第一次大作业：第二题 Logistic 模型

姓名：赵瑞博
学号：1800011355

2020 年 3 月 29 日

1

1.1

为计算序列 $\{x_n\}$，可将迭代通过循环实现，并将每一次迭代结果都压入预先初始化的列表中。且由于 *Python* 中可以通过指标 $[-1]$ 很容易的索引倒数第一个元素，这为计算提供了方便。实现如下：

Algorithm 1 计算序列 $\{x_n\}$

Input: x_0, 取点数量 n, 可调参数 r
Output: $\{x_n\}$

function $f(x, r)$
    return $r * x * (1 - x)$
end function
function $opreate(x_0, r, n)$
    $x = list[x_0]$
    for $i = 0 \to n - 1$ **do**
        $x.append(f(x[-1], r))$
    end for
    return x
end function

1.2 结果

分别对与 $r = 0.5, 1.5$ 两种情况，从 0 开始每隔 0.1 取 x_0 的初值，通过上述方法得到序列前 10 项（当 n 取到 10 的时候就已经很好的收敛在某个数附近了）。得到的结果利用 *Python* 中 *matplotlib* 模块绘制出 $x_n - n$ 图像如下

可以看到对于初值为 $0, 1$ 的序列，都会稳定在 0 上。可以看到，对于 $r = 1.5$ 时收敛至 $1/3$；而对于 $r = 0.5$ 来说，最终收敛到了 0。可以大概获得的结论是，最终收敛极限与参数 r 相关而与 x_0 的取值无关（0,1 除外）。

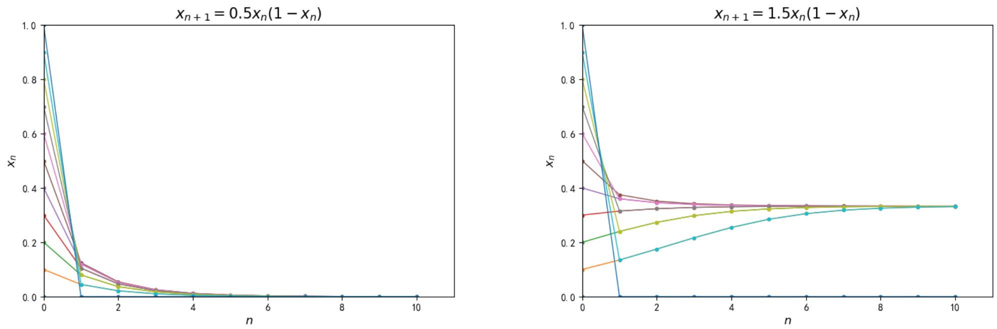

图 1

2

2.1 证明：收敛必要条件 $|f'(x^*)| \leq 1$

当 n 足够大时，应则有：

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n| \tag{1}$$

利用 $x_{n+1} = fx_n$ 可以得到

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq |x_{n+1} - x_n| \tag{2}$$

由此可证

$$|f'(x^*)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_{n+1}) - f(x_n)|}{|x_{n+1} - x_n|} \leq 1 \tag{3}$$

2.2 r 范围与对应 x^*

$$f'(x^*) = r(1-2x^*),\ x^* = \begin{cases} 0, \\ 1 - \dfrac{1}{r}. \end{cases} \tag{4}$$

可由 $|f'(x^*)| \leq 1$ 得到收敛的 r 范围与对应收敛值：

$$x^* = \begin{cases} 0, & -1 \leq r \leq 1, \\ 1 - \dfrac{1}{r}, & 1 \leq r \leq 3 \end{cases} \tag{5}$$

对应图像如下

2.3 收敛阶与收敛速度

考虑

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \begin{cases} |r|, & -1 \leq r \leq 1, \\ |2-r|, & 1 \leq r \leq 3 \end{cases} \tag{6}$$

即有 $q <= 1$，为线性收敛，收敛阶 $p = 1$。
收敛速度则可表示为 $R = -\log_{10} q$

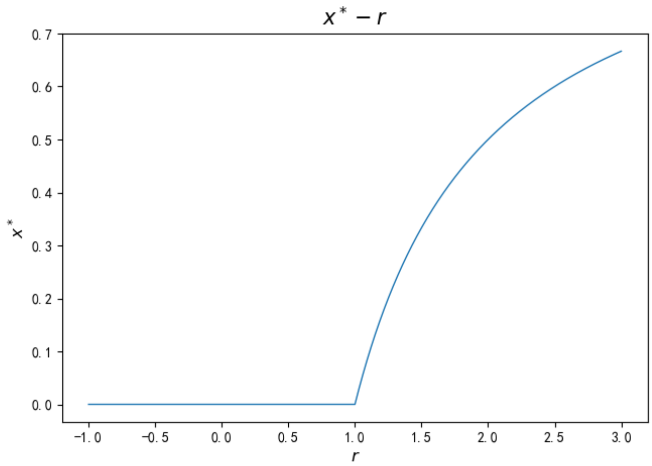

图 2

3

由 2 可知 $r_1 = 3$，故取 $r = 3.1$ 计算不同初值下的序列，结果如图

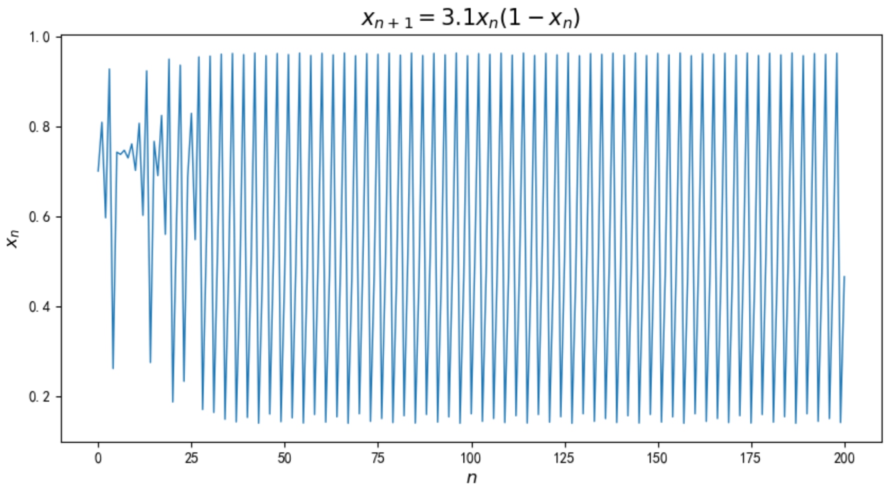

图 3

可以看到在 $n \to \infty$ 时，x_n 并未收敛至一个值，而是稳定的在确定两值之间震荡，指标 n 为奇数与偶数的两子列分别收敛到一值上。

4

4.1 证明

由于序列 $x_{n+2} = f(f(x_n))$ 可收敛至 x_1^* 与 x_2^*，故类似 2 中所述，当 n 足够大时

$$|f(f(x_{n+2})) - f(f(x_n))| = |x_{n+4} - x_{n+2}| \le |x_{n+2} - x_n| \tag{7}$$

可得极限

$$|(f(f(x_1^*)))| = |f'(f(x_1^*))f'(x_1^*)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|f(f(x_{n+2})) - f(f(x_n))|}{|x_{n+2} - x_n|} \le 1 \tag{8}$$

由于最终 x_n 在两值间震荡，固有 $f(x_1^*) = x_2^*, f(x_2^*) = x_1^*$。代入上式则有

$$|f'(x_1^*)f'(x_2^*)| \le 1 \tag{9}$$

即这类收敛的必要条件是 $|f'(x_1^*)f'(x_2^*)| \le 1$

4.2 x_1^*, x_2^* 与 r 变化关系

对于一个 r 取值，可通过迭代求出 x_1^*, x_2^*，届时加入对条件 $|f'(x_1^*)f'(x_2^*)| \le 1$ 的判定即可一同确定可行的 r 范围。最终结果如下：

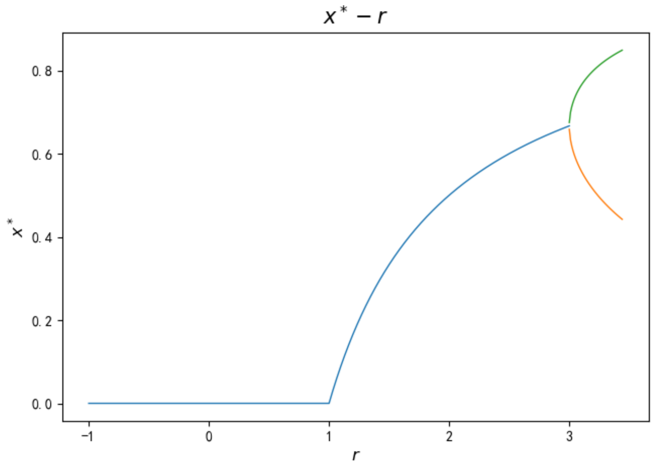

图 4

经计算，右侧 r 边界为 $r = 3.45$

5

5.1 r 不断增大的现象

如下图所示，初值选择为 0.7，分别选取参数 $r = 3.50, 3.55$，对应周期为 $T = 4, 8$ 的情况。

$r = 3.33, T = 8$:

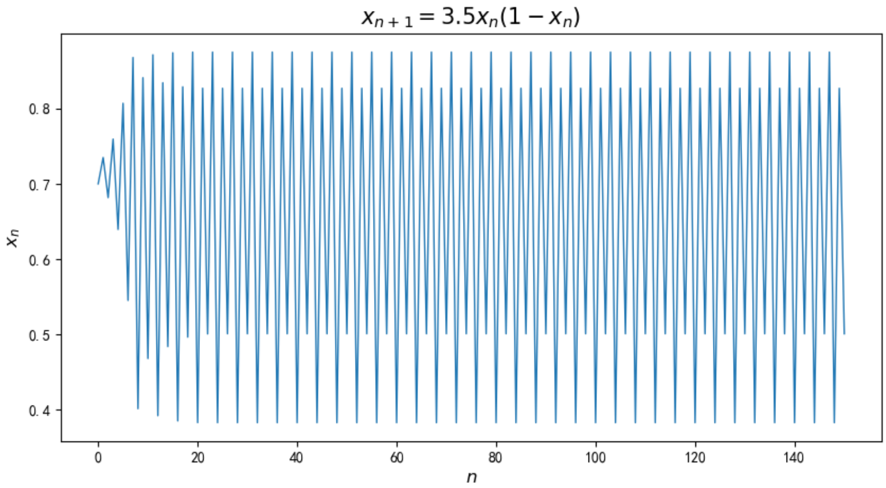

图 5

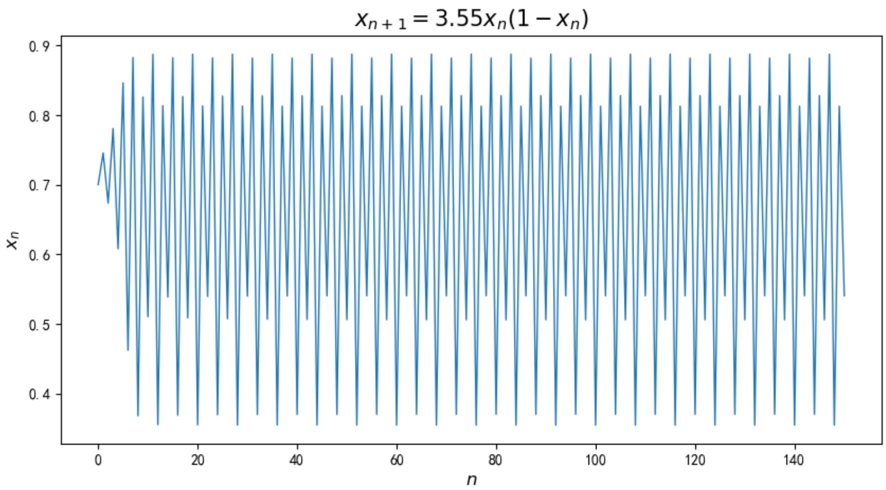

图 6

5.2 收敛速度

收敛速度可由 $q = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+T} - x^*|}{|x_n - x^*|}$ 来描述。

6

如果再通过单条线分析来绘图过于复杂，所以这里选择直接将足够多次的迭代结果绘制密集的散点图以达到效果。$x^* - r$ 关系图如下

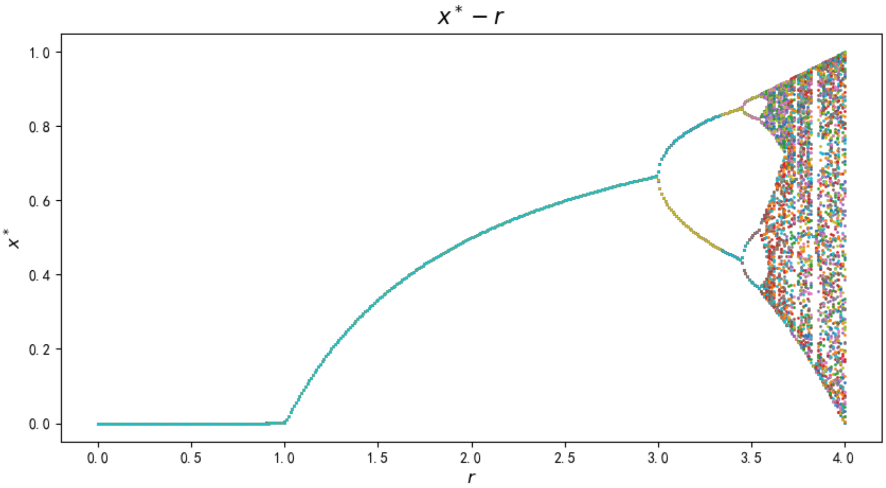

图 7

以 $T = 1, 2$ 的转折点为原点

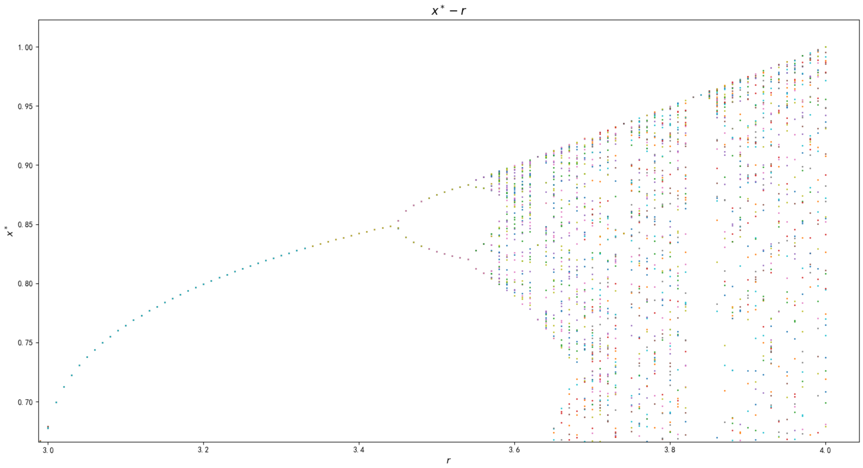

图 8

以 $T = 2, 4$ 的转折点为原点

可以看出来，各图像曲线形状是相似的，故可以推断此后会有周期八、周期十六等更多的收敛方式。

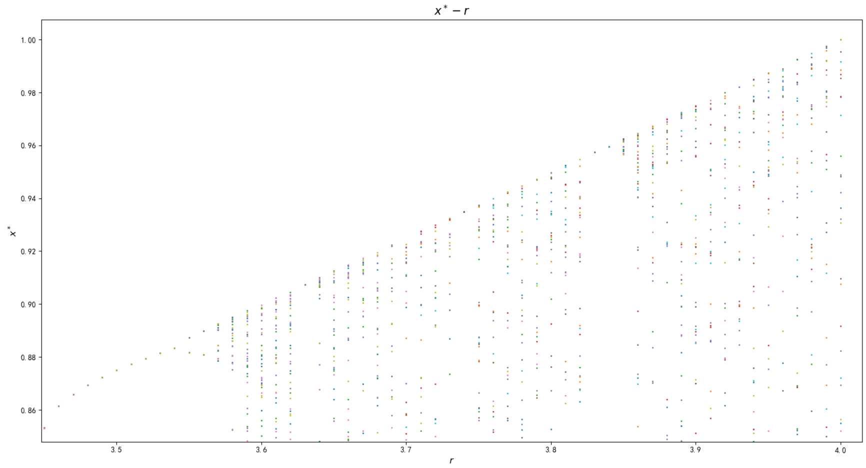

图 9

7

由 6 中计算可以得到

表 1

T	1	2	4
Δr	2	0.45	0.096

由此可估算最终 $0.213 \leq F \leq 0.225$，故估算最终 $r_\infty \approx 3.56$，与图像基本吻合

8

按提示所述进行替换 $x_n = \sin^2 y_n$，代入迭代式中，会有

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \Rightarrow \sin^2 y_{n+1} = 4\sin^2 y_n(1 - \sin^2 y_n) \tag{10}$$

$$\Rightarrow \sin^2 y_{n+1} = 4\sin^2 y_n \cos^2 y_n = \sin^2(2y_n) = \sin^2(2^{n+1}y_0) \tag{11}$$

$$\Rightarrow x_n = \sin^2(2^n y_0) \tag{12}$$

由于 y_0 与初值 x_0 的选取有关，对于比较一般的 y_0，$\sin^(2^n y_0)$ 并不呈现周期性，故除去几个较为特殊 y_0 外，最终不存在稳定的震荡周期。

9

取 $g(x) = x^2(1 - x^2)$，所得 $x^* - r$ 关系如下
可以看到最终与图 7 中图形相似，故应有相同 F

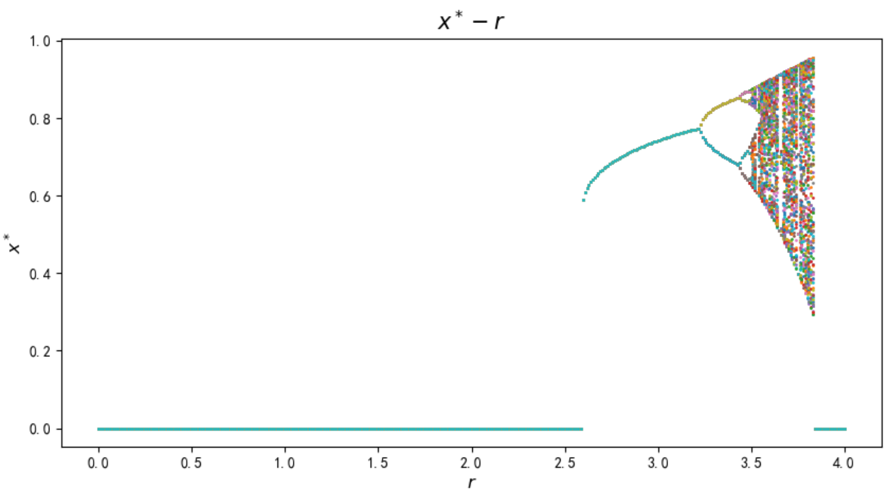

图 10