

点云配准

成员：赵睿博、马昕玥

1. 实验描述

1.1 问题背景

点云配准是点云之间的变换估计问题。

点云之间的刚性变换表示为 $q = Rp + t$, 其中 p : 三维矢量, 即原始点云中一个点的坐标; q : 三维矢量, 即目标点云中一个点的坐标; R : 3×3 的旋转矩阵 (正交矩阵)。

优化问题的输入为待配准的点云 (每个场景 3 个点云), 输出为已配准的点云。

要求利用给定的要点找到合适的凸模型来推导变换, 最小化已配准点云之间的距离指标, 在变换估计阶段和特征匹配阶段都可以建立凸模型。

1.2 解决方案

特征提取: 提取FPFH特征 \Rightarrow

特征匹配: 利用刚性变换的性质 \Rightarrow

变换估计: 建立凸优化模型 \Rightarrow

评估结果: Chamfer距离作指标

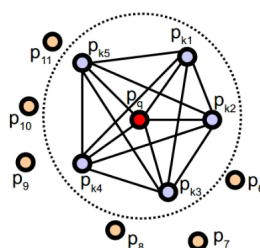
2. 实验内容

2.1 特征提取----FPFH

FPFH和PFH都是用于点云数据处理和特征描述的方法, 通常用于三维点云分析和识别。FPFH 是对传统的 PFH 方法进行了改进, 以提高计算速度。

- PFH

PFH 特征描述是基于特征点 (keypoint) 与其邻域点的空间几何关系来编码的。如下图所示, 中间红色的特征点作为 query point, 在其邻域 (指定半径) 内搜索 k 个点 (蓝色), 对于 query point 和 k -neighbors 这 $k+1$ 个点, 两两配对, 可以得到 $k(k+1)/2$ 个点对。



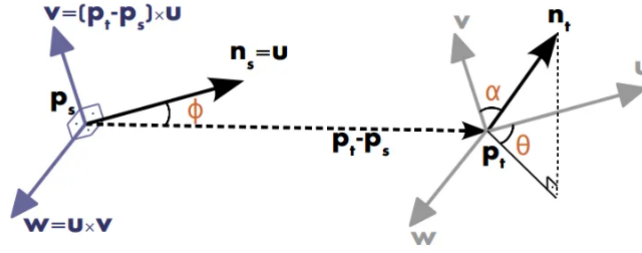
(1) 构建点对坐标系 (Pairwise Local coordinate) 对于每一组点对, 首先建立局部坐标系:

$$u = n_s$$

$$v = u \times \frac{(p_t - p_s)}{\|p_t - p_s\|^2}$$

$$w = u \times v$$

其中， \times 表示外积。



(2) 特征描述

其特征表示为：

$$\alpha = v \cdot n_t$$

$$\phi = u \cdot \frac{(p_t - p_s)}{d}$$

$$\theta = \arctan(w \cdot n_t, u \cdot n_t)$$

$$d = \|p_t - p_s\|_2$$

其中， \cdot 表示内积， d 为 source point 和 target point 的欧式距离。

(3) 特征编码

为了计算查询点 p_i 的 PFH 特征，将其邻域 $k(k+1)/2$ 个点对的 $\langle \alpha, \phi, \theta, d \rangle$ 特征集合放在一个直方图中。即，将每个特征划分为 n 个区间，则 PFH 特征矢量有 n^4 维。前三个特征都为角度。

综上，对于一个查询点，计算 PFH 特征的时间复杂度为 $O(k^2)$ ，若一个点云有 n 个点，则时间复杂度为 $O(nk^2)$ ，效率低。

• FPFH

改进后的 FPFH 特征描述子将计算复杂度降低为 $O(nk)$ 。

(1) 将 $\langle \alpha, \phi, \theta, d \rangle$ 特征简化为 $\langle \alpha, \phi, \theta \rangle$ ，记为 SPFH；

(2) 修正了 k 邻域点对的统计方式，分为两部分：

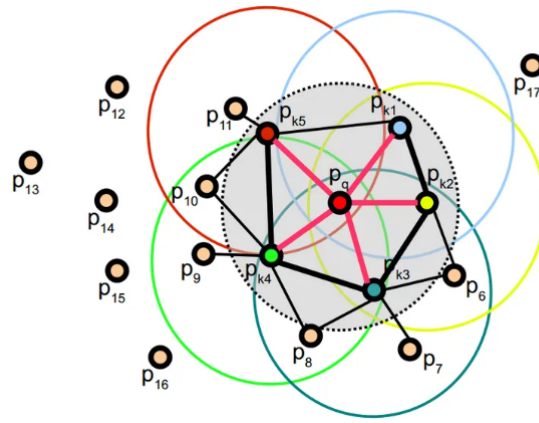
a. 查询点 p_q 与周围 k 个点组成的点对，

b. 每个邻点与周围 k 个点组成的点对，该部分的统计量取加权平均：

$$FPFH(p_q) = SPFH(p_q) + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\omega_k} \cdot SPFH(p_k)$$

其中，权重 w_k 表示查询点 p_q 与邻点 p_k 的距离。这将搜索空间扩大到最多 $2r$ 的范围。

(3) 每个查询点(红色)仅与它的 k 个直接邻居(灰色圆圈部分)相连。每个直接邻居都连接到自己的邻居，结果直方图与查询点的直方图一起加权，形成 FPFH。



2.2 特征匹配

• 第一次匹配：找最近邻

利用所有点计算每个点的FPFH特征，提取出要点的FPFH特征。

根据原始点云中要点的FPFH特征和待配准点云中要点的FPFH特征，找到最近邻匹配对。且结果——对应，即一个点只能用于一个对应关系。

返回为点对组成的列表，点对之间距离逐渐增加。

• 第二次匹配：找距离差最小

对第一次匹配筛选出的匹配对，做进一步筛选。由于点云间是刚性变换，故原始点云中的要点之间的关系，变换后仍不变。

利用这一特性，由于第一次匹配结果是有序的，即 pcd1, pcd2 根据 $\text{distance}(\text{pcd1_feature}, \text{pcd2_feature})$ 从小到大排序。计算 pcd1 中点之间的距离，结果为 dist1。计算 pcd2 中点之间的距离，结果为 dist2。则距离差为 $\text{dist1} - \text{dist2}$ 。

找出距离差小于自设阈值的点对。作为最终匹配结果。

2.3 变换估计----凸松弛模型

• 原问题非凸

点云匹配中约束条件包括：

1. $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ ：这个条件要求变换矩阵 \mathbf{R} 是正交矩阵，即保持点之间的距离和角度关系不变。
2. $\det(\mathbf{R}) = 1$ ：这个条件要求变换矩阵 \mathbf{R} 的行列式等于1，以确保它是一个旋转矩阵，而不是镜像矩阵。

这两个约束条件定义了特殊正交群 $SO(3)$ ，是一个非线性李群。

因此，点云匹配问题在原始形式下是一个**非凸问题**，难以直接求解。

• 转成凸优化问题

通过放宽约束 $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \det \mathbf{R} = 1$ ，即约束李群的凸包，而不是李群本身。由此产生的约束是一个半正定约束（SDP），是凸的。这将问题转成凸优化问题，使用凸优化算法（如半正定规划）来求解。

即，将原始问题中的 $SO(3)$ 约束替换为表示 $SO(3)$ 凸包的约束。

此时不再要求变换矩阵 \mathbf{R} 是精确的旋转矩阵，而是允许它在特殊正交群的凸包内变化。

• 更新约束条件

将源点云记为 \mathbf{X} ，将目标点云记为 \mathbf{Y} ，目标函数为 $\min_{\mathbf{R}, \mathbf{t}} \|\mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t} - \mathbf{Y}\|_F^2$

原约束条件为

$$\mathbf{R} \in SO(3) \equiv \begin{cases} \mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I}_{3 \times 3} (\text{orthogonal}) \\ \det \mathbf{R} = 1 (\text{rigid}) \end{cases}, t \in R^3$$

a. 重新参数化SO(3)为纯四元数空间:

$SO(3)$ 是三维旋转矩阵的集合，而四元数是用来表示旋转的一种方式。 $SO(3)$ 与四元数之间的关系可以通过映射 \mathcal{A} 建立起来。数学表示如下，

给定一个四元数 $\mathbf{u} = (u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3)^\top$ ，其中 $\|\mathbf{u}\|_2^2 = 1$ （表示四元数的单位模约束），使用映射 \mathcal{A} 将其映射到 $SO(3)$ 中的旋转矩阵 \mathbf{U} ：

$$\mathbf{U} = \mathcal{A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 2(u_0^2 + u_1^2) - 1 & 2(u_1u_2 - u_0u_3) & 2(u_1u_3 + u_0u_2) \\ 2(u_1u_2 + u_0u_3) & 2(u_0^2 + u_2^2) - 1 & 2(u_2u_3 - u_0u_1) \\ 2(u_1u_3 - u_0u_2) & 2(u_2u_3 + u_0u_1) & 2(u_0^2 + u_3^2) - 1 \end{bmatrix}$$

\mathcal{A} 将四元数 \mathbf{u} 映射到 $SO(3)$ 空间中的旋转矩阵 \mathbf{U} ，即将 $SO(3)$ 的旋转矩阵与四元数一一对应。

b. SO(3)凸包的约束表示:

我们希望找到 $SO(3)$ 凸包的约束表示，即可以表示 $SO(3)$ 中所有旋转矩阵的凸组合的约束条件。

引入一个矩阵 V ，是四元数 \mathbf{u} 的外积 $\mathbf{u}\mathbf{u}^\top$ 。

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u_0^2 & u_0u_1 & u_0u_2 & u_0u_3 \\ & u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ & * & u_2^2 & u_2u_3 \\ & * & * & u_3^2 \end{bmatrix} = \mathbf{u}^\top \mathbf{u}$$

则 $SO(3)$ 的凸包可以表示为以下形式：

$$\begin{aligned} \text{conv}(SO(3)) &= \mathcal{A} \cdot \text{conv}(\mathcal{V}) \\ &= \mathcal{A} \cdot \{V \succeq 0 \mid \text{trace}(V) = 1\} \end{aligned}$$

\mathcal{V} 表示所有满足条件 $\text{rank}(V) = 1$ 且 $\text{trace}(V) = 1$ 的矩阵的集合，其中 V 是一个 4×4 的矩阵。 $\succeq 0$ 表示半正定矩阵。

c. 求解逆映射

对映射 \mathcal{A} 求逆，就可以获得 $\text{conv}(SO(3))$ 的谱面表示，即 $SO(3)$ 凸包的约束表示，表示为矩阵 C 。

\mathcal{A}^{-1} 表示从旋转矩阵 \mathbf{U} 到四元数 \mathbf{u} 的映射，即将 $SO(3)$ 空间中的约束条件映射回四元数空间。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{14} \\ * & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{24} \\ * & * & \mathbf{C}_{33} & \mathbf{C}_{34} \\ * & * & * & \mathbf{C}_{44} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

其中，

$$\begin{aligned}
C_{11} &= 1 + \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{22} + \mathbf{R}_{33} \\
C_{12} &= \mathbf{R}_{32} - \mathbf{R}_{23} \\
C_{13} &= \mathbf{R}_{13} - \mathbf{R}_{31} \\
C_{14} &= \mathbf{R}_{21} - \mathbf{R}_{12} \\
C_{22} &= 1 + \mathbf{R}_{11} - \mathbf{R}_{22} - \mathbf{R}_{33} \\
C_{23} &= \mathbf{R}_{21} + \mathbf{R}_{12} \\
C_{24} &= \mathbf{R}_{13} + \mathbf{R}_{31} \\
C_{33} &= 1 - \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{22} - \mathbf{R}_{33} \\
C_{34} &= \mathbf{R}_{32} + \mathbf{R}_{23} \\
C_{44} &= 1 - \mathbf{R}_{11} - \mathbf{R}_{22} + \mathbf{R}_{33}
\end{aligned}$$

其中*表示对称元素。

- 更新后的问题

目标函数 $\min_{\mathbf{R}, \mathbf{t}} \|\mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t} - \mathbf{Y}\|_F^2$

约束条件

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{14} \\ & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{24} \\ & * & \mathbf{C}_{33} & \mathbf{C}_{34} \\ & * & * & \mathbf{C}_{44} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

2.4 程序流程

利用所有点计算FPFH特征 \Rightarrow

提取要点特征 \Rightarrow

根据特征用最近邻方法匹配点对 \Rightarrow

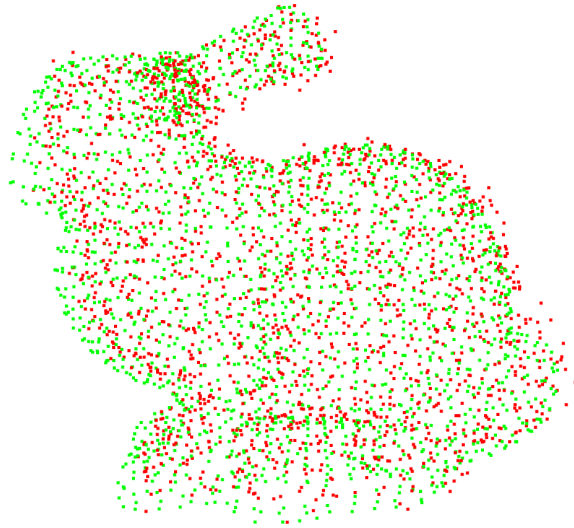
根据刚性变换的特性做筛选匹配点对 \Rightarrow

利用凸松弛模型估计变换

3.实验结果

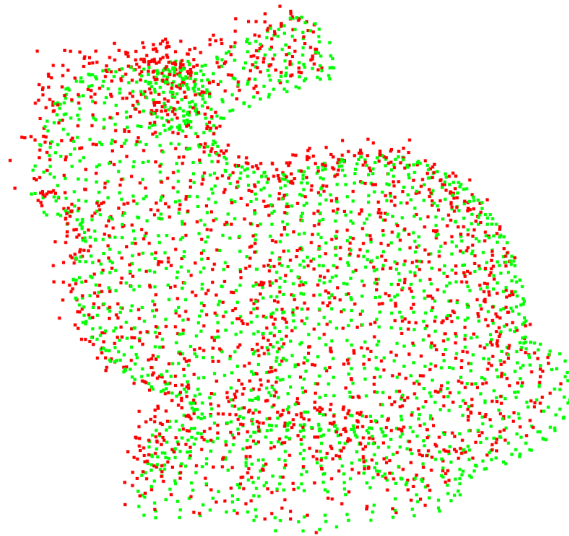
3.1 bunny

bunny-pcd-2.ply 配准结果：



评估结果: CD: **0.00918**

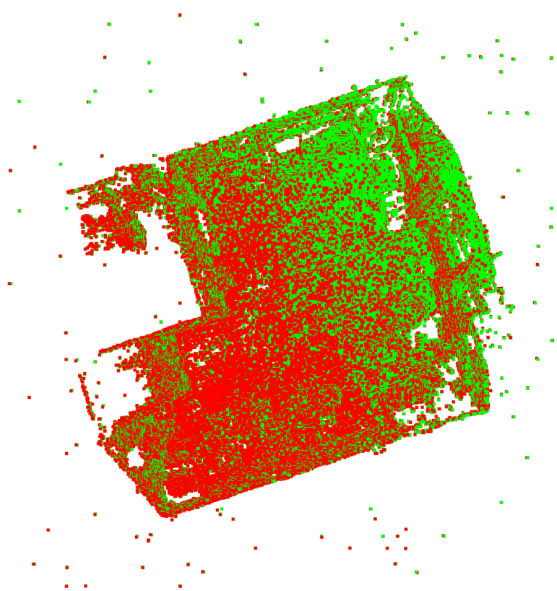
bunny-pcd-3.ply 配准结果:



评估结果: CD: **0.00782**

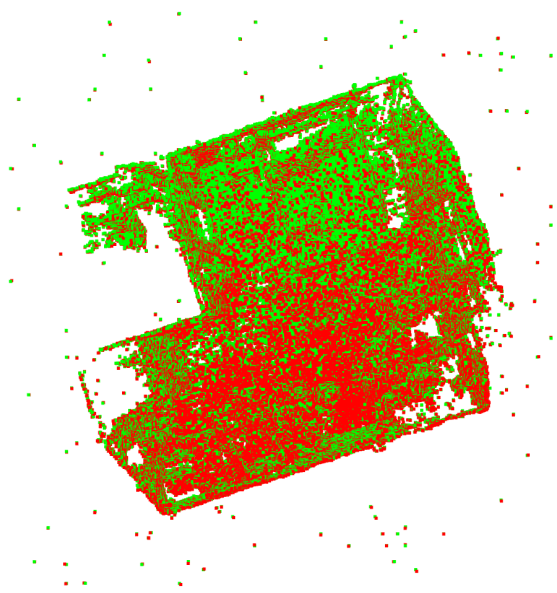
3.2 room

room-pcd-2.ply 配准结果:



评估结果: CD: **0.18209**

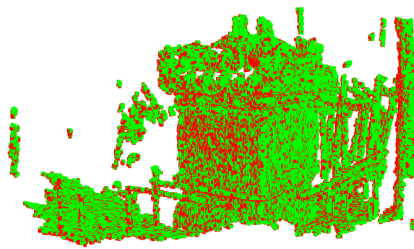
room-pcd-3.ply 配准结果:



评估结果: CD: **0.18124**

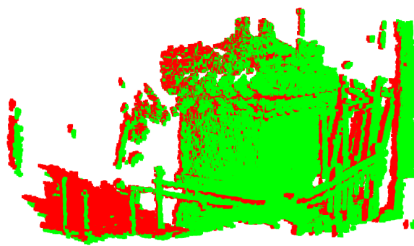
3.3 temple

temple-pcd-2.ply 配准结果:



评估结果: CD: **0.06734**

temple-pcd-3.ply 配准结果:



评估结果: CD: **0.22752**