第一次大作业：第一题　电阻网络【分值：25 分】

作业提交截止时间：2020 年 3 月 22 日 24 点

电磁学中，常需要求一个无源电阻网络中两端点之间的等效电阻。这个问题一般而言可以转化为一个线性代数方程组的求解。我们用指标 $i = 1, 2, \ldots, n$ 标记电阻网络中的各个节点，两节点之间直连的导纳记作 g_{ij}，对于断路的情形 $g_{ij} = 0$。记节点 i 的电势为 U_i，由外部流入该节点的电流为 I_i，我们可以根据基尔霍夫第二定律列出方程组

$$\sum_{j \neq i} g_{ij}(U_i - U_j) = I_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

从而可以写成矩阵方程

$$\mathbf{G}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}, \tag{2}$$

其中导纳矩阵诸元由下式给出

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{k \neq i} g_{ik}, & i = j, \\ -g_{ij}, & i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

然而，我们容易发现，导纳矩阵 $\mathbf{G}$ 是奇异矩阵，存在着零特征值的特征向量 $\{U_i = 1\}(i = 1, 2, \ldots, n)$，对应着电势零点的改变不影响物理；此外，可以注意到 I_i 需满足流入电阻网络的净电流为零，并非线性独立。由此我们可以将某个节点 i 的电势取作零，简单的删去导纳矩阵的第 i 行、第 i 列，维持矩阵的对称性的同时消去了奇异性。

若需要求节点 ij 之间的等效电阻 R_{ij}，可以考虑令这两个节点分别自外流入流出一个单位的电流，两点间的电势差便是等效电阻。若取输出电流节点 i 的电势为零，便有

$$R_{ij} = U_j. \tag{4}$$

请分别使用线性代数方程组的直接解法和迭代解法编写程序，求解如下情形的等效电阻，并比较不同算法的时间消耗：

1. 如图 (1) 所示的正方形电阻网络，相连节点之间导纳均为单位 1，分别对于边长为 $1, 4, 16, 64$ 的情形，计算对顶点 ac 和相邻顶点 ab 之间的等效电阻；
2. 如图 (2) 所示的正三角形电阻网络，相连节点之间导纳均为单位 1，分别对于边长为 $1, 4, 16, 64$ 的情形，计算相邻顶点 ab 之间的等效电阻；
3. 如图 (3) 所示由正六边形砌成的电阻网络，相连节点之间导纳均为单位 1，分别对于单元周期数为 $4, 16, 64$ 的情形，计算两顶点处六边形左下顶点 ab 之间的等效电阻；
4. 对于含有电容电感等交流元件的无源网络，我们可以在频域上以完全相同的方法研究。对于图 (2) 所示的网络，将全部横向连接的电阻置换成容抗为单位 1 的电容，将斜向右下连接的电阻置换成感抗为单位 1 的电感，而 ab 朝向的电阻不变。画出 ab 间等效阻抗大小与相角的频率响应曲线，作图范围应包含全部共振峰位置。

提示：关于任意非奇异矩阵 $\mathbf{A}$ 的线性代数方程组

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

等价于一个关于实对称矩阵线性代数方程组 ($\mathbf{A}^\dagger$ 为转置复共轭)

$$(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^\dagger\boldsymbol{b}.$$

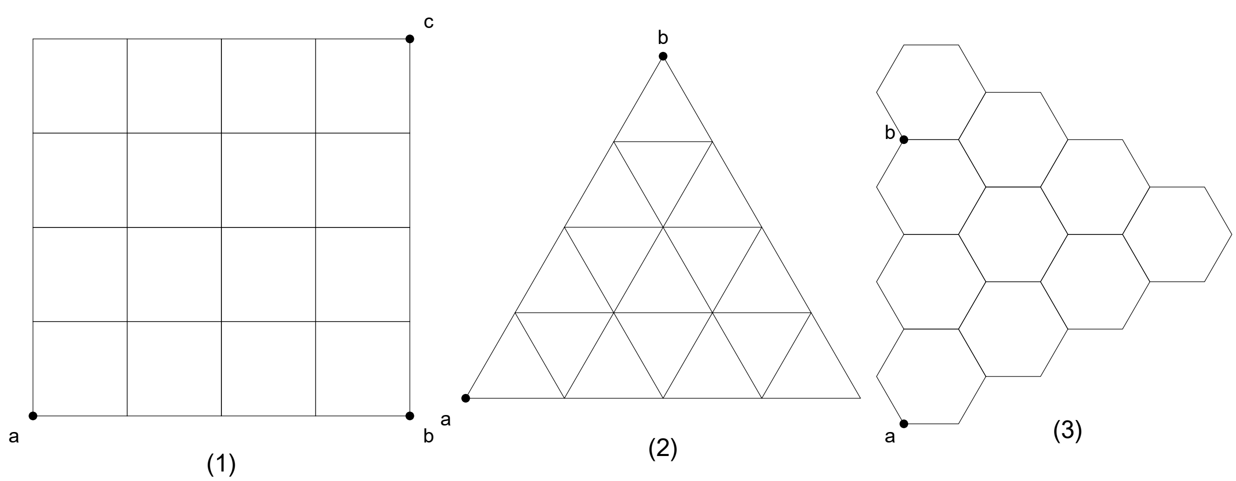

Figure 1: (1) 边长为 4 的正方形电阻网络；(2) 边长为 4 的正三角形电阻网络；(3) 由正六边形砌成的单元周期数为 4 的电阻网络。