基于 NGARCH 模型在日收益率拟合中的应用

摘要

本文基于自回归条件异方差和广义自回归条件异方差以及它的簇模型对上证 180 指股票收益率的波动进行拟合。并且判断这几种 GARCH 模型的优缺点。

首先我们先用广义自回归条件异方差（GARCH 模型）对收益率进行拟合，得到结果：

GARCH(1,1):

$$\gamma_t = 0.036932 + a_t，\ a_t = 0.0047657 z_t$$

$$\sigma_t{}^2 = 0.0554524 \alpha_{t-i}^2 + 0.944886 \sigma_{t-1}{}^2$$

GARCH(1,2):

$$\gamma_t = 0.03702334 + a_t，\ a_t = 0.00476468 z_t$$

$$\sigma_t{}^2 = 0.05535342 \alpha_{t-i}^2 + 0.94495165 \sigma_{t-1}{}^2 + 0.00000001 \sigma_{t-2}{}^2$$

然后，根据它们的 AIC 来判断两个广义自回归条件异方差的相对优劣性，结果是 GARCH(1,1)模型拟合的情况较好些。

紧接着，运用非对称广义自回归条件异方差模型（NGARCH 模型）对收益率进行模型的拟合，然后和经过拟合收益率的广义自回归条件异方差模型进行比较。得到结果：

NGARCH(1,1):

$$\begin{cases} \gamma_t = 0.03698215 + a_t \\ a_t = \sqrt{h_t} z_t \\ h_t = 0.004742204 + 0.9474955 h_{t-1} + 0.05154075 h_{t-1}(z_{t-1} - 0.04946472)^2 \end{cases}$$

在上述的 NGARCH(1,1)模型中，检验它的所有参数及模型自身通过检验。

然后将 NGARCH 和广义自回归条件异方差模型进行比较。可以证明拿非对称广义自回归条件异方差模型拟合收益率时，符合收益率为负数比收益率为正数，对收益率的波动影响更大的情况。也就是说，收益率的负向扰动比正向扰动对收益率的总体的波动影响更大。

关键词：收益率；杠杆效应；NGARCH；正负扰动

一、基本概念

1.1 波动率的特征

尽管波动率不能直接观测，但是它的一些特征通常可以从资产的收益率中看出。第一，存在波动率聚集（即在某个特定的时间段上波动率较高，而在其他时间段上的波动率较小）。第二，波动率随时间以连续方式变化——波动率的跳跃是罕见的。第三，波动率在一个固定的范围内变化。第四，波动率对价格大幅上升和大幅下降的反应是不同的，后者对波动率的影响更大。

1.2 异方差性质的检验

对资产收益率序列建立波动率模型需要如下四个步骤：

1.通过检验数据的前后相关性建立一个均值方程；

2.对均值方程的残差进行 ARCH 效应检验；

3.如果 ARCH 效应在统计上是显著的，则指定一个波动率模型，并对均值方程和波动率方程进行联合估计；

4.仔细检验所拟合的模型，如有必要则进行改进。

下面进行异方差性质的检验：

为了符号的方便，记$\alpha_t = \gamma_t - \mu_t$为均值方程的残差。平方序列${\alpha_t}^2$可以用来检验条件异方差性，即所谓的 ARCH 效应。

有两个检验可以用来 ARCH 效应的检验。

第一个检验是将常用的 Ljung-Box 统计量 Q(m)应用于序列$\{{\alpha_t}^2\}$。该检验的统计量的原假设是序列$\{{\alpha_t}^2\}$前m个间隔的ACF值都为零。

第二个对条件异方差的检验是Engle的拉格朗日乘子检验。该检验等价于在如下线性回归中的检验$\alpha_i = 0 (i = 1, \cdots, m)$的通常的F统计量：

$${\alpha_t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\alpha_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m\alpha_{t-m}^2 + \varepsilon_t, \quad t = m+1, \cdots, T$$

其中，ε_t表示误差项，m是事先指定的正整数，T是样本容量。具体地，原假设与备则假设如下。

原假设：

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \tag{1.2.1}$$

备则假设：

$$H_1: \exists\, i \in (1, m) \text{ s.t. } \alpha_i \neq 0 \tag{1.2.2}$$

1.3 ARCH 模型

ARCH 模型的基本思想是

1）资产收益率的扰动序列a_t是前后不相关的，但不是独立的；

2）a_t的不独立性可以用其滞后值的简单二次函数来描述。

ARCH（m）模型假定：

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t，\ \ {\sigma_t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 {a_{t-1}}^2 + \cdots + \alpha_m {a_{t-m}}^2$$

其中ε_t是均值为 0、方差为 1 的独立同分布随机变量序列，其中$\alpha_0 > 0$，对$\mathrm{i} > 0$有$\alpha_i \geq 0$。系数α_i必须满足一些正则性条件以保证a_t的无条件方差是有限的。

ARCH 模型有模型可以产生波动率聚集和扰动a_t有厚尾部的优点但也有缺点 1)模型假定正扰动和负扰动对波动率有相同影响但实际上正负扰动是不同的。2）ARCH 模型对参数限制相当强且给出的波动率预报值会偏高。3）它只是提供一个机械的方式来描述条件方差的行为。

ARCH（m）模型总结可以写成如下形式：

$$\begin{cases} \gamma_t = \mu_t + a_t \\ a_t = \sqrt{h_t} z_t \\ h_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \alpha_{t-i}^2 \end{cases}$$

1.4 GARCH 模型

虽然 ARCH 模型简单，但是为了充分描述资产收益率的波动过程，往往需要很多很多参数。Bollerslev提出了一个有用的推广形式，称为 GARCH 模型，又叫广义 ARCH 模型。对于一个对数收益率序列γ_t，令$a_t = \gamma_t - \mu_t$为时刻t时刻的新息。我们称a_t服从GARCH(p, q)模型。

GARCH(p, q)模型如下：

$$\begin{cases} \gamma_t = \mu_t + a_t \\ a_t = \sqrt{h_t} z_t \\ h_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \alpha_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \phi_j h_{t-j} \end{cases}$$

其中z_t服从N(0,1)的正态分布，参数$\beta_0 > 0, \beta_i \geq 0, \phi_j \geq 0, \left|\sum_{i=1}^{\max(p,q)} \beta_i + \phi_j\right| < 1.$

1.5 非对称 GARCH 模型（NGARCH 模型）

NGARCH 模型可以刻画过去正负扰动的非对称波动率相应的 GARCH 模型，它最初由 Engle 和 Ng 提出，并由 Duan 进行研究。它的假定模型的形式为：

$$\gamma_t = \mu_t + a_t,\ a_t = \sigma_t\varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim D(0,1)$$
$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2(a_{t-1} - \theta\sigma_{t-1})^2 \tag{1.5.1}$$

其中，μ_t是条件均值，$D(0,1)$是表示均值为 0，方差为 1 的某个分布，β_i为非负实数且$\beta_0 > 0$，参数θ为杠杆参数。式（1.5.1）中的模型也称为非对称 GARCH（1,1）模型，或者 NGARCH（1,1）模型。如果$\theta = 0$，那么该模型简化为 GARCH（1,1）模型。

为了研究 NGARCH（1,1）模型的性质，重新改写式（1.5.1）为式（1.5.2），如下：

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \beta_2\sigma_{t-1}^2(\varepsilon_{t-1} - \theta)^2 \tag{1.5.2}$$

上式两边取期望并利用ε_{t-1}和σ_{t-1}的相互独立性，我们有：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}({\sigma_t}^2) &= \beta_0 + \beta_1\mathrm{E}({\sigma_{t-1}}^2) + \beta_2\mathrm{E}({\sigma_{t-1}}^2)\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} - \theta)^2 \\ &= \beta_0 + \beta_1\mathrm{E}({\sigma_{t-1}}^2) + \beta_2\mathrm{E}({\sigma_{t-1}}^2)(1 + \theta^2)\end{aligned}$$

如果γ_t是弱平稳的，则$\mathrm{E}({\sigma_t}^2) = \mathrm{E}({\sigma_{t-1}}^2)$，且我们有：

$$\mathrm{E}({\sigma_t}^2) = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1 - \beta_2(1 + \theta^2)}$$

即为γ_t的无条件方差，相应的，对于 NGARCH（1,1）模型，我们要求$1 - \beta_1 - \beta_2(1 + \theta^2) > 0$。式（1.5.1）两边同时乘以$\varepsilon_{t-1}$并取期望得

$$\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}{\sigma_t}^2) = -2\theta\beta_2\mathrm{E}({\sigma_{t-1}}^2) = \frac{-2\theta\beta_0\beta_2}{1 - \beta_1 - \beta_2(1 + \theta^2)}$$

上式表明如果$\theta > 0$、$\beta_2 > 0$，那么ε_{t-1}和σ_t是负相关的。因此，参数θ位杠杆参数并且必须为正值。

那么最后 NGARCH（p,q）模型可以写为：

$$\begin{cases}\gamma_t = \mu_t + a_t \\ a_t = \sqrt{h_t}z_t \\ h_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-1} + \sum_{j=1}^{q}\beta_{j+1}h_{t-1}(z_{t-1} - \theta)^2, \theta > 0\end{cases}$$

1.5 IGARCH 模型

IGARCH(p, q)模型如下：

$$\begin{cases}\gamma_t = \mu_t + a_t \\ a_t = \sqrt{h_t}z_t \\ h_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\alpha_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\phi_j h_{t-j}\end{cases}$$

其中z_t服从$\mathrm{N}(0,1)$的正态分布，参数$\beta_0 > 0, \beta_i \geq 0, \phi_j \geq 0, \left|\sum_{i=1}^{\max(p,q)}\beta_i + \phi_j\right| = 1.$

二、数据准备

2.1 数据描述

本文选取上证成份指数（简称上证 180 指数）进行分析预测。它是上海证券交易所对原上证 30 指数进行了调整并更名而成的，其样本股是在所有 A 股股票中抽取最具市场代表性的 180 种样本股票，自 2002 年 7 月 1 日起正式发布。作为上证指数系列核心的上证 180 指数的编制方案，可以反映上海证券市场的概貌和运行状况、具有可操作性和投资性、能够作为投资评价尺度及金融衍生产品基础的基准指数。

部分数据如下图所示：

date	clpr	rate	lnrate
2008-01-02,三	12101.23	0.0064	1.0064
2008-01-03,四	12161.98	0.0050	1.0050
2008-01-04,五	12294.75	0.0109	1.0109
2008-01-07,一	12443.31	0.0121	1.0121
2008-01-08,二	12409.5	-0.0027	0.9973
2008-01-09,三	12572.01	0.0131	1.0131
2008-01-10,四	12672.06	0.0080	1.0080
2008-01-11,五	12763.88	0.0072	1.0072
2008-01-14,一	12827.77	0.0050	1.0050
2008-01-15,二	12725.45	-0.0080	0.9920
2008-01-16,三	12307.53	-0.0328	0.9672
2008-01-17,四	12001.03	-0.0249	0.9751
2008-01-18,五	12090.51	0.0075	1.0075
2008-01-21,一	11494.63	-0.0493	0.9507
2008-01-22,二	10606.5	-0.0773	0.9227
2008-01-23,三	11065.43	0.0433	1.0433
2008-01-24,四	11148.24	0.0075	1.0075
2008-01-25,五	11278.31	0.0117	1.0117
2008-01-28,一	10497.91	-0.0692	0.9308
2008-01-29,二	10571.32	0.0070	1.0070
2008-01-30,三	10410.82	-0.0152	0.9848
2008-01-31,四	10217.95	-0.0185	0.9815
2008-02-01,五	10116.51	-0.0099	0.9901
2008-02-04,一	10962.11	0.0836	1.0836
2008-02-05,二	10894.75	-0.0061	0.9939
2008-02-13,三	10643.07	-0.0231	0.9769

图 1　EXCEL 表格中的原始数据

从上述的数据，可以观察到，我们收集了上证 180 指数的股票日收盘价和股票的日收益率以及日对数收益率。这些数据是由 2008 年到 2017 年的实时的日数据。所以，满足我们的分析需要。那么下面，我们便可以根据这些数据进行相应的数据分析。

2.2 数据探索

2.2.1 R 语言的数据导入操作

首先，将此 EXCEL 文件导入 R 软件中去。下面是进行 R 的数据导入操作：

先将所有的数据进行复制到粘贴板上，然后打开 R 软件，开始编程读取数据。下图为控制台读取数据的结果图。

```
> da<-read.delim("clipboard",header=T)
> da
                date      clpr    rate lnrate
1    2008-01-02,三 12101.23  0.0064 1.0064
2    2008-01-03,四 12161.98  0.0050 1.0050
3    2008-01-04,五 12294.75  0.0109 1.0109
4    2008-01-07,一 12443.31  0.0121 1.0121
5    2008-01-08,二 12409.50 -0.0027 0.9973
6    2008-01-09,三 12572.01  0.0131 1.0131
7    2008-01-10,四 12672.06  0.0080 1.0080
8    2008-01-11,五 12763.88  0.0072 1.0072
9    2008-01-14,一 12827.77  0.0050 1.0050
10   2008-01-15,二 12725.45 -0.0080 0.9920
11   2008-01-16,三 12307.53 -0.0328 0.9672
12   2008-01-17,四 12001.03 -0.0249 0.9751
13   2008-01-18,五 12090.51  0.0075 1.0075
14   2008-01-21,一 11494.63 -0.0493 0.9507
15   2008-01-22,二 10606.50 -0.0773 0.9227
16   2008-01-23,三 11065.43  0.0433 1.0433
```

图 2　原始数据在 R 中的展示

2.2.2 SAS 语言的数据导入操作

数据已经导入 R 软件，但是单一的软件在一定程度上功能有限，所以我们采取教多的软件对数据进行分析。下面将数据导入 SAS 软件中。

首先，我们关闭打开的 EXCEL 表格，然后打开 SAS 软件，进行菜单式导入数据。具体过程详见下图。

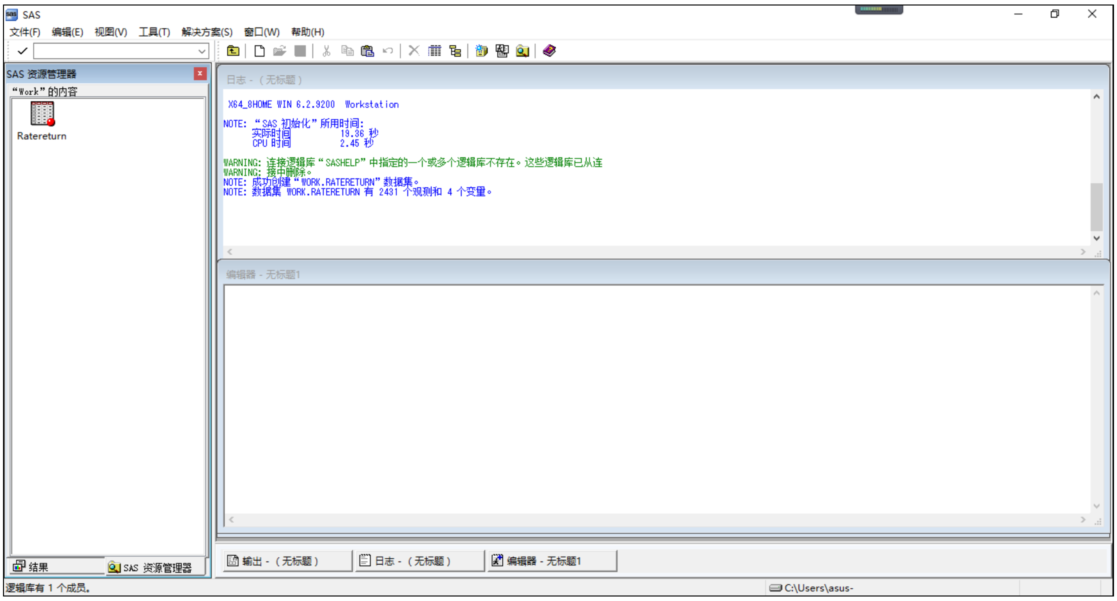


图 3　原始数据成功导入 SAS 软件

我们打开数据集，查证数据是否真的成功导入 SAS 软件。结果如下：

	date	clpr	rate	lnrate
1	2008-01-02,三	12101.23	0.0064	1.0064
2	2008-01-03,四	12161.98	0.0050201508	1.0050201508
3	2008-01-04,五	12294.75	0.010916808	1.010916808
4	2008-01-07,一	12443.31	0.0120832062	1.0120832062
5	2008-01-08,二	12409.5	-0.002717123	0.9972828773

图 4　查看 SAS 中的导入后的数据

那么，我们已经完成了 SAS 的数据的导入工作。接下来，进行数据的初步探索工作。

2.2.3 SAS 语言的数据探索操作

首先，查看数据集的具体信息，查看数据中是否有缺省值、所有变量的属性，以便后续的工作。

得到的结果如下列图：

SAS 系统

CONTENTS PROCEDURE

数据集名	WORK.RATERETURN	观测	2431
成员类型	DATA	变量	4
引擎	V9	索引	0
创建时间	2017-12-28 15:27:12	观测长度	48
上次修改时间	2017-12-28 15:27:12	删除的观测	0
保护		已压缩	NO
数据集类型		已排序	NO
标签			
数据表示法	WINDOWS_64		
编码	euc-cn Simplified Chinese (EUC)		

引擎/主机相关的信息	
数据集页面大小	65536
数据集页数	2
首数据页	1
每页最大观测数	1361
首数据页的观测数	1332
数据集修复数	0
ExtendObsCounter	YES
文件名	C:\Users\asus-\AppData\Local\Temp\SAS Temporary Files_TD12104_ASUS_\rateretum.sas7bdat

图 5　数据集的具体信息

按字母排序的变量和属性列表						
#	变量	类型	长度	输出格式	输入格式	标签
2	clpr	数值	8			clpr
1	date	字符	24	$24.	$24.	date
4	lnrate	数值	8			lnrate
3	rate	数值	8			rate

图 6　变量的属性列表的展示图

根据上述的图 6，可知，这个数据集中含有四个变量，clpr、rate、lnrate

是数值变量，date 是字符变量。然后进行数据初步统计，结果如下所示：

MEANS PROCEDURE

变量	标签	N	缺失值个数	最小值	均值	中位数	最大值	标准差
clpr	clpr	2431	0	3679.67	6557.25	6516.82	12827.77	1511.60
rate	rate	2431	0	-0.0902518	0.000027770	0.000270904	0.0936116	0.0178504
lnrate	lnrate	2431	0	0.9097482	1.0000278	1.0002709	1.0936116	0.0178504

图 7　变量的初步统计

根据初步统计的结果显示，rate、clpr、lnrate 三个连续变量均没有缺省值，个数都是 2431 个数据，clpr 的最小值是 3679.67，均值是 6557.25，中位数是 6516.28，最大值是 12827.77，标准差是 1511.60。然后日收益率和日对数收益率的最小值、均值、中位数、最大值以及标准差均输出在报表中。在这里就不再赘述。下面进行数据的可视化操作，结果如下列图形：

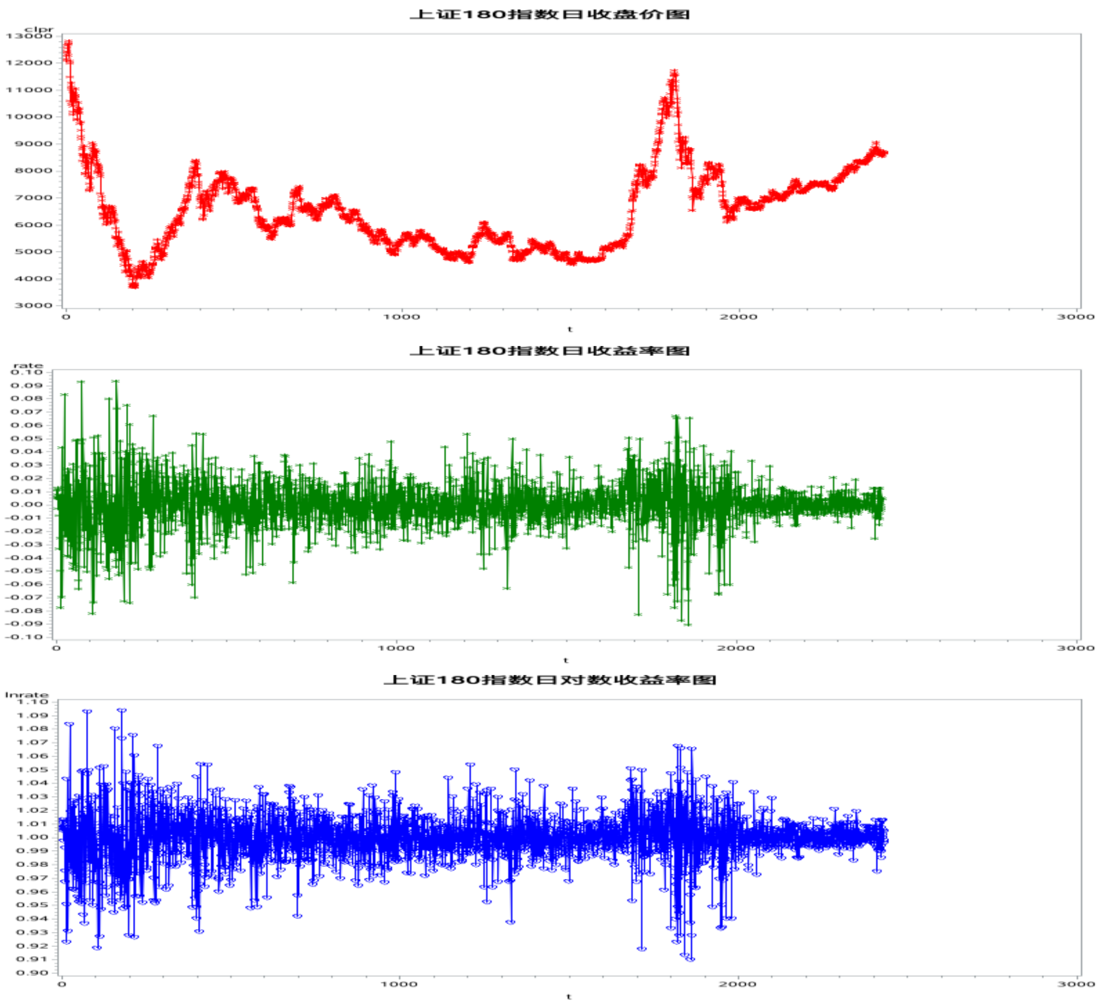


图 8　日收盘价、日收益率、日对数收益率的时序图（汇总）

根据上面的汇总图形，我们可以知道日收盘价、日收益率、日对数收益率的

波动趋势。日收盘价的波动幅度比日收益率、日对数收益率的幅度要大很多。

三、模型建立

3.1 异方差性的确定

我们首先计算出日对数收益率，然后用 fGarch 包来实现异方差性的确定。在一边拟合 GARCH 模型的情况下，一边查看该数据是否有异方差性质。图 9 显示了异方差检验输入的部分代码在控制台上的结果。图 10 显示了 GARCH 模型进行拟合的具体信息。图 11 显示了 LM 检验统计量的信息，我们可以根据 LM 检验统计量对日对数收益率的异方差进行判断。

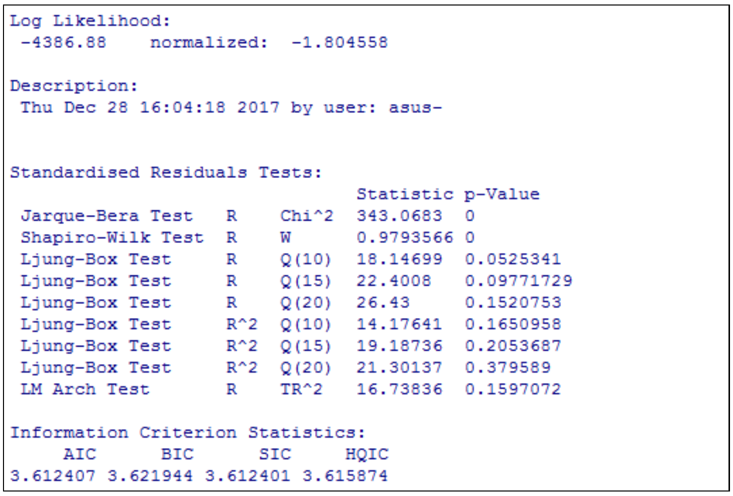
具体结果如下所示：

```
> fx=log(da$lnrate)
> eu=(fx)*100
> library(fGarch)
载入需要的程辑包：timeDate
载入需要的程辑包：timeSeries
载入需要的程辑包：fBasics


Rmetrics Package fBasics
Analysing Markets and calculating Basic Statistics
Copyright (C) 2005-2014 Rmetrics Association Zurich
Educational Software for Financial Engineering and Computational Science
Rmetrics is free software and comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
https://www.rmetrics.org --- Mail to: info@rmetrics.org
Warning messages:
1: 程辑包'fGarch'是用R版本3.4.2 来建造的
2: 程辑包'timeSeries'是用R版本3.4.2 来建造的
3: 程辑包'fBasics'是用R版本3.4.2 来建造的
> m1=garchFit(~1+garch(1,1),data=eu,trace=F)
> summary(m1)
```

图 9　异方差检验输入的部分代码在控制台上的显示结果

```
Title:
 GARCH Modelling

Call:
 garchFit(formula = ~1 + garch(1, 1), data = eu, trace = F)

Mean and Variance Equation:
 data ~ 1 + garch(1, 1)
<environment: 0x13bfe8bc>
 [data = eu]

Conditional Distribution:
 norm

Coefficient(s):
       mu      omega     alpha1      beta1
0.0369632  0.0047657  0.0554524  0.9448860

Std. Errors:
 based on Hessian

Error Analysis:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.036963    0.023259    1.589   0.1120
omega   0.004766    0.001987    2.399   0.0165 *
alpha1  0.055452    0.006824    8.126 4.44e-16 ***
beta1   0.944886    0.005989  157.762  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

图 10　GARCH 模型的拟合结果显示



```
Log Likelihood:
 -4386.88    normalized:  -1.804558

Description:
 Thu Dec 28 16:04:18 2017 by user: asus-


Standardised Residuals Tests:
                                Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  343.0683  0
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.9793566 0
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  18.14699  0.0525341
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  22.4008   0.09771729
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  26.43     0.1520753
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  14.17641  0.1650958
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  19.18736  0.2053687
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  21.30137  0.379589
 LM Arch Test       R    TR^2   16.73836  0.1597072

Information Criterion Statistics:
     AIC      BIC      SIC     HQIC
3.612407 3.621944 3.612401 3.615874
```

图 11　LM 检验统计量判断异方差性

根据上述的图 11，可得 LM 检验统计量的结果如下：

LM Arch Test　　R　　TR^2　　16.73836　0.1597072

上述的 LM Arch Test 的 P 值是 0. 1597072，说明 LM 统计检验量是拒绝原假设的。但是 LM 的原假设是：H_0：序列是方差齐性的；LM 的备则假设是：H_1：序列是方差非齐的。所以，这里显示日对数收益率是方差非齐的。

3.2 广义自回归条件异方差模型（GARCH 模型）拟合日对数收益率

根据日对数收益率的性质，我们可以建立 GARCH 模型拟合日对数收益率，具体的模型定阶和模型通过检验在第四节中实现。模型表达式如下：

$$\begin{cases} \gamma_t = \mu_t + a_t \\ a_t = \sqrt{h_t} z_t \\ h_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \alpha_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \phi_j h_{t-j} \end{cases}$$

其中z_t服从N(0,1)的正态分布，参数$\beta_0 > 0, \beta_i \ge 0, \phi_j \ge 0, \left|\sum_{i=1}^{\max(p,q)} \beta_i + \phi_j\right| < 1.$

3.3 非对称广义自回归条件异方差模型（NGARCH 模型）拟合日对数收益率

根据日对数收益率的性质，我们也可以建立 NGARCH 模型拟合日对数收益率，具体的模型定阶和模型通过检验在第四节中实现。模型表达式如下：

$$\begin{cases} \gamma_t = \mu_t + a_t \\ a_t = \sqrt{h_t} z_t \\ h_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \beta_{j+1} h_{t-1}(z_{t-1} - \theta)^2, \theta > 0 \end{cases}$$

四、模型求解

4.1 广义自回归条件异方差模型（GARCH 模型）的模型求解

4.1.1 我们开始拟合 GARCH（1,1）模型，软件得出的具体结果如下：

```
Coefficient(s):
       mu      omega     alpha1      beta1
0.0369632  0.0047657  0.0554524  0.9448860

Std. Errors:
 based on Hessian

Error Analysis:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.036963    0.023259    1.589   0.1120
omega   0.004766    0.001987    2.399   0.0165 *
alpha1  0.055452    0.006824    8.126 4.44e-16 ***
beta1   0.944886    0.005989  157.762  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

图 12　拟合 GARCH（1, 1）模型的参数估计和参数检验

从上图的参数（P 值均通过），我们可以知道：

$$\mu = 0.036932，\sigma = 0.0047657，\alpha_1 = 0.0554524，\beta_1 = 0.944886$$

从而得到 GARCH(1,1)模型为：

$$\gamma_t = 0.036932 + a_t，\ a_t = 0.0047657z_t$$

$$\sigma_t{}^2 = 0.0554524\alpha_{t-i}^2 + 0.944886\sigma_{t-1}{}^2$$

它的拟合优度分别为：

AIC	BIC	SIC	HQIC
3.612407	3.621944	3.612401	3.615874

4.1.2 我们开始拟合 GARCH（1,2）模型，软件得出的具体结果如下：

```
> m2=garchFit(~1+garch(1,2),data=eu,trace=F)
> summary(m2)

Title:
 GARCH Modelling

Call:
 garchFit(formula = ~1 + garch(1, 2), data = eu, trace = F)

Mean and Variance Equation:
 data ~ 1 + garch(1, 2)
<environment: 0x141a58e0>
 [data = eu]

Conditional Distribution:
 norm

Coefficient(s):
        mu       omega      alpha1       beta1       beta2
0.03702334  0.00476468  0.05535342  0.94495165  0.00000001
```

图 13　拟合 GARCH（1, 2）模型的部分结果

```
Coefficient(s):
        mu       omega      alpha1       beta1       beta2
0.03702334  0.00476468  0.05535342  0.94495165  0.00000001

Std. Errors:
 based on Hessian

Error Analysis:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     3.702e-02   2.332e-02    1.588   0.1123
omega  4.765e-03   2.036e-03    2.340   0.0193 *
alpha1 5.535e-02   1.203e-02    4.600 4.23e-06 ***
beta1  9.450e-01   2.192e-01    4.311 1.62e-05 ***
beta2  1.000e-08   2.094e-01    0.000   1.0000
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

图 14 拟合 GARCH（1,2）模型的参数估计和参数检验

上述的参数估计和参数检验（P 值均通过）可以得到：

$\mu = 0.03702334$，$\sigma = 0.00476468$，$\alpha_1 = 0.05535342$，$\beta_1 = 0.94495165$

$\beta_2 = 0.00000001.$

从而得到 GARCH(1,2)模型为：

$$\gamma_t = 0.03702334 + a_t，a_t = 0.00476468 z_t$$

$$\sigma_t{}^2 = 0.05535342\alpha_{t-i}^2 + 0.94495165\sigma_{t-1}{}^2 + 0.00000001\sigma_{t-2}{}^2$$

它的拟合优度分别为：

AIC	BIC	SIC	HQIC
3.613049	3.624970	3.613040	3.617383

4.1.3 GARCH 模型比较

通过 GARCH(1,1)和 GARCH(1,2)的 AIC 值，我们可以比较两个模型哪一个更优。GARCH(1,1)的 AIC 值为 3.612407，GARCH(1,2)的 AIC 值为 3.613049。因而，GARCH(1,1)更优。

4.2 非对称广义自回归条件异方差模型（NGARCH 模型）的模型求解

已知 NGARCH（p,q）模型表达式如下：

$$\begin{cases} \gamma_t = \mu_t + a_t \\ a_t = \sqrt{h_t} z_t \\ h_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \beta_{j+1} h_{t-1}(z_{t-1} - \theta)^2, \theta > 0 \end{cases}$$

那么下面，我们开始用 R 语言拟合 NGARCH（p,q）模型。具体操作如下：首先，我们运行已经在工作目录下的 Ngarch.R 文件，然后对日对数收益率进行

NGARCH 模型的拟合。具体结果如下：

```
> source("Ngarch.R")
> m3=Ngarch(eu)

Estimation results of NGARCH(1,1) model:
estimates:  0.03698215 0.004742204 0.9474955 0.05154075 0.04946472
std.errors:  0.02360258 0.002174091 0.006195091 0.006562551 0.08775471
t-ratio:  1.566869 2.181236 152.9429 7.853767 0.5636702
```

图 15　拟合 NGARCH（1，1）模型的结果

从上述的结果来看，我们可以得到：

$$\mu_t = 0.03698215$$

$$\beta_0 = 0.004742204$$

$$\beta_1 = 0.9474955$$

$$\beta_2 = 0.05154075$$

$$\theta = 0.04946472$$

并且参数$\mu_t, \beta_0, \beta_1, \beta_2$的估计在 5%显著性水平上是显著的。标准差和方差序列的 Ljung-Box 检验统计量也不能拒绝该 NGARCH 模型，是因为$\sqrt{h_t}$的 Q(10)=18.252，p=0.05086；h_t的 Q(10)=17.114，p=0.07189（如图 16）。

```
> res=m3$residuals
> vol=m3$volatility
> resi=res/vol
> Box.test(resi,lag=10,type='Ljung')

        Box-Ljung test

data:  resi
X-squared = 18.252, df = 10, p-value = 0.05086

> Box.test(resi^2,lag=10,type='Ljung')

        Box-Ljung test

data:  resi^2
X-squared = 17.114, df = 10, p-value = 0.07189
```

图 16　NGARCH（1，1）模型的标准差和方差检验

现在，我们根据图 15，再来考虑杠杆系数θ：

$$\theta = 0.04946472$$

其对应的t比统计量为 0.5636702，因此杠杆系数在 5%的显著水平上是显著的。

因此，上述模型的所有参数均通过检验。

综上所述，我们可以得到 NGARCH（1,1）模型表达式如下：

$$\begin{cases} \gamma_t = 0.03698215 + a_t \\ a_t = \sqrt{h_t} z_t \\ h_t = 0.004742204 + 0.9474955 h_{t-1} + 0.05154075 h_{t-1}(z_{t-1} - 0.04946472)^2 \end{cases}$$

五、模型评价

5.1 GARCH 模型内部比较

根据第四节中的 GARCH 模型评价部分，可以知道：

GARCH(1,1)的 AIC 值为 3.612407，GARCH(1,2)的 AIC 值为 3.613049。因而，GARCH(1,1)相对较优。

5.2 GARCH 模型与 NGARCH 模型比较

在 GARCH 模型和 NGARCH 模型的比较中，GARCH 模型没有杠杆系数θ，但是 NGARCH 模型有杠杆系数θ，但是它的值一定是正数。基于 GARCH 模型，NGARCH 模型添加了杠杆系数θ，所以它更能精确地拟合收益率正负扰动的不对称的情形，更能很好地体现收益率的序列的解析式。同时，NGARCH 模型也体现了：当收益率同时出现正负扰动的情况下，负向扰动比正向扰动对下一步收益率的波动值的影响更大。

六、总结与展望

在本篇文章中，我们建立了 GARCH 簇模型对上证 180 指数的收益率进行了拟合，而且还将所有建立的模型进行了比较。最后得出了 GARCH(1,1)模型比 GARCH(1,2)模型更优；而 NGARCH(1,1)模型又可以较为精确拟合正负扰动的情形，故而比 GARCH(1,1)模型更优。

但本文还是有很多的不足之处。由于时间的关系，我们本来还想通过 JMP 软件对原始的股票数据做一个探索性数据处理，还想通过 SAS/ETS 对股票的收益率再进行 GARCH 簇模型的拟合与比较。如果时间充裕的话，我们接下来还想实现 IGARCH，EGARCH，AR-GARCH，GARCH-M，QGARCH，PGARCH，APGARCH，FIGARCH 等 GARCH 簇模型的拟合与比较。紧接着，我们还可以将数据进行数据的可视化，那么我们就可以更加清楚的看见所有 GARCH 簇模型对收益率的拟合情况，还有每种拟合模型的优劣情况。

七、参考文献

[1] 朱世武. 金融计算与建模——理论、算法与 SAS 程序[M]. 北京:清华大学出版社, 2013:60-62.

[2] 蔡瑞胸. 金融数据分析导论——基于 R 语言[M]. 北京:机械工业出版社, 2013:137-179.

[3] 魏正元, 罗云峰. 基于已实现 NGARCH 模型的上证 50 指数的风险度量[J]. 重庆理工大学学报, 2017,31(5).

[4] 罗云峰. 已实现 NGARCH 模型及应用研究[D]. 重庆. 重庆理工大学, 2017.

附录

SAS 程序代码：

```
/*查看数据中的变量信息*/
proc contents data=ratereturn;
run;
/*查看其最大值、最小值、均值以及中位数等信息*/
proc means data=ratereturn N nmiss min mean median max std;
    var clpr rate lnrate;
run;
/*绘制时序图*/
data ratereturn1;
set ratereturn;
t=_n_;
run;
proc gplot data=ratereturn1;
plot clpr*t=1;
title'上证180指数日收盘价图';
symbol c=red i=join v=star;
run;
quit;
proc gplot data=ratereturn1;
plot rate*t=1;
title'上证180指数日收益率图';
symbol c=green i=join v=star;
run;
quit;
proc gplot data=ratereturn1;
plot lnrate*t=1;
```

```
title'上证180指数日对数收益率图';
symbol c=blue i=join v=#;
run;
quit;
```

R 程序代码:

```
#下面是 R 软件数据导入的部分
da<-read.delim("clipboard",header=T)
da
#下面进行异方差的检验
fx=log(da$lnrate)
eu=(fx)*100
library(fGarch)
m1=garchFit(~1+garch(1,1),data=eu,trace=F)#拟合 GARCH 模型 1,1
summary(m1)
m2=garchFit(~1+garch(1,2),data=eu,trace=F)#拟合 GARCH 模型 1,2
summary(m2)
#下面开始拟合 NGARCH(1,1)模型
source("Ngarch.R")
m3=Ngarch(eu)
res=m3$residuals
vol=m3$volatility
resi=res/vol
Box.test(resi,lag=10,type='Ljung')
Box.test(resi^2,lag=10,type='Ljung')
```