第一次大作业：第三题　泊松方程【分值：25 分】

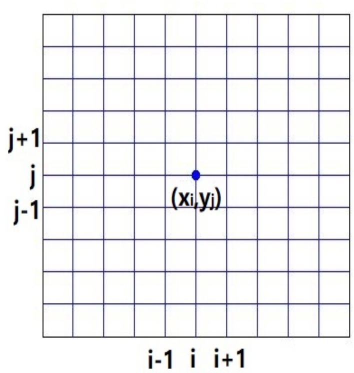
作业提交截止时间：2020 年 4 月 19 日 24 点

本题需要用二阶中心差分格式求解下列泊松方程, 并给出 L_2 范数下的误差估计。需要计算 x, y 坐标轴剖分数为 2^n, $n = 4, 5, 6, 7$ 时的误差并进行比较。方程与边界条件如下：

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y), 0 < x, y < 1; \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \Omega = (0,1) \times (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

其真解为 $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$。

1. 用中心差分格式数值求解泊松方程, 得到网格节点上的离散解 $\hat{u}_{i,j}$。中心差分方法如下：



令 x, y 坐标轴剖分数分别为 M, N, x 方向和 y 方向步长分别为 $h_x = \frac{1}{M}, h_y = \frac{1}{N}$, 记 $(x_i, y_j) = (ih_x, jh_y)$, 如图所示，离散后的方程为：

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \dfrac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j} = f(x_i, y_j),\ 1 \le i \le M-1, 1 \le j \le N-1 \\ u_{ij} = 0,\ i = 0 \text{ or } i = M \text{ or } j = 0 \ or\ j = M \end{cases} \tag{2}$$

令 $u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, ..., u_{i,N-1})^T, f_i = (f_{i,1}, f_{i,2}, ..., f_{i,N-1})^T, 1 \le i \le M-1$, 用中心差分格式数值改写后的线性方程组为

$$\begin{pmatrix} A_h & \frac{I}{h_x^2} & & & \\ -\frac{I}{h_x^2} & A_h & -\frac{I}{h_x^2} & & \\ & -\frac{I}{h_x^2} & A_h & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{I}{h_x^2} \\ & & & -\frac{I}{h_x^2} & A_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{M-1} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中

$$
A_h = \begin{pmatrix}
\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2} & -\frac{1}{h_y^2} & & & \\
-\frac{1}{h_y^2} & \frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2} & -\frac{1}{h_y^2} & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & \frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2} & -\frac{1}{h_y^2} \\
& & & -\frac{1}{h_y^2} & \frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}
\end{pmatrix}, \tag{4}
$$

数值求解此线性方程组即可得到节点上的离散解 $\hat{u}_{i,j}$。

提示: 由于系数矩阵是稀疏矩阵, 每行只有少量非零元, 存储时可以只存储非零元的行标、列标和值。

2. 将上面的解在每个网格单元上插值, 得到该函数在这个单元上高斯点的值. 我们知道标准单元 $(-1,1)\times(-1,1)$ 上的高斯点是 $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$, 因此需要找到一个映射, 把每个网格单元映射到参考单元上去。

提示: 为了对所有单元统一叙述，先将单元 K 映射到参考单元 $\hat{K}$ 上, 然后对参考单元进行处理。

对于单元 K, 定义映射为:

$$
\hat{F} : \xi(x,y), \eta(x,y), \quad (x,y)\in K, (\xi,\eta)\in \hat{K}, \tag{5}
$$

定义

$$
\hat{u}_h(x,y)|_K = \hat{u}(\xi,\eta), \tag{6}
$$

在参考单元上, 构造一个线性函数 $\hat{u}(\xi,\eta)$ 需要四个基函数, 定义基函数如下：

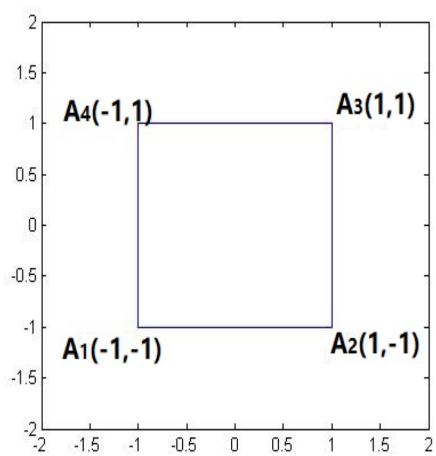
$$
\phi_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, \phi_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}; \tag{7}
$$

$$
\phi_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, \phi_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}, \tag{8}
$$

这样定义的基函数满足

$$
\phi_i(A_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i=j; \\ 0, \ i\neq j, \end{cases} \tag{9}
$$

其中 A_j 如下图所示：



3. 利用高斯积分公式在每个网格单元上计算 $\int_{\Omega_{i,j}}(\hat{u}-u)^2dxdy$。

4. 计算误差 $E_{L_2} = (\sum_{i,j}\int_{\Omega_{i,j}}(\hat{u}-u)^2dxdy)^{\frac{1}{2}}$。