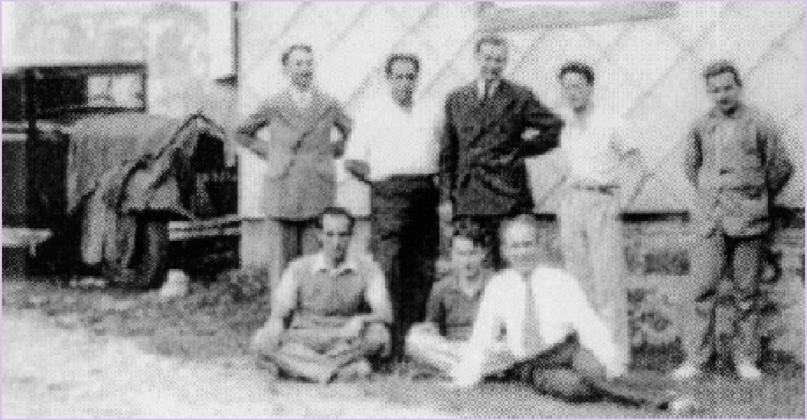
关系

School of Computer
Wuhan University

Nicolas Bourbaki (1935)



谓词与集合的联系

Remark

- *集合论将不精确的自然语言转化为精确的数学语言;*
- *所有的数学对象均由集合表示;*
- *对客观世界描述的谓词在集合论中转化为使得该谓词为真的集合;*
- $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightsquigarrow \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\}$
- $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- 关系研究$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$上普遍规律.

谓词与集合的联系

Remark

- 集合论将不精确的自然语言转化为精确的数学语言;
- 所有的数学对象均由集合表示;
- 对客观世界描述的谓词在集合论中转化为使得该谓词为真的集合;
- $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightsquigarrow \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\}$
- $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- 关系研究$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$上普遍规律.

谓词与集合的联系

Remark

- *集合论将不精确的自然语言转化为精确的数学语言;*
- *所有的数学对象均由集合表示;*
- *对客观世界描述的谓词在集合论中转化为使得该谓词为真的集合;*
- $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightsquigarrow \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\}$
- $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- 关系研究$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$上普遍规律.

谓词与集合的联系

Remark

- *集合论将不精确的自然语言转化为精确的数学语言;*
- *所有的数学对象均由集合表示;*
- *对客观世界描述的谓词在集合论中转化为使得该谓词为真的集合;*
- $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightsquigarrow \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\}$
- $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- 关系研究$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$上普遍规律.

谓词与集合的联系

Remark

- *集合论将不精确的自然语言转化为精确的数学语言;*
- *所有的数学对象均由集合表示;*
- *对客观世界描述的谓词在集合论中转化为使得该谓词为真的集合;*
- $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightsquigarrow \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\}$
- $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- *关系研究*$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$*上普遍规律.*

谓词与集合的联系

Remark

- 集合论将不精确的自然语言转化为精确的数学语言;
- 所有的数学对象均由集合表示;
- 对客观世界描述的谓词在集合论中转化为使得该谓词为真的集合;
- $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightsquigarrow \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\}$
- $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- 关系研究$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$上普遍规律.

谓词与集合的联系

Remark

- *集合论将不精确的自然语言转化为精确的数学语言;*
- *所有的数学对象均由集合表示;*
- *对客观世界描述的谓词在集合论中转化为使得该谓词为真的集合;*
- $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightsquigarrow \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\}$
- $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\text{为真}\} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- *关系研究*$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$*上普遍规律.*

Example

Example

- 命题公式和谓词公式的永真蕴涵和逻辑等价关系;
- 集合中的相等和包含关系;
- 排序问题;
- 数据库的库表和视图(SQL语句);
- ……
- 本章将重点分析$A \times B$上的关系.

Example

Example

- 命题公式和谓词公式的永真蕴涵和逻辑等价关系;
- 集合中的相等和包含关系;
- 排序问题;
- 数据库的库表和视图(SQL语句);
- ……
- 本章将重点分析$A \times B$上的关系.

Example

Example

- 命题公式和谓词公式的永真蕴涵和逻辑等价关系；
- 集合中的相等和包含关系；
- 排序问题;
- 数据库的库表和视图(SQL语句);
- ……
- 本章将重点分析$A \times B$上的关系.

Example

Example

- 命题公式和谓词公式的永真蕴涵和逻辑等价关系;
- 集合中的相等和包含关系;
- 排序问题;
- 数据库的库表和视图(SQL语句);
- ......
- 本章将重点分析$A \times B$上的关系.

Example

Example

- 命题公式和谓词公式的永真蕴涵和逻辑等价关系;
- 集合中的相等和包含关系;
- 排序问题;
- 数据库的库表和视图(SQL语句);
- ……
- 本章将重点分析$A \times B$上的关系.

Example

Example

- 命题公式和谓词公式的永真蕴涵和逻辑等价关系；
- 集合中的相等和包含关系；
- 排序问题；
- 数据库的库表和视图(SQL语句);
- ……
- 本章将重点分析$A \times B$上的关系.

Example

Example

- 命题公式和谓词公式的永真蕴涵和逻辑等价关系；
- 集合中的相等和包含关系；
- 排序问题;
- 数据库的库表和视图(SQL语句);
- ......
- 本章将重点分析$A \times B$上的关系.

关系的定义

Definition (关系的定义)

- $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, 二元关系；
- $\mathcal{R} \subseteq A \times B \times C$, 三元关系；
- $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A$, 一元关系，退化为一般的集合.

Definition (平凡关系)

- $\emptyset$, 空关系;
- $\mathcal{R} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元全域关系.

Definition (关系的相等)

关系$\mathcal{R}_1$和$\mathcal{R}_2$相等，iff, 两者在集合意义下相等，即: $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

关系的定义

Definition (关系的定义)

- $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, 二元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A \times B \times C$, 三元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A$, 一元关系，退化为一般的集合.

Definition (平凡关系)

- $\emptyset$, 空关系;
- $\mathcal{R} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元全域关系.

Definition (关系的相等)

关系$\mathcal{R}_1$和$\mathcal{R}_2$相等，iff, 两者在集合意义下相等，即: $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

关系的定义

Definition (关系的定义)

- $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, 二元关系；
- $\mathcal{R} \subseteq A \times B \times C$, 三元关系；
- $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元关系；
- $\mathcal{R} \subseteq A$, 一元关系，退化为一般的集合.

Definition (平凡关系)

Definition (关系的相等)

关系$\mathcal{R}_1$和$\mathcal{R}_2$相等，iff, 两者在集合意义下相等，即: $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

关系的定义

Definition (关系的定义)

- $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, 二元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A \times B \times C$, 三元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A$, 一元关系, 退化为一般的集合.

Definition (平凡关系)

- $\emptyset$, 空关系.
- $\mathcal{R} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元全域关系.

Definition (关系的相等)

关系$\mathcal{R}_1$和$\mathcal{R}_2$相等, iff, 两者在集合意义下相等, 即: $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

关系的定义

Definition (关系的定义)

- $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, 二元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A \times B \times C$, 三元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A$, 一元关系，退化为一般的集合.

Definition (平凡关系)

- $\emptyset$, 空关系;
- $\mathcal{R} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元全域关系.

Definition (关系的相等)

关系$\mathcal{R}_1$和$\mathcal{R}_2$相等，iff, 两者在集合意义下相等，即: $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

关系的定义

Definition (关系的定义)

- $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, 二元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A \times B \times C$, 三元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A$, 一元关系, 退化为一般的集合.

Definition (平凡关系)

- $\emptyset$, 空关系;
- $\mathcal{R} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元全域关系.

Definition (关系的相等)

关系$\mathcal{R}_1$和$\mathcal{R}_2$相等, iff, 两者在集合意义下相等, 即: $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

关系的定义

Definition (关系的定义)

- $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, 二元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A \times B \times C$, 三元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A$, 一元关系，退化为一般的集合.

Definition (平凡关系)

- $\emptyset$, 空关系;
- $\mathcal{R} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元全域关系.

Definition (关系的相等)

关系$\mathcal{R}_1$和$\mathcal{R}_2$相等，iff, 两者在集合意义下相等，即: $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

关系的定义

Definition (关系的定义)

- $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, 二元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A \times B \times C$, 三元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A$, 一元关系, 退化为一般的集合.

Definition (平凡关系)

- $\emptyset$, 空关系;
- $\mathcal{R} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元全域关系.

Definition (关系的相等)

关系$\mathcal{R}_1$和$\mathcal{R}_2$相等, iff, 两者在集合意义下相等, 即: $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

关系的定义

Definition (关系的定义)

- $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, 二元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A \times B \times C$, 三元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元关系;
- $\mathcal{R} \subseteq A$, 一元关系, 退化为一般的集合.

Definition (平凡关系)

- $\varnothing$, 空关系;
- $\mathcal{R} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, n元全域关系.

Definition (关系的相等)

关系$\mathcal{R}_1$和$\mathcal{R}_2$相等, iff, 两者在集合意义下相等, 即: $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

Examples

Example

- 设$\mathcal{P}$是命题公式的集合则：
  - $\Leftrightarrow = \{\langle P, Q\rangle \mid P$和$Q$在所有的指派下真假值相同$\} \subseteq \mathcal{P}^2$
  - $\Rightarrow = \{\langle P, Q\rangle \mid$在所有的指派下，如果$P$真，则$Q$真$\} \subseteq \mathcal{P}^2$
  - $\rightarrow$和$\leftrightarrow$不是关系；
- 传统数学中的$=$，$\leqslant$，$\geqslant$，$<$和$>$都是$\mathbb{R}^2$上的关系；而$\leqslant$和$<$是不同的关系；
- 传统数学函数也是一种特殊的定义域和值域集合上的关系，如：
  - $+ \subseteq \{\langle x, y, z\rangle \mid x + y = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- 程序设计中的所有的变量说明是关系：
  - $\{$ 变量说明 $\} \subseteq$ $NAME \times TYPE \times SCOPE \times SIZE \times MEMORY\_LOCATION$

Examples

Example

- 设$\mathcal{P}$是命题公式的集合则：
  - $\Leftrightarrow = \{\langle P, Q\rangle \mid P$和$Q$在所有的指派下真假值相同$\} \subseteq \mathcal{P}^2$
  - $\Rightarrow = \{\langle P, Q\rangle \mid$在所有的指派下，如果$P$真，则$Q$真$\} \subseteq \mathcal{P}^2$
  - $\rightarrow$和$\leftrightarrow$不是关系；
- 传统数学中的$=$，$\leqslant$，$\geqslant$，$<$和$>$都是$\mathbb{R}^2$上的关系；而$\leqslant$和$<$是不同的关系；
- 传统数学函数也是一种特殊的定义域和值域集合上的关系，如：
  - $+ \subseteq \{\langle x, y, z\rangle \mid x + y = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- 程序设计中的所有的变量说明是关系：
  - $\{$变量说明$\} \subseteq$ $NAME \times TYPE \times SCOPE \times SIZE \times MEMORY\_LOCATION$

Examples

Example

- 设$\mathcal{P}$是命题公式的集合则：
  - $\Leftrightarrow = \{\langle P, Q\rangle \mid P$和$Q$在所有的指派下真假值相同$\} \subseteq \mathcal{P}^2$
  - $\Rightarrow = \{\langle P, Q\rangle \mid$在所有的指派下，如果$P$真，则$Q$真$\} \subseteq \mathcal{P}^2$
  - $\rightarrow$和$\leftrightarrow$不是关系；
- 传统数学中的$=$，$\leqslant$，$\geqslant$，$<$和$>$都是$\mathbb{R}^2$上的关系；而$\leqslant$和$<$是不同的关系；
- 传统数学函数也是一种特殊的定义域和值域集合上的关系，如：
  - $+ \subseteq \{\langle x, y, z\rangle \mid x + y = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- 程序设计中的所有的变量说明是关系：
  - $\{$变量说明$\} \subseteq$ $NAME \times TYPE \times SCOPE \times SIZE \times MEMORY\_LOCATION$

Examples

Example

- 设$\mathcal{P}$是命题公式的集合则：
  - $\Leftrightarrow = \{\langle P, Q\rangle \mid P$和$Q$在所有的指派下真假值相同$\} \subseteq \mathcal{P}^2$
  - $\Rightarrow = \{\langle P, Q\rangle \mid$在所有的指派下，如果$P$真，则$Q$真$\} \subseteq \mathcal{P}^2$
  - $\rightarrow$和$\leftrightarrow$不是关系；
- 传统数学中的$=$，$\leqslant$，$\geqslant$，$<$和$>$都是$\mathbb{R}^2$上的关系；而$\leqslant$和$<$是不同的关系；
- 传统数学函数也是一种特殊的定义域和值域集合上的关系，如：
  - $+ \subseteq \{\langle x, y, z\rangle \mid x + y = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- 程序设计中的所有的变量说明是关系：
  - $\{$变量说明$\} \subseteq$ $NAME \times TYPE \times SCOPE \times SIZE \times MEMORY\_LOCATION$

Examples

Example

- 设$\mathcal{P}$是命题公式的集合则：
  - $\Leftrightarrow = \{\langle P, Q\rangle \mid P\text{和}Q\text{在所有的指派下真假值相同}\} \subseteq \mathcal{P}^2$
  - $\Rightarrow = \{\langle P, Q\rangle \mid \text{在所有的指派下，如果}P\text{真，则}Q\text{真}\} \subseteq \mathcal{P}^2$
  - $\rightarrow$和$\leftrightarrow$不是关系；
- 传统数学中的$=$，$\leqslant$，$\geqslant$，$<$和$>$都是$\mathbb{R}^2$上的关系；而$\leqslant$和$<$是不同的关系；
- 传统数学函数也是一种特殊的定义域和值域集合上的关系，如：
  - $+ \subseteq \{\langle x, y, z\rangle \mid x + y = z\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- 程序设计中的所有的变量说明是关系：
  - $\{\text{变量说明}\} \subseteq$ $NAME \times TYPE \times SCOPE \times SIZE \times MEMORY\_LOCATION$

Remark

Remark

- 关系本质上是集合，因此集合上的一切结论都可以平移到关系中，如集合上的交并补等运算在关系中都适用；
- 但是由于关系是乘积集合，因此它还有一些一般集合不具有的特性，这正是关系需要研究的内容；
- 同集合的研究方法一样，研究方法是对象是抽象的对象进行整体研究.

Propostion

设$A_i(i=1,2,\ldots,n)$均是有限集合，则$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$上的关系总数是:

$$|\mathscr{P}(A_1\times A_2\times\cdots\times A_n)|=2^{|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|}$$

Remark

Remark

- 关系本质上是集合，因此集合上的一切结论都可以平移到关系中，如集合上的交并补等运算在关系中都适用；
- 但是由于关系是乘积集合，因此它还有一些一般集合不具有的特性，这正是关系需要研究的内容；
- 同集合的研究方法一样，研究方法是对象是抽象的对象进行整体研究.

Propostion

设$A_i(i=1,2,\ldots,n)$均是有限集合，则$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$上的关系总数是：

$$|\mathscr{P}(A_1\times A_2\times\cdots\times A_n)|=2^{|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|}$$

Remark

Remark

- 关系本质上是集合，因此集合上的一切结论都可以平移到关系中，如集合上的交并补等运算在关系中都适用；
- 但是由于关系是乘积集合，因此它还有一些一般集合不具有的特性，这正是关系需要研究的内容；
- 同集合的研究方法一样，研究方法是对象是抽象的对象进行整体研究.

Propostion

设$A_i(i=1,2,\ldots,n)$均是有限集合，则$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$上的关系总数是：

$$|\mathscr{P}(A_1\times A_2\times\cdots\times A_n)|=2^{|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|}$$

Remark

Remark

- 关系本质上是集合，因此集合上的一切结论都可以平移到关系中，如集合上的交并补等运算在关系中都适用；
- 但是由于关系是乘积集合，因此它还有一些一般集合不具有的特性，这正是关系需要研究的内容；
- 同集合的研究方法一样，研究方法是对象是抽象的对象进行整体研究.

Propostion

设$A_i(i=1,2,\ldots,n)$均是有限集合，则$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$上的关系总数是：

$$|\mathscr{P}(A_1\times A_2\times\cdots\times A_n)|=2^{|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|}$$

Remark

Remark

- 关系本质上是集合，因此集合上的一切结论都可以平移到关系中，如集合上的交并补等运算在关系中都适用；
- 但是由于关系是乘积集合，因此它还有一些一般集合不具有的特性，这正是关系需要研究的内容；
- 同集合的研究方法一样，研究方法是对象是抽象的对象进行整体研究.

Propostion

设$A_i(i=1,2,\ldots,n)$均是有限集合，则$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$上的关系总数是：

$$|\mathscr{P}(A_1\times A_2\times\cdots\times A_n)|=2^{|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|}$$

二元关系

Description (x和y有关系$\mathcal{R}$的表示方法)

- 集合表示法：x和y有关系$\mathcal{R}$：$\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ $(\neq \langle y, x\rangle \in \mathcal{R})$：
  - $\langle P \to Q, \neg P \vee Q\rangle \in \Leftrightarrow$, $\langle 3, 5\rangle \in <$;
- 中缀表示法：x和y有关系$\mathcal{R}$：$x\,\mathcal{R}\,y$；如：
  - $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$, $3 \leq 5$;
- 中缀表示法：x和y没有关系$\mathcal{R}$：$x \not\mathcal{R} y$；如：
  - $\neg P \to Q \not\Leftrightarrow \neg P \vee Q$.

Definition ($\mathcal{R} \subseteq A \times B$)

- 定义域(Domain)
  - $Dom(\mathcal{R}) = \{x \mid \exists y(y \in B \wedge \langle x, y\rangle \in \mathcal{R})\} \subseteq A$;
- 值域(Range)
  - $Ran(\mathcal{R}) = \{y \mid \exists x(x \in B \wedge \langle x, y\rangle \in \mathcal{R})\} \subseteq B$.

二元关系

Description (x和y有关系$\mathcal{R}$的表示方法)

- 集合表示法：x和y有关系$\mathcal{R}$：$\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ $(\neq \langle y, x\rangle \in \mathcal{R})$:
  - $\langle P \to Q, \neg P \vee Q\rangle \in \Leftrightarrow$, $\langle 3, 5\rangle \in <$;
- 中缀表示法：x和y有关系$\mathcal{R}$：$x\,\mathcal{R}\,y$; 如:
  - $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$, $3 \leq 5$;
- 中缀表示法：x和y没有关系$\mathcal{R}$：$x \not\mathcal{R} y$; 如:
  - $\neg\, P \to Q \not\Leftrightarrow \neg\, P \vee Q$.

Definition ($\mathcal{R} \subseteq A \times B$)

二元关系

Description (x和y有关系$\mathcal{R}$的表示方法)

- 集合表示法: x和y有关系$\mathcal{R}$: $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ $(\neq \langle y, x\rangle \in \mathcal{R})$:
  - $\langle P \to Q, \neg P \vee Q\rangle \in \Leftrightarrow$, $\langle 3, 5\rangle \in <$;
- 中缀表示法: x和y有关系$\mathcal{R}$: $x\,\mathcal{R}\,y$; 如:
  - $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$, $3 \leqslant 5$;
- 中缀表示法: x和y没有关系$\mathcal{R}$: $x \not\mathcal{R} y$; 如:
  - $\neg\ P \to Q \not\Leftrightarrow \neg\ P \vee Q$.

Definition ($\mathcal{R} \subseteq A \times B$)

- 定义域(Domain)
  - $Dom(\mathcal{R}) \triangleq \{x \mid \exists y(y \in B \wedge \langle x, y\rangle \in \mathcal{R})\} \subseteq A$;
- 值域(Range)
  - $Ran(\mathcal{R}) \triangleq \{y \mid \exists x(x \in A \wedge \langle x, y\rangle \in \mathcal{R})\} \subseteq B$.

二元关系

Description (x和y有关系$\mathcal{R}$的表示方法)

- 集合表示法: x和y有关系$\mathcal{R}$: $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$ $(\neq \langle y, x\rangle \in \mathcal{R})$:
  - $\langle P \to Q, \neg P \vee Q\rangle \in \Leftrightarrow$, $\langle 3, 5\rangle \in <$;
- 中缀表示法: x和y有关系$\mathcal{R}$: $x \, \mathcal{R} \, y$; 如:
  - $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$, $3 \leqslant 5$;
- 中缀表示法: x和y没有关系$\mathcal{R}$: $x \not\mathcal{R} y$; 如:
  - $\neg \, P \to Q \not\Leftrightarrow \neg \, P \vee Q$.

Definition ($\mathcal{R} \subseteq A \times B$)

- 定义域(Domain):
  - $Dom(\mathcal{R}) \triangleq \{x \mid \exists y(y \in B \wedge \langle x, y\rangle \in \mathcal{R})\} \subseteq A$;
- 值域(Range)
  - $Ran(\mathcal{R}) \triangleq \{y \mid \exists x(x \in A \wedge \langle x, y\rangle \in \mathcal{R})\} \subseteq B$.

Example

Example

- $Dom(\Leftrightarrow) = Ran(\Leftrightarrow) = \mathcal{P}$;
- if $<$是$\mathbb{N}$上的二元关系，then
  $Dom(<) = \mathbb{N},\ Ran(<) = \mathbb{N} - \{0\}$;
- if $>$是$\mathbb{N}$上的二元关系，then
  $Dom(>) = \mathbb{N} - \{0\},\ Ran(<) = \mathbb{N}$;
- $Dom(\mathcal{R}) = \emptyset$, iff, $\mathcal{R} = \emptyset$.

Example

Example

- $Dom(\Leftrightarrow) = Ran(\Leftrightarrow) = \mathcal{P}$;
- if $<$是$\mathbb{N}$上的二元关系，then $Dom(<) = \mathbb{N}$, $Ran(<) = \mathbb{N} - \{0\}$;
- if $>$是$\mathbb{N}$上的二元关系，then $Dom(>) = \mathbb{N} - \{0\}$, $Ran(<) = \mathbb{N}$;
- $Dom(\mathcal{R}) = \emptyset$, iff, $\mathcal{R} = \emptyset$.

Example

Example

- $Dom(\Leftrightarrow) = Ran(\Leftrightarrow) = \mathcal{P}$;
- if $<$是$\mathbb{N}$上的二元关系，then
  $Dom(<) = \mathbb{N}, \ Ran(<) = \mathbb{N} - \{0\}$;
- if $>$是$\mathbb{N}$上的二元关系，then
  $Dom(>) = \mathbb{N} - \{0\}, \ Ran(<) = \mathbb{N}$;
- $Dom(\mathcal{R}) = \emptyset$, iff, $\mathcal{R} = \emptyset$.

Example

Example

- $Dom(\Leftrightarrow) = Ran(\Leftrightarrow) = \mathcal{P}$;
- if $<$是$\mathbb{N}$上的二元关系, then $Dom(<) = \mathbb{N}$, $Ran(<) = \mathbb{N} - \{0\}$;
- if $>$是$\mathbb{N}$上的二元关系, then $Dom(>) = \mathbb{N} - \{0\}$, $Ran(<) = \mathbb{N}$;
- $Dom(\mathcal{R}) = \emptyset$, iff, $\mathcal{R} = \emptyset$.

Example

Example

- $Dom(\Leftrightarrow) = Ran(\Leftrightarrow) = \mathcal{P}$;
- if $<$是$\mathbb{N}$上的二元关系，then
  $Dom(<) = \mathbb{N},\ Ran(<) = \mathbb{N} - \{0\}$;
- if $>$是$\mathbb{N}$上的二元关系，then
  $Dom(>) = \mathbb{N} - \{0\},\ Ran(<) = \mathbb{N}$;
- $Dom(\mathcal{R}) = \emptyset$, iff, $\mathcal{R} = \emptyset$.

集合表示法

Example (集合表示(描述法和枚举法))

- 恒等关系：$\mathbb{1}_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$;
- $B = \{1, 2, 4\}$，则B上的整除关系：
$$\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in B \wedge y\text{能被}x\text{整除}(x|y)\}$$
$$= \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$$
- $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge 2|(x - y)\}$.

集合表示法

Example (集合表示(描述法和枚举法))

- 恒等关系：$\mathbb{1}_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$;
- $B = \{1, 2, 4\}$，则B上的整除关系：
$$\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in B \wedge y\text{能被}x\text{整除}(x|y)\} \\ = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$
- $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge 2|(x-y)\}$.

集合表示法

Example (集合表示(描述法和枚举法))

- 恒等关系：$\mathbb{1}_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$;
- $B = \{1, 2, 4\}$，则B上的整除关系：
  $$\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in B \wedge y\text{能被}x\text{整除}(x|y)\}$$
  $$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$
- $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge 2|(x-y)\}$.

集合表示法

Example (集合表示(描述法和枚举法))

- 恒等关系：$\mathbb{1}_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$;
- $B = \{1, 2, 4\}$，则B上的整除关系：
  $$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in B \wedge y\text{能被}x\text{整除}(x|y)\} \\ &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,4\rangle\} \end{aligned}$$
- $\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge 2|(x - y)\}$.

归纳定义法

Example

$\mathcal{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \land 2 | (x - y) \}$

1. Base: $\langle 0, 0 \rangle \in \mathcal{R}$;
2. Induction rule: if $\langle x, y \rangle \in \mathcal{R}$, then:

$$\langle x+1, y+1 \rangle \in \mathcal{R}$$
$$\langle x+2, y \rangle \in \mathcal{R}$$
$$\langle x, y+2 \rangle \in \mathcal{R}$$

归纳定义法

Example

$\mathcal{R} = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge 2 | (x - y) \}$

1. Base: $\langle 0, 0 \rangle \in \mathcal{R}$;
2. Induction rule: if $\langle x, y \rangle \in \mathcal{R}$, then:
   $\langle x + 1, y + 1 \rangle \in \mathcal{R}$
   $\langle x + 2, y \rangle \in \mathcal{R}$
   $\langle x, y + 2 \rangle \in \mathcal{R}$

归纳定义法

Example

$\mathcal{R} = \{\, \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge 2 | (x - y) \,\}$

1. Base: $\langle 0, 0 \rangle \in \mathcal{R}$;
2. Induction rule: if $\langle x, y \rangle \in \mathcal{R}$, then:

$$\langle x+1, y+1 \rangle \in \mathcal{R}$$
$$\langle x+2, y \rangle \in \mathcal{R}$$
$$\langle x, y+2 \rangle \in \mathcal{R}$$

矩阵表示法

Example

$B = \{1, 2, 4\}$，则B上的整除关系：

$\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in B \land y能被y整除(x|y)\}$

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Definition (关系矩阵, Matrix of Relation)

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $\mathcal{R} \subseteq A \times B$:

$$M_{\mathcal{R}} = (c_{ij})_{m \times n}, \; c_{ij} = \begin{cases} 1 \; if \; a_i \mathcal{R} b_j \\ 0 \; if \; a_i \not\mathcal{R} b_j \end{cases}$$

矩阵表示法

Example

$B = \{1, 2, 4\}$，则B上的整除关系：

$\mathcal{R} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in B \wedge y能被y整除(x|y)\}$

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Definition (关系矩阵, Matrix of Relation)

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $\mathcal{R} \subseteq A \times B$:

$$M_{\mathcal{R}} = (c_{ij})_{m\times n},\ c_{ij} = \begin{cases} 1 \ if \ a_i \mathcal{R} b_j \\ 0 \ if \ a_i \not{\mathcal{R}} b_j \end{cases}$$

关系图

Description (条件：必须是A^2上的关系，简称A上的关系)

1. A中的每个元素都是图的结点是：a_i ;
2. if $a_i \mathcal{R} a_j$, 则从结点a_i到结点a_j有一条有向边：$a_i \rightarrow a_j$;
3. if $a_i \mathcal{R} a_i$, 则结点a_i有一条有向自回路：a_i .

Example ($B = \{1, 2, 4\}$上的整除关系)

关系图

Description（条件：必须是A^2上的关系，简称A上的关系）

1. A中的每个元素都是图的结点是：$a_i \bullet$；
2. if $a_i \mathcal{R} a_j$，则从结点a_i到结点a_j有一条有向边：$a_i \bullet \longrightarrow \bullet a_j$；
3. if $a_i \mathcal{R} a_i$，则结点a_i有一条有向自回路：$a_i \bullet \circlearrowleft$。

Example（$B = \{1, 2, 4\}$上的整除关系）

关系图

Description (条件：必须是A^2上的关系，简称A上的关系)

1. A中的每个元素都是图的结点是：a_i ；
2. *if* $a_i \mathcal{R} a_j$, 则从结点a_i到结点a_j有一条有向边：$a_i \longrightarrow a_j$ ；
3. *if* $a_i \mathcal{R} a_i$, 则结点a_i有一条有向自回路：a_i .

Example ($B = \{1, 2, 4\}$上的整除关系)

关系图

Description（条件：必须是A^2上的关系，简称A上的关系）

1. A中的每个元素都是图的结点是：a_i ;
2. if $a_i \mathcal{R} a_j$, 则从结点a_i到结点a_j有一条有向边：$a_i \longrightarrow a_j$;
3. if $a_i \mathcal{R} a_i$, 则结点a_i有一条有向自回路：a_i .

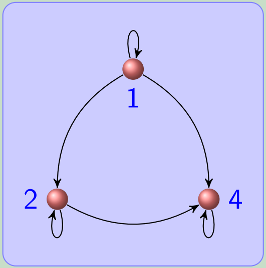
Example（$B = \{1, 2, 4\}$上的整除关系）

关系图

Description (条件：必须是A^2上的关系，简称A上的关系)

1. A中的每个元素都是图的结点是：a_i ;
2. if $a_i \mathcal{R} a_j$, 则从结点a_i到结点a_j有一条有向边：$a_i \longrightarrow a_j$;
3. if $a_i \mathcal{R} a_i$, 则结点a_i有一条有向自回路：a_i .

Example ($B = \{1, 2, 4\}$上的整除关系)



自反关系

Definition (自反关系, Reflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \subseteq \mathcal{R}$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为1 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$, $\leq$, $\geq$和整除关系是自反关系;
- 空集上的空关系是自反关系;
- $<$, $>$, 非空集合上的空关系不是自反关系.

自反关系

Definition (自反关系, Reflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A,\ \langle x, x\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \subseteq \mathcal{R}$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为1 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都有自回路(if A是有限集合).

Example

自反关系

Definition (自反关系, Reflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A,\ \langle x, x\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \subseteq \mathcal{R}$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为1 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $=$, $\leq$, $\geq$和整除关系是自反关系;
- 空集上的空关系是自反关系;
- $<$, $>$, 非空集合上的空关系不是自反关系.

自反关系

Definition (自反关系, Reflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是自反关系，当且仅当，下述条件之一成立:

1. $\forall x \in A,\ \langle x, x \rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \subseteq \mathcal{R}$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为1 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都有自回路(if A是有限集合).

Example

自反关系

Definition (自反关系, Reflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A,\ \langle x, x \rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \subseteq \mathcal{R}$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为1 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$, $\leq$, $\geq$和整除关系是自反关系;
- 空集上的空关系是自反关系;
- $<$, $>$, 非空集合上的空关系不是自反关系.

自反关系

Definition (自反关系, Reflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A,\ \langle x, x \rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \subseteq \mathcal{R}$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为1 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$, $\leqslant$, $\geqslant$和整除关系是自反关系；
- 空集上的空关系是自反关系；
- $<$, $>$, 非空集合上的空关系不是自反关系.

自反关系

Definition (自反关系, Reflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A, \langle x, x\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \subseteq \mathcal{R}$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为1 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$, $\leqslant$, $\geqslant$和整除关系是自反关系；
- 空集上的空关系是自反关系；
- $<, >$, 非空集合上的空关系不是自反关系.

自反关系

Definition (自反关系, Reflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A, \langle x, x\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \subseteq \mathcal{R}$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为1 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$, $\leqslant$, $\geqslant$和整除关系是自反关系；
- 空集上的空关系是自反关系；
- $<$, $>$, 非空集合上的空关系不是自反关系.

自反关系

Definition (自反关系, Reflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A,\ \langle x, x\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \subseteq \mathcal{R}$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为1 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$, $\leqslant$, $\geqslant$和整除关系是自反关系；
- 空集上的空关系是自反关系；
- $<$, $>$, 非空集合上的空关系不是自反关系.

反自反关系

Definition (反自反关系, irreflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \notin \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \cap \mathcal{R} = \emptyset$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为0 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都没有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $=$, $\leq$, $\geq$和整除关系不是反自反关系;
- $<$, $>$, 空关系是反自反关系;
- $\{\langle 1, 1 \rangle\} \subseteq \{1, 2\}^2$即非自反，也非反自反.

反自反关系

Definition (反自反关系, irreflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A,\ \langle x, x \rangle \notin \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \cap \mathcal{R} = \emptyset$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为0 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都没有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $=$, $\leq$, $\geq$和整除关系不是反自反关系；
- $<$, $>$, 空关系是反自反关系；
- $\{\langle 1, 1 \rangle\} \subseteq \{1, 2\}^2$即非自反，也非反自反。

反自反关系

Definition (反自反关系, irreflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \notin \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \cap \mathcal{R} = \varnothing$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为0 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都没有自回路(if A是有限集合).

Example

反自反关系

Definition (反自反关系, irreflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A,\ \langle x, x\rangle \notin \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \cap \mathcal{R} = \varnothing$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为0 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都没有自回路(if A是有限集合).

Example

反自反关系

Definition (反自反关系, irreflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A,\ \langle x, x \rangle \notin \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \cap \mathcal{R} = \varnothing$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为0 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都没有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\subseteq$, $\leq$, $\geq$和整除关系不是反自反关系；
- $<$, $>$是反自反关系；
- $\{\langle 1, 1\rangle\} \subseteq \{1, 2\}^2$既非自反，也非反自反.

反自反关系

Definition (反自反关系, irreflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A,\ \langle x, x\rangle \notin \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \cap \mathcal{R} = \varnothing$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为0 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都没有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$, $\leq$, $\geq$和整除关系不是反自反关系;
- $<$, $>$, 空关系是反自反关系;
- $\{\langle 1,1\rangle\} \subseteq \{1,2\}^2$即非自反，也非反自反.

反自反关系

Definition (反自反关系, irreflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \notin \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \cap \mathcal{R} = \varnothing$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为0 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都没有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$, $\leqslant$, $\geqslant$和整除关系不是反自反关系；
- $<$, $>$, 空关系是反自反关系；
- $\{\langle 1, 1 \rangle\} \subseteq \{1, 2\}^2$即非自反，也非反自反.

反自反关系

Definition (反自反关系, irreflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反自反关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x \in A$, $\langle x, x \rangle \notin \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \cap \mathcal{R} = \varnothing$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为0 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都没有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$, $\leqslant$, $\geqslant$和整除关系不是反自反关系；
- $<$, $>$, 空关系是反自反关系；
- $\{\langle 1, 1 \rangle\} \subseteq \{1, 2\}^2$即非自反，也非反自反.

反自反关系

Definition (反自反关系, irreflexive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反自反关系，当且仅当，下述条件之一成立:

1. $\forall x \in A,\ \langle x, x\rangle \notin \mathcal{R}$;
2. $\mathbb{1}_A \cap \mathcal{R} = \varnothing$;
3. $M_{\mathcal{R}}$对角线上的值均为0 (if A是有限集合);
4. $\mathcal{R}$关系图中每个结点都没有自回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$, $\leqslant$, $\geqslant$和整除关系不是反自反关系;
- $<$, $>$, 空关系是反自反关系;
- $\{\langle 1, 1\rangle\} \subseteq \{1, 2\}^2$即非自反，也非反自反.

对称关系

Definition (对称关系, Symmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是**对称关系**，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y \rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle y, x \rangle \in \mathcal{R}$;
2. $M_{\mathcal{R}}$是对称矩阵(if A是有限集合);
3. $\mathcal{R}$关系图中如果结点a到结点b有条有向边，则结点b 到结点a也有条有向边(if A是有限集合).

Example

对称关系

Definition (对称关系, Symmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $M_{\mathcal{R}}$是对称矩阵(if A是有限集合);
3. $\mathcal{R}$关系图中如果结点a到结点b有条有向边，则结点b 到结点a也有条有向边(if A是有限集合).

Example

对称关系

Definition (对称关系, Symmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $M_{\mathcal{R}}$是对称矩阵(if A是有限集合);
3. $\mathcal{R}$关系图中如果结点a到结点b有条有向边，则结点b 到结点a也有条有向边(if A是有限集合).

Example

对称关系

Definition (对称关系, Symmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y \rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle y, x \rangle \in \mathcal{R}$;
2. $M_{\mathcal{R}}$是对称矩阵(if A是有限集合);
3. $\mathcal{R}$关系图中如果结点a到结点b有条有向边，则结点b 到结点a也有条有向边(if A是有限集合).

Example

对称关系

Definition (对称关系, Symmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $M_{\mathcal{R}}$是对称矩阵(if A是有限集合);
3. $\mathcal{R}$关系图中如果结点a到结点b有条有向边，则结点b 到结点a也有条有向边(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$和空关系是对称关系；
- $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$和整除关系不是对称关系；
-

✓;

✗.

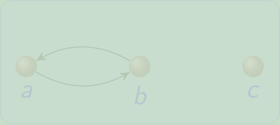
对称关系

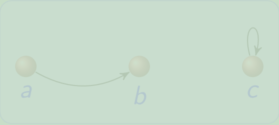
Definition (对称关系, Symmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是对称关系，当且仅当，下述条件之一成立:

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $M_{\mathcal{R}}$是对称矩阵(if A是有限集合);
3. $\mathcal{R}$关系图中如果结点a到结点b有条有向边，则结点b 到结点a也有条有向边(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$和空关系是对称关系;
- $<, >, \leqslant, \geqslant$和整除关系不是对称关系;
- 

$\checkmark$; 

$\times$.

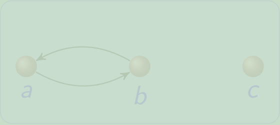
对称关系

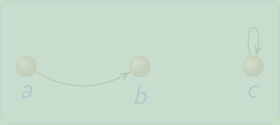
Definition (对称关系, Symmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $M_{\mathcal{R}}$是对称矩阵(if A是有限集合);
3. $\mathcal{R}$关系图中如果结点a到结点b有条有向边，则结点b 到结点a也有条有向边(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$和空关系是对称关系；
- $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$和整除关系不是对称关系；
- 

$\checkmark$; 

$\times$.

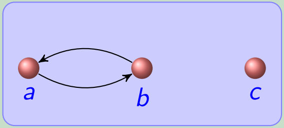
对称关系

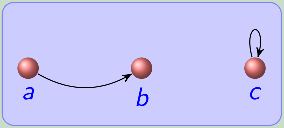
Definition (对称关系, Symmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y \rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle y, x \rangle \in \mathcal{R}$;
2. $M_{\mathcal{R}}$是对称矩阵(if A是有限集合);
3. $\mathcal{R}$关系图中如果结点a到结点b有条有向边，则结点b 到结点a也有条有向边(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $\Leftrightarrow$和空关系是对称关系；
- $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$和整除关系不是对称关系；
- 

$\checkmark$; 

✗.

反对称关系

Definition (反对称关系, Antisymmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$, then $x = y$;
2. $\forall x, y \in A$, if $x \neq y$, then $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R} \vee \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$;
3. $\mathcal{R}$关系图没有长度为二的回路(if A是有限集合).

Example

反对称关系

Definition (反对称关系, Antisymmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$, then $x = y$;
2. $\forall x, y \in A$, if $x \neq y$, then $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R} \vee \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$;
3. $\mathcal{R}$关系图没有长度为二的回路(if A是有限集合).

Example

反对称关系

Definition (反对称关系, Antisymmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反对称关系，当且仅当，下述条件之一成立:

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$, then $x = y$;
2. $\forall x, y \in A$, if $x \neq y$, then $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R} \vee \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$;
3. $\mathcal{R}$关系图没有长度为二的回路(if A是有限集合).

Example

反对称关系

Definition (反对称关系, Antisymmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$, then $x = y$;
2. $\forall x, y \in A$, if $x \neq y$, then $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R} \vee \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$;
3. $\mathcal{R}$关系图没有长度为二的回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, 整除关系和空关系是反对称关系;
  $\Leftrightarrow$和$\Rightarrow$不是反对称关系.

反对称关系

Definition (反对称关系, Antisymmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$, then $x = y$;
2. $\forall x, y \in A$, if $x \neq y$, then $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R} \vee \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$;
3. $\mathcal{R}$关系图没有长度为二的回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$，整除关系和空关系是反对称关系；
- $\Leftrightarrow$和$\Rightarrow$不是反对称关系；
-

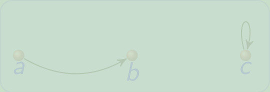
反对称关系

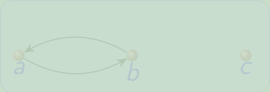
Definition (反对称关系, Antisymmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$, then $x = y$;
2. $\forall x, y \in A$, if $x \neq y$, then $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R} \vee \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$;
3. $\mathcal{R}$关系图没有长度为二的回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$，整除关系和空关系是反对称关系；
- $\Leftrightarrow$和$\Rightarrow$不是反对称关系；
- 

✓; 

✗.

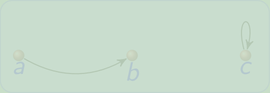
反对称关系

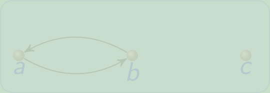
Definition (反对称关系, Antisymmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$, then $x = y$;
2. $\forall x, y \in A$, if $x \neq y$, then $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R} \vee \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$;
3. $\mathcal{R}$关系图没有长度为二的回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$，整除关系和空关系是反对称关系；
- $\Leftrightarrow$和$\Rightarrow$不是反对称关系；
- 

✓; 

✗.

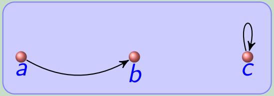
反对称关系

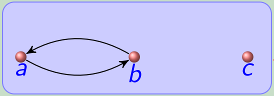
Definition (反对称关系, Antisymmetric)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是反对称关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, x\rangle \in \mathcal{R}$, then $x = y$;
2. $\forall x, y \in A$, if $x \neq y$, then $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{R} \vee \langle y, x\rangle \notin \mathcal{R}$;
3. $\mathcal{R}$关系图没有长度为二的回路(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$，整除关系和空关系是反对称关系；
- $\Leftrightarrow$和$\Rightarrow$不是反对称关系；
- 

✓; 

✗.

传递关系

Definition (传递关系, Transitive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是传递关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y, z \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, z\rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle x, z\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathcal{R}$关系图如果有条长度为2的有向路径，这从始点到终点一定有条有向边(if A是有限集合).

Example

传递关系

Definition (传递关系, Transitive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是传递关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y, z \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, z\rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle x, z\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathcal{R}$关系图如果有条长度为2的有向路径，这从始点到终点一定有条有向边(if A是有限集合).

Example

传递关系

Definition (传递关系, Transitive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是传递关系，当且仅当，下述条件之一成立:

1. $\forall x, y, z \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, z\rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle x, z\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathcal{R}$关系图如果有条长度为2的有向路径，这从始点到终点一定有条有向边(if A是有限集合).

Example

- $I_A, <, >, \leq, \geq, \subset$，整除关系，空关系是传递关系；

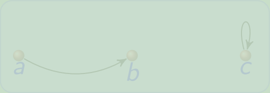
传递关系

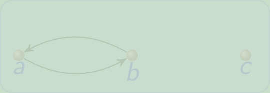
Definition (传递关系, Transitive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是传递关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y, z \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, z\rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle x, z\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathcal{R}$关系图如果有条长度为2的有向路径，这从始点到终点一定有条有向边(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\Leftrightarrow$, 整除关系，空关系是传递关系；
- 

✓; 

✗.

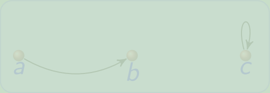
传递关系

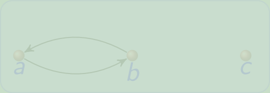
Definition (传递关系, Transitive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是传递关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y, z \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, z\rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle x, z\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathcal{R}$关系图如果有条长度为2的有向路径，这从始点到终点一定有条有向边(if A是有限集合).

Example

- $\mathbb{1}_A$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\Leftrightarrow$, 整除关系，空关系是传递关系；
- 

✓;


✗.

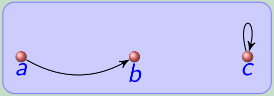
传递关系

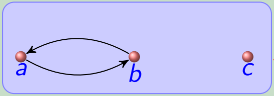
Definition (传递关系, Transitive)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是传递关系，当且仅当，下述条件之一成立：

1. $\forall x, y, z \in A$, if $\langle x, y\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, z\rangle \in \mathcal{R}$, then $\langle x, z\rangle \in \mathcal{R}$;
2. $\mathcal{R}$关系图如果有条长度为2的有向路径，这从始点到终点一定有条有向边(if A是有限集合).

Example

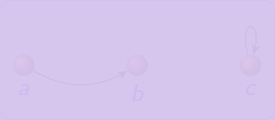
- $\mathbb{1}_A$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\Leftrightarrow$，整除关系，空关系是传递关系；
- 

✓; 

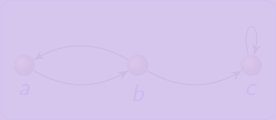
✗.

Remark

- 集合A上的关系一般用上述五个特征来刻画；
- 数学中常用的关系一般都满足上述五个特征中的几个；
- 关系图能够最直接地反映关系的属性；
- 上述五个特性都是用蕴涵式来定义的，所以前提是假时，关系特征均为真；因此对称与反对称，自反与反自反不矛盾，如空关系满足除了自反以外的所有特性；
- 既不是自反也不是反自反：图(a)；但是不存在非平凡的关系既是自反同时也是反自反关系；
- $\mathbb{1}_A$既是对称也是反对称关系；
- 既不是对称也不是反对称：图(b).



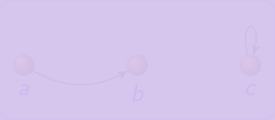
(a) 既不自反也不反自反



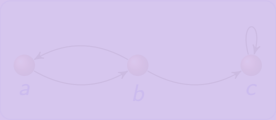
(b) 既不对称也不是反对称

Remark

- 集合A上的关系一般用上述五个特征来刻画;
- 数学中常用的关系一般都满足上述五个特征中的几个;
- 关系图能够最直接地反映关系的属性;
- 上述五个特性都是用蕴涵式来定义的，所以前提是假时，关系特征均为真；因此对称与反对称，自反与反自反不矛盾，如空关系满足除了自反以外的所有特性;
- 既不是自反也不是反自反: 图(a); 但是不存在非平凡的关系既是自反同时也是反自反关系;
- $\mathbb{1}_A$既是对称也是反对称关系;
- 既不是对称也不是反对称: 图(b).



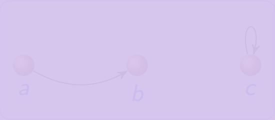
(a) 既不自反也不反自反



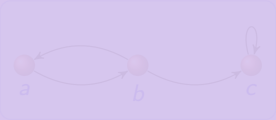
(b) 既不对称也不是反对称

Remark

- 集合A上的关系一般用上述五个特征来刻画;
- 数学中常用的关系一般都满足上述五个特征中的几个;
- 关系图能够最直接地反映关系的属性;
- 上述五个特性都是用蕴涵式来定义的，所以前提是假时，关系特征均为真；因此对称与反对称，自反与反自反不矛盾，如空关系满足除了自反以外的所有特性；
- 既不是自反也不是反自反: 图(a); 但是不存在非平凡的关系既是自反同时也是反自反关系；
- $\mathbb{1}_A$既是对称也是反对称关系；
- 既不是对称也不是反对称：图(b).



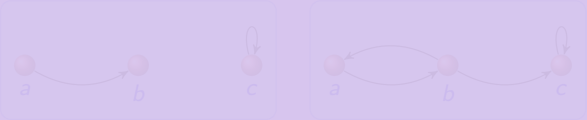
(a) 既不自反也不反自反



(b) 既不对称也不是反对称

Remark

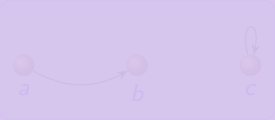
- 集合A上的关系一般用上述五个特征来刻画;
- 数学中常用的关系一般都满足上述五个特征中的几个;
- 关系图能够最直接地反映关系的属性;
- 上述五个特性都是用蕴涵式来定义的，所以前提是假时，关系特征均为真；因此对称与反对称，自反与反自反不矛盾，如空关系满足除了自反以外的所有特性；
- 既不是自反也不是反自反: 图(a); 但是不存在非平凡的关系既是自反同时也是反自反关系；
- $\mathbb{1}_A$既是对称也是反对称关系；
- 既不是对称也不是反对称：图(b).



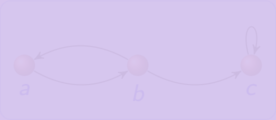
(a) 既不自反也不反自反 (b) 既不对称也不是反对称

Remark

- 集合A上的关系一般用上述五个特征来刻画;
- 数学中常用的关系一般都满足上述五个特征中的几个;
- 关系图能够最直接地反映关系的属性;
- 上述五个特性都是用蕴涵式来定义的，所以前提是假时，关系特征均为真；因此对称与反对称，自反与反自反不矛盾，如空关系满足除了自反以外的所有特性;
- 既不是自反也不是反自反：图(a)；但是不存在非平凡的关系既是自反同时也是反自反关系；
- $\mathbb{1}_A$既是对称也是反对称关系；
- 既不是对称也不是反对称：图(b).



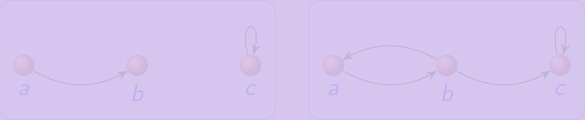
(a) 既不自反也不反自反



(b) 既不对称也不是反对称

Remark

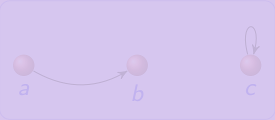
- 集合A上的关系一般用上述五个特征来刻画;
- 数学中常用的关系一般都满足上述五个特征中的几个;
- 关系图能够最直接地反映关系的属性;
- 上述五个特性都是用蕴涵式来定义的，所以前提是假时，关系特征均为真；因此对称与反对称，自反与反自反不矛盾，如空关系满足除了自反以外的所有特性;
- 既不是自反也不是反自反: 图(a); 但是不存在非平凡的关系既是自反同时也是反自反关系；
- $\mathbb{1}_A$既是对称也是反对称关系；
- 既不是对称也不是反对称：图(b).



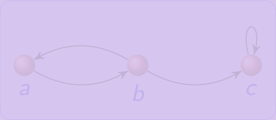
(a) 既不自反也不反自反　(b) 既不对称也不是反对称

Remark

- 集合A上的关系一般用上述五个特征来刻画;
- 数学中常用的关系一般都满足上述五个特征中的几个;
- 关系图能够最直接地反映关系的属性;
- 上述五个特性都是用蕴涵式来定义的，所以前提是假时，关系特征均为真；因此对称与反对称，自反与反自反不矛盾，如空关系满足除了自反以外的所有特性;
- 既不是自反也不是反自反: 图(a); 但是不存在非平凡的关系既是自反同时也是反自反关系；
- $\mathbb{1}_A$既是对称也是反对称关系；
- 既不是对称也不是反对称：图(b).



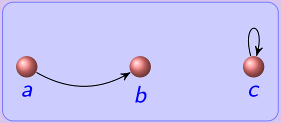
(a) 既不自反也不反自反



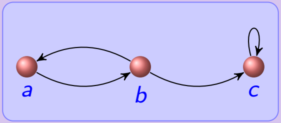
(b) 既不对称也不是反对称

Remark

- 集合A上的关系一般用上述五个特征来刻画;
- 数学中常用的关系一般都满足上述五个特征中的几个;
- 关系图能够最直接地反映关系的属性;
- 上述五个特性都是用蕴涵式来定义的，所以前提是假时，关系特征均为真；因此对称与反对称，自反与反自反不矛盾，如空关系满足除了自反以外的所有特性;
- 既不是自反也不是反自反：图(a)；但是不存在非平凡的关系既是自反同时也是反自反关系;
- $\mathbb{1}_A$既是对称也是反对称关系;
- 既不是对称也不是反对称：图(b).



(a) 既不自反也不反自反



(b) 既不对称也不是反对称

Example

Example (命题公式集合$\mathcal{P}$上的逻辑恒等关系$\Leftrightarrow$)

- $F \Leftrightarrow G$的含义是F和G具有相同的真值表；
- $\Leftrightarrow$具有三性：自反，对称和传递；
- 这样可以按照具有相同真值表的属性将集合$\mathcal{P}$进行分类，
- 每类实际上是$\mathcal{P}$的子集合；
- 每类中的每个公式的真值表相同，即类中的任何两个公式都有关系$\Leftrightarrow$
- 不同的类之间是两两不相交；或者说如果相交就是同一个类；
- $\mathcal{P}$中的每个元素一定在某个类中；
- 分类将集合中的元素等同起来；即在关系$\Leftrightarrow$下每类中所有元素的性态是一致的，应此可以用类中的任意一元素代表类的所有成员；从而实现了对集合的抽象.

Example

Example (命题公式集合$\mathcal{P}$上的逻辑恒等关系$\Leftrightarrow$)

- $F \Leftrightarrow G$的含义是F和G具有相同的真值表；
- $\Leftrightarrow$具有三性：自反，对称和传递；
- 这样可以按照具有相同真值表的属性将集合$\mathcal{P}$进行分类，
- 每类实际上是$\mathcal{P}$的子集合；
- 每类中的每个公式的真值表相同，即类中的任何两个公式都有关系$\Leftrightarrow$
- 不同的类之间是两两不相交；或者说如果相交就是同一个类；
- $\mathcal{P}$中的每个元素一定在某个类中；
- 分类将集合中的元素等同起来；即在关系$\Leftrightarrow$下每类中所有元素的性态是一致的，应此可以用类中的任意一元素代表类的所有成员；从而实现了对集合的抽象.

Example

Example (命题公式集合$\mathcal{P}$上的逻辑恒等关系$\Leftrightarrow$)

- $F \Leftrightarrow G$的含义是F和G具有相同的真值表；
- $\Leftrightarrow$具有三性：自反，对称和传递；
- 这样可以按照具有相同真值表的属性将集合$\mathcal{P}$进行分类，
- 每类实际上是$\mathcal{P}$的子集合；
- 每类中的每个公式的真值表相同，即类中的任何两个公式都有关系$\Leftrightarrow$
- 不同的类之间是两两不相交；或者说如果相交就是同一个类；
- $\mathcal{P}$中的每个元素一定在某个类中；
- 分类将集合中的元素等同起来；即在关系$\Leftrightarrow$下每类中所有元素的性态是一致的，应此可以用类中的任意一元素代表类的所有成员；从而实现了对集合的抽象.

Example

Example (命题公式集合$\mathcal{P}$上的逻辑恒等关系$\Leftrightarrow$)

- $F \Leftrightarrow G$的含义是F和G具有相同的真值表；
- $\Leftrightarrow$具有三性：自反，对称和传递；
- 这样可以按照具有相同真值表的属性将集合$\mathcal{P}$进行分类，
- 每类实际上是$\mathcal{P}$的子集合；
- 每类中的每个公式的真值表相同，即类中的任何两个公式都有关系$\Leftrightarrow$
- 不同的类之间是两两不相交；或者说如果相交就是同一个类；
- $\mathcal{P}$中的每个元素一定在某个类中；
- 分类将集合中的元素等同起来；即在关系$\Leftrightarrow$下每类中所有元素的性态是一致的，应此可以用类中的任意一元素代表类的所有成员；从而实现了对集合的抽象.

Example

Example (命题公式集合$\mathcal{P}$上的逻辑恒等关系$\Leftrightarrow$)

- $F \Leftrightarrow G$的含义是F和G具有相同的真值表;
- $\Leftrightarrow$具有三性：自反，对称和传递;
- 这样可以按照具有相同真值表的属性将集合$\mathcal{P}$进行分类，
- 每类实际上是$\mathcal{P}$的子集合;
- 每类中的每个公式的真值表相同，即类中的任何两个公式都有关系$\Leftrightarrow$
- 不同的类之间是两两不相交；或者说如果相交就是同一个类;
- $\mathcal{P}$中的每个元素一定在某个类中;
- 分类将集合中的元素等同起来；即在关系$\Leftrightarrow$下每类中所有元素的性态是一致的，应此可以用类中的任意一元素代表类的所有成员；从而实现了对集合的抽象.

Example

Example (命题公式集合$\mathcal{P}$上的逻辑恒等关系$\Leftrightarrow$)

- $F \Leftrightarrow G$的含义是F和G具有相同的真值表；
- $\Leftrightarrow$具有三性：自反，对称和传递；
- 这样可以按照具有相同真值表的属性将集合$\mathcal{P}$进行分类，
- 每类实际上是$\mathcal{P}$的子集合；
- 每类中的每个公式的真值表相同，即类中的任何两个公式都有关系$\Leftrightarrow$
- 不同的类之间是两两不相交；或者说如果相交就是同一个类；
- $\mathcal{P}$中的每个元素一定在某个类中；
- 分类将集合中的元素等同起来；即在关系$\Leftrightarrow$下每类中所有元素的性态是一致的，应此可以用类中的任意一元素代表类的所有成员；从而实现了对集合的抽象.

Example

Example (命题公式集合$\mathcal{P}$上的逻辑恒等关系$\Leftrightarrow$)

- $F \Leftrightarrow G$的含义是F和G具有相同的真值表；
- $\Leftrightarrow$具有三性：自反，对称和传递；
- 这样可以按照具有相同真值表的属性将集合$\mathcal{P}$进行分类，
- 每类实际上是$\mathcal{P}$的子集合；
- 每类中的每个公式的真值表相同，即类中的任何两个公式都有关系$\Leftrightarrow$
- 不同的类之间是两两不相交；或者说如果相交就是同一个类；
- $\mathcal{P}$中的每个元素一定在某个类中；
- 分类将集合中的元素等同起来；即在关系$\Leftrightarrow$下每类中所有元素的性态是一致的，应此可以用类中的任意一元素代表类的所有成员；从而实现了对集合的抽象.

Example

Example (命题公式集合$\mathcal{P}$上的逻辑恒等关系$\Leftrightarrow$)

- $F \Leftrightarrow G$的含义是F和G具有相同的真值表;
- $\Leftrightarrow$具有三性：自反，对称和传递;
- 这样可以按照具有相同真值表的属性将集合$\mathcal{P}$进行分类，
- 每类实际上是$\mathcal{P}$的子集合;
- 每类中的每个公式的真值表相同，即类中的任何两个公式都有关系$\Leftrightarrow$
- 不同的类之间是两两不相交;或者说如果相交就是同一个类;
- $\mathcal{P}$中的每个元素一定在某个类中;
- 分类将集合中的元素等同起来;即在关系$\Leftrightarrow$下每类中所有元素的性态是一致的，应此可以用类中的任意一元素代表类的所有成员;从而实现了对集合的抽象.

Example

Example (命题公式集合$\mathcal{P}$上的逻辑恒等关系$\Leftrightarrow$)

- $F \Leftrightarrow G$的含义是F和G具有相同的真值表；
- $\Leftrightarrow$具有三性：自反，对称和传递；
- 这样可以按照具有相同真值表的属性将集合$\mathcal{P}$进行分类，
- 每类实际上是$\mathcal{P}$的子集合；
- 每类中的每个公式的真值表相同，即类中的任何两个公式都有关系$\Leftrightarrow$
- 不同的类之间是两两不相交；或者说如果相交就是同一个类；
- $\mathcal{P}$中的每个元素一定在某个类中；
- 分类将集合中的元素等同起来；即在关系$\Leftrightarrow$下每类中所有元素的性态是一致的，应此可以用类中的任意一元素代表类的所有成员；从而实现了对集合的抽象.

等价关系

Definition (等价关系，Equivalence)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是等价关系，当且仅当，$\mathcal{R}$同时满足下三条件:

- $\mathcal{R}$是自反的;
- $\mathcal{R}$是对称的;
- $\mathcal{R}$是传递的.

Example

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathcal{R}$的关系图如下:

等价关系

Definition (等价关系，Equivalence)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是等价关系，当且仅当，$\mathcal{R}$同时满足下三条件:

- $\mathcal{R}$是自反的;
- $\mathcal{R}$是对称的;
- $\mathcal{R}$是传递的.

Example

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathcal{R}$的关系图如下:

等价关系

Definition (等价关系, Equivalence)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是等价关系, 当且仅当, $\mathcal{R}$同时满足下三条件:

- $\mathcal{R}$是自反的;
- $\mathcal{R}$是对称的;
- $\mathcal{R}$是传递的.

Example

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathcal{R}$的关系图如下:

等价关系

Definition (等价关系, Equivalence)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是等价关系，当且仅当，$\mathcal{R}$同时满足下三条件:

- $\mathcal{R}$是自反的;
- $\mathcal{R}$是对称的;
- $\mathcal{R}$是传递的.

Example

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathcal{R}$的关系图如下:

等价关系

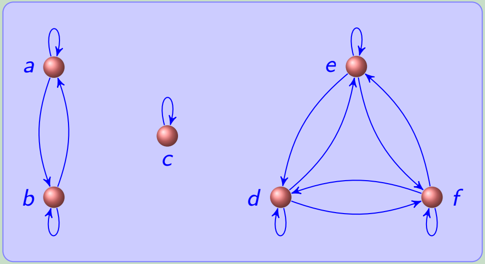
Definition (等价关系, Equivalence)

设$\mathcal{R} \subseteq A^2$, $\mathcal{R}$是等价关系，当且仅当，$\mathcal{R}$同时满足下三条件:

- $\mathcal{R}$是自反的;
- $\mathcal{R}$是对称的;
- $\mathcal{R}$是传递的.

Example

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathcal{R}$的关系图如下:



常用的恒等关系

Example

- 全域关系 A^2;
- 恒等关系 $\mathbb{1}_A$
- 逻辑恒等关系 $\Leftrightarrow$;
- 集合相等关系 .

常用的恒等关系

Example

- 全域关系 A^2;
- 恒等关系 $\mathbb{1}_A$
- 逻辑恒等关系 $\Leftrightarrow$;
- 集合相等关系.

常用的恒等关系

Example

- 全域关系A^2;
- 恒等关系$\mathbb{1}_A$
- 逻辑恒等关系$\Leftrightarrow$;
- 集合相等关系.

常用的恒等关系

Example

- 全域关系 A^2;
- 恒等关系 $\mathbb{1}_A$
- 逻辑恒等关系 $\Leftrightarrow$;
- 集合相等关系.

常用的恒等关系

Example

- 全域关系A^2;
- 恒等关系$\mathbb{1}_A$
- 逻辑恒等关系$\Leftrightarrow$;
- 集合相等关系.

同余关系(1/2)

Example (同余关系, Congruence Relation)

设$\mathbb{Z}$是整数集合, $k \in \mathbb{N}$, k同余关系$=_k$定义如下:

$$m =_k n, \text{ iff, } \exists i \in \mathbb{Z} \land m - n = ki$$

也记为: $m \equiv n (\text{mod } k)$, 该关系也称模$k$关系(modulo k).

Proof.

1. $\forall m \in \mathbb{Z},\ m - m = 0 \cdot k,\ \therefore m =_k m;$
2. $if\ m =_k n,\ \ m - n = ki,\ \therefore n - m = (-i)k,\ n =_k m;$
3. $if\ m =_k n,\ n =_k p,\ \ \therefore m - n = ki \land n - p = kj,\ \ \therefore m - p = k(i + j),\ \ \therefore m =_k p.$ $\square$

同余关系(1/2)

Example (同余关系, Congruence Relation)

设$\mathbb{Z}$是整数集合，$k \in \mathbb{N}$，k同余关系$=_k$定义如下：

$$m =_k n, \text{ iff, } \exists i \in \mathbb{Z} \wedge m - n = ki$$

也记为：$m \equiv n(\text{mod } k)$，该关系也称模$k$关系(modulo k).

Proof.

1. $\forall m \in \mathbb{Z},\ m - m = 0 \cdot k,\ \therefore m =_k m$;
2. if $m =_k n,\ \ m - n = ki,\ \therefore n - m = (-i)k,\ n =_k m$;
3. if $m =_k n,\ n =_k p,\ \ \therefore m - n = ki \wedge n - p = kj,\ \ \therefore m - p = k(i + j),\ \ \therefore m =_k p$. □

同余关系(1/2)

Example (同余关系, Congruence Relation)

设$\mathbb{Z}$是整数集合, $k \in \mathbb{N}$, k同余关系$=_k$定义如下:

$$m =_k n, \text{ iff, } \exists i \in \mathbb{Z} \wedge m - n = ki$$

也记为: $m \equiv n(\bmod k)$, 该关系也称模k关系(modulo k).

Proof.

1. $\forall m \in \mathbb{Z},\ m - m = 0 \cdot k,\ \therefore m =_k m$;
2. $if\ \ m =_k n,\ \ m - n = ki,\ \therefore n - m = (-i)k,\ n =_k m$;
3. $if\ \ m =_k n,\ n =_k p,\ \ \therefore m - n = ki \wedge n - p = kj,\ \ \therefore m - p = k(i + j),\ \ \therefore m =_k p$. □

同余关系(1/2)

Example (同余关系, Congruence Relation)

设$\mathbb{Z}$是整数集合, $k \in \mathbb{N}$, k同余关系$=_k$定义如下:

$$m =_k n, \text{ iff, } \exists i \in \mathbb{Z} \wedge m - n = ki$$

也记为: $m \equiv n (\text{mod } k)$, 该关系也称模$k$关系(modulo k).

Proof.

1. $\forall m \in \mathbb{Z},\ m - m = 0 \cdot k,\ \therefore m =_k m$;
2. $if\ m =_k n,\ \ m - n = ki,\ \therefore n - m = (-i)k,\ n =_k m$;
3. $if\ m =_k n,\ n =_k p,\ \therefore m - n = ki \wedge n - p = kj,\ \therefore m - p = k(i + j),\ \therefore m =_k p$. $\square$

同余关系(2/2)

Example ($=_4$)

- 同0有$=_4$的所有集合是:
$$\{\ldots,-12,-8,-4,0,4,8,12,\ldots\}$$
- 同1有$=_4$的所有集合是:
$$\{\ldots,-11,-7,-3,1,5,9,13,\ldots\}$$
- 同2有$=_4$的所有集合是:
$$\{\ldots,-10,-6,-2,2,6,10,14,\ldots\}$$
- 同3有$=_4$的所有集合是:
$$\{\ldots,-9,-5,-1,3,7,11,15,\ldots\}$$
- 同4有$=_4$的所有集合是: (与①相同
$$\{\ldots,-8,-4,0,4,8,12,16\ldots\}$$
- ......(分成4个类)

同余关系(2/2)

Example ($=_4$)

- 同0有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$$
- 同1有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}$$
- 同2有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}$$
- 同3有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$$
- 同4有$=_4$的所有集合是: (与①相同
  $$\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16 \ldots\}$$
- ......(分成4个类)

同余关系(2/2)

Example ($=_4$)

- 同0有$=_4$的所有集合是:
$$\{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$$
- 同1有$=_4$的所有集合是:
$$\{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\}$$
- 同2有$=_4$的所有集合是:
$$\{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\}$$
- 同3有$=_4$的所有集合是:
$$\{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\}$$
- 同4有$=_4$的所有集合是: (与①相同
$$\{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16 \dots\}$$
- ......(分成4个类)

同余关系(2/2)

Example ($=_4$)

- 同0有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$$
- 同1有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}$$
- 同2有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}$$
- 同3有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$$
- 同4有$=_4$的所有集合是: (与①相同
  $$\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16 \ldots\}$$
- ......(分成4个类)

同余关系(2/2)

Example ($=_4$)

- 同0有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$$
- 同1有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}$$
- 同2有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}$$
- 同3有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$$
- 同4有$=_4$的所有集合是: (与①相同
  $$\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16 \ldots\}$$
- ......(分成4个类)

同余关系(2/2)

Example ($=_4$)

- 同0有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$$
- 同1有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}$$
- 同2有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}$$
- 同3有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$$
- 同4有$=_4$的所有集合是: (与①相同
  $$\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16 \ldots\}$$
- ......(分成4个类)

同余关系(2/2)

Example ($=_4$)

- 同0有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots,-12,-8,-4,0,4,8,12,\ldots\}$$
- 同1有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots,-11,-7,-3,1,5,9,13,\ldots\}$$
- 同2有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots,-10,-6,-2,2,6,10,14,\ldots\}$$
- 同3有$=_4$的所有集合是:
  $$\{\ldots,-9,-5,-1,3,7,11,15,\ldots\}$$
- 同4有$=_4$的所有集合是: (与①相同
  $$\{\ldots,-8,-4,0,4,8,12,16\ldots\}$$
- ......(分成4个类)

等比关系

Example (等比关系)

设$\mathbb{Z}$是整数集合，$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$上的等比关系$\mathcal{Q}$定义如下：

$$\langle a, b\rangle \mathcal{Q} \langle c, d\rangle, \text{ iff, } ad = bc$$

则，$\mathcal{Q}$是等价关系.

Example ($\mathcal{Q}$)

等比关系

Example (等比关系)

设$\mathbb{Z}$是整数集合, $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$上的等比关系$\mathcal{Q}$定义如下:

$$\langle a, b\rangle \mathcal{Q} \langle c, d\rangle, \text{ iff, } ad = bc$$

则, $\mathcal{Q}$是等价关系.

Example ($\mathcal{Q}$)

- 同$\langle 0, 1\rangle$有$\mathcal{Q}$的所有集合是:
$$\{\ldots, \langle 0, -2\rangle, \langle 0, -1\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \ldots\}$$
- 同$\langle 1, 2\rangle$有$\mathcal{Q}$的所有集合是:
$$\{\ldots, \langle -3, -6\rangle, \langle -2, -4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \ldots\}$$
- 同$\langle -1, 2\rangle$有$\mathcal{Q}$的所有集合是:
$$\{\ldots, \langle -3, 6\rangle, \langle -2, 4\rangle, \langle -1, 2\rangle, \langle 1, -2\rangle, \langle 2, -4\rangle, \ldots\}$$

等比关系

Example (等比关系)

设$\mathbb{Z}$是整数集合, $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$上的等比关系$Q$定义如下:

$$\langle a, b\rangle Q \langle c, d\rangle, \text{ iff}, \ ad = bc$$

则, Q是等价关系.

Example (Q)

- 同$\langle 0, 1\rangle$有Q的所有集合是:
$$\{\ldots, \langle 0, -2\rangle, \langle 0, -1\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \ldots\}$$
- 同$\langle 1, 2\rangle$有Q的所有集合是:
$$\{\ldots, \langle -3, -6\rangle, \langle -2, -4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \ldots\}$$
- 同$\langle -1, 2\rangle$有Q的所有集合是:
$$\{\ldots, \langle -3, 6\rangle, \langle -2, 4\rangle, \langle -1, 2\rangle, \langle 1, -2\rangle, \langle 2, -4\rangle, \ldots\}$$

等比关系

Example (等比关系)

设$\mathbb{Z}$是整数集合, $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$上的等比关系$Q$定义如下:

$$\langle a, b\rangle Q \langle c, d\rangle, \text{ iff, } ad = bc$$

则, Q是等价关系.

Example (Q)

- 同$\langle 0, 1\rangle$有Q的所有集合是:
  $$\{\ldots, \langle 0, -2\rangle, \langle 0, -1\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \ldots\}$$
- 同$\langle 1, 2\rangle$有Q的所有集合是:
  $$\{\ldots, \langle -3, -6\rangle, \langle -2, -4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \ldots\}$$
- 同$\langle -1, 2\rangle$有Q的所有集合是:
  $$\{\ldots, \langle -3, 6\rangle, \langle -2, 4\rangle, \langle -1, 2\rangle, \langle 1, -2\rangle, \langle 2, -4\rangle, \ldots\}$$

等比关系

Example (等比关系)

设$\mathbb{Z}$是整数集合, $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$上的等比关系$Q$定义如下:

$$\langle a, b\rangle Q \langle c, d\rangle, \text{ iff, } ad = bc$$

则, Q是等价关系.

Example (Q)

- 同$\langle 0, 1\rangle$有Q的所有集合是:
$$\{\ldots, \langle 0, -2\rangle, \langle 0, -1\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \ldots\}$$
- 同$\langle 1, 2\rangle$有Q的所有集合是:
$$\{\ldots, \langle -3, -6\rangle, \langle -2, -4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \ldots\}$$
- 同$\langle -1, 2\rangle$有Q的所有集合是:
$$\{\ldots, \langle -3, 6\rangle, \langle -2, 4\rangle, \langle -1, 2\rangle, \langle 1, -2\rangle, \langle 2, -4\rangle, \ldots\}$$

极限相等关系

Example (极限相等关系)

设$\mathbf{R} = \{\langle x_n \rangle \mid \langle x_n \rangle$是有理数收敛序列$\}$, $\mathbf{R}$上的极限相等关系$\mathcal{L}$定义如下：

$$\langle x_n \rangle \mathcal{L} \langle y_n \rangle, \text{ iff, } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

则，$\mathcal{L}$是等价关系.

Example ($\mathcal{L}$)

- 序列：$a = 1, 1, 1, \ldots$和序列$b = 0.9, 0.99, 0.999, \ldots$有关系$\mathcal{L}$

极限相等关系

Example (极限相等关系)

设$\mathbf{R} = \{\langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle$是有理数收敛序列$\}$, $\mathbf{R}$上的极限相等关系$\mathcal{L}$定义如下：

$$\langle x_n\rangle \mathcal{L} \langle y_n\rangle, \text{ iff, } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

则，$\mathcal{L}$是等价关系.

Example ($\mathcal{L}$)

- 序列：$a = 1, 1, 1, \ldots$和序列$b = 0.9, 0.99, 0.999, \ldots$有关系$\mathcal{L}$
- 设$\mathbf{1} = \{\langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle \mathcal{L} a\}$, 该集合就是实数1.

极限相等关系

Example (极限相等关系)

设$\mathbf{R} = \{\langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle$是有理数收敛序列$\}$, $\mathbf{R}$上的极限相等关系$\mathcal{L}$定义如下:

$$\langle x_n\rangle \mathcal{L} \langle y_n\rangle, \text{ iff, } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

则, $\mathcal{L}$是等价关系.

Example ($\mathcal{L}$)

- 序列: $a = 1, 1, 1, \ldots$和序列$b = 0.9, 0.99, 0.999, \ldots$有关系$\mathcal{L}$
- 设$1 = \{\langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle \mathcal{L} a\}$, 该集合就是实数1.

极限相等关系

Example (极限相等关系)

设$\mathbf{R} = \{\langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle$是有理数收敛序列$\}$, $\mathbf{R}$上的极限相等关系$\mathcal{L}$定义如下：

$$\langle x_n\rangle\mathcal{L}\langle y_n\rangle, \text{ iff, } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

则，$\mathcal{L}$是等价关系.

Example ($\mathcal{L}$)

- 序列：$a = 1, 1, 1, \ldots$和序列$b = 0.9, 0.99, 0.999, \ldots$有关系$\mathcal{L}$
- 设$\mathbf{1} = \{\langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle\mathcal{L}a\}$, 该集合就是实数1.

等价类

Definition (等价类, Equivalent class)

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，$a \in A$, a的等价类$[a]_{\mathcal{R}}$定义如下：

$$[a]_{\mathcal{R}} \triangleq \{\, x \mid x \in A \wedge x\,\mathcal{R}\,a \,\}$$

a称为等价类$[a]_{\mathcal{R}}$的代表元.

等价类

Definition (等价类, Equivalent class)

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，$a \in A$，a的等价类$[a]_{\mathcal{R}}$定义如下：

$$[a]_{\mathcal{R}} \triangleq \{ x \mid x \in A \wedge x \mathcal{R} a \}$$

a称为等价类$[a]_{\mathcal{R}}$的代表元.

Example

- $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} = \{ a, b \}$, $[c]_{\mathcal{R}} = \{ c \}$, $[d]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} = [f]_{\mathcal{R}} = \{ d, e, f \}$;
- $[0]_{=_4} = [4]_{=_4} = \{ \ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots \}$;
- $[\langle 1, 2 \rangle]_{\mathcal{Q}} = [\langle 2, 4 \rangle]_{\mathcal{Q}} = \{ \ldots, \langle -3, -6 \rangle, \langle -2, -4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \ldots \}$;
- $[\langle 1 \rangle]_{\mathcal{L}} = \{ \langle x_n \rangle \mid \langle x_n \rangle \mathcal{R} 1 \}$.

等价类

Definition (等价类, Equivalent class)

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，$a \in A$, a的等价类$[a]_{\mathcal{R}}$定义如下:

$$[a]_{\mathcal{R}} \triangleq \{ x \mid x \in A \wedge x \mathcal{R} a \}$$

a称为等价类$[a]_{\mathcal{R}}$的代表元.

Example

- $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} = \{ a, b \}$, $[c]_{\mathcal{R}} = \{ c \}$, $[d]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} = [f]_{\mathcal{R}} = \{ d, e, f \}$;
- $[0]_{=_4} = [4]_{=_4} = \{ \ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots \}$;
- $[\langle 1,2 \rangle]_{\mathcal{Q}} = [\langle 2,4 \rangle]_{\mathcal{Q}} = \{ \ldots, \langle -3,-6 \rangle, \langle -2,-4 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,6 \rangle, \ldots \}$;
- $[\langle 1 \rangle]_{\mathcal{L}} = \{ \langle x_n \rangle \mid \langle x_n \rangle \mathcal{R} 1 \}$.

等价类

Definition (等价类, Equivalent class)

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，$a \in A$, a的等价类$[a]_\mathcal{R}$定义如下：

$$[a]_\mathcal{R} \triangleq \{\, x \mid x \in A \wedge x \,\mathcal{R}\, a \,\}$$

a称为等价类$[a]_\mathcal{R}$的代表元.

Example

- $[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R} = \{\, a, b \,\}$, $[c]_\mathcal{R} = \{\, c \,\}$, $[d]_\mathcal{R} = [e]_\mathcal{R} = [f]_\mathcal{R} = \{\, d, e, f \,\}$;
- $[0]_{=_4} = [4]_{=_4} = \{\, \ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots \,\}$;
- $[\langle 1,2\rangle]_\mathcal{Q} = [\langle 2,4\rangle]_\mathcal{Q} = \{\, \ldots, \langle -3,-6\rangle, \langle -2,-4\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,6\rangle, \ldots \,\}$;
- $[\langle 1\rangle]_\mathcal{L} = \{\, \langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle \mathcal{R} 1 \,\}$.

等价类

Definition (等价类, Equivalent class)

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，$a \in A$，a的等价类$[a]_{\mathcal{R}}$定义如下：

$$[a]_{\mathcal{R}} \triangleq \{ x \mid x \in A \land x \mathcal{R} a \}$$

a称为等价类$[a]_{\mathcal{R}}$的代表元.

Example

- $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} = \{ a, b \}$, $[c]_{\mathcal{R}} = \{ c \}$, $[d]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} = [f]_{\mathcal{R}} = \{ d, e, f \}$;
- $[0]_{=_4} = [4]_{=_4} = \{ \ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots \}$;
- $[\langle 1, 2 \rangle]_{\mathcal{Q}} = [\langle 2, 4 \rangle]_{\mathcal{Q}} = \{ \ldots, \langle -3, -6 \rangle, \langle -2, -4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \ldots \}$;
- $[\langle 1 \rangle]_{\mathcal{L}} = \{ \langle x_n \rangle \mid \langle x_n \rangle \mathcal{R} 1 \}$.

等价类

Definition (等价类, Equivalent class)

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，$a \in A$，a的等价类$[a]_{\mathcal{R}}$定义如下：

$$[a]_{\mathcal{R}} \triangleq \{ x \mid x \in A \wedge x \mathcal{R} a \}$$

a称为等价类$[a]_{\mathcal{R}}$的代表元.

Example

- $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} = \{ a, b \}$, $[c]_{\mathcal{R}} = \{ c \}$, $[d]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} = [f]_{\mathcal{R}} = \{ d, e, f \}$;
- $[0]_{=_4} = [4]_{=_4} = \{ \ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots \}$;
- $[\langle 1, 2\rangle]_{\mathcal{Q}} = [\langle 2, 4\rangle]_{\mathcal{Q}} = \{ \ldots, \langle -3, -6\rangle, \langle -2, -4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \ldots \}$;
- $[\langle 1\rangle]_{\mathcal{L}} = \{ \langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle \mathcal{R} 1 \}$.

等价与等价类的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，则下述三条件等价

① $a\,\mathcal{R}\,b$;　② $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$;　③ $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$.

Proof.

① $\Longrightarrow$ ②: $a\,\mathcal{R}\,b$, 要证明集合相等:

② $\Longrightarrow$ ③: trivial;

③ $\Longrightarrow$ ①:

等价与等价类的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，则下述三条件等价

① $a \mathcal{R} b$;　② $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$;　③ $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$.

Proof.

① $\Longrightarrow$ ②: $a \mathcal{R} b$，要证明集合相等:

- $\forall x \in [a]_{\mathcal{R}}$，则，$x \mathcal{R} a$, $a \mathcal{R} b$;
- $\therefore x \mathcal{R} b$, So $x \in [b]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\because$ $\mathcal{R}$是对称关系，同理可证明: $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

② $\Longrightarrow$ ③: trivial;

③ $\Longrightarrow$ ①:

- $\because [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$, $\exists c \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\therefore c \mathcal{R} a \wedge c \mathcal{R} b$, So $a \mathcal{R} c \wedge c \mathcal{R} b$;
- $\therefore a \mathcal{R} b$.

$\square$

等价与等价类的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，则下述三条件等价
① $a \mathcal{R} b$; ② $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$; ③ $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.

Proof.

① $\Longrightarrow$ ②: $a \mathcal{R} b$，要证明集合相等:

- $\forall x \in [a]_{\mathcal{R}}$，则，$x \mathcal{R} a$, $a \mathcal{R} b$;
- $\therefore x \mathcal{R} b$, So $x \in [b]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\because$ $\mathcal{R}$是对称关系，同理可证明: $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

② $\Longrightarrow$ ③: trivial;
③ $\Longrightarrow$ ①:

- $\because [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, $\exists c \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\therefore c \mathcal{R} a \wedge c \mathcal{R} b$, So $a \mathcal{R} c \wedge c \mathcal{R} b$;
- $\therefore a \mathcal{R} b$.

□

等价与等价类的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，则下述三条件等价

① $a\,\mathcal{R}\,b$; ② $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$; ③ $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$.

Proof.

① $\Longrightarrow$ ②: $a\,\mathcal{R}\,b$，要证明集合相等：

- $\forall x \in [a]_{\mathcal{R}}$，则，$x\,\mathcal{R}\,a$, $a\,\mathcal{R}\,b$;
- $\therefore x\,\mathcal{R}\,b$, So $x \in [b]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\because$ $\mathcal{R}$是对称关系，同理可证明：$[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

② $\Longrightarrow$ ③: trivial;

③ $\Longrightarrow$ ①:

- $\because [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$, $\exists c \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\therefore c\,\mathcal{R}\,a \wedge c\,\mathcal{R}\,b$, So $a\,\mathcal{R}\,c \wedge c\,\mathcal{R}\,b$;
- $\therefore a\,\mathcal{R}\,b$.

□

等价与等价类的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，则下述三条件等价

① $a\,\mathcal{R}\,b$; ② $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$; ③ $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$.

Proof.

① $\Longrightarrow$ ②: $a\,\mathcal{R}\,b$，要证明集合相等：

- $\forall x \in [a]_{\mathcal{R}}$，则，$x\,\mathcal{R}\,a$, $a\,\mathcal{R}\,b$;
- $\therefore x\,\mathcal{R}\,b$, So $x \in [b]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\because$ $\mathcal{R}$是对称关系，同理可证明：$[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

② $\Longrightarrow$ ③: trivial;

③ $\Longrightarrow$ ①:

- $\because [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$, $\exists c \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\therefore c\,\mathcal{R}\,a \wedge c\,\mathcal{R}\,b$, So $a\,\mathcal{R}\,c \wedge c\,\mathcal{R}\,b$;
- $\therefore a\,\mathcal{R}\,b$.

□

等价与等价类的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，则下述三条件等价

① $a\,\mathcal{R}\,b$; ② $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$; ③ $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$.

Proof.

① $\Longrightarrow$ ②: $a\,\mathcal{R}\,b$，要证明集合相等:

- $\forall x \in [a]_{\mathcal{R}}$，则，$x\,\mathcal{R}\,a$, $a\,\mathcal{R}\,b$;
- $\therefore x\,\mathcal{R}\,b$, So $x \in [b]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\because$ $\mathcal{R}$是对称关系，同理可证明: $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

② $\Longrightarrow$ ③: trivial;
③ $\Longrightarrow$ ①:

- $\because [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$, $\exists c \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\therefore c\,\mathcal{R}\,a \wedge c\,\mathcal{R}\,b$, So $a\,\mathcal{R}\,c \wedge c\,\mathcal{R}\,b$;
- $\therefore a\,\mathcal{R}\,b$.

□

等价与等价类的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，则下述三条件等价

① $a \mathcal{R} b$; ② $[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$; ③ $[a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} \neq \emptyset$.

Proof.

① $\Longrightarrow$ ②: $a \mathcal{R} b$，要证明集合相等：

- $\forall x \in [a]_\mathcal{R}$，则，$x \mathcal{R} a$, $a \mathcal{R} b$;
- $\therefore x \mathcal{R} b$, So $x \in [b]_\mathcal{R}$; $\therefore [a]_\mathcal{R} \subseteq [b]_\mathcal{R}$;
- $\because$ $\mathcal{R}$是对称关系，同理可证明：$[b]_\mathcal{R} \subseteq [a]_\mathcal{R}$; $\therefore [a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$.

② $\Longrightarrow$ ③: trivial;

③ $\Longrightarrow$ ①:

- $\because [a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} \neq \emptyset$, $\exists c \in [a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R}$;
- $\therefore c \mathcal{R} a \wedge c \mathcal{R} b$, So $a \mathcal{R} c \wedge c \mathcal{R} b$;
- $\therefore a \mathcal{R} b$.

□

等价与等价类的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是A上的等价关系，则下述三条件等价

① $a\,\mathcal{R}\,b$; ② $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$; ③ $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$.

Proof.

① $\Longrightarrow$ ②: $a\,\mathcal{R}\,b$，要证明集合相等：

- $\forall x \in [a]_{\mathcal{R}}$，则，$x\,\mathcal{R}\,a$, $a\,\mathcal{R}\,b$;
- $\therefore x\,\mathcal{R}\,b$, So $x \in [b]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\because$ $\mathcal{R}$是对称关系，同理可证明：$[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$; $\therefore [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

② $\Longrightarrow$ ③: trivial;
③ $\Longrightarrow$ ①:

- $\because [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$, $\exists c \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$;
- $\therefore c\,\mathcal{R}\,a \wedge c\,\mathcal{R}\,b$, So $a\,\mathcal{R}\,c \wedge c\,\mathcal{R}\,b$;
- $\therefore a\,\mathcal{R}\,b$.

□

定理的含义

Description

- 等价类要么相等，要么不相交；
- 等价类与代表元无关；
- 同一等价类中的元素两两都有关系；
- 不相交的等价类元素之间没有关系；
- 等价类刻画了分类的本质.

定理的含义

Description

- 等价类要么相等，要么不相交；
- 等价类与代表元无关；
- 同一等价类中的元素两两都有关系；
- 不相交的等价类元素之间没有关系；
- 等价类刻画了分类的本质.

定理的含义

Description

- 等价类要么相等，要么不相交;
- 等价类与代表元无关;
- 同一等价类中的元素两两都有关系;
- 不相交的等价类元素之间没有关系;
- 等价类刻画了分类的本质.

定理的含义

Description

- 等价类要么相等，要么不相交；
- 等价类与代表元无关；
- 同一等价类中的元素两两都有关系；
- 不相交的等价类元素之间没有关系；
- 等价类刻画了分类的本质.

定理的含义

Description

- 等价类要么相等，要么不相交;
- 等价类与代表元无关;
- 同一等价类中的元素两两都有关系;
- 不相交的等价类元素之间没有关系;
- 等价类刻画了分类的本质.

定理的含义

Description

- 等价类要么相等，要么不相交;
- 等价类与代表元无关;
- 同一等价类中的元素两两都有关系;
- 不相交的等价类元素之间没有关系;
- 等价类刻画了分类的本质.

划分

Definition (划分, Partition)

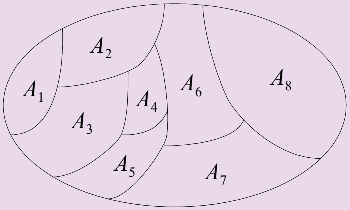
A是一集合，A的一个划分是一集簇：

$$\Pi = \{ A_i \mid i \in I(\text{指标集}), A_i \subseteq A \wedge A_i \neq \varnothing \}$$

该集簇满足下述两条件：

- $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$;
- $\forall i, j \in I$, *if* $i \neq j$, *then* $A_i \cap A_j = \varnothing \vee A_i = A_j$.

Example (图例)



划分

Definition (划分, Partition)

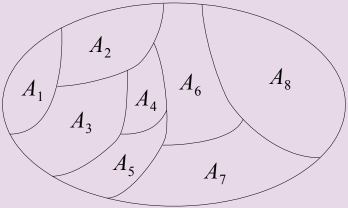
A是一集合，A的一个划分是一集簇：

$$\Pi = \{ A_i \mid i \in I(\text{指标集}), A_i \subseteq A \wedge A_i \neq \emptyset \}$$

该集簇满足下述两条件：

- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$;
- $\forall i, j \in I$, *if* $i \neq j$, *then* $A_i \cap A_j = \emptyset \vee A_i = A_j$.

Example (图例)



划分

Definition (划分, Partition)

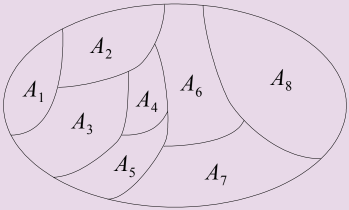
A是一集合，A的一个划分是一集簇：

$$\Pi = \{ A_i \mid i \in I(\text{指标集}), A_i \subseteq A \wedge A_i \neq \emptyset \}$$

该集簇满足下述两条件：

- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$;
- $\forall i, j \in I,\ if\ i \neq j,\ then\ A_i \cap A_j = \emptyset \vee A_i = A_j$.

Example (图例)



划分

Definition (划分, Partition)

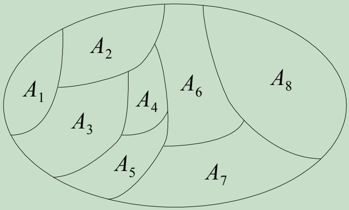
A是一集合，A的一个划分是一集簇：

$$\Pi = \{ A_i \mid i \in I(\text{指标集}), A_i \subseteq A \wedge A_i \neq \varnothing \}$$

该集簇满足下述两条件：

- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$;
- $\forall i, j \in I,\ if\ i \neq j,\ then\ A_i \cap A_j = \varnothing \vee A_i = A_j$.

Example (图例)



等价类与划分的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是集合A上的等价关系，则$\mathcal{R}$的等价类集簇:

$$\Pi_{\mathcal{R}} = \{\, [a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A \,\}$$

is a partition of A, 称之为由等价关系$\mathcal{R}$诱导的划分(induced).

Proof.

- $\forall b \in A, \because b \mathcal{R} b, \therefore b \in [b]_{\mathcal{R}} \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}}$;

  $\therefore A \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}} \subseteq A, \therefore A = \bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}}$;
- 由上定理, if $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, then $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

$\square$

等价类与划分的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是集合A上的等价关系，则$\mathcal{R}$的等价类集簇：

$$\Pi_{\mathcal{R}} = \{\, [a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A \,\}$$

is a partition of A，称之为由等价关系$\mathcal{R}$诱导的划分*(induced)*.

Proof.

- $\forall b \in A$, $\because b \mathcal{R} b$, $\therefore b \in [b]_{\mathcal{R}} \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}}$;

  $\therefore A \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}} \subseteq A$; $\therefore A = \bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}}$;
- 由上定理, if $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$, then $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

$\square$

等价类与划分的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是集合A上的等价关系，则$\mathcal{R}$的等价类集簇：

$$\Pi_{\mathcal{R}} = \{\, [a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A \,\}$$

is a partition of A，称之为由等价关系$\mathcal{R}$诱导的划分(*induced*).

Proof.

- $\forall b \in A,\ \because b\,\mathcal{R}\,b,\ \therefore b \in [b]_{\mathcal{R}} \subseteq \bigcup_{a\in A}[a]_{\mathcal{R}};$

  $\therefore A \subseteq \bigcup_{a\in A}[a]_{\mathcal{R}} \subseteq A;\ \therefore A = \bigcup_{a\in A}[a]_{\mathcal{R}};$
- 由上定理, if $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, then $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

$\square$

等价类与划分的关系

Theorem

设$\mathcal{R}$是集合A上的等价关系，则$\mathcal{R}$的等价类集簇：

$$\Pi_{\mathcal{R}} = \{\, [a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A \,\}$$

is a partition of A，称之为由等价关系$\mathcal{R}$诱导的划分(*induced*).

Proof.

- $\forall b \in A, \because b \mathcal{R} b, \therefore b \in [b]_{\mathcal{R}} \subseteq \bigcup_{a\in A} [a]_{\mathcal{R}};$

  $\therefore A \subseteq \bigcup_{a\in A} [a]_{\mathcal{R}} \subseteq A; \therefore A = \bigcup_{a\in A} [a]_{\mathcal{R}};$
- 由上定理, if $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, then $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

$\square$

Example

Example

- $$[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} = \{ a, b \};$$
  $$[c]_{\mathcal{R}} = \{ c \};$$
  $$[d]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} = [f]_{\mathcal{R}} = \{ d, e, f \};$$
  $\Pi_{\mathcal{R}} = \{ [a]_{\mathcal{R}}, [c]_{\mathcal{R}}, [d]_{\mathcal{R}} \} = \{ \{ a, b \}, \{ c \}, \{ d, e, f \} \};$
- $$\Pi_{=_4} = \{ [i]_{=_4} \mid i \in \mathbb{Z} \} = \{ [0]_{=_4}, [1]_{=_4}, [2]_{=_4}, [3]_{=_4} \};$$
- $$[\langle 1, 2\rangle]_{\mathcal{Q}} = [\langle 2, 4\rangle]_{\mathcal{Q}} =$$
  $\{ \ldots, \langle -3, -6\rangle, \langle -2, -4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \ldots \};$
  $\Pi_{\mathcal{Q}} = \{ [\langle a, b\rangle]_{\mathcal{Q}} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{ 0 \} \} \triangleq \mathbb{Q}$
- $$[\langle 1\rangle]_{\mathcal{L}} = \{ \langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle \mathcal{L} 1 \};$$
  $\Pi_{\mathcal{L}} = \{ [\langle x_n\rangle]_{\mathcal{L}} \mid \langle x_n\rangle \text{是收敛序列} \} \triangleq \mathbb{R}.$

Example

Example

- $$[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} = \{\, a, b \,\};$$ $$[c]_{\mathcal{R}} = \{\, c \,\};$$ $$[d]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} = [f]_{\mathcal{R}} = \{\, d, e, f \,\};$$ $$\Pi_{\mathcal{R}} = \{\, [a]_{\mathcal{R}}, [c]_{\mathcal{R}}, [d]_{\mathcal{R}} \,\} = \{\, \{\, a, b \,\}, \{\, c \,\}, \{\, d, e, f \,\} \,\};$$
- $$\Pi_{=_4} = \{\, [i]_{=_4} \mid i \in \mathbb{Z} \,\} = \{\, [0]_{=_4}, [1]_{=_4}, [2]_{=_4}, [3]_{=_4} \,\};$$
- $$[\langle 1, 2\rangle]_{\mathcal{Q}} = [\langle 2, 4\rangle]_{\mathcal{Q}} = \{\, \ldots, \langle -3, -6\rangle, \langle -2, -4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \ldots \,\};$$ $$\Pi_{\mathcal{Q}} = \{\, [\langle a, b\rangle]_{\mathcal{Q}} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{\, 0 \,\} \,\} \triangleq \mathbb{Q}$$
- $$[\langle 1\rangle]_{\mathcal{L}} = \{\, \langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle \mathcal{L} 1 \,\};$$ $$\Pi_{\mathcal{L}} = \{\, [\langle x_n\rangle]_{\mathcal{L}} \mid \langle x_n\rangle \text{是收敛序列} \,\} \triangleq \mathbb{R}.$$

Example

Example

- $$\begin{aligned} [a]_{\mathcal{R}} &= [b]_{\mathcal{R}} = \{\, a, b \,\}; \\ [c]_{\mathcal{R}} &= \{\, c \,\}; \\ [d]_{\mathcal{R}} &= [e]_{\mathcal{R}} = [f]_{\mathcal{R}} = \{\, d, e, f \,\}; \end{aligned}$$
  $$\Pi_{\mathcal{R}} = \{\, [a]_{\mathcal{R}}, [c]_{\mathcal{R}}, [d]_{\mathcal{R}} \,\} = \{\, \{\, a, b \,\}, \{\, c \,\}, \{\, d, e, f \,\} \,\};$$
- $$\begin{aligned} \Pi_{=_4} &= \{\, [i]_{=_4} \mid i \in \mathbb{Z} \,\} \\ &= \{\, [0]_{=_4}, [1]_{=_4}, [2]_{=_4}, [3]_{=_4} \,\}; \end{aligned}$$
- $$[\langle 1, 2\rangle]_{\mathcal{Q}} = [\langle 2, 4\rangle]_{\mathcal{Q}} =$$
  $$\{\, \ldots, \langle -3, -6\rangle, \langle -2, -4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \ldots \,\}:$$
  $$\Pi_{\mathcal{Q}} = \{\, [\langle a, b\rangle]_{\mathcal{Q}} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{\, 0 \,\} \,\} \triangleq \mathbb{Q}$$
- $$[\langle 1\rangle]_{\mathcal{L}} = \{\, \langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle \mathcal{L} 1 \,\}:$$
  $$\Pi_{\mathcal{L}} = \{\, [\langle x_n\rangle]_{\mathcal{L}} \mid \langle x_n\rangle \text{是收敛序列} \,\} \triangleq \mathbb{R}.$$

Example

Example

- $$[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} = \{\, a, b \,\};$$
  $$[c]_{\mathcal{R}} = \{\, c \,\};$$
  $$[d]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} = [f]_{\mathcal{R}} = \{\, d, e, f \,\};$$
  $\Pi_{\mathcal{R}} = \{\, [a]_{\mathcal{R}}, [c]_{\mathcal{R}}, [d]_{\mathcal{R}} \,\} = \{\, \{\, a, b \,\}, \{\, c \,\}, \{\, d, e, f \,\} \,\};$
- $\Pi_{=_4} = \{\, [i]_{=_4} \mid i \in \mathbb{Z} \,\}$
  $\quad = \{\, [0]_{=_4}, [1]_{=_4}, [2]_{=_4}, [3]_{=_4} \,\};$
- $$[\langle 1, 2\rangle]_{\mathcal{Q}} = [\langle 2, 4\rangle]_{\mathcal{Q}} =$$
  $\{\, \ldots, \langle -3, -6\rangle, \langle -2, -4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \ldots \,\}$:
  $\Pi_{\mathcal{Q}} = \{\, [\langle a, b\rangle]_{\mathcal{Q}} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{\, 0 \,\} \,\} \triangleq \mathbb{Q}$
- $$[\langle 1\rangle]_{\mathcal{L}} = \{\, \langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle \mathcal{L} 1 \,\}:$$
  $\Pi_{\mathcal{L}} = \{\, [\langle x_n\rangle]_{\mathcal{L}} \mid \langle x_n\rangle \text{是收敛序列} \,\} \triangleq \mathbb{R}.$

Example

Example

- $$\begin{aligned}[a]_{\mathcal{R}} &= [b]_{\mathcal{R}} = \{\, a, b \,\}; \\ [c]_{\mathcal{R}} &= \{\, c \,\}; \\ [d]_{\mathcal{R}} &= [e]_{\mathcal{R}} = [f]_{\mathcal{R}} = \{\, d, e, f \,\};\end{aligned}$$
  $\Pi_{\mathcal{R}} = \{\, [a]_{\mathcal{R}}, [c]_{\mathcal{R}}, [d]_{\mathcal{R}} \,\} = \{\, \{\, a, b \,\}, \{\, c \,\}, \{\, d, e, f \,\} \,\}$;
- $$\begin{aligned}\Pi_{=_4} &= \{\, [i]_{=_4} \mid i \in \mathbb{Z} \,\} \\ &= \{\, [0]_{=_4}, [1]_{=_4}, [2]_{=_4}, [3]_{=_4} \,\};\end{aligned}$$
- $[\langle 1, 2\rangle]_{\mathcal{Q}} = [\langle 2, 4\rangle]_{\mathcal{Q}} =$
  $\{\, \ldots, \langle -3, -6\rangle, \langle -2, -4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \ldots \,\}$:
  $\Pi_{\mathcal{Q}} = \{\, [\langle a, b\rangle]_{\mathcal{Q}} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{\, 0 \,\} \,\} \triangleq \mathbb{Q}$
- $[\langle 1\rangle]_{\mathcal{L}} = \{\, \langle x_n\rangle \mid \langle x_n\rangle \mathcal{L} 1 \,\}$:
  $\Pi_{\mathcal{L}} = \{\, [\langle x_n\rangle]_{\mathcal{L}} \mid \langle x_n\rangle \text{是收敛序列} \,\} \triangleq \mathbb{R}$.

等价关系与划分的等价

Theorem

设Π是集合A的一个划分，A上的关系$\mathcal{R}_\Pi$定义如下：

$$a\,\mathcal{R}_\Pi\,b \quad iff \quad \exists A_i \in \Pi \wedge a \in A_i \wedge b \in A_i$$

则：① $\mathcal{R}_\Pi$是A上的等价关系；

② 由$\mathcal{R}_\Pi$诱导的划分$\Pi_{\mathcal{R}_\Pi}$（简记为Π'）就是Π.

Remark

由该定理知等价关系可以等同集合的划分；该思想是代数学最重要的思想之一.

等价关系与划分的等价

Theorem

设Π是集合A的一个划分，A上的关系$\mathcal{R}_\Pi$定义如下：

$$a\,\mathcal{R}_\Pi\,b \quad iff \quad \exists A_i \in \Pi \wedge a \in A_i \wedge b \in A_i$$

则：① $\mathcal{R}_\Pi$是A上的等价关系；

② 由$\mathcal{R}_\Pi$诱导的划分$\Pi_{\mathcal{R}_\Pi}$（简记为Π'）就是Π.

Remark

由该定理知等价关系可以等同集合的划分；该思想是代数学最重要的思想之一.

①的证明

Proof.

1. 自反性：$\forall a \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$
   $\therefore \exists A_i \wedge a \in A_i$, So $a \mathcal{R}_{\Pi}\, a$;
2. 对称性：trivial;
3. 传递性：设$a \mathcal{R}_{\Pi}\, b \wedge b \mathcal{R}_{\Pi}\, c$;
   $\therefore \exists A_i, A_j \in \Pi \wedge a, b \in A_i \wedge b, c \in A_j$
   $\therefore b \in A_i \cap A_j$, So $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, 即$A_i = A_j$;
   $\therefore a \in A_i \wedge c \in A_i$, So $a \mathcal{R}_{\Pi}\, c$.

$\square$

①的证明

Proof.

1. 自反性：$\forall a \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$
   $\therefore \exists A_i \wedge a \in A_i$, So $a \mathcal{R}_\Pi a$;
2. 对称性：trivial;
3. 传递性：设$a \mathcal{R}_\Pi b \wedge b \mathcal{R}_\Pi c$;
   $\therefore \exists A_i, A_i \in \Pi \wedge a, b \in A_i \wedge b, c \in A_j$
   $\therefore b \in A_i \cap A_j$, So $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, 即$A_i = A_j$;
   $\therefore a \in A_i \wedge c \in A_i$, So $a \mathcal{R}_\Pi c$.

$\square$

①的证明

Proof.

1. 自反性：$\forall a \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$
   $\therefore \exists A_i \wedge a \in A_i$, So $a \mathcal{R}_{\Pi} a$;
2. 对称性：trivial;
3. 传递性：设$a \mathcal{R}_{\Pi} b \wedge b \mathcal{R}_{\Pi} c$;
   $\therefore \exists A_i, A_j \in \Pi \wedge a, b \in A_i \wedge b, c \in A_j$
   $\therefore b \in A_i \cap A_j$, So $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, 即$A_i = A_j$;
   $\therefore a \in A_i \wedge c \in A_i$, So $a \mathcal{R}_{\Pi} c$.

$\square$

①的证明

Proof.

1. 自反性：$\forall a \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$
   $\therefore \exists A_i \wedge a \in A_i$, So $a \mathcal{R}_\Pi a$;
2. 对称性：trivial;
3. 传递性：设$a \mathcal{R}_\Pi b \wedge b \mathcal{R}_\Pi c$;
   $\therefore \exists A_i, A_j \in \Pi \wedge a, b \in A_i \wedge b, c \in A_j$
   $\therefore b \in A_i \cap A_j$, So $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, 即$A_i = A_j$;
   $\therefore a \in A_i \wedge c \in A_i$, So $a \mathcal{R}_\Pi c$.

□

②的证明

Proof(Π和Π'都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \varnothing$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设 $b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$, 则 $a \mathcal{R}_\Pi b$;
  2. [illegible]
  3. [illegible]
  4. [illegible]
  5. 故 $A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$.
- $\Pi' = \{ [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A \} \subseteq \Pi$
- $\Pi \subseteq \Pi'$

②的证明

Proof(Π和Π'都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \emptyset$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设$b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$，则$a \, \mathcal{R}_\Pi \, b$;
  2. 设$\forall x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，则$x \, \mathcal{R}_\Pi \, a$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, b$，即$\exists A_j \in \Pi$, $x, b \in A_j$，这样$b \in A_j \cap A_i \neq \emptyset$, $\therefore A_j = A_i$，即$x \in A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq A_i$;
  3. 设$x \in A_i$, $\because b \in A_i$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, b$, but $a \, \mathcal{R}_\Pi \, b$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, a$，即$x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$, $\therefore A_i \subseteq [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  4. 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
- $\Pi' = \{ [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A \} \subseteq \Pi$
- $\Pi \subseteq \Pi'$

②的证明

Proof(Π和Π'都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \varnothing$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设$b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$，则$a \,\mathcal{R}_\Pi\, b$;
  2. 设$\forall x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，则$x \,\mathcal{R}_\Pi\, a$, $\therefore x \,\mathcal{R}_\Pi\, b$，即$\exists A_j \in \Pi$, $x, b \in A_j$，这样$b \in A_j \cap A_i \neq \varnothing$, $\therefore A_j = A_i$，即$x \in A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq A_i$;
  3. 设$x \in A_i$, $\because b \in A_i$, $\therefore x \,\mathcal{R}_\Pi\, b$, but $a \,\mathcal{R}_\Pi\, b$, $\therefore x \,\mathcal{R}_\Pi\, a$，即$x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$, $\therefore A_i \subseteq [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  4. 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
- $\Pi' = \{ [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A \} \subseteq \Pi$
- $\Pi \subseteq \Pi'$

②的证明

Proof(Π和Π'都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \varnothing$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设$b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$，则$a \, \mathcal{R}_\Pi \, b$;
  2. 设$\forall x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，则$x \, \mathcal{R}_\Pi \, a$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, b$, 即$\exists A_j \in \Pi$, $x, b \in A_j$，这样$b \in A_j \cap A_i \neq \varnothing$, $\therefore A_j = A_i$，即$x \in A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq A_i$;
  3. 设$x \in A_i$, $\because b \in A_i$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, b$, but $a \, \mathcal{R}_\Pi \, b$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, a$, 即$x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$, $\therefore A_i \subseteq [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  4. 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
- $\Pi' = \{[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A\} \subseteq \Pi$
- $\Pi \subseteq \Pi'$

②的证明

Proof(Π和Π′都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \varnothing$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设$b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$，则$a\,\mathcal{R}_\Pi\, b$;
  2. 设$\forall x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，则$x\,\mathcal{R}_\Pi\, a$, $\therefore x\,\mathcal{R}_\Pi\, b$，即$\exists A_j \in \Pi$, $x, b \in A_j$，这样$b \in A_j \cap A_i \neq \varnothing$, $\therefore A_j = A_i$，即$x \in A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq A_i$;
  3. 设$x \in A_i$, $\because b \in A_i$, $\therefore x\,\mathcal{R}_\Pi\, b$, but $a\,\mathcal{R}_\Pi\, b$, $\therefore x\,\mathcal{R}_\Pi\, a$，即$x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$, $\therefore A_i \subseteq [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  4. 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
- $\Pi' = \{\, [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A \,\} \subseteq \Pi$
- $\Pi \subseteq \Pi'$

②的证明

Proof(Π和Π'都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \varnothing$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设$b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$，则$a \mathcal{R}_\Pi b$;
  2. 设$\forall x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，则$x \mathcal{R}_\Pi a$, $\therefore x \mathcal{R}_\Pi b$，即$\exists A_j \in \Pi$, $x, b \in A_j$，这样$b \in A_j \cap A_i \neq \varnothing$, $\therefore A_j = A_i$，即$x \in A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq A_i$;
  3. 设$x \in A_i$, $\because b \in A_i$, $\therefore x \mathcal{R}_\Pi b$, but $a \mathcal{R}_\Pi b$, $\therefore x \mathcal{R}_\Pi a$，即$x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$, $\therefore A_i \subseteq [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  4. 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
- $\Pi' = \{ [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A \} \subseteq \Pi$
  1. $\forall [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \in \Pi'$, So $\exists A_i, a \in A_i$;
- $\Pi \subseteq \Pi'$

②的证明

Proof(Π和Π'都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \emptyset$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设$b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$，则$a \, \mathcal{R}_\Pi \, b$;
  2. 设$\forall x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，则$x \, \mathcal{R}_\Pi \, a$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, b$，即$\exists A_j \in \Pi$, $x, b \in A_j$，这样$b \in A_j \cap A_i \neq \emptyset$, $\therefore A_j = A_i$，即$x \in A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq A_i$;
  3. 设$x \in A_i$, $\because b \in A_i$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, b$, but $a \, \mathcal{R}_\Pi \, b$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, a$，即$x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$, $\therefore A_i \subseteq [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  4. 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
- $\Pi' = \{ [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A \} \subseteq \Pi$
  1. $\forall [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \in \Pi'$, So $\exists A_i, a \in A_i$;
  2. $\therefore a \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \emptyset$，即$[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq \Pi$
- $\Pi \subseteq \Pi'$

②的证明

Proof(Π和Π'都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \varnothing$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设$b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$，则$a\,\mathcal{R}_\Pi\, b$;
  2. 设$\forall x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，则$x\,\mathcal{R}_\Pi\, a$, $\therefore x\,\mathcal{R}_\Pi\, b$，即$\exists A_j \in \Pi$, $x, b \in A_j$，这样$b \in A_j \cap A_i \neq \varnothing$, $\therefore A_j = A_i$，即$x \in A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq A_i$;
  3. 设$x \in A_i$, $\because b \in A_i$, $\therefore x\,\mathcal{R}_\Pi\, b$, but $a\,\mathcal{R}_\Pi\, b$, $\therefore x\,\mathcal{R}_\Pi\, a$，即$x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$, $\therefore A_i \subseteq [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  4. 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
- $\Pi' = \{\, [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A \,\} \subseteq \Pi$
  1. $\forall [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \in \Pi'$, So $\exists A_i, a \in A_i$;
  2. $\therefore a \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \varnothing$，即$[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq \Pi$
- $\Pi \subseteq \Pi'$

②的证明

Proof(Π和Π'都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \varnothing$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设$b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$，则$a \mathcal{R}_\Pi b$;
  2. 设$\forall x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，则$x \mathcal{R}_\Pi a$, $\therefore x \mathcal{R}_\Pi b$, 即$\exists A_j \in \Pi$, $x, b \in A_j$，这样$b \in A_j \cap A_i \neq \varnothing$, $\therefore A_j = A_i$, 即$x \in A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq A_i$;
  3. 设$x \in A_i$, $\because b \in A_i$, $\therefore x \mathcal{R}_\Pi b$, but $a \mathcal{R}_\Pi b$, $\therefore x \mathcal{R}_\Pi a$, 即$x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$, $\therefore A_i \subseteq [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  4. 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
- $\Pi' = \{ [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A \} \subseteq \Pi$
  1. $\forall [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \in \Pi'$, So $\exists A_i, a \in A_i$;
  2. $\therefore a \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \varnothing$, 即$[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq \Pi$
- $\Pi \subseteq \Pi'$
  1. $\forall A_i \in \Pi$, $\because A_i \neq \varnothing$, So $\exists a \in A_i$, 即$a \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;

②的证明

Proof(Π和Π'都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \varnothing$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设$b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$，则$a \, \mathcal{R}_\Pi \, b$;
  2. 设$\forall x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，则$x \, \mathcal{R}_\Pi \, a$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, b$，即$\exists A_j \in \Pi$, $x, b \in A_j$，这样$b \in A_j \cap A_i \neq \varnothing$, $\therefore A_j = A_i$，即$x \in A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq A_i$;
  3. 设$x \in A_i$, $\because b \in A_i$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, b$, but $a \, \mathcal{R}_\Pi \, b$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, a$，即$x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，$\therefore A_i \subseteq [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  4. 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
- $\Pi' = \{ [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A \} \subseteq \Pi$
  1. $\forall [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \in \Pi'$, So $\exists A_i, a \in A_i$;
  2. $\therefore a \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \varnothing$，即$[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq \Pi$
- $\Pi \subseteq \Pi'$
  1. $\forall A_i \in \Pi$, $\therefore A_i \neq \varnothing$, So $\exists a \in A_i$，即$a \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  2. $\therefore a \in A_i \cap [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \neq \varnothing$；故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$; $\therefore \Pi \subseteq \Pi'$.

②的证明

Proof(Π和Π'都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \emptyset$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设$b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$，则$a\,\mathcal{R}_\Pi\, b$;
  2. 设$\forall x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，则$x\,\mathcal{R}_\Pi\, a$, $\therefore x\,\mathcal{R}_\Pi\, b$，即$\exists A_j \in \Pi$, $x, b \in A_j$，这样$b \in A_j \cap A_i \neq \emptyset$, $\therefore A_j = A_i$，即$x \in A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq A_i$;
  3. 设$x \in A_i$, $\because b \in A_i$, $\therefore x\,\mathcal{R}_\Pi\, b$, but $a\,\mathcal{R}_\Pi\, b$, $\therefore x\,\mathcal{R}_\Pi\, a$，即$x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$, $\therefore A_i \subseteq [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  4. 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
- $\Pi' = \{\, [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A \,\} \subseteq \Pi$
  1. $\forall [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \in \Pi'$, So $\exists A_i, a \in A_i$;
  2. $\therefore a \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \emptyset$，即$[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq \Pi$
- $\Pi \subseteq \Pi'$
  1. $\forall A_i \in \Pi$, $\therefore A_i \neq \emptyset$, So $\exists a \in A_i$，即$a \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  2. $\therefore a \in A_i \cap [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \neq \emptyset$; 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$; $\therefore \Pi \subseteq \Pi'$.

②的证明

Proof(Π和Π'都是集合的集合，需要证明集合的集合相等).

- 证明：if $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \emptyset$, then $[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$:
  1. 设$b \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i$，则$a \, \mathcal{R}_\Pi \, b$;
  2. 设$\forall x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$，则$x \, \mathcal{R}_\Pi \, a$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, b$，即$\exists A_j \in \Pi$, $x, b \in A_j$，这样$b \in A_j \cap A_i \neq \emptyset$, $\therefore A_j = A_i$，即$x \in A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq A_i$;
  3. 设$x \in A_i$, $\because b \in A_i$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, b$, but $a \, \mathcal{R}_\Pi \, b$, $\therefore x \, \mathcal{R}_\Pi \, a$，即$x \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$, $\therefore A_i \subseteq [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  4. 故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
- $\Pi' = \{ [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \mid a \in A \} \subseteq \Pi$
  1. $\forall [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \in \Pi'$, So $\exists A_i, a \in A_i$;
  2. $\therefore a \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \cap A_i \neq \emptyset$，即$[a]_{\mathcal{R}_\Pi} = A_i$, $\therefore [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \subseteq \Pi$
- $\Pi \subseteq \Pi'$
  1. $\forall A_i \in \Pi$, $\therefore A_i \neq \emptyset$, So $\exists a \in A_i$，即$a \in [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$;
  2. $\therefore a \in A_i \cap [a]_{\mathcal{R}_\Pi} \neq \emptyset$；故$A_i = [a]_{\mathcal{R}_\Pi}$; $\therefore \Pi \subseteq \Pi'$.

□

商集合

Definition (商集合, Quotient Set)

设$\mathcal{R}$是集合A上的等价关系，则由$\mathcal{R}$诱导的划分称为关于关系$\mathcal{R}$的商集合，记为：

$$A/\mathcal{R} \triangleq \{\, [a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A \,\}$$

if $A/\mathcal{R}$ is finite set, $|A/\mathcal{R}|$称为关系$\mathcal{R}$的秩(rank).

Example

商集合

Definition (商集合, Quotient Set)

设$\mathcal{R}$是集合A上的等价关系，则由$\mathcal{R}$诱导的划分称为关于关系$\mathcal{R}$的**商集合**，记为：

$$A/\mathcal{R} \triangleq \{ [a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A \}$$

if $A/\mathcal{R}$ is finite set, $|A/\mathcal{R}|$称为关系$\mathcal{R}$的**秩(rank)**.

Example

- $A/\mathcal{R} = \{ \{ a, b \}, \{ c \}, \{ d, e, f \} \}$, $\mathcal{R}$秩为3;
- $\mathbb{Z}/ =_4 =, \{ [0]_{=_4}, [1]_{=_4}, [2]_{=_4}, [3]_{=_4} \}$, $\mathcal{R}$秩为4;
- 设$\mathcal{P}$为n个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的命题公式的集合，则：
  $\mathcal{P}/\Leftrightarrow = \{ n$布尔函数$\}$, 其秩为$2^{2^n}$;
- $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{ 0 \})/\mathcal{Q} = \{ [\langle a, b \rangle]_{\mathcal{Q}} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{ 0 \} \}$
- $\mathbb{R} = \{ \langle x_n \rangle \}/\mathcal{L} = \{ [\langle x_n \rangle]_{\mathcal{L}} \mid \langle x_n \rangle$是收敛序列$\}$.

商集合

Definition (商集合, Quotient Set)

设$\mathcal{R}$是集合A上的等价关系，则由$\mathcal{R}$诱导的划分称为关于关系$\mathcal{R}$的商集合，记为：

$$A/\mathcal{R} \triangleq \{\, [a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A \,\}$$

if $A/\mathcal{R}$ is finite set, $|A/\mathcal{R}|$称为关系$\mathcal{R}$的秩(rank).

Example

- $A/\mathcal{R} = \{\,\{\,a,b\,\},\{\,c\,\},\{\,d,e,f\,\}\,\}$, $\mathcal{R}$秩为3;
- $\mathbb{Z}/=_4 =, \{\,[0]_{=_4},[1]_{=_4},[2]_{=_4},[3]_{=_4}\,\}$, $\mathcal{R}$秩为4;
- 设$\mathcal{P}$为n个原子$P_1,P_2,\ldots,P_n$的命题公式的集合，则：
  $\mathcal{P}/\Leftrightarrow = \{\,n$布尔函数$\,\}$, 其秩为$2^{2^n}$;
- $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{\,0\,\})/\mathcal{Q} = \{\,[\langle a,b\rangle]_{\mathcal{Q}} \mid a\in\mathbb{Z}\wedge b\in\mathbb{Z}-\{\,0\,\}\,\}$
- $\mathbb{R} = \{\,\langle x_n\rangle\,\}/\mathcal{L} = \{\,[\langle x_n\rangle]_{\mathcal{L}} \mid \langle x_n\rangle$是收敛序列$\,\}$.

商集合

Definition (商集合, Quotient Set)

设$\mathcal{R}$是集合A上的等价关系，则由$\mathcal{R}$诱导的划分称为关于关系$\mathcal{R}$的**商集合**，记为：

$$A/\mathcal{R} \triangleq \{ [a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A \}$$

if $A/\mathcal{R}$ is finite set, $|A/\mathcal{R}|$称为关系$\mathcal{R}$的秩(rank).

Example

- $A/\mathcal{R} = \{ \{ a, b \}, \{ c \}, \{ d, e, f \} \}$, $\mathcal{R}$秩为3;
- $\mathbb{Z}/ =_4 =, \{ [0]_{=_4}, [1]_{=_4}, [2]_{=_4}, [3]_{=_4} \}$, $\mathcal{R}$秩为4;
- 设$\mathcal{P}$为n个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的命题公式的集合，则：$\mathcal{P}/\Leftrightarrow = \{ n布尔函数 \}$, 其秩为$2^{2^n}$;
- $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{ 0 \})/\mathcal{Q} = \{ [\langle a, b \rangle]_{\mathcal{Q}} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{ 0 \} \}$
- $\mathbb{R} = \{ \langle x_n \rangle \}/\mathcal{L} = \{ [\langle x_n \rangle]_{\mathcal{L}} \mid \langle x_n \rangle 是收敛序列 \}$.

商集合

Definition (商集合, Quotient Set)

设$\mathcal{R}$是集合A上的等价关系，则由$\mathcal{R}$诱导的划分称为关于关系$\mathcal{R}$的**商集合**，记为：

$$A/\mathcal{R} \triangleq \{ [a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A \}$$

if $A/\mathcal{R}$ is finite set, $|A/\mathcal{R}|$称为关系$\mathcal{R}$的**秩**(rank).

Example

- $A/\mathcal{R} = \{ \{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\} \}$, $\mathcal{R}$秩为3;
- $\mathbb{Z}/=_4 =, \{ [0]_{=_4}, [1]_{=_4}, [2]_{=_4}, [3]_{=_4} \}$, $\mathcal{R}$秩为4;
- 设$\mathcal{P}$为n个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的命题公式的集合，则：
  $\mathcal{P}/\Leftrightarrow = \{ n\text{布尔函数} \}$，其秩为$2^{2^n}$;
- $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})/\mathcal{Q} = \{ [\langle a, b \rangle]_{\mathcal{Q}} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\} \}$
- $\mathbb{R} = \{ \langle x_n \rangle \}/\mathcal{L} = \{ [\langle x_n \rangle]_{\mathcal{L}} \mid \langle x_n \rangle\text{是收敛序列} \}$.

商集合

Definition (商集合, Quotient Set)

设$\mathcal{R}$是集合A上的等价关系，则由$\mathcal{R}$诱导的划分称为关于关系$\mathcal{R}$的**商集合**，记为：

$$A/\mathcal{R} \triangleq \{ [a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A \}$$

if $A/\mathcal{R}$ is finite set, $|A/\mathcal{R}|$称为关系$\mathcal{R}$的秩(rank).

Example

- $A/\mathcal{R} = \{ \{ a, b \}, \{ c \}, \{ d, e, f \} \}$, $\mathcal{R}$秩为3;
- $\mathbb{Z}/ =_4 =, \{ [0]_{=_4}, [1]_{=_4}, [2]_{=_4}, [3]_{=_4} \}$, $\mathcal{R}$秩为4;
- 设$\mathcal{P}$为n个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的命题公式的集合，则：
  $\mathcal{P}/ \Leftrightarrow = \{ n布尔函数 \}$, 其秩为$2^{2^n}$;
- $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{ 0 \})/\mathcal{Q} = \{ [\langle a, b\rangle]_{\mathcal{Q}} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{ 0 \} \}$
- $\mathbb{R} = \{ \langle x_n \rangle \}/\mathcal{L} = \{ [\langle x_n \rangle]_{\mathcal{L}} \mid \langle x_n \rangle是收敛序列 \}$.

商集合

Definition (商集合, Quotient Set)

设$\mathcal{R}$是集合A上的等价关系，则由$\mathcal{R}$诱导的划分称为关于关系$\mathcal{R}$的商集合，记为：

$$A/\mathcal{R} \triangleq \{ [a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A \}$$

if $A/\mathcal{R}$ is finite set, $|A/\mathcal{R}|$称为关系$\mathcal{R}$的秩(rank).

Example

- $A/\mathcal{R} = \{ \{ a, b \}, \{ c \}, \{ d, e, f \} \}$, $\mathcal{R}$秩为3;
- $\mathbb{Z}/ =_4 =, \{ [0]_{=_4}, [1]_{=_4}, [2]_{=_4}, [3]_{=_4} \}$, $\mathcal{R}$秩为4;
- 设$\mathcal{P}$为n个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的命题公式的集合，则：
  $\mathcal{P}/\Leftrightarrow = \{ n\text{布尔函数} \}$, 其秩为$2^{2^n}$;
- $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{ 0 \})/\mathcal{Q} = \{ [\langle a, b\rangle]_{\mathcal{Q}} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{ 0 \} \}$
- $\mathbb{R} = \{ \langle x_n\rangle \}/\mathcal{L} = \{ [\langle x_n\rangle]_{\mathcal{L}} \mid \langle x_n\rangle\text{是收敛序列} \}$.

Example

集合$A = \{ a, b, c, d \}$上共有多少个等价关系?

Solution

等价与A上有多少个划分.

n个元素的集合共有多少个秩为m的等价关系

即将n个元素放入m个桶中且每个桶中至少有一个元素共有多少种放置方法，该数称为Stirling数.

Example

集合$A = \{a, b, c, d\}$上共有多少个等价关系？

Solution

等价与A上有多少个划分.

- 一个分区：$\Pi = \{\{a, b, c, d\}\}$ .... 1种；
- 两个分区：
  1, 3型：如$\Pi = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$ .... $C_4^1 = 4$种；
  2, 2型：如$\Pi = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ .... $C_4^2/2 = 3$种；
- 三个分区：
  如$\Pi = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$ .... $C_4^2 = 6$种；
- 四个分区：$\Pi = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ .... 1种；
- 共计：........ 15种.

n个元素的集合共有多少个秩为m的等价关系

即将n个元素放入m个桶中且每个桶中至少有一个元素共有多少种放置方法，该数称为Stirling数.

Example

集合$A=\{a,b,c,d\}$上共有多少个等价关系?

Solution

等价与A上有多少个划分.

- 一个分区: $\Pi=\{\{a,b,c,d\}\}$ 1种;
- 两个分区:
  1, 3型: 如$\Pi=\{\{a\},\{b,c,d\}\}$ .... $C_4^1=4$种;
  2, 2型: 如$\Pi=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ .... $C_4^2/2=3$种;
- 三个分区:
  如$\Pi=\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$ .... $C_4^2=6$种;
- 四个分区: $\Pi=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$ 1种;
- 共计: .... 15种.

n个元素的集合共有多少个秩为m的等价关系

即将n个元素放入m个桶中且每个桶中至少有一个元素共有多少种放置方法,该数称为Stirling数.

Example

集合$A = \{a, b, c, d\}$上共有多少个等价关系?

Solution

等价与A上有多少个划分.

- 一个分区: $\Pi = \{\{a, b, c, d\}\}$ 1种;
- 两个分区:
  $1, 3$型: 如$\Pi = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$ .... $C_4^1 = 4$种;
  $2, 2$型: 如$\Pi = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ .... $C_4^2/2 = 3$种;
- 三个分区:
  如$\Pi = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$ .... $C_4^2 = 6$种;
- 四个分区: $\Pi = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ 1种;
- 共计: .... 15种.

n个元素的集合共有多少个秩为m的等价关系

即将n个元素放入m个桶中且每个桶中至少有一个元素共有多少种放置方法,该数称为Stirling数.

Example

集合$A = \{a, b, c, d\}$上共有多少个等价关系?

Solution

等价与A上有多少个划分.

- 一个分区: $\Pi = \{\{a, b, c, d\}\}$ 1种;
- 两个分区:
  1,3型: 如$\Pi = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$ . . . . $C_4^1 = 4$种;
  2,2型: 如$\Pi = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ . . . . $C_4^2/2 = 3$种;
- 三个分区:
  如$\Pi = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$ . . . . $C_4^2 = 6$种;
- 四个分区: $\Pi = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ 1种;
- 共计: . . . . 15种.

n个元素的集合共有多少个秩为m的等价关系

即将n个元素放入m个桶中且每个桶中至少有一个元素共有多少种放置方法,该数称为Stirling数.

Example

集合$A = \{a, b, c, d\}$上共有多少个等价关系？

Solution

等价与A上有多少个划分.

- 一个分区：$\Pi = \{\{a, b, c, d\}\}$ . . . . 1种；
- 两个分区：
  1, 3型：如$\Pi = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$ . . . . $C_4^1 = 4$种；
  2, 2型：如$\Pi = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ . . . . $C_4^2/2 = 3$种；
- 三个分区：
  如$\Pi = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$ . . . . $C_4^2 = 6$种；
- 四个分区：$\Pi = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ . . . . 1种；
- 共计： . . . . 15种.

n个元素的集合共有多少个秩为m的等价关系

即将n个元素放入m个桶中且每个桶中至少有一个元素共有多少种放置方法，该数称为Stirling数.

Example

集合$A = \{a, b, c, d\}$上共有多少个等价关系?

Solution

等价与A上有多少个划分.

- 一个分区: $\Pi = \{\{a, b, c, d\}\}$ 1种;
- 两个分区:
  1, 3型: 如$\Pi = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$ ...... $C_4^1 = 4$种;
  2, 2型: 如$\Pi = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ ...... $C_4^2/2 = 3$种;
- 三个分区:
  如$\Pi = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$ ...... $C_4^2 = 6$种;
- 四个分区: $\Pi = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ 1种;
- 共计: ...... 15种.

n个元素的集合共有多少个秩为m的等价关系

即将n个元素放入m个桶中且每个桶中至少有一个元素共有多少种放置方法,
该数称为Stirling数.

Example

集合$A=\{a,b,c,d\}$上共有多少个等价关系?

Solution

等价与A上有多少个划分.

- 一个分区: $\Pi=\{\{a,b,c,d\}\}$ 1种;
- 两个分区:
  1,3型: 如$\Pi=\{\{a\},\{b,c,d\}\}$ .... $C_4^1=4$种;
  2,2型: 如$\Pi=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ .... $C_4^2/2=3$种;
- 三个分区:
  如$\Pi=\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$ .... $C_4^2=6$种;
- 四个分区: $\Pi=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$ 1种;
- 共计: .... 15种.

n个元素的集合共有多少个秩为m的等价关系

即将n个元素放入m个桶中且每个桶中至少有一个元素共有多少种放置方法,该数称为Stirling数.

偏序关系的定义

Definition (偏序关系, Partial order)

设$\mathcal{R}$是集合A上的关系，称$\mathcal{R}$为偏序关系，iff, $\mathcal{R}$满足下述三条件：

①自反性；②传递性；③反对称性；

二重组$\langle A, \mathcal{R}\rangle$称为偏序集合(Partially ordered set, Poset)；

记号：偏序关系一般用$\preccurlyeq$表示，如：$\langle A, \preccurlyeq\rangle$.

Example

- $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq\rangle$是偏序集合；注：一般情况下不是$A$的任意两个子集合都有$\subseteq$关系，这也正是偏序"偏"的含义.

偏序关系的定义

Definition (偏序关系, Partial order)

设$\mathcal{R}$是集合A上的关系，称$\mathcal{R}$为偏序关系，iff, $\mathcal{R}$满足下述三条件：
①自反性；②传递性；③反对称性；
二重组$\langle A, \mathcal{R}\rangle$称为偏序集合(Partially ordered set, Poset)；
记号：偏序关系一般用$\preccurlyeq$表示，如：$\langle A, \preccurlyeq\rangle$.

Example

- $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq\rangle$是偏序集合；注：一般情况下不是$A$的任意两个子集合都有$\subseteq$关系，这也正是偏序偏的含义.
- 命题公式集合P上永真蕴涵关系$\Rightarrow$不是偏序关系，因为没有反对称性；
- $\langle \mathbb{R}, \leqslant\rangle$是偏序关系，并且任意两个实数都能比较大小.

偏序关系的定义

Definition (偏序关系, Partial order)

设$\mathcal{R}$是集合A上的关系，称$\mathcal{R}$为偏序关系，iff, $\mathcal{R}$满足下述三条件：

①自反性；②传递性；③反对称性；

二重组$\langle A, \mathcal{R}\rangle$称为偏序集合(Partially ordered set, Poset)；

记号：偏序关系一般用$\preccurlyeq$表示，如：$\langle A, \preccurlyeq\rangle$.

Example

- $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq\rangle$是偏序集合；注：一般情况下不是$A$的任意两个子集合都有$\subseteq$关系，这也正是偏序偏的含义.
- 命题公式集合$\mathcal{P}$上永真蕴涵关系$\Rightarrow$不是偏序关系，因为没有反对称性；
- $\langle \mathbb{R}, \leq\rangle$是偏序关系，并且任意两个实数都能比较大小.

偏序关系的定义

Definition (偏序关系, Partial order)

设$\mathcal{R}$是集合A上的关系，称$\mathcal{R}$为偏序关系，iff, $\mathcal{R}$满足下述三条件：

①自反性；②传递性；③反对称性；

二重组$\langle A,\mathcal{R}\rangle$称为偏序集合(Partially ordered set, Poset)；

记号：偏序关系一般用$\preccurlyeq$表示，如：$\langle A,\preccurlyeq\rangle$.

Example

- $\langle \mathscr{P}(A),\subseteq\rangle$是偏序集合；注：一般情况下不是$A$的任意两个子集合都有$\subseteq$关系，这也正是偏序偏的含义.
- 命题公式集合$\mathcal{P}$上永真蕴涵关系$\Rightarrow$不是偏序关系，因为没有反对称性；
- $\langle \mathbb{R},\leqslant\rangle$是偏序关系，并且任意两个实数都能比较大小.

偏序关系的定义

Definition (偏序关系, Partial order)

设$\mathcal{R}$是集合A上的关系，称$\mathcal{R}$为偏序关系，iff, $\mathcal{R}$满足下述三条件：

①自反性；②传递性；③反对称性；

二重组$\langle A, \mathcal{R}\rangle$称为偏序集合(Partially ordered set, Poset)；

记号：偏序关系一般用$\preccurlyeq$表示，如：$\langle A, \preccurlyeq\rangle$.

Example

- $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq\rangle$是偏序集合；注：一般情况下不是$A$的任意两个子集合都有$\subseteq$关系，这也正是偏序偏的含义.
- 命题公式集合$\mathcal{P}$上永真蕴涵关系$\Rightarrow$不是偏序关系，因为没有反对称性；
- $\langle \mathbb{R}, \leqslant\rangle$是偏序关系，并且任意两个实数都能比较大小.

可比较的

Definition (可比较的, Comparable)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一偏序集合，$x, y \in A$，称$x$和$y$是**可比较的**，iff $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

Example

- $\langle \mathscr{P}(\{1,2,3\}), \subseteq \rangle$偏序集合中，$\{1,2\}$和$\{2\}$是可比较的；而$\{1,2\}$和$\{2,3\}$是不可比较的；
- $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$中，任意两个自然数都是可比较的.

Definition (线序关系，全序关系，Linear order, Total order)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一偏序集合，称该偏序为全序，iff, $\forall x, y \in A$, x和y是可比较的.

可比较的

Definition (可比较的, Comparable)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一偏序集合，$x, y \in A$，称$x$和$y$是可比较的，iff $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

Example

- $\langle \mathscr{P}(\{1,2,3\}), \subseteq \rangle$偏序集合中，$\{1,2\}$和$\{2\}$是可比较的；而$\{1,2\}$和$\{2,3\}$是不可比较的；
- $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$中，任意两个自然数都是可比较的.

Definition (线序关系，全序关系，Linear order, Total order)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一偏序集合，称该偏序为全序，iff，$\forall x, y \in A$，$x$和$y$是可比较的.

可比较的

Definition (可比较的, Comparable)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一偏序集合, $x, y \in A$, 称x和y是可比较的, iff $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

Example

- $\langle \mathscr{P}(\{1,2,3\}), \subseteq \rangle$偏序集合中, $\{1,2\}$和$\{2\}$是可比较的; 而$\{1,2\}$和$\{2,3\}$是不可比较的;
- $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$中, 任意两个自然数都是可比较的.

Definition (线序关系, 全序关系, Linear order, Total order)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一偏序集合, 称该偏序为全序, iff, $\forall x, y \in A$, x和y是可比较的.

可比较的

Definition (可比较的, Comparable)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一偏序集合, $x, y \in A$, 称x和y是可比较的, iff $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

Example

- $\langle \mathscr{P}(\{1,2,3\}), \subseteq \rangle$偏序集合中, $\{1,2\}$和$\{2\}$是可比较的; 而$\{1,2\}$和$\{2,3\}$是不可比较的;
- $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$中, 任意两个自然数都是可比较的.

Definition (线序关系, 全序关系, Linear order, Total order)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一偏序集合, 称该偏序为全序, iff, $\forall x, y \in A$, x和y是可比较的.

可比较的

Definition (可比较的, Comparable)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一偏序集合, $x, y \in A$, 称x和y是可比较的, iff $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

Example

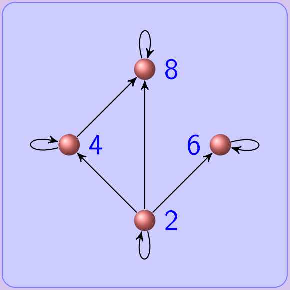
- $\langle \mathscr{P}(\{1,2,3\}), \subseteq \rangle$偏序集合中, $\{1,2\}$和$\{2\}$是可比较的; 而$\{1,2\}$和$\{2,3\}$是不可比较的;
- $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$中, 任意两个自然数都是可比较的.

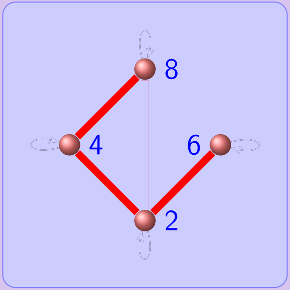
Definition (线序关系, 全序关系, Linear order, Total order)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是一偏序集合, 称该偏序为全序, iff, $\forall x, y \in A$, x和y是可比较的.

偏序关系的Hass图

Description ($\langle \{2,4,6,8\}, | \rangle$的Hass图)

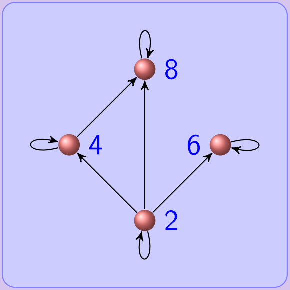


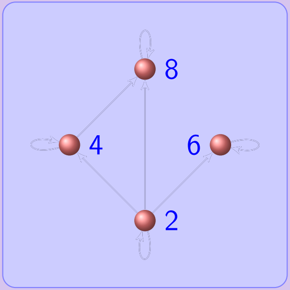


1. 删除所有的自回路;
2. 删除所有三角型的最长边;
3. 有向边的始点在下，终点在上，从而删除所有边的箭头.

偏序关系的Hass图

Description (⟨{2, 4, 6, 8}, |⟩的Hass图)

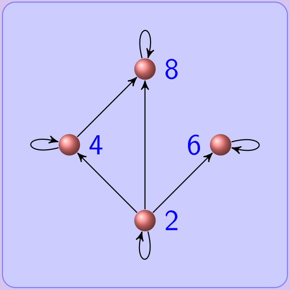


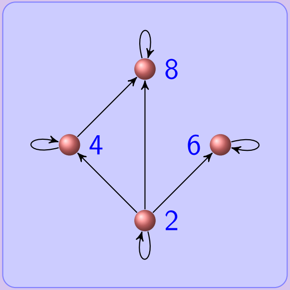


1. 删除所有的自回路;
2. 删除所有三角型的最长边;
3. 有向边的始点在下, 终点在上, 从而删除所有边的箭头.

偏序关系的Hass图

Description ($\langle\{2,4,6,8\},|\rangle$的Hass图)

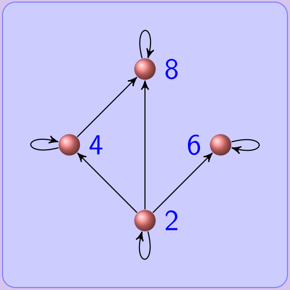


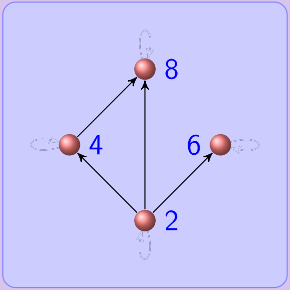


1. 删除所有的自回路;
2. 删除所有三角型的最长边;
3. 有向边的始点在下，终点在上，从而删除所有边的箭头.

偏序关系的Hass图

Description ($\langle \{2,4,6,8\}, | \rangle$的Hass图)

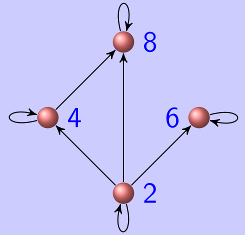


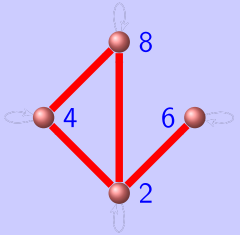


1. *删除所有的自回路;*
2. *删除所有三角型的最长边;*
3. *有向边的始点在下，终点在上，从而删除所有边的箭头.*

偏序关系的Hass图

Description ($\langle \{2,4,6,8\}, | \rangle$的Hass图)

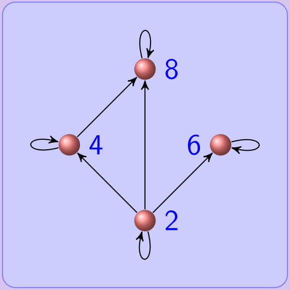


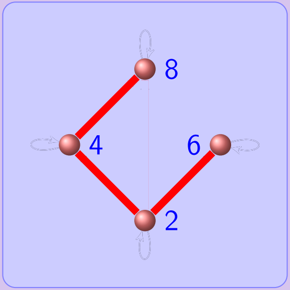


1. 删除所有的自回路;
2. 删除所有三角型的最长边;
3. 有向边的始点在下，终点在上，从而删除所有边的箭头.

偏序关系的Hass图

Description ($\langle\{2,4,6,8\},|\rangle$的Hass图)

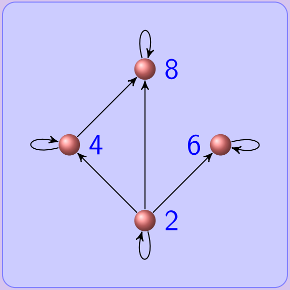


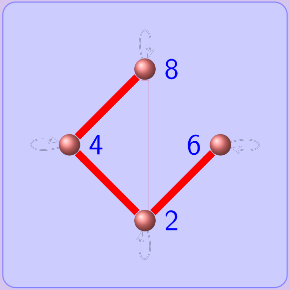


1. *删除所有的自回路;*
2. *删除所有三角型的最长边;*
3. *有向边的始点在下，终点在上，从而删除所有边的箭头.*

偏序关系的Hass图

Description ($\langle\{2,4,6,8\},|\rangle$的Hass图)

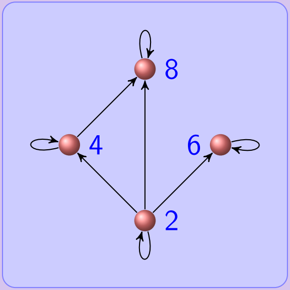


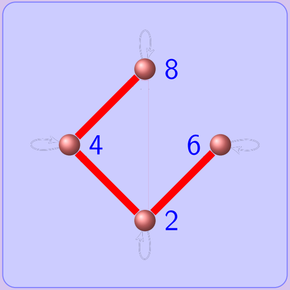


1. 删除所有的自回路;
2. 删除所有三角型的最长边;
3. 有向边的始点在下，终点在上，从而删除所有边的箭头.

偏序关系的Hass图

Description ($\langle \{2,4,6,8\}, | \rangle$的Hass图)





1. *删除所有的自回路;*
2. *删除所有三角型的最长边;*
3. *有向边的始点在下，终点在上，从而删除所有边的箭头.*

Hass图— Examples

Example

Hass图— Examples

Example

- 线序的Hass图是一条垂直的直线;
- $\langle \mathscr{P}(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$的Hass图如右所示.

Hass图— Examples

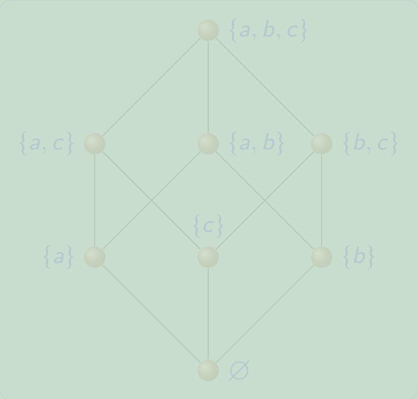
Example

- 线序的Hass图是一条垂直的直线;
- $\langle \mathscr{P}(\{a,b,c\}),\subseteq\rangle$的Hass图如右所示.

Hass图— Examples

Example

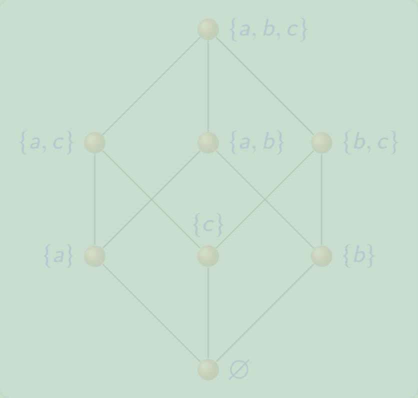
- 线序的Hass图是一条垂直的直线;
- $\langle \mathscr{P}(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$的Hass图如右所示.



Hass图— Examples

Example

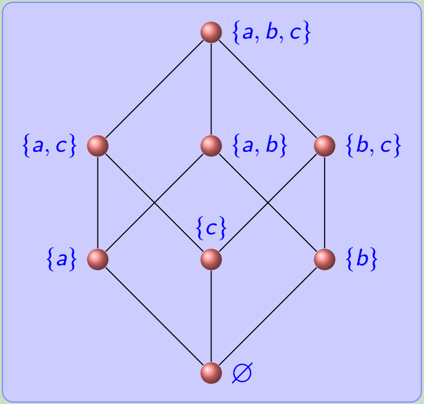
- 线序的Hass图是一条垂直的直线;
- $\langle \mathscr{P}(\{a,b,c\}), \subseteq \rangle$的Hass图如右所示.



Hass图— Examples

Example

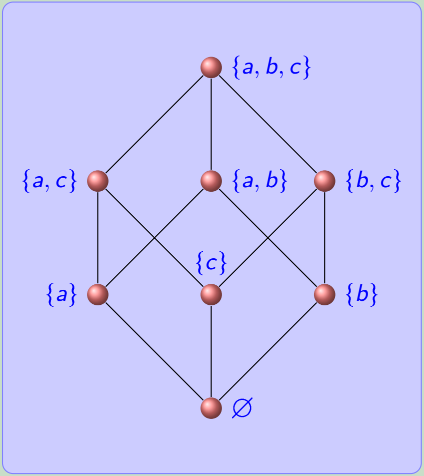
- 线序的Hass图是一条垂直的直线;
- $\langle \mathscr{P}(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$的Hass图如右所示.



Hass图— Examples

Example

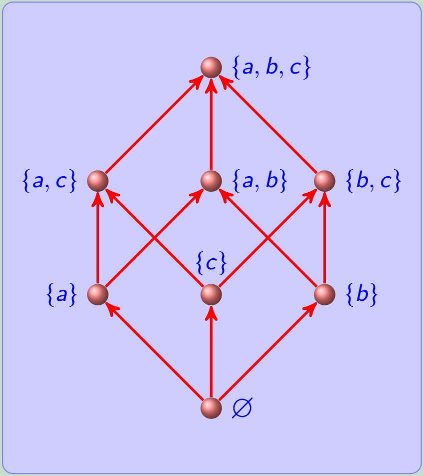
- 线序的Hass图是一条垂直的直线;
- $\langle \mathscr{P}(\{a, b, c\}), \subseteq\rangle$的Hass图如右所示.



Hass图— Examples

Example

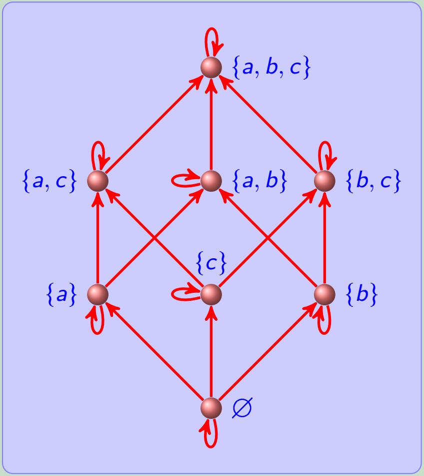
- 线序的Hass图是一条垂直的直线;
- $\langle \mathscr{P}(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$的Hass图如右所示.



Hass图— Examples

Example

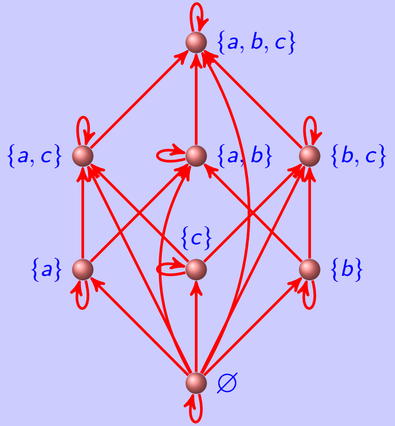
- 线序的Hass图是一条垂直的直线；
- $\langle \mathscr{P}(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$的Hass图如右所示.



Hass图— Examples

Example

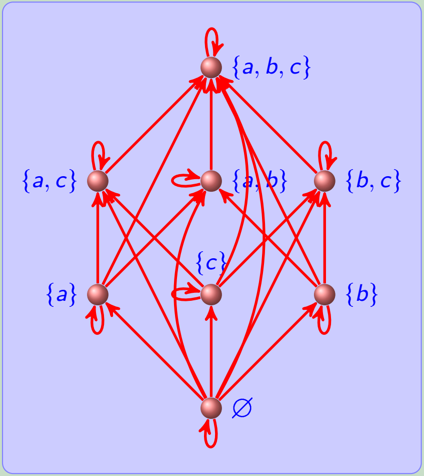
- 线序的Hass图是一条垂直的直线;
- $\langle \mathscr{P}(\{a,b,c\}), \subseteq \rangle$的Hass图如右所示.



Hass图— Examples

Example

- 线序的Hass图是一条垂直的直线;
- $\langle \mathscr{P}(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$的Hass图如右所示.



拟序

Definition (拟序关系, Strict order)

设$\mathcal{R}$是集合A上的关系，称$\prec$为**拟序关系**，iff，$\prec$满足下述三条件：
①反自反性；②传递性；③反对称性.

Example

- $\mathscr{P}(A)$上的严格包含关系$\subset$是拟序；
- $\mathbb{R}$上的严格小于关系$<$是拟序.

Remark

拟序定义中的反对称性实际上可以有反自反性+传递性推出来：设，$x \prec y \wedge y \prec x$，则，$x \prec x$，而由反自反性得知：$x \prec x$是不可能的，因此条件不可能成立，即反对称性定义中的蕴涵式条件为假，蕴涵式为真，反对称性成立.

拟序

Definition (拟序关系, Strict order)

设$\mathcal{R}$是集合A上的关系，称$<$为拟序关系，iff, $<$满足下述三条件：
①反自反性；②传递性；③反对称性.

Example

- $\mathscr{P}(A)$上的严格包含关系$\subsetneq$是拟序；
- $\mathbb{N}$上的严格小于关系$<$是拟序.

Remark

拟序定义中的反对称性实际上可以有反自反性+传递性推出来：设，$x < y \wedge y < x$，则，$x < x$，而由反自反性得知：$x < x$是不可能的，因此条件不可能成立，即反对称性定义中的蕴涵式条件为假，蕴涵式为真，反对称性成立.

拟序

Definition (拟序关系, Strict order)

设$\mathcal{R}$是集合A上的关系，称$<$为**拟序关系**，iff，$<$满足下述三条件：①反自反性；②传递性；③反对称性.

Example

- $\mathscr{P}(A)$上的严格包含关系$\subsetneq$是拟序；
- $\mathbb{N}$上的严格小于关系$<$是拟序.

Remark

拟序定义中的反对称性实际上可以有反自反性＋传递性推出来：设，$x < y \land y < x$，则，$x < x$，而由反自反性得知：$x < x$是不可能的，因此条件不可能成立，即反对称性定义中的蕴涵式条件为假，蕴涵式为真，反对称性成立.

拟序

Definition (拟序关系, Strict order)

设$\mathcal{R}$是集合A上的关系，称$<$为拟序关系，iff, $<$满足下述三条件：
①反自反性；②传递性；③反对称性.

Example

- $\mathscr{P}(A)$上的严格包含关系$\subsetneq$是拟序；
- $\mathbb{N}$上的严格小于关系$<$是拟序.

Remark

拟序定义中的反对称性实际上可以有反自反性+传递性推出来：设，$x < y \wedge y < x$，则，$x < x$，而由反自反性得知：$x < x$是不可能的，因此条件不可能成立，即反对称性定义中的蕴涵式条件为假，蕴涵式为真，反对称性成立.

拟序

Definition (拟序关系, Strict order)

设$\mathcal{R}$是集合A上的关系，称$<$为拟序关系，iff, $<$满足下述三条件：
①反自反性；②传递性；③反对称性.

Example

- $\mathscr{P}(A)$上的严格包含关系$\subsetneq$是拟序；
- $\mathbb{N}$上的严格小于关系$<$是拟序.

Remark

拟序定义中的反对称性实际上可以有反自反性+传递性推出来：设，$x < y \wedge y < x$，则，$x < x$，而由反自反性得知：$x < x$是不可能的，因此条件不可能成立，即反对称性定义中的蕴涵式条件为假，蕴涵式为真，反对称性成立.

拟序和偏序的关系

Theorem

1. 设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是poset，则$\preccurlyeq - \mathbb{1}_A$是拟序，记之为$\prec$；
2. 设$\prec$是A上的拟序，则$\prec \cup \mathbb{1}_A$是偏序，记之为$\preccurlyeq$.

Proof.

拟序和偏序的关系

Theorem

1. 设$\langle A, \preccurlyeq\rangle$是poset，则$\preccurlyeq - \mathbb{1}_A$是拟序，记之为$\prec$;
2. 设$\prec$是A上的拟序，则$\prec \cup \mathbb{1}_A$是偏序，记之为$\preccurlyeq$.

Proof.

拟序和偏序的关系

Theorem

1. 设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是poset，则$\preccurlyeq - \mathbb{1}_A$是拟序，记之为$\prec$;
2. 设$\prec$是A上的拟序，则$\prec \cup \mathbb{1}_A$是偏序，记之为$\preccurlyeq$.

拟序和偏序的关系

Theorem

1. 设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是poset，则$\preccurlyeq - \mathbb{1}_A$是拟序，记之为$\prec$;
2. 设$\prec$是A上的拟序，则$\prec \cup \mathbb{1}_A$是偏序，记之为$\preccurlyeq$.

Proof.

1. —$\prec$是反自反的，trivial;
   —$\prec$是传递的，if $x \prec y \wedge y \prec z$, then $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z$, $\therefore x \preccurlyeq z$, 但是$x \neq z$，否则，根据$\preccurlyeq$的反对称性有：$x = y$，这与$x \prec y$矛盾，$\therefore x \prec z$;
2. —$\preccurlyeq$是自反的，trivial;
   —$\preccurlyeq$是传递的，if $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z$, then (1) $x \prec y \wedge y \prec z$, $\therefore x \prec z$, So, $x \preccurlyeq y$; (2) $x = y \wedge y \prec z$, So, $x \prec z$, So, $x \preccurlyeq y$; (3) $x = y \wedge y = z$, So $x = z$, $x \preccurlyeq z$;
   —$\preccurlyeq$是反对称的，if $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x$，由传递性得：$x \preccurlyeq x$，而$x \prec x$是不可能的，So $x = y$.

$\square$

拟序和偏序的关系

Theorem

1. 设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是poset，则$\preccurlyeq - \mathbb{1}_A$是拟序，记之为$\prec$；
2. 设$\prec$是A上的拟序，则$\prec \cup \mathbb{1}_A$是偏序，记之为$\preccurlyeq$.

Proof.

1. —$\prec$是反自反的，trivial;
   —$\prec$是传递的，if $x \prec y \wedge y \prec z$, then $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z$, $\therefore x \preccurlyeq z$, 但是$x \neq z$, 否则，根据$\preccurlyeq$的反对称性有：$x = y$，这与$x \prec y$矛盾，$\therefore x \prec z$;
2. —$\preccurlyeq$是自反的，trivial;
   —$\preccurlyeq$是传递的，if $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z$, then (1) $x \prec y \wedge y \prec z$, $\therefore x \prec z$, So, $x \preccurlyeq y$; (2) $x = y \wedge y \prec z$, So, $x \prec z$, So, $x \preccurlyeq y$; (3) $x = y \wedge y = z$, So $x = z$, $x \preccurlyeq z$;
   —$\preccurlyeq$是反对称的，if $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x$，由传递性得：$x \preccurlyeq x$，而$x \prec x$是不可能的，So $x = y$.

□

拟序和偏序的关系

Theorem

1. 设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是poset，则$\preccurlyeq - \mathbb{1}_A$是拟序，记之为$\prec$;
2. 设$\prec$是A上的拟序，则$\prec \cup \mathbb{1}_A$是偏序，记之为$\preccurlyeq$.

Proof.

1. —$\prec$是反自反的，trivial;
   —$\prec$是传递的，if $x \prec y \wedge y \prec z$, then $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z$, $\therefore x \preccurlyeq z$, 但是$x \neq z$, 否则，根据$\preccurlyeq$的反对称性有：$x = y$，这与$x \prec y$矛盾，$\therefore x \prec z$;
2. —$\preccurlyeq$是自反的，trivial;
   —$\preccurlyeq$是传递的，if $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z$, then (1) $x \prec y \wedge y \prec z$, $\therefore x \prec z$, So, $x \preccurlyeq y$; (2) $x = y \wedge y \prec z$, So, $x \prec z$, So, $x \preccurlyeq z$; (3) $x = y \wedge y = z$, So $x = z$, $x \preccurlyeq z$;
   —$\preccurlyeq$是反对称的，if $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x$, 由传递性得：$x \preccurlyeq x$, 而$x \prec x$是不可能的，So $x = y$.

□

字典序关系

Notation

习惯上将偏序关系$\preccurlyeq$对应的拟序关系记为$\prec$，反之也然；如：$\leqslant$和$<$；$\subseteq$和$\subsetneq$ $(\subset)$等.

Example (字典序关系，Lexicographical order)

设$\langle \Sigma, \preccurlyeq \rangle$是有限字母表集合，其中：$\preccurlyeq$是字母表上的线序关系，则$\Sigma^*$上的关系$<$定义如下：
$\forall\, s = a_1 a_2 \cdots a_m,\ t = b_1 b_2 \cdots b_n \in \Sigma^*$, $s < t$, iff, 下条件之一成立：

- if $\exists k, 1 \leqslant k < \max\{m, n\}$, and $\forall i = 1, 2, \ldots, k,\ a_i = b_i, a_{k+1} \prec b_{k+1}$;
- if $k = m \wedge m < n$; (即s是t的前缀)
- if $a = \varepsilon \wedge b \neq \varepsilon$.

则，$<$是拟序，对应的偏序关系$\preccurlyeq$称为字典序关系；该序关系是线序关系.

字典序关系

Notation

习惯上将偏序关系$\preccurlyeq$对应的拟序关系记为$\prec$，反之也然；如：$\leqslant$和$<$；$\subseteq$和$\subsetneq$ $(\subset)$等.

Example (字典序关系，Lexicographical order)

设$\langle\Sigma, \preccurlyeq\rangle$是有限字母表集合，其中：$\preccurlyeq$是字母表上的线序关系，则$\Sigma^*$上的关系$\prec$定义如下：
$\forall\, s = a_1a_2 \cdots a_m,\ t = b_1b_2 \cdots b_n \in \Sigma^*$, $s \prec t$, iff, 下条件之一成立：

- if $\exists\, k, 1 \leqslant k < \min\{m, n\}$, and $\forall i = 1, 2 \ldots, k,\ a_i = b_i, a_{k+1} \prec b_{k+1}$;
- if $k = m \wedge m < n$; (即s是t的前缀)
- if $a = \varepsilon \wedge b \neq \varepsilon$;

则，$\prec$是拟序，对应的偏序关系$\preccurlyeq$称为字典序关系；该序关系是线序关系.

字典序关系

Notation

习惯上将偏序关系$\preccurlyeq$对应的拟序关系记为$\prec$，反之也然；如：$\leqslant$和$<$；$\subseteq$和$\subsetneq$ ($\subset$)等.

Example (字典序关系, Lexicographical order)

设$\langle \Sigma, \preccurlyeq \rangle$是有限字母表集合，其中：$\preccurlyeq$是字母表上的线序关系，则$\Sigma^*$上的关系$\prec$定义如下：
$\forall\, s = a_1 a_2 \cdots a_m,\ t = b_1 b_2 \cdots b_n \in \Sigma^*$, $s \prec t$, iff, 下条件之一成立：

- if $\exists\, k, 1 \leqslant k < \min\{m, n\}$, and $\forall i = 1, 2 \ldots, k,\ a_i = b_i, a_{k+1} \prec b_{k+1}$;
- if $k = m \wedge m < n$; (即s是t的前缀)
- if $a = \varepsilon \wedge b \neq \varepsilon$;

则，$\prec$是拟序，对应的偏序关系$\preccurlyeq$称为**字典序关系**；该序关系是线序关系.

字典序关系

Example

$\Sigma = \{a, b\} \wedge a \prec b$, 则：

$$\varepsilon \prec abb \preccurlyeq abba \preccurlyeq abbb \preccurlyeq abbba \preccurlyeq abbbbabbb$$

Example

$\Sigma = \{0, 1\} \wedge 0 \prec 1$, 则：

$$011 \preccurlyeq 0110 \preccurlyeq 0111 \preccurlyeq 01110 \preccurlyeq 011110111$$

$$0000001 \preccurlyeq 000001 \preccurlyeq 00001 \preccurlyeq 0001 \preccurlyeq 001 \preccurlyeq 01 \preccurlyeq 1$$

字典序关系

Example

$\Sigma = \{a, b\} \wedge a \prec b$, 则:

$$\varepsilon < abb \preccurlyeq abba \preccurlyeq abbb \preccurlyeq abbba \preccurlyeq abbbbabbb$$

Example

$\Sigma = \{0, 1\} \wedge 0 \prec 1$, 则:

$$011 \preccurlyeq 0110 \preccurlyeq 0111 \preccurlyeq 01110 \preccurlyeq 011110111$$
$$0000001 \preccurlyeq 000001 \preccurlyeq 00001 \preccurlyeq 0001 \preccurlyeq 001 \preccurlyeq 01 \preccurlyeq 1$$

最大元素和最小元素

Definition (最大元素和最小元素, greatest(least) element)

设$\langle A, \preccurlyeq\rangle$为Poset，$B \subseteq A$，$b$是$B$中的最大(小)元素，iff，下两条件成立：

- $b \in B$;
- $\forall x \in B$, x和b是可比较的，并且$x \preccurlyeq b(b \preccurlyeq x)$.

最大元素和最小元素

Definition (最大元素和最小元素, greatest(least) element)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，$b$是$B$中的最大(小)元素，iff，下两条件成立：

- $b \in B$;
- $\forall x \in B$, x和b是可比较的，并且$x \preccurlyeq b(b \preccurlyeq x)$.

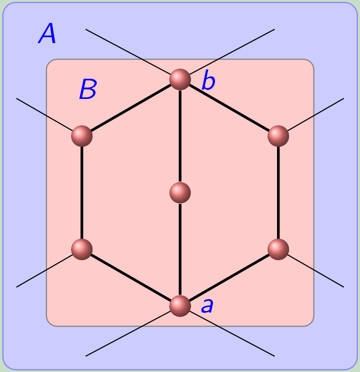
最大元素和最小元素

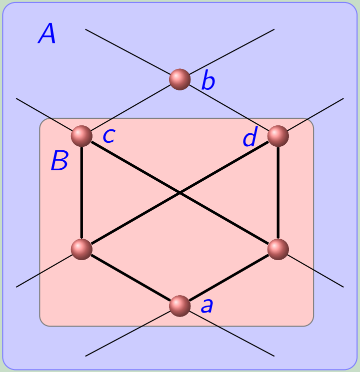
Definition (最大元素和最小元素, greatest(least) element)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，$b$是$B$中的最大(小)元素，iff，下两条件成立：

- $b \in B$;
- $\forall x \in B$, x和b是可比较的，并且$x \preccurlyeq b (b \preccurlyeq x)$.

最大元素和最小元素–Example





b是最大元素，a是最小元素　　没有最大元素，a是最小元素.

极大元素和极小元素

Definition (极大元素和极小元素, Maximum(Minimum) element)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，$b$是$B$中的极大(小)元素，iff，下两条件成立：

- $b \in B$;
- $\forall x \in B$，或者x和b是不可比较的，或者$x \preccurlyeq b (b \preccurlyeq x)$.

极大元素和极小元素

Definition (极大元素和极小元素, Maximum(Minimum) element)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，$b$是$B$中的极大(小)元素，iff，下两条件成立：

- $b \in B$;
- $\forall x \in B$，或者x和b是不可比较的，或者$x \preccurlyeq b$($b \preccurlyeq x$).

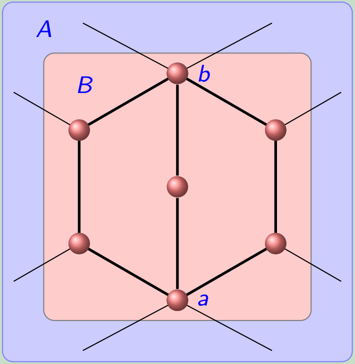
极大元素和极小元素

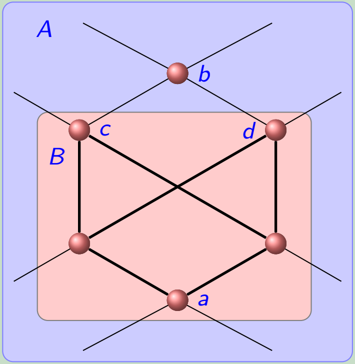
Definition (极大元素和极小元素, Maximum(Minimum) element)

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$, b是B中的极大(小)元素，iff, 下两条件成立：

- $b \in B$;
- $\forall x \in B$, 或者x和b是不可比较的，或者$x \preccurlyeq b (b \preccurlyeq x)$.

极大元素和极小元素–Example





b是最大元素，a是最小元素
b也是极大元素，a也是极小元素

没有最大元素，a是最小元素
c和d是极大元素，a也是极小元素

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. *if* B有最大(小)元素，*then* 该元素是唯一的；
2. *if* B有最大(小)元素，则该元素一定也是极大(小)元素；
3. 极大(小)元素不一定唯一；
4. *if* B是有限集合，则B一定存在极大(小)元素.

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. *if* B有最大(小)元素，*then* 该元素是唯一的；
2. *if* B有最大(小)元素，则该元素一定也是极大(小)元素；
3. 极大(小)元素不一定唯一；
4. *if* B是有限集合，则B一定存在极大(小)元素.

Proof.

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. if B有最大(小)元素，then 该元素是唯一的；
2. if B有最大(小)元素，则该元素一定也是极大(小)元素；
3. 极大(小)元素不一定唯一；
4. if B是有限集合，则B一定存在极大(小)元素.

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. if B有最大(小)元素，then 该元素是唯一的;
2. if B有最大(小)元素，则该元素一定也是极大(小)元素;
3. 极大(小)元素不一定唯一;
4. if B是有限集合，则B一定存在极大(小)元素.

Proof.

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. if B有最大(小)元素，then 该元素是唯一的;
2. if B有最大(小)元素，则该元素一定也是极大(小)元素;
3. 极大(小)元素不一定唯一;
4. if B是有限集合，则B一定存在极大(小)元素.

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. if B有最大(小)元素，then 该元素是唯一的；
2. if B有最大(小)元素，则该元素一定也是极大(小)元素；
3. 极大(小)元素不一定唯一；
4. if B是有限集合，则B一定存在极大(小)元素.

Proof.

2. 利用反对称性：设b和b'是B的最大元素，则：$b \preccurlyeq b' \wedge b' \preccurlyeq b$，$\therefore b = b'$；
4. 设$B = \{ b_1, b_2, \ldots, b_m \}$，按下述步骤求$min$:
   ① $k = 2$; $min := b_1$;
   ② if $(k > m)$ Stop;
   else { {if $(b_k < min)$ then $min := b_k$;} $k := k + 1$; goto 2;}
   由于B有限，该过程一定stop，最后得到的min一定是极小元素.

□

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. if B有最大(小)元素，then 该元素是唯一的；
2. if B有最大(小)元素，则该元素一定也是极大(小)元素；
3. 极大(小)元素不一定唯一；
4. if B是有限集合，则B一定存在极大(小)元素.

Proof.

2. 利用反对称性：设b和b'是B的最大元素，则：$b \preccurlyeq b' \wedge b' \preccurlyeq b$, $\therefore b = b'$;
4. 设$B = \{ b_1, b_2, \ldots, b_m \}$，按下述步骤求$min$:
   ① $k = 2$; $min := b_1$;
   ② if $(k > m)$ Stop;
   else { {if (b_k <min) then $min := b_k$;} $k := k+1$; goto 2;}
   由于B有限，该过程一定stop，最后得到的min一定是极小元素.

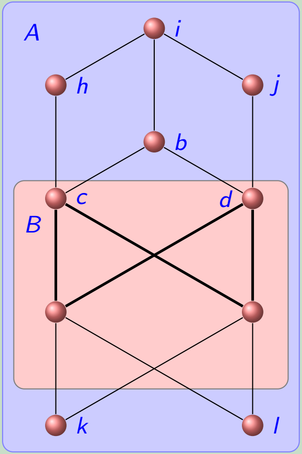
□

临界元素

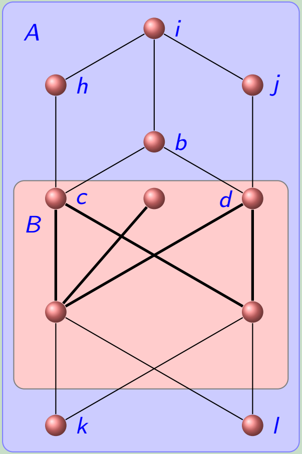
Definition (上(下)界, Upper(Lower) bound)

- 设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，$a \in A$是$B$的上(下)界，iff，$\forall b \in B,\ b \preccurlyeq a (a \preccurlyeq b)$
- 最小上界(上确界)(Least upper bound, Supremum)：上界集合$\{\, a | a$是B的上界$\}$的最小元素，记为：$\text{lub}(B)$;
- 最大下界(下确界)(Greatest lower bound, Infimum)：下界集合$\{\, a | a$是B的下界$\}$的最大元素，记为：$\text{glb}(B)$.

临界元素– Example



b,i是B的上界; j,h不是B的上界;
b 是B的lub; k,l是B的下界.



没有glb;

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. a是B的lub, iff, a是ub，并且$\forall a'$为B的ub，有$a \preccurlyeq a'$;
2. a是B的glb, iff, a是lb，并且$\forall a'$为B的lb，有$a' \preccurlyeq a$;
3. if B has lub(glb)，then 该元素是唯一的;
4. if B有最大(小)元素，则该元素一定也是lub(glb).

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. a是B的lub, iff, a是ub，并且$\forall a'$为B的ub，有$a \preccurlyeq a'$;
2. a是B的glb, iff, a是lb，并且$\forall a'$为B的lb，有$a' \preccurlyeq a$;
3. if B has lub(glb)，then 该元素是唯一的;
4. if B有最大(小)元素，则该元素一定也是lub(glb).

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. a是B的lub, iff, a是ub，并且$\forall a'$为B的ub，有$a \preccurlyeq a'$;
2. a是B的glb, iff, a是lb，并且$\forall a'$为B的lb，有$a' \preccurlyeq a$;
3. if B has lub(glb)，then 该元素是唯一的;
4. if B有最大(小)元素，则该元素一定也是lub(glb).

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. a是B的lub, iff, a是ub，并且$\forall a'$为B的ub，有$a \preccurlyeq a'$;
2. a是B的glb, iff, a是lb，并且$\forall a'$为B的lb，有$a' \preccurlyeq a$;
3. if B has lub(glb)，then 该元素是唯一的;
4. if B有最大(小)元素，则该元素一定也是lub(glb).

相关性质

Theorem

设$\langle A, \preccurlyeq\rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

1. a是B的lub, iff, a是ub，并且$\forall a'$为B的ub，有$a \preccurlyeq a'$;
2. a是B的glb, iff, a是lb，并且$\forall a'$为B的lb，有$a' \preccurlyeq a$;
3. if B has lub(glb)，then 该元素是唯一的;
4. if B有最大(小)元素，则该元素一定也是lub(glb).

Example

Example

1. $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$, $B = \{-1, -1/2, -1/3, \ldots\}$, $\text{lub}(B) = 0 \notin B$;
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \triangleq \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $f \preccurlyeq g$, iff, $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant g(x)$, 则$\langle \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \preccurlyeq \rangle$是Poset;
   设$B = \{x \longmapsto \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$,
   则$\text{lub}(B) = g, g(x) = 1$ *if* $x \neq 0$; $g(0) = 0$;
3. $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$,$\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(A)$, then:
   $$\text{lub}(\mathcal{B}) = \bigcup_{C \in \mathcal{B}} C; \quad \text{glb}(\mathcal{B}) = \bigcap_{C \in \mathcal{B}} C;$$
4. $\langle \{a, b\}^*, \preccurlyeq \rangle$, $B = \{ab, aab, aaab, \ldots\}$, 则$\text{lub}(B) = ab$, 而对任意$n$, $a^n \preccurlyeq a^m b \in B$, 并且对型如: $a^n b^m a^p$的串都不可能是B的下界, $\therefore$下界集合是$\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, 没有glb.

Example

Example

1. $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$, $B = \{-1, -1/2, -1/3, \ldots\}$, $\mathrm{lub}(B) = 0 \notin B$;
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \triangleq \{ f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}$, $f \preccurlyeq g$, iff, $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant g(x)$, 则$\langle \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \preccurlyeq \rangle$是Poset;
   设$B = \{ x \longmapsto \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N} \}$,
   则$\mathrm{lub}(B) = g, g(x) = 1\ if\ x \neq 0;\ g(0) = 0$;
3. $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$,$\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(A)$, then:
   $$\mathrm{lub}(\mathcal{B}) = \bigcup_{C \in \mathcal{B}} C; \quad \mathrm{glb}(\mathcal{B}) = \bigcap_{C \in \mathcal{B}} C;$$
4. $\langle \{a, b\}^*, \preccurlyeq \rangle$, $B = \{ab, aab, aaab, \ldots\}$, 则$\mathrm{lub}(B) = ab$, 而对任意$n$, $a^n \preccurlyeq a^m b \in B$, 并且对型如: $a^n b^m a^p$的串都不可能是B的下界, $\therefore$下界集合是$\{ a^n \mid n \in \mathbb{N} \}$, 没有glb.

Example

Example

1. $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$, $B = \{-1, -1/2, -1/3, \ldots\}$, $\mathrm{lub}(B) = 0 \notin B$;
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \triangleq \{ f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}$, $f \preccurlyeq g$, iff, $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant g(x)$, 则$\langle \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \preccurlyeq \rangle$ 是Poset;
   设$B = \{ x \longmapsto \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N} \}$,
   则$\mathrm{lub}(B) = g, g(x) = 1\ if\ x \neq 0;\ g(0) = 0$;
3. $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$,$\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(A)$, then:
   $$\mathrm{lub}(\mathcal{B}) = \bigcup_{C \in \mathcal{B}} C; \quad \mathrm{glb}(\mathcal{B}) = \bigcap_{C \in \mathcal{B}} C;$$
4. $\langle \{a, b\}^*, \preccurlyeq \rangle$, $B = \{ab, aab, aaab, \ldots\}$, 则$\mathrm{lub}(B) = ab$, 而对任意$n$, $a^n \preccurlyeq a^m b \in B$, 并且对型如: $a^n b^m a^p$的串都不可能是B的下界, $\therefore$下界集合是$\{ a^n \mid n \in \mathbb{N} \}$, 没有glb.

Example

Example

1. $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$, $B = \{-1, -1/2, -1/3, \ldots\}$, $\mathrm{lub}(B) = 0 \notin B$;
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \triangleq \{ f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}$, $f \preccurlyeq g$, iff, $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant g(x)$, 则$\langle \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \preccurlyeq \rangle$ 是Poset;
   设$B = \{ x \longmapsto \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N} \}$,
   则$\mathrm{lub}(B) = g, g(x) = 1\ if\ x \neq 0;\ g(0) = 0$;
3. $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$,$\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(A)$, then:

$$\mathrm{lub}(\mathcal{B}) = \bigcup_{C \in \mathcal{B}} C; \quad \mathrm{glb}(\mathcal{B}) = \bigcap_{C \in \mathcal{B}} C;$$

4. $\langle \{a, b\}^*, \preccurlyeq \rangle$, $B = \{ab, aab, aaab, \ldots\}$, 则$\mathrm{lub}(B) = ab$, 而对任意$n$, $a^n \preccurlyeq a^m b \in B$, 并且对型如: $a^n b^m a^p$的串都不可能是B的下界, $\therefore$下界集合是$\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, 没有glb.

Example

Example

1. $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$, $B = \{-1, -1/2, -1/3, \ldots\}$, $\text{lub}(B) = 0 \notin B$;
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \triangleq \{ f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}$, $f \preccurlyeq g$, iff, $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant g(x)$, 则$\langle \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \preccurlyeq \rangle$ 是Poset;
   设$B = \{ x \longmapsto \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N} \}$,
   则$\text{lub}(B) = g, g(x) = 1\ if\ x \neq 0;\ g(0) = 0;$
3. $\langle \mathscr{P}(A), \subseteq \rangle$,$\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(A)$, then:

$$\text{lub}(\mathcal{B}) = \bigcup_{C \in \mathcal{B}} C; \quad \text{glb}(\mathcal{B}) = \bigcap_{C \in \mathcal{B}} C;$$

4. $\langle \{a, b\}^*, \preccurlyeq \rangle$, $B = \{ab, aab, aaab, \ldots\}$, 则$\text{lub}(B) = ab$, 而对任意$n$, $a^n \preccurlyeq a^m b \in B$, 并且对型如: $a^n b^m a^p$的串都不可能是B的下界, $\therefore$下界集合是$\{ a^n \mid n \in \mathbb{N} \}$, 没有glb.

小节

Description

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为Poset，$B \subseteq A$，

	是否存在	是否唯一	是否在B中	与其他特殊元素的关系
最大元素	NO	YES	YES	
极大元素	NO	NO	YES	最大元素是极大元素
上界	NO	NO	NO	最大元素是上界
最小上界	NO	YES	NO	最大元素是lub
最小元素	NO	YES	YES	
极小元素	NO	NO	YES	最小元素是极小元素
下界	NO	NO	NO	最小元素是下界
最大上界	NO	YES	NO	最小元素是glb

Example

设有如下方程组:

$$\begin{cases} z = 3; \\ x = 5 * z + 2; \\ u = 6 - z; \\ t = z + x + 2 * u \\ y = u * z + x; \\ v = t + y * 3 * x; \end{cases}$$

对$\{t, u, v, x, y, z\}$定义关系$\prec$:

$$a \prec b, \text{ iff. } b\text{的计算依赖}a$$

if 方程组没有循环依赖关系 (如: $a = f(b) \wedge b = g(a)$), 则$\prec$一定是偏序关系;

Example

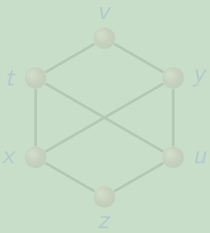
设有如下方程组:

$$\begin{cases} z = 3; \\ x = 5 * z + 2; \\ u = 6 - z; \\ t = z + x + 2 * u \\ y = u * z + x; \\ v = t + y * 3 * x; \end{cases}$$

对$\{t, u, v, x, y, z\}$定义关系$<$:

$a < b$, iff, b的计算依赖a

if 方程组没有循环依赖关系
($如: a = f(b) \wedge b = g(a)$), 则$\leqslant$一定是偏序关系;



方程组的求解次序$<$可以为:

z, x, u, t, y, v

Or:

z, u, x, y, t, v

$\leqslant$满足:

$\forall a, b\ a \leqslant b \Longrightarrow a \leqslant b$

Example

设有如下方程组：

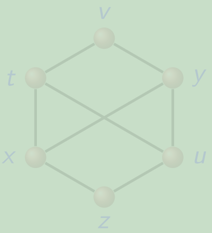
$$\begin{cases} z = 3; \\ x = 5 * z + 2; \\ u = 6 - z; \\ t = z + x + 2 * u \\ y = u * z + x; \\ v = t + y * 3 * x; \end{cases}$$

对$\{t, u, v, x, y, z\}$定义关系$\prec$:

$a \prec b$, iff, b的计算依赖a

if 方程组没有循环依赖关系

(如：$a = f(b) \wedge b = g(a)$)，则$\preccurlyeq$一定是偏序关系；



方程组的求解次序$\prec$可以为：

z, x, u, t, y, v

Or:

z, u, x, y, t, v

$\preccurlyeq$满足：

$\forall a, b\ a \preccurlyeq b \Longrightarrow a \leq b$

Example

设有如下方程组:

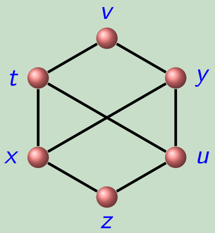
$$\begin{cases} z = 3; \\ x = 5 * z + 2; \\ u = 6 - z; \\ t = z + x + 2 * u \\ y = u * z + x; \\ v = t + y * 3 * x; \end{cases}$$

对$\{t, u, v, x, y, z\}$定义关系$\prec$:

$a \prec b$, iff, b的计算依赖a

if 方程组没有循环依赖关系

(如: $a = f(b) \wedge b = g(a)$), 则$\preccurlyeq$一定是偏序关系;



方程组的求解次序$\prec$可以为:

z, x, u, t, y, v

Or:

z, u, x, y, t, v

$\preccurlyeq$满足:

$\forall a, b\ a \preccurlyeq b \Longrightarrow a \preccurlyeq b$

相容关系和拓扑排序

Definition (拓扑排序, Topological Sorting)

$\langle A, \preccurlyeq \rangle$ a poset, 设$\leqslant$是A上的线序关系，称$\leqslant$和$\preccurlyeq$是相容的(compatible)，iff,

$$\forall a, b \in A \ , \ a \preccurlyeq b \Longrightarrow a \leqslant b$$

$\leqslant$称为$\preccurlyeq$的拓扑排序.

Algorithm

设$A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$，求拓扑排序$m_1, m_2, \ldots, m_n$

相容关系和拓扑排序

Definition (拓扑排序, Topological Sorting)

$\langle A, \preccurlyeq \rangle$ a poset, 设$\leqslant$是A上的线序关系，称$\leqslant$和$\preccurlyeq$是相容的(compatible)，iff,

$$\forall a, b \in A \;,\; a \preccurlyeq b \Longrightarrow a \leqslant b$$

$\leqslant$称为$\preccurlyeq$的拓扑排序.

Algorithm

设$A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$，求拓扑排序$m_1, m_2, \ldots, m_n$

1. $k := 1;\ S := A;$
2. $m_k := S$中的极小元素;
   $S := S - \{ m_k \}; k := k + 1;$
   $if\ (S == \emptyset)\ Stop;\ else\ goto$ ②;

相容关系和拓扑排序

Definition (拓扑排序, Topological Sorting)

$\langle A, \preccurlyeq \rangle$ a poset, 设$\leqslant$是A上的线序关系，称$\leqslant$和$\preccurlyeq$是相容的(compatible)，iff,

$$\forall a, b \in A\ ,\ a \preccurlyeq b \Longrightarrow a \leqslant b$$

$\leqslant$称为$\preccurlyeq$的拓扑排序.

Algorithm

设$A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$，求拓扑排序$m_1, m_2, \ldots, m_n$

1. $k := 1;\ S := A;$
2. $m_k := S$中的极小元素;
   $S := S - \{ m_k \}; k := k + 1;$
   $if\ (S == \emptyset)\ Stop;\ else\ goto$ ②;

相容关系和拓扑排序

Definition (拓扑排序, Topological Sorting)

$\langle A, \preccurlyeq \rangle$ a poset, 设$\leqslant$是A上的线序关系，称$\leqslant$和$\preccurlyeq$是相容的(compatible)，iff,

$$\forall a, b \in A \;,\; a \preccurlyeq b \Longrightarrow a \leqslant b$$

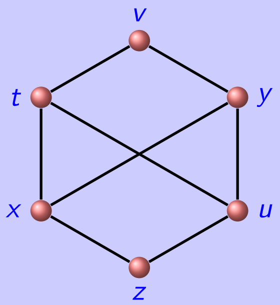
$\leqslant$称为$\preccurlyeq$的拓扑排序.

Algorithm

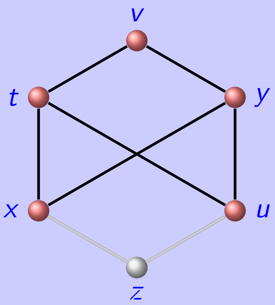
设$A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$，求拓扑排序$m_1, m_2, \ldots, m_n$

1. $k := 1;\ S := A;$
2. $m_k := S$中的极小元素;
   $S := S - \{ m_k \}; k := k + 1;$
   $if\ (S == \emptyset)\ Stop;\ else\ goto$ ②;

拓扑排序算法的动态演示

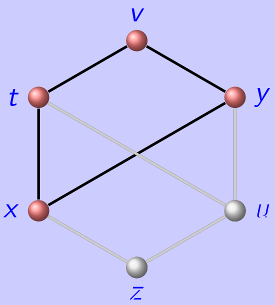


拓扑排序算法的动态演示



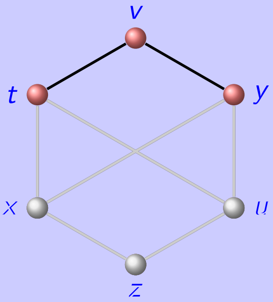
order : z

拓扑排序算法的动态演示



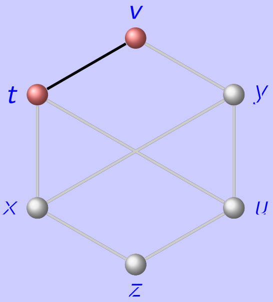
order : z, u

拓扑排序算法的动态演示



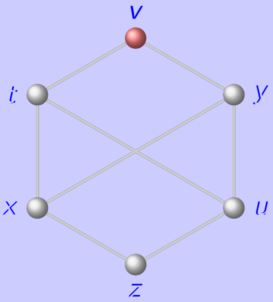
order : z, u, x

拓扑排序算法的动态演示



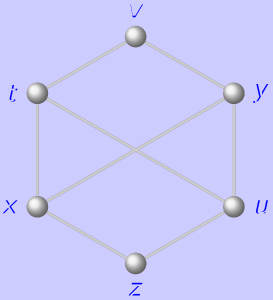
$order: \; z, u, x, y$

拓扑排序算法的动态演示



order : z, u, x, y, t

拓扑排序算法的动态演示



order： z, u, x, y, t, v

良序关系

Definition (良序关系, Well order)

$\langle \Sigma, \preccurlyeq \rangle$ a poset, 称关系$\preccurlyeq$为良序关系, iff,

$\preccurlyeq$是线序, 并且, A的每个非空子集合都存在最小元素

$\langle \Sigma, \preccurlyeq \rangle$也称为良序集(Well-ordered set)

Example

- $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \{1, 2, 4, 8\}, | \rangle$是良序集合;

  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$都不是良序集合;

  $\langle \Sigma^*, \preccurlyeq \rangle$不是良序集合

  $\ldots, 0000001, 000001, 00001, 0001, 001, 01, 1$ 没有最小元素

Theorem (Well-ordering theorem)

任意一个集合都可以在其上构造一个良序关系.

良序关系

Definition (良序关系, Well order)

$\langle \Sigma, \preccurlyeq \rangle$ a poset, 称关系$\preccurlyeq$为良序关系, iff,

$\preccurlyeq$是线序，并且，A的每个非空子集合都存在最小元素

$\langle \Sigma, \preccurlyeq \rangle$也称为良序集(Well-ordered set)

Example

- $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$, $\langle \{1, 2, 4, 8\}, | \rangle$是良序集合;
- $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$, $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$都不是良序集合;
- $\langle \Sigma^*, \preccurlyeq \rangle$不是良序集合
  $\{\ldots, 0000001, 000001, 00001, 0001, 001, 01, 1\}$没有最小元素.

Theorem (Well-ordering theorem)

任意一个集合都可以在其上构造一个良序关系.

良序关系

Definition (良序关系, Well order)

$\langle\Sigma,\preccurlyeq\rangle$ a poset, 称关系$\preccurlyeq$为良序关系, iff,
$\preccurlyeq$是线序, 并且, A的每个非空子集合都存在最小元素
$\langle\Sigma,\preccurlyeq\rangle$也称为良序集(Well-ordered set)

Example

- $\langle\mathbb{N},\leqslant\rangle$, $\langle\{1,2,4,8\},|\rangle$是良序集合;
- $\langle\mathbb{Z},\leqslant\rangle$, $\langle\mathbb{Q},\leqslant\rangle$, $\langle\mathbb{R},\leqslant\rangle$都不是良序集合;
- $\langle\Sigma^*,\preccurlyeq\rangle$不是良序集合
  $\{\ldots,0000001,000001,00001,0001,001,01,1\}$没有最小元素.

Theorem (Well-ordering theorem)

任意一个集合都可以在其上构造一个良序关系.

良序关系

Definition (良序关系, Well order)

$\langle \Sigma, \preccurlyeq \rangle$ a poset, 称关系$\preccurlyeq$为良序关系, iff,

$\preccurlyeq$是线序, 并且, A的每个非空子集合都存在最小元素

$\langle \Sigma, \preccurlyeq \rangle$也称为良序集(Well-ordered set)

Example

- $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$, $\langle \{1, 2, 4, 8\}, | \rangle$是良序集合;
- $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$, $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$都不是良序集合;
- $\langle \Sigma^*, \leqslant \rangle$不是良序集合
  $\{\ldots, 0000001, 000001, 00001, 0001, 001, 01, 1\}$没有最小元素.

Theorem (Well-ordering theorem)

任意一个集合都可以在其上构造一个良序关系.

良序关系

Definition (良序关系, Well order)

$\langle\Sigma,\preccurlyeq\rangle$ a poset, 称关系$\preccurlyeq$为良序关系, iff,
$\preccurlyeq$是线序, 并且, A的每个非空子集合都存在最小元素
$\langle\Sigma,\preccurlyeq\rangle$也称为良序集(Well-ordered set)

Example

- $\langle\mathbb{N},\leqslant\rangle$, $\langle\{1,2,4,8\},|\rangle$是良序集合;
- $\langle\mathbb{Z},\leqslant\rangle$, $\langle\mathbb{Q},\leqslant\rangle$, $\langle\mathbb{R},\leqslant\rangle$都不是良序集合;
- $\langle\Sigma^*,\leqslant\rangle$不是良序集合
  $\{\ldots,0000001,000001,00001,0001,001,01,1\}$没有最小元素.

Theorem (Well-ordering theorem)

任意一个集合都可以在其上构造一个良序关系.

良序关系

Definition (良序关系, Well order)

$\langle\Sigma,\preccurlyeq\rangle$ a poset, 称关系$\preccurlyeq$为良序关系, iff,

$\preccurlyeq$是线序, 并且, A的每个非空子集合都存在最小元素

$\langle\Sigma,\preccurlyeq\rangle$也称为良序集(Well-ordered set)

Example

- $\langle\mathbb{N},\leqslant\rangle$, $\langle\{1,2,4,8\},|\rangle$是良序集合;
- $\langle\mathbb{Z},\leqslant\rangle$, $\langle\mathbb{Q},\leqslant\rangle$, $\langle\mathbb{R},\leqslant\rangle$都不是良序集合;
- $\langle\Sigma^*,\leqslant\rangle$不是良序集合
  $\{\ldots,0000001,000001,00001,0001,001,01,1\}$没有最小元素.

Theorem (Well-ordering theorem)

任意一个集合都可以在其上构造一个良序关系.

本章小节