

# 数学与应用数学专业

## 运筹学实验



题目 运筹学实验一

班级 115010401

姓名 赵赞豪

学号 11501040136

日期 2017.12.18

# 运筹学实验 1：整数规划

## 一、实验目的

掌握分支定界法的原理及计算步骤。

## 二、实验内容：

整数规划求解分支定界法。整数规划如下：

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

## 三、实验原理

首先确定目标函数的一个初始上下界，然后通过逐步分支使上界变小，下界变大，直到两者相等时，即可求出最优值和最优解。

## 四、实验步骤

记整数规划问题为 IP，对应的松弛问题为 LP。则松弛问题如下：

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

运用软件 lingo 求解该松弛问题，具体程序如下：

```
max = 2*x1+x2;  
x1+x2<=5;  
-x1+x2<=0;  
6*x1+2*x2<=21;  
x1>=0;  
x2>=0;
```

具体结果如下：

Global optimal solution found.

Objective value:	7.750000
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	3

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.750000	0.000000
X2	2.250000	0.000000

  

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	7.750000	1.000000
2	0.000000	0.500000
3	0.500000	0.000000
4	0.000000	0.250000
5	2.750000	0.000000
6	2.250000	0.000000

解出上述的松弛问题，最优解为：  $x_1=2.75$ ，  $x_2=2.25$ 。最优值为： 7.75。由于 LP 的最优解不符合整数要求，可以任选变量进行分支，不妨选  $x_1$ 。由于最接近 2.75 的整数是 2 和 3，因此构造两个约束条件  $x_1 \geq 3$  和  $x_1 \leq 2$ 。得到后继问题 LP1 和 LP2，如下所示：

LP1:  $\max z = 2x_1 + x_2$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

LP2:  $\max z = 2x_1 + x_2$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

接下来，求解 LP1 和 LP2 的最优解和最优值。具体步骤如下：

求解 LP1:

程序代码如下：

```
max = 2*x1+x2;
x1+x2<=5;
-x1+x2<=0;
6*x1+2*x2<=21;
x1>=3;
x1>=0;
```

$x_2 \geq 0;$

具体结果如下:

Global optimal solution found.

Objective value:	7.500000
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	1

Variable	Value	Reduced Cost
X1	3.000000	0.000000
X2	1.500000	0.000000

  

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	7.500000	1.000000
2	0.500000	0.000000
3	1.500000	0.000000
4	0.000000	0.500000
5	0.000000	-1.000000
6	3.000000	0.000000
7	1.500000	0.000000

求解 LP1, 最优解为  $x_1=3$ ,  $x_2=1.5$ , 最优值为: 7.5。

求解 LP2:

程序代码如下:

```
max = 2*x1+x2;  
x1+x2<=5;  
-x1+x2<=0;  
6*x1+2*x2<=21;  
x1<=2;  
x1>=0;  
x2>=0;
```

具体结果如下:

Global optimal solution found.

Objective value:	6.000000
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	1

Variable	Value	Reduced Cost
----------	-------	--------------

X1	2.000000	0.000000
X2	2.000000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	6.000000	1.000000
2	1.000000	0.000000
3	0.000000	1.000000
4	5.000000	0.000000
5	0.000000	3.000000
6	2.000000	0.000000
7	2.000000	0.000000

求解 LP2，最优解为  $x_1=2$ ,  $x_2=2$ ，最优值为：6。

综上所述，求解 LP1，最优解为  $x_1=3$ ,  $x_2=1.5$ ，最优值为：7.5。求解 LP2，最优解为  $x_1=2$ ,  $x_2=2$ ，最优值为：6。

然后由于  $7.5 > 6$ ，优选 LP1 进行分支。因为  $x_1=3$ ,  $x_2=1.5$ ，此点中  $x_2$  不符合整数要求，构造条件  $x_2 \geq 2$ ,  $x_2 \leq 1$ 。得到 LP11 和 LP12。

LP11:  $\max z = 2x_1 + x_2$

LP12:  $\max z = 2x_1 + x_2$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

接下来，求解 LP11 和 LP12 的最优解和最优值。

求解 LP11:

程序代码如下:

```
max = 2*x1+x2;
x1+x2<=5;
-x1+x2<=0;
6*x1+2*x2<=21;
x1>=3;
x2>=2;
```

```
x1>=0;
x2>=0;
```

具体结果如下:

```
No feasible solution found.
Infeasibilities:                0.5000000
Total solver iterations:        4
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	3.000000	0.000000
X2	1.500000	0.000000

  

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.5000000	1.000000
2	0.5000000	0.000000
3	1.500000	0.000000
4	0.000000	0.5000000
5	0.000000	-1.000000
6	-0.5000000	0.000000
7	3.000000	0.000000
8	1.500000	0.000000

求解 LP11, 无可行解。

求解 LP12:

程序代码如下:

```
max = 2*x1+x2;
x1+x2<=5;
-x1+x2<=0;
6*x1+2*x2<=21;
x1>=3;
x2<=1;
x1>=0;
x2>=0;
```

具体结果如下:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                7.333333
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        1
```

Variable	Value	Reduced Cost
----------	-------	--------------

X1	3.166667	0.000000
X2	1.000000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	7.333333	1.000000
2	0.833333	0.000000
3	2.166667	0.000000
4	0.000000	0.333333
5	0.166667	0.000000
6	0.000000	0.333333
7	3.166667	0.000000
8	1.000000	0.000000

求解 LP12，最优解为  $x_1=3.166667$ ， $x_2=1$ ，最优值为：7.33333。

综上所述，求解 LP11，无最优解最优值。求解 LP12，最优解为  $x_1=3.166667$ ， $x_2=1$ ，最优值为：7.33333。

接下来，类似又形成两个后继问题 LP121 和 LP122.

LP121:  $\max z = 2x_1 + x_2$

LP122:  $\max z = 2x_1 + x_2$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

求解 LP121 和 LP122.

求解 LP121:

程序代码如下:

```
max = 2*x1+x2;
x1+x2<=5;
-x1+x2<=0;
6*x1+2*x2<=21;
x1>=4;
x2<=1;
x1>=0;
x2>=0;
```

具体结果如下:

```

No feasible solution found.
Infeasibilities:                1.500000
Total solver iterations:        3

```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	4.000000	0.000000
X2	-1.500000	0.000000

  

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	3.000000	1.000000
2	2.500000	0.000000
3	5.500000	0.000000
4	0.000000	0.500000
5	0.000000	-1.000000
6	2.500000	0.000000
7	4.000000	0.000000
8	-1.500000	0.000000

求解 LP121, 无可行解。

求解 LP122:  
程序代码如下:

```

max = 2*x1+x2;
x1+x2<=5;
-x1+x2<=0;
6*x1+2*x2<=21;
x1<=3;
x2<=1;
x1>=0;
x2>=0;

```

具体结果为:

```

Global optimal solution found.
Objective value:                7.000000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        0

```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	3.000000	0.000000
X2	1.000000	0.000000

  

Row	Slack or Surplus	Dual Price
-----	------------------	------------



1	7.000000	1.000000
2	1.000000	0.000000
3	2.000000	0.000000
4	1.000000	0.000000
5	0.000000	2.000000
6	0.000000	1.000000
7	3.000000	0.000000
8	1.000000	0.000000

求解 LP122, 最优解为  $x_1=3, x_2=1$ , 最优值为: 7。

综上所述, 求解 LP121, 无最优解最优值。求解 LP122, 最优解为  $x_1=3, x_2=1$ , 最优值为: 7。

LP122 再与 LP2 相比较。

LP122, 最优解为  $x_1=3, x_2=1$ , 最优值为: 7。

LP2, 最优解为  $x_1=2, x_2=2$ , 最优值为: 6。

得到整数规划的最优解为  $x_1=3, x_2=1$ , 最优值为: 7。

## 五、验证设计

1. 用 lingo 进行验证设计:

具体程序:

```
max = 2*x1+x2;
x1+x2<=5;
-x1+x2<=0;
6*x1+2*x2<=21;
x1>=0;
x2>=0;
@gin(x1);
@gin(x2);
```

程序结果:

Global optimal solution found.

Objective value:	7.000000
Objective bound:	7.000000
Infeasibilities:	0.000000
Extended solver steps:	0
Total solver iterations:	0

Variable	Value	Reduced Cost
X1	3.000000	-2.000000
X2	1.000000	-1.000000

  

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	7.000000	1.000000
2	1.000000	0.000000
3	2.000000	0.000000
4	1.000000	0.000000
5	3.000000	0.000000
6	1.000000	0.000000

得到整数规划的最优解为  $x_1=3$ ,  $x_2=1$ , 最优值为: 7。

## 2. 用 SAS/OR 进行验证设计:

具体程序如下:

```
proc optmodel;
    var x>=0<=3;
    var y>=0;
    con x+y<=5;
    con -x+y<=0;
    con 6*x+2*y<=21;
    con x+y<=4;
    max z=2*x+y;
    solve;
    print x y;
run;

quit;
```

具体结果如下：

SAS 系统	
The OPTMODEL Procedure	
Solution Summary	
Solver	LP
Algorithm	Dual Simplex
Objective Function	z
Solution Status	Optimal
Objective Value	7
Primal Infeasibility	0
Dual Infeasibility	0
Bound Infeasibility	0
Iterations	3
Presolve Time	0.00
Solution Time	0.00

x	y
3	1

图 1 SAS 进行整数规划的验证设计结果

从上述的结果，我们得知，整数规划的最优解为  $x_1=3$ ,  $x_2=1$ ，最优值为：7。

六、参考文献

[1] 朱世武. SAS编程技术教程[M]. 北京:清华大学出版社, 2013.

[2] 夏坤庄. 深入解析SAS:数据处理、分析优化与商业应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2015.