

1 谓词与量词

- 谓词
- 符号化
- 一阶逻辑公式的语义

2 公式间的关系式

- 逻辑等价和永真蕴涵关系
- 量词的逻辑关系
- 前束范式

3 谓词公式的自然推理

- 相关概念的复习
- 量词的推理规则
- 形式证明的例子
- Mechanized Reasoning

A black and white portrait of a young man with light-colored hair, wearing a wide-brimmed hat and a collared shirt. He is looking directly at the camera with a slight smile. The background is a plain, light color.

1 谓词与量词

- 谓词
- 符号化
- 一阶逻辑公式的语义

2 公式间的关系式

- 逻辑等价和永真蕴涵关系
- 量词的逻辑关系
- 前束范式

3 谓词公式的自然推理

- 相关概念的复习
- 量词的推理规则
- 形式证明的例子
- Mechanized Reasoning

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R 是 P 和 Q 的有效结论;
- 但是, 如果用命题逻辑来表达则不成立: $P, Q \not\models R$;
- 原因: P , Q 和 R 所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项, 谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R 是 P 和 Q 的有效结论;
- 但是, 如果用命题逻辑来表达则不成立: $P, Q \not\models R$;
- 原因: P , Q 和 R 所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项, 谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R 是 P 和 Q 的有效结论;
- 但是, 如果用命题逻辑来表达则不成立: $P, Q \not\models R$;
- 原因: P , Q 和 R 所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项, 谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R 是 P 和 Q 的有效结论;
- 但是, 如果用命题逻辑来表达则不成立: $P, Q \not\models R$;
- 原因: P , Q 和 R 所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项, 谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R 是 P 和 Q 的有效结论;
- 但是, 如果用命题逻辑来表达则不成立: $P, Q \not\models R$;
- 原因: P , Q 和 R 所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项, 谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R 是 P 和 Q 的有效结论;
- 但是, 如果用命题逻辑来表达则不成立: $P, Q \not\models R$;
- 原因: P , Q 和 R 所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项, 谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R 是 P 和 Q 的有效结论;
- 但是, 如果用命题逻辑来表达则不成立: $P, Q \not\vdash R$;
- 原因: P , Q 和 R 所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项, 谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius).$

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R 是 P 和 Q 的有效结论;
- 但是, 如果用命题逻辑来表达则不成立: $P, Q \not\vdash R$;
- 原因: P , Q 和 R 所描述的对象是相关的, 但是, 在抽象为原子后, 彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息: 引入项, 谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Extensions to First-order Logic

Idea

- 真假值的运算规则和命题逻辑一致；
- 真假值与对象相关；
- 有足够的表达能力，数学语言完全能够用一阶逻辑表达；
- 注意：计算机中很多的现象不能用一阶逻辑表达；
- Logic in computer science: Combinatory Logic, Hoare Logic, Temporal Logic, Dynamic Logic, Linear Logic, High Order Logic, etc.

Terms (1/2)

Example

- ① “x大于3”; $P(x)$
- ② “x大于y”; $Q(x, y)$
- ③ “x+1大于x”; $R(x)$
- ④ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的(*GREATER*).

Example

- ① 引入量词谓词是自然语言中“所有”、“存在”等词语的符号化
- ② “x大于3”; $P(x)$
- ③ “x大于y”; $Q(x, y)$
- ④ “x+1大于x”; $R(x)$
- ⑤ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的(*GREATER*).

Terms (1/2)

Example

- ① “x大于3”; $P(x)$
- ② “x大于y”; $Q(x, y)$
- ③ “x+1大于x”; $R(x)$
- ④ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的(*GREATER*).

Example

- ① 引入量词时, 量词后面的变元, 称为“约束变元”, 通常用字母x, y, z表示。
- ② 变元x, y, z, 称为“自由变元”, 通常用字母a, b, c表示。
- ③ 自由变元, 通常用大写字母A, B, C表示。
- ④ 在谓词公式中, 自由变元与约束变元, 统称为“变元”。
- ⑤ 在谓词公式中, 变元x, y, z, 称为“个体变元”, 通常用字母x, y, z表示。
- ⑥ 在谓词公式中, 变元a, b, c, 称为“个体常元”, 通常用字母a, b, c表示。
- ⑦ 在谓词公式中, 变元A, B, C, 称为“谓词常元”, 通常用字母A, B, C表示。
- ⑧ 在谓词公式中, 变元x, y, z, 称为“个体变元”, 通常用字母x, y, z表示。
- ⑨ 在谓词公式中, 变元a, b, c, 称为“个体常元”, 通常用字母a, b, c表示。
- ⑩ 在谓词公式中, 变元A, B, C, 称为“谓词常元”, 通常用字母A, B, C表示。

Terms (1/2)

Example

- ① “x大于3”; $P(x)$
- ② “x大于y”; $Q(x, y)$
- ③ “x+1大于x”; $R(x)$
- ④ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的(*GREATER*).

Example

Terms (1/2)

Example

- ① “x大于3”; $P(x)$
- ② “x大于y”; $Q(x, y)$
- ③ “x+1大于x”; $R(x)$
- ④ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的(*GREATER*).

Example

Terms (1/2)

Example

- ① “x大于3”; $P(x)$
- ② “x大于y”; $Q(x, y)$
- ③ “x+1大于x”; $R(x)$
- ④ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的($GREATER$).

Example

- ④ 引入表示对象关系的函数, $plus$ 和常数值3, 上述关系可表示为:

Terms (1/2)

Example

- ① “x大于3”; $P(x)$
- ② “x大于y”; $Q(x, y)$
- ③ “x+1大于x”; $R(x)$
- ④ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的(*GREATER*).

Example

- ① 引入表示对象关系的函数*plus*和常数对象3, 上述关系可表示为:
- ② “x大于3”; $GREATER(x, 3)$
- ③ “x大于y”; $GREATER(x, y)$
- ④ “x+1大于x”; $GREATER(plus(x, 1), x)$
- ⑤ 这样在谓词中出现的对象可以通过常数, 变量和函数符号组合成的对象, 称之为项(*terms*).

Terms (1/2)

Example

- ① “x大于3”; $P(x)$
- ② “x大于y”; $Q(x, y)$
- ③ “x+1大于x”; $R(x)$
- ④ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的($GREATER$).

Example

- ① 引入表示对象关系的函数 $plus$ 和常数对象 3 , 上述关系可表示为:
- ② “x大于3”; $GREATER(x, 3)$
- ③ “x大于y”; $GREATER(x, y)$
- ④ “x+1大于x”; $GREATER(plus(x, 1), x)$
- ⑤ 这样在谓词中出现的对象可以通过常数, 变量和函数符号组合成的对象, 称之为项($terms$).

Terms (1/2)

Example

- ① “x大于3”; $P(x)$
- ② “x大于y”; $Q(x, y)$
- ③ “x+1大于x”; $R(x)$
- ④ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的($GREATER$).

Example

- ① 引入表示对象关系的函数 $plus$ 和常数对象 3 , 上述关系可表示为:
- ② “x大于3”; $GREATER(x, 3)$
- ③ “x大于y”; $GREATER(x, y)$
- ④ “x+1大于x”; $GREATER(plus(x, 1), x)$
- ⑤ 这样在谓词中出现的对象可以通过常数, 变量和函数符号组合成的对象, 称之为项(terms).

Terms (1/2)

Example

- ① “x大于3”; $P(x)$
- ② “x大于y”; $Q(x, y)$
- ③ “x+1大于x”; $R(x)$
- ④ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的($GREATER$).

Example

- ① 引入表示对象关系的函数 $plus$ 和常数对象3, 上述关系可表示为:
- ② “x大于3”; $GREATER(x, 3)$
- ③ “x大于y”; $GREATER(x, y)$
- ④ “x+1大于x”; $GREATER(plus(x, 1), x)$
- ⑤ 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数, 变量和函数符号组合成的对象, 称之为项($terms$).

Terms (1/2)

Example

- ① “x大于3”; $P(x)$
- ② “x大于y”; $Q(x, y)$
- ③ “x+1大于x”; $R(x)$
- ④ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的($GREATER$).

Example

- ① 引入表示对象关系的函数 $plus$ 和常数对象3, 上述关系可表示为:
- ② “x大于3”; $GREATER(x, 3)$
- ③ “x大于y”; $GREATER(x, y)$
- ④ “x+1大于x”; $GREATER(plus(x, 1), x)$
- ⑤ 这样在谓词中出现的对象可以通过常数, 变量和函数符号组合成的对象, 称之为项($terms$).

Terms (1/2)

Example

- ① “x大于3”; $P(x)$
- ② “x大于y”; $Q(x, y)$
- ③ “x+1大于x”; $R(x)$
- ④ 三句话所描述的对象不同, 但是对象之间的关系是相同的($GREATER$).

Example

- ① 引入表示对象关系的函数 $plus$ 和常数对象3, 上述关系可表示为:
- ② “x大于3”; $GREATER(x, 3)$
- ③ “x大于y”; $GREATER(x, y)$
- ④ “x+1大于x”; $GREATER(plus(x, 1), x)$
- ⑤ 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数, 变量和函数符号组合成的对象, 称之为项($terms$).

Terms (2/2)

Example

- ① "x loves y": $Love(x, y)$
- ② "x's father loves x": $Love(father(x), x)$
- ③ "John loves Mary": $Love(John, Mary)$
- ④ "Mary's father loves Mary": $Love(father(Mary), Mary)$

Remark

Terms (2/2)

Example

- ① "x loves y": $\text{Love}(x, y)$
- ② "x's father loves x": $\text{Love}(\text{father}(x), x)$
- ③ "John loves Mary": $\text{Love}(\text{John}, \text{Mary})$
- ④ "Mary's father loves Mary": $\text{Love}(\text{father}(\text{Mary}), \text{Mary})$

Remark

Terms (2/2)

Example

- ① "x loves y": $\text{Love}(x, y)$
- ② "x's father loves x": $\text{Love}(\text{father}(x), x)$
- ③ "John loves Mary": $\text{Love}(\text{John}, \text{Mary})$
- ④ "Mary's father loves Mary": $\text{Love}(\text{father}(\text{Mary}), \text{Mary})$

Remark

Terms (2/2)

Example

- ① "x loves y": $\text{Love}(x, y)$
- ② "x's father loves x": $\text{Love}(\text{father}(x), x)$
- ③ "John loves Mary": $\text{Love}(\text{John}, \text{Mary})$
- ④ "Mary's father loves Mary": $\text{Love}(\text{father}(\text{Mary}), \text{Mary})$

Remark

Terms (2/2)

Example

- ① "x loves y": $\text{Love}(x, y)$
- ② "x's father loves x": $\text{Love}(\text{father}(x), x)$
- ③ "John loves Mary": $\text{Love}(\text{John}, \text{Mary})$
- ④ "Mary's father loves Mary": $\text{Love}(\text{father}(\text{Mary}), \text{Mary})$

Remark

- ❶ 也可以在谓词中不使用变元, 这样需要引入更多的谓词, 使得谓词公式过于复杂, 如:

“x's father loves x” 用谓词 $\text{father}(x, y)$ 表示

“John loves Mary” 用谓词 $\text{loves}(x, y)$ 表示

“Mary's father loves Mary” 用谓词 $\text{loves}(x, y)$ 表示

Terms (2/2)

Example

- ① "x loves y": $\text{Love}(x, y)$
- ② "x's father loves x": $\text{Love}(\text{father}(x), x)$
- ③ "John loves Mary": $\text{Love}(\text{John}, \text{Mary})$
- ④ "Mary's father loves Mary": $\text{Love}(\text{father}(\text{Mary}), \text{Mary})$

Remark

- ① 也可以在谓词中不使用项, 这样需要引入更多的谓词, 使得谓词公式过于复杂, 如:
- ② "x is y' father": $\text{FATHER}(x, y)$
- ③ "x's father loves x": $\text{FATHER}(y, x) \wedge \text{LOVE}(y, x)$

Terms (2/2)

Example

- ① "x loves y": $\text{Love}(x, y)$
- ② "x's father loves x": $\text{Love}(\text{father}(x), x)$
- ③ "John loves Mary": $\text{Love}(\text{John}, \text{Mary})$
- ④ "Mary's father loves Mary": $\text{Love}(\text{father}(\text{Mary}), \text{Mary})$

Remark

- ① 也可以在谓词中不使用项, 这样需要引入更多的谓词, 使得谓词公式过于复杂, 如:
- ② "x is y' father": $\text{FATHER}(x, y)$
- ③ "x's father loves x": $\text{FATHER}(y, x) \wedge \text{LOVE}(y, x)$

Terms (2/2)

Example

- ① "x loves y": $Love(x, y)$
- ② "x's father loves x": $Love(father(x), x)$
- ③ "John loves Mary": $Love(John, Mary)$
- ④ "Mary's father loves Mary": $Love(father(Mary), Mary)$

Remark

- ① 也可以在谓词中不使用项, 这样需要引入更多的谓词, 使得谓词公式过于复杂, 如:
- ② "x is y' father": $FATHER(x, y)$
- ③ "x's father loves x": $FATHER(y, x) \wedge LOVE(y, x)$

Terms (2/2)

Example

- ① "x loves y": $\text{Love}(x, y)$
- ② "x's father loves x": $\text{Love}(\text{father}(x), x)$
- ③ "John loves Mary": $\text{Love}(\text{John}, \text{Mary})$
- ④ "Mary's father loves Mary": $\text{Love}(\text{father}(\text{Mary}), \text{Mary})$

Remark

- ① 也可以在谓词中不使用项, 这样需要引入更多的谓词, 使得谓词公式过于复杂, 如:
- ② "x is y' father": $\text{FATHER}(x, y)$
- ③ "x's father loves x": $\text{FATHER}(y, x) \wedge \text{LOVE}(y, x)$

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常数符号(constant symbol): $3, John, Mary, \dots$
- 变量符号(variables): x, y, z, \dots
- 函数符号(functions): $plus, father, f, g, \dots$
- 谓词符号(predicate): $MAN, GREATER, LOVE, P, Q, R, \dots$
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常数符号(constant symbol): *3*, *John*, *Mary*, ...
- 变量符号(variables): *x*, *y*, *z*, ...
- 函数符号(functions): *plus*, *father*, *f*, *g*, ...
- 谓词符号(predicate): *MAN*, *GREATER*, *LOVE*, *P*, *Q*, *R*, ...
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常数符号(constant symbol): *3*, *John*, *Mary*, ...
- 变量符号(variables): *x*, *y*, *z*, ...
- 函数符号(functions): *plus*, *father*, *f*, *g*, ...
- 谓词符号(predicate): *MAN*, *GREATER*, *LOVE*, *P*, *Q*, *R*, ...
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常数符号(constant symbol): *3*, *John*, *Mary*, ...
- 变量符号(variables): *x*, *y*, *z*, ...
- 函数符号(functions): *plus*, *father*, *f*, *g*, ...
- 谓词符号(predicate): *MAN*, *GREATER*, *LOVE*, *P*, *Q*, *R*, ...
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常数符号(constant symbol): *3*, *John*, *Mary*, ...
- 变量符号(variables): *x*, *y*, *z*, ...
- 函数符号(functions): *plus*, *father*, *f*, *g*, ...
- 谓词符号(predicate): *MAN*, *GREATER*, *LOVE*, *P*, *Q*, *R*, ...
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常数符号(constant symbol): *3*, *John*, *Mary*, ...
- 变量符号(variables): *x*, *y*, *z*, ...
- 函数符号(functions): *plus*, *father*, *f*, *g*, ...
- 谓词符号(predicate): *MAN*, *GREATER*, *LOVE*, *P*, *Q*, *R*, ...
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

参数问题

Remark

- 每个函数符号都固定参数的个数, f 的参数的个数为 n , 称为 n 元函数(n -ary function), 如: $plus$ 是 2 元函数, $father$ 是 1 元函数;
- 0 元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P 的参数的个数为 n , 称为 n 元谓词(n -ary predicate), 如: $LOVE$ 和 $GREATER$ 是 2 元谓词, MAN 和 $MORTAL$ 是 1 元谓词;
- 0 元谓词退化为命题.

参数问题

Remark

- 每个函数符号都固定参数的个数, f 的参数的个数为 n , 称为 n 元函数(n -ary function), 如: $plus$ 是 2 元函数, $father$ 是 1 元函数;
- 0 元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P 的参数的个数为 n , 称为 n 元谓词(n -ary predicate), 如: $LOVE$ 和 $GREATER$ 是 2 元谓词, MAN 和 $MORTAL$ 是 1 元谓词;
- 0 元谓词退化为命题.

参数问题

Remark

- 每个函数符号都固定参数的个数, f 的参数的个数为 n , 称为 n 元函数(n -ary function), 如: $plus$ 是 2 元函数, $father$ 是 1 元函数;
- 0 元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P 的参数的个数为 n , 称为 n 元谓词(n -ary predicate), 如: $LOVE$ 和 $GREATER$ 是 2 元谓词, MAN 和 $MORTAL$ 是 1 元谓词;
- 0 元谓词退化为命题.

参数问题

Remark

- 每个函数符号都固定参数的个数, f 的参数的个数为 n , 称为 n 元函数(n -ary function), 如: $plus$ 是 2 元函数, $father$ 是 1 元函数;
- 0 元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P 的参数的个数为 n , 称为 n 元谓词(n -ary predicate), 如: $LOVE$ 和 $GREATER$ 是 2 元谓词, MAN 和 $MORTAL$ 是 1 元谓词;
- 0 元谓词退化为命题.

参数问题

Remark

- 每个函数符号都固定参数的个数, f 的参数的个数为 n , 称为 n 元函数(n -ary function), 如: $plus$ 是 2 元函数, $father$ 是 1 元函数;
- 0 元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P 的参数的个数为 n , 称为 n 元谓词(n -ary predicate), 如: $LOVE$ 和 $GREATER$ 是 2 元谓词, MAN 和 $MORTAL$ 是 1 元谓词;
- 0 元谓词退化为命题.

项的形式定义

Definition (递归定义)

- ① 常数符号, 变量符号是项;
- ② if f 是 n -ary function symbol, t_1, t_2, \dots, t_n 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

- ① 常量 a 是项, 由 Def ①
- ② $f(a, a)$ 是项, 由 Def ②
- ③ $f(f(a, a), a)$ 是项, 由 Def ②

项的形式定义

Definition (递归定义)

- ① 常数符号, 变量符号是项;
- ② if f 是 n -ary function symbol, t_1, t_2, \dots, t_n 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

- ① 常量符号 a, b, c 是项
- ② 变量符号 x, y, z 是项
- ③ 函数符号 f, g, h 是项
- ④ 谓词符号 P, Q, R 是项
- ⑤ 等号符号 $=$ 是项
- ⑥ 否定符号 \neg 是项
- ⑦ 合取符号 \wedge 是项
- ⑧ 析取符号 \vee 是项
- ⑨ 蕴含符号 \rightarrow 是项
- ⑩ 全称量词符号 \forall 是项
- ⑪ 存在量词符号 \exists 是项

项的形式定义

Definition (递归定义)

- ① 常数符号, 变量符号是项;
- ② if f 是 n -ary function symbol, t_1, t_2, \dots, t_n 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

项的形式定义

Definition (递归定义)

- ① 常数符号, 变量符号是项;
- ② if f 是 n -ary function symbol, t_1, t_2, \dots, t_n 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

- ④ a 是项 by Def ①
- ⑤ $f(a)$ 是项 by Def ②
- ⑥ $f(f(a))$ 是项 by Def ②

项的形式定义

Definition (递归定义)

- ① 常数符号, 变量符号是项;
- ② if f 是 n -ary function symbol, t_1, t_2, \dots, t_n 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

- ① $x, 1$ 是项; by Def①
- ② $plus(x, 1)$ 是项; by Def②
- ③ $plus(plus(x, 1), 1)$ 是项; by Def②

项的形式定义

Definition (递归定义)

- ① 常数符号, 变量符号是项;
- ② if f 是 n -ary function symbol, t_1, t_2, \dots, t_n 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

- ① $x, 1$ 是项; by Def①
- ② $plus(x, 1)$ 是项; by Def②
- ③ $plus(plus(x, 1), 1)$ 是项; by Def②

项的形式定义

Definition (递归定义)

- ① 常数符号, 变量符号是项;
- ② if f 是 n -ary function symbol, t_1, t_2, \dots, t_n 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

- ① $x, 1$ 是项; by Def①
- ② $plus(x, 1)$ 是项; by Def②
- ③ $plus(plus(x, 1), 1)$ 是项; by Def②

项的形式定义

Definition (递归定义)

- ① 常数符号, 变量符号是项;
- ② if f 是 n -ary function symbol, t_1, t_2, \dots, t_n 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

- ① $x, 1$ 是项; by Def①
- ② $plus(x, 1)$ 是项; by Def②
- ③ $plus(plus(x, 1), 1)$ 是项; by Def②

谓词

Definition (递归定义)

If P is an n -ary predicate symbol, and t_1, t_2, \dots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子.

Example

④ $MAN(x), MORTAL(Confucius);$

Remark

谓词

Definition (递归定义)

If P is an n -ary predicate symbol, and t_1, t_2, \dots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子.

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(Confucius);$
- ② $LOVE(father(MARY), MARY);$
- ③ $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), 1).$

Remark

谓词

Definition (递归定义)

If P is an n -ary predicate symbol, and t_1, t_2, \dots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子.

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(Confucius);$
- ② $LOVE(father(MARY), MARY);$
- ③ $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), 1).$

Remark

谓词

Definition (递归定义)

If P is an n -ary predicate symbol, and t_1, t_2, \dots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子.

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(Confucius);$
- ② $LOVE(father(MARY), MARY);$
- ③ $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), 1).$

Remark

谓词

Definition (递归定义)

If P is an n -ary predicate symbol, and t_1, t_2, \dots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子.

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(Confucius);$
- ② $LOVE(father(MARY), MARY);$
- ③ $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), 1).$

Remark

① 谓词原子和命题一样有唯一的真假值。

② 谓词原子和命题一样有唯一的真假值，但谓词原子是表达式，而命题是语句。

谓词

Definition (递归定义)

If P is an n -ary predicate symbol, and t_1, t_2, \dots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子.

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(Confucius);$
- ② $LOVE(father(MARY), MARY);$
- ③ $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), 1).$

Remark

- 谓词原子和命题一样有唯一的真值值;
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式称为谓词公式;
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律, 如:

$$P(t_1) \rightarrow Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \vee Q(t_2, t_3)$$

谓词

Definition (递归定义)

If P is an n -ary predicate symbol, and t_1, t_2, \dots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子.

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(Confucius);$
- ② $LOVE(father(MARY), MARY);$
- ③ $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), 1).$

Remark

- 谓词原子和命题一样有唯一的真值值;
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式称为谓词公式;
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律, 如:

$$P(t_1) \rightarrow Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \vee Q(t_2, t_3)$$

谓词

Definition (递归定义)

If P is an n -ary predicate symbol, and t_1, t_2, \dots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子.

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(Confucius);$
- ② $LOVE(father(MARY), MARY);$
- ③ $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), 1).$

Remark

- 谓词原子和命题一样有唯一的真假值;
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式称为谓词公式;
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律, 如:

$$P(t_1) \rightarrow Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \vee Q(t_2, t_3)$$

谓词

Definition (递归定义)

If P is an n -ary predicate symbol, and t_1, t_2, \dots, t_n are terms, then $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子.

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(Confucius);$
- ② $LOVE(father(MARY), MARY);$
- ③ $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), 1).$

Remark

- 谓词原子和命题一样有唯一的真假值;
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式称为谓词公式;
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律, 如:

$$P(t_1) \rightarrow Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \vee Q(t_2, t_3)$$

量词(1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x , there exists a number y such that $x < y$.

Remark (特点)

量词(1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x , there exists a number y such that $x < y$.

Remark (特点)

量词(1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x , there exists a number y such that $x < y$.

Remark (特点)

- 量词与谓词一起使用
- 对个体变元的讨论往往是在一定的论域中进行的
- 量词与逻辑联结词——合取、析取、蕴含、等价

量词(1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x , there exists a number y such that $x < y$.

Remark (特点)

- 不涉及到某个特定的个体;
- 对个体变元不赋值, 因此可以任意取值;
- 对个体变元赋值, 则只能取一个值, 即个体变元的值。

量词(1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x , there exists a number y such that $x < y$.

Remark (特点)

- 不涉及到某个特定的个体;
- 对个体所在的对象整体的整体性质进行描述;
- 引入新的逻辑符号——量词(Quantifier)——描述对象的整体性质.

量词(1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x , there exists a number y such that $x < y$.

Remark (特点)

- 不涉及到某个特定的个体;
- 对个体所在的对象整体的整体性质进行描述;
- 引入新的逻辑符号— 量词(Quantifier) — 描述对象的整体性质.

量词(1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x , there exists a number y such that $x < y$.

Remark (特点)

- 不涉及到某个特定的个体;
- 对个体所在的对象整体的整体性质进行描述;
- 引入新的逻辑符号——量词(Quantifier)——描述对象的整体性质.

量词(1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x , there exists a number y such that $x < y$.

Remark (特点)

- 不涉及到某个特定的个体;
- 对个体所在的对象整体的整体性质进行描述;
- 引入新的逻辑符号—— **量词(Quantifier)** —— 描述对象的整体性质.

量词(2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existential)
for all x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
\forall	\exists

Example

① 每个有理数都是实数 $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$

② There exists a number which is both even and prime

③ There is a number which is not even and not prime

量词(2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existential)
for all x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
\forall	\exists

Example

- ① 每个有理数都是实数: $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$;
- ② There exists a number that is prime: $\exists x \text{Prime}(x)$;
- ③ For every number x , there exists a number y such that $x < y$
: $\forall x(\exists y \text{Less}(x, y))$.

量词(2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existential)
for all x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
\forall	\exists

Example

- ① 每个有理数都是实数: $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$;
- ② There exists a number that is prime: $\exists x \text{Prime}(x)$;
- ③ For every number x , there exists a number y such that $x < y$
: $\forall x(\exists y \text{Less}(x, y))$.

量词(2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existential)
for all x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
\forall	\exists

Example

- ① 每个有理数都是实数: $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$;
- ② There exists a number that is prime: $\exists x \text{Prime}(x)$;
- ③ For every number x , there exists a number y such that $x < y$
: $\forall x(\exists y \text{Less}(x, y))$.

量词(2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existential)
for all x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
\forall	\exists

Example

- ① 每个有理数都是实数: $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$;
- ② There exists a number that is prime: $\exists x \text{Prime}(x)$;
- ③ For every number x , there exists a number y such that $x < y$
: $\forall x(\exists y \text{Less}(x, y))$.

合式公式(Well Formed Formulas)

Definition (递归定义)

- ① Base: \mathbb{T} , \mathbb{F} & Atoms are WFF;
- ② Induction Rule: if F & G are WFF, then $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ are WFF;
 F & G 称为递归定义中的元变量(metavariable);
- ③ if F is WFF, x is variable symbol, then $(\forall xF)$ & $(\exists xF)$ are WFF;
- ④ 极小性条款: 由以上规则在有限步生成的都是WFF, 称为谓词公式, 简称为公式.

合式公式(Well Formed Formulas)

Definition (递归定义)

- ① Base: \mathbb{T} , \mathbb{F} & Atoms are WFF;
- ② Induction Rule: if F & G are WFF, then $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ are WFF;
 F & G 称为递归定义中的元变量(metavariable);
- ③ if F is WFF, x is variable symbol, then $(\forall xF)$ & $(\exists xF)$ are WFF;
- ④ 极小性条款: 由以上规则在有限步生成的都是WFF, 称为谓词公式, 简称为公式.

合式公式(Well Formed Formulas)

Definition (递归定义)

- ① Base: \mathbb{T} , \mathbb{F} & Atoms are WFF;
- ② Induction Rule: if F & G are WFF, then $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ are WFF;
 F & G 称为递归定义中的元变量(metavariable);
- ③ if F is WFF, x is variable symbol, then $(\forall x F)$ & $(\exists x F)$ are WFF;
- ④ 极小性条款: 由以上规则在有限步生成的都是WFF, 称为谓词公式, 简称为公式.

合式公式(Well Formed Formulas)

Definition (递归定义)

- ① Base: \top , \bot & Atoms are WFF;
- ② Induction Rule: if F & G are WFF, then $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ are WFF;
 F & G 称为递归定义中的元变量(metavariable);
- ③ if F is WFF, x is variable symbol, then $(\forall xF)$ & $(\exists xF)$ are WFF;
- ④ 极小性条款: 由以上规则在有限步生成的都是WFF, 称为谓词公式, 简称为公式.

合式公式(Well Formed Formulas)

Definition (递归定义)

- ① Base: \mathbb{T} , \mathbb{F} & Atoms are WFF;
- ② Induction Rule: if F & G are WFF, then $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ are WFF;
 F & G 称为递归定义中的元变量(metavariable);
- ③ if F is WFF, x is variable symbol, then $(\forall xF)$ & $(\exists xF)$ are WFF;
- ④ 极小性条款: 由以上规则在有限步生成的都是WFF, 称为谓词公式, 简称为公式.

Example

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius),$
 $MORTAL(Confucius)$ 是WFF; by Def①
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ 是WFF; by Def②+①
- ③ $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ 是WFF; by Def③+②
- ④ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius))$ 是WFF;
by Def②+③①
- ⑤ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \rightarrow$
 $MORTAL(Confucius))$ 是WFF; by Def②+④①

Example

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius),$
 $MORTAL(Confucius)$ 是WFF; by Def①
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ 是WFF; by Def②+①
- ③ $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ 是WFF; by Def③+②
- ④ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius))$ 是WFF;
by Def②+③①
- ⑤ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \rightarrow$
 $MORTAL(Confucius))$ 是WFF; by Def②+④①

Example

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius),$
 $MORTAL(Confucius)$ 是WFF; by Def①
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ 是WFF; by Def②+①
- ③ $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ 是WFF; by Def③+②
- ④ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius))$ 是WFF;
by Def②+③①
- ⑤ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \rightarrow$
 $MORTAL(Confucius))$ 是WFF; by Def②+④①

Example

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius),$
 $MORTAL(Confucius)$ 是WFF; by Def①
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ 是WFF; by Def②+①
- ③ $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ 是WFF; by Def③+②
- ④ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius))$ 是WFF;
by Def②+③①
- ⑤ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \rightarrow$
 $MORTAL(Confucius))$ 是WFF; by Def②+④①

Example

Example

- ① $MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius),$
 $MORTAL(Confucius)$ 是WFF; by Def①
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ 是WFF; by Def②+①
- ③ $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ 是WFF; by Def③+②
- ④ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius))$ 是WFF;
by Def②+③①
- ⑤ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \rightarrow$
 $MORTAL(Confucius))$ 是WFF; by Def②+④①

Example

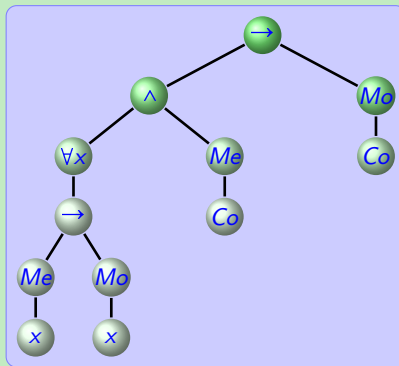
Example

- ① $MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius),$
 $MORTAL(Confucius)$ 是WFF; by Def①
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ 是WFF; by Def②+①
- ③ $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ 是WFF; by Def③+②
- ④ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius))$ 是WFF;
by Def②+③①
- ⑤ $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \rightarrow$
 $MORTAL(Confucius))$ 是WFF; by Def②+④①

公式的语法树

Example

$((\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \rightarrow MORTAL(Confucius))$



省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉；
- 运算的优先级别由高到低：
括号, \forall , \exists , \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
- 同一二元运算符号按从左到右进行结合。

Example

- 将下列谓词公式化成前束范式
- 将下列谓词公式化成主析取范式
- 将下列谓词公式化成主合取范式
- 将下列谓词公式化成前束范式

省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉；
- 运算的优先级别由高到低：
括号, \forall , \exists , \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
- 同一二元运算符号按从左到右进行结合。

Example

- ① 证明：如果公式 A 的真值为真，则 $\neg A$ 的真值为假。
- ② 证明：如果公式 A 的真值为假，则 $\neg A$ 的真值为真。
- ③ 证明：如果公式 A 的真值为真，则 $\neg\neg A$ 的真值为真。

省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
 $\text{括号}, \forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 同一二元运算符号按从左到右进行结合.

Example

省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
括号, \forall , \exists , \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
- 同一二元运算符号按从左到右进行结合.

Example

$$\bullet \quad \neg(x \vee y) \wedge (x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y) \wedge (x \vee y)$$

$$\bullet \quad \neg(x \vee y) \wedge (x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y) \wedge (x \vee y)$$

省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
 $\text{括号}, \forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 同一二元运算符号按从左到右进行结合.

Example

- ① $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \equiv (\forall x (\exists y (\forall z P(x, y, z))));$
- ② $\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
- ③ $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(x) \neq \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)).$

省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
括号, \forall , \exists , \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
- 同一二元运算符号按从左到右进行结合.

Example

- ① $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \equiv (\forall x (\exists y (\forall z P(x, y, z))))$;
- ② $\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
- ③ $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(x) \neq \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$.

省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
括号, \forall , \exists , \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
- 同一二元运算符号按从左到右进行结合.

Example

- ① $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \equiv (\forall x (\exists y (\forall z P(x, y, z))))$;
- ② $\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
- ③ $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(x) \neq \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)).$

省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
括号, \forall , \exists , \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
- 同一二元运算符号按从左到右进行结合.

Example

- ① $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \equiv (\forall x (\exists y (\forall z P(x, y, z))))$;
- ② $\forall x (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
- ③ $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(x) \neq \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$.

符号化谓词公式(1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$.

Remark (Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$?)

符号化谓词公式(1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$.

Remark (Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$?)

符号化谓词公式(1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$.

Remark (Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$?)

符号化谓词公式(1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$.

Remark (Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$)

符号化谓词公式(1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$.

Remark (Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$)

- 如果该断言为真, 表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中; 没有涉及到不是这个班学生的情况, 即: 如果张三不是这个班的学生, 也能保证该全称谓词公式是真;

即: 如果张三去过北京, 那么张三就是这个班的学生;

如果张三没去过北京, 那么张三就不是这个班的学生, 即:

如果张三不是这个班的学生, 那么张三没去过北京;

符号化谓词公式(1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$.

Remark (Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \wedge B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:
 $C(\text{张三}) \wedge B(\text{张三})$ 为假, $\forall x(C(x) \wedge B(x))$ 亦假;
- “ $C(x) \rightarrow$ ”称为全称限定条件.

符号化谓词公式(1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$.

Remark (Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \wedge B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:
 $C(\text{张三}) \wedge B(\text{张三})$ 为假, $\forall x(C(x) \wedge B(x))$ 亦假;
- “ $C(x) \rightarrow$ ”称为全称限定条件.

符号化谓词公式(1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$.

Remark (Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$)

- 如果该断言为真, 表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中; 没有涉及到不是这个班学生的情况, 即: 如果张三不是这个班的学生, 也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \wedge B(x))$ 则不能, 因为, 如果张三不是这个班的学生, 则: $C(\text{张三}) \wedge B(\text{张三})$ 为假, $\forall x(C(x) \wedge B(x))$ 亦假;
- “ $C(x) \rightarrow$ ”称为全称限定条件.

符号化谓词公式(1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$.

Remark (Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$)

- 如果该断言为真, 表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中; 没有涉及到不是这个班学生的情况, 即: 如果张三不是这个班的学生, 也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \wedge B(x))$ 则不能, 因为, 如果张三不是这个班的学生, 则: $C(\text{张三}) \wedge B(\text{张三})$ 为假, $\forall x(C(x) \wedge B(x))$ 亦假;
- “ $C(x) \rightarrow$ ”称为全称限定条件.

符号化谓词公式(1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$.

Remark (Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$)

- 如果该断言为真, 表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中; 没有涉及到不是这个班学生的情况, 即: 如果张三不是这个班的学生, 也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \wedge B(x))$ 则不能, 因为, 如果张三不是这个班的学生, 则: $C(\text{张三}) \wedge B(\text{张三})$ 为假, $\forall x(C(x) \wedge B(x))$ 亦假;
- “ $C(x) \rightarrow$ ”称为全称限定条件.

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark (Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$)

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark (Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$)

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark (Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$)

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark (Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$)

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark (Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$)

- 如果该断言为假, 表示这个班的学生都没有去过北京; 没有涉及到不是这个班学生的情况, 即: 如果 x 不是这个班的学生, 也能保证该特称量词公式为假.

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark (Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$)

- 如果该断言为假, 表示这个班的学生都没有去过北京; 没有涉及到不是这个班学生的情况, 即: 如果张三不是这个班的学生, 也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$ 则不能, 因为, 如果张三不是这个班的学生, 则: $C(\text{张三}) \rightarrow B(\text{张三})$ 为真, $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$ 亦真;
- “ $C(x) \wedge$ ”称为特称限定条件.

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark (Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$)

- 如果该断言为假, 表示这个班的学生都没有去过北京; 没有涉及到不是这个班学生的情况, 即: 如果张三不是这个班的学生, 也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$ 则不能, 因为, 如果张三不是这个班的学生, 则: $C(\text{张三}) \rightarrow B(\text{张三})$ 为真, $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$ 亦真;
- " $C(x) \wedge$ "称为特称限定条件.

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark (Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$)

- 如果该断言为假, 表示这个班的学生都没有去过北京; 没有涉及到不是这个班学生的情况, 即: 如果张三不是这个班的学生, 也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$ 则不能, 因为, 如果张三不是这个班的学生, 则: $C(\text{张三}) \rightarrow B(\text{张三})$ 为真, $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$ 亦真;
- “ $C(x) \wedge$ ” 称为特称限定条件.

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark (Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$)

- 如果该断言为假, 表示这个班的学生都没有去过北京; 没有涉及到不是这个班学生的情况, 即: 如果张三不是这个班的学生, 也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$ 则不能, 因为, 如果张三不是这个班的学生, 则: $C(\text{张三}) \rightarrow B(\text{张三})$ 为真, $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$ 亦真;
- " $C(x) \wedge$ " 称为特称限定条件.

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- $C(x)$: x 是这个班的学生;
- $B(x)$: x 去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark (Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$)

- 如果该断言为假, 表示这个班的学生都没有去过北京; 没有涉及到不是这个班学生的情况, 即: 如果张三不是这个班的学生, 也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$ 则不能, 因为, 如果张三不是这个班的学生, 则: $C(\text{张三}) \rightarrow B(\text{张三})$ 为真, $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$ 亦真;
- " $C(x) \wedge$ " 称为特称限定条件.

符号化谓词公式(3/5)

喝酒者悖论

- There is someone in the pub such that, if he is drinking, everyone in the pub is drinking.
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall yD(y))$.

符号化谓词公式(3/5)

喝酒者悖论

- There is someone in the pub such that, if he is drinking, everyone in the pub is drinking.
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall yD(y))$.

符号化谓词公式(3/5)

喝酒者悖论

- There is someone in the pub such that, if he is drinking, everyone in the pub is drinking.
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall yD(y))$.

符号化谓词公式(4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: “ y 是唯一的” 等价于 “对任意的 z , 如果 z 不等于 y , 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 中缀谓词的引入 “ \neq ”: $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 数学常用记号 $\exists!$ 表示存在唯一: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式(4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: “ y 是唯一的” 等价于 “对任意的 z , 如果 z 不等于 y , 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 中缀谓词的引入” \neq : $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 数学常用记号 $\exists!$ 表示存在唯一: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式(4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: “ y 是唯一的” 等价于 “对任意的 z , 如果 z 不等于 y , 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 中缀谓词的引入 “ \neq ”: $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 数学常用记号 $\exists!$ 表示存在唯一: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式(4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: “ y 是唯一的” 等价于 “对任意的 z , 如果 z 不等于 y , 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 中缀谓词的引入 “ \neq ”: $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 数学常用记号 $\exists!$ 表示存在唯一: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式(4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: “ y 是唯一的” 等价于 “对任意的 z , 如果 z 不等于 y , 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 中缀谓词的引入” \neq : $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 数学常用记号 $\exists!$ 表示存在唯一: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式(4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: “ y 是唯一的” 等价于 “对任意的 z , 如果 z 不等于 y , 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 中缀谓词的引入” \neq : $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 数学常用记号 $\exists!$ 表示存在唯一: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式(4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: “ y 是唯一的” 等价于 “对任意的 z , 如果 z 不等于 y , 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 中缀谓词的引入” \neq : $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 数学常用记号 $\exists!$ 表示存在唯一: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式(4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: “ y 是唯一的” 等价于 “对任意的 z , 如果 z 不等于 y , 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 中缀谓词的引入” \neq : $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 数学常用记号 $\exists!$ 表示存在唯一: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式(4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: “ y 是唯一的” 等价于 “对任意的 z , 如果 z 不等于 y , 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 中缀谓词的引入” \neq : $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 数学常用记号 $\exists!$ 表示存在唯一: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- 引入后继符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$ 表示 x 的直接前驱;

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)


- 📎 引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$ 表示 x 的直接前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \wedge \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \wedge \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)


-  引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$ 表示 x 的直接前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \wedge \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
 - $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
 - $A_3 \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \wedge \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)


-  引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$ 表示 x 的直接前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \wedge \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \wedge \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)


-  引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$ 表示 x 的直接前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \wedge \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \wedge \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

-  引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$ 表示 x 的直接前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \wedge \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \wedge \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

辖域(Scope)

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable)
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

辖域(Scope)

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable)
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

辖域(Scope)

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable)
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

辖域(Scope)

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable)
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

辖域(Scope)

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable)
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域(Scope)

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable)
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域(Scope)

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable)
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域(Scope)

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable)
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域(Scope)

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable)
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域(Scope)

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$ 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x(\exists x)$ 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable)
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

谓词的语义(1/2)

Remark

- 谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的语义解释和对象 x_1, x_2, \dots, x_n 相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 包含一个集合 D (称为全总个体域(Domain, 论域)及:

谓词的语义(1/2)

Remark

- 谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的语义解释和对象 x_1, x_2, \dots, x_n 相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 包含一个集合 D (称为全总个体域(Domain, 论域)及:

谓词的语义(1/2)

Remark

- 谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的语义解释和对象 x_1, x_2, \dots, x_n 相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 包含一个集合 D (称为全总个体域(Domain, 论域)及:

- 每个常量符号对应于 D 中的一个元素;

- 每个函数符号对应于一个 n 元函数 $f: D^n \rightarrow D$;

- 每个谓词符号对应于一个 n 元谓词 $P: D^n \rightarrow \{0, 1\}$;

谓词的语义(1/2)

Remark

- 谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的语义解释和对象 x_1, x_2, \dots, x_n 相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 包含一个集合 \mathcal{D} (称为全总个体域(Domain, 论域)及:

- ① 每个常量符号对应于 \mathcal{D} 中的一个元素;
- ② 每个 n 元函数对应于一个 $\mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ 的函数($\mathcal{D}^n \triangleq \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in \mathcal{D}, i = 1, 2, \dots, n\}$);
- ③ 每个 n 元谓词对应于个 $\mathcal{D}^n \rightarrow \{0, 1\}$ 的函数.

谓词的语义(1/2)

Remark

- 谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的语义解释和对象 x_1, x_2, \dots, x_n 相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 包含一个集合 \mathcal{D} (称为全总个体域(Domain, 论域)及:

- ① 每个常量符号对应于 \mathcal{D} 中的一个元素;
- ② 每个 n 元函数对应于一个 $\mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ 的函数($\mathcal{D}^n \triangleq \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in \mathcal{D}, i = 1, 2, \dots, n\}$);
- ③ 每个 n 元谓词对应于个 $\mathcal{D}^n \rightarrow \{0, 1\}$ 的函数.

谓词的语义(1/2)

Remark

- 谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的语义解释和对象 x_1, x_2, \dots, x_n 相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 包含一个集合 \mathcal{D} (称为全总个体域(Domain, 论域)及:

- ① 每个常量符号对应于 \mathcal{D} 中的一个元素;
- ② 每个 n 元函数对应于一个 $\mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ 的函数($\mathcal{D}^n \triangleq \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in \mathcal{D}, i = 1, 2, \dots, n\}$);
- ③ 每个 n 元谓词对应于个 $\mathcal{D}^n \rightarrow \{0, 1\}$ 的函数.

谓词的语义(1/2)

Remark

- 谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的语义解释和对象 x_1, x_2, \dots, x_n 相关
- 解释一个谓词公式需要解释: 对象和谓词原子两个部分.

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 包含一个集合 \mathcal{D} (称为全总个体域(Domain, 论域)及:

- ① 每个常量符号对应于 \mathcal{D} 中的一个元素;
- ② 每个 n 元函数对应于一个 $\mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ 的函数($\mathcal{D}^n \triangleq \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in \mathcal{D}, i = 1, 2, \dots, n\}$);
- ③ 每个 n 元谓词对应于个 $\mathcal{D}^n \rightarrow \{0, 1\}$ 的函数.

谓词的语义(2/2)

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 的真值(记为: $F|_I$)递归定义如下:

- ① 设 $F = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I$ 是项 t_1, t_2, \dots, t_n 在 I 下的取值,
 $F|_I = P|_I(t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I)$;
- ②
$$F|_I = \begin{cases} \neg(G|_I) & \text{if } F = \neg G \\ (G|_I) \wedge (H|_I) & \text{if } F = G \wedge H \\ (G|_I) \vee (H|_I) & \text{if } F = G \vee H \\ (G|_I) \rightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \rightarrow H \\ (G|_I) \leftrightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \leftrightarrow H \end{cases}$$
- ③ 设 $F = \forall xG$, $F|_I = 1$, iff, 对每个约束变量 x 在 \mathcal{D} 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
- ④ 设 $F = \exists xG$, $F|_I = 1$, iff, 对存在 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
- ⑤ 对于含有自由变量的公式, 只有在每个自由变量都取定 \mathcal{D} 中的值时公式才有解释。

谓词的语义(2/2)

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 的真值(记为: $F|_I$)递归定义如下:

- ① 设 $F = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I$ 是项 t_1, t_2, \dots, t_n 在 I 下的取值, $F|_I = P|_I(t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I)$;

$$② \quad F|_I = \begin{cases} \neg(G|_I) & \text{if } F = \neg G \\ (G|_I) \wedge (H|_I) & \text{if } F = G \wedge H \\ (G|_I) \vee (H|_I) & \text{if } F = G \vee H \\ (G|_I) \rightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \rightarrow H \\ (G|_I) \leftrightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \leftrightarrow H \end{cases}$$

- ③ 设 $F = \forall xG$, $F|_I = 1$, iff, 对每个约束变量 x 在 \mathcal{D} 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
- ④ 设 $F = \exists xG$, $F|_I = 1$, iff, 对存在 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
- ⑤ 对于含有自由变量的公式, 只有在每个自由变量都取定 \mathcal{D} 中的值时公式才有解释。

谓词的语义(2/2)

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 的真值(记为: $F|_I$)递归定义如下:

- ① 设 $F = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I$ 是项 t_1, t_2, \dots, t_n 在 I 下的取值, $F|_I = P|_I(t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I)$;

$$② \quad F|_I = \begin{cases} \neg(G|_I) & \text{if } F = \neg G \\ (G|_I) \wedge (H|_I) & \text{if } F = G \wedge H \\ (G|_I) \vee (H|_I) & \text{if } F = G \vee H \\ (G|_I) \rightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \rightarrow H \\ (G|_I) \leftrightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \leftrightarrow H \end{cases}$$

- ③ 设 $F = \forall xG$, $F|_I = 1$, iff, 对每个约束变量 x 在 \mathcal{D} 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;

- ④ 设 $F = \exists xG$, $F|_I = 1$, iff, 对存在 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;

- ⑤ 对于含有自由变量的公式, 只有在每个自由变量都取定 \mathcal{D} 中的值时公式才有解释。

谓词的语义(2/2)

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 的真值(记为: $F|_I$)递归定义如下:

- ① 设 $F = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I$ 是项 t_1, t_2, \dots, t_n 在 I 下的取值, $F|_I = P|_I(t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I)$;

$$② \quad F|_I = \begin{cases} \neg(G|_I) & \text{if } F = \neg G \\ (G|_I) \wedge (H|_I) & \text{if } F = G \wedge H \\ (G|_I) \vee (H|_I) & \text{if } F = G \vee H \\ (G|_I) \rightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \rightarrow H \\ (G|_I) \leftrightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \leftrightarrow H \end{cases}$$

- ③ 设 $F = \forall xG$, $F|_I = 1$, iff, 对每个约束变量 x 在 \mathcal{D} 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;

- ④ 设 $F = \exists xG$, $F|_I = 1$, iff, 对存在 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;

- ⑤ 对于含有自由变量的公式, 只有在每个自由变量都取定 \mathcal{D} 中的值时公式才有解释。

谓词的语义(2/2)

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 的真值(记为: $F|_I$)递归定义如下:

- ① 设 $F = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I$ 是项 t_1, t_2, \dots, t_n 在 I 下的取值, $F|_I = P|_I(t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I)$;

$$② \quad F|_I = \begin{cases} \neg(G|_I) & \text{if } F = \neg G \\ (G|_I) \wedge (H|_I) & \text{if } F = G \wedge H \\ (G|_I) \vee (H|_I) & \text{if } F = G \vee H \\ (G|_I) \rightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \rightarrow H \\ (G|_I) \leftrightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \leftrightarrow H \end{cases}$$

- ③ 设 $F = \forall xG$, $F|_I = 1$, iff, 对每个约束变量 x 在 \mathcal{D} 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;

- ④ 设 $F = \exists xG$, $F|_I = 1$, iff, 对存在 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;

- ⑤ 对于含有自由变量的公式, 只有在每个自由变量都取定 \mathcal{D} 中的值时公式才有解释。

谓词的语义(2/2)

Definition

F 是一谓词公式, F 的一个解释 I 的真值(记为: $F|_I$)递归定义如下:

- ① 设 $F = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I$ 是项 t_1, t_2, \dots, t_n 在 I 下的取值, $F|_I = P|_I(t_1|_I, t_2|_I, \dots, t_n|_I)$;

$$② \quad F|_I = \begin{cases} \neg(G|_I) & \text{if } F = \neg G \\ (G|_I) \wedge (H|_I) & \text{if } F = G \wedge H \\ (G|_I) \vee (H|_I) & \text{if } F = G \vee H \\ (G|_I) \rightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \rightarrow H \\ (G|_I) \leftrightarrow (H|_I) & \text{if } F = G \leftrightarrow H \end{cases}$$

- ③ 设 $F = \forall xG$, $F|_I = 1$, iff, 对每个约束变量 x 在 \mathcal{D} 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
- ④ 设 $F = \exists xG$, $F|_I = 1$, iff, 对存在 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
- ⑤ 对于含有自由变量的公式, 只有在每个自由变量都取定 \mathcal{D} 中的值时公式才有解释。

Example(1/2)

Example

① 公式 $\forall xP(x)$ 和 $\exists x\neg P(x)$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

$P _I(1)$	$P _I(2)$
1	0

④ $(\forall xP(x))|_I = 0$, because $P|_I(2) = 0$;

⑤ $(\exists x\neg P(x))|_I = 1$, because $P|_I(2) = 0, (\neg P)|_I(2) = 1$.

Example(1/2)

Example

① 公式 $\forall xP(x)$ 和 $\exists x\neg P(x)$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

$P _I(1)$	$P _I(2)$
1	0

④ $(\forall xP(x))|_I = 0$, because $P|_I(2) = 0$;

⑤ $(\exists x\neg P(x))|_I = 1$, because $P|_I(2) = 0$, $(\neg P)|_I(2) = 1$.

Example(1/2)

Example

① 公式 $\forall xP(x)$ 和 $\exists x\neg P(x)$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

$P _I(1)$	$P _I(2)$
1	0

④ $(\forall xP(x))|_I = 0$, because $P|_I(2) = 0$;

⑤ $(\exists x\neg P(x))|_I = 1$, because $P|_I(2) = 0$, $(\neg P)|_I(2) = 1$.

Example(1/2)

Example

① 公式 $\forall x P(x)$ 和 $\exists x \neg P(x)$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

$P _I(1)$	$P _I(2)$
1	0

④ $(\forall x P(x))|_I = 0$, because $P|_I(2) = 0$;

⑤ $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, because $P|_I(2) = 0$, $(\neg P)|_I(2) = 1$.

Example(1/2)

Example

① 公式 $\forall xP(x)$ 和 $\exists x\neg P(x)$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

$P _I(1)$	$P _I(2)$
1	0

④ $(\forall xP(x))|_I = 0$, because $P|_I(2) = 0$;

⑤ $(\exists x\neg P(x))|_I = 1$, because $P|_I(2) = 0$, $(\neg P)|_I(2) = 1$.

Example(1/2)

Example

① 公式 $\forall xP(x)$ 和 $\exists x\neg P(x)$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

$P _I(1)$	$P _I(2)$
1	0

④ $(\forall xP(x))|_I = 0$, because $P|_I(2) = 0$;

⑤ $(\exists x\neg P(x))|_I = 1$, because $P|_I(2) = 0, (\neg P)|_I(2) = 1$.

Example(2/2)

Example

① 公式 $G = \forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

a	$f(1)$	$f(2)$
1	2	1

④

$P _I(1)$	$P _I(2)$	$Q _I(1,1)$	$Q _I(1,2)$	$Q _I(2,1)$	$Q _I(2,2)$
0	1	1	1	0	1

⑤ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=1} = P|_I(1) \rightarrow Q|_I(2, 1) = 1$;

⑥ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=2} = P|_I(2) \rightarrow Q|_I(1, 1) = 1$;

⑦ $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_I = 1$.

Example(2/2)

Example

① 公式 $G = \forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

a	$f(1)$	$f(2)$
1	2	1

④

$P _I(1)$	$P _I(2)$	$Q _I(1,1)$	$Q _I(1,2)$	$Q _I(2,1)$	$Q _I(2,2)$
0	1	1	1	0	1

⑤ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=1} = P|_I(1) \rightarrow Q|_I(2, 1) = 1$;

⑥ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=2} = P|_I(2) \rightarrow Q|_I(1, 1) = 1$;

⑦ $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_I = 1$.

Example(2/2)

Example

① 公式 $G = \forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

a	$f(1)$	$f(2)$
1	2	1

④

$P _I(1)$	$P _I(2)$	$Q _I(1,1)$	$Q _I(1,2)$	$Q _I(2,1)$	$Q _I(2,2)$
0	1	1	1	0	1

⑤ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I,x=1} = P|_I(1) \rightarrow Q|_I(2,1) = 1$;

⑥ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I,x=2} = P|_I(2) \rightarrow Q|_I(1,1) = 1$;

⑦ $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_I = 1$.

Example(2/2)

Example

① 公式 $G = \forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

a	$f(1)$	$f(2)$
1	2	1

④

$P _I(1)$	$P _I(2)$	$Q _I(1,1)$	$Q _I(1,2)$	$Q _I(2,1)$	$Q _I(2,2)$
0	1	1	1	0	1

⑤ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=1} = P|_I(1) \rightarrow Q|_I(2, 1) = 1$;

⑥ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=2} = P|_I(2) \rightarrow Q|_I(1, 1) = 1$;

⑦ $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_I = 1$.

Example(2/2)

Example

① 公式 $G = \forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

a	$f(1)$	$f(2)$
1	2	1

④

$P _I(1)$	$P _I(2)$	$Q _I(1, 1)$	$Q _I(1, 2)$	$Q _I(2, 1)$	$Q _I(2, 2)$
0	1	1	1	0	1

⑤ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=1} = P|_I(1) \rightarrow Q|_I(2, 1) = 1$;

⑥ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=2} = P|_I(2) \rightarrow Q|_I(1, 1) = 1$;

⑦ $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_I = 1$.

Example(2/2)

Example

① 公式 $G = \forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

a	$f(1)$	$f(2)$
1	2	1

④

$P _I(1)$	$P _I(2)$	$Q _I(1, 1)$	$Q _I(1, 2)$	$Q _I(2, 1)$	$Q _I(2, 2)$
0	1	1	1	0	1

⑤ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=1} = P|_I(1) \rightarrow Q|_I(2, 1) = 1$;

⑥ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=2} = P|_I(2) \rightarrow Q|_I(1, 1) = 1$;

⑦ $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_I = 1$.

Example(2/2)

Example

① 公式 $G = \forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

a	$f(1)$	$f(2)$
1	2	1

④

$P _I(1)$	$P _I(2)$	$Q _I(1, 1)$	$Q _I(1, 2)$	$Q _I(2, 1)$	$Q _I(2, 2)$
0	1	1	1	0	1

⑤ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=1} = P|_I(1) \rightarrow Q|_I(2, 1) = 1$;

⑥ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=2} = P|_I(2) \rightarrow Q|_I(1, 1) = 1$;

⑦ $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_I = 1$.

Example(2/2)

Example

① 公式 $G = \forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$;

② $\mathcal{D} = \{1, 2\}$

③

a	$f(1)$	$f(2)$
1	2	1

④

$P _I(1)$	$P _I(2)$	$Q _I(1, 1)$	$Q _I(1, 2)$	$Q _I(2, 1)$	$Q _I(2, 2)$
0	1	1	1	0	1

⑤ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=1} = P|_I(1) \rightarrow Q|_I(2, 1) = 1$;

⑥ $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I, x=2} = P|_I(2) \rightarrow Q|_I(1, 1) = 1$;

⑦ $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_I = 1$.

1 谓词与量词

- 谓词
- 符号化
- 一阶逻辑公式的语义

2 公式间的关系式

- 逻辑等价和永真蕴涵关系
- 量词的逻辑关系
- 前束范式

3 谓词公式的自然推理

- 相关概念的复习
- 量词的推理规则
- 形式证明的例子
- Mechanized Reasoning

谓词公式的形态

Definition

- A formula G is **consistent** (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释 I , 使得: $G|_I = 1$, 这时, 称 I 是 G 的模型(model);
- G is **inconsistent** (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 0$;
- G is **valid** (永真的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 1$.

Example

- $(\exists x)(\forall y)(x=y)$ 为真, 所以该公式是可满足的; 但是不是永真的;

Definition

- A formula G is **consistent** (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释 I , 使得: $G|_I = 1$, 这时, 称 I 是 G 的模型(model);
- G is **inconsistent** (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 0$;
- G is **valid** (永真的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 1$.

Example

Definition

- A formula G is **consistent** (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释 I , 使得: $G|_I = 1$, 这时, 称 I 是 G 的模型(model);
- G is **inconsistent** (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 0$;
- G is **valid** (永真的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的; 但是不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$ 是永真的;
- $\exists x (D(x) \rightarrow \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;
- 由于对每个公式有无限多的解释, 因此计算一个谓词公式是否永真是不可可能的; 但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的, 因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假, 该公式就永假。

Definition

- A formula G is **consistent** (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释 I , 使得: $G|_I = 1$, 这时, 称 I 是 G 的模型(model);
- G is **inconsistent** (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 0$;
- G is **valid** (永真的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 1$.

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的; 但是不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$ 是永真的;
- $\exists x (D(x) \rightarrow \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;
- 由于对每个公式有无限多的解释, 因此计算一个谓词公式是否永真是不可可能的; 但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的, 因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假, 该公式就永假.

Definition

- A formula G is **consistent** (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释 I , 使得: $G|_I = 1$, 这时, 称 I 是 G 的模型(model);
- G is **inconsistent** (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 0$;
- G is **valid** (永真的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的; 但是不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$ 是永真的;
- $\exists x (D(x) \rightarrow \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;
- 由于对每个公式有无限多的解释, 因此计算一个谓词公式是否永真是不可可能的; 但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的, 因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假, 该公式就永假。

Definition

- A formula G is **consistent** (satisfiable, 相容的, 可满足的), iff, 存在解释 I , 使得: $G|_I = 1$, 这时, 称 I 是 G 的模型(model);
- G is **inconsistent** (unsatisfiable, 永假的, 矛盾的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 0$;
- G is **valid** (永真的), iff, 对所有的解释 I , $G|_I = 1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x)) \models I = 1$, 所以该公式是可满足的; 但是不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$ 是永真的;
- $\exists x (D(x) \rightarrow \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;
- 由于对每个公式有无限多的解释, 因此计算一个谓词公式是否永真是不可可能的; 但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的, 因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假, 该公式就永假。

逻辑等价和永真蕴涵关系(1/2)

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff $F \leftrightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

逻辑等价和永真蕴涵关系(1/2)

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff $F \leftrightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

Definition (永真蕴涵关系的等价定义)

逻辑等价和永真蕴涵关系(1/2)

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff $F \leftrightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

Definition (永真蕴涵关系的等价定义)

- $F \Rightarrow G$;
- iff $F \rightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I (F \rightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I F|_I \leq G|_I$;
- iff $\forall I F|_I = 1, \text{ then } G|_I = 1$;
- iff $\forall I G|_I = 0, \text{ then } F|_I = 0$.

逻辑等价和永真蕴涵关系(1/2)

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff $F \leftrightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

Definition (永真蕴涵关系的等价定义)

- $F \Rightarrow G$;
- iff $F \rightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I (F \rightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I F|_I \leq G|_I$;
- iff $\forall I F|_I = 1, \text{ then } G|_I = 1$;
- iff $\forall I G|_I = 0, \text{ then } F|_I = 0$.

逻辑等价和永真蕴涵关系(1/2)

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff $F \leftrightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I F|_I = G|_I$.

Definition (永真蕴涵关系的等价定义)

- $F \Rightarrow G$;
- iff $F \rightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I (F \rightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I F|_I \leq G|_I$;
- iff $\forall I F|_I = 1, \text{ then } G|_I = 1$;
- iff $\forall I G|_I = 0, \text{ then } F|_I = 0$.

Remark

逻辑等价和永真蕴涵关系(2/2)

Remark

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

Example

逻辑等价和永真蕴涵关系(2/2)

Remark

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

Example

- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x))$

- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$

Remark

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

Example

- $\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x, y) \Leftrightarrow \neg(\forall xP(x)) \vee \exists xQ(x, y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性, 对称性和传递性, 不等式的传递性等

逻辑等价和永真蕴涵关系(2/2)

Remark

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

Example

- $\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x, y) \Leftrightarrow \neg(\forall xP(x)) \vee \exists xQ(x, y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性, 对称性和传递性, 不等式的传递性等.

- 35/71 -

Theorem (更名规则)

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$

$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

- $\forall xP(x, y) \not\equiv \forall yP(y, y)$

更名规则

Theorem (更名规则)

设 $F(x)$ 表示含自由变量 x 的公式, 设变量 y 不出现在公式 $F(x)$ 中, 则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$

$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

Remark

- $\forall x P(x, y) \Leftrightarrow \forall y P(y, y)$
- $\forall x \forall y P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall y P(y, y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化.

更名规则

Theorem (更名规则)

设 $F(x)$ 表示含自由变量 x 的公式, 设变量 y 不出现在公式 $F(x)$ 中, 则:

$$\forall xF(x) \Leftrightarrow \forall yF(y)$$

$$\exists xF(x) \Leftrightarrow \exists yF(y)$$

Remark

- $\forall xP(x, y) \Leftrightarrow \forall yP(y, y)$
- $\forall x\forall yP(x, y) \Leftrightarrow \forall y\forall yP(y, y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化.

量词的解消

Theorem (量词的解消)

设 F 是不含自由变量 x 的公式, 则:

$$\forall x F \Leftrightarrow F$$

$$\exists x F \Leftrightarrow F$$

Theorem (特例与量词的关系)

$$\forall x F(x) \Rightarrow F(x)$$

$$F(a) \Rightarrow \exists x F(x)$$

Remark

注意特例化没有恒等关系: 当 $\mathcal{D} = \{1, 2\}$, $a = 1$, $F(1) = 0$, $F(2) = 1$ 时, $F(a)$ 为假, 但是, $\exists x F(x)$ 为真.

量词的否定

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 \mathcal{I} 有:



量词的否定

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释/有:



量词的否定

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有:

$$\begin{aligned} & (\neg(\forall x F(x)))|_I = 1 \\ \text{iff } & (\forall x F(x))|_I = 0 \\ \text{iff } & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0 \\ \text{iff } & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1 \\ \text{iff } & (\exists x \neg F(x))|_I = 1 \end{aligned}$$



Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

对任意的解释/有:

$$\begin{aligned} & (\neg(\forall x F(x)))|_I = 1 \\ \text{iff } & (\forall x F(x))|_I = 0 \\ \text{iff } & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0 \\ \text{iff } & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1 \\ \text{iff } & (\exists x \neg F(x))|_I = 1 \end{aligned}$$



量词的否定

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有:

$$\begin{aligned} & (\neg(\forall x F(x)))|_I = 1 \\ \text{iff } & (\forall x F(x))|_I = 0 \\ \text{iff } & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0 \\ \text{iff } & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1 \\ \text{iff } & (\exists x \neg F(x))|_I = 1 \end{aligned}$$



Example — 极限和发散的定义

Example (极限的定义)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x , 当 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x , 使得 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

Example — 极限和发散的定义

Example (极限的定义)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x , 当 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x , 使得 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

Example — 极限和发散的定义

Example (极限的定义)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x , 当 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x , 使得 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| \leq \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon)$$

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)(0 < |x - x_0| \leq \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon)$$

Example — 极限和发散的定义

Example (极限的定义)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x , 当 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x , 使得 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leq \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leq \delta) \vee |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leq \delta) \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

- 38/71 -

Example — 极限和发散的定义

Example (极限的定义)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x , 当 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x , 使得 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leq \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leq \delta) \vee |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leq \delta) \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

Example — 极限和发散的定义

Example (极限的定义)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x , 当 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x , 使得 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leq \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leq \delta) \vee |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leq \delta) \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

Theorem (辖域的扩张与收缩(extension & restriction))

$$(\forall x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge G)$$

$$(\forall x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee G)$$

$$(\exists x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge G)$$

$$(\exists x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \vee G)$$

辖域的扩张与收缩

Theorem (辖域的扩张与收缩(extension & restriction))

设 x 不在公式 G 中出现, 则:

$$(\forall x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge G)$$

$$(\forall x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee G)$$

$$(\exists x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge G)$$

$$(\exists x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \vee G)$$

Example

$$\forall x \forall y (P(x) \vee P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y (P(x) \vee P(y)) \\ \Leftrightarrow & \forall x (P(x) \vee \forall y P(y)) \quad (\text{代入+替换}) \\ \Leftrightarrow & \forall x P(x) \vee \forall y P(y) \quad (\text{代入}) \end{aligned}$$

辖域的扩张与收缩

Theorem (辖域的扩张与收缩(extension & restriction))

设 x 不在公式 G 中出现, 则:

$$(\forall x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge G)$$

$$(\forall x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee G)$$

$$(\exists x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge G)$$

$$(\exists x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \vee G)$$

Example

$$\forall x \forall y (P(x) \vee P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y (P(x) \vee P(y)) \\ \Leftrightarrow & \forall x (P(x) \vee \forall y P(y)) \quad (\text{代入+替换}) \\ \Leftrightarrow & \forall x P(x) \vee \forall y P(y) \quad (\text{代入}) \end{aligned}$$

辖域的扩张与收缩

Theorem (辖域的扩张与收缩(extension & restriction))

设 x 不在公式 G 中出现, 则:

$$(\forall x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge G)$$

$$(\forall x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee G)$$

$$(\exists x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge G)$$

$$(\exists x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \vee G)$$

Example

$$\forall x \forall y (P(x) \vee P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y (P(x) \vee P(y)) \\ \Leftrightarrow & \forall x (P(x) \vee \forall y P(y)) \quad (\text{代入+替换}) \\ \Leftrightarrow & \forall x P(x) \vee \forall y P(y) \quad (\text{代入}) \end{aligned}$$

辖域的扩张与收缩

Theorem (辖域的扩张与收缩(extension & restriction))

设 x 不在公式 G 中出现, 则:

$$(\forall x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge G)$$

$$(\forall x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee G)$$

$$(\exists x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge G)$$

$$(\exists x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \vee G)$$

Example

$$\forall x \forall y (P(x) \vee P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y (P(x) \vee P(y)) \\ \Leftrightarrow & \forall x (P(x) \vee \forall y P(y)) \quad (\text{代入+替换}) \\ \Leftrightarrow & \forall x P(x) \vee \forall y P(y) \quad (\text{代入}) \end{aligned}$$

Theorem (量词的分配形式)

Theorem (量词的分配形式)

$$\textcircled{1} \quad \forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$$

Theorem (量词的分配形式)

- 1 $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$
- 2 $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$
- 3 $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- 4 $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

Theorem (量词的分配形式)

- 1 $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$
- 2 $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$
- 3 $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- 4 $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

Theorem (量词的分配形式)

- 1 $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$
- 2 $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$
- 3 $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- 4 $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是两谓词公式, 则:

- ① $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$
- ② $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$
- ③ $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- ④ $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

Remark

- ③和④没有恒等式;
- 如, $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 是奇数, 则, 在自然数集合的解释下: $\forall x(F(x) \vee G(x))$ 为真, 但是, $\forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 为假;
- 同样, $\exists xF(x) \vee \exists xG(x)$ 为真, 但是, $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ 为假.

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是两谓词公式, 则:

- ① $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$
- ② $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$
- ③ $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- ④ $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

Remark

- ③和④没有恒等式;
- 如, $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 是奇数, 则, 在自然数集合的解释下: $\forall x(F(x) \vee G(x))$ 为真, 但是, $\forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 为假;
- 同样, $\exists xF(x) \vee \exists xG(x)$ 为真, 但是, $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ 为假.

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是两谓词公式, 则:

- ① $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$
- ② $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$
- ③ $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- ④ $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

Remark

- ③和④没有恒等式;
- 如, $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 是奇数, 则, 在自然数集合的解释下: $\forall x(F(x) \vee G(x))$ 为真, 但是, $\forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 为假;
- 同样, $\exists xF(x) \vee \exists xG(x)$ 为真, 但是, $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ 为假.

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是两谓词公式, 则:

- ① $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$
- ② $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$
- ③ $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- ④ $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

Remark

- ③和④没有恒等式;
- 如, $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 是奇数, 则, 在自然数集合的解释下: $\forall x(F(x) \vee G(x))$ 为真, 但是, $\forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 为假;
- 同样, $\exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$ 为真, 但是, $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ 为假.

→和↔的处理

Example

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

$$\begin{aligned} & \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) && \text{(代入+替换)} \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x)) \vee \exists xQ(x) && \text{(代入+分配形式)} \\ \Leftrightarrow & \neg(\forall xP(x)) \vee \exists xQ(x) && \text{(替换+量词的否定)} \\ \Leftrightarrow & \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x) && \text{(代入+蕴涵表达式)} \end{aligned}$$

Example

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

→和↔的处理

Example

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

$$\begin{aligned} & \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) && \text{(代入+替换)} \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x)) \vee \exists xQ(x) && \text{(代入+分配形式)} \\ \Leftrightarrow & \neg(\forall xP(x)) \vee \exists xQ(x) && \text{(替换+量词的否定)} \\ \Leftrightarrow & \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x) && \text{(代入+蕴涵表达式)} \end{aligned}$$

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) \quad (\text{代入+替换})$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x)) \vee \exists xQ(x) \quad (\text{代入+分配形式})$$

→和↔的处理

Example

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

$$\begin{aligned} & \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) && \text{(代入+替换)} \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x)) \vee \exists xQ(x) && \text{(代入+分配形式)} \\ \Leftrightarrow & \neg(\forall xP(x)) \vee \exists xQ(x) && \text{(替换+量词的否定)} \\ \Leftrightarrow & \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x) && \text{(代入+蕴涵表达式)} \end{aligned}$$

→和↔的处理

Example

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

$$\begin{aligned} & \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) && \text{(代入+替换)} \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x)) \vee \exists xQ(x) && \text{(代入+分配形式)} \\ \Leftrightarrow & \neg(\forall xP(x)) \vee \exists xQ(x) && \text{(替换+量词的否定)} \\ \Leftrightarrow & \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x) && \text{(代入+蕴涵表达式)} \end{aligned}$$

多个量词的处理

Theorem (多个量词的处理)

- ① $\forall x \forall y F(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x F(x, y)$
- ② $\exists x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
- ③ $\forall x \forall y F(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x F(x, y)$
- ④ $\exists y \forall x F(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x, y)$
- ⑤ $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

考虑谓词公式 $\exists y \forall x F(x, y)$ 和 $\forall x \exists y F(x, y)$

令 $F(x, y)$ 表示 x 是 y 的父亲

Theorem (多个量词的处理)

5 $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$

多个量词的处理

Theorem (多个量词的处理)

- ① $\forall x \forall y F(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x F(x, y)$
- ② $\exists x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
- ③ $\forall x \forall y F(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x F(x, y)$
- ④ $\exists y \forall x F(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x, y)$
- ⑤ $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

- $\forall x \exists y \text{ LOVE}(x, y) \not\Leftrightarrow \exists y \forall x \text{ LOVE}(x, y);$
- $\forall x \exists y (x + y = 0) \not\Leftrightarrow \exists y \forall x (x + y = 0)$

多个量词的处理

Theorem (多个量词的处理)

- ① $\forall x \forall y F(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x F(x, y)$
- ② $\exists x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
- ③ $\forall x \forall y F(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x F(x, y)$
- ④ $\exists y \forall x F(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x, y)$
- ⑤ $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

- $\forall x \exists y \text{ LOVE}(x, y) \not\Leftrightarrow \exists y \forall x \text{ LOVE}(x, y)$;
- $\forall x \exists y (x + y = 0) \not\Leftrightarrow \exists y \forall x (x + y = 0)$

Definition

Definition

Theorem

$$F \Leftrightarrow G \quad \text{iff} \quad F^* \Leftrightarrow G^*$$

- 43/71 -

Example

Example(1/2)

Example

- $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$

Example

Example(1/2)

Example

- $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$

Example

- $\forall x\exists yF(x,y) \Rightarrow \exists y\forall xF(x,y)$
- $\exists y\forall xF(x,y) \Rightarrow \forall x\exists yF(x,y)$

Example(1/2)

Example

- $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \Rightarrow \forall x (F(x) \vee G(x))$
- $\exists x (F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$

Example

- $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
- $\forall y \forall x F(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$

Example(1/2)

Example

- $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \Rightarrow \forall x (F(x) \vee G(x))$
- $\exists x (F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$

Example

- $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
- $\forall y \forall x F(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$

Example(1/2)

Example

- $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \Rightarrow \forall x (F(x) \vee G(x))$
- $\exists x (F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$

Example

- $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
- $\forall y \forall x F(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$

Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左推

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge B(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \end{aligned}$$



Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge B(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \end{aligned}$$



Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge B(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \end{aligned}$$



Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge B(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \end{aligned}$$



Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge B(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \end{aligned}$$



Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \text{B}(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \end{aligned}$$



Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \text{B}(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \end{aligned}$$



Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg Q(x))) \\ &\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \text{B(x)}) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \end{aligned}$$



Example(2/2)(上例的补充证明)

Example

存在 B 使得: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Example(2/2)(上例的补充证明)

Example

存在 B 使得: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Proof.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)}_B \\
 \Leftrightarrow & B \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{(B \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (B \wedge (P \wedge R))}_C \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee \mathbb{F} \\
 \Leftrightarrow & C
 \end{aligned}$$



Example

存在 B 使得: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Proof.

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)}_B \\ \Leftrightarrow & B \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge R)) \\ \Leftrightarrow & \underbrace{(B \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (B \wedge (P \wedge R))}_C \\ \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R) \\ \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \\ \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R)) \\ \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \\ \Leftrightarrow & C \vee \mathbb{F} \\ \Leftrightarrow & C \end{aligned}$$



Example(2/2)(上例的补充证明)

Example

存在 B 使得: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Proof.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)}_B \\
 \Leftrightarrow & B \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{(B \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (B \wedge (P \wedge R))}_C \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee \mathbb{F} \\
 \Leftrightarrow & C
 \end{aligned}$$



Example(2/2)(上例的补充证明)

Example

存在 B 使得: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Proof.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)}_B \\
 \Leftrightarrow & B \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{(B \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (B \wedge (P \wedge R))}_C \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee \mathbb{F} \\
 \Leftrightarrow & C
 \end{aligned}$$



Example(2/2)(上例的补充证明)

Example

存在 B 使得: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Proof.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)}_B \\
 \Leftrightarrow & B \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{(B \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (B \wedge (P \wedge R))}_C \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee \mathbb{F} \\
 \Leftrightarrow & C
 \end{aligned}$$



Example(2/2)(上例的补充证明)

Example

存在 B 使得: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Proof.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)}_B \\
 \Leftrightarrow & B \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{(B \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (B \wedge (P \wedge R))}_C \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee F \\
 \Leftrightarrow & C
 \end{aligned}$$



Example(2/2)(上例的补充证明)

Example

存在 B 使得: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Proof.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)}_B \\
 \Leftrightarrow & B \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{(B \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (B \wedge (P \wedge R))}_C \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee F \\
 \Leftrightarrow & C
 \end{aligned}$$



Example(2/2)(上例的补充证明)

Example

存在 B 使得: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Proof.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)}_B \\
 \Leftrightarrow & B \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{(B \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (B \wedge (P \wedge R))}_C \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee \mathbb{F} \\
 \Leftrightarrow & C
 \end{aligned}$$



Example(2/2)(上例的补充证明)

Example

存在 B 使得: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Proof.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)}_B \\
 \Leftrightarrow & B \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{(B \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (B \wedge (P \wedge R))}_C \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R)) \\
 \Leftrightarrow & C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \\
 \Leftrightarrow & C \vee \mathbb{F} \\
 \Leftrightarrow & C
 \end{aligned}$$



Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

$$1 \quad \Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x)))$$

$$2 \quad \Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$$

$$3 \quad \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派 I , 任意的 $d \in D$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $(\forall x A(x))|_I$ 为真,

则 $\forall d \in D$, 有 $A|_I(d)$ 为真, 所以 $B|_I(d)$ 为真.

即 $(\forall x B(x))|_I$ 为真.



Proof.

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边



Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

- 1 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x)))$
- 2 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$
- 3 $\Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派 I , 任意的 $d \in D$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $(\forall x A(x))|_I$ 为真,

则 $\forall d \in D$, 有 $A|_I(d)$ 为真, 所以 $B|_I(d)$ 为真.

即 $(\forall x B(x))|_I$ 为真.



Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

- 1 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x)))$
- 2 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$
- 3 $\Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派 I , 任意的 $d \in D$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $(\forall x A(x))|_I$ 为真,

则 $\forall d \in D$, 有 $A|_I(d)$ 为真, 所以 $B|_I(d)$ 为真.

即 $(\forall x B(x))|_I$ 为真.



Proof.

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

$$1 \quad \Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x)))$$

$$2 \quad \Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$$

$$3 \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$



Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

- 1 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x)))$
- 2 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$
- 3 $\Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派 I , 任意的 $d \in D$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $(\forall x A(x))|_I$ 为真,

则 $\forall d \in D$, 有 $A|_I(d)$ 为真, 所以 $B|_I(d)$ 为真.

即 $(\forall x B(x))|_I$ 为真.



Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

- 1 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x)))$
- 2 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$
- 3 $\Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派 I , 任意的 $d \in D$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $(\forall x A(x))|_I$ 为真,

则 $\forall d \in D$, 有 $A|_I(d)$ 为真, 所以 $B|_I(d)$ 为真.

即 $(\forall x B(x))|_I$ 为真.



Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

- 1 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x)))$
- 2 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$
- 3 $\Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派 I , 任意的 $d \in D$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $(\forall x A(x))|_I$ 为真,

则 $\forall d \in D$, 有 $A|_I(d)$ 为真, 所以 $B|_I(d)$ 为真.

即 $(\forall x B(x))|_I$ 为真.



Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

- 1 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x)))$
- 2 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$
- 3 $\Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派 I , 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $(\forall x A(x))|_I$ 为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_I(d)$ 为真, 所以 $B|_I(d)$ 为真.

即 $(\forall x B(x))|_I$ 为真.



Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

- 1 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x)))$
- 2 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$
- 3 $\Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派 I , 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $(\forall x A(x))|_I$ 为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_I(d)$ 为真, 所以 $B|_I(d)$ 为真.

即 $(\forall x B(x))|_I$ 为真.



Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

- 1 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x)))$
- 2 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$
- 3 $\Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派 I , 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $(\forall x A(x))|_I$ 为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_I(d)$ 为真, 所以 $B|_I(d)$ 为真.

即 $(\forall x B(x))|_I$ 为真.



Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

左边

- 1 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x)))$
- 2 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x)))$
- 3 $\Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派 I , 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $(\forall x A(x))|_I$ 为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_I(d)$ 为真, 所以 $B|_I(d)$ 为真.

即 $(\forall x B(x))|_I$ 为真.



Example(错误使用替换规则)

Example

$$\forall x(P(x) \vee Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x \neg (P(x) \vee Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{C(x)}$$

$$\Rightarrow \neg (\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x))$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{D(x)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

局部变换中对不等式使用替换规则!

$$C(x) \Rightarrow D(x) \not\Rightarrow \neg C(x) \Rightarrow \neg D(x)$$

Example

$$\begin{aligned} & \forall x(P(x) \vee Q(x)) \\ \Leftrightarrow & \neg \exists x \neg (P(x) \vee Q(x)) \\ \Leftrightarrow & \neg \underbrace{\exists x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))}_{C(x)} \\ \Rightarrow & \neg (\underbrace{\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)}_{D(x)}) \\ \Leftrightarrow & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \end{aligned}$$

Example(错误使用替换规则)

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x(P(x) \vee Q(x)) \\
 \Leftrightarrow & \neg \exists x \neg (P(x) \vee Q(x)) \\
 \Leftrightarrow & \neg \exists x (\underbrace{\neg P(x) \wedge \neg Q(x)}_{C(x)}) \\
 \Rightarrow & \neg (\underbrace{\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)}_{D(x)}) \\
 \Leftrightarrow & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)
 \end{aligned}$$

局部变换中对不等式使用替换规则!

$$C(x) \Rightarrow D(x) \not\Rightarrow \neg C(x) \Rightarrow \neg D(x)$$

Example

$$\Rightarrow \neg(\underbrace{\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)}_{D(x)})$$

Example

$$\begin{aligned} & \forall x(P(x) \vee Q(x)) \\ \Leftrightarrow & \neg \exists x \neg (P(x) \vee Q(x)) \\ \Leftrightarrow & \neg \underbrace{\exists x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))}_{C(x)} \\ \Rightarrow & \neg (\underbrace{\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)}_{D(x)}) \\ \Leftrightarrow & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \end{aligned}$$

Example(错误使用替换规则)

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x(P(x) \vee Q(x)) \\
 \Leftrightarrow & \neg \exists x \neg (P(x) \vee Q(x)) \\
 \Leftrightarrow & \neg \exists x (\underbrace{\neg P(x) \wedge \neg Q(x)}_{C(x)}) \\
 \Rightarrow & \neg (\underbrace{\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)}_{D(x)}) \\
 \Leftrightarrow & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)
 \end{aligned}$$

局部变换中对不等式使用替换规则!

$$C(x) \Rightarrow D(x) \not\Rightarrow \neg C(x) \Rightarrow \neg D(x)$$

Definition

$$Q_i x_i = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

称 $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n$ 为前束词, M 为母式(Matrix).

Definition

$$Q_{ix_i} = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

称 $Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_n$ 为前束词, M 为母式(Matrix).

Definition

$$Q_i x_i = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

称 $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n$ 为前束词, M 为母式(Matrix).

- $\forall x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x))$
- $\forall x \forall y \exists z (P(x, y) \rightarrow Q(x, z))$

Definition

$$Q_{ix_i} = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

称 $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n$ 为前束词, M 为母式(Matrix).

- $\forall x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x))$
- $\forall x \forall y \exists z (P(x, y) \rightarrow Q(x, z))$

Definition

$$Q_{ix_i} = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

称 $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n$ 为前束词, M 为母式(Matrix).

- $\forall x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x))$
- $\forall x \forall y \exists z (P(x, y) \rightarrow Q(x, z))$

Definition

设公式 $F \Leftrightarrow G$, 其中 G 是前束范式, 称 G 为公式 F 的前束范式.

前束范式求解

Theorem

对任意的公式 F , 存在公式 G , 使得 G 是 F 的前束范式.

求解步骤.

- ① 消除 $\rightarrow, \leftrightarrow$;
- ② 用De Morgan律消除对非原子公式的否定;
- ③ 对约束变量的重新命名;
- ④ 量词的外提(量词的吸收, 扩张和分配等定律的使用).



前束范式求解

Theorem

对任意的公式 F , 存在公式 G , 使得 G 是 F 的前束范式.

求解步骤.

- ① 消除 \rightarrow , \leftrightarrow ;
- ② 用De Morgan律消除对非原子子公式的否定;
- ③ 对约束变量的重新命名;
- ④ 量词的外提(量词的吸收, 扩张和分配等定律的使用).



Example

Example

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

~~$$\forall x (P(x) \vee Q(x))$$~~

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$$

Example

Example

Example

$$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$$

~~$$\forall x(P(x) \vee Q(x))$$~~

$$\Leftrightarrow \forall xP(x) \vee \forall yQ(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x(P(x) \vee \forall yQ(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\forall y(P(x) \vee Q(y))$$

Example

$$\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

$$1 \quad \Leftrightarrow \exists x\neg P(x) \vee \exists xQ(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x) \vee xQ(x))$$

$$2 \quad \Leftrightarrow \exists x\neg P(x) \vee \exists yQ(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(\neg P(x) \vee Q(y))$$

一个公式的前束范式不唯一!

Example

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
 & \not\equiv \forall x (P(x) \vee Q(x)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
 1 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
 & \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee x Q(x)) \\
 2 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

一个公式的前束范式不唯一!

Example

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \\
 & \cancel{\Leftrightarrow} \forall x(P(x) \vee Q(x)) \\
 & \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee \forall yQ(y) \\
 & \Leftrightarrow \forall x(P(x) \vee \forall yQ(y)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x\forall y(P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x) \\
 1 \quad & \Leftrightarrow \exists x\neg P(x) \vee \exists xQ(x) \\
 & \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x) \vee xQ(x)) \\
 2 \quad & \Leftrightarrow \exists x\neg P(x) \vee \exists yQ(y) \\
 & \Leftrightarrow \exists x\exists y(\neg P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

一个公式的前束范式不唯一!

Example

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
 & \cancel{\Leftrightarrow} \forall x (P(x) \vee Q(x)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
 1 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
 & \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee x Q(x)) \\
 2 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

一个公式的前束范式不唯一!

Example

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
 & \cancel{\Leftrightarrow} \forall x (P(x) \vee Q(x)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
 1 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
 & \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee x Q(x)) \\
 2 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

一个公式的前束范式不唯一!

Example

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
 & \cancel{\forall x} \forall x (P(x) \vee Q(x)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
 1 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
 & \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee x Q(x)) \\
 2 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

一个公式的前束范式不唯一!

Example

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
 & \cancel{\forall x} \forall x (P(x) \vee Q(x)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
 1 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
 & \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee x Q(x)) \\
 2 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

一个公式的前束范式不唯一!

Example

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
 & \cancel{\forall x} (P(x) \vee Q(x)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
 1 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
 & \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee x Q(x)) \\
 2 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

一个公式的前束范式不唯一!

Example

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
 & \cancel{\forall x} (P(x) \vee Q(x)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
 1 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
 & \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee x Q(x)) \\
 2 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

一个公式的前束范式不唯一!

Example

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
 & \cancel{\forall x} (P(x) \vee Q(x)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned}
 & \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
 1 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
 & \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee x Q(x)) \\
 2 \quad & \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
 \end{aligned}$$

一个公式的前束范式不唯一!

1 谓词与量词

- 谓词
- 符号化
- 一阶逻辑公式的语义

2 公式间的关系式

- 逻辑等价和永真蕴涵关系
- 量词的逻辑关系
- 前束范式

3 谓词公式的自然推理

- 相关概念的复习
- 量词的推理规则
- 形式证明的例子
- Mechanized Reasoning

- 53/71 -

证明序列

Definition

设, H_1, H_2, \dots, H_n 是一组条件, 一个证明序列是一组形如:
 C_1, C_2, \dots, C_m 的公式序列, 其中每个 C_i 满足下述条件中的一个:

- ① 存在 H_j , 使得: $C_i = H_j$; (引入条件)
- ② $C_i = \mathbb{T}$;
- ③ 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且:
 $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$; (恒等变换)
- ④ 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且:
 $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$; (不等变换)

证明序列

Definition

设, H_1, H_2, \dots, H_n 是一组条件, 一个证明序列是一组形如:
 C_1, C_2, \dots, C_m 的公式序列, 其中每个 C_i 满足下述条件中的一个:

- ① 存在 H_j , 使得: $C_i = H_j$; (引入条件)
- ② $C_i = \mathbb{T}$;
- ③ 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且:
 $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$; (恒等变换)
- ④ 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且:
 $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$; (不等变换)

证明有效结论的方法

Remark

- ① 恒等和不等变换;
- ② 设 I 为任意的语义解释, 并且在该解释下结论为假, 证明条件亦假;
- ③ 设 I 为任意的语义解释, 并且在该解释下条件为真, 证明结论亦真;
- ④ 证明序列.

证明有效结论的方法

Remark

- ① 恒等和不等变换;
- ② 设 I 为任意的语义解释, 并且在该解释下结论为假, 证明条件亦假;
- ③ 设 I 为任意的语义解释, 并且在该解释下条件为真, 证明结论亦真;
- ④ 证明序列.

证明有效结论的方法

Remark

- ① 恒等和不等变换;
- ② 设 I 为任意的语义解释, 并且在该解释下结论为假, 证明条件亦假;
- ③ 设 I 为任意的语义解释, 并且在该解释下条件为真, 证明结论亦真;
- ④ 证明序列.

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \dots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

$$\bullet \quad \exists y (P(y) \vee Q(x) \vee R(z)) \rightarrow F(x, z)$$

Remark

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \dots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y);$

Remark

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \dots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y);$

Remark

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \dots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y);$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \dots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y);$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则: 两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记: 约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样, 一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性(Gödel's completeness theorem).

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \dots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y);$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则: 两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记: 约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样, 一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性(Gödel's completeness theorem).

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \dots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y);$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则: 两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记: 约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样, 一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性(Gödel's completeness theorem).

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \dots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y);$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则: 两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记: 约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样, 一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性(Gödel's completeness theorem).

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \dots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y);$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则: 两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记: 约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样, 一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性(Gödel's completeness theorem).

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} \quad (US)$$

$$\frac{\forall x F(x)}{F(c)} \quad (US)$$

👉 y 一定不是在公式 A 中出现的约束变量

👉对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$



全称指定规则

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} \text{ (US)}$$

$$\frac{\forall x F(x)}{F(c)} \text{ (US)}$$

☞ y 一定不是在公式 A 中出现的约束变量

☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$



Example

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\forall x \exists y P(x, y) \not\vdash \exists y P(y, y)$, y 在 $\forall y P(x, y)$ 中约束出现;
- $\forall x P(x) \rightarrow Q \not\vdash P(x) \rightarrow Q$;
- 原因: US规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

全称指定规则

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} (US)$$

$$\frac{\forall x F(x)}{F(c)} (US)$$

☞ y 一定不是在公式 A 中出现的约束变量

☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$



Example

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\forall x \exists y P(x, y) \not\vdash \exists y P(y, y)$, y 在 $\forall y P(x, y)$ 中约束出现;
- $\forall x P(x) \rightarrow Q \not\vdash P(x) \rightarrow Q$;
- 原因: US规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

全称指定规则

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} \text{ (US)}$$

$$\frac{\forall x F(x)}{F(c)} \text{ (US)}$$

☞ y 一定不是在公式 A 中出现的约束变量

☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$



Example

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\forall x \exists y P(x, y) \not\vdash \exists y P(y, y)$, y 在 $\forall y P(x, y)$ 中约束出现;
- $\forall x P(x) \rightarrow Q \not\vdash P(x) \rightarrow Q$;
- 原因: US规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

全称指定规则

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} \text{ (US)}$$

$$\frac{\forall x F(x)}{F(c)} \text{ (US)}$$

☞ y 一定不是在公式 A 中出现的约束变量

☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$



Example

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\forall x \exists y P(x, y) \not\vdash \exists y P(y, y)$, y 在 $\forall y P(x, y)$ 中约束出现;
- $\forall x P(x) \rightarrow Q \not\vdash P(x) \rightarrow Q$;
- 原因: US规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

全称指定规则

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} \text{ (US)}$$

$$\frac{\forall x F(x)}{F(c)} \text{ (US)}$$

☞ y 一定不是在公式 A 中出现的约束变量

☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$



Example

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\forall x \exists y P(x, y) \not\vdash \exists y P(y, y)$, y 在 $\forall y P(x, y)$ 中约束出现;
- $\forall x P(x) \rightarrow Q \not\vdash P(x) \rightarrow Q$;
- 原因: US规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

特称指定规则

特称指定规则(Existential Specification).

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)} (ES)$$

☞ c 是新引入的常量符号

☞ 对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$



Example

• $\exists x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 其中 $P(x) = \forall y P(x,y)$

特称指定规则

特称指定规则(Existential Specification).

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)} (ES)$$

☞ c 是新引入的常量符号

☞ 对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$



Example

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \not\vdash P(a, a)$, a 在 $P(x, a)$ 中已经出现;
- $\exists x P(x) \rightarrow Q(x) \not\vdash P(a) \rightarrow Q(x)$;
- 原因: ES规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

特称指定规则

特称指定规则(Existential Specification).

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)} (ES)$$

☞ c 是新引入的常量符号

☞ 对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$



Example

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \not\vdash P(a, a)$, a 在 $P(x, a)$ 中已经出现;
- $\exists x P(x) \rightarrow Q(x) \not\vdash P(a) \rightarrow Q(x)$;
- 原因: ES规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

特称指定规则

特称指定规则(Existential Specification).

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)} (ES)$$

☞ c 是新引入的常量符号

☞ 对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$



Example

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \not\vdash P(a, a)$, a 在 $P(x, a)$ 中已经出现;
- $\exists x P(x) \rightarrow Q(x) \not\vdash P(a) \rightarrow Q(x)$;
- 原因: ES规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

特称推广规则(Existential Generalization).

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)} \quad (EG) \qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)} \quad (EG)$$

👉 y 是新引入的变量符号

👉 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$



特称推广规则(Existential Generalization).

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)} \text{ (EG)} \qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)} \text{ (EG)}$$

👉 y 是新引入的变量符号

👉 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$



特称推广规则

特称推广规则(Existential Generalization).

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)} (EG) \quad \frac{F(x)}{\exists y F(y)} (EG)$$

☞ y 是新引入的变量符号

☞ 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$



Example

- $\exists x P(x, a) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$, 其中: $F(y) \triangleq \exists x P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \not\vdash \exists x \exists x P(x, x)$, x 在 $\exists x P(x, a)$ 中已经约束出现;
- $P(a) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$, $\exists x$ 的辖域是 $P(x)$, 而不是整个公式.

特称推广规则(Existential Generalization).

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)} \text{ (EG)} \qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)} \text{ (EG)}$$

👉 y 是新引入的变量符号

👉 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$



- $\exists xP(x, a) \vdash \exists y\exists xP(x, y)$, 其中: $F(y) \triangleq \exists xP(x, y)$;
- $\exists xP(x, a) \not\vdash \exists x\exists xP(x, x)$, x 在 $\exists xP(x, a)$ 中已经约束出现;
- $P(a) \rightarrow \exists yQ(y) \not\vdash \exists xP(x) \rightarrow \exists yQ(y)$, $\exists x$ 的辖域是 $P(x)$, 而不是整个公式.

特称推广规则

特称推广规则 (Existential Generalization).

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)} (EG) \quad \frac{F(x)}{\exists y F(y)} (EG)$$

☞ y 是新引入的变量符号

☞ 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$



Example

- $\exists x P(x, a) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$, 其中: $F(y) \triangleq \exists x P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \not\vdash \exists x \exists x P(x, x)$, x 在 $\exists x P(x, a)$ 中已经约束出现;
- $P(a) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$, $\exists x$ 的辖域是 $P(x)$, 而不是整个公式.

全称推广规则

全称推广规则(Universal Generalization).

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} \quad (UG)$$

☞ x 不在 F 中约束出现

☞ 对应的不等式: $F(x) \Rightarrow \forall y F(y)$



Example

• $P(x, y) \vdash \forall x P(x, y)$, 其中 $\vdash F(x) \vdash P(x, y)$

全称推广规则(Universal Generalization).

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} \quad (UG)$$

👉 对应的不等式: $F(x) \Rightarrow \forall y F(y)$



全称推广规则

全称推广规则(Universal Generalization).

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} \quad (UG)$$

☞ x 不在 F 中约束出现

☞ 对应的不等式: $F(x) \Rightarrow \forall y F(y)$



Example

- $P(x, a) \vdash \forall x P(x, a)$, 其中: $F(x) \triangleq P(x, a)$;
- $P(x) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$, $\forall x$ 的辖域是 $P(x)$, 而不是整个公式;
- $P(x, a) \not\vdash \forall y P(x, y)$, a 是常量符号, 不能用UG规则.

全称推广规则

全称推广规则(Universal Generalization).

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} \quad (UG)$$

☞ x 不在 F 中约束出现

☞ 对应的不等式: $F(x) \Rightarrow \forall y F(y)$



Example

- $P(x, a) \vdash \forall x P(x, a)$, 其中: $F(x) \triangleq P(x, a)$;
- $P(x) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$, $\forall x$ 的辖域是 $P(x)$, 而不是整个公式;
- $P(x, a) \not\vdash \forall y P(x, y)$, a 是常量符号, 不能用UG规则.

全称推广规则

全称推广规则(Universal Generalization).

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} \quad (UG)$$

☞ x 不在 F 中约束出现

☞ 对应的不等式: $F(x) \Rightarrow \forall y F(y)$



Example

- $P(x, a) \vdash \forall x P(x, a)$, 其中: $F(x) \triangleq P(x, a)$;
- $P(x) \rightarrow \exists y Q(y) \not\vdash \forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$, $\forall x$ 的辖域是 $P(x)$, 而不是整个公式;
- $P(x, a) \not\vdash \forall y P(x, y)$, a 是常量符号, 不能用UG规则.

注释(1/2)

Example

Remark

注释(1/2)

Example

① $\forall x \forall y F(x, y)$	(P)
② $\exists x \exists y F(x, y)$	(①+US)
③ $F(a, b)$	(②+ES)
④ $\neg F(a, b)$	(③+UG)
⑤ $\neg \exists x \exists y F(x, y)$	(④+EG)

Remark

注释(1/2)

Example

- | | | |
|---|-------------------------------|--------|
| ① | $\forall x \exists y F(x, y)$ | (P) |
| ② | $\exists y F(x, y)$ | (①+US) |
| ③ | $F(x, c_x)$ | (②+ES) |
| ④ | $\forall x F(x, c_x)$ | (③+UG) |
| ⑤ | $\exists y \forall x F(x, y)$ | (④+EG) |

Remark

注释(1/2)

Example

- | | | |
|---|-------------------------------|--------|
| ① | $\forall x \exists y F(x, y)$ | (P) |
| ② | $\exists y F(x, y)$ | (①+US) |
| ③ | $F(x, c_x)$ | (②+ES) |
| ④ | $\forall x F(x, c_x)$ | (③+UG) |
| ⑤ | $\exists y \forall x F(x, y)$ | (④+EG) |

Remark

注释(1/2)

Example

- | | | |
|---|-------------------------------|--------|
| ① | $\forall x \exists y F(x, y)$ | (P) |
| ② | $\exists y F(x, y)$ | (①+US) |
| ③ | $F(x, c_x)$ | (②+ES) |
| ④ | $\forall x F(x, c_x)$ | (③+UG) |
| ⑤ | $\exists y \forall x F(x, y)$ | (④+EG) |

Remark

注释(1/2)

Example

- | | | |
|---|-------------------------------|--------|
| ① | $\forall x \exists y F(x, y)$ | (P) |
| ② | $\exists y F(x, y)$ | (①+US) |
| ③ | $F(x, c_x)$ | (②+ES) |
| ④ | $\forall x F(x, c_x)$ | (③+UG) |
| ⑤ | $\exists y \forall x F(x, y)$ | (④+EG) |

Remark

注释(1/2)

Example

- | | | |
|---|-------------------------------|--------|
| ① | $\forall x \exists y F(x, y)$ | (P) |
| ② | $\exists y F(x, y)$ | (①+US) |
| ③ | $F(x, c_x)$ | (②+ES) |
| ④ | $\forall x F(x, c_x)$ | (③+UG) |
| ⑤ | $\exists y \forall x F(x, y)$ | (④+EG) |

Remark

注释(1/2)

Example

- | | | |
|---|-------------------------------|--------|
| ① | $\forall x \exists y F(x, y)$ | (P) |
| ② | $\exists y F(x, y)$ | (①+US) |
| ③ | $F(x, c_x)$ | (②+ES) |
| ④ | $\forall x F(x, c_x)$ | (③+UG) |
| ⑤ | $\exists y \forall x F(x, y)$ | (④+EG) |

Remark

$$\exists y \forall x F(x, y) \neq \forall x \exists y F(x, y)$$

$$\forall x (US) \vdash \exists y (ES) \text{ 或 } \exists y (EG) \vdash \forall x (UG)$$

$$\forall x (UG) \vdash \exists y (EG) \text{ 或 } \exists y (ES) \vdash \forall x (US)$$

注释(1/2)

Example

- | | | |
|---|-------------------------------|--------|
| ① | $\forall x \exists y F(x, y)$ | (P) |
| ② | $\exists y F(x, y)$ | (①+US) |
| ③ | $F(x, c_x)$ | (②+ES) |
| ④ | $\forall x F(x, c_x)$ | (③+UG) |
| ⑤ | $\exists y \forall x F(x, y)$ | (④+EG) |

Remark

- $\exists y \forall x F(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x, y)$
 \nLeftarrow
- US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;
- 这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.

注释(1/2)

Example

- | | | |
|---|-------------------------------|--------|
| ① | $\forall x \exists y F(x, y)$ | (P) |
| ② | $\exists y F(x, y)$ | (①+US) |
| ③ | $F(x, c_x)$ | (②+ES) |
| ④ | $\forall x F(x, c_x)$ | (③+UG) |
| ⑤ | $\exists y \forall x F(x, y)$ | (④+EG) |

Remark

● $\exists y \forall x F(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x, y)$
 \nLeftarrow

- US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;
- 这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.

注释(1/2)

Example

- | | | |
|---|-------------------------------|--------|
| ① | $\forall x \exists y F(x, y)$ | (P) |
| ② | $\exists y F(x, y)$ | (①+US) |
| ③ | $F(x, c_x)$ | (②+ES) |
| ④ | $\forall x F(x, c_x)$ | (③+UG) |
| ⑤ | $\exists y \forall x F(x, y)$ | (④+EG) |

Remark

- $\exists y \forall x F(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x, y)$
 \nLeftarrow
- US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;
- 这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.

注释(1/2)

Example

- | | | |
|---|-------------------------------|--------|
| ① | $\forall x \exists y F(x, y)$ | (P) |
| ② | $\exists y F(x, y)$ | (①+US) |
| ③ | $F(x, c_x)$ | (②+ES) |
| ④ | $\forall x F(x, c_x)$ | (③+UG) |
| ⑤ | $\exists y \forall x F(x, y)$ | (④+EG) |

Remark

- $\exists y \forall x F(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x, y)$
 \nLeftarrow
- US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;
- 这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.

注释(2/2)

Example

①	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)	①	$\exists yP(y)$	(P)
②	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(①+US)	②	$P(c)$	(①+ES)
③	$\exists yP(y)$	(P)	③	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)
④	$P(c)$	(③+ES)	④	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(②+US)
⑤	$Q(c)$	(②④+MP)	⑤	$Q(c)$	(②④+MP)
⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)	⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

①	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)	①	$\exists yP(y)$	(P)
②	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(①+US)	②	$P(c)$	(①+ES)
③	$\exists yP(y)$	(P)	③	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)
④	$P(c)$	(③+ES)	④	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(②+US)
⑤	$Q(c)$	(②④+MP)	⑤	$Q(c)$	(②④+MP)
⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)	⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

①	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)	①	$\exists yP(y)$	(P)
②	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(①+US)	②	$P(c)$	(①+ES)
③	$\exists yP(y)$	(P)	③	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)
④	$P(c)$	(③+ES)	④	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(②+US)
⑤	$Q(c)$	(②④+MP)	⑤	$Q(c)$	(②④+MP)
⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)	⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

$$\textcircled{1} \quad \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (P)$$

$$\textcircled{2} \quad P(c) \rightarrow Q(c) \quad (\textcircled{1} + US)$$

$$\textcircled{3} \quad \exists yP(y) \quad (P)$$

$$\textcircled{4} \quad P(c) \quad (\textcircled{3} + ES)$$

$$\textcircled{5} \quad Q(c) \quad (\textcircled{2}\textcircled{4} + MP)$$

$$\textcircled{6} \quad \exists xQ(x) \quad (\textcircled{5} + EG)$$

$$\textcircled{1} \quad \exists yP(y) \quad (P)$$

$$\textcircled{2} \quad P(c) \quad (\textcircled{1} + ES)$$

$$\textcircled{3} \quad \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (P)$$

$$\textcircled{4} \quad P(c) \rightarrow Q(c) \quad (\textcircled{2} + US)$$

$$\textcircled{5} \quad Q(c) \quad (\textcircled{2}\textcircled{4} + MP)$$

$$\textcircled{6} \quad \exists xQ(x) \quad (\textcircled{5} + EG)$$

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

①	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)	①	$\exists yP(y)$	(P)
②	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(①+US)	②	$P(c)$	(①+ES)
③	$\exists yP(y)$	(P)	③	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)
④	$P(c)$	(③+ES)	④	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(②+US)
⑤	$Q(c)$	(②④+MP)	⑤	$Q(c)$	(②④+MP)
⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)	⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

$$\textcircled{1} \quad \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (P)$$

$$\textcircled{2} \quad P(c) \rightarrow Q(c) \quad (\textcircled{1}+US)$$

$$\textcircled{3} \quad \exists yP(y) \quad (P)$$

$$\textcircled{4} \quad P(c) \quad (\textcircled{3}+ES)$$

$$\textcircled{5} \quad Q(c) \quad (\textcircled{2}\textcircled{4}+MP)$$

$$\textcircled{6} \quad \exists xQ(x) \quad (\textcircled{5}+EG)$$

$$\textcircled{1} \quad \exists yP(y) \quad (P)$$

$$\textcircled{2} \quad P(c) \quad (\textcircled{1}+ES)$$

$$\textcircled{3} \quad \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (P)$$

$$\textcircled{4} \quad P(c) \rightarrow Q(c) \quad (\textcircled{2}+US)$$

$$\textcircled{5} \quad Q(c) \quad (\textcircled{2}\textcircled{4}+MP)$$

$$\textcircled{6} \quad \exists xQ(x) \quad (\textcircled{5}+EG)$$

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

$$\textcircled{1} \quad \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (P)$$

$$\textcircled{2} \quad P(c) \rightarrow Q(c) \quad (\textcircled{1}+US)$$

$$\textcircled{3} \quad \exists yP(y) \quad (P)$$

$$\textcircled{4} \quad P(c) \quad (\textcircled{3}+ES)$$

$$\textcircled{5} \quad Q(c) \quad (\textcircled{2}\textcircled{4}+MP)$$

$$\textcircled{6} \quad \exists xQ(x) \quad (\textcircled{5}+EG)$$

$$\textcircled{1} \quad \exists yP(y) \quad (P)$$

$$\textcircled{2} \quad P(c) \quad (\textcircled{1}+ES)$$

$$\textcircled{3} \quad \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (P)$$

$$\textcircled{4} \quad P(c) \rightarrow Q(c) \quad (\textcircled{2}+US)$$

$$\textcircled{5} \quad Q(c) \quad (\textcircled{2}\textcircled{4}+MP)$$

$$\textcircled{6} \quad \exists xQ(x) \quad (\textcircled{5}+EG)$$

Remark

- $\textcircled{4}$ 用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

$$\textcircled{1} \quad \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (P)$$

$$\textcircled{2} \quad P(c) \rightarrow Q(c) \quad (\textcircled{1} + US)$$

$$\textcircled{3} \quad \exists yP(y) \quad (P)$$

$$\textcircled{4} \quad P(c) \quad (\textcircled{3} + ES)$$

$$\textcircled{5} \quad Q(c) \quad (\textcircled{2}\textcircled{4} + MP)$$

$$\textcircled{6} \quad \exists xQ(x) \quad (\textcircled{5} + EG)$$

$$\textcircled{1} \quad \exists yP(y) \quad (P)$$

$$\textcircled{2} \quad P(c) \quad (\textcircled{1} + ES)$$

$$\textcircled{3} \quad \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (P)$$

$$\textcircled{4} \quad P(c) \rightarrow Q(c) \quad (\textcircled{2} + US)$$

$$\textcircled{5} \quad Q(c) \quad (\textcircled{2}\textcircled{4} + MP)$$

$$\textcircled{6} \quad \exists xQ(x) \quad (\textcircled{5} + EG)$$

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

①	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)	①	$\exists yP(y)$	(P)
②	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(①+US)	②	$P(c)$	(①+ES)
③	$\exists yP(y)$	(P)	③	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)
④	$P(c)$	(③+ES)	④	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(②+US)
⑤	$Q(c)$	(②④+MP)	⑤	$Q(c)$	(②④+MP)
⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)	⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

①	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)	①	$\exists yP(y)$	(P)
②	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(①+US)	②	$P(c)$	(①+ES)
③	$\exists yP(y)$	(P)	③	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)
④	$P(c)$	(③+ES)	④	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(②+US)
⑤	$Q(c)$	(②④+MP)	⑤	$Q(c)$	(②④+MP)
⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)	⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

①	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)	①	$\exists yP(y)$	(P)
②	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(①+US)	②	$P(c)$	(①+ES)
③	$\exists yP(y)$	(P)	③	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)
④	$P(c)$	(③+ES)	④	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(②+US)
⑤	$Q(c)$	(②④+MP)	⑤	$Q(c)$	(②④+MP)
⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)	⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

①	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)	①	$\exists yP(y)$	(P)
②	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(①+US)	②	$P(c)$	(①+ES)
③	$\exists yP(y)$	(P)	③	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)
④	$P(c)$	(③+ES)	④	$P(c) \rightarrow Q(c)$	(②+US)
⑤	$Q(c)$	(②④+MP)	⑤	$Q(c)$	(②④+MP)
⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)	⑥	$\exists xQ(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

① $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)	① $\exists yP(y)$	(P)
② $P(c) \rightarrow Q(c)$	(①+US)	② $P(c)$	(①+ES)
③ $\exists yP(y)$	(P)	③ $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)
④ $P(c)$	(③+ES)	④ $P(c) \rightarrow Q(c)$	(②+US)
⑤ $Q(c)$	(②④+MP)	⑤ $Q(c)$	(②④+MP)
⑥ $\exists xQ(x)$	(⑤+EG)	⑥ $\exists xQ(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

注释(2/2)

Example

① $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)	① $\exists yP(y)$	(P)
② $P(c) \rightarrow Q(c)$	(①+US)	② $P(c)$	(①+ES)
③ $\exists yP(y)$	(P)	③ $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(P)
④ $P(c)$	(③+ES)	④ $P(c) \rightarrow Q(c)$	(②+US)
⑤ $Q(c)$	(②④+MP)	⑤ $Q(c)$	(②④+MP)
⑥ $\exists xQ(x)$	(⑤+EG)	⑥ $\exists xQ(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

形式证明的主要步骤

主要步骤.

- 证明方法的选择: 直接证明; 间接证明(CP规则, 反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意: 引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意: 避免US+ES后再UG.



形式证明的主要步骤

主要步骤.

- 证明方法的选择：直接证明；间接证明(CP规则，反证法等)；
- ES+ US 去掉量词(注意：引入的变量和常量的限定条件)；
- 处理好特殊和一般的关系；
- 等同写命题公式的证明序列；
- UG和EG加量词(if 结论中有量词)，注意：避免US+ES后再UG.



形式证明的主要步骤

主要步骤.

- 证明方法的选择: 直接证明; 间接证明(CP规则, 反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意: 引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意: 避免US+ES后再UG.



形式证明的主要步骤

主要步骤.

- 证明方法的选择：直接证明；间接证明(CP规则，反证法等)；
- ES+ US 去掉量词(注意：引入的变量和常量的限定条件)；
- 处理好特殊和一般的关系；
- 等同写命题公式的证明序列；
- UG和EG加量词(if 结论中有量词)，注意：避免US+ES后再UG.



形式证明的主要步骤

主要步骤.

- 证明方法的选择: 直接证明; 间接证明(CP规则, 反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意: 引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意: 避免US+ES后再UG.



形式证明的主要步骤

主要步骤.

- 证明方法的选择：直接证明；间接证明(CP规则，反证法等)；
- ES+ US 去掉量词(注意：引入的变量和常量的限定条件)；
- 处理好特殊和一般的关系；
- 等同写命题公式的证明序列；
- UG和EG加量词(if 结论中有量词)，注意：避免US+ES后再UG.



Example(1/2)

Example

- ① $H_1 :$
 $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
- ② $H_2 : P(a)$
- ③ $C : \exists xP(f(x))$

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$
 (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\exists xP(f(x))$ (⑤+EG)

Example(1/2)

Example

- ① $H_1 :$
 $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
- ② $H_2 : P(a)$
- ③ $C : \exists xP(f(x))$

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$
(①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\exists xP(f(x))$ (⑤+EG)

Example(1/2)

Example

- ① $H_1 :$
 $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
- ② $H_2 : P(a)$
- ③ $C : \exists xP(f(x))$

$$\textcircled{1} \quad \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))) \quad (P)$$

$$\textcircled{2} \quad \neg P(a) \vee P(f(a))$$

$$(\textcircled{1} + \text{US})$$

$$\textcircled{3} \quad P(a) \rightarrow P(f(a)) \quad (\textcircled{1} + \text{T})$$

$$\textcircled{4} \quad P(a) \quad (P)$$

$$\textcircled{5} \quad P(f(a)) \quad (\textcircled{3}\textcircled{4} + \text{MP})$$

$$\textcircled{6} \quad \exists xP(f(x)) \quad (\textcircled{5} + \text{EG})$$

Example(1/2)

Example

- ① $H_1 :$
 $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
- ② $H_2 : P(a)$
- ③ $C : \exists xP(f(x))$

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$
(①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\exists xP(f(x))$ (⑤+EG)

Example(1/2)

Example

- ① $H_1 :$
 $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
- ② $H_2 : P(a)$
- ③ $C : \exists xP(f(x))$

$$\textcircled{1} \quad \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))) \quad (P)$$

$$\textcircled{2} \quad \neg P(a) \vee P(f(a))$$

$$(\textcircled{1} + \text{US})$$

$$\textcircled{3} \quad P(a) \rightarrow P(f(a)) \quad (\textcircled{1} + \text{T})$$

$$\textcircled{4} \quad P(a) \quad (P)$$

$$\textcircled{5} \quad P(f(a)) \quad (\textcircled{3}\textcircled{4} + \text{MP})$$

$$\textcircled{6} \quad \exists xP(f(x)) \quad (\textcircled{5} + \text{EG})$$

Example(1/2)

Example

- ① $H_1 :$
 $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
- ② $H_2 : P(a)$
- ③ $C : \exists xP(f(x))$

$$\textcircled{1} \quad \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))) \quad (P)$$

$$\textcircled{2} \quad \neg P(a) \vee P(f(a)) \\ (\textcircled{1} + \text{US})$$

$$\textcircled{3} \quad P(a) \rightarrow P(f(a)) \quad (\textcircled{1} + \text{T})$$

$$\textcircled{4} \quad P(a) \quad (P)$$

$$\textcircled{5} \quad P(f(a)) \quad (\textcircled{3}\textcircled{4} + \text{MP})$$

$$\textcircled{6} \quad \exists xP(f(x)) \quad (\textcircled{5} + \text{EG})$$

Example(1/2)

Example

- ① $H_1 :$
 $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
- ② $H_2 : P(a)$
- ③ $C : \exists xP(f(x))$

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$
(①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\exists xP(f(x))$ (⑤+EG)

Example(1/2)

Example

- ① $H_1 :$
 $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
- ② $H_2 : P(a)$
- ③ $C : \exists xP(f(x))$

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$
(①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\exists xP(f(x))$ (⑤+EG)

Example(1/2)

Example

- ① $H_1 :$
 $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
- ② $H_2 : P(a)$
- ③ $C : \exists xP(f(x))$

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$
(①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\exists xP(f(x))$ (⑤+EG)

Example(2/2)

Example

Example(2/2)

Example

例：纪检人员审查了该
 部门的每一个
 非VIP人员，该部门
 有腐败分子存在并
 且仅被同案审查过，
 VIP不是腐败分子；
 一定有的非人员是
 腐败分子。

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

Example

结论: 一定有纪检人员是腐败分子.

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

$E(x)$: x 是该部门的人员;

$V(x)$: x 是VIP;

$S(x, y)$: x 被 y 审查;

$C(x)$: x 是纪检人员;

$P(x)$: x 是腐败分子.

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

$E(x)$: x 是该部门的人员;

$V(x)$: x 是VIP;

$S(x, y)$: x 被 y 审查;

$C(x)$: x 是纪检人员;

$P(x)$: x 是腐败分子.

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

$E(x)$: x 是该部门的人员;

$V(x)$: x 是VIP;

$S(x, y)$: x 被 y 审查;

$C(x)$: x 是纪检人员;

$P(x)$: x 是腐败分子.

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

$E(x)$: x 是该部门的人员;

$V(x)$: x 是VIP;

$S(x, y)$: x 被 y 审查;

$C(x)$: x 是纪检人员;

$P(x)$: x 是腐败分子.

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

$E(x)$: x 是该部门的人员;

$V(x)$: x 是VIP;

$S(x, y)$: x 被 y 审查;

$C(x)$: x 是纪检人员;

$P(x)$: x 是腐败分子.

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

$E(x)$: x 是该部门的人员;

$V(x)$: x 是VIP;

$S(x, y)$: x 被 y 审查;

$C(x)$: x 是纪检人员;

$P(x)$: x 是腐败分子.

$$① H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$$

$$② H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$$

$$③ H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$$

$$④ C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$$

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

$E(x)$: x 是该部门的人员;

$V(x)$: x 是VIP;

$S(x, y)$: x 被 y 审查;

$C(x)$: x 是纪检人员;

$P(x)$: x 是腐败分子.

$$① H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$$

$$② H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$$

$$③ H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$$

$$④ C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$$

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

$E(x)$: x 是该部门的人员;

$V(x)$: x 是VIP;

$S(x, y)$: x 被 y 审查;

$C(x)$: x 是纪检人员;

$P(x)$: x 是腐败分子.

$$① H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$$

$$② H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$$

$$③ H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$$

$$④ C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$$

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

$E(x)$: x 是该部门的人员;

$V(x)$: x 是VIP;

$S(x, y)$: x 被 y 审查;

$C(x)$: x 是纪检人员;

$P(x)$: x 是腐败分子.

$$① H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$$

$$② H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$$

$$③ H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$$

$$④ C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$$

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该
部门的每一个
非VIP人员, 该部门
有腐败分子存在并
且仅被同类审查过,
VIP不是腐败分子;

结论: 一定有纪检人员是
腐败分子.

$E(x)$: x 是该部门的人员;

$V(x)$: x 是VIP;

$S(x, y)$: x 被 y 审查;

$C(x)$: x 是纪检人员;

$P(x)$: x 是腐败分子.

$$① H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$$

$$② H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$$

$$③ H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$$

$$④ C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$$

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

$$① \quad H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$$

$$② \quad H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$$

$$\text{求证: } H_1, H_2 \vdash \exists x(P(x) \wedge C(x))$$

$$\text{证: 由 } H_2 \text{ 得 } P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$$

$$\text{由 } E(a) \text{ 得 } E(a) \quad (\text{①}+\text{化简式})$$

$$\text{由 } P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))) \text{ 得 } P(a)$$

$$\text{由 } P(a) \text{ 得 } \neg \neg P(a) \quad (\text{②}+\text{否定式})$$

$$\text{由 } \neg \neg P(a) \text{ 得 } P(a) \quad (\text{③}+\text{消去式})$$

$$\text{由 } P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))) \text{ 得 } \forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$$

$$\text{由 } \forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)) \text{ 得 } \neg \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x)) \quad (P)$$

$$\text{由 } \neg \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x)) \text{ 得 } P(a) \rightarrow \neg V(a) \quad (\text{⑥}+\text{US})$$

$$\text{由 } P(a) \rightarrow \neg V(a) \text{ 得 } \neg V(a) \quad (\text{⑦}+\text{US})$$

$$\text{由 } \neg V(a) \text{ 得 } \neg \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y))) \quad (P)$$

$$\text{由 } H_1 \text{ 得 } \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$$

$$\text{由 } \neg \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y))) \text{ 得 } \neg \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$$

$$\text{由 } \neg \exists y(S(a, y) \wedge C(y)) \text{ 得 } \forall y \neg (S(a, y) \wedge C(y))$$

$$\text{由 } \forall y \neg (S(a, y) \wedge C(y)) \text{ 得 } \neg (S(a, b) \wedge C(b))$$

$$\text{由 } \neg (S(a, b) \wedge C(b)) \text{ 得 } \neg S(a, b) \vee \neg C(b) \quad (\text{⑩}+\text{德摩根律})$$

$$\text{由 } \neg S(a, b) \vee \neg C(b) \text{ 得 } \neg S(a, b) \rightarrow \neg C(b) \quad (\text{⑪}+\text{蕴含式})$$

$$\text{由 } S(a, b) \rightarrow \neg C(b) \text{ 得 } C(b) \rightarrow \neg S(a, b) \quad (\text{⑫}+\text{换位式})$$

$$\text{由 } C(b) \rightarrow \neg S(a, b) \text{ 得 } C(b) \quad (\text{⑬}+\text{肯定式})$$

$$\text{由 } C(b) \text{ 得 } P(b) \quad (\text{⑬}+\text{MP})$$

$$\text{由 } P(b) \text{ 得 } C(b) \wedge P(b) \quad (\text{⑭}+\text{⑬})$$

$$\text{由 } C(b) \wedge P(b) \text{ 得 } \exists x(P(x) \wedge C(x)) \quad (\text{⑮}+\text{EG})$$

$$\textcircled{1} H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$$

$$\textcircled{2} H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$$

$$\textcircled{3} \neg V(a) \quad (P)$$

$$\textcircled{4} \forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)) \quad (2) \rightarrow I$$

$$\textcircled{5} \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow P) \quad (P)$$

$$\textcircled{6} P(a) \rightarrow \neg V(a) \quad (5) \rightarrow ES$$

$$\textcircled{7} \neg V(a) \quad (3) \textcircled{6} \rightarrow US$$

$$\textcircled{8} \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y))) \quad (P)$$

$$\textcircled{9}$$

$$\textcircled{10} a=b \rightarrow P(a) \quad (1) \rightarrow EI$$

$$\textcircled{11} C(a) \quad (10) \rightarrow 假化A$$

$$\textcircled{12} S(a, b) \quad (10) \rightarrow 假化A$$

$$\textcircled{13} P(b) \quad ((10) \rightarrow MP)$$

$$\textcircled{14} C(b) \wedge P(b) \quad (13) \textcircled{12}$$

$$\textcircled{15} \exists x(P(x) \wedge C(x)) \quad (14) \rightarrow EG$$

$$① \quad H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$$

$$② \quad H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$$

$$\bullet \quad \forall x(S(x, y) \rightarrow P(y)) \quad (2+UG)$$

$$\bullet \quad \forall y(S(x, y) \rightarrow P(y)) \quad (2+UG)$$

$$\bullet \quad \forall x(S(x, y) \rightarrow P(y)) \quad (1)$$

$$\bullet \quad P(x) \rightarrow \neg V(x) \quad (1+US)$$

$$\bullet \quad \neg V(x) \quad (2+US)$$

$$\bullet \quad \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y))) \quad (1)$$

$$\bullet \quad \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$$

$$\bullet \quad \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y)))) \quad (2+EG)$$

$$\bullet \quad C(x) \quad (1+US)$$

$$\bullet \quad S(x, y) \quad (1+US)$$

$$\bullet \quad P(x) \quad (1+MP)$$

$$\bullet \quad C(y) \wedge P(y) \quad (5+I)$$

$$\bullet \quad \exists x(P(x) \wedge C(x)) \quad (1+EG)$$

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- ⑤ $\neg V(a)$ (①+②+US)
 ⑥ $\neg V(x)$ (⑤+UG)
 ⑦ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)
 ⑧ $\neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑥+→I)
 ⑨ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑧+→E)
 ⑩ $S(a, b)$ (⑨+∃化入)
 ⑪ $P(b)$ (⑩+MP)
 ⑫ $C(b) \wedge P(b)$ (⑪+⑩)
 ⑬ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑫+EG)
 ⑭ C (⑬+∃化入)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- $\neg \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)
- $\neg \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow P(x))$ (①+US)
- $\neg \forall x(E(x) \wedge \neg V(x))$ (②+US)
- $\neg V(a)$ (③④+US)
- $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)

- $\neg \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)
- $\neg \forall x(P(x) \rightarrow P(x))$ (⑤+US)
- $C(a)$ (⑥+US)
- $S(a, b)$ (⑦+US)
- $P(b)$ (⑧+MP)
- $C(b) \wedge P(b)$ (⑨+⑩)
- $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑩+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- $\neg V(a)$ (P)
- $\forall x(S(x, y) \rightarrow P(y))$ (②+US)
- $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (③)
- $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (③+US)
- $\neg V(a)$ (②③+US)
- $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)

- $\neg V(a)$ (P)
- $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (④)
- $C(a)$ (④+EC)
- $S(a, a)$ (③+SC)
- $P(a)$ (③③+MP)
- $C(a) \wedge P(a)$ (⑤+⑥)
- $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑤+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- ⑤ $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
 ⑥ $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (⑤+ES)
 ⑦ $P(a)$ (⑥+简化式)
 ⑧ $E(a)$ (⑥+简化式)
 ⑨ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (⑥+...)
 ⑩ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)
 ⑪ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑩+US)
 ⑫ $\neg V(a)$ (③⑦+US)
 ⑬ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)
 ⑭ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑬+US)
 ⑮ $S(a, b) \wedge C(b)$ (⑭+US)
 ⑯ $C(b)$ (⑮+简化式)
 ⑰ $S(a, b)$ (⑮+简化式)
 ⑱ $P(b)$ (③⑩+MP)
 ⑲ $C(b) \wedge P(b)$ (⑱+⑰)
 ⑳ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑲+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)

② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)

③ $P(a)$ (②+简化式)

④ $E(a)$ (②+简化式)

⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)

⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)

⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)

⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)

⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)

⑩ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑨+EG)

⑪ $S(a, b) \wedge C(b)$ (⑩+ES)

⑫ $S(a, b) \rightarrow P(a)$ (⑤+US)

⑬ $P(a)$ (⑫+US)

⑭ $C(b)$ (⑪+简化式)

⑮ $S(a, b)$ (⑪+简化式)

⑯ $P(b)$ (⑮+MP)

⑰ $C(b) \wedge P(b)$ (⑭+⑯)

⑱ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑰+EG)

- 66/71 -

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)

② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)

③ $P(a)$ (②+简化式)

④ $E(a)$ (②+简化式)

⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)

⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)

⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)

⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)

⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)

⑩ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)

⑪ $C(b)$ (③+简化式)

⑫ $S(a, b)$ (⑩+简化式)

⑬ $P(b)$ (⑪⑫+MP)

⑭ $C(b) \wedge P(b)$ (⑬+⑬)

⑮ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑭+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)

② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)

③ $P(a)$ (②+简化式)

④ $E(a)$ (②+简化式)

⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)

⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)

⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)

⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)

⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)

② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)

③ $P(a)$ (②+简化式)

④ $E(a)$ (②+简化式)

⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)

⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)

⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)

⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)

⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)

② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)

③ $P(a)$ (②+简化式)

④ $E(a)$ (②+简化式)

⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)

⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)

⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)

⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)

⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)

② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)

③ $P(a)$ (②+简化式)

④ $E(a)$ (②+简化式)

⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)

⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)

⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)

⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)

⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)

⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (⑤+US)
 ⑥ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
 ⑦ $S(a, b) \wedge C(b)$ (③+ES)
 ⑧ $C(b)$ (⑦+简化式)
 ⑨ $S(a, b)$ (③+简化式)
 ⑩ $P(b)$ (⑧+MP)
 ⑪ $C(b) \wedge P(b)$ (⑩+⑨)
 ⑫ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑪+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

$$\textcircled{1} \quad \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y)))) \quad (\text{P})$$

$$\textcircled{2} \quad P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))) \quad (\textcircled{1} + \text{ES})$$

$$\textcircled{3} \quad P(a) \quad (\textcircled{2} + \text{简化式})$$

$$\textcircled{4} \quad E(a) \quad (\textcircled{2} + \text{简化式})$$

$$\textcircled{5} \quad \forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)) \quad (\textcircled{2} + \dots)$$

$$\textcircled{6} \quad \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x)) \quad (\text{P})$$

$$\textcircled{7} \quad P(a) \rightarrow \neg V(a) \quad (\textcircled{6} + \text{US})$$

$$\textcircled{8} \quad \neg V(a) \quad (\textcircled{3} \textcircled{7} + \text{US})$$

$$\textcircled{9} \quad \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y))) \quad (\text{P})$$

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- ① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
 ② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
 ③ $P(a)$ (②+简化式)
 ④ $E(a)$ (②+简化式)
 ⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)
 ⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)
 ⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)
 ⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)
 ⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)
 ⑩ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑨+US)
 ⑪ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
 ⑫ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑩⑪+MP)
 ⑬ $(S(a, b) \wedge C(b))$ (⑫+ES)
 ⑭ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
 ⑮ $C(b)$ (⑬+简化式)
 ⑯ $S(a, b)$ (⑬+简化式)
 ⑰ $P(b)$ (⑭⑯+MP)
 ⑱ $C(b) \wedge P(b)$ (⑮+⑰)
 ⑲ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- ① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
 ② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
 ③ $P(a)$ (②+简化式)
 ④ $E(a)$ (②+简化式)
 ⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)
 ⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)
 ⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)
 ⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)
 ⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)
 ⑩ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑨+US)
 ⑪ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
 ⑫ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑩⑪+MP)
 ⑬ $(S(a, b) \wedge C(b))$ (⑫+ES)
 ⑭ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
 ⑮ $C(b)$ (⑬+简化式)
 ⑯ $S(a, b)$ (⑬+简化式)
 ⑰ $P(b)$ (⑭⑯+MP)
 ⑱ $C(b) \wedge P(b)$ (⑮+⑰)
 ⑲ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- ① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
 ② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
 ③ $P(a)$ (②+简化式)
 ④ $E(a)$ (②+简化式)
 ⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)
 ⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)
 ⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)
 ⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)
 ⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)
 ⑩ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑨+US)
 ⑪ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
 ⑫ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑩⑪+MP)
 ⑬ $(S(a, b) \wedge C(b))$ (⑫+ES)
 ⑭ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
 ⑮ $C(b)$ (⑬+简化式)
 ⑯ $S(a, b)$ (⑬+简化式)
 ⑰ $P(b)$ (⑭⑯+MP)
 ⑱ $C(b) \wedge P(b)$ (⑮+⑰)
 ⑲ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- ① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
 ② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
 ③ $P(a)$ (②+简化式)
 ④ $E(a)$ (②+简化式)
 ⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)
 ⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)
 ⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)
 ⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)
 ⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)
 ⑩ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑨+US)
 ⑪ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
 ⑫ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑪+MP)
 ⑬ $(S(a, b) \wedge C(b))$ (⑫+ES)
 ⑭ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
 ⑮ $C(b)$ (⑬+简化式)
 ⑯ $S(a, b)$ (⑬+简化式)
 ⑰ $P(b)$ (⑭+MP)
 ⑱ $C(b) \wedge P(b)$ (⑮+⑰)
 ⑲ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- ① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
 ② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
 ③ $P(a)$ (②+简化式)
 ④ $E(a)$ (②+简化式)
 ⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)
 ⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)
 ⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)
 ⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)
 ⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)
 ⑩ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑨+US)
 ⑪ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
 ⑫ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑪+MP)
 ⑬ $(S(a, b) \wedge C(b))$ (⑫+ES)
 ⑭ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
 ⑮ $C(b)$ (⑬+简化式)
 ⑯ $S(a, b)$ (⑬+简化式)
 ⑰ $P(b)$ (⑯+MP)
 ⑱ $C(b) \wedge P(b)$ (⑮+⑰)
 ⑲ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- ① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
 ② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
 ③ $P(a)$ (②+简化式)
 ④ $E(a)$ (②+简化式)
 ⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)
 ⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)
 ⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)
 ⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)
 ⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)
 ⑩ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑨+US)
 ⑪ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
 ⑫ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑪+MP)
 ⑬ $(S(a, b) \wedge C(b))$ (⑫+ES)
 ⑭ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
 ⑮ $C(b)$ (⑬+简化式)
 ⑯ $S(a, b)$ (⑬+简化式)
 ⑰ $P(b)$ (⑭⑯+MP)
 ⑱ $C(b) \wedge P(b)$ (⑮+⑰)
 ⑲ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- | | |
|---|---|
| ① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P) | ⑩ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑨+US) |
| ② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES) | ⑪ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧) |
| ③ $P(a)$ (②+简化式) | ⑫ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑩⑪+MP) |
| ④ $E(a)$ (②+简化式) | ⑬ $(S(a, b) \wedge C(b))$ (⑫+ES) |
| ⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...) | ⑭ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US) |
| ⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P) | ⑮ $C(b)$ (⑬+简化式) |
| ⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US) | ⑯ $S(a, b)$ (⑬+简化式) |
| ⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US) | ⑰ $P(b)$ (⑭⑯+MP) |
| ⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P) | ⑱ $C(b) \wedge P(b)$ (⑮+⑰) |
| | ⑲ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG) |

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- | | |
|---|---|
| ① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P) | ⑩ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑨+US) |
| ② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES) | ⑪ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧) |
| ③ $P(a)$ (②+简化式) | ⑫ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑩+MP) |
| ④ $E(a)$ (②+简化式) | ⑬ $(S(a, b) \wedge C(b))$ (⑫+ES) |
| ⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...) | ⑭ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US) |
| ⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P) | ⑮ $C(b)$ (⑬+简化式) |
| ⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US) | ⑯ $S(a, b)$ (⑬+简化式) |
| ⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US) | ⑰ $P(b)$ (⑭+MP) |
| ⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P) | ⑱ $C(b) \wedge P(b)$ (⑮+⑰) |
| | ⑲ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG) |

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- ① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
 ② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
 ③ $P(a)$ (②+简化式)
 ④ $E(a)$ (②+简化式)
 ⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)
 ⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)
 ⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)
 ⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)
 ⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)
 ⑩ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑨+US)
 ⑪ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
 ⑫ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑪+MP)
 ⑬ $(S(a, b) \wedge C(b))$ (⑫+ES)
 ⑭ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
 ⑮ $C(b)$ (⑬+简化式)
 ⑯ $S(a, b)$ (⑬+简化式)
 ⑰ $P(b)$ (⑭⑮+MP)
 ⑱ $C(b) \wedge P(b)$ (⑰+⑱)
 ⑲ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- ① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P)
 ② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
 ③ $P(a)$ (②+简化式)
 ④ $E(a)$ (②+简化式)
 ⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...)
 ⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)
 ⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)
 ⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US)
 ⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P)
 ⑩ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑨+US)
 ⑪ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
 ⑫ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑪+MP)
 ⑬ $(S(a, b) \wedge C(b))$ (⑫+ES)
 ⑭ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
 ⑮ $C(b)$ (⑬+简化式)
 ⑯ $S(a, b)$ (⑬+简化式)
 ⑰ $P(b)$ (⑭⑯+MP)
 ⑱ $C(b) \wedge P(b)$ (⑮+⑰)
 ⑲ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

- ① $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ ③ $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
 ② $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ ④ $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

- | | |
|---|---|
| ① $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x, y) \rightarrow P(y))))$ (P) | ⑩ $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑨+US) |
| ② $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES) | ⑪ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧) |
| ③ $P(a)$ (②+简化式) | ⑫ $\exists y(S(a, y) \wedge C(y))$ (⑩⑪+MP) |
| ④ $E(a)$ (②+简化式) | ⑬ $(S(a, b) \wedge C(b))$ (⑫+ES) |
| ⑤ $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+...) | ⑭ $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US) |
| ⑥ $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P) | ⑮ $C(b)$ (⑬+简化式) |
| ⑦ $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US) | ⑯ $S(a, b)$ (⑬+简化式) |
| ⑧ $\neg V(a)$ (③⑦+US) | ⑰ $P(b)$ (⑭⑯+MP) |
| ⑨ $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x, y) \wedge C(y)))$ (P) | ⑱ $C(b) \wedge P(b)$ (⑮+⑰) |
| | ⑲ $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG) |

Mechanized Reasoning Systems

- Coq — a proof assistant base on the calculus of inductive constructions.
- HOL — an interactive environment for machine-assisted theorem-proving in higher-order logic.
- Isabelle — a generic theorem prover in which logics can be specified and used.

-

Mechanized Reasoning Systems

- **Coq** — a proof assistant base on the calculus of inductive constructions.
- **HOL** — an interactive environment for machine-assisted theorem-proving in higher-order logic.
- **Isabelle** — a generic theorem prover in which logics can be specified and used.

●

Mechanized Reasoning Systems

- **Coq** — a proof assistant base on the calculus of inductive constructions.
- **HOL** — an interactive environment for machine-assisted theorem-proving in higher-order logic.
- **Isabelle** — a generic theorem prover in which logics can be specified and used.

-

Mechanized Reasoning Systems

- **Coq** — a proof assistant base on the calculus of inductive constructions.
- **HOL** — an interactive environment for machine-assisted theorem-proving in higher-order logic.
- **Isabelle** — a generic theorem prover in which logics can be specified and used.

●

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的；
- 但是其一些特殊子集合是可计算的；
- 如：Prolog(<https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm>) 中的Horn子句(Clause)是可计算的。

Definition

形如： $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定。

Theorem

设 C_1, C_2, \dots, C_k, C 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的; If unsatisfiable, then $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \vdash \neg C$.

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的；
- 但是其一些特殊子集合是可计算的；
- 如：Prolog(<https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm>) 中的Horn子句(Clause)是可计算的。

Definition

形如： $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定。

Theorem

设 C_1, C_2, \dots, C_k, C 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的; If unsatisfiable, then $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \vdash \neg C$.

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的；
- 但是其一些特殊子集合是可计算的；
- 如：Prolog(<https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm>) 中的Horn子句(Clause)是可计算的。

Definition

形如： $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定。

Theorem

设 C_1, C_2, \dots, C_k, C 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的; If unsatisfiable, then $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \vdash \neg C$.

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的；
- 但是其一些特殊子集合是可计算的；
- 如：Prolog(<https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm>) 中的Horn子句(Clause)是可计算的。

Definition

形如： $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定。

Theorem

设 C_1, C_2, \dots, C_k, C 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的; If unsatisfiable, then $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \vdash \neg C$.

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的；
- 但是其一些特殊子集合是可计算的；
- 如：Prolog(<https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm>) 中的Horn子句(Clause)是可计算的。

Definition

形如： $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定。

Theorem

设 C_1, C_2, \dots, C_k, C 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的; If unsatisfiable, then $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \vdash \neg C$.

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的；
- 但是其一些特殊子集合是可计算的；
- 如：Prolog(<https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm>) 中的Horn子句(Clause)是可计算的。

Definition

形如： $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m)$ 的公式称为Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

设 C_1, C_2, \dots, C_k, C 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的; If unsatisfiable, then $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k \vdash \neg C$.

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ \mathbb{F} (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \mathbb{F} (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \text{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ F (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \perp (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \text{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ F (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \perp (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ \mathbb{F} (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \mathbb{F} (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \text{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ F (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \perp (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \text{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ F (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \perp (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \text{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ F (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \perp (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ \mathbb{F} (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \mathbb{F} (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ \mathbb{F} (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \mathbb{F} (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ \mathbb{F} (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \mathbb{F} (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \text{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ F (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ F (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \text{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ F (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \perp (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ \mathbb{F} (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \mathbb{F} (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \text{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ F (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ F (④⑥+删除, 矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

- ① $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
- ② $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
- ③ $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
- ④ $P(a)$ (P)
- ⑤ $P(f(a))$ (③④+MP)
- ⑥ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑦ $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
- ⑧ \mathbb{F} (⑤⑦)

Resolution

- ① $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
- ② $P(a)$ (P)
- ③ $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
- ④ $P(f(a))$ (②③+删除)
- ⑤ $\neg P(f(x))$ (附加P)
- ⑥ $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
- ⑦ \square (④⑥+删除, 矛盾)

本章小节

- 1 谓词与量词
 - 谓词
 - 符号化
 - 一阶逻辑公式的语义
- 2 公式间的关系式
 - 逻辑等价和永真蕴涵关系
 - 量词的逻辑关系
 - 前束范式
- 3 谓词公式的自然推理
 - 相关概念的复习
 - 量词的推理规则
 - 形式证明的例子
 - Mechanized Reasoning