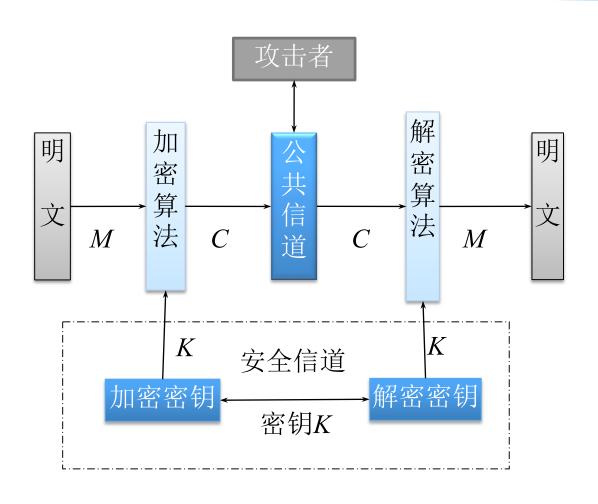




1, 010111110001

主要内容

- 1 序列密码的基本概念
- 2 密钥流与密钥生成器
- 3 线性反馈移位寄存器序列
- 4 随机性概念与m序列的伪随机性
- 5 非线性组合子系统
- 6 流密码算法—A5



序列密码的起源

- ❖序列密码可追溯到20世纪20年代的**维尔南** (Vernam) 体制
 - 当Vernam体制的密钥序列是**随机序列**时,就是"一次一密"密码体制
 - 将英文字母编成5比特的二元数字,随机选择二元序列 作为密钥
 - 加密: 将明文和密钥的按位相加,即

$$c_i = m_i \oplus k_i \pmod{2}$$
 $i=1,2,3,...$

- ❖ Shannon已经证明"一次一密"在理论上是不可破 译的,但并不实用
 - 密钥的长度至少要等于明文长度
- ❖流密码(stream cipher,也称序列密码)是模仿
 - 一次一密系统的尝试
 - 理论比较成熟,而且实现简单、速度快、错误传播少
 - 军事和外交等领域的主要密码体制之一

序列密码的基本概念

- ❖序列密码的加密用一个随机序列(密钥流)与明文序列按位叠加产生密文,用同一随机序列与密文序列叠加来恢复明文
- ❖由种子密钥通过密钥流发生器得到的密钥流为: $K = k_1 k_2 \cdots k_n$,则加密变换为:

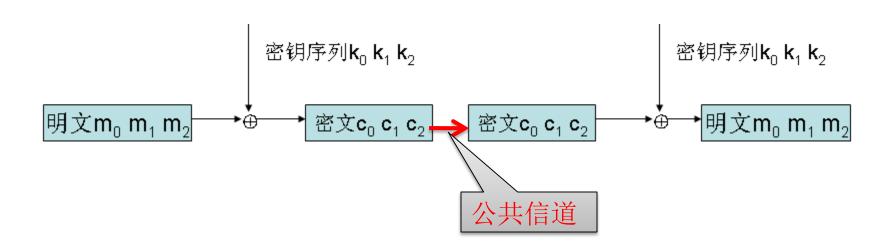
$$C = c_1 c_2 \cdots c_n$$

其中 $c_i = m_i \oplus k_i (i = 1, 2, \dots, n)$

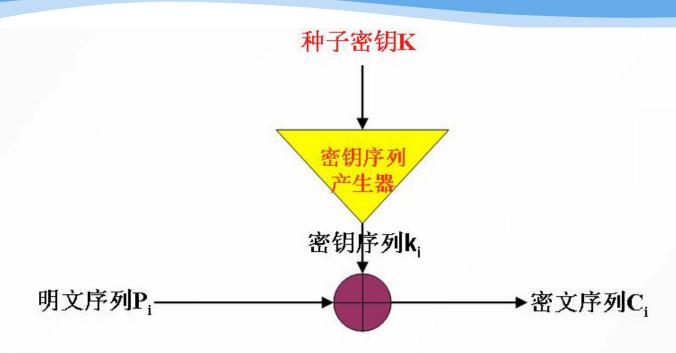
解密变换为: $m_i = c_i \oplus k_i (i = 1, 2, \dots, n)$

其中m, k, c是0、1序列, ⊕表示模2加法(异或)

序列密码的加密和解密



序列密码的原理



特点:

- 1. 加解密运算只是简单的模二加运算。
- 2. 密码安全强度主要依赖密钥流的安全性。

序列密码的分类

- ❖序列密码通常划分为两类:
 - 同步序列密码
 - 自同步序列密码

※同步序列密码:

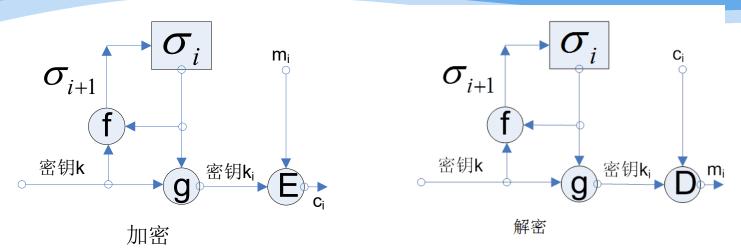
■ 密钥序列的产生独立于明文消息和密文消息:

$$\sigma_{i+1} = f(\sigma_i, k) \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$k_i = g(\sigma_i, k) \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

$$c_i = E_{k_i}(m_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

同步序列密码的通用模型



❖特点:

- **无错误传播:** 各符号之间真正独立。一个传播错误只 影响一个符号,不会影响到后继的符号
- 同步: 发送方和接收方必须保持精确的、用同样的密钥并作用在同样的位置上,才能正确的解密

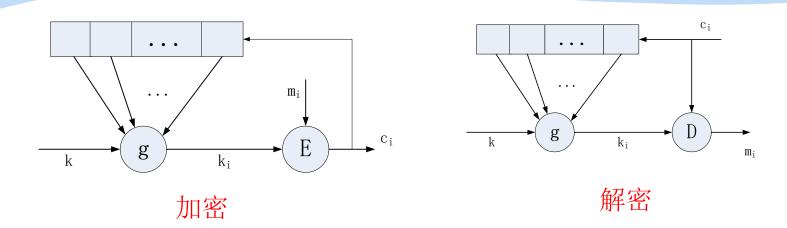
自同步序列密码

※自同步序列密码:

密钥序列是密钥及固定大小的以往密文的函数:

$$\sigma_i = (c_{i-t}, c_{i-t+1}, c_{i-t+2}, ..., c_{i-1})$$
 $(i = 0, 1, 2, ...)$ $k_i = g(\sigma_i, k)$ $c_i = E_{k_i}(m_i)$ 其中 $\sigma_0 = (c_{-t}, c_{-t+1}, c_{-t+2}, ..., c_{-1})$ 被称为初始状态

自同步序列密码的通用模型

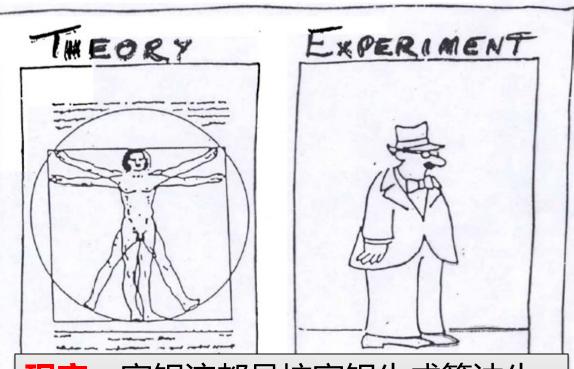


❖特点:

- 1.有限错误传播:设密钥序列产生器具有n位存储,则
- 一个符号的传输错误只影响到后面n符号的解密
- 2. **自同步:** 只要接收方连续收到**n**个正确的密文符号, 密钥序列产生器便会自动地恢复同步
- 3.消除明文统计特性

密钥流与密钥生成器

- ❖密钥流算法应 该能产生**随机** 性和不可预测 性好的密钥序 列
- ※保持同步是序 列密码在实际 应用中的关键



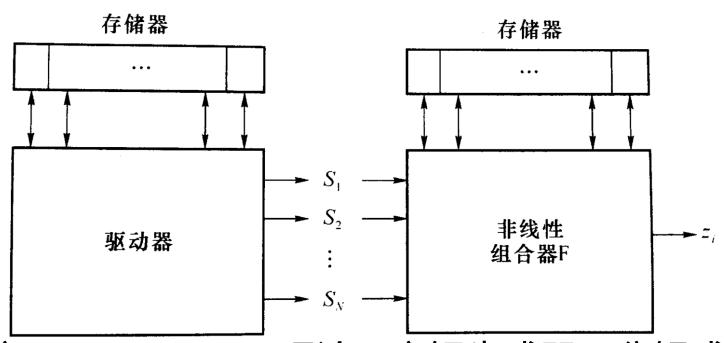
现实:密钥流都是按密钥生成算法生成,且要求通信双方能产生相同的密钥序列,所以不可能是真随机的—— 伪随机序列

- *为尽可能的提高安全性,对密钥流的基本要求:
 - 1. 极大的周期:随机序列是非周期的,而按任何算法产生的序列都是周期的,因此应要求密钥流具有尽可能大的周期
 - 2. 良好的统计特性: 随机序列有均匀的游程分布
 - 游程指序列中相同符号的连续段,其前后均为异种符号
 - ·0 111 0000 10......

有长为3的1游程、长为4的0游程、长为1的1游程。一般要求其在周期内满足:同样长度的0游程和1游程的个数相等,或近似相等

- 3. 很高的线性复杂度:不能用级数较小的线性移位 寄存器LFSR近似代替
- 4. 用统计方法由密钥序列k₀k₁k₂...k_i...提取密钥生成器结构或种子密钥在计算上不可行

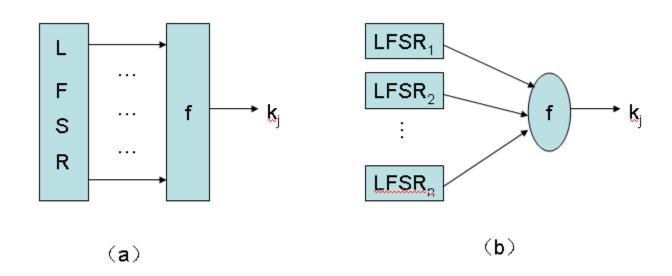
密钥流生成器的组成



- ❖按Rainer Rueppel理论,密钥生成器可分解成:
 - 驱动部分
 - 非线性组合部分

- 驱动部分:控制生成器的状态序列,为非线性组合部分提供统计性能良好的序列
 - 周期很大
 - 分布较随机
- **非线性部分**:将驱动部分提供的序列组合成密码特性 好的序列
 - 可隐蔽驱动序列与密钥k之间明显的依赖关系
- ❖目前密钥流生成器大都基于移位寄存器FSR
 - 基于移位寄存器的密钥流序列称为移位寄存器序列

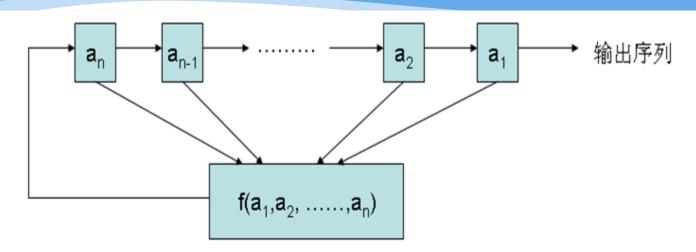
- ❖ 通常由线性移位寄存器(LFSR)和一个非线性组合 函数即布尔函数组合,构成一个密钥流生成器
 - (a) 由一个线性移位寄存器和一个滤波器构成
 - (b) 由多个线性移位寄存器和一个组合器构成



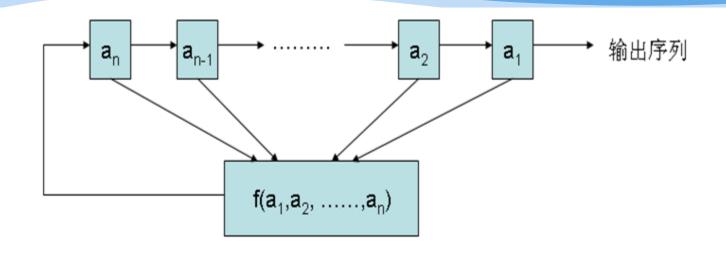
线性反馈移位寄存器序列

- ❖产生密钥流最重要的部件是线性反馈移位寄存器 (LFSR, Linear Feedback Shift Register), 主要基于以下原因:
 - 1. 非常适合硬件实现
 - 2. 能产生大的周期序列
 - 3. 能产生统计特性好的序列
 - 4. 能够应用代数方法进行很好的分析

反馈移位寄存器

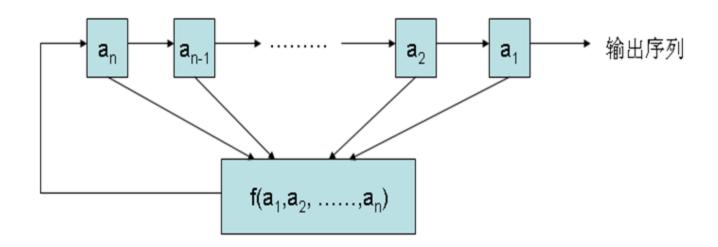


- ❖GF(2)上一个n级反馈移位寄存器由n个二元存储器与一个反馈函数f(a₁a₂...an)组成
 - 每个存储器称为移位寄存器的一级
 - 在任一时刻,这些级的内容构成该FSR的状态;对应于一个GF(2)上的n维向量,共有2ⁿ种可能的状态

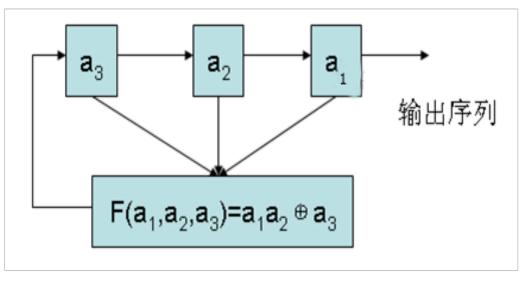


- 状态可用n长序列a₁, a₂, a₃, ..., a_n或n维行向量(a₁, a₂, a₃, ..., a_n)表示
- 每一级存储器a_i将其内容向下一级a_{i-1}传递,并根据存储器当前状态计算f(a₁, a₂, a₃, ..., a_n)作为a_n下一时间的内容

 ◆ 函数f(a₁, a₂, a₃, ..., a_n)是n元布尔函数, 称为反馈 函数; 函数值为0或1



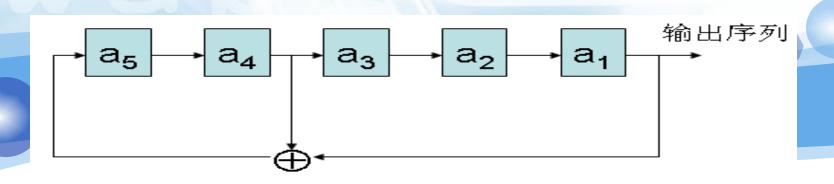
LFSR举例



一个3级反馈移位寄存器

状态	i(a₃a	输出	
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
••			

初始状态为 (a_1,a_2,a_3) =(1,0,1),输出可由上表求出,其输出序列为10111011101...,周期为4



❖设一个GF(2)上的5级反馈移位寄存器:

初始状态: $S_0 = (1, 0, 0, 1, 1)$.

反馈函数: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 \oplus x_4$

时刻	0	1	2	3	4	5
状态	1, 0, 0, 1, 1	0 , 0, 1, 1, 0	0 , 1, 1, 0, 1	1, 1, 0, 1, 0	1, 0, 1, 0, 0	0 , 1, 0, 0, 1
输出	1	0	0	1	1	0

* 反馈移位寄存器输出序列:

100110100100001010111101100011111100110...

S₃₁

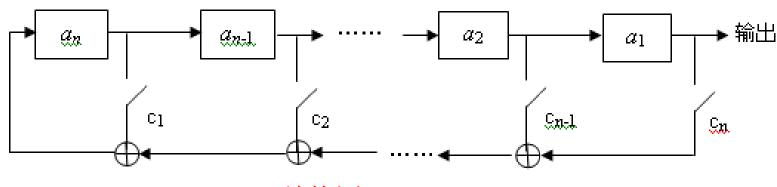
❖输出一个周期序列:周期为31=25-1

线性反馈移位寄存器 (LFSR)

- ❖ 如果反馈函数f(a₁, a₂, ..., aₙ)是a₁, a₂, ..., aₙ的线性函数, 则称为线性反馈移位寄存器 (LFSR)
- * LFSR的反馈函数f可写为

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = c_n a_1 \oplus c_{n-1} a_2 \oplus \oplus c_2 a_{n-1} \oplus c_1 a_n$$

其中c_i = 0或1



结构图

- n级LFSR最多有2n个不同的状态
 - 初始状态为零,则其状态恒为零
 - 若其初始状态非0,则其后继状态不会为0
- 因此n级LFSR的状态周期≤2n-1
- · 输出序列的周期与状态周期相等,所以**≤2**°-1
- 选择合适反馈函数可使序列周期达到最大值2ⁿ-1,
 周期达到最大值的序列称为m序列

LFSR的状态转移变换

□ 设线性反馈移位寄存器的反馈函数 为 $f(x_1,x_2,...,x_n) = -\sum_{i=1}^n c_i x_{n_i-i+1} \quad \alpha^i = (x_1,x_2,...,x_n)$ 为时刻i 的状态,令

 $\overline{A}\alpha^i = \overline{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$ 称 \overline{A} 为该LFSR的状态转移变换.

状态转移变换和状态转移矩阵

例 对于例2.1中的线性反馈移位寄存器, 其状态转移变换为:

$$\overline{A}$$
: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_2, x_3, x_4, x_1 + x_2)$

我们在 F_2^4 中取基:

$$\varepsilon_1 = (1,0,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0,0), \dots, \varepsilon_4 = (0,0,0,1)$$

从而 \overline{A} 在该组基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \overline{A}\varepsilon_1 \\ \overline{A}\varepsilon_2 \\ \overline{A}\varepsilon_2 \\ \overline{A}\varepsilon_3 \\ \overline{A}\varepsilon_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

若LFSR的反馈函数为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -(c_1 x_n + c_2 x_{n-1} + \dots + c_{n-1} x_2 + c_n x_1)$$

且在 F_a^n 中取定如下的标准基:

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \ \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \ \varepsilon_3 = (0, 0, 1, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

则n级线性反馈移位寄存器的状态转移矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_1 \end{pmatrix}$$

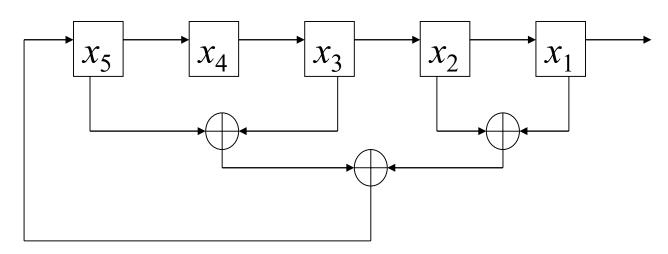
LFSR的特征多项式

口 设线性反馈移位寄存器的状态转移矩阵为A,则称多项式 f(x) = |xE - A| 为反馈移位寄存器的特征多项式,其互反多项式称为联接多项式.

于是
$$f(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & c_n \\ -1 & x & \cdots & 0 & c_{n-1} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x + c_1 \end{vmatrix}$$

$$= x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1} x + c_n$$

□ 例求下图所示二元域上的LFSR的特征多项 式与联接多项式.



特征多项式 $f(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$

联接多项式 $\overline{f}(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$

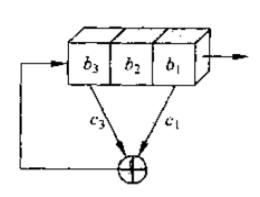
线性移位寄存器的一元多项式表示

❖ 设n级线性移位寄存器的输出序列 $\{a_i\}$ 满足递推关系 $a_{k+n} = c_1 a_{k+n-1} \oplus c_2 a_{k+n-2} \oplus ... \oplus c_n a_k, k≥1。将这种递推关系用一元高次多项式$

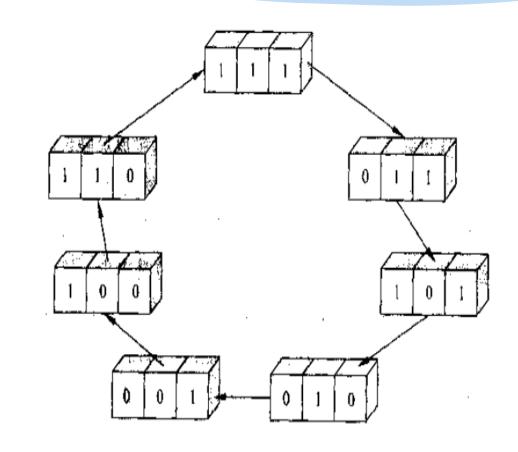
$$p(x) = 1 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n$$

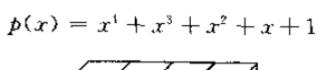
表示, 称该多项式为该LFSR的联接多项式

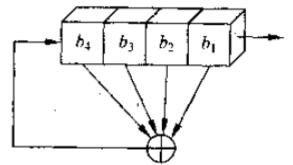
LFSR周期分析

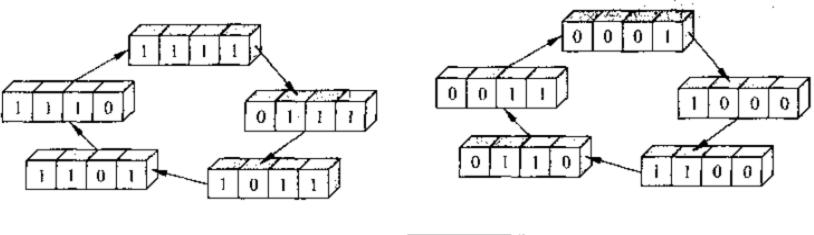


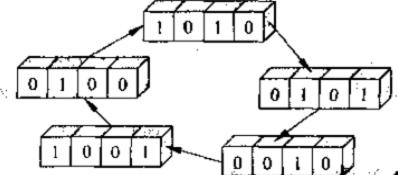
$$p(x) = x^3 + x + 1$$











定理: n级LFSR产生的序列有最大周期2ⁿ-1的必要 条件是其特征多项式为不可约的

定义: 若n次不可约多项式p(x)的阶为2ⁿ - 1,则称 p(x)是n次本原多项式

■ 使得p(x)|(xp-1)的最小p称为p(x)的

定理: 设{a_i}∈G(p(x)), {a_i}为m序列的**充要条件**是 p(x)为本原多项式

设n级线性移位寄存器的输出序列 {ai}满足递推关系

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} \oplus c_2 a_{n+k-2} \oplus \cdots \oplus c_n a_k \tag{*}$$

对任何 $k \geq 1$ 成立。这种递推关系可用一个一元高次多项式

$$p(x) = 1 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n$$

表示,称这个多项式为LFSR的联接多项式。

设n级线性移位寄存器对应于递推关系(*),由于 $a_i \in GF(2)$ (i=1,2,...,n),所以共有 2^n 组初始状态,即有 2^n 个递推序列,其中非恒零的有 2^n -1个,记 2^n -1个非零序列的全体为G(p(x))。

定义2-1

给定序列 $\{a_i\}$,幂级数 $A(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}$ 称为该序列的生成函数。

定理2-1

设 $p(x) = 1 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n$ 是GF(2) 上的多项式, 任一序列 $\{a_i\}$ 的生成函数A(x) 满足:

$$A(x) = \frac{\phi(x)}{p(x)}$$

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(c_{n-i} x^{n-i} \sum_{j=1}^{i} a_{j} x^{j-1} \right)$$

定理2-1 证明 ?

$$a_{n+1} = c_1 a_n \oplus c_2 a_{n-1} \oplus \cdots \oplus c_n a_1$$

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} \oplus c_2 a_n \oplus \cdots \oplus c_n a_2$$

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{i-1}$$

$$\cdots$$

两边分别乘以 x^n, x^{n+1}, \ldots ,再求和,可得

$$A(x) - (a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}) = c_1 x \Big[A(x) - (a_1 + a_2 x + \dots + a_{n-1} x^{n-2}) \Big]$$

$$+ c_2 x^2 \Big[A(x) - (a_1 + a_2 x + \dots + a_{n-2} x^{n-3}) \Big] + \dots + c_n x^n A(x)$$

移项整理得

注意在 GF(2)上有: a+a=0

p(x)|q(x) 的充要条件是 $G(p(x)) \subset G(q(x))$

证明:

若
$$p(x)|q(x)$$
, 可设 $q(x) = p(x)r(x)$, 因此

$$A(x) = \frac{\phi(x)}{p(x)} = \frac{\phi(x)r(x)}{p(x)r(x)} = \frac{\phi(x)r(x)}{q(x)}$$

所以若 $a_i \in G(p(x))$, 则 $a_i \in G(q(x))$, 即

$$G(p(x)) \subset G(q(x))$$

反之,若G(p(x)) \subset G(q(x)) ,则对于多项式 $\phi(x)$,存在序列 $a_i \in G(p(x))$ 以 $A(x) = \frac{\phi(x)}{p(x)}$ 为生成函数。特别的,对于多项式 $\phi(x)$ = 1存在序列 $a_i \in G(p(x))$ 以 为供成函数。由于G(p(x)) G(q(x)) ,序列 $a_i \in G(q(x))$,所以存在函数r(x) ,使得 $\{a_i\}$ 的生成函数也等于 , 从监 $\frac{1}{p(x)} = \frac{r(x)}{q(x)}$,即q(x) = p(x)r(x) ,所以p(x)|q(x) 。

上述定理说明:可用 n级LFSR产生的序列, 也可用级数更多的LFSR来产生。

定义2-2

设p(x)是GF(2)上的多项式,使 $p(x)|(x^p-1)$ 的最小p称为p(x)的周期或阶。

定理2-3

若序列 $\{a_i\}$ 的特征多项式p(x)定义在 GF(2) 上, p是p(x)的周期,则 $\{a_i\}$ 的周期r|p。

证明:

由p(x)周期的定义得 $p(x)|(x^p-1)$,因此存在q(x),使得 $x^p-1=p(x)q(x)$,又由p(x) $A(x)=\phi(x)$ 可以得到式子 (x^p-1) $A(x)=\phi(x)$ q(x) 。 因p(x)的次数不超过n 。

由 $x^p-1=p(x)q(x)$ 知 q(x) 的次数不超过p-n 。 又知 $\phi(x)$ 的次数不超过n-1,所以 (x^p-1) A(x)的次数不超过式 (p-n)+(n-1)=p-1 。 将 (x^p-1) A(x) 写成 $x^pA(x)-A(x)$,可看出对于任意正整数i都有 $a_{i+p}=a_i$ 。

设p=kr+t $(0 \le t < r)$,则 $a_{i+p}=a_{i+kr+t}=a_{i+t}=a_i$,所以 t=0,即r|p。

• 序列周期

输出序列的周期取决于寄存器的初始状态和反馈函数。 GF(2)上n级LFSR最多有2ⁿ个不同的状态,输出序列的 周期最多为2ⁿ-1

m序列

■ 周期达到最大值的序列称为m序列,是最长线性反馈移位寄存器序列(maximum length sequence)的简称。

m序列是一种典型的伪随机序列。在通信领域有着广泛的应用,如扩频通信、卫星通信的码分多址(CDMA),数字数据中的加密、加扰、同步、误码率测量等领域。

定义2-3

仅能被非0常数或自身的常数倍除尽,但不能被其它 多项式除尽的多项式称为即约多项式或不可约多项式。

定理2-4

设p(x)是n次不可约多项式,周期为m,序列 $a_i \in G(p(x))$,则 $\{a_i\}$ 的周期为m。

注: 设p(x)是GF(2)上的多项式,使p(x)|(x^p -1)的最小p称为p(x)的周期或阶。

证明:

设 $\{a_i\}$ 的周期为r,由定理2-3有r|m,所以 $r \le m$ 。 设A(x)为 $\{a_i\}$ 的生成函数 $A(x) = \frac{\phi(x)}{p(x)}$,即 $p(x)A(x) = \phi(x) \ne 0$, $\phi(x)$ 的次数不超过n-1。而

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{i-1} = a_1 + a_2 x + \dots + a_r x^{r-1} + x^r \left(a_1 + a_2 x + \dots + a_r x^{r-1} \right)$$

$$+ \left(x^r \right)^2 \left(a_1 + a_2 x + \dots + a_r x^{r-1} \right) + \dots = \frac{a_1 + a_2 x + \dots + a_r x^{r-1}}{1 - x^r}$$

$$= \frac{a_1 + a_2 x + \dots + a_r x^{r-1}}{x^r - 1}$$

:
$$A(x) = \frac{a_1 + a_2 x + \dots + a_r x^{r-1}}{x^r - 1} = \frac{\varphi(x)}{p(x)}$$

$$\therefore p(x)(a_1 + a_2x + \dots + a_rx^{r-1}) = \varphi(x)(x^r - 1)$$

因 p(x)是不可约的且 $\phi(x)$ 的次数不超过n-1,所以, $\gcd(p(x),\phi(x))=1$,因此 $p(x)|x^r$ -1。综上r=m。

定理2-5 n级LFSR产生的序列有最大周期2n-1的必要条件 是其特征多项式为不可约的。

证明:

设n级LFSR产生的序列周期达到最大 2^n -1,除0序列外,每一序列的周期由特征多项式惟一决定,而与初始状态无关。设特征多项式为p(x),若p(x) 可约,可设为p(x) = g(x) h(x),其中g(x)是不可约多项式,且次数k<n。由于 G(g(x)) \subset G(p(x)),而G(g(x))中序列的周期一方面不超过 2^k -1,另一方面又等于 2^n -1 ,这是矛盾的,所以p(x)是不可约多项式。

该定理的逆不成立。

例2-4 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 为 GF(2) 上的不可约多项式,这是因为一次多项式 x和x+1 都不能整除 ,因此任一三次多项式 也不能整除f(x)。而二次多项式有 x^2 , x^2+1 , x^2+x , x^2+x+1 。由x和x+1都不能整除f(x) 知 x^2 , x^2+1 , x^2+x 都不能整除f(x) ,二次不可约多项式 x^2+x+1 不能整除f(x)可直接验证。

以f(x)为特征多项式的LFSR的输出序列可由

$$a_k = a_{k-1} \oplus a_{k-2} \oplus a_{k-3} \oplus a_{k-4} \quad (k \ge 4)$$

和给定的初始状态求出,设初始状态为0001,则输出序列为00011000110001...,周期为5,不是m序列。

定义2-4

若n次不可约多项式p(x)的阶为 2^n-1 ,则称p(x)是n次本原多项式。

定理2-6

设 $\{a_i\} \in G(p(x))$, $\{a_i\}$ 为m序列的充要条件是p(x)为本原多项式。

证明:

若p(x)是本原多项式,则其阶为 2^n -1 ,由定理2-4得 $\{a_i\}$ 的周期等于 2^n -1 ,即 $\{a_i\}$ 为m 序列。

反之,若 $\{a_i\}$ 为m序列,即其周期等于 2^n -1,由定理2-5 知 p(x)是不可约多项式。由定理2-3知 $\{a_i\}$ 的周期 2^n -1整除 p(x)的阶,而p(x)的阶不超过 2^n -1,所以p(x)的阶为 2^n -1,即p(x)是本原多项式。

 $\partial P(x) = x^4 + x + 1$, 由于 $P(x)|(x^{15}-1)$, 但不存在小于15的常数l , 使得 $P(x)|(x^l-1)$, 所以P(x)的阶为15。类似于例2-4,P(x)的不可约性可由x , x+1 , x^2+x+1 都不能整除P(x)得到,所以P(x)是本原多项式。

若LFSR以p(x)为特征多项式,则输出序列的递推关系为 $a_k = a_{k-1} \oplus a_{k-4} \quad (k \ge 4)$

若初始状态为1001,则输出为

10010001111010110010001111010

周期为24-1=15,即输出序列为m序列。

m序列 $\{a_i\}$ 特性

1. 均衡特性(平衡性)

m序列每一周期中1的个数比0的个数多1个,0出现2n-1-1次,1出现2n-1次。

2. 游程特性(游程分布的随机性)

m序列中,状态"0"或"1"连续出现的段称为游程。游程中"0"或"1"的个数称为游程长度。

m序列的一个周期(2 n -1)中,游程总数为 2 $^{n-1}$,"0"、"1"各占一半。对 $1 \le i \le n-2$ 长为i的游程有 2^{n-i-1} 个,长为n-1的0游程一个,长为n的1游程一个。

3. 移位可加性

两个彼此移位等价的相异m序列,按模2相加所得的序列仍为m序列,并与原m序列等价。 $\{a_i\}$ 的自相关函数为:

$$R(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k_l + k_{l+j}} = \begin{cases} 1, & \tau = 0\\ -1\\ 2^n - 1 \end{cases}, \quad 0 < \tau \le 2^n - 2$$

由以上m序列的性质可以看出:n阶m序列满足Golomb随机性假设。而且当n并不大时,通信伙伴生成n阶m序列的复杂度很小,得到的最小周期2ⁿ-1却极大。如此看来,m序列似乎非常适合用作密钥流。

其实不然,如果n阶线性反馈移位寄存器序列用作密钥流,攻击者Eve截获了密文段 $c_1c_2c_3...$ c_{2n} ,并知道了对应的明文段 $m_1m_2m_3...$ m_{2n} ,由此可计算出了对应的废弃密钥段 $k_1k_2k_3...$ k_{2n} 。

实际上,当Eve获得了n阶线性反馈移位寄存器序列的任何一段的连续2n个比特 $k_{j+1}k_{j+2}k_{j+3}$... k_{j+2n} ,他就获得了关于抽头系数 $\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ 的以下方程组:

 $k_{l}=c_{1}k_{l-1}\oplus c_{2}k_{l-2}\oplus ...\oplus c_{n}k_{l-n},$ 其中l=j+n+1, j+n+2, ..., j+2n。

$$\begin{bmatrix} k_{j+n} & k_{j+n-1} & \cdots & k_{j+1} \\ k_{j+n+1} & k_{j+n} & \cdots & k_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{j+2n-1} & k_{j+2n-2} & \cdots & k_{j+n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{j+n+1} \\ k_{j+n+2} \\ \vdots \\ k_{j+2n} \end{bmatrix}$$

• 攻击的实例

- 设一个流密码算法使用了一个GF(2)上的3级线性反馈移位寄存器作为密钥流生成器,已知明文0100010001的密文为1010110110,试破译该密码算法。
- 步骤:
 - (1)明文为0100010001, 密文为1010110110, 可以得出密钥序列

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0, a_5 = 1, a_6 = 0$$

(2)求反馈函数

 $0100010001 \oplus 1010110110 = 1110100111$

根据反馈函数的性质

$$\begin{cases} a_4 \equiv (c_3 a_1 + c_2 a_2 + c_1 a_3) \bmod 2 \\ a_5 \equiv (c_3 a_2 + c_2 a_3 + c_1 a_4) \bmod 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} c_3 & c_2 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} c_3 & c_2 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow f(a_1, a_2, a_3) \equiv (a_1 + a_3) \bmod 2$$

以上事实说明,当Eve获得了n阶**线性反馈移位寄存器序列的任意连续**2n个比特,Eve就获得了整个密钥流。

实际上,对线性反馈移位寄存器序列还有更为有效的攻击方法。当Eve不知道阶数n时,他还可以进行测试。这种测试攻击方法被称为序列的综合。

线性反馈移位寄存器序列的综合

定理 如果一个比特流是一个周期序列,则它一定是线性反馈移位寄存器序列。

证明 设比特流k的最小周期是N。则

 $l>N后, k_l=k_{l-N}$ 。

因此比特流k为N阶线性反馈移位寄存器序列,抽头系数为 $\{c_1,c_2,\ldots,c_N\}$ = $\{0,0,\ldots,0,1\}$ (即极小多项式 f(x)= $1+x^N$),初始状态为 $k_1k_2k_3\ldots k_N$ 。

定义: 一个周期序列作为一个线性反馈移位寄存器序列, 它的最小阶数称为它的线性复杂度。对应于这个阶的特征多项式称为该序列的极小多项式.

注意: 一个周期序列作为一个线性反馈移位寄存器序列,可以有很多不同的阶数,其中它的最小周期就是它的一个阶数。因此,周期序列的线性复杂度一定不超过它的最小周期。

所谓序列的综合,就是寻找周期序列的线性复杂度n,并且求出极小多项式f(x)。序列的综合的两种最著名的算法是Berlekamp-Massey算法和Games-Chan算法。

线性反馈移位寄存器序列的小结

线性反馈移位寄存器序列能够实现:

- 小的计算量(n阶线性递归生成,通常n不大);
- 极大的最小周期(对于m序列,最小周期为2ⁿ-1);
- 良好的伪随机性(对于m序列, Golomb随机性假设成立)。

然而小的计算量得到小的线性复杂度(对于m序列, 线性复杂度为n),很容易由短的一段(对于m序列, 由长度为2n的一段)推断出整个序列(用B-M算法)。 因此,线性反馈移位寄存器序列不能作为密钥流。

能否让线性复杂度很大?

兼顾小的计算量和大的线性复杂度,需要使用非 线性的生成方式。

非线性组合序列

域GF(2)上的n维函数 (n维布尔函数) n维布尔函数是这样的函数

$$y=g(x_1, x_2, ..., x_n)$$
:

- n个自变量x₁, x₂, ..., x_n取值均为0和1;
- 因变量y取值为0和1。

n维布尔函数的代数正规型:

$$y=g(x_{1}, x_{2}, ..., x_{n})$$

$$=a(0)$$

$$+a(1)x_{1}+a(2)x_{2}+...+a(n)x_{n}$$

$$+a(1, 2)x_{1}x_{2}+...+a(n-1, n)x_{n-1}x_{n}$$

$$+a(1, 2, 3)x_{1}x_{2}x_{3}+...+a(n-2, n-1, n)x_{n-2}x_{n-1}x_{n}$$

$$+...$$

$$+a(1, ..., n)x_{1}...x_{n}$$

其中常数 $\{a(0), a(1)\sim a(n), a(1, 2)\sim a(n-1, n), a(1, 2, 3)\sim a(n-2, n-1, n), ..., a(1, ..., n)\}$ 称为系数,它们取0或1为值。

使得系数不为0的项的最高次数称为n维布尔函数的次数。

关于n维布尔函数的注解: $x_1^2 \equiv x_1$, 因此只有混合高次项; 又因此最高次数不超过n; 系数组 $\{a(0)\sim a(1,...,n)\}$ 中一共有 2^n 个系数; 函数 $g(x_1,x_2,...,x_n)$ 与系数组相互唯一。

当 $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ 只含有一次项时,称g为线性函数; 当 $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ 只含有0次项和一次项时,称g为仿射函数; 当 $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ 含有高次项时,称g为非线性函数。

非线性前馈序列

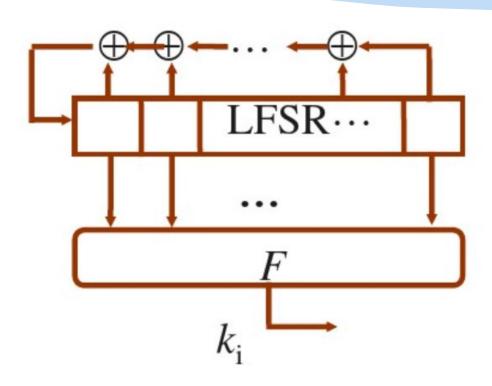
若比特流k由如下的方式生成:

- (1) 选择n阶m序列 $s=s_1s_2s_3...$,其极小多项式为f(x),其初始状态为 $s_1s_2s_3...s_n$;
- (2) 对每个l>0, $k_l=g(s_l, s_{l+1}, ..., s_{l+n-1})$ 。 其中 $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ 为非线性的n维布尔函数。

则

- 称比特流k为非线性前馈序列。
- 称m序列s为驱动序列。

非线性前馈序列



当非线性前馈序列用作密钥流时,通常有三个部分可能作为通信伙伴的原始密钥:初始状态,极小多项式,非线性布尔函数。有以下三种不同的用法:

- (1) (早期常用)原始密钥是初始状态,而将极小 多项式和非线性布尔函数公开。此时原始密钥最短,但 需要精心设计非线性布尔函数。
- (2) (不常用)原始密钥是初始状态和极小多项式, 而将非线性布尔函数公开。此时原始密钥长一些,但对 非线性布尔函数的要求低一些。
- (3) (很少用)原始密钥是初始状态、极小多项式、 非线性布尔函数。此时原始密钥最长,但对非线性布尔 函数的要求最低。

为什么g必须是非线性函数?

如果g是线性函数,则前馈序列k还是n阶m序列,并且与驱动序列s有相同的极小多项式(不给出证明)。

如果g是仿射函数,则前馈序列k是n阶m序列的补序列。

希望:非线性前馈序列的线性复杂度极大,应该与2ⁿ具有相同的数量级。

前馈序列k的伪随机性如何?

 2^{n} -1是前馈序列k的一个周期。换句话说,前馈序列k的最小周期必然是 2^{n} -1的因子。

希望:前馈序列k的最小周期就是2n-1(而不是2n-1的真因子)。

希望:前馈序列k是0-1基本均衡的,即在一个最小周期内0和1的数量近似相等。

定义 如果n维布尔函数 $y=g(x_1, x_2, ..., x_n)$ 满足: 当自变量 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 跑遍 2^n 个不同的值时, y取值为0的机会和y取值为1的机会相等(各为 2^{n-1} 次),则称g为均衡函数。

定理 如果前馈函数是均衡函数,则

- (1) 前馈序列k的最小周期就是2n-1(而不是2n-1的真因子)。
- (2) 前馈序列k是0-1基本均衡的,即在一个最小周期内0和1的数量近似相等。

前馈序列最难设计的是游程分布的伪随机性和自相关 的伪随机性。无论如何,需要精心地设计非线性布尔函数g。

非线性组合序列

若比特流k由如下的方式生成:

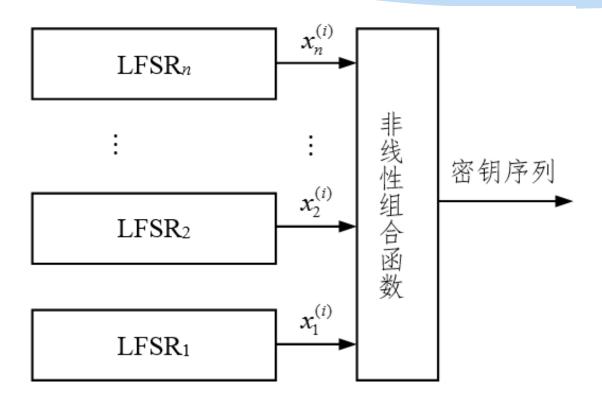
- (2) 对每个1>0,

$$k_l = g(s^{(1)}_l, s^{(2)}_l, ..., s^{(M)}_l)$$

其中 $g(x_1, x_2, ..., x_M)$ 为非线性的M维布尔函数。

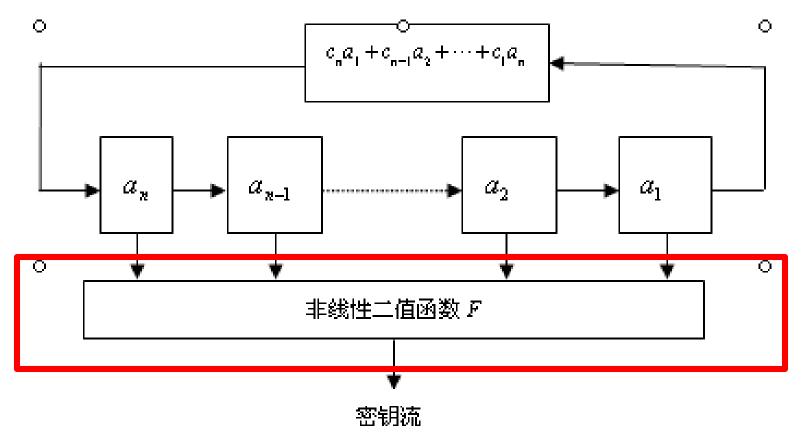
则

- ▶ 称比特流k为非线性组合序列。
- \blacktriangleright 称M维布尔函数 $g(x_1, x_2, ..., x_M)$ 为组合函数。
- ▶ 称M个n阶m序列s(i)为驱动序列。



非线性组合部分

❖ 基于LFSR的序列密码(对一个LFSR进行非线性组合):

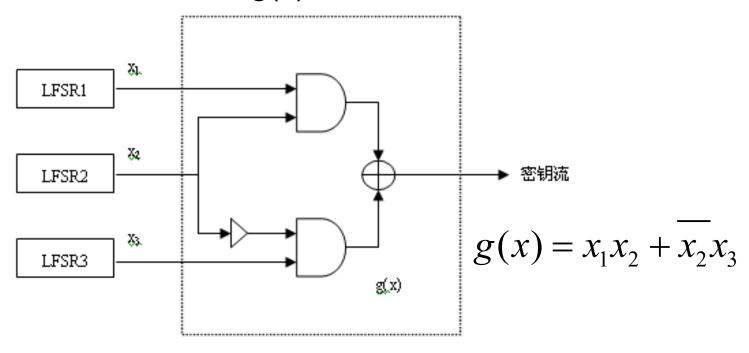


2023/2/21

常见的基于LFSR的密钥序列发生器

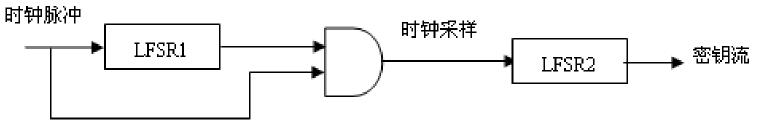
1. Geffe发生器

■ 由三个线性反馈移位寄存器[LFSR1、LFSR2和LFSR3] 以及一个非线性函数g(x)组成



2. 钟控发生器

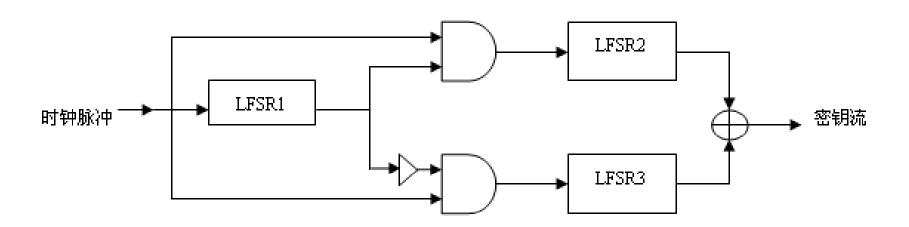
- 由控制序列(由一个或多个LFSR来控制生成)的当前 值来决定采样序列寄存器移位次数
- 最基本的钟控发生器用一个LFSR控制另外一个LFSR的移位时钟脉冲,根据时钟脉冲的高低控制输出



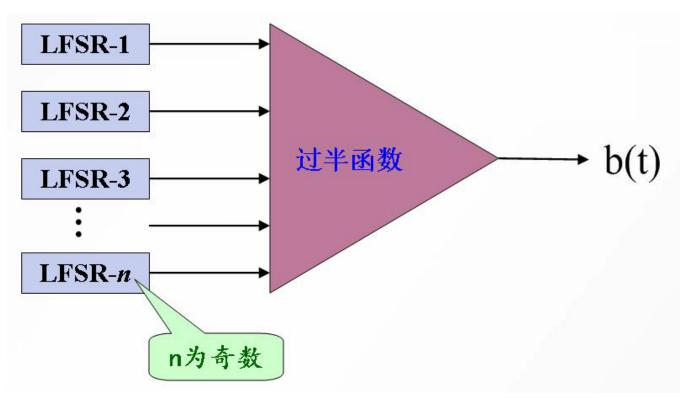
- 当LFSR1输出1时,移位脉冲通过与门使LFSR2进行一次移位;
- 当LFSR1输出0时,移位脉冲无法通过与门影响LFSR2, 因此LFSR2重复输出前一位

3. 交错停走式发生器

也是一种钟控发生器,使用了三个不同级数的 LFSR



4. 门限发生器



2023/2/21

综合设计与使用

当前国际主流的流密码标准通常有以下结构:

- 非线性反馈+线性前馈;(例如Trivium)
- (非线性反馈,线性反馈)并行+非线性前馈;(例如Grain)
- 线性反馈+钟控+非线性前馈;
- 线性反馈+带记忆的非线性前馈; 等等。
- 线性反馈>#线性前馈

当前,流密码的使用:

- 1. Alice和Bob协商了一个密钥种子;
- 2. Alice (Bob)向Bob (Alice)公开发送一个初始 化向量;然后以(密钥种子,初始化向量)作为原 始状态,共同将密钥流生成器递归1000步;然后以 此时的状态作为初始状态,Alice (Bob)加密第一 段消息,Bob (Alice)解密第一段消息;
- 3.

注解

- 密钥种子是秘密的, 在多次加密/解密中保持不变;
- 初始化向量是公开发送的,每次加密/解密都要临时 选择;
- 这样使用的目的是:
 - (1) 避免差错的扩散;
 - (2) 避免敌人截获长的密钥段。

常见流密码算法简介—RC4

- ❖ RC4: 由MIT的Ron Rivest于1987年设计的、可变密钥长度、面向字节操作的、使用最为广泛的的序列密码之一;分析显示该密码的周期大于10¹⁰⁰
- ❖ RC4是一个典型的基于非线性数组变换的序列密码。 它以一个足够大的数组为基础,对其进行非线性 变换,产生非线性的密钥流序列
- **☆优点:容易用软件实现,加解密速度快**(大约比 DES快10倍)

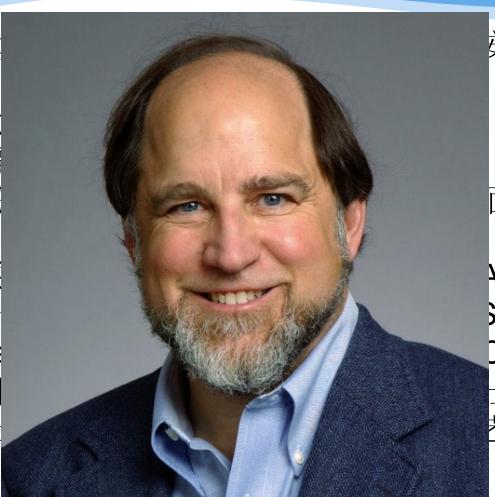
2023/2/21

Ron Rivest

- •MIT计 始人
- •耶鲁大
- •斯坦福
- •在密码 献
- 最重要 教授)

Adlema

•美国国协会院:



安全公司的共同创

面做出了突出贡

Adleman(MIT的 Shamir、 CM)颁发的<mark>图灵奖</mark>

士,美国计算机 艺术与科学院院士

RC4算法描述

- ❖RC4算法的大小根据参数n的值而变化,通常n=8, 这样RC4可生成256 (2⁸) 个元素的数据表S: S₀, S₁, S₂, ..., S₂₅
- ❖种子密钥长度为1~256个字节(8~2048比特)的可变长度,用于初始化256个字节的初始向量S
- ❖ RC4有两个主要算法:
 - 密钥调度算法 (KSA)
 - 伪随机数生成算法 (PRGA)

2023/2/21

RC4的基本思想

❖ 根据种子密钥,利用密钥调度算法对数据表S进 行重新排列

❖利用伪随机数生成算法,从重新排列的数据表S 中取出一个字节

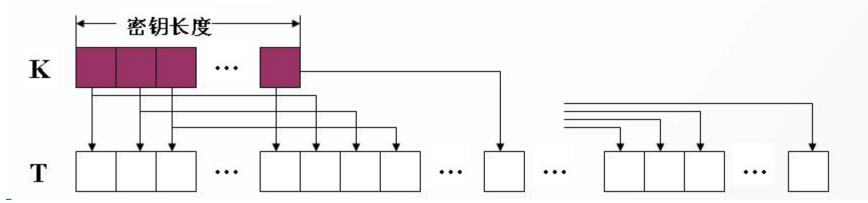
❖ 每取出一个字节,数据表S将发生变化

数据表S的初始状态

初始化S,即S(i):=i(一个字节),0≤i≤255。

S 0 1 2 3 253 254 255

用主(种子)密钥K按字节填充另一个T表,即T(i):=K(i mod keylen),0≤i≤255。



数据表S的初始变换

```
j:=0;
               for i := 0 to 255 do
                                                                 S[j]
                  begin
                    j := (j + S[i] + T[i]) \pmod{256};
                     swap(S[i], S[j]); // 交换S(i)和S(j)的内容;
                  end
                                     0~255
T
                          j=j+S[i]+T[i]
S
```

2023/2/21

密钥流的生成

```
i,j:=0
                                while (true)
                                  begin
                                    i = i + 1 \pmod{256};
                                    j := j + S[i] \pmod{256};
                                    swap(S[i], S[j]);
                                    t := S[i] + S[j] \pmod{256};
                                    k := S[t];
                                 end
                        j=j+S[i]
S
                                  t=S[i]+S[j]
```

RC4算法说明

- ❖ 加密时,将k的值与明文字节异或;解密时,将k的值与密文字节异或
- ❖ 为保证安全强度,目前的RC4至少使用128位密钥
- * RC4算法可看成一个有限状态自动机,由S表和i,j索引组成RC4的一个状态: $T = (S_0, S_1, ..., S_{255}, i, j)$ 。对状态T进行非线性变换,产生新的状态,并输出密钥序列中的一个字节k。大约有 2^{1700} (256! * 2562)种可能状态
- ❖ 用更大的数据表S和字长来实现这个思想是可能的, 即定义16位RC4

举例说明

假如使用3位(从0到7)的RC4,其操作是对8取模(而不是对256取模)。数据表S只有8个元素,初始化为:

选取一个密钥,该密钥是由0到7的数以任意顺序组成的。例如选取5、6和7作为密钥。该密钥如下填入密钥数据表中:

密钥调度算法KSA (举例)

然后利用如下循环构建实际的S数据表:

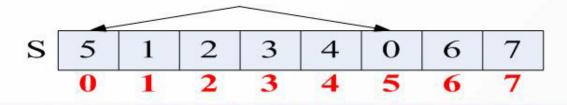
for i=0 to 7 do

$$j:=(j+s(i)+k(i)) \mod 8;$$

该循环以j=0和i=0开始。使用更新公式后j为:

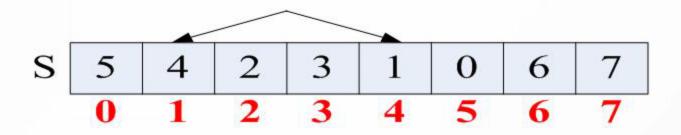
$$j=(0+S(0)+K(0)) \mod 8=5$$

因此,S数据表的第一个操作是将S(0)与S(5)互换。



索引i加1后,j的下一个值为:

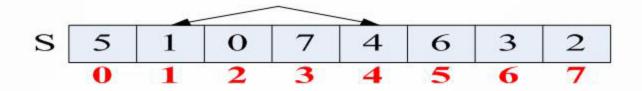
j=(5+S(1)+K(1)) mod 8=(5+1=6) mod 8=4 即将S数据表的S(1)和S(4)互换:



当该循环执行完后,数据表S就被随机化:

伪随机数生成算法PRGA (举例)

这样数据表S就可以用来生成随机的密钥流序列。从j=0和i=0开始, RC4如下计算第一个密钥字:



然后如下计算t和k:

第一个密钥字为6,其二进制表示为110。反复进行该过程,直到生成的 二进制的数量等于明文位的数量。

RC4应用举例

❖RC4目前使用中

- SSL(安全套接字)中广泛使用
- WEP(Wired Equivalent Privacy:有线对等保密)
 IEEE 802.11
- Microsoft Windows
- WPS Office
- Lotus Notes(世界领先的企业级通讯、协同工作及 Internet/Intranet平台; IBM公司)

RC4应用举例

中国第一大电子邮件服务商

163 网易免费邮 mail.163.com

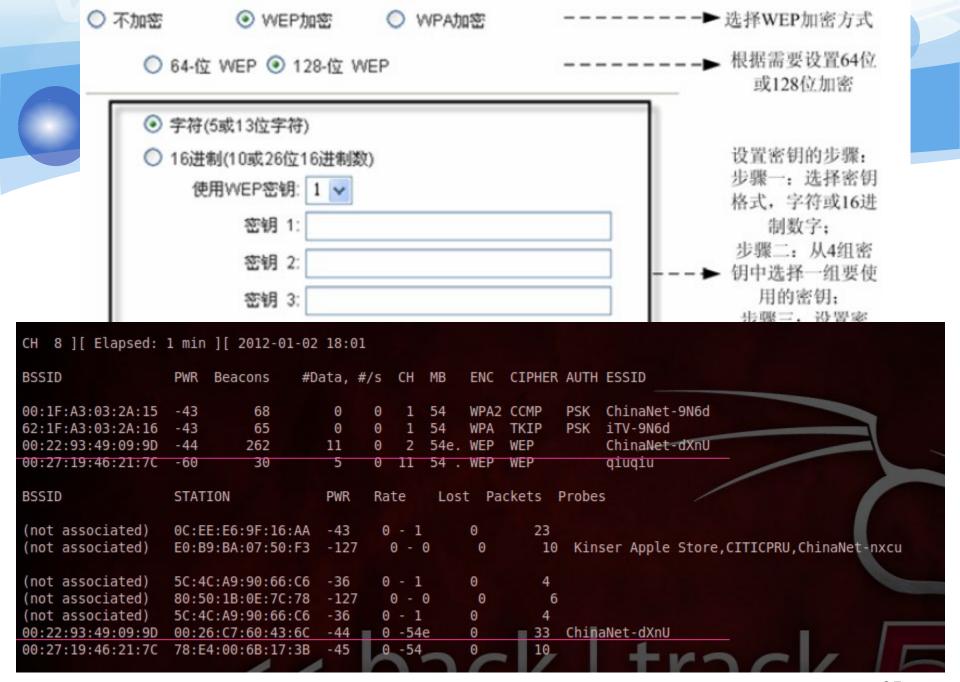
126 网易免费邮 www.126.com

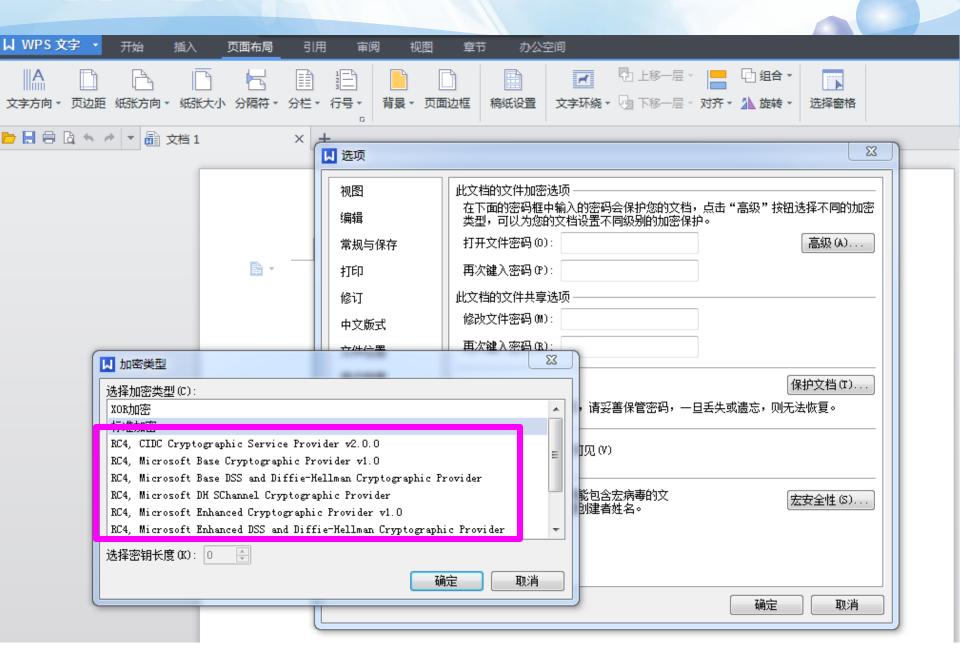
yeah.net

◎ 网易手机号码邮箱

登录163免费邮箱



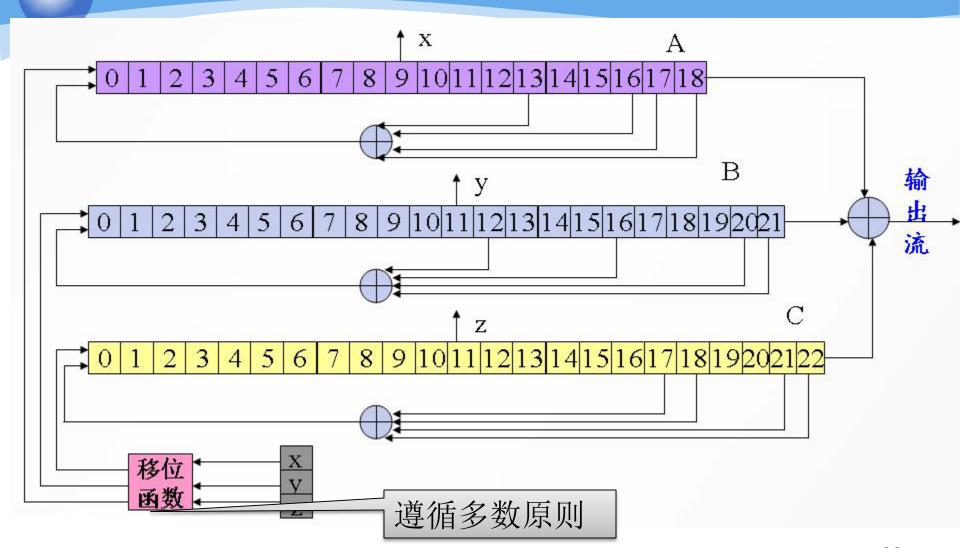




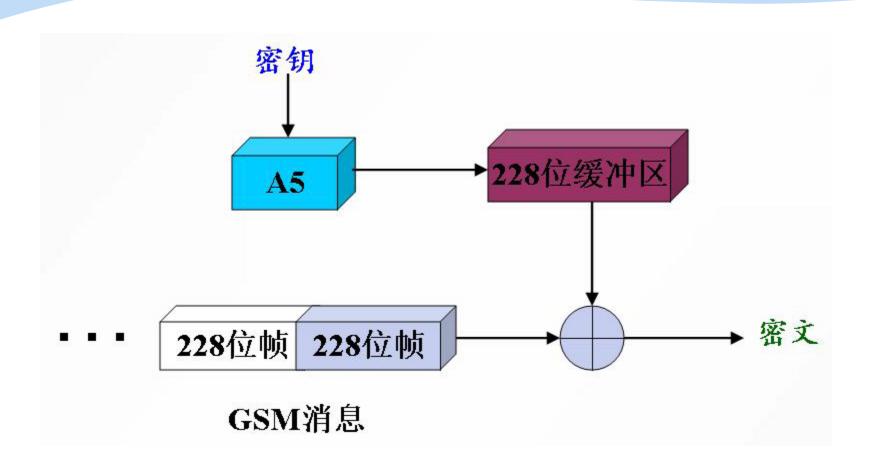
常见流密码算法简介—A5

- ❖ A5算法已被应用于GSM通信系统中,用于加密从手机到基站的连接,以保护语音通信。一个GSM语言消息被转换成一系列的帧,每帧长228位,每帧用A5进行加密
- ❖ A5算法主要由三个长度不同的线性移位寄存器组成,即A,B,C。其中A有19位,B有22位,C有23位
- ❖ 移位由时钟控制的,且遵循"择多"的原则。即从每个寄存器中取出一个中间位,三个数中占多数的寄存器参加移位,其余的不移位。
 - 比如取出的三个中间位中有两个为"1",则为"1"的寄存器进行一次移位,为"0"的不移。反过来,若三个中间位中有两个为"0",则为"0"的寄存器进行一次移位,而为"1"的不移

A5算法示意图



GSM中使用A5流密码算法



A5的安全性

❖ 2000年: Alex Biryukov、Adi Shamir和David Wagner展示了一种攻击,在几分钟内就从小的已知明文中找到密钥,但它还需要一个2⁴₺的预处理过程

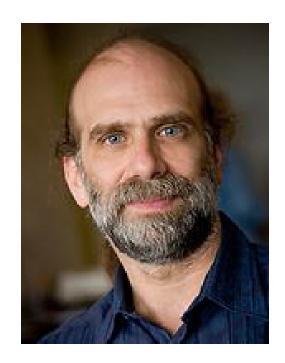
❖ 2003年: Ekdahl和Johannson可以运用2到5分钟的明文记录在几分钟内破解A5

A5算法的创建者



Ross Anderson

http://www.cl.cam.ac.uk/~rja14/



Bruce Schneier

http://www.schneier.com/

其他序列密码

- ❖最优软件加密算法 (SEAL, Software Encryption Algorithm)
 - 1993年由IBM公司的Rogaw和Coppersmith设计
- *SNOW
 - 2000年由Partik Ekdahl和Thomas Johansson设计
- **❖PKZIP算法**
 - 广泛用于计算机文档数据压缩程序
- **❖WAKE算法**
 - 字自动密钥加密算法,由David Wheeler设计

序列密码相对于分组密码的优点

- 在硬件实施上,序列密码的速度一般要比分组密码快,而 且不需要有很复杂的硬件电路。
- 在某些情况下(例如某些电信上的应用),当缓冲不足或 必须对收到字符进行逐一处理时,序列密码就显得更加必 要和恰当。
- 序列密码有较理想的数学分析。
- 序列密码能较好地隐藏明文的统计特性。

本章小结

- ❖序列密码算法的基本概念
- *密钥流生气器的基本设计方法
- ❖LFSR的基本结构和性质
- ❖非线性组合部分
- *常见序列密码算法介绍
 - RC4—基于非线性数组变换
 - A5—基于LFSR