftrightarrow B$ ;
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow C$ , then  $A \Rightarrow C$ ;
- if  $A \Rightarrow B$ , then  $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

#### Definition

- 称公式F 永真蕴含公式G, iff, 公式 $(F) \to (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ .
- 注: 对F 和G 中原子的所有指派I, 都有 $I(F) \leq I(G)$ , 即F 为真时 G 一定为真, 相当于代数中的不等式.

#### Example

• 公式  $G = P \land (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 为重言式,则, $P \land (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ .

- $\bullet$   $A \Rightarrow A$ :
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow A$ , then  $A \Leftrightarrow B$ ;
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow C$ , then  $A \Rightarrow C$ :
- a if  $A \rightarrow B$  then  $\neg B \rightarrow \neg A$

# 永真蕴含关系(Logical Implication)

#### Definition

- 称公式F 永真蕴含公式G, iff, 公式 $(F) \to (G)$ 是重言式, 记为:  $F \Rightarrow G$ .
- 注: 对F 和G 中原子的所有指派I, 都有 $I(F) \leq I(G)$ , 即F 为真时 G 一定为真, 相当于代数中的不等式.

### Example

• 公式  $G = P \land (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 为重言式,则, $P \land (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ .

# **Properties**

- $\bullet A \Rightarrow A;$
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow A$ , then  $A \Leftrightarrow B$ ;
- if  $A \Rightarrow B$  and  $B \Rightarrow C$ , then  $A \Rightarrow C$ :
- if  $A \Rightarrow B$ , then  $\neg B \Rightarrow \neg A$ .

# 常用的永真蕴含式

$P \Rightarrow P \lor Q$	加法式
$P \land Q \Rightarrow P$	简化式
$(P \to Q) \land P \Rightarrow Q$	假言推理
$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg p$	拒取式
$(P \lor Q) \land \neg P \Rightarrow Q$	析取三段论
$(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow (P \to R)$	前提三段论
$(P \to Q) \Rightarrow (Q \to R) \to (P \to R)$	
$(P \to Q) \land (R \to S) \Rightarrow (P \land R) \to (Q \land S)$	

# 逻辑恒等式与不等式的证明

#### 方法

- 真值表法: 判断 $A \leftrightarrow B$ 或 $A \to B$ 的真值是否恒为1;
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ : 判断A为真时B亦真; 或者, B为假时A亦假
- 恒等、不等变换

# Example: $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

#### Method 1:

- ① 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真;
- 2 则, P为真,  $P \rightarrow Q$ 亦真;
- ③ 所以, Q为真.

- ❶ 设, Q为假;
- 2 分情况讨论:
  - P为具、则、P→ Q为假、所以、P∧(P→ Q)为假;
     P为假、则、P∧(P→ Q)为假。

# 逻辑恒等式与不等式的证明

#### 方法

- 真值表法: 判断 $A \leftrightarrow B$ 或 $A \to B$ 的真值是否恒为1;
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ : 判断A为真时B亦真; 或者, B为假时A亦假;
- 恒等、不等变换

## Example: $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

#### Method 1:

- ① 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真;
- ② 则, P为真,  $P \rightarrow Q$ 亦真;
- 3 所以, Q为真.

- ① 设, Q为假;
- ② 分情况讨论:

# 逻辑恒等式与不等式的证明

#### 方法

- 真值表法: 判断 $A \leftrightarrow B$ 或 $A \to B$ 的真值是否恒为1;
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ : 判断A为真时B亦真; 或者, B为假时A亦假;
- 恒等、不等变换.

# Example: $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

#### Method 1:

- ① 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真;
- ② 则, P为真,  $P \rightarrow Q$ 亦真;
- ③ 所以, Q为真.

- ① 设, Q为假;
- ② 分情况讨论:

# 逻辑恒等式与不等式的证明

#### 方法

- 真值表法: 判断 $A \leftrightarrow B$ 或 $A \to B$ 的真值是否恒为1;
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ : 判断A为真时B亦真; 或者, B为假时A亦假;
- 恒等、不等变换.

## Example: $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

#### Method 1:

- **①** 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$  为真;
- ② 则, P为真,  $P \to Q$ 亦真;
- ③ 所以, Q为真.

- ① 设, Q为假;
- 2 分情况讨论:

# 逻辑恒等式与不等式的证明

#### 方法

- 真值表法: 判断 $A \leftrightarrow B$ 或 $A \to B$ 的真值是否恒为1;
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ : 判断A为真时B亦真; 或者, B为假时A亦假;
- 恒等、不等变换.

Example:  $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ 

#### Method 1:

- **①** 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真;
- ② 则, P为真,  $P \to Q$ 亦真;
- ③ 所以, Q为真.

- ① 设, Q为假;
- ② 分情况讨论:

# 逻辑恒等式与不等式的证明

#### 方法

- 真值表法: 判断 $A \leftrightarrow B$ 或 $A \to B$ 的真值是否恒为1;
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ : 判断A为真时B亦真; 或者, B为假时A亦假;
- 恒等、不等变换.

# Example: $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

#### Method 1:

- **①** 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真;
- ② 则, P为真,  $P \rightarrow Q$ 亦真;
- ③ 所以, Q为真.

- ❶ 设, Q为假;
- ② 分情况讨论:

# 逻辑恒等式与不等式的证明

#### 方法

- 真值表法: 判断 $A \leftrightarrow B$ 或 $A \to B$ 的真值是否恒为1;
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ : 判断A为真时B亦真; 或者, B为假时A亦假;
- 恒等、不等变换.

Example:  $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ 

#### Method 1:

- **①** 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真;
- ② 则, P为真,  $P \rightarrow Q$ 亦真;
- ③ 所以, Q为真.

- ❶ 设, Q为假;
- ② 分情况讨论:

# 逻辑恒等式与不等式的证明

#### 方法

- 真值表法: 判断 $A \leftrightarrow B$ 或 $A \to B$ 的真值是否恒为1;
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ : 判断A为真时B亦真; 或者, B为假时A亦假;
- 恒等、不等变换.

## Example: $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

#### Method 1:

- ① 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真;
- ② 则, P为真,  $P \rightarrow Q$ 亦真;
- ③ 所以, Q为真.

- ❶ 设, Q为假;
- ② 分情况讨论:
  - P为真,则, $P \to Q$ 为假,所以, $P \land (P \to Q)$ 为假;
  - P为假,则, $P \land (P \rightarrow Q)$ 为假.

# 逻辑恒等式与不等式的证明

#### 方法

- 真值表法: 判断 $A \leftrightarrow B$ 或 $A \to B$ 的真值是否恒为1:
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ : 判断A为真时B亦真; 或者, B为假时A亦假;
- 恒等、不等变换.

## Example: $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

#### Method 1:

- ① 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真;
- ② 则, P为真,  $P \rightarrow Q$ 亦真;
- ③ 所以, Q为真.

- ❶ 设, Q为假;
- ② 分情况讨论:
  - P为真,则, $P \to Q$ 为假,所以, $P \land (P \to Q)$ 为假;
  - P为假,则, $P \land (P \rightarrow Q)$ 为假.



# 逻辑恒等式与不等式的证明

#### 方法

- 真值表法: 判断 $A \leftrightarrow B$ 或 $A \to B$ 的真值是否恒为1;
- 对不等式 $A \Rightarrow B$ : 判断A为真时B亦真; 或者, B为假时A亦假;
- 恒等、不等变换.

## Example: $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

#### Method 1:

- **①** 设,  $P \wedge (P \rightarrow Q)$  为真;
- ② 则, P为真,  $P \to Q$ 亦真;
- ③ 所以, Q为真.

- ❶ 设、
  ②为假;
- ② 分情况讨论:
  - P为真,则, $P \to Q$ 为假,所以, $P \land (P \to Q)$ 为假;
  - P为假,则, $P \land (P \rightarrow Q)$ 为假.



#### Definition (代入(Substitution))

设 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一公式, F是另一公式, 设 $P_i$ 是公式G中的某一原子, 将 公式G中的 $P_i$ 的每个出现用F替换,称为代入,代入后所得的公式  $G(P_1,\ldots,F/P_i,\ldots,P_n)$  称为原公式的代入实例.

#### Definition (代入(Substitution))

设 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一公式,F是另一公式,设 $P_i$ 是公式G中的某一原子,将公式G中的 $P_i$ 的<mark>每个</mark>出现用F替换,称为代入,代入后所得的公式  $G(P_1, \ldots, F/P_i, \ldots, P_n)$ 称为原公式的代入实例.

#### Example

- 3  $G(F/P, Q) \neq (\neg P \lor R \land Q) \lor \neg P \lor R$

#### Theorem (代入规则)

设公式 $G(P_1, P_2, ..., P_n)$ 是重言式,则其任意的一个代入实例  $G(P_1, ..., P_{i-1}F/P_i, P_{i+1}, ..., P_n)$ 也是重言式.

### Corollary (代入规则)

A ⇔ B, M A(F/P) ⇔ B(F/P);
 A ⇒ B, M A(F/P) ⇒ B(F/P).

#### Definition (代入(Substitution))

设 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一公式,F是另一公式,设 $P_i$ 是公式G中的某一原子,将公式G中的 $P_i$ 的<mark>每个</mark>出现用F替换,称为代入,代入后所得的公式  $G(P_1, \ldots, F/P_i, \ldots, P_n)$ 称为原公式的代入实例.

#### Example

- 3  $G(F/P, Q) \neq (\neg P \lor R \land Q) \lor \neg P \lor R$

#### Theorem (代入规则)

设公式 $G(P_1, P_2, ..., P_n)$ 是重言式,则其任意的一个代入实例  $G(P_1, ..., P_{i-1}F/P_i, P_{i+1}, ..., P_n)$ 也是重言式.

#### Definition (代入(Substitution))

设 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一公式,F是另一公式,设 $P_i$ 是公式G中的某一原子,将公式G中的 $P_i$ 的<mark>每个</mark>出现用F替换,称为代入,代入后所得的公式  $G(P_1, \ldots, F/P_i, \ldots, P_n)$ 称为原公式的代入实例.

#### Example

- $G(F/P, Q) \neq (\neg P \lor R \land Q) \lor \neg P \lor R$

#### Theorem (代入规则)

设公式 $G(P_1, P_2, ..., P_n)$ 是重言式,则其任意的一个代入实例  $G(P_1, ..., P_{i-1}F/P_i, P_{i+1}, ..., P_n)$ 也是重言式.

#### Definition (代入(Substitution))

设 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一公式,F是另一公式,设 $P_i$ 是公式G中的某一原子,将公式G中的 $P_i$ 的<mark>每个</mark>出现用F替换,称为代入,代入后所得的公式  $G(P_1, \ldots, F/P_i, \ldots, P_n)$ 称为原公式的代入实例.

#### Example

- $G(F/P, Q) \neq (\neg P \lor R \land Q) \lor \neg P \lor R$

#### Theorem (代入规则)

设公式 $G(P_1, P_2, ..., P_n)$ 是重言式,则其任意的一个代入实例  $G(P_1, ..., P_{i-1}F/P_i, P_{i+1}, ..., P_n)$ 也是重言式.

#### Definition (代入(Substitution))

设 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一公式,F是另一公式,设 $P_i$ 是公式G中的某一原子,将公式G中的 $P_i$ 的<mark>每个</mark>出现用F替换,称为代入,代入后所得的公式  $G(P_1, \ldots, F/P_i, \ldots, P_n)$ 称为原公式的代入实例.

#### Example

- $G(F/P, Q) \neq (\neg P \lor R \land Q) \lor \neg P \lor R$

#### Theorem (代入规则)

设公式 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是重言式,则其任意的一个代入实例  $G(P_1, \ldots, P_{i-1} F/P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n)$ 也是重言式.

#### Definition (代入(Substitution))

设 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一公式,F是另一公式,设 $P_i$ 是公式G中的某一原子,将公式G中的 $P_i$ 的每个出现用F替换,称为代入,代入后所得的公式  $G(P_1, \ldots, F/P_i, \ldots, P_n)$ 称为原公式的代入实例.

#### Example

#### Theorem (代入规则)

设公式 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是重言式,则其任意的一个代入实例  $G(P_1, \ldots, P_{i-1} \mathbf{F}/P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n)$ 也是重言式.

- $A \Leftrightarrow B$ ,  $M A(F/P) \Leftrightarrow B(F/P)$ ;
- 2  $A \Rightarrow B$ , M  $A(F/P) \Rightarrow B(F/P)$ .

#### Definition (代入(Substitution))

设 $G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 是一公式,F是另一公式,设 $P_i$ 是公式G中的某一原子,将公式G中的 $P_i$ 的<mark>每个</mark>出现用F替换,称为代入,代入后所得的公式  $G(P_1, \ldots, F/P_i, \ldots, P_n)$ 称为原公式的代入实例.

#### Example

- $G(F/P, Q) \neq (\neg P \lor R \land Q) \lor \neg P \lor R$

#### Theorem (代入规则)

设公式 $G(P_1, P_2, ..., P_n)$ 是重言式,则其任意的一个代入实例  $G(P_1, ..., P_{i-1} F/P_i, P_{i+1}, ..., P_n)$ 也是重言式.

- **1**  $A \Leftrightarrow B$ , M  $A(F/P) \Leftrightarrow B(F/P)$ ;
- **2**  $A \Rightarrow B$ , M  $A(F/P) \Rightarrow B(F/P)$ .

# Definition (替换(Replacement))

设G是一公式,A是在G的某个位置出现的子公式,将该子公式A用公式 B置换,称为替换.

#### Example

 $G = (P \to Q) \land P, \ B = (\neg P \lor Q);$   $G' = (\neg P \lor Q) \land P.$ 

### Theorem (替换规则)

设, G' 是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式, 如果 $A \Leftrightarrow B$ , 则 $G \Leftrightarrow G'$ .

$$\underbrace{(P \to Q) \land P}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{(\neg P \lor Q) \land P}_{B}$$

# Definition (替换(Replacement))

设G是一公式,A是在G的某个位置出现的子公式,将该子公式A用公式 B置换,称为替换.

### Example

- $\mathbf{0} \quad G = (P \to Q) \land P, \ B = (\neg P \lor Q);$

## Theorem (替换规则)

 $\mathcal{C}$ , G' 是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式, 如果 $A \Leftrightarrow B$ , 则 $G \Leftrightarrow G'$ .

$$\underbrace{(P \to Q) \land P}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{(\neg P \lor Q) \land P}_{B}$$

# Definition (替换(Replacement))

设G是一公式,A是在G的某个位置出现的子公式,将该子公式A用公式 B置换,称为替换.

### Example

### Theorem (替换规则)

设, G' 是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式, 如果 $A \Leftrightarrow B$ , 则 $G \Leftrightarrow G'$ .

$$\underbrace{(P \to Q) \land P}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{(\neg P \lor Q) \land I}_{R}$$

# Definition (替换(Replacement))

设G是一公式,A是在G的某个位置出现的子公式,将该子公式A用公式 B置换,称为替换.

### Example

### Theorem (替换规则)

设, G' 是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式, 如果 $A \Leftrightarrow B$ , 则 $G \Leftrightarrow G'$ .

$$\underbrace{(P \to Q) \land P}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{(\neg P \lor Q) \land I}_{R}$$

## Definition (替换(Replacement))

设G是一公式,A是在G的某个位置出现的子公式,将该子公式A用公式 B置换,称为替换.

### Example

### Theorem (替换规则)

设, G'是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式, 如果 $A \Leftrightarrow B$ , 则 $G \Leftrightarrow G'$ .

$$\underbrace{(P \to Q)}_{A} \land P \Leftrightarrow \underbrace{(\neg P \lor Q)}_{B} \land P$$

### Definition (替换(Replacement))

设G是一公式,A是在G的某个位置出现的子公式,将该子公式A用公式 B置换,称为替换.

### Example

- $\mathbf{0} \quad G = (P \to Q) \land P, \ B = (\neg P \lor Q);$
- $\mathbf{Q} \quad G' = (\neg P \lor Q) \land P.$

### Theorem (替换规则)

设, G'是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式, 如果 $A \Leftrightarrow B$ , 则 $G \Leftrightarrow G'$ .

$$\underbrace{\overbrace{(P \to Q)}^G \land P}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{(\neg P \lor Q)}_{B} \land P}_{C}$$

# 注意

- 替换规则只能对恒等式 $A \Leftrightarrow B$ 成立,对不等式不成立!
- $\mathbb{P}$ : if  $A \Rightarrow B$ ,  $G \not\Rightarrow G'$ .

$$\underbrace{P \wedge Q}_{A} \Rightarrow \underbrace{P}_{B}$$

$$\underbrace{\neg (P \wedge Q)}_{G} \not \Rightarrow \underbrace{\neg P}_{G'}$$

### Example

$$(P \to Q) \to (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

#### Proof.

$$(\underline{P} \to \underline{Q}) \to (\underline{Q} \vee R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \to (\underline{Q} \vee R)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (\underline{Q} \vee R)$$

$$3 \Leftrightarrow (\neg \neg P \wedge \neg Q) \vee (\underline{Q} \vee R)$$

$$4 \Leftrightarrow (\underline{P} \wedge \neg Q) \vee (\underline{Q} \vee R)$$

$$5 \Leftrightarrow ((\underline{P} \wedge \neg Q) \vee \underline{Q}) \vee R$$

$$6 \Leftrightarrow ((\underline{P} \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \underline{Q})) \vee R$$

$$7 \Leftrightarrow ((\underline{P} \vee Q) \wedge \underline{\mathbb{T}}) \vee R$$

(替换+蕴含表达式) (代入+蕴含表达式) +替换+De Morgan) (替换+双重否定) (代入+结合律)

### Example

$$(P \to Q) \to (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

Proof.

$$(P \to Q) \to (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow \underline{(\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)}$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$3 \Leftrightarrow (\neg \neg P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$4 \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$5 \Leftrightarrow ((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R$$

$$6 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee R$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$$

$$8 \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$9 - RH9$$

# (替换+蕴含表达式)

(代入+蕴含表达式)

(代入+替换+De Morgan)

(替换+双重否定)

(代入+结合律)

(代入+替换+分配律)

(替换+排中律)

(替换+简化豆

◆ロト ◆団ト ◆ 豊ト ◆ 豊 ・ 夕 Q (~)

### Example

$$(P \to Q) \to (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

$$(P \to Q) \to (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$3 \Leftrightarrow (\neg \neg P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$4 \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$5 \Leftrightarrow ((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R$$

$$6 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee R$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$$

$$B \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$9 = RHS$$

### Example

$$(P \to Q) \to (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

$$(P \to Q) \to (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \overline{\neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)}$$

$$3 \Leftrightarrow \overline{(\neg \neg P \land \neg Q)} \lor (Q \lor R)$$

$$4 \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$5 \Leftrightarrow ((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R$$

$$6 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee R$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$$

$$B \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$0 - RH$$

### Example

$$(P \to Q) \to (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

Proof.

$$(P \to Q) \to (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$3 \Leftrightarrow (\neg \neg P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$\mathbf{4} \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$5 \Leftrightarrow ((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R$$

$$6 \Leftrightarrow ((P \lor Q) \land (\neg Q \lor Q)) \lor R$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$$

$$\exists \Leftrightarrow (P \lor Q) \lor R$$

$$9 = RHS$$

◆ロ → ◆団 → ◆ 豆 → ◆ 豆 → りへで

### Example

$$(P \to Q) \to (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

Proof.

$$(P \to Q) \to (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$3 \Leftrightarrow (\neg \neg P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$\mathbf{4} \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$\mathsf{5} \Leftrightarrow ((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R$$

$$6 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee R$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$$

$$B \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$9 = RH^9$$

◆□▶ ◆圖▶ ◆圖▶ ● り९@

### Example

$$(P \to Q) \to (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

$$(P \to Q) \to (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$3 \Leftrightarrow (\neg \neg P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$4 \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$5 \Leftrightarrow \overline{((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R}$$

$$6 \Leftrightarrow \overline{((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q))} \vee R$$

$$0 \Leftrightarrow ((1 \vee Q) \land (1 \vee Q)) \lor$$

$$7 \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$$

$$8 \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$9 = RH^9$$

### Example

$$(P \to Q) \to (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

$$(\underline{P \to Q}) \to (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow \underline{(\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)}$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$3 \Leftrightarrow (\neg \neg P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$\mathbf{4} \iff (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$5 \Leftrightarrow ((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R$$

$$6 \Leftrightarrow ((P \lor Q) \land (\neg Q \lor Q)) \lor R$$

$$\mathbf{7} \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \mathbb{T}) \vee R$$

$$8 \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

### Example

$$(P \to Q) \to (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

$$(\underline{P \to Q}) \to (Q \lor R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \underline{\neg (\neg P \lor Q)} \lor (Q \lor R)$$

$$3 \Leftrightarrow (\underline{\neg \neg P} \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$4 \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$5 \Leftrightarrow \underline{((P \land \neg Q) \lor Q)} \lor R$$

$$6 \Leftrightarrow \overline{((P \lor Q) \land (\neg Q \lor Q))} \lor R$$

$$\mathbf{7} \Leftrightarrow \underline{((P \vee Q) \wedge \mathbb{T})} \vee R$$

$$8 \Leftrightarrow \overline{(P \vee Q) \vee R}$$

$$9 = RHS$$

### Example

$$(P \to Q) \to (Q \lor R) \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

Proof.

9 = RHS

### Example

(简化式)

#### Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于: $(P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P$ 永真;

等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ;

等价于: $\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ .

Proof.

$$\neg((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

1 
$$\Leftrightarrow \neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg(\neg((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$

$$3 \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P$$

$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$

$$5 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$$

$$6 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$$

$$7 \Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q) \land P$$

$$\Leftrightarrow \overline{(\neg P \land P) \land \neg Q}$$

$$9 \Leftrightarrow \overline{\mathbb{F} \wedge \neg \Omega}$$

$$0 \Leftrightarrow \mathbb{F}$$

# (替换+蕴含表达式)

(简化式) 为90

#### Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;  
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ;  
等价于:  $\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ .  
Proof.  

$$\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$1 \Leftrightarrow \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg (\neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$

$$3 \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P$$

$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$

$$5 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$$

$$6 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$$

$$7 \Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q) \land P$$

$$8 \Leftrightarrow (\neg P \land P) \land \neg Q$$

$$9 \Leftrightarrow \mathbb{F} \land \neg Q$$

$$10 \Leftrightarrow \mathbb{F}$$

(替换+蕴含表达式) (代入+替换+蕴含表达式) (代入+替换+De Morgan) (代入+替换+双重否定) (代入+替换+分配律) (替换+排中律) (替换+简化式) (结合律) (替换+排中律)

#### Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;  
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ;  
等价于:  $\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ .  
Proof.  

$$\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$1 \Leftrightarrow \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg (\neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$

$$3 \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P$$

$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$

$$5 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$$

$$6 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$$

$$7 \Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q) \land P$$

$$8 \Leftrightarrow (\neg P \land P) \land \neg Q$$

$$9 \Leftrightarrow \overline{\mathbb{F} \land \neg Q}$$

$$10 \Leftrightarrow \overline{\mathbb{F}}$$

(代入+替换+De Morgan) (简化式) 为90

(替换+蕴含表达式)

(代入+替换+蕴含表达式)

### Example

$$(P \rightarrow Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$
  
等价于:  $(P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P$ 永真;  
等价于:  $(P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ;  
等价于:  $\neg ((P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ .  
Proof.
$$\neg ((P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P)$$
$$1 \Leftrightarrow \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P)$$
$$2 \Leftrightarrow \neg (\neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$
$$3 \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P$$
$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$
$$5 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$$
$$6 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$$
$$7 \Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q) \land P$$
$$8 \Leftrightarrow (\neg P \land P) \land \neg Q$$
$$9 \Leftrightarrow \mathbb{F} \land \neg Q$$
$$10 \Leftrightarrow \mathbb{F}$$

(代入+替换+De Morgan) (代入+替换+双重否定) (代入+替换+分配律) (替换+排中律) (替换+简化式) (结合律) (替换+排中律)

(替换+蕴含表达式)

(代入+替换+蕴含表达式)

#### Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$
  
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;  
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ;  
等价于:  $\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ .  
Proof.
$$\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$$
$$1 \Leftrightarrow \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$$
$$2 \Leftrightarrow \neg (\neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$
$$3 \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P$$
$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$
$$5 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$$
$$6 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor P) \land P$$
$$7 \Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q) \land P$$
$$8 \Leftrightarrow (\neg P \land P) \land \neg Q$$
$$9 \Leftrightarrow \mathbb{F} \land \neg Q$$

(替换+蕴含表达式) (代入+替换+蕴含表达式) (代入+替换+De Morgan) (代入+替换+双重否定) (代入+替换+分配律) (简化式) 为90

#### Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;  
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ;  
等价于:  $\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ .  
Proof.  

$$\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$1 \Leftrightarrow \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg (\neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$

$$3 \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P$$

$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$

$$5 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$$

$$6 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$$

$$7 \Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q) \land P$$

$$8 \Leftrightarrow (\neg P \land P) \land \neg Q$$

$$9 \Leftrightarrow \mathbb{F} \land \neg Q$$

(替换+蕴含表达式) (代入+替换+蕴含表达式) (代入+替换+De Morgan) (代入+替换+双重否定) (代入+替换+分配律)

(替换+排中律)

#### Example

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$ 永真;  
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$  決 正;  
等价于:  $\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ .  
Proof.  

$$\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$1 \Leftrightarrow \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg (\neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$

$$3 \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P$$

$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$

$$5 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$$

$$6 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor \overline{\mathbb{F}}) \land P$$

$$7 \Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q) \land P$$

$$8 \Leftrightarrow (\neg P \land P) \land \neg Q$$

(替换+蕴含表达式) (代入+替换+蕴含表达式) (代入+替换+De Morgan) (代入+替换+双重否定) (代入+替换+双重否定) (代入+替换+分配律) (替换+排中律) (替换+简化式)  $(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$ 

#### Example

等价于: 
$$(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$$
永真;  
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ ;  
等价于:  $\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ .  
Proof.  
$$\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$$
$$1 \Leftrightarrow \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$$
$$2 \Leftrightarrow \neg (\neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$
$$3 \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P$$
$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$
$$5 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$$
$$6 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathbb{F}) \land P$$

 $7 \Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q) \land P$ 

 $8 \Leftrightarrow (\neg P \land P) \land \neg Q$ 

(替换+蕴含表达式) (代入+替换+蕴含表达式) (代入+替换+De Morgan) (代入+替换+双重否定) (代入+替换+分配律) (替换+排中律) (替换+简化式)

(结合律)

$$(P \rightarrow Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$
等价于:  $(P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P \Rightarrow \pi$  ;  
等价于:  $(P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P \Rightarrow \pi$  ;  
等价于:  $\neg ((P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P) \Rightarrow \pi$  .  
Proof.
$$\neg ((P \rightarrow Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P)$$

$$1 \Leftrightarrow \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q \rightarrow \neg P)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg (\neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$

$$3 \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P$$

$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$

$$5 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$$

$$6 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (P \land \neg Q)) \land P$$

$$6 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor P) \land P$$

$$7 \Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q) \land P$$

$$8 \Leftrightarrow (\neg P \land P) \land \neg Q$$

$$9 \Leftrightarrow F \land \neg Q$$

$$($ab \neq + $ab \Rightarrow \neg P$$

$$($ab \neq + $ab \Rightarrow \neg P$$

$$($ab \neq + $ab \Rightarrow \neg P$$

$$($ab \Rightarrow \neg P)$$

$$($ab \Rightarrow \neg P$$

$$($ab \Rightarrow \neg P)$$

$$(P \to Q) \land \neg Q \Rightarrow \neg P$$
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \dot{x} \dot{p}$ ;  
等价于:  $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P \leftrightarrow T$ ;  
等价于:  $\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P) \leftrightarrow F$ .  
Proof.
$$\neg ((P \to Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$1 \Leftrightarrow \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q \to \neg P)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg (\neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor \neg P)$$

$$3 \Leftrightarrow \neg \neg ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \land \neg \neg P$$

$$4 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land \neg Q \land P$$

$$5 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \land P$$

$$6 \Leftrightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor (P \land \neg Q)) \land P$$

$$7 \Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q) \land P$$

$$8 \Leftrightarrow (\neg P \land P) \land \neg Q$$

$$9 \Leftrightarrow F \land \neg Q$$

$$($ f \dot{x} + $ f$$

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ 

解:

$$(P \to Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ 

$$(P \to Q) \land (P \to R)$$

$$1 \Leftrightarrow \overline{(\neg P \vee Q)} \wedge \overline{(\neg P \vee R)}$$

$$2 \Leftrightarrow \neg P \lor (Q \land R)$$

$$3 \Leftrightarrow P \to (Q \land R)$$

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ 解:

$$\frac{(P \to Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q}{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q}$$
 1  $\Leftrightarrow$ 

(代入+替换+蕴含表达式)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ 

$$\Rightarrow \frac{(P \to Q) \land (P \to R)}{(\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)}$$

$$3 \Leftrightarrow P \to (Q \land R)$$

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ 解:

$$(P \to Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

 $1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ 

 $2 \Leftrightarrow \neg P \land Q$ 

(代入+替换+蕴含表达式) (代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ 

$$(P \to Q) \land (P \to R)$$

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ 解:

$$\frac{(P \to Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q}{(\neg P \lor Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q}$$

 $2 \Leftrightarrow \neg P \land Q$ 

(代入+替换+蕴含表达式) (代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \to Q) \land (P \to R)$ 

$$(P \to Q) \land (P \to R)$$

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ 解:

$$(P \to Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

$$(\neg P \lor Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

 $1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ 

 $2 \Leftrightarrow \neg P \land Q$ 

(代入+替换+蕴含表达式) (代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \to Q) \land (P \to R)$ 

解:

$$(P \to Q) \land (P \to R)$$

$$1 \Leftrightarrow \overline{(\neg P \lor Q)} \land \overline{(\neg P \lor R)}$$

$$3 \Leftrightarrow P \to (Q \land R)$$

(替换+蕴含表达式)

### Example

化简公式:  $(P \to Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ 解:

$$(P \to Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

 $1 \Leftrightarrow \underbrace{(\neg P \lor Q \lor \neg R) \land \neg P} \land Q$ 

 $2 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$ 

(代入+替换+蕴含表达式) (代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ 

解:

$$(P \to Q) \land (P \to R)$$

$$1 \Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg P \lor (Q \land R)$$

$$3 \Leftrightarrow P \to (Q \land R)$$

(替换+蕴含表达式) (代入+分配律)

(代入+蕴含表达式)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$ 解:

$$(P \to Q \lor \neg R) \land \neg P \land Q$$

$$(-P) \lor (-P) \land -P \land Q$$

 $\mathbf{1} \Leftrightarrow \underline{(\neg P \lor Q \lor \neg R) \land \neg P} \land Q$ 

 $2 \Leftrightarrow \neg P \land Q$ 

(代入+替换+蕴含表达式) (代入+替换+吸收律)

### Example

化简公式:  $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R)$ 

$$(P \to Q) \land (P \to R)$$

$$\mathbf{1} \iff (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$$

$$2 \Leftrightarrow \neg P \lor (Q \land R)$$

$$3 \Leftrightarrow P \to (Q \land R)$$

#### Remarks

- ❶ 公式的整体变换:代入+基本恒等式;
- ② 公式的局部变换: 替换+基本恒等式;
- ⑤ 局部变换的子公式和基本恒等式的形式不完全一样:代入+替换+基本恒等式;
- 4 蕴含表达式的使用;
- 所有的恒等式和不等式,都能够用基本恒等式和不等式通过代入和替换推出.

# Definition (对偶公式)

### Example

$$(P \land Q \lor \neg R)^*$$

$$= (P \lor Q) \land \neg R$$

$$\neq P \lor Q \land \neg R$$

$$= P \lor (Q \land \neg R)$$

# Property

$$A^{**} = A$$
.

# 广义De Morgan定理

#### **Theorem**

设是一个仅含有
$$\neg$$
,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:  $\neg G(P_1, P_2, ..., P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, ..., \neg P_n)$ 

# Proof (对公式的递归结构用归纳法证明).

- ① Base:  $\overline{A} G \in P$ ,  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{F}$ , 则原恒等式成立;
- ② 设 $G(P_1, P_2, ..., P_n) = A(P_1, P_2, ..., P_n) \wedge B(P_1, P_2, ..., P_n)$ , 并且A和B满足上述恒等式,则:

$$\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

$$= \neg (A(P_1, P_2, \dots, P_n) \land B(P_1, P_2, \dots, P_n))$$
 (假设)

$$\Leftrightarrow \neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \dots, P_n)$$
 (De Morgan)

$$\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \qquad (\text{μsh} \textcircled{g})$$

$$= (A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \land B(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n))^*$$
 (定义)

$$=G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

③ 同理、对 $G = \neg A \rightarrow G = A \lor B$ 有相同的结论.



# 广义De Morgan定理

#### **Theorem**

设是一个仅含有
$$\neg$$
,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:
$$\neg G(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法证明).

- ② 设 $G(P_1, P_2, ..., P_n) = A(P_1, P_2, ..., P_n) \land B(P_1, P_2, ..., P_n)$ , 并且A和 B满足上述恒等式,则:

$$\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n) 
= \neg (A(P_1, P_2, \dots, P_n) \land B(P_1, P_2, \dots, P_n)) 
\Leftrightarrow \neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \lor \neg B(P_1, P_2, \dots, P_n)$$
(De Morgan)

$$\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \qquad (\texttt{1} \texttt{1} \texttt{3} \texttt{4} \texttt{6} \texttt{6} \texttt{6})$$

$$= (A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \land B(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n))^*$$
 (定义)

$$= G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

③ 同理, 对 $G = \neg A \Rightarrow G = A \lor B$ 有相同的结论



# 广义De Morgan定理

#### **Theorem**

设是一个仅含有
$$\neg$$
,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:
$$\neg G(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法证明).

- ② 设 $G(P_1, P_2, ..., P_n) = A(P_1, P_2, ..., P_n) \land B(P_1, P_2, ..., P_n)$ , 并且A和B满足上述恒等式,则:

$$\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n) 
= \neg (A(P_1, P_2, \dots, P_n) \land B(P_1, P_2, \dots, P_n)) 
\Leftrightarrow \neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \lor \neg B(P_1, P_2, \dots, P_n) 
\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \lor B^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) 
= (A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \land B(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n))^* 
= G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$
(定义)

③ 同理, 对 $G = \neg A \rightarrow G = A \lor B$ 有相同的结论.

# 相关推论(1/2)

#### **Theorem**

设F和G是仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:  $F \Leftrightarrow G$  iff  $F^* \Leftrightarrow G^*$ 

iff  $F^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 

#### Proof.

$$F\Leftrightarrow G$$
 iff  $\neg F\Leftrightarrow \neg G$  iff  $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)\Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$  (广义DeMorgan) iff  $F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)\Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$  (代入)

◆□ → ◆□ → ◆□ → □

(双重否定)

# 相关推论(2/2)

#### **Theorem**

设F和G是仅含有 $\neg$ ,  $\land$ 和 $\lor$ 运算符号的公式,则:

$$F \Rightarrow G$$
 iff  $G^* \Rightarrow F^*$ 

### Proof.

$$F \Rightarrow G$$

iff 
$$\neg G \Rightarrow \neg F$$

iff 
$$\neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T}$$

$$\mathsf{iff} \ \ G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \to F^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T} \quad (\dot{\vdash} \not \perp \mathsf{DeMorgan})$$

iff 
$$G^*(\neg \neg P_1, \neg \neg P_2, \dots, \neg \neg P_n) \to F^*(\neg \neg P_1, \neg \neg P_2, \dots, \neg \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$$
 ( $\mathcal{K}\lambda$ )

iff 
$$G^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \to G^*(F_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$$
 (双重否定)

iff 
$$G^* \Rightarrow F^*$$
 (定义)



# Outline

- 3 范式
  - 析取范式和合取范式
  - 主析取范式
- 5 推理和证明方法

# 内容

- - 命题
  - 符号化
  - 合式公式的形式文法
  - 合式公式的形式语义
- - 公式的分类
  - 逻辑等价
  - 永真蕴含
  - 恒等变换和不等变换
  - 对偶性
- 3 范式
  - 析取范式和合取范式 • 主析取范式

  - 联结词的扩充

  - 联结词的归约
- - 有效结论
  - 自然推理的形式证明
  - 证明方法

- $A \Leftrightarrow B$ , 即, 公式A恒等值于B, A和B逻辑等价.

- $A \Leftrightarrow B$ , 即, 公式A恒等值于B, A和B逻辑等价.
- e.g.:  $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \lor Q \Leftrightarrow \dots$

- $A \Leftrightarrow B$ , 即, 公式A恒等值于B, A和B逻辑等价.
- e.g.:  $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \lor Q \Leftrightarrow \dots$
- e.g.:  $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q) \Leftrightarrow \dots$

- $A \Leftrightarrow B$ , 即, 公式A恒等值于B, A和B逻辑等价.
- e.g.:  $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \lor Q \Leftrightarrow \dots$
- e.g.:  $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q) \Leftrightarrow \dots$
- 为了便于讨论, 有必要将公式的形式规范化, 即将公式转换为与其 等价的标准形式.

### Definition基本积、基本和

- 基本积 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- 基本和 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

- 基本积:  $P, \neg P \land Q, Q \land \neg P, P \land \neg P, Q \land P \land \neg P$
- 基本和: P,  $\neg P \lor Q$ ,  $Q \lor \neg P$ ,  $P \lor \neg P$ ,  $Q \lor P \lor \neg P$

### Definition基本积、基本和

- 基本积 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- 基本和 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

- 基本积: P,  $\neg P \land Q$ ,  $Q \land \neg P$ ,  $P \land \neg P$ ,  $Q \land P \land \neg P$
- 基本和: P,  $\neg P \lor Q$ ,  $Q \lor \neg P$ ,  $P \lor \neg P$ ,  $Q \lor P \lor \neg P$

### Definition基本积、基本和

- 基本积 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- 基本和 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

- 基本积:  $P, \neg P \land Q, Q \land \neg P, P \land \neg P, Q \land P \land \neg P$
- 基本和:  $P, \neg P \lor Q, Q \lor \neg P, P \lor \neg P, Q \lor P \lor \neg P$

### Definition基本积、基本和

- 基本积 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- 基本和 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

- 基本积:  $P, \neg P \land Q, Q \land \neg P, P \land \neg P, Q \land P \land \neg P$
- 基本和: P,  $\neg P \lor Q$ ,  $Q \lor \neg P$ ,  $P \lor \neg P$ ,  $Q \lor P \lor \neg P$

### Definition析取范式

● 一个形为基本积的析取的公式, 若与命题公式A 等价, 则称其为公 式A的析取范式, 记为:  $A \Leftrightarrow A_1 \lor A_2 \lor ... \lor A_n$ ,  $(n > 1, A_i$ 是基本 积)

### Example析取范式

### Definition析取范式

• 一个形为基本积的析取的公式, 若与命题公式A 等价, 则称其为公式A的析取范式, 记为:  $A \Leftrightarrow A_1 \lor A_2 \lor ... \lor A_n$ ,  $(n \ge 1, A_i$ 是基本积)

### Example析取范式

- $\bullet \ P \to Q \Leftrightarrow \neg P \lor Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

### 注意

析取范式中只含有联结词¬. ∧. ∨

### Definition析取范式

• 一个形为基本积的析取的公式, 若与命题公式A 等价, 则称其为公式A的析取范式, 记为:  $A \Leftrightarrow A_1 \lor A_2 \lor ... \lor A_n$ ,  $(n \ge 1, A_i$ 是基本积)

### Example析取范式

- $\bullet$   $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \lor Q$
- $\bullet \ P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

### 注意

析取范式中只含有联结词¬. ∧. \

### Definition析取范式

• 一个形为基本积的析取的公式, 若与命题公式A 等价, 则称其为公式A的析取范式, 记为:  $A \Leftrightarrow A_1 \lor A_2 \lor ... \lor A_n$ ,  $(n \ge 1, A_i$ 是基本积)

### Example析取范式

- $\bullet$   $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \lor Q$
- $\bullet \ P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

### 注意

析取范式中只含有联结词¬. ∧. \

### Definition析取范式

• 一个形为基本积的析取的公式, 若与命题公式A 等价, 则称其为公式A的析取范式, 记为:  $A \Leftrightarrow A_1 \lor A_2 \lor ... \lor A_n$ ,  $(n \ge 1, A_i$ 是基本积)

### Example析取范式

- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \lor Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

### 注意

● 析取范式中只含有联结词¬, ∧, V.

### 求解方法: 公式恒等变换

- ① 消去联结词 $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ;
- ② 利用DeMorgen律将联结词 一移至变元前, 并消去双重否定:
- ③ 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式.

### Example求解析取范式

•  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{A}$ 

$$P \land (P \to Q) \Leftrightarrow P \land (\neg P \lor Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \land \neg P) \lor (P \land Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \land Q)$$

#### 注意

• 公式的析取范式不唯一

◆ロ → ◆ 個 → ◆ 重 → ● ● り へ ○ ○

### 求解方法: 公式恒等变换

- ① 消去联结词 $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ;
- ② 利用DeMorgen律将联结词一移至变元前,并消去双重否定;

### Example求解析取范式

$$P \land (P \to Q) \Leftrightarrow P \land (\neg P \lor Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \land \neg P) \lor (P \land Q)$$

### 求解方法: 公式恒等变换

- 消去联结词→, ↔;
- ② 利用DeMorgen律将联结词一移至变元前,并消去双重否定;
- 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式.

### Example求解析取范式

$$P \land (P \to Q) \Leftrightarrow P \land (\neg P \lor Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \land \neg P) \lor (P \land Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \land Q)$$

### 求解方法: 公式恒等变换

- 消去联结词→, ↔;
- ② 利用DeMorgen律将联结词¬移至变元前,并消去双重否定;
- 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式.

### Example求解析取范式

•  $\bar{x} \propto \bar{\Lambda} P \wedge (P \rightarrow Q)$  的析取范式:

$$P \land (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \land (\neg P \lor Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \land \neg P) \lor (P \land Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \land Q)$$

### 求解方法: 公式恒等变换

- 消去联结词→, ↔;
- ② 利用DeMorgen律将联结词¬移至变元前,并消去双重否定;
- 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式.

### Example求解析取范式

•  $\bar{x} \propto \bar{\Lambda} P \wedge (P \rightarrow Q)$  的析取范式:

$$P \land (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \land (\neg P \lor Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \land \neg P) \lor (P \land Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \land Q)$$

### 求解方法: 公式恒等变换

- ❶ 消去联结词→, ↔;
- ② 利用DeMorgen律将联结词¬移至变元前,并消去双重否定;
- 3 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式.

#### Example求解析取范式

•  $\bar{x} \propto \vec{\Lambda} P \wedge (P \rightarrow Q)$  的析取范式:

$$P \land (P \to Q) \Leftrightarrow P \land (\neg P \lor Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \land \neg P) \lor (P \land Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \land Q)$$

#### 注意

• 公式的析取范式不唯一.

### Definition极小项

• 有n个命题变元 $P_1, P_2, ..., P_n$  的基本积, 称之为极小项, 当且仅当, 每个变元与其否定不同时出现, 且二者之一出现且仅出现一次.

### Example

- 变元 $P, Q: MP \land \neg Q, P \land Q$ 是极小项;
- 变元P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>: 则P<sub>1</sub> ∧¬P<sub>2</sub> ∧¬P<sub>3</sub>, ¬P<sub>1</sub> ∧¬P<sub>2</sub> ∧ P<sub>3</sub>是极小项;
- 问题: 对于给定的n个变元, 一共有多少个不同的极小项?

### Definition极小项

• 有n个命题变元 $P_1, P_2, ..., P_n$  的基本积, 称之为极小项, 当且仅当, 每个变元与其否定不同时出现, 且二者之一出现且仅出现一次.

### Example

- 变元P, Q: 则 $P \land \neg Q, P \land Q$ 是极小项;
- $\mathfrak{GL}P_1, P_2, P_3$ :  $\mathfrak{M}P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3, \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$ 是极小项;
- 问题: 对于给定的n个变元, 一共有多少个不同的极小项?

#### Definition极小项

• 有n个命题变元 $P_1, P_2, ..., P_n$  的基本积, 称之为极小项, 当且仅 当, 每个变元与其否定不同时出现, 且二者之一出现且仅出现一次.

### Example

- 变元P, Q: 则 $P \land \neg Q, P \land Q$ 是极小项;
- $\mathfrak{G}$  $\pi_1, P_2, P_3$ :  $\mathfrak{M}_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3, \ \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$  是极小项;
- 问题:对于给定的n个变元,一共有多少个不同的极小项?

#### Definition极小项

• 有n个命题变元 $P_1, P_2, ..., P_n$  的基本积, 称之为极小项, 当且仅 当, 每个变元与其否定不同时出现, 且二者之一出现且仅出现一次.

### Example

- 变元P, Q: 则 $P \land \neg Q, P \land Q$ 是极小项;
- $\mathfrak{G}$  $\pi_1, P_2, P_3$ :  $\mathfrak{M}_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3, \ \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$  是极小项;
- 问题:对于给定的n个变元,一共有多少个不同的极小项?

#### Definition极小项

• 有n个命题变元 $P_1, P_2, ..., P_n$  的基本积, 称之为极小项, 当且仅 当, 每个变元与其否定不同时出现, 且二者之一出现且仅出现一次.

### Example

- 变元P, Q: 则 $P \land \neg Q, P \land Q$ 是极小项;
- $\mathfrak{G}_{n}$   $\mathfrak{G}_{n$
- 问题: 对于给定的n个变元, 一共有多少个不同的极小项?

- 对于3个命题变元 $P, Q, R, \text{ 共有}2^3 = 8$ 个极小项;
- 对于每个极小项,有且仅有一个指派使之真值为引
- 0

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	000	$m_0$
$\neg P \land \neg Q \land R$	$000 \sim 111$		
$\neg P \land Q \land \neg R$	$000 \sim 111$		
$\neg P \land Q \land R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	$m_7$

### 3个变元极小项

- 对于3个命题变元 $P, Q, R, \text{ 共有}2^3 = 8$ 个极小项;
- 对于每个极小项, 有且仅有一个指派使之真值为真.

0

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	000	$m_0$
$\neg P \land \neg Q \land R$	$000 \sim 111$		
$\neg P \land Q \land \neg R$	$000 \sim 111$		
$\neg P \land Q \land R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	$m_7$

#### 3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R, 共有2<sup>3</sup> = 8个极小项;
- 对于每个极小项, 有且仅有一个指派使之真值为真.
- 标记法: 用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标.

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	000	$m_0$
$\neg P \land \neg Q \land R$	$000 \sim 111$		
$\neg P \land Q \land \neg R$	$000 \sim 111$		
$\neg P \land Q \land R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	$m_7$

◆□▶ ◆■▶ ◆■▶ ◆■ ◆ ● ◆

### 3个变元极小项

- 对于3个命题变元 $P, Q, R, \text{ 共有}2^3 = 8$ 个极小项;
- 对于每个极小项,有且仅有一个指派使之真值为真.
- 标记法: 用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标.

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	000	$m_0$
$\neg P \land \neg Q \land R$	$000 \sim 111$		
$\neg P \land Q \land \neg R$	$000 \sim 111$		
$\neg P \land Q \land R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	$m_7$

◆□▶◆□▶◆壹▶◆壹▶ 壹 かQ令

#### 3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R, 共有2<sup>3</sup> = 8个极小项;
- 对于每个极小项, 有且仅有一个指派使之真值为真.
- 标记法: 用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标.

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	000	$m_0$
$\neg P \land \neg Q \land R$	$000 \sim 111$	001	
$\neg P \land Q \land \neg R$	$000 \sim 111$		
$\neg P \land Q \land R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$		
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	$m_7$

◆ロト ◆問 ト ◆ 豊 ト ◆ 豊 ・ 夕 Q ②

- 对于3个命题变元P, Q, R, 共有 $2^3 = 8$ 个极小项;
- 对于每个极小项,有且仅有一个指派使之真值为真.
- 标记法: 用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标.

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	000	$m_0$
$\neg P \land \neg Q \land R$	$000 \sim 111$	001	
$\neg P \land Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	010	
$\neg P \land Q \land R$	$000 \sim 111$	011	
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	100	
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	101	
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	110	
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	$m_7$

- 对于3个命题变元P, Q, R, 共有 $2^3 = 8$ 个极小项;
- 对于每个极小项,有且仅有一个指派使之真值为真.
- 标记法: 用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标.

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	000 ~ 111	000	$m_0$
$\neg P \land \neg Q \land R$	$000 \sim 111$	001	
$\neg P \land Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	010	
$\neg P \land Q \land R$	$000 \sim 111$	011	
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	100	
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	101	
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	110	
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	$m_7$

- 对于3个命题变元P, Q, R, 共有 $2^3 = 8$ 个极小项;
- 对于每个极小项,有且仅有一个指派使之真值为真.
- 标记法: 用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标.

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	000	$m_0$
$\neg P \land \neg Q \land R$	$000 \sim 111$	001	
$\neg P \land Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	010	
$\neg P \land Q \land R$	$000 \sim 111$	011	
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	100	
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	101	
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	110	
$P \wedge Q \wedge R$	000 ~ 111	110	$m_7$

- 对于3个命题变元P, Q, R, 共有 $2^3 = 8$ 个极小项;
- 对于每个极小项,有且仅有一个指派使之真值为真.
- 标记法: 用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标.

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	000 ~ 111	000	$m_0$
$\neg P \land \neg Q \land R$	$000 \sim 111$	001	$m_1$
$\neg P \land Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	010	
$\neg P \land Q \land R$	$000 \sim 111$	011	
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	100	
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	101	
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	110	
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	$m_7$

- 对于3个命题变元P, Q, R, 共有 $2^3 = 8$ 个极小项;
- 对于每个极小项,有且仅有一个指派使之真值为真.
- 标记法: 用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标.

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	000	$m_0$
$\neg P \land \neg Q \land R$	$000 \sim 111$	001	$m_1$
$\neg P \land Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	010	$m_2$
$\neg P \land Q \land R$	$000 \sim 111$	011	$m_3$
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	100	$m_4$
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	101	$m_5$
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	110	$m_6$
$P \wedge Q \wedge R$	000 ~ 111	110	$m_7$

- 对于3个命题变元P, Q, R, 共有 $2^3 = 8$ 个极小项;
- 对于每个极小项,有且仅有一个指派使之真值为真.
- 标记法: 用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标.

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	000	$m_0$
$\neg P \land \neg Q \land R$	$000 \sim 111$	001	$m_1$
$\neg P \land Q \land \neg R$	$000 \sim 111$	010	$m_2$
$\neg P \land Q \land R$	$000 \sim 111$	011	$m_3$
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	100	$m_4$
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	101	$m_5$
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	110	$m_6$
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	$m_7$

• n个变元 $P_1, P_2, ..., P_n$ 的极小项共 $2^n$ 项:

$$m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$$

$$m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$$

$$m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$$

#### 极小项性质

#### n个变元的极小项

• n个变元 $P_1, P_2, ..., P_n$ 的极小项共 $2^n$ 项:

 $m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$ 

#### 极小项性质

• n个变元 $P_1, P_2, ..., P_n$ 的极小项共 $2^n$ 项:

 $m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$ 

 $m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$ 

#### 极小项性质

• n个变元 $P_1, P_2, ..., P_n$ 的极小项共 $2^n$ 项:

 $m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$ 

 $m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$ 

#### 极小项性质

• n个变元 $P_1, P_2, ..., P_n$ 的极小项共 $2^n$ 项:

 $m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$ 

 $m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$ 

.....

 $m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$ 

#### 极小项性质

• 极小项的下标对应的指派, 唯一使得该极小项真值为1.

• n个变元 $P_1, P_2, ..., P_n$ 的极小项共 $2^n$ 项:

 $m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$ 

 $m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$ 

.....

 $m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$ 

#### 极小项性质

• 极小项的下标对应的指派, 唯一使得该极小项真值为1.

◆□▶◆圖▶◆臺▶◆臺▶ 臺 釣९○

# 主析取范式

### Definition主析取范式

• 一个公式称之为公式A的主析取范式,当且仅当,其与公式A逻辑等价,且由极小项之和组成.

### Example

• 公式 $P \leftrightarrow Q$ 的主析取范式:

### Definition主析取范式

• 一个公式称之为公式A的主析取范式,当且仅当,其与公式A逻辑等价,且由极小项之和组成.

### Example

• 公式 $P \leftrightarrow Q$ 的主析取范式:

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$$
$$\Leftrightarrow m_3 \lor m_0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (0, 3)$$

# 主析取范式

### Definition主析取范式

• 一个公式称之为公式A的主析取范式, 当且仅当, 其与公式A逻辑等价, 且由极小项之和组成.

### Example

• 公式 $P \leftrightarrow Q$ 的主析取范式:

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$$
$$\Leftrightarrow m_3 \lor m_0$$
$$\Leftrightarrow \sum (0, 3)$$

## 公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法: A ⇔析取范式⇔主析取范式
  - ① 去掉析取范式中的永假的基本积:
  - ② 合并相同的变元(变元的否定)和基本积;
  - 到每个基本积补入未出现的命题变元,再展开化简至主析取范式.
- 真值表法

YaoYu

## 公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法: A ⇔析取范式⇔主析取范式
  - ❶ 去掉析取范式中的永假的基本积;
  - ② 合并相同的变元(变元的否定)和基本积;
  - ③ 对每个基本积补入未出现的命题变元, 再展开化简至主析取 范式.
- 真值表法

# 主析取范式的求解

## 公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法: A ⇔析取范式⇔主析取范式
  - ① 去掉析取范式中的永假的基本积;
  - ② 合并相同的变元(变元的否定)和基本积;
  - ③ 对每个基本积补入未出现的命题变元, 再展开化简至主析取 范式.
- 真值表法

◆□▶ ◆□▶ ◆■▶ ◆■ ● めのご

# 主析取范式的求解

## 公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法: A ⇔析取范式⇔主析取范式
  - ① 去掉析取范式中的永假的基本积;
  - ② 合并相同的变元(变元的否定)和基本积;
  - ③ 对每个基本积补入未出现的命题变元, 再展开化简至主析取 范式.
- 真值表法

# 主析取范式的求解

## 公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法: A ⇔析取范式⇔主析取范式
  - 去掉析取范式中的永假的基本积;
  - ② 合并相同的变元(变元的否定)和基本积;
  - ③ 对每个基本积补入未出现的命题变元,再展开化简至主析取范式.
- 真值表法

# 主析取范式求解-Example(I)

### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R \qquad ( \ref{h} \land )$$

$$P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$

$$\Leftrightarrow m_7 \lor m_6 \lor m_7 \lor m_5 \lor m_3 \lor m_1 \tag{QN-5}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

(化简)

$$\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$$

001仅使加,为真 011仅使加,为真 101 110 111

## 思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

• 有且仅有一个指派使得某个极小项为真.

# 主析取范式求解-Example(I)

### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1$$
 (极小坝标记)

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

(化简)

 $\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$ 

001仅使加,为真 011仅使加,为真 101 110 111

## 思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

• 有且仅有一个指派使得某个极小项为真

范式 联结词的扩充和归约 推理和证明方法

# 主析取范式求解-Example(I)

### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R \tag{$\grave{r}$} \land $\boldsymbol{\lambda}$}$$

$$P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$

$$\Leftrightarrow m_7 \lor m_6 \lor m_7 \lor m_5 \lor m_3 \lor m_1$$
 (极小项标记

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

(化简)

$$\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$$

001仅使加,为真 011仅使加3为真 101 110 111

## 思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

• 有且仅有一个指派使得某个极小项为真

范式 联结词的扩充和归约 推理和证明方法

# 主析取范式求解-Example(I)

### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land \underline{(R \lor \neg R)} \lor \underline{(P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q)} \land R \tag{$\grave{r}$} \land $\land$}$$

$$\Leftrightarrow P \land \ Q \land R \lor P \land \ Q \land \neg R \lor P \land \ Q \land R \lor \neg P \land \ Q \land R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \tag{Eff}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \lor m_6 \lor m_7 \lor m_5 \lor m_3 \lor m_1$$
 (极小项标记

$$\Leftrightarrow \Sigma(1\ 3\ 5\ 6\ 7)$$

001仅使11为真 011仅使113为真 101 110 111

## 思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

• 有且仅有一个指派使得某个极小项为真

19QQ

真公式 花式 联结词的扩充和归约 推理和证明方法

# 主析取范式求解-Example(I)

### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $\bullet \ A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land \underline{(R \lor \neg R)} \lor \underline{(P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q)} \land R \tag{$\grave{r}$} \land $\land$}$$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$
 
$$\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$$
 (展开)

() --- \(\lambda\_{---}\)

(12 4 )(14 10)

 $\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$ 

(化简)

- $\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$
- 001仅使加 为真 011仅使加 为真 101 110 111

## 思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

• 有且仅有一个指派使得某个极小项为真

永真公式 范式 联结词的扩充和归约 推理和证明方法

# 主析取范式求解-Example(I)

### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R \tag{$\not{\uparrow}$} \land $\searrow$}$$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$
 
$$\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$$
 (展开)

$$\Leftrightarrow m_7 \lor m_6 \lor m_7 \lor m_5 \lor m_3 \lor m_1$$
 (极小项标记)

(化简

$$\Leftrightarrow \Sigma(1\ 3\ 5\ 6\ 7)$$

001仅使加为真 011仅使加3为真 101 110 1111

## 思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

• 有且仅有一个指派使得某个极小项为真

#### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$
 
$$\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$$
 (展开)

$$\Leftrightarrow m_7 \lor m_6 \lor m_7 \lor m_5 \lor m_3 \lor m_1 \tag{极小项标记}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \lor m_6 \lor m_7 \lor m_5 \lor m_3 \lor m_1$$
 (极小项标记

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

$$\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$$

思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

匕 永真公式 范式 联结词的扩充和归约 推理和证明方法

# 主析取范式求解-Example(I)

#### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$   $\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R$  (补入)  $\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$   $\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$  (展开)  $\Leftrightarrow m_7 \lor m_6 \lor m_7 \lor m_5 \lor m_3 \lor m_1$  (极小项标记)  $\Leftrightarrow m_1 \lor m_3 \lor m_5 \lor m_6 \lor m_7$  (化简)
  - $\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$

## 思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

• 有且仅有一个指派使得某个极小项为真

### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R \tag{$\not{\uparrow}$} \land $\searrow$}$$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$
$$\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$$
 (展开)

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad (极小项标记)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

$$\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$$

思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R \qquad ( \raise )$$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$

$$\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \tag{RT}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \lor m_6 \lor m_7 \lor m_5 \lor m_3 \lor m_1 \tag{极小项标记}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

$$\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$$

思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

#### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R) \vee (P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R \qquad \qquad \big( \not \land \! \! \! \land \! \! \! \land \! \! \! \! \big)$$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$

$$\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$$

$$(A)$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \tag{A.7}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad (极小项标记)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

(化简)

$$\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$$

001仅使m1为真 □ 011仅使m3为真 □ 101 □ 110 □ 111 □

思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

#### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$  $\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R$ (补入)  $\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$  $\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$ (展开) (极小项标记)  $\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1$ (化简)  $\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

001仅使m<sub>1</sub>为真 ■ 011仅使m<sub>3</sub>为真 ■ 101 = 110 = 111

 $\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$ 

思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

题符号化 永真公式 范式 联结词的扩充和归约 推理和证明方法

# 主析取范式求解-Example(I)

#### 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$   $\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R$  (补入)  $\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$   $\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$  (展开)  $\Leftrightarrow m_7 \lor m_6 \lor m_7 \lor m_5 \lor m_3 \lor m_1$  (极小项标记)  $\Leftrightarrow m_1 \lor m_3 \lor m_5 \lor m_6 \lor m_7$  (化简)  $\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$

001仅使 m<sub>1</sub> 为真 011仅使 m<sub>3</sub> 为真 101 110 1111

思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

• 有且仅有一个指派使得某个极小项为真.

# 主析取范式的唯一性

#### Remark

- 主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质: 有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1.
- 公式A的主析取范式中,出现的极小项的下标对应的二进制编码,就是使得公式真值为1的指派;未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派.
- 结论: 公式的主析取范式是唯一的

## Remark

- 主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质:有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1.
- 公式A的主析取范式中,出现的极小项的下标对应的二进制编码,就是使得公式真值为1的指派;未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派.
- 结论: 公式的主析取范式是唯一的.

# 主析取范式的唯一性

#### Remark

- 主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质: 有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1.
- 公式A的主析取范式中,出现的极小项的下标对应的二进制编码,就是使得公式真值为1的指派;未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派.
- 结论: 公式的主析取范式是唯一的

# 主析取范式的唯一性

#### Remark

- 主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质: 有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1.
- 公式A的主析取范式中,出现的极小项的下标对应的二进制编码,就是使得公式真值为1的指派;未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派.
- 结论: 公式的主析取范式是唯一的.

### Example

• 用真值表法求公式 $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$ 的主析取范式.

2		1	
4	1		

#### Example

• 用真值表法求公式 $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$ 的主析取范式.

	P	Q	R	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

真值表法

•  $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$   $\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$ • 使得公式真值为1的指
派,对应于公式A的主析取
范式中的某个极小项的下

### Example

● 用真值表法求公式 $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$ 的主析取范式.

	P	$\overline{Q}$	R	$P \land Q \lor R$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

## 真值表法

- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$  $\Leftrightarrow \sum (1, 3, 5, 6, 7)$
- 使得公式真值为1的指 派,对应于公式A的主析取 范式中的某个极小项的下 标.

### Example

• 用真值表法求公式 $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$ 的主析取范式.

	P	$\overline{Q}$	R	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

## 真值表法

- $\bullet$   $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$  $\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$
- 使得公式真值为1的指 派, 对应于公式A的主析取 范式中的某个极小项的下 标.

#### 问题

• n个变元的命题公式可以有无限多个, 但一共有多少个不同的主析取范式呢?

- 已知对于n个变元, 有 $2^n$ 个极小项;
- 对任一个主析取范式,可能含有的某个极小项,或者不含有某个极小项;
- 所以,一共可构造 2 个主析取范式

### 问题

• n个变元的命题公式可以有无限多个, 但一共有多少个不同的主析取范式呢?

- 已知对于n个变元, 有 $2^n$ 个极小项;
- 对任一个主析取范式,可能含有的某个极小项,或者不含有某个极小项;
- 所以,一共可构造 个主析取范式。

### 问题

• n个变元的命题公式可以有无限多个, 但一共有多少个不同的主析取范式呢?

- 已知对于n个变元, 有 $2^n$ 个极小项;
- 对任一个主析取范式,可能含有的某个极小项,或者不含有某个极小项;
- 所以,一共可构造 / 个主析取范式。

#### 问题

• n个变元的命题公式可以有无限多个, 但一共有多少个不同的主析取范式呢?

- 已知对于n个变元, 有 $2^n$ 个极小项;
- 对任一个主析取范式,可能含有的某个极小项,或者不含有某个极小项;
- 所以, 一共可构造 22 个主析取范式.

### 问题

• n个变元的命题公式可以有无限多个, 但一共有多少个不同的主析取范式呢?

- 已知对于n个变元, 有 $2^n$ 个极小项;
- 对任一个主析取范式,可能含有的某个极小项,或者不含有某个极小项;
- 所以,一共可构造 2<sup>2<sup>n</sup></sup> 个主析取范式.

## Example

- n = 1 一个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^1} = 4$  个:

(不含任何极小坝)

- $\sum_{i=1}^{n} (0) \Leftrightarrow \neg P$
- $\sum_{i=1}^{n} (1) \Leftrightarrow 1$

(含所有极小项)

- n = 2含两个变元的主析取范式, 共有2<sup>2<sup>2</sup></sup> = 16个;
- n = 3含三个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^{\circ}} = 256$ 个.

### Example

- n = 1 一个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^1} = 4$  个:

(不含任何极小项)

### Example

• n = 1 一个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^1} = 4$  个:

(不含任何极小项)

- $\bullet$   $\sum(1) \Leftrightarrow P$

(含所有极小项)

- n = 2含两个变元的主析取范式, 共有2<sup>2<sup>2</sup></sup> = 16个;
- n = 3含三个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^{\circ}} = 256$ 个.

### Example

- n = 1 一个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^1} = 4$  个:

(不含任何极小项)

- 2  $\sum (0) \Leftrightarrow \neg P$ 3  $\sum (1) \Leftrightarrow P$

(含所有极小项)

- n = 2含两个变元的主析取范式, 共有2<sup>2<sup>2</sup></sup> = 16个;
- n = 3含三个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^{\circ}} = 256$ 个.

### Example

• n = 1 一个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^1} = 4$  个:

(不含任何极小项)

(含所有极小项)

- n=2含两个变元的主析取范式, 共有2<sup>2²</sup>=16个;
- n = 3含三个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^{\circ}} = 256$ 个.

◆ロト ◆団ト ◆豆ト ◆豆ト ・豆 ・ からぐ

# 主析取范式个数-Example

#### Example

• n = 1 一个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^1} = 4$  个:

**①** 
$$\sum(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$$
 (不含任何极小项)

- $\bullet$   $\sum (1) \Leftrightarrow P$

(含所有极小项)

- n = 2含两个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^2} = 16$ 个;
- n = 3含三个变元的主析取范式, 共有 $2^{20} = 256$ 个.

◆ロト ◆団ト ◆豆ト ◆豆ト ・豆 ・ からぐ

#### Example

• n = 1 一个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^1} = 4$  个:

● 
$$\sum(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$$
 (不含任何极小项)

- $\bullet$   $\sum (1) \Leftrightarrow P$

(含所有极小项)

- n = 2含两个变元的主析取范式, 共有2<sup>2<sup>2</sup></sup> = 16个;
- n = 3含三个变元的主析取范式, 共有 $2^{2^3} = 256$ 个.

◆ロ > ◆固 > ◆ 差 > ◆ 差 > り < ②</p>

# 主析取范式和主合取范式-对偶性

#### Canonical Forms

- 主析取范式-Canonical Disjunctive Normal Form(CDNF)
- 主合取范式-Canonical Conjunctive Normal Form(CCNF)

主析取范式	主合取范式
基本积	基本和
析取范式(基本积之和)	合取范式(基本和之积)
极小项	极大项
n个变元有2 <sup>n</sup> 个极小项	$n$ 个变元有 $2^n$ 个极大项
其下标使该极小项为真	其下标使该极大项为假
主析取范式是极小项的和	主合取范式是极大项的积
其中的所有的极小项的下标	其中的所有的极大项的下标
对应使该公式为真的解释	对应使该公式为假的解释

# 主析取范式和主合取范式-对偶性

#### Canonical Forms

- 主析取范式-Canonical Disjunctive Normal Form(CDNF)
- 主合取范式-Canonical Conjunctive Normal Form(CCNF)

主析取范式	主合取范式
基本积	基本和
析取范式(基本积之和)	合取范式(基本和之积)
极小项	极大项
n个变元有2 <sup>n</sup> 个极小项	$n$ 个变元有 $2^n$ 个极大项
其下标使该极小项为真	其下标使该极大项为假
主析取范式是极小项的和	主合取范式是极大项的积
其中的所有的极小项的下标	其中的所有的极大项的下标
对应使该公式为真的解释	对应使该公式为假的解释

### 极小项

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极小项;
- 每个极小项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为1;
- 任意两个极小项的合取式真值 为0;
- 全体极小项的析取式真值为1

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极大项;
- 每个极大项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为0;
- 任意两个极大项的析取式真值 为1;
  - 全体极大项的合取式真值为0.

# 极小项

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极小项;
- 每个极小项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为1;
- 任意两个极小项的合取式真值 为0;
- 全体极小项的析取式真值为1

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极大项;
- 每个极大项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为0;
- 任意两个极大项的析取式真值 为1;
  - 全体极大项的合取式真值为0.

# 极小项

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极小项;
- 每个极小项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为1;
- 任意两个极小项的合取式真值 为0;
  - 全体极小项的析取式真值为1

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极大项;
- 每个极大项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为0;
- 任意两个极大项的析取式真值 为1;
  - 全体极大项的合取式真值为0.

### 极小项

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极小项;
- 每个极小项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为1;
- 任意两个极小项的合取式真值 为0;
- 全体极小项的析取式真值为1.

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极大项;
- 每个极大项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为0;
- 任意两个极大项的析取式真值 为1;
  - 全体极大项的合取式真值为0.

### 极小项

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极小项;
- 每个极小项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为1;
- 任意两个极小项的合取式真值 为0;
- 全体极小项的析取式真值为1.

- *n*个变元可以构成2<sup>n</sup>个极大项;
- 每个极大项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为0;
- 任意两个极大项的析取式真值 为1;
  - ▶ 全体极大项的合取式真值为0.

### 极小项

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极小项;
- 每个极小项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为1;
- 任意两个极小项的合取式真值 为0;
- 全体极小项的析取式真值为1.

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极大项;
- 每个极大项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为0;
- 任意两个极大项的析取式真值 为1;
  - 全体极大项的合取式真值为0.

### 极小项

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极小项;
- 每个极小项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为1;
- 任意两个极小项的合取式真值 为0;
- 全体极小项的析取式真值为1.

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极大项;
- 每个极大项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为0;
- 任意两个极大项的析取式真值 为1;
  - 全体极大项的合取式真值为0.

### 极小项

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极小项;
- 每个极小项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为1;
- 任意两个极小项的合取式真值 为0;
- 全体极小项的析取式真值为1.

- n个变元可以构成 $2^n$ 个极大项;
- 每个极大项其下标编码对应的 指派,唯一使得其真值为0;
- 任意两个极大项的析取式真值 为1;
- 全体极大项的合取式真值为0.

### 恒等变换法求CDNF

•  $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$ 

$$\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R \qquad ( \ref{h} ) \land ( \ref{h} ) \ref{h}$$

$$P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \tag{\&6}$$

$$\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$$

### 恒等变换法求CCNF

• 
$$A \Leftrightarrow P \land Q \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$$
 (合取范式

$$\Leftrightarrow (P \lor R \lor (Q \land \neg Q)) \land (Q \lor R \lor (P \land \neg P))$$

$$\Leftrightarrow (P \lor Q \lor R) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor R) \qquad (展开化简)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \land M_2 \land M_4 \Leftrightarrow \Pi(0, 2, 4)$$

(13 73)

### 恒等变换法求CDNF

•  $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$ 

$$\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R$$
 (\*\* \tag{\*} \tag{\*})

$$P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$
 $\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$ 
(展刊

$$\Leftrightarrow m_1 \lor m_3 \lor m_5 \lor m_6 \lor m_7$$
 (化简

$$\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$$

#### 恒等变换法求CCNF

$$\bullet \ A \Leftrightarrow P \land Q \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$$

$$\Leftrightarrow (P \lor R \lor (Q \land \neg Q)) \land (Q \lor R \lor (P \land \neg P))$$

$$\Rightarrow (P \lor Q \lor R) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor R)$$
 (展开化简)

$$M \wedge M \wedge M \wedge M \wedge \Pi(0.9.4)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \prod (0,2,4)$$

#### 恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$ 
  - $\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R \qquad ( \ref{h} \land )$
  - $\Leftrightarrow P \land \ Q \land R \lor P \land \ Q \land \neg R \lor P \land \ Q \land R \lor \neg P \land \ Q \land R$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \tag{\&\#\mathcal{H}}$$

- $\Leftrightarrow m_1 \lor m_3 \lor m_5 \lor m_6 \lor m_7$  (化質
- $\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$

### 恒等变换法求CCNF

•  $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$ 

- (合取范式)
- $\Leftrightarrow (P \lor R \lor (Q \land \neg Q)) \land (Q \lor R \lor (P \land \neg P))$

- (补入)
- $\Leftrightarrow (P \lor Q \lor R) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor R)$
- (展开化简)

 $\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \prod (0, 2, 4)$ 

(74.74)

#### 恒等变换法求CDNF

•  $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$ 

$$\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R$$
 (\*\Lambda \Lambda)

 $\Leftrightarrow P \land Q \land \overline{R} \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$  $\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$ 

 $\Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$ 

(展开)

 $\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$ 

#### 恒等变换法求CCNF

• 
$$A \Leftrightarrow P \land Q \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$$

(合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \lor R \lor (Q \land \neg Q)) \land (Q \lor R \lor (P \land \neg P))$$

(补入)

$$\Leftrightarrow (P \lor Q \lor \overline{R}) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (\overline{\neg P \lor Q \lor R})$$

(展开化筒)

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \prod (0,2,4)$$

(标记)

#### 恒等变换法求CDNF

•  $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$ 

$$\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R \qquad ( * \land \land \land )$$

$$\Leftrightarrow P \wedge \ Q \wedge R \vee P \wedge \ Q \wedge \neg R \vee P \wedge \ Q \wedge R \vee \neg P \wedge \ Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \tag{E.T}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \tag{化简}$$

### 恒等变换法求CCNF

• 
$$A \Leftrightarrow P \land Q \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$$

$$\Leftrightarrow (P \lor R \lor (Q \land \neg Q)) \land (Q \lor R \lor (P \land \neg P))$$

$$\Leftrightarrow (P \lor Q \lor \overline{R}) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (\overline{\neg P \lor Q \lor R})$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \prod (0, 2, 4)$$

#### 恒等变换法求CDNF

• 
$$A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R \qquad ( \raise )$$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \tag{E.T}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \tag{化简}$$

$$\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$$

#### 恒等变换法求CCNF

$$\bullet \ A \Leftrightarrow P \land Q \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$$

$$\Leftrightarrow (P \lor R \lor (Q \land \neg Q)) \land (Q \lor R \lor (P \land \neg P))$$

$$\Leftrightarrow (P \lor Q \lor \overline{R}) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (\overline{\neg P \lor Q \lor R})$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \prod (0, 2, 4)$$

#### 恒等变换法求CDNF

 $\bullet \ \ A \Leftrightarrow P \land \ Q \lor R$ 

$$\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R \qquad ( * \land \land \land )$$

$$\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \tag{化简}$$

$$\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$$

#### 恒等变换法求CCNF

• 
$$A \Leftrightarrow P \land Q \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$$

(合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \lor R \lor \underline{(Q \land \neg Q)}) \land (Q \lor R \lor \underline{(P \land \neg P)})$$

(补入)

$$\Leftrightarrow (P \lor Q \lor \overline{R}) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (\overline{\neg P \lor Q \lor R})$$

展开化简)

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \prod (0, 2, 4)$$

(标记)

#### 恒等变换法求CDNF

(补入)

 $\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$  $\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$ 

(展开)

 $\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$ 

(化简)

 $\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$ 

#### 恒等变换法求CCNF

•  $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$ 

(合取范式)

 $\Leftrightarrow (P \lor R \lor (Q \land \neg Q)) \land (Q \lor R \lor (P \land \neg P))$ 

(补入)

 $\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \overline{R}) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ 

. 开心 简

 $\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \Pi(0, 2, 4)$ 

(标记

#### 恒等变换法求CDNF

•  $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$   $\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R$  (补入)  $\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$   $\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$  (展升)  $\Leftrightarrow m_1 \lor m_3 \lor m_5 \lor m_6 \lor m_7$  (化简)  $\Leftrightarrow \sum (1, 3, 5, 6, 7)$ 

#### 恒等变换法求CCNF

• 
$$A \Leftrightarrow P \land Q \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$$
 (合取范式)  
 $\Leftrightarrow (P \lor R \lor (Q \land \neg Q)) \land (Q \lor R \lor (P \land \neg P))$  (补入)  
 $\Leftrightarrow (P \lor Q \lor R) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor R)$  (展开化简)

#### 恒等变换法求CDNF

•  $A \Leftrightarrow P \land Q \lor R$   $\Leftrightarrow P \land Q \land (R \lor \neg R) \lor (P \lor \neg P) \land (Q \lor \neg Q) \land R$  (补入)  $\Leftrightarrow P \land Q \land R \lor P \land Q \land \neg R \lor P \land Q \land R \lor \neg P \land Q \land R$   $\lor P \land \neg Q \land R \lor \neg P \land \neg Q \land R$  (展升)  $\Leftrightarrow m_1 \lor m_3 \lor m_5 \lor m_6 \lor m_7$  (化简)  $\Leftrightarrow \sum (1, 3, 5, 6, 7)$ 

#### 恒等变换法求CCNF

• 
$$A \Leftrightarrow P \land Q \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$$
 (合取范式)  
 $\Leftrightarrow (P \lor R \lor (Q \land \neg Q)) \land (Q \lor R \lor (P \land \neg P))$  (补入)  
 $\Leftrightarrow (P \lor Q \lor R) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor R)$  (展开化简)  
 $\Leftrightarrow M_0 \land M_2 \land M_4 \Leftrightarrow \prod (0, 2, 4)$  (标记)

### Outline

- 3 范式
- 4 联结词的扩充和归约
  - 联结词的扩充
  - 联结词的归约
- 5 推理和证明方法

# 内容

- - 命题
  - 符号化
  - 合式公式的形式文法
  - 合式公式的形式语义
- - 公式的分类
  - 逻辑等价
  - 永真蕴含
  - 恒等变换和不等变换
  - 对偶性
- - 析取范式和合取范式
  - 主析取范式
- 4 联结词的扩充和归约
  - 联结词的扩充
  - 联结词的归约
- - 有效结论
  - 自然推理的形式证明
  - 证明方法

### Remark(n个原子的公式共有 $2^{2^n}$ 个不同的运算)

- 一元运算:  $2^{2^1} = 4$ 个: 恒为1, 恒为0, 恒等, 否定;
- 二元运算:  $2^{2^2} = 16$ 个: 恒为1, 恒为0,  $\land$ ,  $\lor$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,...
- 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算,可以定义相应的运算符(联结词),即为对联结词的扩充.

	与非(NAND)	或非(NOR)	
价式			

# 联结词的扩充

### $Remark(n \land 原子的公式共有2^{2^n} \land 不同的运算)$

- 一元运算:  $2^{2^1} = 4$ 个: 恒为1, 恒为0, 恒等, 否定;
- 二元运算:  $2^{2^2} = 16$ 个: 恒为1, 恒为0,  $\land$ ,  $\lor$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,...
- 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算,可以定义相应的运算符(联结词),即为对联结词的扩充.

	与非(NAND)	或非(NOR)	
价式			

# 联结词的扩充

### $Remark(n \land 原子的公式共有2^{2^n} \land 不同的运算)$

- 一元运算: 2<sup>2<sup>1</sup></sup> = 4个: 恒为1, 恒为0, 恒等, 否定;
- 二元运算:  $2^{2^2} = 16$ 个: 恒为1, 恒为0,  $\land$ ,  $\lor$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,...
- 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算,可以定义相应的运算符(联结词),即为对联结词的扩充.

	与非(NAND)	或非(NOR)	

# 联结词的扩充

### $Remark(n \land 原子的公式共有2^{2^n} \land 不同的运算)$

- 一元运算: 2<sup>2<sup>1</sup></sup> = 4个: 恒为1, 恒为0, 恒等, 否定;
- 二元运算:  $2^{2^2} = 16$ 个: 恒为1, 恒为0,  $\land$ ,  $\lor$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,...
- 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算,可以定义相应的运算符(联结词),即为对联结词的扩充.

	与非(NAND)	或非(NOR)	

# $Remark(n \land p$ 子的公式共有 $2^{2^n}$ 个不同的运算)

- 一元运算: 2<sup>2<sup>1</sup></sup> = 4个: 恒为1, 恒为0, 恒等, 否定;
- 二元运算:  $2^{2^2} = 16$ 个: 恒为1, 恒为0,  $\land$ ,  $\lor$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,...
- 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算,可以定义相 应的运算符(联结词),即为对联结词的扩充.

		与非(NAND)	或非(NOR)	异或(XOR)
P	Q	$P \uparrow Q$	$P \downarrow Q$	$P \oplus Q$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
等	价式	$\neg (P \land Q)$	$\neg (P \lor Q)$	$(P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q)$

# Example

C语言的位运算(bitwise operator):

~(取否), &(合取), |(析取), ^(异或), <<(左位移), >>(右位移)

# 程序设计中的位运算

### Example

C语言的位运算(bitwise operator):

~(取否), &(合取), |(析取), ^(异或), <<(左位移), >>(右位移)

# Programming Example

```
计算正整数二进制表示中1出现的次数
   int cardinal(unsigned long x)
   {
     int count = 0;
     while (x != (unsigned long) 0) {
       x = x & -x;
       count++;
     return count;
```

#### Definition

- 一个联结词的集合的全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的 联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个联结词后不 再是全功能的.

- {¬,∧,∨}是全功能的;
- {¬,∧}和{¬,∨}是极小全功能的;
- {¬,→}是极小全功能的;
- $\{\neg,\leftrightarrow\}$ 不是全功能的,因为: $\leftrightarrow$  +¬永远只能有8个公式(CCNF);
- {∧,∨}不是全功能的,因为:∧ + ∨的组合中对每个原子都取真值 的指派只能取真。

#### Definition

- 一个联结词的集合的全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的 联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个联结词后不 再是全功能的.

- {¬,∧,∨}是全功能的;
- {¬,∧}和{¬,∨}是极小全功能的;
- {¬,→}是极小全功能的;
- {∧,∨}不是全功能的,因为:∧ + ∨的组合中对每个原子都取真值 的指派只能取真。

#### Definition

- 一个联结词的集合的全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的 联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个联结词后不 再是全功能的.

- {¬,∧,∨}是全功能的;
- {¬,∧}和{¬,∨}是极小全功能的;
- {¬,→}是极小全功能的;

#### Definition

- 一个联结词的集合的全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的 联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个联结词后不 再是全功能的.

- {¬,∧,∨}是全功能的;
- {¬,∧}和{¬,∨}是极小全功能的;
- {¬,→}是极小全功能的;
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$  不是全功能的,因为:  $\leftrightarrow$  +¬永远只能有8个公式(CCNF);

# 联结词的全功能集

#### Definition

- 一个联结词的集合的全功能的, iff, 所有的运算均能用该集合中的 联结词表示;
- 极小全功能联结词集合, iff, 该集合中删除任意的一个联结词后不 再是全功能的.

- {¬,∧,∨}是全功能的;
- {¬,∧}和{¬,∨}是极小全功能的;
- {¬,→}是极小全功能的;
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$  不是全功能的,因为:  $\leftrightarrow$  +¬永远只能有8个公式(CCNF);
- $\{\Lambda, V\}$  不是全功能的,因为:  $\Lambda$  + V 的组合中对每个原子都取真值 的指派只能取真.

- {↓}是全功能的.

$$P \to Q$$

$$\Leftrightarrow \neg P \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg ((P \downarrow P) \lor Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

- {↓}是全功能的.

  - $P \Leftrightarrow P \downarrow P$

$$P \to Q$$

$$\Leftrightarrow \neg P \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg ((P \downarrow P) \lor Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

- {↓}是全功能的.

  - $P \Leftrightarrow P \downarrow P$
  - **3** 考虑 $P \rightarrow Q$ :

$$\begin{split} P &\to Q \\ \Leftrightarrow \neg P \lor Q \\ \Leftrightarrow \neg \neg ((P \downarrow P) \lor Q) \\ \Leftrightarrow \neg ((P \downarrow P) \downarrow Q) \\ \Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q) \end{split}$$

- 5 推理和证明方法
  - 有效结论
  - 自然推理的形式证明
  - 证明方法

#### Definition

设 $H_1, H_2, \ldots, H_n, C$ 是公式, 称C是 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n) = 1$ , 则有: I(C) = 1.  $i \in \mathcal{A} H_1, H_2, \dots, H_n \vdash C$ .

#### **Theorem**

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$

#### Definition

设 $H_1,H_2,\ldots,H_n,C$ 是公式,称C是 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)=1$ , 则有: I(C)=1. 记为 $H_1,H_2,\ldots,H_n \vdash C$ .

#### **Theorem**

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ②  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **④** ¬ $((H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- **⑤**  $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **⑤**  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{L} \mathring{\mathcal{A}} \mathring{\mathcal{A}};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$

#### Definition

设 $H_1,H_2,\ldots,H_n,C$ 是公式,称C是 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)=1$ , 则有: I(C)=1. 记为 $H_1,H_2,\ldots,H_n \vdash C$ .

#### **Theorem**

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ②  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **④** ¬ $((H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- **⑤**  $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **⑤**  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{L} \mathring{A}_{\mathfrak{p}};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$

永真公式 范式 联结词的扩充和归约 推理和证明方法

# 有效结论

#### Definition

设 $H_1,H_2,\ldots,H_n,C$ 是公式,称C是 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)=1$ , 则有: I(C)=1. 记为 $H_1,H_2,\ldots,H_n \vdash C$ .

#### **Theorem**

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ②  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **④** ¬ $((H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- ⑤  $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **⑤**  $(H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{E} \hat{x} \hat{p};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$

# 有效结论

#### Definition

设 $H_1,H_2,\ldots,H_n,C$ 是公式,称C是 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)=1$ , 则有: I(C)=1. 记为 $H_1,H_2,\ldots,H_n \vdash C$ .

#### **Theorem**

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ②  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **④**  $\neg((H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- **⑤**  $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **⑤**  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{L} \mathring{A}_{\mathfrak{p}};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$

# 有效结论

#### Definition

设 $H_1,H_2,\ldots,H_n,C$ 是公式,称C是 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)=1$ , 则有: I(C)=1. 记为 $H_1,H_2,\ldots,H_n \vdash C$ .

#### **Theorem**

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ②  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **④**  $\neg((H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- **⑤**  $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **⑤**  $(H_1 \land H_2 \land ... \land H_n \land \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{L} \mathring{\mathcal{A}} \mathring{\mathcal{A}};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$

#### Definition

设 $H_1,H_2,\ldots,H_n,C$ 是公式,称C是 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)=1$ , 则有: I(C)=1. 记为 $H_1,H_2,\ldots,H_n \vdash C$ .

#### **Theorem**

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ②  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **④**  $\neg((H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- **⑤**  $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **⑤**  $(H_1 \land H_2 \land ... \land H_n \land \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{L} \mathring{\mathcal{A}} \mathring{\mathcal{A}};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}.$

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ❷ B参加,则A不参加;
- ③ D参加,则 C不参加.

证明:"如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

方法1

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ③ D参加,则 C不参加.

证明:"如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论. 将条件和结论符号化为:

- $\bullet H_1 = A \to B \lor C$
- $2 H_2 = B \rightarrow \neg A$
- 4 结论:  $A \rightarrow \neg D$

方法1

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ③ D参加,则 C不参加.

证明:"如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论. 将条件和结论符号化为:

- $\bullet H_1 = A \to B \lor C$
- $2 H_2 = B \to \neg A;$
- ④ 结论:  $A \rightarrow \neg D$

等价于: 
$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ③ D参加,则 C不参加.

证明: "如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

- $\bullet H_1 = A \to B \lor C$

- 4 结论:  $A \rightarrow \neg D$

方法1

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ③ D参加,则 C不参加.

证明: "如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

- $\bullet H_1 = A \to B \lor C$
- $2 H_2 = B \rightarrow \neg A;$
- ④ 结论: A → ¬D

等价于: 
$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ③ D参加,则 C不参加.

证明: "如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

- $\bullet H_1 = A \to B \lor C$
- $2 H_2 = B \rightarrow \neg A;$
- ④ 结论: A → ¬D

等价于: 
$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- 3 D参加,则 C不参加.

证明: "如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

- $\bullet H_1 = A \to B \lor C$
- $2 H_2 = B \rightarrow \neg A;$
- ④ 结论: A → ¬D

方法1

等价于:  $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$ 

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C)$$

$$1 \Leftrightarrow (A \to B \lor C) \land \overline{(A \to \neg B)} \land (D \to \neg C)$$

$$2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$$

$$3 \Leftrightarrow (A \to \overline{(C \land \neg B)}) \land (D \to \neg C)$$

$$4 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$$

$$5 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (C \to \neg D)$$

$$6 \Rightarrow (A \to C) \land (C \to \neg D)$$

$$7 \Rightarrow A \rightarrow \neg D$$

(注意:不等变换不能使用替换规则)

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ⑤ D参加,则 C不参加.

证明: "如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

- $\mathbf{Q} H_2 = B \rightarrow \neg A$ :
- **4** 结论:  $A \rightarrow \neg D$

### 方法1

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C)$$

$$1 \Leftrightarrow (A \to B \lor C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$$

$$2 \Leftrightarrow (A \to \underline{(B \lor C) \land \neg B)} \land (D \to \neg C)$$

$$2 \leftrightarrow (1 7 (D \lor C) \land D) \land (D ) \land (C \land D) \land (D ) \land (C \land D) \land (D ) \land (C \land D) \land (D ) \land (D$$

$$4 \Leftrightarrow \overline{(A \to C) \land (A \to \neg B)} \land (D \to \neg C)$$

$$5 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land \overline{(C \to \neg D)}$$

$$6 \Rightarrow (A \to C) \land (C \to \neg D)$$

$$7 \Rightarrow A \rightarrow \neg D$$

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ▲参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ⑤ D参加,则 C不参加.

证明:"如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

- $\mathbf{Q} H_2 = B \rightarrow \neg A$ :
- **4** 结论:  $A \rightarrow \neg D$

### 方法1

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C)$$

- $1 \Leftrightarrow (A \to B \lor C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$

$$3 \Leftrightarrow (A \to (C \land \neg B)) \land (D \to \neg C)$$

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ③ D参加,则 C不参加.

证明:"如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

- $\mathbf{Q} H_2 = B \rightarrow \neg A$ :
- **4** 结论:  $A \rightarrow \neg D$

方法1

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C)$$

- $1 \Leftrightarrow (A \to B \lor C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $3 \Leftrightarrow (A \to (C \land \neg B)) \land (D \to \neg C)$

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ③ D参加,则 C不参加.

证明: "如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

- $\mathbf{Q} H_2 = B \rightarrow \neg A$ :
- **4** 结论:  $A \rightarrow \neg D$

方法1

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C)$$

- $1 \Leftrightarrow (A \to B \lor C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $3 \Leftrightarrow (A \to (C \land \neg B)) \land (D \to \neg C)$
- $4 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ③ D参加,则 C不参加.

证明: "如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

- $\mathbf{Q} H_2 = B \rightarrow \neg A$ :
- **4** 结论:  $A \rightarrow \neg D$

### 方法1

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C)$$

- $1 \Leftrightarrow (A \to B \lor C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $3 \Leftrightarrow (A \to (C \land \neg B)) \land (D \to \neg C)$
- $4 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $5 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (C \to \neg D)$

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ③ D参加,则 C不参加.

证明: "如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

- $\mathbf{Q} H_2 = B \rightarrow \neg A$ :
- **4** 结论:  $A \rightarrow \neg D$

方法1

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C)$$

- $1 \Leftrightarrow (A \to B \lor C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $3 \Leftrightarrow (A \to (C \land \neg B)) \land (D \to \neg C)$
- $4 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $5 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (C \to \neg D)$
- $6 \Rightarrow (A \rightarrow C) \land (C \rightarrow \neg D)$

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

- ① A参加,则B或C也参加;
- ② B参加,则A不参加;
- ③ D参加,则 C不参加.

证明: "如果A参加,则D不参加" 是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

- $\mathbf{Q} H_2 = B \rightarrow \neg A$ :
- **4** 结论:  $A \rightarrow \neg D$

方法1

等价于:  $(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$ 

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C)$$

- $1 \Leftrightarrow (A \to B \lor C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $2 \Leftrightarrow (A \to (B \lor C) \land \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $3 \Leftrightarrow (A \to (C \land \neg B)) \land (D \to \neg C)$
- $4 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (D \to \neg C)$
- $5 \Leftrightarrow (A \to C) \land (A \to \neg B) \land (C \to \neg D)$
- $6 \Rightarrow (A \rightarrow C) \land (C \rightarrow \neg D)$
- $7 \Rightarrow A \rightarrow \neg D$

(注意:不等变换不能使用替换规则)

### 方法2

真值表法(略).

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

- ① 设结论为假,即 $(A \rightarrow \neg D)$ 为假;
- ② 所以, A, D为真;
- ③ 设B为真:  $(B \rightarrow \neg A)$ 为假,所以前提为假;
- ₫ 投B为假:

  - 当C为假时:  $(A \rightarrow B \lor C)$ 为假;
- ⑤ 由❸4得: 前提为假.



## 方法4

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

- **①** 设前提为真,即 $(A \to B \lor C)$ ,  $(B \to \neg A)$ ,  $(D \to \neg C)$ 为真;
- 2:  $A \rightarrow \neg B \rightarrow \exists$
- ③ :  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$ 为真;
- **④** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C)) \land \underline{a};$
- **⑤** ∴  $A \to (\neg B \land C)$  为真;
- **6** ∴  $A \rightarrow C$ 为真;
- **②** 由**①**得:  $C \rightarrow \neg D$ 为真;
- **③** 由**⑥** $\bigcirc$ 得:  $A \rightarrow \neg D$ 为真.

Ш

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

- **①** 设前提为真,即 $(A \to B \lor C)$ ,  $(B \to \neg A)$ ,  $(D \to \neg C)$ 为真;
- ② :  $A \rightarrow \neg B$ 为真;
- ③ ∴  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C) \not A \not A$ ;
- **④** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C)) \land \underline{a};$
- **⑤** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land C) \rightarrow A$ ;
- **6** ∴  $A \rightarrow C$ 为真;
- **②** 由**①**得:  $C \rightarrow \neg D$ 为真;
- **③** 由**⑥** $\bigcirc$ 得:  $A \rightarrow \neg D$ 为真.

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

- **①** 设前提为真,即 $(A \to B \lor C)$ ,  $(B \to \neg A)$ ,  $(D \to \neg C)$ 为真;
- ② :.  $A \rightarrow \neg B$ 为真;
- **3** ∴  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$  为 真;
- $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C))$ 为真;
- **⑤** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land C) \rightarrow A$ ;
- **6** ∴  $A \rightarrow C$ 为真;
- ② 由 $\mathbf{0}$ 得:  $C \rightarrow \neg D$ 为真;
- 8 由**60**得:  $A \rightarrow \neg D$ 为真.

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

- ① 设前提为真,即 $(A \to B \lor C)$ ,  $(B \to \neg A)$ ,  $(D \to \neg C)$ 为真;
- ② :.  $A \rightarrow \neg B$ 为真;
- ③ ∴  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$  为 真;
- **④** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C)) \land \underline{A};$
- **⑤** ∴  $A \to (\neg B \land C)$  为真:
- **6** ∴  $A \rightarrow C$ 为真;
- 由 申 ■ ■ ■ ■ ■
- **③** 由**⑥** $\bigcirc$ 得:  $A \rightarrow \neg D$ 为真.

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

- ① 设前提为真,  $\operatorname{pr}(A \to B \lor C)$ ,  $(B \to \neg A)$ ,  $(D \to \neg C)$ 为真;
- ② :  $A \rightarrow \neg B$ 为真;
- **3**  $\therefore$   $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$ 为真;
- $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C))$ 为真;
- **⑤** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land C)$  为真;

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

- ① 设前提为真,即 $(A \to B \lor C)$ ,  $(B \to \neg A)$ ,  $(D \to \neg C)$ 为真;
- ② :.  $A \rightarrow \neg B$ 为真;
- **3** ∴  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$  为 真;
- **④** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C)) \land \underline{A};$
- **⑤** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land C) \rightarrow A$ ;
- **6** ∴  $A \rightarrow C$ 为真;
- $\bigcirc$  由 $\bigcirc$  由 $\bigcirc$  得: C → ¬D为真;
- ③ 由**⑤⑦**得:  $A \rightarrow \neg D$ 为真.

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

- ① 设前提为真,即 $(A \to B \lor C)$ ,  $(B \to \neg A)$ ,  $(D \to \neg C)$ 为真;
- ② :.  $A \rightarrow \neg B$ 为真;
- ③ ∴  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$  为真;
- **④** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C)) \land \underline{A};$
- **⑤** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land C) \rightarrow A$ ;
- **6** ∴  $A \rightarrow C$ 为真;
- **②** 由**①**得:  $C \rightarrow \neg D$ 为真;
- ③ 由**60**得:  $A \rightarrow \neg D$ 为真.

$$(A \to B \lor C) \land (B \to \neg A) \land (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

- ① 设前提为真,即 $(A \to B \lor C)$ ,  $(B \to \neg A)$ ,  $(D \to \neg C)$ 为真;
- ② :.  $A \rightarrow \neg B$ 为真;
- **3** ∴  $(A \rightarrow \neg B) \land (A \rightarrow B \lor C)$  为 真;
- **④** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land (B \lor C)) \not A$   $\not =$ ;
- **⑤** ∴  $A \rightarrow (\neg B \land C) \rightarrow A$ ;
- **6** ∴  $A \rightarrow C$ 为真;
- **②** 由**①**得:  $C \rightarrow \neg D$ 为真;

### Remark

- 恒等和不等变换;

- 恒等和不等变换;
- ② 真值表;

- ❶ 恒等和不等变换;
- ② 真值表;
- 3 设结论为假,证明条件亦假;
- 设前提为真,证明结论亦真;
- ⑤ 证明序列.

- ❶ 恒等和不等变换;
- ② 真值表;
- 3 设结论为假,证明条件亦假;
- 设前提为真,证明结论亦真;
- 5 证明序列

- ❶ 恒等和不等变换;
- ② 真值表;
- ◎ 设结论为假,证明条件亦假;
- 设前提为真,证明结论亦真;
- ⑤ 证明序列.

#### Example

$$A \rightarrow B \lor C$$
,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

#### 证明序列

**6**  $(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$  (5+T

- (P)
- $A \rightarrow C$  (⑥+简化.

- (2+T)

(P)

(®+T)

- $(\oplus + \mathsf{T})$
- ①  $A \rightarrow \neg D$  (⑦⑨+前提三段论)

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

←□▶←□▶←≣▶←≣▶ ■ ♥Q

#### Example

$$A \rightarrow B \lor C$$
,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

#### 证明序列

**6** 
$$(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$$
 **(**5+T

$$2 B \to \neg A$$

$$\mathbf{O} \quad C \to \neg D$$

$$A \setminus C \setminus D$$

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

←□▶←□▶←≣▶←≣▶ ■ ♥Q

#### Example

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

#### 证明序列

**6** 
$$(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$$
 **(**5+T

$$\mathbf{O} \quad C \to \neg D$$

$$\bullet A \to C \land \neg B$$

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

←□▶←□▶←≣▶←≣▶ ■ ♥Q

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

#### 证明序列

(2+T) 
$$\bigcirc D \rightarrow \neg C$$

④ 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式) ②  $C \rightarrow \neg D$ 

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

#### 证明序列

- $\mathbf{Q} \quad B \to \neg A$ (P)  $\mathbf{G}$   $A \rightarrow \neg B$ 
  - (2+T)  $\bigcirc D \rightarrow \neg C$
- 4  $A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$  (①③+复合式)  $\bigcirc C \rightarrow \neg D$
- $A \to C \land \neg B$ (4+T)

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

#### 证明序列

4 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式) 
 $C \rightarrow \neg D$ 

$$O$$
  $A \rightarrow C$  (⑥+简化式)

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

4日 > 4周 > 4 目 > 4 目 > 目

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

#### 证明序列

**4** 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式)

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

←□ → ←団 → ← 三 → ○へ○

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

#### 证明序列

**4** 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式)

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

4日 > 4周 > 4 目 > 4 目 > 目

#### Example

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

#### 证明序列

**4** 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式)

$$A \to C \land \neg B \tag{@+T}$$

$$O$$
  $A \rightarrow C$  (⑥+简化式)

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

#### 证明序列

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \tag{D}$$

**4** 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式)

$$\bigcirc A \rightarrow C$$
 (⑥+简化式)

**⑩** 
$$A \rightarrow \neg D$$
 (⑦⑨+前提三段论)

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

# Definition

设, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一组条件,一个证明序列是一组形如:  $C_1, C_2, \ldots, C_m$ 的公式序列,其中每个 $C_i$ 满足下述条件中的一个:

- ① 存在 $H_i$ , 使得:  $C_i = H_i$ ; (引入条件)
- ②  $C_i = \mathbb{T}$ ; (引入永真)
- ③ 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}$ , 其中:  $i_j \leq i$ , 并且:  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_{i_j}$  (恒等变换)
- **④** 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$ , 其中:  $i_j \leq i$ , 并且:  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_{i_j}$  (不等变换)

#### Definition

设, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一组条件,一个证明序列是一组形如:  $C_1, C_2, \ldots, C_m$ 的公式序列,其中每个 $C_i$ 满足下述条件中的一个:

- ① 存在 $H_i$ , 使得:  $C_i = H_i$ ; (引入条件)
- ②  $C_i = \mathbb{T}$ ; (引入永真)
- ③ 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$ , 其中:  $i_j \leq i$ , 并且:  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_{i_k}$  (恒等变换)
- **①** 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$ , 其中:  $i_j \leq i$ , 并且:  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_{i_k}$  (不等变换)

## 证明序列

#### Definition

设,  $H_1$ ,  $H_2$ , ...,  $H_n$ 是一组条件, 一个证明序列是一组形如:  $C_1, C_2, \ldots, C_m$ 的公式序列,其中每个 $C_i$ 满足下述条件中的一个:

- ① 存在 $H_i$ , 使得:  $C_i = H_i$ ; (引入条件)
- ②  $C_i = \mathbb{T}$ ; (引入永真)
- **③** 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$ , 其中:  $i_i \leq i$ , 并且:  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_{i_i}$  (恒等变换)

# 证明序列

#### Definition

设, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一组条件,一个证明序列是一组形如:  $C_1, C_2, \ldots, C_m$ 的公式序列,其中每个 $C_i$ 满足下述条件中的一个:

- ① 存在 $H_i$ , 使得:  $C_i = H_i$ ; (引入条件)
- ②  $C_i = \mathbb{T}$ ; (引入永真)
- **③** 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$ , 其中:  $i_j \leq i$ , 并且:  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$ ; (恒等变换)
- 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$ , 其中:  $i_j \leq i$ , 并且:  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$ ; (不等变换)

Theorem (Soundness & Completeness)

设,  $C_1$ ,  $C_2$ ,...,  $C_m$ 是关于条件 $H_1$ ,  $H_2$ ,...,  $H_n$ 的一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有:

 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C_i)$ 

 $p: H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

- ① 由于G满足定义中的条件,所以结论成立;

Theorem (Soundness & Completeness)

 $\mathcal{U}, C_1, C_2, \dots, C_m$ 是关于条件 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 的一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C_i)$ 

 $p: H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

- ① 由于C1满足定义中的条件,所以结论成立;
- ② 假设对任意的j < i,  $C_j$ 都是前提的有效结论,则:
  - if  $C_i = H_i$ :  $(\exists \land \land \land \land H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n \Rightarrow H_i)$ ;
  - **Q** if  $C_i = \mathbb{T}$ :  $(\exists \land \land \land \land H_1 \land H_2 \land \dots \land H_n \Rightarrow \mathbb{T})$
  - **③** if  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$ , 由归纳假设:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C_{i_j})$ ,  $(i_j < i)$  $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_{i_k} \wedge C_{i_k} \wedge$
  - ② 同理可证, 当 $C_{i_1} \land C_{i_2} \land \ldots \land C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$ 时结论成立;
- ③ 故结论成立.

Theorem (Soundness & Completeness)

$$\mathcal{C}_1, C_1, C_2, \dots, C_m$$
是关于条件 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 的一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有: 
$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C_i)$$

即:  $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

- ① 由于Ci满足定义中的条件,所以结论成立;
- ② 假设对任意的i < i,  $C_i$ 都是前提的有效结论,则:
  - if  $C_i = H_i$ : (引入条件)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow H_i)$ ;

Theorem (Soundness & Completeness)

$$\mathcal{U}, C_1, C_2, \dots, C_m$$
是关于条件 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 的一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有: 
$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C_i)$$

 $P: H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

- ① 由于C1满足定义中的条件,所以结论成立;
- ② 假设对任意的j < i,  $C_j$ 都是前提的有效结论,则:
  - if  $C_i = H_j$ : (引入条件)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow H_j)$ ;
  - ② if  $C_i = \mathbb{T}$ : (引入永真)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow \mathbb{T})$ ;
  - $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C_{i_j}), \quad (i_j < i)$   $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C$
  - **④** 同理可证, 当 $C_{i_1} \land C_{i_2} \land \ldots \land C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$ 时结论成立;
- ③ 故结论成立.



Theorem (Soundness & Completeness)

设, 
$$C_1, C_2, \ldots, C_m$$
是关于条件 $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 的一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有:

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C_i)$$

 $p: H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

- ❶ 由于C₁满足定义中的条件,所以结论成立;
- ② 假设对任意的j < i,  $C_j$ 都是前提的有效结论,则:
  - if  $C_i = H_j$ : (引入条件)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow H_j)$ ;
  - ② if  $C_i = \mathbb{T}$ : (引入永真)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow \mathbb{T})$ ;
  - **o** if  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$ , 由归纳假设:

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C_{i_j}), \quad (i_j < i)$$

$$\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$$

- ④ 同理可证, 当 $C_{i_1} \land C_{i_2} \land \ldots \land C_{i_k} \Leftrightarrow C_{i_k}$ 时结论成立;
- ③ 故结论成立.

Theorem (Soundness & Completeness)

$$\mathcal{C}_1, C_1, C_2, \dots, C_m$$
是关于条件 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 的一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有: 
$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C_i)$$

 $p: H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

- ① 由于C1满足定义中的条件,所以结论成立;
- ② 假设对任意的j < i,  $C_i$ 都是前提的有效结论,则:
  - if  $C_i = H_j$ : (引入条件)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow H_j)$ ;
  - ② if  $C_i = \mathbb{T}$ : (引入永真)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow \mathbb{T})$ ;
  - **9** if  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$ , 由归纳假设:  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C_{i_j})$ ,  $(i_j < i)$   $\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_n} \Rightarrow C_i$
  - ④ 同理可证, 当 $C_{i_1} \land C_{i_2} \land \ldots \land C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$ 时结论成立;
- ③ 故结论成立.

Theorem (Soundness & Completeness)

$$\mathcal{C}_1, C_1, C_2, \dots, C_m$$
是关于条件 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 的一证明序列,则对每个 $C_i$ 都有:
$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C_i)$$

 $P: H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$ . 反之亦然.

- ① 由于C1满足定义中的条件,所以结论成立;
- ② 假设对任意的j < i,  $C_j$ 都是前提的有效结论,则:
  - if  $C_i = H_j$ :  $( \beta | \lambda ) + (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow H_j )$ ;
  - ② if  $C_i = \mathbb{T}$ : (引入永真)  $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow \mathbb{T})$ ;
  - **9** if  $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$ , 由归纳假设:

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C_{i_j}), \ (i_j < i)$$
$$\therefore (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$$

- ④ 同理可证, 当 $C_{i_1} \land C_{i_2} \land \ldots \land C_{i_k} \Leftrightarrow C_{i_k}$ 时结论成立;
- 3 故结论成立.



#### Definition

常用的永真蕴含关系的竖式表示称为推理规则(Inference Rule).

### Example (三段论)

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

其对应的推理规则表示为:

$$\frac{P \qquad (P o Q)}{Q}$$
 (三段论)

#### Remark

推理过程中的不等变换仅能使用代入规则,即对公式的整体进行变换.

《□》《圖》《臺》《臺》《臺》

# 常用的推理规则(1/2)

#### 推理规则

名称	推理规则	对应的永真蕴含关系
加法式	$P \over P \lor Q$	$P \Rightarrow P \lor Q$
简化式	$\frac{P \wedge Q}{P}$	$P \wedge Q \Rightarrow P$
拒取式 Modus Tollens(MT)	$\begin{array}{ccc} \neg Q & P \rightarrow Q \\ \hline & \neg P \end{array}$	$\neg Q \land (P \to Q) \Rightarrow \neg P$
前提三段论 Hypothetical syllogism	$\begin{array}{c} P \to Q & Q \to R \\ \hline P \to R & \end{array}$	$(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow P \to R$
复合式 Composition	$\begin{array}{c} P \to Q & P \to R \\ \hline P \to Q \land R & \end{array}$	$(P \to Q) \land (P \to R) \Rightarrow (P \to Q \land R)$

# 常用的推理规则(2/2)

### 推理规则

名称	推理规则	对应的永真蕴含关系
合取式	$\frac{P \qquad Q}{P \wedge Q}$	$P \wedge Q \Rightarrow Q \wedge P$
析取三段论 Disjunctive syllogism	$\frac{P \lor Q \qquad \neg Q}{P}$	$(P \lor Q) \land \neg Q \Rightarrow P$
构造性二难	$P \rightarrow Q  R \rightarrow S  P \lor R$	$(P \to Q) \land (R \to S) \land (P \lor R)$
Constructive dilemma	$Q \lor S$	$\Rightarrow Q \vee S$
破坏性二难	$P \rightarrow Q  R \rightarrow S  \neg Q \lor \neg S$	$(P \to Q) \land (R \to S) \land (\neg Q \lor \neg S)$
Destructive dilemma	$\neg P \lor \neg R$	$\Rightarrow \neg P \vee \neg R$

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

#### 证明序列

$$\mathbf{2} \quad B \to \neg A$$

$$(2+T)$$

$$\mathbf{G} \wedge \mathbf{A} \wedge \mathbf{C} \wedge -\mathbf{D}$$

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

◆□▶◆□▶◆壹▶◆壹▶ 壹 めので

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

#### 证明序列

**6** 
$$(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$$
 (5+T

$$2 B \to \neg A$$

$$\mathbf{O} \quad C \to \neg D$$

$$\mathbf{G} \wedge \mathbf{A} \wedge \mathbf{C} \wedge -\mathbf{D}$$

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

◆ロト ◆問ト ◆ 豊ト ◆ 豊 ・ 釣 Q (\*)

#### Example

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

#### 证明序列

**6** 
$$(A \rightarrow C) \land (A \rightarrow \neg B)$$
 (5+T

(2+T) 
$$D \rightarrow \neg C$$

$$A \to C \land \neg B$$

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

#### Example

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

#### 证明序列

$$B \to \neg A$$

$$\bigcirc A \rightarrow C$$
 (⑥+简化式

$$A \to \neg B$$

$$oldsymbol{O} A o (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式)

$$(\oplus + \top)$$

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

#### Example

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

#### 证明序列

② 
$$B \rightarrow \neg A$$
 (P)  
③  $A \rightarrow \neg B$  (②+T)

④ 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式) ②  $C \rightarrow \neg D$ 

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

#### 证明序列

4 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式) 
 $C \rightarrow \neg D$ 

$$\bigcirc$$
  $A \rightarrow C$  (⑥+简化式

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

#### 证明序列

**4** 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式)

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

◆ロト ◆団ト ◆豆ト ◆豆ト □ めので

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

#### 证明序列

**4** 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式)

$$O$$
  $A \rightarrow C$  (⑥+简化式)

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

◆□▶ ◆□▶ ◆壹▶ ◆壹▶ 壹 めなで

### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

#### 证明序列

**4** 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式)

$$A \to \neg D \qquad (79+ \text{mid} \geq 2\%)$$

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

◆□▶ ◆□▶ ◆壹▶ ◆壹▶ 壹 めなで

$$A \rightarrow B \lor C, B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$$

#### 证明序列

**4** 
$$A \rightarrow (B \lor C) \land \neg B$$
 (①③+复合式)

$$\bigcirc A \rightarrow C$$
 (⑥+简化式)

$$(2+T) 3 D \to \neg C (P)$$

**⑩** 
$$A \rightarrow \neg D$$
 (⑦⑨+前提三段论)

#### 说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

# 证明方法

#### Remark

- ❶ 直接对结论写证明序列;

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \rightarrow Q$$
, iff,  $H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$ .

设
$$\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$$
, 则:

$$\Leftrightarrow \neg \mathbf{H} \vee \neg P \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \neg (\mathbf{H} \land P) \lor Q$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{H} \wedge P) \to Q$$

# 奶力法

#### Remark

- ❶ 直接对结论写证明序列;
- ② 间接证明:条件和结论的等价变换,如,CP规则(Conditional Proof), 反证法等.

#### Theorem

 $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \rightarrow Q$ , iff,  $H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$ .

#### Proof.

设 $\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ , 则:

$$\mathbf{H} \to (P \to Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg \mathbf{H} \lor \neg P \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg (\mathbf{H} \wedge P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow$$
  $(\mathbf{H} \wedge P) \rightarrow Q$ 

So,  $\mathbf{H} \to (P \to Q)$ 永真, iff,  $(\mathbf{H} \land P) \to Q$ 永真

# 奶力法

#### Remark

- ❶ 直接对结论写证明序列;
- ② 间接证明:条件和结论的等价变换,如,CP规则(Conditional Proof), 反证法等.

#### Theorem

 $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \rightarrow Q$ , iff,  $H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$ .

#### Proof.

设 $\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ , 则:

$$\mathbf{H} \to (P \to Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg \mathbf{H} \lor \neg P \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg (\mathbf{H} \wedge P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow$$
  $(\mathbf{H} \wedge P) \rightarrow Q$ 

So,  $\mathbf{H} \to (P \to Q)$ 永真, iff,  $(\mathbf{H} \land P) \to Q$ 永真

- 直接对结论写证明序列;
- ② 间接证明:条件和结论的等价变换,如,CP规则(Conditional Proof), 反证法等.

#### Theorem

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \rightarrow Q$$
, iff,  $H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$ .

#### Proof

设 $\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ , 则:

$$\Leftrightarrow \neg \mathbf{H} \vee \neg P \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \neg (\mathbf{H} \wedge P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow$$
  $(\mathbf{H} \wedge P) \rightarrow Q$ 

So,  $\mathbf{H} \to (P \to Q)$ 永真, iff,  $(\mathbf{H} \land P) \to Q$ 永真.

- ❶ 直接对结论写证明序列;
- ② 间接证明:条件和结论的等价变换,如,CP规则(Conditional Proof), 反证法等.

#### Theorem

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \rightarrow Q$$
, iff,  $H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$ .

#### Proof.

设
$$\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$$
, 则:

$$\mathbf{H} \to (P \to Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg \mathbf{H} \vee \neg P \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \neg (\mathbf{H} \wedge P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow$$
 (**H**  $\wedge$  P)  $\rightarrow$  Q

So, 
$$\mathbf{H} \to (P \to Q)$$
永真, iff,  $(\mathbf{H} \land P) \to Q$ 永真.



## Example

$$A \to B \lor C, \ B \to \neg A, \ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法2(CP规则)

A

- (附加前提)
- $\neg B$

(05+MP)

O DV C

- (TO+MP)
- $D \rightarrow \neg C$

(P)

 $B \to \neg A$ 

(P

(8+T)

(4)+T

- $\bigcirc \neg D$
- (⑦⑨+前提三段论)

# Example

$$A \to B \lor C, \ B \to \neg A, \ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

- **1** A
- $\mathbf{Q} A \to B \vee C$

- (附加前提)
  - (P)

# Example

$$A \to B \lor C, \ B \to \neg A, \ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

$$A \to B \lor C$$

$$\bullet$$
  $B \lor C$ 

$$B \to \neg A$$

$$A \rightarrow -R$$

$$(12+MP)$$

$$(\oplus + \mathsf{T})$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{R}$$

$$D \rightarrow \neg C$$

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

- **1** A
- $\mathbf{Q} A \to B \vee C$
- $\bullet$   $B \vee C$
- $B \to \neg A$

- (附加前提)
  - (P)
- (1)2+MP)
  - (P)

## Example

$$A \to B \lor C, \ B \to \neg A, \ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

### 方法2(CP规则)

- **1** A
- $A \to B \lor C$
- (附加前提)

(①②+MP)

- (P)
- **a** 0
- (00) 105-573
- **0** C
- $D \to \neg C$

(P)

- (P)

(8+T)

 $\bullet \quad A \to \neg B$ 

- (4+T)
- $\square$   $\neg D$
- (⑦⑨+前提三段论)

## Example

$$A \to B \lor C, \ B \to \neg A, \ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法2(CP规则)

**1** A

(附加前提)

 $\mathbf{Q} A \to B \vee C$ 

(①②+MP)

- $\bullet$   $B \vee C$  $B \to \neg A$ 
  - (4+T)
- $A \to \neg B$

- - (P)

(P)

 $\bullet$   $\neg B$ 

(1)5+MP)

$$A \to B \lor C, \ B \to \neg A, \ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

$$\bullet$$
  $\neg B$ 

$$A \to B \lor C$$

$$O$$
  $C$ 

$$\bullet B \lor C$$

$$(8+T)$$

$$\mathbf{0} \neg D$$

$$A \to B \lor C, \ B \to \neg A, \ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法2(CP规则)

(附加前提)

 $\bullet$   $\neg B$ 

(0.5 + MP)

$$A \to B \lor C$$

(P)

**②** (③⑥+析取三段论)

$$\bullet$$
  $B \lor C$ 

(①②+MP)

(P)

$$(8+T)$$

$$(4+T)$$

$$0 \neg D \quad (79+前提)$$

## Example

$$A \to B \lor C, \ B \to \neg A, \ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法2(CP规则)

(附加前提)

 $\bullet$   $\neg B$ 

(1)5+MP)

$$A \to B \lor C$$

(P) (①②+MP)

(P)

(®+T)

(P)

(4+T)

$$\bigcirc$$
  $\neg D$ 

(⑦⑨+前提三段论)

$$A \to B \lor C, \ B \to \neg A, \ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法2(CP规则)

(附加前提)

$$\circ$$
  $\neg B$ 

(0.5 + MP)

$$\mathbf{Q} A \to B \vee C$$

(P)

$$O$$
  $C$ 

**②** (③⑥+析取三段论)

$$\bullet$$
  $B \vee C$ 

(①②+MP)

$$\bullet A \to \neg B$$

$$\square$$
  $\neg D$ 

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$  称这样的条件和结论的变换为反证法.

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法3(反证法)

- ①  $\neg (A \rightarrow \neg D)$  (否定前提) ②  $A \rightarrow B \lor C$  (P)

#### Remark

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \dots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \dots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 

称这样的条件和结论的变换为反证法.

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法3(反证法)

- ①  $\neg (A \rightarrow \neg D)$  (否定前提) ②  $A \rightarrow B \lor C$  (P)
- $(0+T) \qquad 0 \quad B \lor C \qquad (30+MP)$  $\mathbf{Q} A \wedge D$

#### Remark

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$  称这样的条件和结论的变换为反证法.

### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法3(反证法)

- (4 ) (7 ) (7 ) (7 ) (1 ) (1 ) (1 )
- ①  $\neg (A \rightarrow \neg D)$  (否定前提) ②  $A \rightarrow B \lor C$  (P)
- **③** A (②+简化式) ◎ B (⑥⑧+析取三段论)
- ① D (②+简化式) ②  $B \rightarrow \neg A$  (P)
- - $O \neg C$  (④⑤+MP)  $O = \mathbb{F}$  (③①+合取式

#### Remark

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \dots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \dots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 

称这样的条件和结论的变换为反证法.

#### Example

$$A \to B \lor C, \ B \to \neg A, \ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法3(反证法)

- ①  $\neg (A \rightarrow \neg D)$  (否定前提) ②  $A \rightarrow B \lor C$
- $\mathbf{Q} A \wedge D$
- (②+简化式) ② B (⑤⑧+析取三段论) (②+简化式) ②  $B \rightarrow \neg A$  (P) **6** A
- $\mathbf{a}$  D

#### Remark

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \dots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \dots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 

称这样的条件和结论的变换为反证法.

#### Example

$$A \to B \lor C, \ B \to \neg A, \ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法3(反证法)

- ①  $\neg (A \rightarrow \neg D)$  (否定前提) ②  $A \rightarrow B \lor C$
- $\mathbf{Q} A \wedge D$
- **6** A
- (②+简化式) (②+简化式) (②+简化式) (③B→¬A (P)  $\mathbf{\Phi}$  D
- (P)

#### Remark

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \dots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \dots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 

称这样的条件和结论的变换为反证法.

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法3(反证法)

- ①  $\neg (A \rightarrow \neg D)$  (否定前提)  $\bigcirc A \rightarrow B \lor C$
- $(\textcircled{1}+T) \qquad \textcircled{3} \ B \lor C \qquad (\textcircled{3}\textcircled{7}+MP)$  $\mathbf{Q} A \wedge D$
- **6** A
- (②+简化式) (②+简化式) (②+简化式) (③B→¬A (P)  $\mathbf{\Phi}$  D
- (P)
- $\bullet$   $\neg C$

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 

称这样的条件和结论的变换为反证法.

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法3(反证法)

- ①  $\neg (A \rightarrow \neg D)$  (否定前提) ②  $A \rightarrow B \lor C$ (P)
- $(\textcircled{1}+T) \qquad \textcircled{3} \quad B \lor C \qquad (\textcircled{3}\textcircled{7}+MP)$  $\mathbf{Q} A \wedge D$
- (②+简化式) (②+简化式) (②+简化式) (③B→¬A (P) **6** A
- $\mathbf{\Phi}$  D
- (P)  $\bullet$   $\neg C$ (45+MP)

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 

Example

$$A \rightarrow B \lor C$$
,  $B \rightarrow \neg A$ ,  $D \rightarrow \neg C \vdash A \rightarrow \neg D$ 

## 方法3(反证法)

用反证法等价于:  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3 \neg (A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$ .

- ①  $\neg (A \rightarrow \neg D)$  (否定前提) ②  $A \rightarrow B \lor C$  $\mathbf{Q} A \wedge D$

称这样的条件和结论的变换为反证法.

- **6** A
- $\mathbf{\Phi}$  D
- $\bullet$   $\neg C$
- (P)
  - (4.5 + MP)

(P)

#### Remark

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 

称这样的条件和结论的变换为反证法.

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

## 方法3(反证法)

 $\mathbf{Q} A \wedge D$ 

- ①  $\neg (A \rightarrow \neg D)$  (否定前提) ②  $A \rightarrow B \lor C$
- **6** A
- $\mathbf{\Phi}$  D
- $\bullet$   $\neg C$ 

  - (4.5 + MP)

- (P)

#### Remark

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \dots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \dots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 

称这样的条件和结论的变换为反证法.

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

### 方法3(反证法)

用反证法等价于:  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3 \neg (A \rightarrow \neg D) \vdash \mathbb{F}$ .

- ①  $\neg (A \rightarrow \neg D)$  (否定前提) ②  $A \rightarrow B \lor C$
- $(\textcircled{1}+T) \qquad \textcircled{3} \quad B \lor C \qquad (\textcircled{3}\textcircled{7}+MP)$  $\mathbf{Q} A \wedge D$
- **6** A
- $\mathbf{\Phi}$  D

- $\bullet$   $\neg C$ (45+MP)

- (②+简化式)  $\bullet$  B (⑥⑧+析取三段论) (②+简化式)  $\bullet$   $B \rightarrow \neg A$  (P)

(P)

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 

称这样的条件和结论的变换为反证法.

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

### 方法3(反证法)

- ①  $\neg (A \rightarrow \neg D)$  (否定前提) ②  $A \rightarrow B \lor C$  $\mathbf{Q} A \wedge D$
- **6** A
- $\mathbf{\Phi}$  D

- $\bullet$   $\neg C$ 
  - (45+MP)

- $(\textcircled{1}+T) \qquad \textcircled{3} \quad B \lor C \qquad (\textcircled{3}\textcircled{7}+MP)$
- (②+简化式) ② B (⑥⑧+析取三段论) ②+简化式) ②  $B \rightarrow \neg A$  (P)

由有效结论的等价定理有:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$$
 iff  $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$ 

称这样的条件和结论的变换为反证法.

#### Example

$$A \to B \lor C, B \to \neg A, D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

### 方法3(反证法)

① 
$$\neg (A \rightarrow \neg D)$$
 (否定前提) ②  $A \rightarrow B \lor C$  (P

$$(2+$$
简化式)  $(2+$ 简化式)  $(2+$ 0

題符号化 永真公式 范式 联结词的扩充和归约 推理和证明方法

# 证明方法和策略

### Definition (定理)

• 一个定理是一个能够被证明为真的语句.

## 证明方法

- 直接证明法:  $P \rightarrow Q$ 为真;
- 反证法(proof by contraposition):  $P \to Q$ 等价于¬ $Q \to \neg P$ ;
- 归谬法(proof by contradiction): P等价于¬ $P \to \mathbb{F}$ ;
- 等价证明法、反例证明,.....

#### 证明策略

- 穷举法;
- 分情形证明;
- 正向推理、逆向推理;
- . . . . .

- - 命题
  - 符号化
  - 合式公式的形式文法
  - 合式公式的形式语义
- 2 永真公式
  - 公式的分类
  - 逻辑等价
  - 永真蕴含
  - 恒等变换和不等变换
  - 对偶性
- 3 范式
  - 析取范式和合取范式
  - 主析取范式
- 4 联结词的扩充和归约
  - 联结词的扩充
  - 联结词的归约
- 5 推理和证明方法
  - 有效结论
  - 自然推理的形式证明
  - 证明方法

# Reference books



机械工业出版社.

■ 王汉飞 《离散数学》讲义.